

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

Билет 124

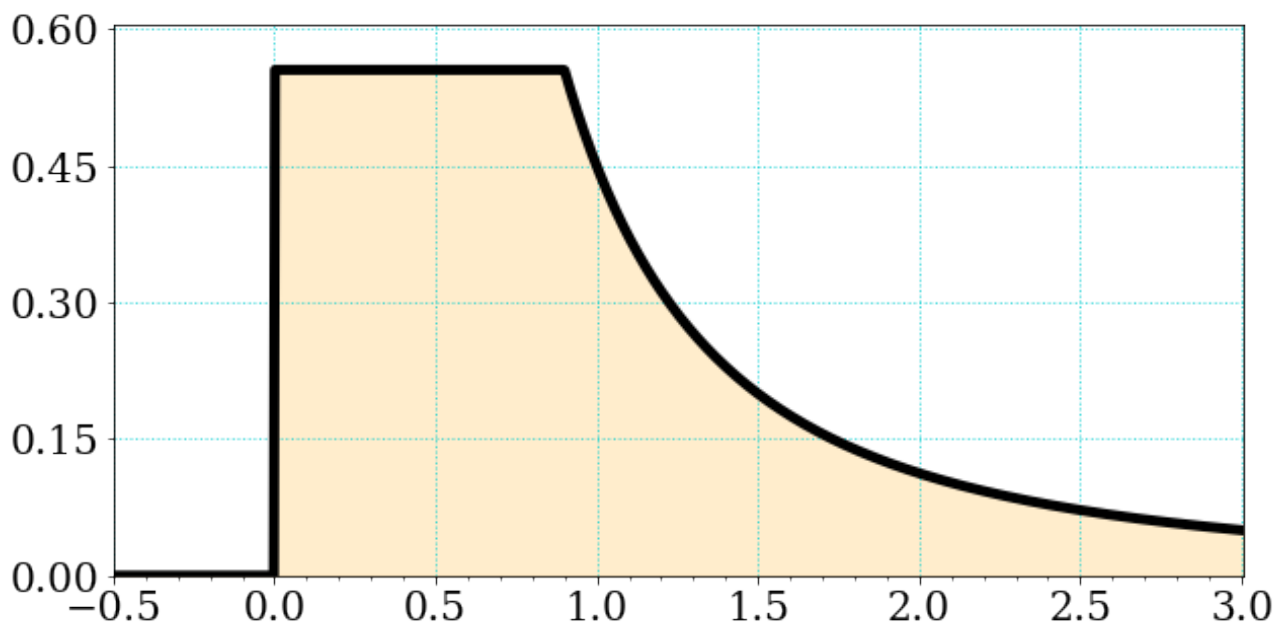
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2 -распределения. Выведите формулы для математического ожидания $E(X)$ и дисперсии $Var(X)$ χ^2 -распределение с n степенями свободы. Найдите а) $P(\chi_{20}^2 > 10.9)$, где χ_{20}^2 – случайная величина, которая имеет χ^2 -распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi_{0.93}^2(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

$$P(\chi_{20}^2 > 10.9) = 0.948775; \chi_{0.93}^2(5) = 1.34721.$$

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 9]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $P(0,719 \leq Z \leq 1,005)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид:
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{5x}{9}, & 0 \leq x \leq \frac{9}{10} \approx 0,9; \\ 1 - \frac{9}{20x}, & x \geq \frac{9}{10}; \end{cases} \quad 2)$$

Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид:
$$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{5}{9}, & 0 \leq x \leq \frac{9}{10} \approx 0,9; \\ \frac{9}{20x^2}, & x \geq \frac{9}{10}; \end{cases} .$$



3) вероятность равна: $\mathbb{P}(0,719 \leq Z \leq 1,005) = 0,15287$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8*Y, & \text{с вероятностью } 0.15 \\ 6*Y, & \text{с вероятностью } 1 - 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X .

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$$E(Y) = 2 * 0.61 + 1 * (1 - 0.61)$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2^2 * 0.61 + 1^2 * (1 - 0.61) - [E(Y)]^2$$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайной величины X

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(8*Y) * 0.15 + E(6*Y) * (1 - 0.15)] = E(Y) * (8 * 0.15 + 6 * (1 - 0.15)) = 10.143$$

$$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$$

$$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 10.88555$$

4. (10) В группе Ω учатся студенты: $\omega_1 \dots \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1 \dots 25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72, x_1 = 94, y_1 = 94, x_2 = 91, y_2 = 52, x_3 = 47, y_3 = 59, x_4 = 53, y_4 = 45, x_5 = 96, y_5 = 54, x_6 = 60, y_6 = 99, x_7 = 70, y_7 = 44, x_8 = 50, y_8 = 81, x_9 = 57, y_9 = 40, x_{10} = 99, y_{10} = 61, x_{11} = 94, y_{11} = 43, x_{12} = 85, y_{12} = 96, x_{13} = 30, y_{13} = 91, x_{14} = 57, y_{14} = 37, x_{15} = 42, y_{15} = 35, x_{16} = 84, y_{16} = 75, x_{17} = 96, y_{17} = 97, x_{18} = 69, y_{18} = 92, x_{19} = 91, y_{19} = 93, x_{20} = 45, y_{20} = 30, x_{21} = 35, y_{21} = 94, x_{22} = 83, y_{22} = 53, x_{23} = 53, y_{23} = 60, x_{24} = 36, y_{24} = 69$. Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geq 50$ и $Y \geq 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = -350.8333 2) Коэффициент корреляции = -1.2925

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	16	22
$X = 300$	7	26	13

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть \bar{X} и \bar{Y} – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1)

математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.89 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 239.4845
3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.3732

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 62.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59.0%.

$$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$$

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$\beta = (\beta + 1) \cdot 62.0$$

$$\beta = \frac{62.0}{1-62.0}$$

$$P(x \leq 59.0) = F(59.0) = 59.0^{1.63}$$

Ответ: 1.63, 0.42

Подготовил

Рябов

П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021

Феклин

Феклин В.Г.