

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

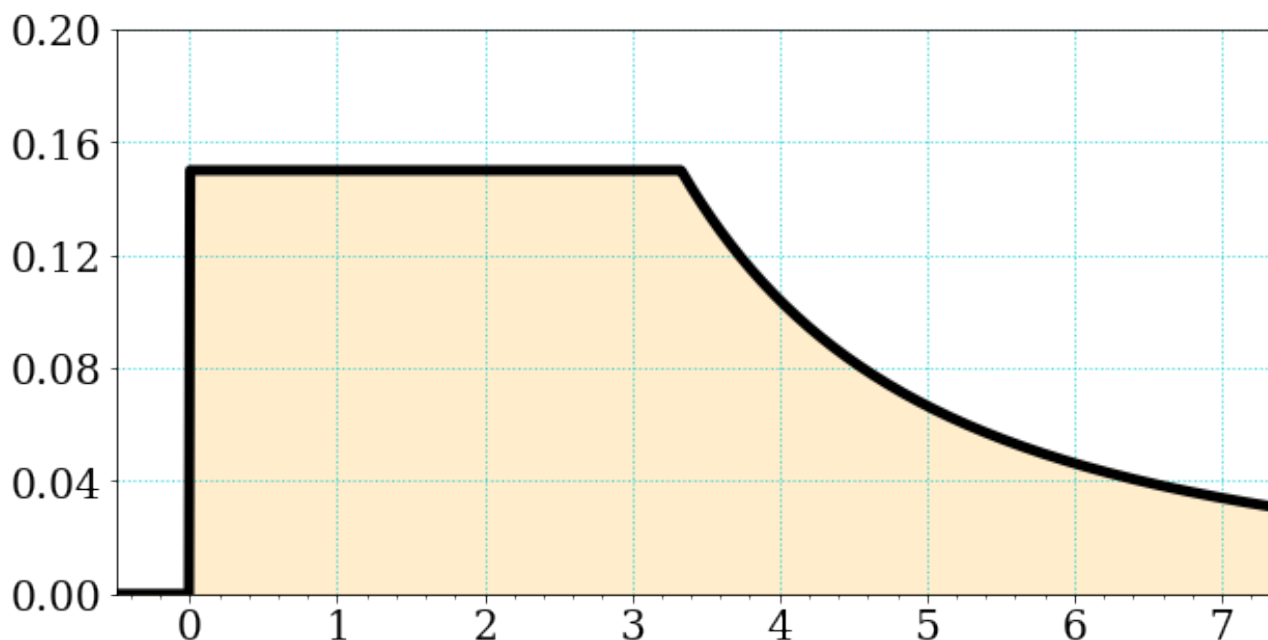
Билет 126

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2 -распределения. Выведите формулы для математического ожидания $E(X)$ и дисперсии $Var(X)$ χ^2 -распределение с n степенями свободы. Найдите а) $P(\chi_{20}^2 > 10.9)$, где χ_{20}^2 – случайная величина, которая имеет χ^2 -распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi_{0.93}^2(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

$$P(\chi_{20}^2 > 10.9) = 0.948775; \chi_{0.93}^2(5) = 1.34721.$$

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 3]$ и $[0; 10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $P(3.263 \leq Z \leq 5.35)$.

- 1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид:
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{3x}{20}, & 0 \leq x \leq \frac{10}{3} \approx 3.333; \\ 1 - \frac{5}{3x}, & x \geq \frac{10}{3}; \end{cases}$$
- 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид:
$$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{3}{20}, & 0 \leq x \leq \frac{10}{3} \approx 3.333; \\ \frac{5}{3x^2}, & x \geq \frac{10}{3}; \end{cases}$$



3) вероятность равна: $\mathbb{P}(3,263 \leq Z \leq 5,35) = 0,19897$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет 85,7143%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опустится ниже 96%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою
Ответ: 782757789696

4. (10) В группе Ω учатся студенты: $\omega_1 \dots \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1 \dots 25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72, x_1 = 94, y_1 = 94, x_2 = 91, y_2 = 52, x_3 = 47, y_3 = 59, x_4 = 53, y_4 = 45, x_5 = 96, y_5 = 54, x_6 = 60, y_6 = 99, x_7 = 70, y_7 = 44, x_8 = 50, y_8 = 81, x_9 = 57, y_9 = 40, x_{10} = 99, y_{10} = 61, x_{11} = 94, y_{11} = 43, x_{12} = 85, y_{12} = 96, x_{13} = 30, y_{13} = 91, x_{14} = 57, y_{14} = 37, x_{15} = 42, y_{15} = 35, x_{16} = 84, y_{16} = 75, x_{17} = 96, y_{17} = 97, x_{18} = 69, y_{18} = 92, x_{19} = 91, y_{19} = 93, x_{20} = 45, y_{20} = 30, x_{21} = 35, y_{21} = 94, x_{22} = 83, y_{22} = 53, x_{23} = 53, y_{23} = 60, x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geq 50$ и $Y \geq 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = -350.8333 2) Коэффициент корреляции = -1.2925

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 6, 2 : 16, 3 : 9, 4 : 16, 5 : 14, 6 : 4, 7 : 25,$

Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть \bar{X} - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

$k = \text{len}(\text{marks}) // k$

$ex = \text{np.sum}([\text{marks}[m] * m \text{ for } m \text{ in marks}]) / n$

$varx = \text{np.var}([m \text{ for } m \text{ in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)$

$sigma_x = \text{varx}^{**}(0.5)$ Ответы: 6.14667, 0.65542.

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 57.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опустится ниже 51.0%.

$$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$$

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$\beta = (\beta + 1) \cdot 57.0$$

$$\beta = \frac{57.0}{1-57.0}$$

$$P(x \leq 51.0) = F(51.0) = 51.0^{1.33}$$

Ответ: 1.33, 0.41

Подготовил



П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021



Феклин В.Г.