4.3.3 Koordinatengleichung einer Ebene

Einführung

(1) Von einer Parameterdarstellung zu einer parameterfreien Gleichung

Gegeben ist eine Ebene $E\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\1\\3{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$

In Abschnitt 4.3.2 haben wir gesehen, wie man prüft, ob ein Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$ in der Ebene E liegt. Dabei sucht man nach Werten für s und t, die die Vektorgleichung

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$, also das Gleichungssystem $\left|\begin{array}{rcl} 2s + t &=& x_1 - 1\\ t &=& x_2 - 1\\ 4s + 5t &=& x_3 - 3{,}5\end{array}\right|$ erfüllen.

Aus zwei der Gleichungen des Systems werden die Werte für s und t ermittelt und anschließend überprüft, ob mit diesen Werten auch die dritte Gleichung erfüllt wird.

- Für das obige Gleichungssystem erhält man aus der zweiten Gleichung $t = x_2 - 1$.
- Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich $2s + x_2 - 1 = x_1 - 1$ und nach s umgestellt $s = 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2$.
- Setzt man hier nun $t = x_2 - 1$ und $s = 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2$ in die dritte Gleichung des Systems ein, so erhält man $4\cdot(0{,}5x_1 - 0{,}5x_2) + 5\cdot(x_2 - 1) = x_3 - 3{,}5$.
  Zusammengefasst und umgestellt ergibt sich daraus die Gleichung $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1{,}5$.

In dieser Gleichung kommen die Parameter s und t nicht mehr vor, man spricht deshalb auch von einer **parameterfreien Gleichung der Ebene** E. Liegt ein Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$ in der Ebene E, so erfüllen seine Koordinaten also die Gleichung $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1{,}5$.

Da in dieser Gleichung ausschließlich die Koordinaten eines Punktes als Variable vorkommen, wird eine solche Gleichung auch **Koordinatengleichung der Ebene** E genannt.

(2) Von der Lösungsmenge einer Koordinatengleichung zur Parameterdarstellung

Liegt ein Punkt P in der Ebene E, so erfüllen seine Koordinaten die Koordinatengleichung. Gibt es noch andere Punkte, die nicht in E liegen und deren Koordinaten auch die Koordinatengleichung erfüllen?

Wir betrachten dazu noch einmal die Koordinatengleichung $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1{,}5$ der Ebene E aus der Einführung (1) und untersuchen die Lösungsmenge dieser Gleichung. Wir wählen für x_1 und x_2 einen beliebigen Wert, also z. B. $x_1 = s$ und $x_2 = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und stellen nach x_3 um. So ergibt sich:

$\left|\begin{array}{l} x_1 = s\\ x_2 = t\\ x_3 = -1{,}5 + 2s + 3t\end{array}\right|$ und als Vektorgleichung geschrieben $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

Diese Vektorgleichung kann man als Parameterdarstellung einer Ebene auffassen. Sie beschreibt ebenfalls die Ebene E aus der Einführung (1) (siehe dazu Aufgabe 4). Durch die Koordinatengleichung wird also dieselbe Ebene E beschrieben, wie durch eine Parameterdarstellung von E.

Information

Koordinatengleichungen einer Ebene

Wir verallgemeinern die Überlegungen aus der Einführung:

Satz 5

(1) Jede Ebene kann durch eine **Koordinatengleichung** der Form $a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Ein Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$ liegt genau dann in der Ebene, wenn seine Koordinaten die Koordinatengleichung erfüllen.

(2) Jede Koordinatengleichung der Form $a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$ beschreibt eine Ebene. Zu jeder Lösung $(x_1|x_2|x_3)$ gehört ein Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$, der in der Ebene liegt.