

# Lista de Revisão

Nome – DRE

Álgebra Linear Aplicada - 2023.1

## Sala 1

Calcule:

$$\min_x \|a - x b\|^2$$

onde:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a_0, a_1, a_2, x \in \mathbb{R}$$

## Sala 2

Calcule:

$$\min_x \|a - x b\|^2$$

onde:

$$a, b \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}$$

## Sala 3

(Regressão Rigde) Calcule:

$$\min_x \|A x - b\|^2 + \lambda \|x\|^2$$

onde:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## Sala 4

Se matrix  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tem condicionamento  $10^3$ . Qual é condicionamento da matriz  $A^T A$ ? O novo condicionamento é pior ou melhor do que a de  $A$  para se usar no computador?

Lembrete:  $\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_N}$

## Sala 5

Qual seria a saída do algoritmo K-means na notação matricial para esse conjunto de pontos com  $K = 2$ ?

$$a_1 := (0, 0)$$

$$a_4 := (-3, 0)$$

$$a_2 := (0, 1)$$

$$a_3 := (8, 4)$$

$$a_5 := (9, 3)$$

## Sala 6

O float do seu computador tem erro de  $10^{-8}$  e você só pode cometer erros na segunda casa decimal. Qual é um condicionamento de  $A$  problemático para você?

## Sala 7

Como os pontos  $a_1, \dots, a_{10}$  estão distribuídos em  $\mathbb{R}^2$ , se o seu dendograma é:

TODO: *incluir desenho*

## Sala 8

(Coeficiente de Rayleigh) Calcule:

$$\max_x \frac{x^T A x}{x^T x}$$

onde:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A = A^T \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

## Lista 1

Num país politicamente instável, 30% dos defensores da república passam a apoiar a monarquia a cada ano e 20% dos defensores da monarquia passam a apoiar a república a cada ano. Portanto, denotando por  $r_k$  e  $m_k$  o número de republicanos e monarquistas, respectivamente, no ano  $k$ .

- (a) Qual é o código para calcular  $r_k$  e  $m_k$ ?
- (b) Sabendo que hoje metade da população apoia a república, em 10 anos qual será o percentual que apoia a república?
- (c) A longo prazo qual será o percentual de republicanos e monarquistas?

## Lista 2

Sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é definida pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{t+1} &= F_t + F_{t-1}\end{aligned}$$

Os 13 primeiros números da sequência são 0, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Esta famosa sequência tem uma profunda conexão com o número irracional  $\phi$ , conhecido como Proporção Áurea. Esta proporção possui a seguinte propriedade geométrica:

TODO: *incluir desenho*

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{a+b}{a}$$

- (a) Seja

$$v = \begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \end{bmatrix}$$

um vetor cuja primeira coordenada é um elemento da sequência e a segunda coordenada é o elemento seguinte. Determine qual é a matriz  $A$  que avança o vetor  $v$  ao longo da sequência, ou seja,

$$A v = A \begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{t+1} \\ F_{t+2} \end{bmatrix}$$

- (b) Determine os autovetores e autovalores da matriz  $A$ . Sabendo que o resultado da aplicação repetida de uma transformação linear tende ao autovetor de maior autovalor associado daquela transformação (*Método da Potência*), escreva em Português o que os autovetores e autovalores nos dizem sobre a Sequência de Fibonacci e sua relação com a Proporção Áurea.
- (c) Dada a lista de números da Sequência de Fibonacci acima, confira se as conclusões às quais você chegou no item anterior se verificam.

## Lista 3

População de bactérias.

A população de uma certa espécie de bactéria pode ser compreendida da seguinte maneira. Existem bactérias novas, maduras e velhas. A cada mês:

- (0) 80% das bactérias novas chegam à maturidade, e 20% morrem;
  - (1) 50% das bactérias maduras tornam-se velhas, e 50% morrem;
  - (2) 100% das bactérias velhas morrem;
  - (3) Uma a cada duas bactérias maduras geram uma nova bactéria;
  - (4) Uma a cada cinco bactérias velhas geram uma nova bactéria.
- (a) Modele o sistema populacional descrito acima – ou seja, determine o significado de cada coordenada do vetor que representa a população em um dado mês, e a matriz que representa a transição de um mês para o seguinte.

## Lista 8

Sejam

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine uma aproximação para  $\frac{z_1}{z_2}$ , tal que  $z = A^{1\,000\,000} x$ .