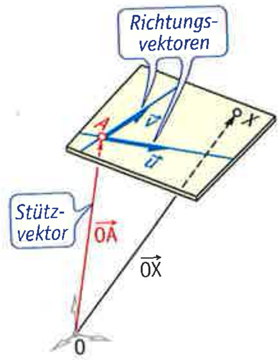
Man nennt $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s\cdot\vec{u} + t\cdot\vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ eine **Parameterdarstellung** (auch **Parametergleichung**) der Ebene mit den **Parametern** s und t, den Vektor $\overrightarrow{OA}$ einen **Stützvektor** und die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ **Richtungsvektoren** der Ebene. Häufig schreibt man kurz $\vec{x}$ statt $\overrightarrow{OX}$.
Zu jeder Ebene kann man unendlich viele Parameterdarstellungen angeben (siehe Aufgabe 3).

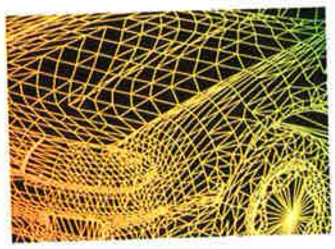


Beispiele

- Gegeben sind $A(2\,|-1\,|\,3)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-6\\5\\9\end{pmatrix}$.
  Wir erhalten damit eine Vektorgleichung der Ebene
  E: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\5\\9\end{pmatrix}$
  Wählen wir z. B. $s = 2$ und $t = -1$ erhalten wir den Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-6\\-10\end{pmatrix}$, also den Punkt $P(10\,|-6\,|-10)$ der Ebene.
- Gegeben sind $A(3\,|-6\,|\,5)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-6\\10\\-2\end{pmatrix}$. Durch A, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist keine Ebene bestimmt, da die beiden Vektoren parallel zueinander sind. Es gilt nämlich $\vec{v} = -2\cdot\vec{u}$.

Weiterführende Aufgaben

2 Festlegen einer Ebene durch drei Punkte



Im Fahrzeugbau, bei der Landschaftsgestaltung oder auch beim Industriedesign nähert man gekrümmte Flächen, wie z. B. rechts den Kotflügel eines Autos, durch kleinere ebene Flächenstücke an, zu denen man aus den Koordinaten dreier Eckpunkte eine Ebene bestimmen kann.
Drei solche Punkte sind $P(4\,|\,3\,|\,1)$, $Q(5\,|\,1\,|\,4)$ und $R(7\,|\,3\,|\,2)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, die durch diese drei Punkte festgelegt ist.

3 Verschiedene Parameterdarstellungen derselben Ebene

Gegeben sind die drei Punkte $A(2\,|\,3\,|-2)$, $B(-2\,|\,5\,|\,6)$ und $C(7\,|\,0\,|-7)$. Geben Sie vier verschiedene Parameterdarstellungen für die Ebene an, in der diese drei Punkte liegen.

4 Beschreiben von ebenen Flächen mithilfe einer Parametergleichung

Im Bild ist das Pultdach eines Hauses zu sehen. Die im Foto sichtbare Dachfläche liegt in einer Ebene, zu der in einem räumlichen Koordinatensystem der Punkt $A(0\,|\,9\,|\,4)$ und die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ gehören (Angaben in m).
Die Dachfläche misst 9 m mal 7 m.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung für die Ebene, in der die Dachfläche liegt.
b) Man kann alle Punkte der Dachfläche beschreiben, indem man die Parameter für die Ebene einschränkt. Führen Sie dies durch.
c) Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte der Dachfläche an. Bestimmen Sie außerdem drei Punkte, die außerhalb der Dachfläche, aber in derselben Ebene wie die Dachfläche liegen.