

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

Билет 109

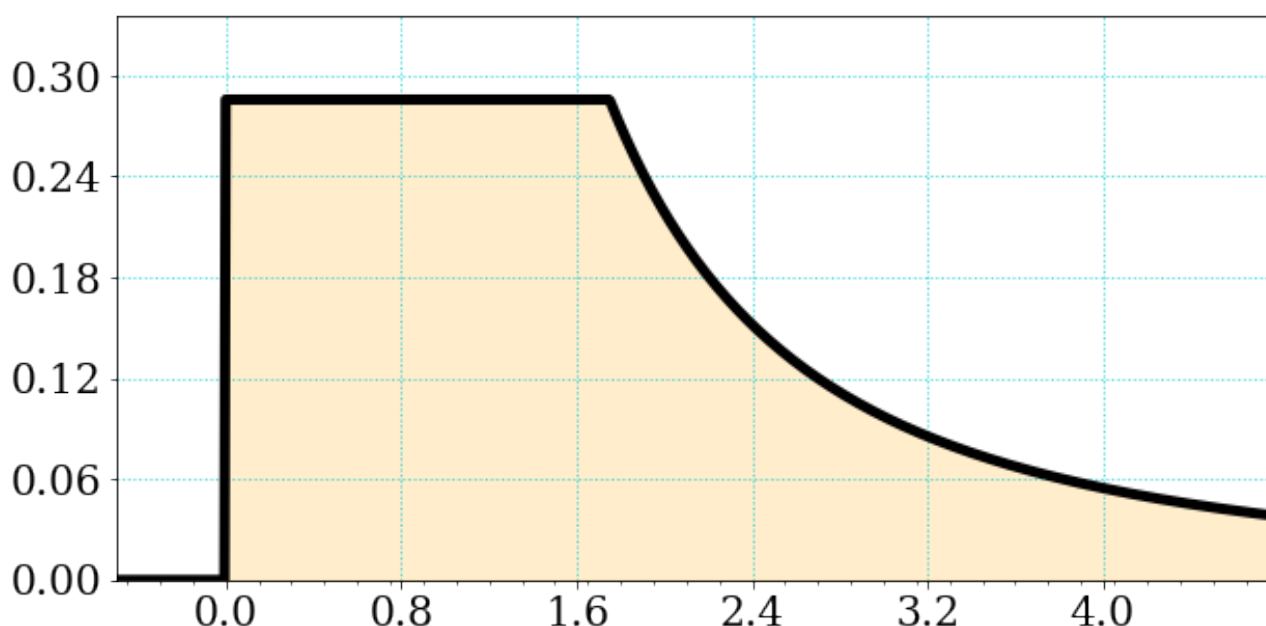
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-распределения. Запишите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\text{Var}(X)$ гамма-распределения

Здесь написано много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 4]$ и $[0; 7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\mathbb{P}(0,035 \leq Z \leq 2,775)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид:
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2x}{7}, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4} \approx 1,75; \\ 1 - \frac{7}{8x}, & x \geq \frac{7}{4}; \end{cases} \quad 2)$$

Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид:
$$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{2}{7}, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4} \approx 1,75; \\ \frac{7}{8x^2}, & x \geq \frac{7}{4}; \end{cases}$$



- 3) вероятность равна: $\mathbb{P}(0,035 \leq Z \leq 2,775) = 0,67474$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5*Y, \text{ с вероятностью } 0.11 \\ 8*Y, \text{ с вероятностью } 1 - 0.11 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X .

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$$E(Y) = 1 * 0.7 + 10 * (1 - 0.7)$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1^2 * 0.7 + 10^2 * (1 - 0.7) - [E(Y)]^2$$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайной величины X

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(5*Y) * 0.11 + E(8*Y) * (1 - 0.11)] = E(Y) * (5 * 0.11 + 8 * (1 - 0.11)) = 28.379$$

$$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$$

$$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 1027.72936$$

4. (10) В группе Ω учатся студенты: $\omega_1 \dots \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1 \dots 25$. Все оценки известны $x_0 = 40, y_0 = 84, x_1 = 83, y_1 = 71, x_2 = 85, y_2 = 64, x_3 = 77, y_3 = 32, x_4 = 86, y_4 = 59, x_5 = 99, y_5 = 77, x_6 = 91, y_6 = 74, x_7 = 46, y_7 = 48, x_8 = 73, y_8 = 42, x_9 = 82, y_9 = 89, x_{10} = 40, y_{10} = 43, x_{11} = 60, y_{11} = 31, x_{12} = 81, y_{12} = 57, x_{13} = 88, y_{13} = 50, x_{14} = 34, y_{14} = 31, x_{15} = 45, y_{15} = 63, x_{16} = 38, y_{16} = 45, x_{17} = 34, y_{17} = 92, x_{18} = 92, y_{18} = 83, x_{19} = 88, y_{19} = 56, x_{20} = 60, y_{20} = 36, x_{21} = 85, y_{21} = 59, x_{22} = 60, y_{22} = 87, x_{23} = 30, y_{23} = 53, x_{24} = 56, y_{24} = 73$. Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geq 50$ и $Y \geq 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = -335.0 2) Коэффициент корреляции = -2.4919

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	24	17	3
$X = 300$	13	24	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть \bar{X} и \bar{Y} – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $E(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 248.8024
3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 2.0333

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

$$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$$

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$\beta = (\beta + 1) \cdot 67.0$$

$$\beta = \frac{67.0}{1-67.0}$$

$$P(x \leq 52.0) = F(52.0) = 52.0^{2.03}$$

Ответ: 2.03, 0.27

Подготовил

Рябов

П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021

Феклин

Феклин В.Г.