



LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Indo e Voltando de Combinadores para Concatenativo From Combinators to Concatenative and Back Again

Daniel Kiyoshi Hashimoto Vouzella de Andrade

Instituto de Computação (UFRJ)

Fevereiro 2024



Programação Tácita

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Programação tácita (ou pointfree) é um estilo de programação que evita dar nomes para variáveis e valores intermediários



Programação Tácita

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Programação tácita (ou pointfree) é um estilo de programação que evita dar nomes para variáveis e valores intermediários

Composição

```
numDigits = length . toString
```

```
numDigits 10      --> 2
```

```
numDigits 1234    --> 4
```

(Linguagem Haskell)



Programação Tácita

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Programação tácita (ou pointfree) é um estilo de programação que evita dar nomes para variáveis e valores intermediários

Composição

```
numDigits = length . toString
```

```
numDigits 10      --> 2
```

```
numDigits 1234    --> 4
```

(Linguagem Haskell)

Outras funções de alta ordem

NB. Média é a soma dividido pelo tamanho (da lista)

```
avg =: +/ % #
```

```
avg 1 1 1 3 3 3
```

NB. (Linguagem J)



Máquina de Pilha

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Aritmética aplicativa
(matemática usual)

$$f(x) = x * x + 1$$

Aritmética de pilha
(calculadora HP)

$$f = dup * 1 +$$



Objetivo do Trabalho

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Queremos generalizar a relação entre os dois lados

```
flip f x y  
=> f y x
```

⇔

```
y x swap f  
=> x y f
```



Objetivo do Trabalho

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários

para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Queremos generalizar a relação entre os dois lados

```
flip f x y  
=> f y x
```

\Leftrightarrow

```
y x swap f  
=> x y f
```

Mas queremos preservar os passos de redução

```
flip (flip f) x y  
=> f x y
```

\Leftrightarrow

```
y x swap swap f  
=> y x f
```

Não é só um no-op



Sumário

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

- 1 Lógica Combinatória (Revisão)
- 2 Cálculo Concatenativo (Revisão)
- 3 Combinadores Arbitrários para Concatenativo
- 4 Combinadores Regulares para Concatenativo
- 5 Voltando do Concatenativo para Combinadores
- 6 Conclusão



Lógica Combinatória

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

<i>agrupa/compõe</i>	$B \ a \ b \ c = a \ (b \ c)$
<i>reordena</i>	$C \ a \ b \ c = a \ c \ b$
<i>descarta</i>	$K \ a \ b = a$
<i>copia</i>	$W \ a \ b = a \ b \ b$
<i>funde</i>	$S \ a \ b \ c = a \ c \ (b \ c)$
<i>identifica</i>	$I \ a = a$

Moses Schönfinkel (1924), Haskell Curry (1930).



Redução de Combinadores

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$\begin{aligned} & B (B S) B a b c d \\ \Rightarrow & B S (B a) b c d \\ \Rightarrow & S (B a b) c d \\ \Rightarrow & B a b d (c d) \\ \Rightarrow & a (b d) (c d) \end{aligned}$$



Redução de Combinadores Passarinhos

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo











Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão



 ( )  a b c d
  ( a) b c d
 ( a b) c d
 a b d (c d)
a (b d) (c d)

Raymond Smullyan (1985).



Cálculo Concatenativo

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Tem blocos (quotations) e instruções

<i>empilha</i>			[A]	\Rightarrow	[A]	
<i>troca</i>	$y\ x$		<i>swap</i>	\Rightarrow	$x\ y$	
<i>duplica</i>	x		<i>dup</i>	\Rightarrow	$x\ x$	
<i>destrói</i>	x		<i>zap</i>	\Rightarrow		
<i>executa</i>	[A]		<i>call</i>	\Rightarrow		A
<i>junta</i>	$x\ [A]$		<i>cons</i>	\Rightarrow	[x A]	
<i>adia</i>	$x\ [A]$		<i>dip</i>	\Rightarrow		A x

Thun (1994), Kerby (2002), Kleffner (2017).



Executando Instruções

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Pilha	Instruções
-------	------------

	[dup] [zap] swap call
[dup]	[zap] swap call
[dup] [zap]	swap call
[zap] [dup]	call
[zap]	dup
[zap] [zap]	



Executando no Meio da Pilha

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

dip permite executar instruções mais fundo na pilha

$$\begin{array}{l} z \ y \ x \mid [\textit{swap}] \ \textit{dip} \\ y \ z \ x \mid \end{array}$$



Objetivo do Trabalho (relembrando)

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Queremos generalizar a relação entre os dois lados

$$\begin{array}{l} C f x y \\ \Rightarrow f y x \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y x \mid \text{swap } f \\ \Rightarrow x y \mid f \end{array}$$

Mas queremos preservar os passos de redução

$$\begin{array}{l} C (C f) x y \\ \Rightarrow f x y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y x \mid \text{swap swap } f \\ \Rightarrow y x \mid f \end{array}$$



Combinadores Arbitrários para Concatenativo

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Queremos achar quem é b , c , k , ...

$$\begin{array}{ll} B f g x & \mapsto x g f b \mid \text{calls} \\ f (g x) & \mapsto [x g \text{ call }] f \mid \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C f x y & \mapsto y x f c \mid \text{calls} \\ f y x & \mapsto x y f \mid \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K x y & \mapsto y x k \mid \text{calls} \\ x & \mapsto x \mid \end{array}$$



Combinadores Arbitrários \mapsto Concatenativo

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$\lceil \alpha \rceil$ é a tradução de um combinador α

b	$:=$	$[[cons] dip]$	s	$:=$	$[[sons] dip]$
c	$:=$	$[[swap] dip]$	w	$:=$	$[[dup] dip]$
k	$:=$	$[[zap] dip]$	i	$:=$	$[[\varepsilon] dip]$

$$\lceil \alpha \beta \rceil := [\lceil \beta \rceil \lceil \alpha \rceil call]$$



Combinadores Arbitrários \mapsto Concatenativo

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$\lceil \alpha \rceil$ é a tradução de um combinador α

$$\begin{array}{ll} b & := \quad [[cons] dip] & s & := \quad [[sons] dip] \\ c & := \quad [[swap] dip] & w & := \quad [[dup] dip] \\ k & := \quad [[zap] dip] & i & := \quad [[\varepsilon] dip] \end{array}$$

$$\lceil \alpha \beta \rceil \quad := \quad [\lceil \beta \rceil \lceil \alpha \rceil call]$$

Precisamos inventar o *sons*!

Ele é uma mistura de *sip* com *cons*

$$\begin{array}{lll} x [A] sip & \Rightarrow & x A x \\ x [A] cons & \Rightarrow & [x A] \\ x [A] sons & \Rightarrow & [x A] x \end{array}$$



Exemplo

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Simula o passo a passo, como queríamos!

$$\begin{array}{lll}
(B (B K) C f x y z) \mapsto [z y x f c [k b call] b call] & | & \text{call}^4 \\
B (B K) C f x y z \mapsto & z y x f c [k b call] b & | \text{call call}^3 \\
(B K) (C f) x y z \mapsto & z y x [f c call] [k b call] & | \text{call}^3 \\
B K (C f) x y z \mapsto & z y x [f c call] k b & | \text{call call}^2 \\
K (C f x) y z \mapsto & z y [x f c call] k & | \text{call}^2 \\
(C f x) z \mapsto & z [x f c call] & | \text{call}^1 \\
C f x z \mapsto & z x f c & | \text{call} \\
f z x \mapsto & x z f & |
\end{array}$$

Inserimos os **calls** para poder executar



Conversão Direta

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Por que $\lceil B (B K) C \rceil$ é tão grande?

```
[ [ [ swap ] dip ] [ [ [ [ zap ] dip ] [ [ cons ] dip ] call ] [ [ cons ] dip ] call ] call ]
```



Conversão Direta

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários

para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Se $C \approx \text{swap}$ e $K \approx \text{zap}$, poderia ser $[\text{zap}] \text{ dip swap } q \text{ call}$?

$$\begin{array}{lll}
 B (B K) C q x y z & \mapsto & z y x \mid [\text{zap}] \text{ dip swap } q \text{ call} \\
 B K (C q) x y z & \mapsto & z y x \mid [\text{zap}] \text{ dip swap } q \text{ call} \\
 K (C q x) y z & \mapsto & z y \mid \text{zap } x \text{ swap } q \text{ call} \\
 C q x z & \mapsto & z x \mid \text{swap } q \text{ call} \\
 q z x & \mapsto & x z \mid q \text{ call}
 \end{array}$$

Agora, q aparece no final



Funciona com Quais Combinadores?

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Quando o primeiro argumento q é uma Continuação

Mantém o q no lugar, sem duplicar ou ignorar ele

$$B\ q\ x\ y = q\ (x\ y)$$

$$C\ q\ x\ y = q\ y\ x$$

$$K\ q\ x = q$$

$$S\ q\ x\ y = q\ y\ (x\ y)$$

$$W\ q\ x = q\ x\ x$$

$$I\ q = q$$

$$BBB\ q\ x\ y\ z \Rightarrow q\ (x\ y\ z)$$

$$BSC\ q\ x\ y \Rightarrow q\ (x\ y)\ y$$

$$B(BK)C\ q\ x\ y\ z \Rightarrow q\ z\ x$$

$$BC(BC)\ q\ x\ y\ z \Rightarrow q\ y\ z\ x$$

Combinadores Regulares têm o q e não introduzem nada novo no lado direito



Combinadores Bagunceiros

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Alguns combinadores não são regulares

$$\begin{array}{lll} (T) & CI \text{ } q \text{ } x & \Rightarrow x \text{ } q \\ (Q) & CB \text{ } q \text{ } x \text{ } y & \Rightarrow x \text{ } (q \text{ } y) \\ (M) & WI \text{ } q & \Rightarrow q \text{ } q \end{array}$$



Combinadores Bagunceiros

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Alguns combinadores não são regulares

$$\begin{array}{lll}
 (T) & CI \text{ } q \text{ } x & \Rightarrow x \text{ } q \\
 (Q) & CB \text{ } q \text{ } x \text{ } y & \Rightarrow x \text{ } (q \text{ } y) \\
 (M) & WI \text{ } q & \Rightarrow q \text{ } q
 \end{array}$$

Outros combinadores são regulares, mas bagunceiros

Eles fazem algo de errado com o q e depois consertam

$$\begin{array}{lll}
 W \text{ } K \text{ } q & C \text{ } (C \text{ } I) \text{ } q \text{ } x & S \text{ } (K \text{ } S) \text{ } K \text{ } q \text{ } x \text{ } y \\
 K \text{ } q \text{ } q & C \text{ } I \text{ } x \text{ } q & K \text{ } S \text{ } q \text{ } (K \text{ } q) \text{ } x \text{ } y \\
 q & I \text{ } q \text{ } x & S \text{ } (K \text{ } q) \text{ } x \text{ } y \\
 & q \text{ } x & K \text{ } q \text{ } y \text{ } (x \text{ } y) \\
 & & q \text{ } (x \text{ } y)
 \end{array}$$



Combinadores Regulares por Construção

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Os Combinadores Regulares por Construção nunca são bagunceiros, por construção

B
 C
 K

S
 W
 I

$B \alpha$
 $B \alpha \beta$



Combinador Regular \mapsto Concatenativo

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

O B em posições diferentes traduzem para instruções diferentes

$$\begin{array}{ll} |B\rangle & := \text{cons} & |S\rangle & := \text{sons} \\ |C\rangle & := \text{swap} & |W\rangle & := \text{dup} \\ |K\rangle & := \text{zap} & |I\rangle & := \varepsilon \text{ (vazio)} \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} |B \alpha\rangle & := [|\alpha\rangle] \text{ dip} \\ |B \alpha \beta\rangle & := |\alpha\rangle |\beta\rangle \end{array}$$



A Volta da Conversão Direta

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Bonito
Simples
Agora, dá para voltar?



A Volta da Conversão Direta

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Bonito

Simples

Agora, dá para voltar?

Não exatamente, mas sim!

A composição é boazinha demais!

(é um monoide!)

$$|B (B \alpha \beta) \gamma\rangle = |B \alpha (B \beta \gamma)\rangle$$

$$|B I \alpha\rangle = |\alpha\rangle = |B \alpha I\rangle$$



Concatenativo (1^a ordem) \mapsto Combinadores

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Se a entrada for um programa de 1^a ordem, conseguimos inverter o último algoritmo!

$$\begin{array}{ll} \{cons\} & := B \\ \{swap\} & := C \\ \{zap\} & := K \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \{sons\} & := S \\ \{dup\} & := W \\ \{\varepsilon\} & := I \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} \{[P] dip\} & := B \{P\} \\ \{N P\} & := B \{N\} \{P\} \end{array}$$



Empilhando valores

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Para empilhar valores precisaríamos desse comportamento:

$$\{push\ v\} \quad q\ x\ y\ z\ \dots$$
$$q\ \{v\}\ x\ y\ z\ \dots$$



Empilhando valores

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Para empilhar valores precisaríamos desse comportamento:

$$\begin{aligned} & \{push\ v\} \ q\ x\ y\ z\ \dots \\ & q\ \{v\}\ x\ y\ z\ \dots \end{aligned}$$

Esse é o combinador $T = CI$

$$(T\ v)\ q \Rightarrow q\ v$$



Empilhando valores

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Para empilhar valores precisaríamos desse comportamento:

$$\begin{aligned} &\{push\ v\} \ q\ x\ y\ z\ \dots \\ &q\ \{v\}\ x\ y\ z\ \dots \end{aligned}$$

Esse é o combinador $T = CI$

$$(T\ v)\ q \Rightarrow q\ v$$

Mas $(T\ v)$ não é regular!



Usando os blocos

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Agora faltam *call* e *dip*:

$$\{call\} \quad q \alpha x y z \dots$$
$$\alpha \quad q x y z \dots$$
$$\{dip\} \quad q \alpha x y z \dots$$
$$\alpha (q x) y z \dots$$



Usando os blocos

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Agora faltam *call* e *dip*:

$$\begin{array}{l} \{call\} \textcolor{blue}{q} \textcolor{orange}{\alpha} x y z \dots \\ \textcolor{orange}{\alpha} \textcolor{blue}{q} x y z \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \{dip\} \textcolor{blue}{q} \textcolor{orange}{\alpha} x y z \dots \\ \textcolor{orange}{\alpha} (\textcolor{blue}{q} x) y z \dots \end{array}$$

Solução

$$\begin{array}{l} T = CI \\ T \textcolor{blue}{q} \textcolor{orange}{\alpha} \Rightarrow \textcolor{orange}{\alpha} \textcolor{blue}{q} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Q = CB \\ Q \textcolor{blue}{q} \textcolor{orange}{\alpha} x \Rightarrow \textcolor{orange}{\alpha} (\textcolor{blue}{q} x) \end{array}$$

Também não são regulares!



Concatenativo \mapsto Combinadores

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

Primeira ordem

$$\{cons\} := B$$

$$\{swap\} := C$$

$$\{zap\} := K$$

$$\{sons\} := S$$

$$\{dup\} := W$$

$$\{\varepsilon\} := I$$

$$\{[P] dip\} := B \{P\}$$

$$\{N P\} := B \{N\} \{P\}$$

Alta ordem

$$\{[P]\} := T \{P\}$$

$$\{call\} := T$$

$$\{dip\} := Q$$



LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

- Combinadores Regulares lembram programação no Continuation-Passing Style

- B tem 3 interpretações:

0 $B \Rightarrow cons$

1 $B\alpha \Rightarrow dip$

2 $B\alpha\beta \Rightarrow composição$



Contribuições Principais

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

- Encontramos o problema da inserção de calls
 - Call-by-Name
 - Call-by-Value

- Três algoritmos de conversão (dois indo e um voltando):
 - 0 Qualquer combinador \mapsto um bloco
 - 1 Combinadores regulares \mapsto instruções
 - 2 Combinadores bagunceiros \leftarrow quaisquer instruções



Visualização das Conversões

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

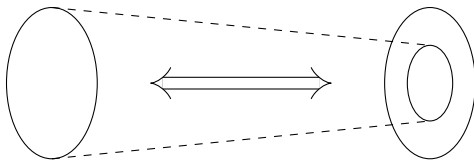
Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

- Conversão Geral: subconjunto do Cálculo Concatenativo

Lógica Combinatória

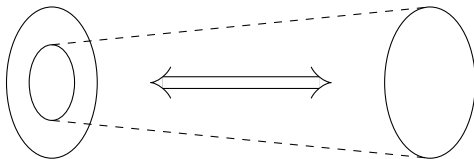
Cálculo Concatenativo



- Conversão Direta: subconjunto da Lógica Combinatória

Lógica Combinatória

Cálculo Concatenativo





Próximos Passos

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

- Formalizar as provas de simulação
- O problema de inserção de calls
- O que fazer com os combinadores regulares bagunceiros?
- Repetir isso na base *SKI* (que é bagunceira)



Obrigado!

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão





Ordens de Redução de Combinadores

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$\begin{aligned} & B (B C) K f x y z \\ & B C (K f) x y z \\ & C (K f x) y z \\ & K f x z y \\ & f z y \end{aligned}$$

Call-by-Name

$$\begin{aligned} & B (B C) K f x y z \\ & B C (K f) x y z \\ & C (K f x) y z \\ & C f y z \\ & f z y \end{aligned}$$

Call-by-Value



Conversão Geral (Call-by-Value)

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$\begin{array}{lll}
 B (B C) K f x y z & \Rightarrow & z y x f k [c b^\dagger call] b \mid \mathbf{call}^3 \\
 B C (K f) x y z & \Rightarrow & z y x [f k call] c b^\dagger \mid \mathbf{call}^2 \\
 C (K f x) y z & \Rightarrow & z y x f k \mid call c \mathbf{call}^1 \\
 C f y z & \Rightarrow & z y f c \mid \mathbf{call}^1 \\
 f z y & \Rightarrow & y z f \mid
 \end{array}$$



Definições de Agrupadores (Call-by-Value)

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$\begin{aligned} b &:= [[cons] dip] = [[cons] dip [] dip] \\ s &:= [[sons] dip] = [[sons] dip [] dip_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^\dagger &:= [[call] dip] = [[cons] dip [\mathbf{call}] dip] \\ s^\dagger &:= [[sip] dip] = [[sons] dip [\mathbf{call}] dip_2] \end{aligned}$$



Equivalencia Conversão Geral e Direta

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$q \vdash B (B K) C \perp$

$q [c [[k b call] b call] call] \textbf{call}^5$

$q c [[k b call] b call] call \textbf{call}^4$

$q c [k b call] b call \textbf{call}^4$

$q c cons [k b call] \textbf{call}^4$

$[q c call] [k b call] \textbf{call}^4$

$[q c call] k b call \textbf{call}^3$

$[q c call] cons k \textbf{call}^3$

$[swap q] cons k \textbf{call}^3$

$[swap q] cons [zap] dip \textbf{call}^2$

$[zap] dip [swap q] call call$

$[zap] dip swap q call$

$|B (B K) C\rangle q call$

conversão geral

definição de *call*

definição de *call*

definição de *b call*

definição de *cons*

definição de *call*

expansão de *b call*

expansão de *c call*

expansão de *k call*

teorema cons-dip

definição de *call*

direct conversion



Teorema cons-dip

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$f \text{ cons } g \text{ dip call} \Leftrightarrow g \text{ dip } f \text{ call}$$

$f \text{ cons } g \text{ dip call}$
 $x f \text{ cons } g \text{ dip call}$
 $[x f \text{ call }] g \text{ dip call}$
 $g \text{ call } [x f \text{ call }] \text{ call}$
 $g \text{ call } x f \text{ call}$
 $x g \text{ dip } f \text{ call}$
 $g \text{ dip } f \text{ call}$

adiciona x arbitrário na esquerda
definição de *cons*
definição de *dip*
definição de *call*
definição inversa de *dip*
remove x na esquerda



Teorema cons-dip Geral (Caso Base)

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$f \text{ cons}^n g \text{ dip call} \Leftrightarrow g \text{ dip}_n f \text{ call}$$

Caso base:

$$\begin{aligned} &f \text{ cons}^0 g \text{ dip call} \\ &f g \text{ dip call} \\ &g \text{ call } f \text{ call} \\ &g \text{ dip}_0 f \text{ call} \end{aligned}$$

definição de cons^0
definição de dip
definição inversa de dip_0



Teorema cons-dip Geral (Passo Indutivo)

LC \leftrightarrow CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão

$$f \text{ cons}^n g \text{ dip call} \Leftrightarrow g \text{ dip}_n f \text{ call}$$

Passo indutivo:

$$\begin{aligned} & f \text{ cons}^{n+1} g \text{ dip call} \\ & x f \text{ cons}^{n+1} g \text{ dip call} \\ & [x_n f \text{ call}] \text{ cons}^n g \text{ dip call} \\ & g \text{ dip}_n [x f \text{ call}] \text{ call} \\ & g \text{ dip}_n x f \text{ call} \\ & x [g \text{ dip}_n] \text{ dip } f \text{ call} \\ & x g \text{ dip}_{n+1} f \text{ call} \\ & g \text{ dip}_{n+1} f \text{ call} \end{aligned}$$

adiciona x arbitrário
definição de cons
hipótese indutiva
definição de call
definição inversa de dip
definição inversa de dip_{n+1}
remove x arbitrário



Dummy end

LC ↔ CC

Daniel Kiyoshi
Hashimoto
Vouzella
de Andrade

Lógica
Combinatória

Cálculo
Concatenativo

Combinadores
Arbitrários
para
Concatenativo

Combinadores
Regulares para
Concatenativo

Voltando do
Concatenativo
para
Combinadores

Conclusão