Aufgabe 1

Für ein Zufallsexperiment werden eine Münze und zwei Tetraeder (vierseitige Pyramide) genutzt. Beide Tetraeder sind auf allen vier Seiten mit jeweils einer Zahl beschriftet, Tetraeder A mit 1, 2, 3, 4; Tetraeder B mit 1, 1, 2, und 3. Die Münze ist auf einer Seite mit einem Minus „□“, auf der anderen Seite mit einem Plus „+“ beschriftet.

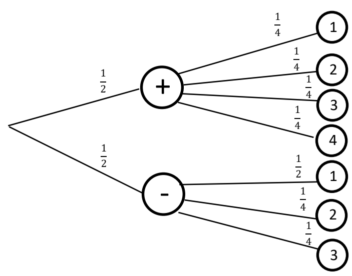
Zunächst wird die Münze geworfen. Zeigt die Münze „+“, so wird anschließend Tetraeder A einmal geworfen, zeigt sie „-“, so wird Tetraeder B einmal geworfen. Die geworfene Zahl wird mit dem Vorzeichen notiert.

1.1 Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 BE

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewürfelte Zahl ungerade oder kleiner als 3 ist.

2 BE

1.1		3
1.2	$P(ungerade\ oder\ kleiner\ als\ 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ oder über Gegenereignis	2

Teil-auf-gabe	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
3.1	3					X			I	I			3		
3.2	2					X		II	II		I		1	1	

Aufgabe 2

Für zweistufiges Zufallsexperiment werden eine Münze und ein Würfel verwendet. Die Münze ist auf einer Seite mit 1, auf der anderen mit 2 beschriftet. Der Würfel ist mit 1, 1, 2, 2, 3 und 4 beschriftet.

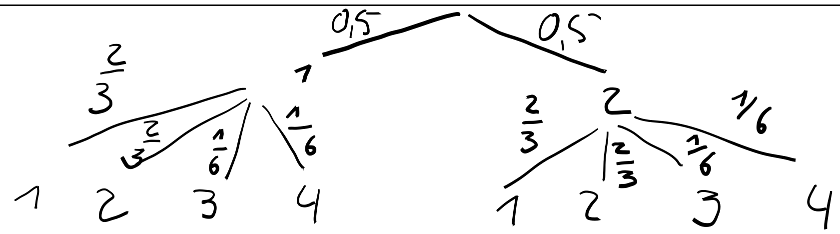
Zunächst wird die Münze einmal geworfen. Anschließend wird der Würfel einmal geworfen. Das Ergebnis des Zufallsversuchs ist eine zweistellige Zahl.

a) Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 BE

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Primzahl zu erhalten.

2 BE

1.1		3
1.2	Primzahl: 11; 13; 23 P(Primzahl)=$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	2

Teil-aufgabe	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1.1	3					X			I	I		I	3		
1.2	2					X		II	II		I			2	

Aufgabe 3:

In einer Urne befinden sich blaue und gelbe Kugeln. Es wird einmal verdeckt gezogen. Es befinden sich 6 gelbe Kugeln in der Urne.

Dabei gilt: $Ereignis\ B: eine\ blaue\ Kugel\ wird\ gezogen, P(B) = 0{,}7$.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Kugeln.

b) In einer Urne befinden sich blaue und gelbe Kugeln. Es wird zweimal verdeckt mit Zurücklegen gezogen. Es befinden sich 5 gelbe Kugeln in der Urne.
Dabei gilt: $Ereignis\ B: mindestens\ eine\ blaue\ Kugel\ wird\ gezogen, P(B) = 0{,}75$. Um die Anzahl der Kugeln in der Urne zu bestimmen, wurde folgender Rechenweg angegeben. Interpretieren Sie die einzelnen Lösungsschritte.

(1): $P(G) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

(2): $\frac{5}{n} \cdot \frac{5}{n} = 0{,}25$

(3): $\frac{25}{n^2} = 0{,}25 \rightarrow n = 10\ In\ der\ Urne\ befinden\ sich\ 10\ Kugeln.$

a	Ereignis G: eine gelbe Kugel wird gezogen $\rightarrow \mathrm{P(G)} = 1 - \mathrm{P(B)} = 0{,}3 = \frac{6}{\mathrm{n}} \rightarrow \mathrm{n} = 20$ $b: Anzahl\ der\ blauen\ Kugeln \rightarrow \mathrm{b} = \mathrm{n} - 6 = 14$	1 1
b	(1): Die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal Gelb gezogen wird, ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu $P(B)$ (2): Bei 5 gelben Kugeln und zweimal Ziehen mit Zurücklegen wird hier der Term nach Pfadregel für zweimal Ziehen einer gelben Kugel angegeben (3): Der Term wird umgeformt um die Gesamtzahl der Kugeln zu berechnen	1 1 1

Teil-aufgabe	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1.1	2	X				X		II	I		I-II		1	1	
1.2	3					X						II	1	2	

Aufgabe 4:

In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1: 6 rote und 4 blaue Kugeln

U_2: 1 rote und 4 blaue Kugeln

4.1 Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

2 BE

4.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U_1 stammt.

3 BE

4.1	Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $P\left(E_1\right)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}$; Wahrscheinlichkeit: $\frac{7}{15}$	2
4.2	Ansatz für Wahrscheinlichkeit z. B.: Baumdiagramm Term für Wahrscheinlichkeit: $P\left(E_2\right)=P\left(\mathrm{U}_1 \mid r\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}$ Wkt: 3/4	3

Aufgabe 5:

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und in einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau" mit der Wahrscheinlichkeit p und „Rot" mit der Wahrscheinlichkeit $2\cdot p$ ein.

5.1 Geben Sie an, welche Werte für p bei diesem Glücksrad möglich sind.

2 BE

5.2 Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt mindestens einmal „Rot" ein.

Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{E})=4\cdot p-4\cdot p^2$ eintritt.

3 BE

5.1	$0<p<\frac{1}{3}$	2
5.2	$P(\mathrm{E})=1-(1-2\cdot p)^2=4\cdot p-4\cdot p^2$	3

Aufgabe 6:

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:
Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

6.1 Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

2 BE

6.2 Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.

Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

3 BE

6.1	*rrwww, rrrww, rwwww*	2
6.2	$P(\mathrm{E})=P(\mathrm{ww})+P(rr)=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{17}{30}$ E ist wahrscheinlicher als sein Gegenereignis, da $P\left(\overline{\mathrm{E}}\right)=1-\frac{17}{30}=\frac{13}{30}$.	3

Aufgabe 7:

Die Flächen zweier Würfel 1 und 2 sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet.
Würfel 1: B, B, C, C, C, C
Würfel 2: A, A, A, B, B, C
Für jeden der beiden Würfel wird angenommen, dass jede der Flächen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird.

7.1 Würfel 1 wird zweimal geworfen.

Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird.

Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße.

2 BE

7.2 Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde.

3 BE

7.1	$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \end{array}$ Erwartungswert: $0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$	2
7.2	$P_{\mathrm{C}}(2)=\frac{P(2)\cdot P_2(\mathrm{C})}{P(\mathrm{C})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}=\frac{1}{5}$	3

Aufgabe 8:

Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	
A	p		$3\cdot p$
$\overline{\mathrm{A}}$			$1-3\cdot p$
	$4\cdot p$		1

8.1 Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann.

3 BE

8.2 Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig.

Ermitteln Sie diesen Wert von p.

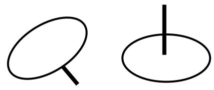
2 BE

8.1	$\begin{array}{c|c|c|c} & \mathrm{B} & \overline{\mathrm{B}} & \\ \hline \mathrm{A} & p & 2\cdot p & 3\cdot p \\ \overline{\mathrm{A}} & 3\cdot p & 1-6\cdot p & 1-3\cdot p \\ \hline & 4\cdot p & 1-4\cdot p & 1 \end{array}$ Für $p=\frac{1}{5}$ gilt $1-6\cdot p<0$.	3
8.2	Für $p\neq 0$ gilt: $P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \Leftrightarrow 3\cdot p\cdot 4\cdot p=p \Leftrightarrow 12\cdot p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{12}$	2

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1.1	3		II		I	I		1	2	
1.2	2			II	I	I		1	1	

Aufgabe 9:

Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben (siehe Abbildung). Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84.



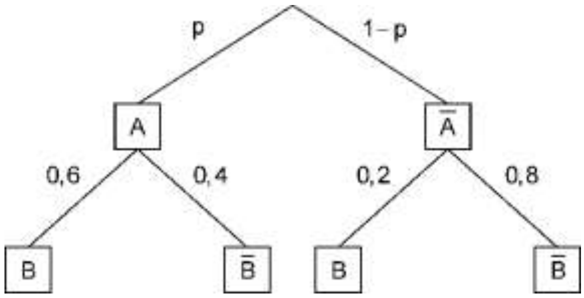
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt.

5 BE

	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei zwei Würfen zweimal auf dem Kopf liegen bleibt, beträgt 0,16. Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit von 0,4, dass sie bei einem Wurf auf dem Kopf liegen bleibt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt: $2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,48$.	5

Aufgabe 10:

Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



10.1 Bestimmen Sie den Wert von *p* so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment insgesamt mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 eintritt.

2 BE

10.2 Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

3 BE

10. 1	$p \cdot 0,6 + (1-p) \cdot 0,2 = 0,3 \Leftrightarrow p = 0,25$	2
10. 2	$P(B) = p \cdot 0,6 + (1-p) \cdot 0,2 = p \cdot 0,4 + 0,2$ Die Wahrscheinlichkeit von B kann also maximal den Wert 0,6 annehmen.	3

Aufgabe 11:

Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit *n* roten und $3 \cdot n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt.

Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.

11.1 Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.

1 BE

11.2 Für einen bestimmten Wert von *n* beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$.

Bestimmen Sie diesen Wert von *n*.

4 BE

11. 1	In der Urne A können sich 4, 5 oder 6 rote Kugeln befinden.	1

11.2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{4\cdot n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot n+1}{4\cdot n+1}=\frac{4\cdot n+2}{2\cdot(4\cdot n+1)}=\frac{2\cdot n+1}{4\cdot n+1}=\frac{15}{29}\Leftrightarrow n=7$	4

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
2.1	1					X			I			I	1		
2.2	4	X				X		III			II			1	3

Aufgabe 12:

Betrachtet werden zwei Urnen.

12.1 Eine Urne enthält einhundert Kugeln, davon sind zwanzig weiß. Zwei Kugeln werden nacheinander zufällig gezogen; dabei wird die erste gezogene Kugel nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht.

Geben Sie in diesem Zusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\frac{20}{100}\cdot\frac{19}{99}$ angegeben wird.

1 BE

12.2 Eine andere Urne enthält ebenfalls einhundert Kugeln; für die Anzahl w der enthaltenen weißen Kugeln gilt $1<w<99$. Auch aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander zufällig gezogen. Die erste gezogene Kugel ist weiß.

Betrachtet werden zwei Fälle:

1. Fall: Die erste gezogene Kugel wird nicht zurücklegt, bevor man die zweite zieht.

2. Fall: Die erste gezogene Kugel wird zurücklegt, bevor man die zweite zieht.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch die zweite gezogene Kugel weiß ist, beträgt im 1. Fall p, im 2. Fall ist sie 2 % von p größer.

Berechnen Sie den Wert von w.

4 BE

12.1	Beide gezogenen Kugeln sind weiß.	1
12.2	$\frac{w}{100}=1{,}02\cdot\frac{w-1}{99}\Leftrightarrow 99\cdot w=102\cdot w-102\Leftrightarrow w=34$	4

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
2.1	1			I	I		I	1		
2.2	4		III	III		II	II		1	3

Aufgabe 13:

Bei einem Spiel werfen zwei Spieler abwechselnd jeweils drei Würfel. Das Spiel endet, wenn ein Spieler die Augensumme 18 erzielt oder die Augensumme des vorausgegangenen Wurfs des anderen Spielers nicht übertrifft.

Beim ersten Wurf des Spiels erzielt ein Spieler die Augensumme 15.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler die Würfel im selben Spiel noch einmal wirft.

Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

5 BE

	Der Spieler wird noch einmal würfeln, wenn der andere Spieler beim nächsten Wurf die Augensumme 16 oder die Augensumme 17 erzielt. Für den Wurf des anderen Spielers kommen also folgende Fälle infrage: ▪ für die Augensumme 16: einmal 4 und zweimal 6; zweimal 5 und einmal 6 ▪ für die Augensumme 17: einmal 5 und zweimal 6	5

	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler noch einmal würfelt, beträgt demnach $2\cdot 3\cdot\frac{1}{6^3}+3\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{9}{216}=\frac{1}{24}$.	

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5		III	III		II			2	3

Aufgabe 14:

In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.

14.1 Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind.

1 BE

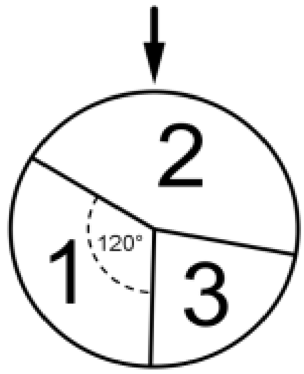
14.2 Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden.

4 BE

14.1	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	1
14.2	Da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, nach den beschriebenen Vorgängen $\frac{1}{16}$ beträgt, ist nun jede vierte Kugel gelb. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl mit x, so ergibt sich $\frac{x+2}{4\cdot x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\cdot x+6=4\cdot x\Leftrightarrow x=6$.	4

Aufgabe 15:

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Die Abbildung zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit p bezeichnet.



Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 Euro. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in Euro ausgezahlt; ansonsten erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen.

Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von p berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen.

5 BE

	Eine Auszahlung erfolgt nur dann, wenn der Spieler zweimal die Zahl 3 oder die Zahlen 2 und 3 erzielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, zweimal die Zahl 3 zu erzielen, beträgt $\left(\frac{2}{3}-p\right)^2$, die Wahrscheinlichkeit dafür, die Zahlen 2 und 3 zu erzielen, $2\cdot p\cdot\left(\frac{2}{3}-p\right)$. Damit sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen, muss der Erwartungswert für die Auszahlung bei einmaliger Durchführung des Spiels mit dem Einsatz übereinstimmen. Damit ergibt sich für die gesuchte Gleichung: $2\cdot p\cdot\left(\frac{2}{3}-p\right)\cdot 5+\left(\frac{2}{3}-p\right)^2\cdot 6=1$	5

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5	II	III	II	I	I	II		2	3