Lista de Revisão

Daniel Kiyoshi Hashimoto Vouzella de Andrade – 119025937

Álgebra Linear Aplicada - 2023.1

Sala 1

Calcule:

$$\min_x \|a - x\ b\|^2$$

onde:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{e} \quad a_0, a_1, a_2, x \in \mathbb{R}$$

Da questão 2, foi calculado o mínimo para a e b arbitrários:

$$a^T a - \frac{(b^T a)^2}{b^T b}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \frac{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right)^2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \frac{\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right)^2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - \frac{(a_0 + a_1 + a_2)^2}{3}$$

$$\frac{3\ a_0^2 + 3\ a_1^2 + 3\ a_2^2 - (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2\ a_0\ a_1 + 2\ a_0\ a_2 + 2\ a_1\ a_2)}{3}$$

$$\frac{2\ a_0^2 + 2\ a_1^2 + 2\ a_2^2 - 2\ a_0\ a_1 - 2\ a_0\ a_2 - 2\ a_1\ a_2}{3}$$

Sala 2

Calcule:

$$\min_x \|a - x\ b\|^2$$

onde:

$$a, b \in \mathbb{R}^n \qquad \textbf{e} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&\min_x \|a - x\ b\|^2 \\
&\min_x (a - x\ b)^T (a - x\ b) \\
&\min_x a^T a - x\ b^T a - x\ a^T b + x^2\ b^T b \\
&\min_x a^T a - x\ b^T a - x\ b^T a + x^2\ b^T b \\
&\min_x a^T a - 2\ x\ b^T a + x^2\ b^T b
\end{aligned}$$

Derivando expressão interna de min em relação à x e igualando a 0 (para achar pontos críticos):

$$\begin{aligned}
&-2\ b^T a + 2\ x\ b^T b = 0 \\
&2\ x\ b^T b = 2\ b^T a \\
&x\ b^T b = b^T a \\
&x = \frac{b^T a}{b^T b}
\end{aligned}$$

Dessa forma o mínimo é:

$$\begin{aligned}
&a^T a - 2\ x\ b^T a + x^2\ b^T b \\
&a^T a - 2\ \frac{b^T a}{b^T b}\ b^T a + \left(\frac{b^T a}{b^T b}\right)^2\ b^T b \\
&a^T a - 2\ \frac{(b^T a)^2}{b^T b} + \frac{(b^T a)^2}{b^T b} \\
&a^T a - \frac{(b^T a)^2}{b^T b}
\end{aligned}$$

Sala 3

(Regressão Rigde) Calcule:

$$\min_x \|A\ x - b\|^2 + \lambda\ \|x\|^2$$

onde:

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad , \qquad b \in \mathbb{R}^m \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad \textbf{e} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&\min_x \|A\,x - b\|^2 + \lambda\,\|x\|^2\\
&\min_x (A\,x-b)^T(A\,x-b) + \lambda\,x^T x\\
&\min_x x^T A^T A\,x - b^T A\,x - x^T A^T b + b^T b + \lambda\,x^T x\\
&\min_x x^T A^T A\,x - (A^T b)^T\ x - (A^T b)^T\ x + b^T b + \lambda\,x^T x\\
&\min_x x^T A^T A\,x - 2\ (A^T b)^T\ x + \lambda\,x^T x
\end{aligned}$$

Derivando expressão interna de min em relação à x e igualando a 0 (para achar pontos críticos):

$$\begin{aligned}
&2\ A^T A\,x - 2\ A^T b + 2\ \lambda\,x = 0\\
&A^T A\,x - A^T b + \lambda\,x = 0\\
&A^T A\,x + \lambda\,x = A^T b\\
&(A^T A + \lambda\ I)\ x = A^T b
\end{aligned}$$

Agora basta resolver o sistema linear.

Sala 4

Se matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ tem condicionamento 10^3. Qual é condicionamento da matriz $A^T A$? O novo condicionamento é pior ou melhor do que a de A para se usar no computador?

Lembrete: $\mathrm{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_N}$

$$\begin{aligned}
A &= U\ \Sigma\ V^T\\
A^T A &= (U\ \Sigma\ V)^T (U\ \Sigma\ V^T)\\
&= V^{TT}\ \Sigma^T\ U^T\ U\ \Sigma\ V^T\\
&= V\ \Sigma^T\ \Sigma\ V^T\\
&= V\ \Sigma\ \Sigma\ V^T\\
A^T A &= V\ \Sigma^2\ V^T
\end{aligned}$$

Como V é uma matriz ortonormal e V^T é uma matriz ortonormal, calculamos o SVD de $A^T A$. Assim temos que:

$$\mathrm{cond}(A^T A) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_N}\right)^2 = \mathrm{cond}(A)^2$$

Sala 5

Qual seria a saída do algorítmo K-means na notação matricial para esse conjunto de pontos com $K = 2$?

$$a_1 := (0,0) \qquad a_4 := (-3,0)$$
$$a_2 := (0,1)$$
$$a_3 := (8,4) \qquad a_5 := (9,3)$$

Observe que os pontos médios dos clusters são:

$$m_{1,2,4} = (-1, 0.333) \qquad \text{e} \qquad m_{3,5} = (8.5, 3.5)$$

A saída seria:

$$\begin{bmatrix} -1 & 8.5 \\ 0.333 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 8.5 & -1 & 8.5 \\ 0.333 & 0.333 & 3.5 & 0.333 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Sala 6

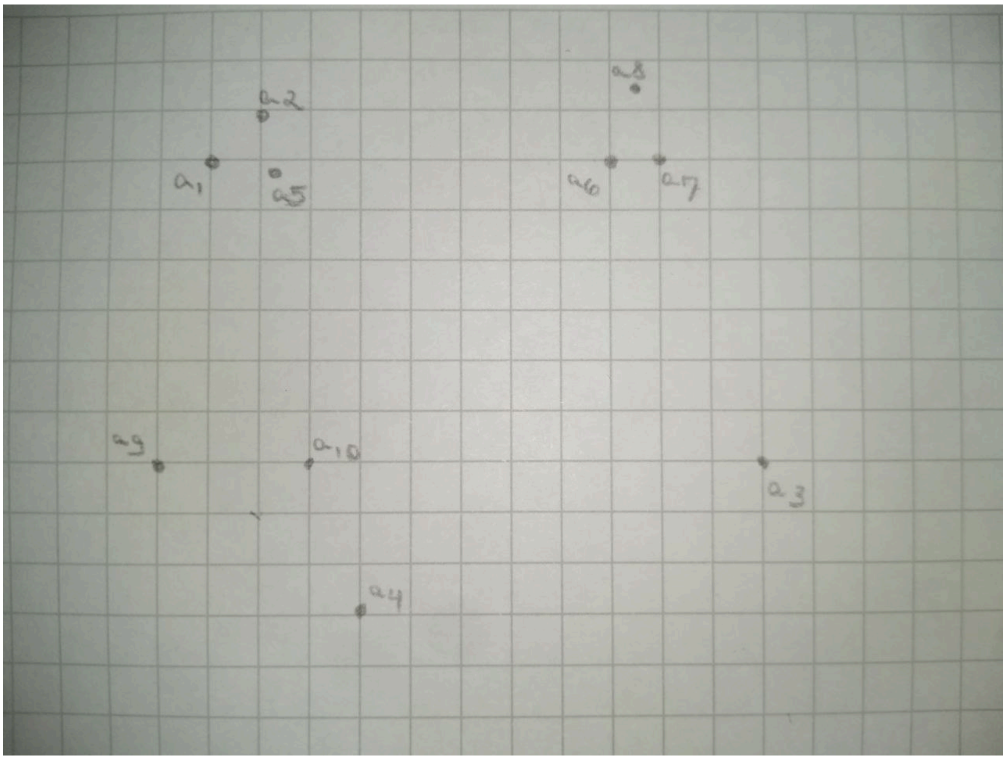
O float do seu computador tem erro de 10^{-8} e você só pode cometer erros na segunda casa decimal. Qual é um condicionamento de A problemático para você?

$$\begin{aligned} cond + err &\geq prec \\ cond - 2 &\geq -8 \\ cond &\geq -8 + 2 \\ cond &\geq -6 \end{aligned}$$

Se $\text{cond}(A) \geq 10^{-6}$, fica ruim.

Sala 7

Como os pontos $a_1, \ldots, a_{10}$ estão distribuídos em $\mathbb{R}^2$, se o seu dendograma é:
TODO: *incluir desenho*



Sala 8

(Coeficiente de Rayleign) Calcule:

$$\max_x \frac{x^T A x}{x^T x}$$

onde:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \textbf{,} \qquad A = A^T \qquad \textbf{e} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Derivando expressão interna de max em relação à x e igualando a 0 (para achar pontos críticos):

$$\frac{d}{dx}\frac{x^T A\, x}{x^T x} = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left((x^T A\, x)\ \frac{1}{x^T x}\right) = 0$$
$$\left(2\ A\ x\ \frac{1}{x^T x}\right) + \left((x^T A\ x)\ \frac{1}{(x^T x)^2}\ (-2\ x)\right) = 0$$
$$\frac{2\ (x^T x)\ A\ x - 2\ (x^T A\ x)\ x}{(x^T x)^2} = 0$$
$$(x^T x)\ A\ x - (x^T A\ x)\ x = 0$$
$$((x^T x)\ A - (x^T A\ x)\ I)\ x = 0$$

(**Nota:** *eu fiz mais um pouco mas parece que não chegou a lugar algum.*)
Como $A = A^T$, temos os autovalores e seus autovetores associados, respectivamente, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $b_1, \dots, b_n$, e também que para $0 < i, j \leq n$: se $i \neq j$, $b_i^T b_j = 0$ e se $i = j$, $b_i^T b_j = 1$. Com isso, podemos escrever x como combinação linear deles:

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i \qquad , \ c_i \in \mathbb{R}$$

Dessa forma:

$$\left(\left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right)^T \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right)\right) A - \left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right)^T A \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right)\right) I\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (c_i\ b_i)^T (c_j\ b_j)\right) A - \left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right)^T \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i\ b_i\right)\right) I\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_i\ c_j\ {b_i}^T b_j\right) A - \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (c_i\ b_i)^T (\lambda_j\ c_j\ b_j)\right) I\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right) A - \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_i\ \lambda_j\ c_j\ {b_i}^T b_j\right) I\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right) A - \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i^2\right) I\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right) A \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i^2\right) I \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right) \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i\ b_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i^2\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right) = 0$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right) \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i\ b_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ c_i^2\right) \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\ b_i\right)$$

Lista 1

Num país politicamente instável, 30% dos defensores da república passam a apoiar a monarquia a cada ano e 20% dos defensores da monarquia passam a apoiar a república a cada ano. Portanto, denotando por r_k e m_k o número de republicanos e monarquistas, respectivamente, no ano k.

(a) Qual é o código para calcular r_k e m_k?

(b) Sabendo que hoje metade da população apoia a república, em 10 anos qual será o percentual que apoia a república?

(c) A longo prazo qual será o percentual de republicanos e monarquistas?

(a) Sendo

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{bmatrix} r_k \\ m_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} r_0 \\ m_0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad k = 10$$

Jogando no J:

```
   (2 2 $ 0.7 0.2 0.3 0.8) (+/ . *)^:10 (2 $ 0.5 0.5)
0.400098 0.599902
```

Então após 10 anos teremos aproximadamente 40% da população apoiando a república.

(c) No equilíbrio, teremos que:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
0 &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
0 &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
0 &= \frac{1}{10} \left(\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
0 &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
0 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \\
&\begin{cases} -3r + 2m &= 0 \\ 3r - 2m &= 0 \end{cases} \\
3r - 2m &= 0 \\
3r &= 2m \\
r &= \frac{2}{3} m
\end{aligned}$$

Usando que $r + m = 1$:

$$\begin{aligned}
r + m &= 1 \\
\frac{2}{3}m + m &= 1 \\
2m + 3m &= 3 \\
5m &= 3 \\
m &= \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 60\% \\
r &= \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 40\%
\end{aligned}$$

Jogando no J (_ é infinito):

```
   (2 2 $ 0.7 0.2 0.3 0.8) (+/ . *)^:_ (2 $ 0.5 0.5)
0.4 0.6
```

Lista 2

Sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é definida pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{t+1} &= F_t + F_{t-1}
\end{aligned}$$

Os 13 **primeiros números da sequência são** $0, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 13, 21, 34, 55, 89, 144$**. Esta famosa sequência tem uma profunda conexão com o número irracional** ϕ**, conhecido como Proporção Áurea. Esta proporção possui a seguinte propriedade geométrica:**
TODO: ***incluir desenho***

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{a+b}{a}$$

(a) Seja

$$v = \begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \end{bmatrix}$$

um vetor cuja primeira coordenada é um elemento da sequência e a segunda coordenada é o elemento seguinte. Determine qual é a matriz A **que avança o vetor** v **ao longo da sequência, ou seja,**

$$A\,v = A\begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{t+1} \\ F_{t+2} \end{bmatrix}$$

(b) Determine os autovetores e autovalores da matriz A. Sabendo que o resultado da aplicação repetida de uma transformação linear tende ao autovetor de maior autovalor associado daquela transformação (*Método da Potência*), escreva em Português o que os autovetores e autovalores nos dizem sobre a Sequência de Fibonacci e sua relação com a Proporção Áurea.

(c) Dada a lista de números da Sequência de Fibonacci acima, confira se as conclusões às quais você chegou no item anterior se verificam.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Seja p um autovetor de A:

$$\begin{aligned}
\lambda\, p &= A\, p \\
0 &= A\, p - \lambda\, p \\
0 &= (A - \lambda\, I)\, p \\
0 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) p \\
0 &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} p \\
&\begin{cases} -\lambda\, a + b & = 0 \\ a + (1-\lambda)\, b & = 0 \end{cases} \\
0 &= b + \lambda\,(1-\lambda)\, b \\
0 &= (1 + \lambda\,(1-\lambda))\, b \\
0 &= (1 + \lambda\, - \lambda^2)\, b \\
0 &= 1 + \lambda\, - \lambda^2 \\
\lambda &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\,(-1)\,1}}{-2} \\
\lambda &= \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Os autovetores são:

$$p_+ = x \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad p_- = x \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

Quanto mais se aplica A a um v arbitrário, mais próximo se chega ao p_+ (*Método da Potência*). Pela construção de A, temos que:

$$\begin{bmatrix} F_{t+1} \\ F_t + F_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \end{bmatrix}$$

e eventualmente (após aplicar várias vezes) vamos chegar à:

$$\begin{bmatrix} F_{t+1} \\ F_t + F_{t+1} \end{bmatrix} = \lambda_+ \begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda\, F_t & = F_{t+1} \\ \lambda\, F_{t+1} & = F_t + F_{t+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda & = \frac{F_{t+1}}{F_t} \\ \lambda & = \frac{F_t + F_{t+1}}{F_{t+1}} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{F_{t+1}}{F_t} = \frac{F_t + F_{t+1}}{F_{t+1}}$$

$$\lambda = \frac{a}{b} = \frac{b+a}{a}$$

Em outras palavras, a Sequência de Fibonacci calcula valores que aproximam a Proporção Áurea; λ_+ é a própria Proporção.

(c) Usando J:

```
   ((}. (% ,. [ % +) }:)) 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144
      _        1
      1      0.5
      2 0.666667
    1.5      0.6
1.66667    0.625
    1.6 0.615385
  1.625 0.619048
1.61538 0.617647
1.61905 0.618182
1.61765 0.617978
1.61818 0.618056
1.61798 0.618026
   (1 + %: 5) % 2
1.61803
```

A primeira coluna representa $\frac{a}{b}$ e a segunda coluna representa $\frac{a+b}{a}$. Eles vão convergindo para o mesmo valor ($\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$).

Lista 3

População de bactérias.

A população de uma certa espécie de bactéria pode ser compreendida da seguinte maneira. Existem bactérias novas, maduras e velhas. A cada mês:

- **(0)** 80% **das bactérias novas chegam à maturidade, e** 20% **morrem;**
- **(1)** 50% **das bactérias maduras tornam-se velhas, e** 50% **morrem;**
- **(2)** 100% **das bactérias velhas morrem;**
- **(3) Uma a cada duas bactérias maduras geram uma nova bactéria;**
- **(4) Uma a cada cinco bactérias velhas geram uma nova bactéria.**

(a) Modele o sistema populacional descrito acima – ou seja, determine o significado de cada coordenada do vetor que representa a população em um dado mês, e a matriz que representa a transição de um mês para o seguinte.

As coordenadas do vetor v representam, as bactérias novas v_n, as bactérias maduras v_m, as bactérias velhas v_v:

$$v = \begin{bmatrix} v_n \\ v_m \\ v_v \end{bmatrix}$$

A matrix de transição A é dada por

$$A = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0 & 50 & 20 \\ 80 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

Lista 8

Sejam

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine uma aproximação para $\frac{z_1}{z_2}$**, tal que** $z = A^{1\,000\,000}\, x$**.**

A razão $\frac{z_1}{z_2}$ pode ser aproximada pelo maior λ (*Método da Potência*). Seja p um autovetor de A:

$$
\begin{aligned}
\lambda\, p &= A\, p \\
0 &= (A - \lambda\, I)\, p \\
0 &= A\, p - \lambda\, p \\
0 &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) p \\
0 &= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} p \\
&\begin{cases} (2-\lambda)\, p_1 + p_2 &= 0 \\ p_1 + (2-\lambda)\, p_2 &= 0 \end{cases} \\
0 &= p_1 - (2-\lambda)^2\, p_1 \\
0 &= (1 - (2-\lambda)^2)\, p_1 \\
0 &= (1 - 4 + 4\,\lambda - \lambda^2)\, p_1 \\
0 &= (-3 + 4\,\lambda - \lambda^2)\, p_1 \\
0 &= -3 + 4\,\lambda - \lambda^2 \\
\lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\,(-1)\,(-3)}}{-2} \\
\lambda &= \frac{4 \mp \sqrt{4}}{2} \\
\lambda &= \frac{4 \mp 2}{2} \\
\lambda &= 2 \mp 1 \\
\lambda &\in \{1, 3\}
\end{aligned}
$$

Dessa forma:

$$
p_+ = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad p_- = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

onde $x \in \mathbb{R}$.
E a aproximação para $\frac{z_1}{z_2}$ é 1.