ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»
Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»
Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

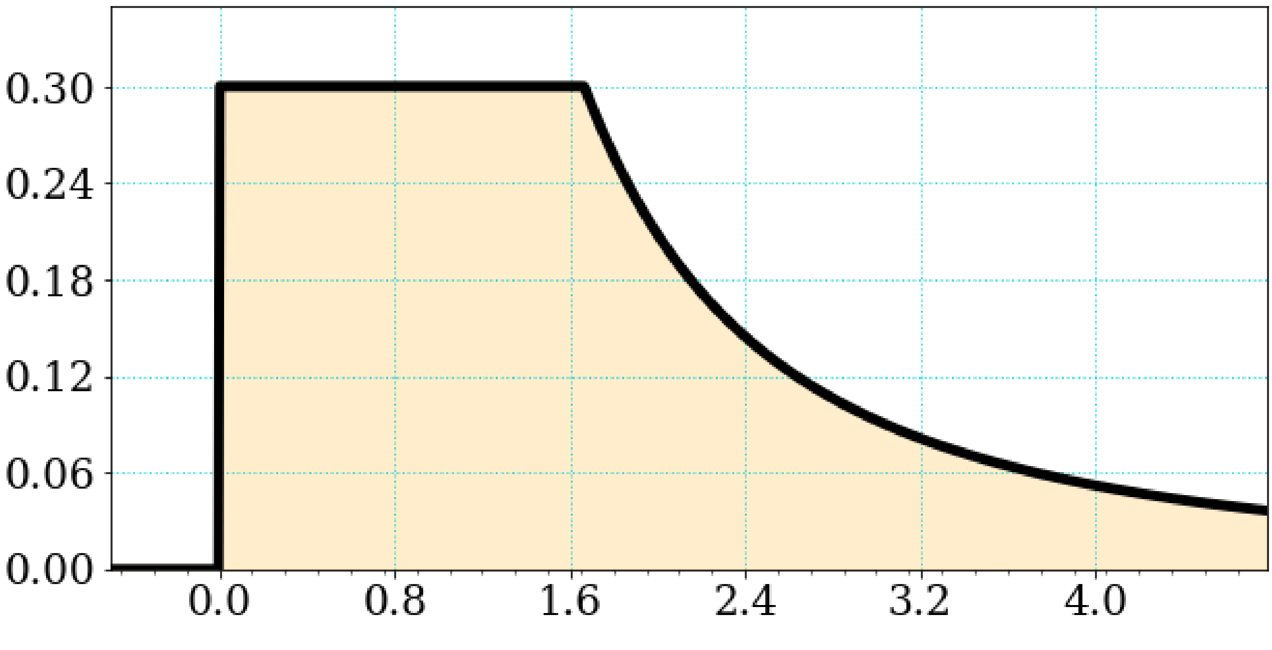
1 Билет 101

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

   Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;5]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}915 \leqslant Z \leqslant 2{,}783)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{10}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3} \approx 1{,}667; \\ 1 - \frac{5}{6x}, x \geqslant \frac{5}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{10}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3} \approx 1{,}667; \\ \frac{5}{6x^2}, x \geqslant \frac{5}{3}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(0{,}915 \leqslant Z \leqslant 2{,}783) = 0{,}4261$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 17%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 410338673

4. Создайте эмперические совокупности exp и log вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(100)$ и $\log(1), \log(2), ..., \log(10$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и log на совокупности натуральных чисел от 1 до 100.

   Используя

   $E(X) = sum(X)/n$

   $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

   $Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

   $r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X)*E(Y)}{\sigma(X)*\sigma(Y)}$

   рассчитаем искомые значения.

   Ответы: $4.25253870368928 \cdot 10^{41}, 2.85939246949767 \cdot 10^{42}, 4.98013632124489 \cdot 10^{171}, 71.49826, 0.00038$.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	24	17	3
$X = 300$	13	24	19

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 248.8024 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 2.0333

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

   $$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + 2X_3 + 6X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 5X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

   Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

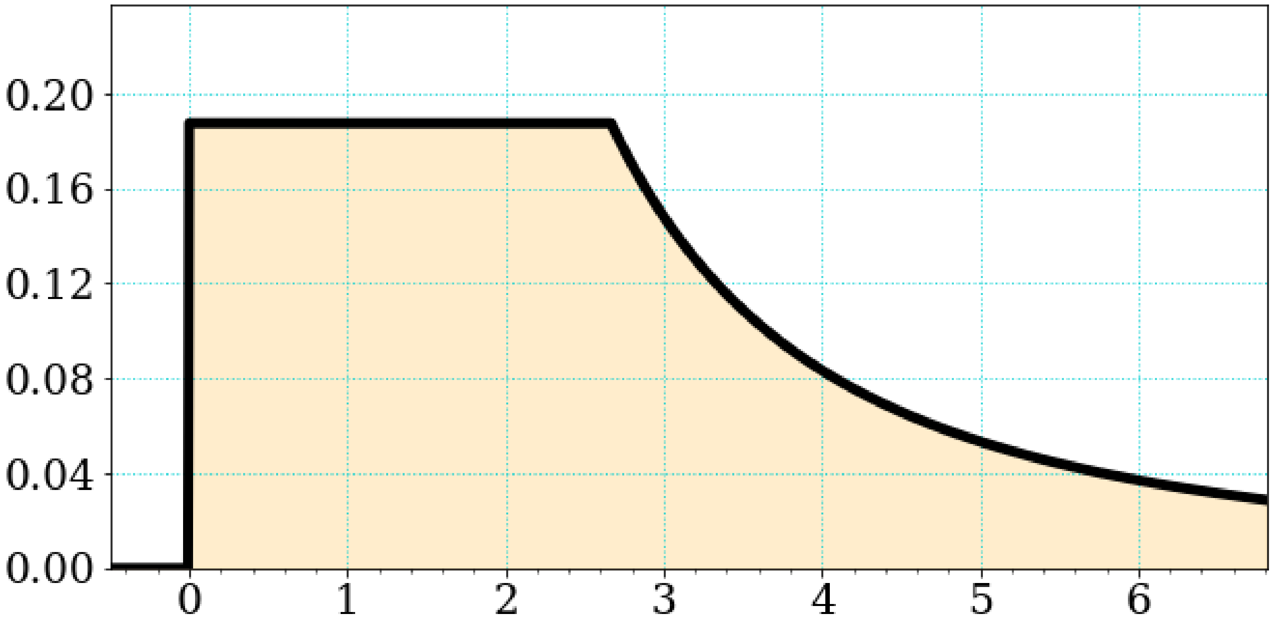
2 Билет 102

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

   Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 3]$ и $[0; 8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ 1 - \frac{4}{3x}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ \frac{4}{3x^2}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811) = 0{,}25884$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5*y, \text{свероятностью } 0.11 \\ 8*y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.11 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 1 * 0.7 + 10 * (1 - 0.7)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1^2 * 0.7 + 10^2 * (1 - 0.7) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(5*Y)*0.11 + E(8*Y)*(1-0.11)] = E(Y)*(5*0.11+8*(1-0.11)) = 28.379$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 1027.72936$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$,

$x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация $= -350.8333$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	25	26	10
$X = 300$	10	10	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.59 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 228.8693 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 1.3324

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 71.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 62.0%.

$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta + 1) \cdot 71.0$

$\beta = \frac{71.0}{1-71.0}$

$P(x \leq 62.0) = F(62.0) = 62.0^{2.45}$

Ответ: $2.45, 0.31$

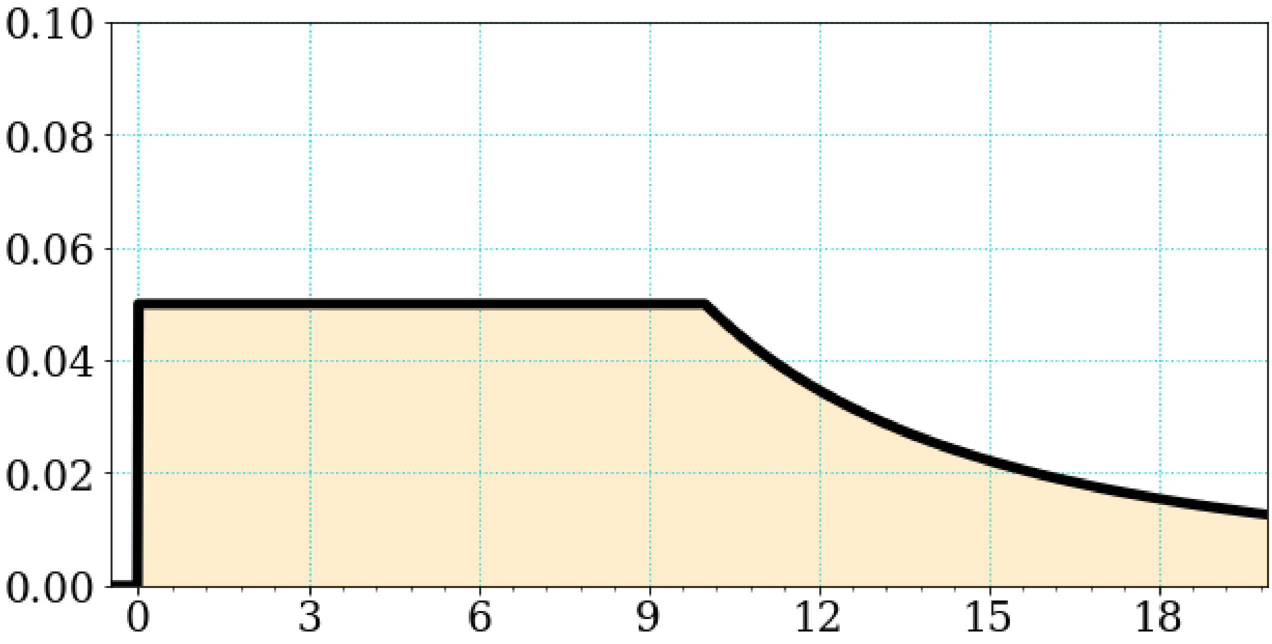
3 Билет 103

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 1]$ и $[0; 10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(2,96 $\leqslant Z \leqslant$ 17,91).

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{20}, 0 \leqslant x \leqslant 10 \approx 10{,}0; \\ 1 - \frac{5}{x}, x \geqslant 10; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{20}, 0 \leqslant x \leqslant 10 \approx 10{,}0; \\ \frac{5}{x^2}, x \geqslant 10; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91) = 0{,}57283$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $91,6667\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 30155888444737842659

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -345.5$ 2) Коэффициент корреляции $= -2.9554$

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 6,\ 2 : 16,\ 3 : 9,\ 4 : 16,\ 5 : 14,\ 6 : 4,\ 7 : 25,\ 8 : 26,\ 9 : 24,\ 10 : 10\}$

   Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: $6.14667, 0.65542$.

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 60.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta + 1) \cdot 60.0$

$\beta = \frac{60.0}{1-60.0}$

$P(x \leq 52.0) = F(52.0) = 52.0^{1.5}$

Ответ: $1.5, 0.37$

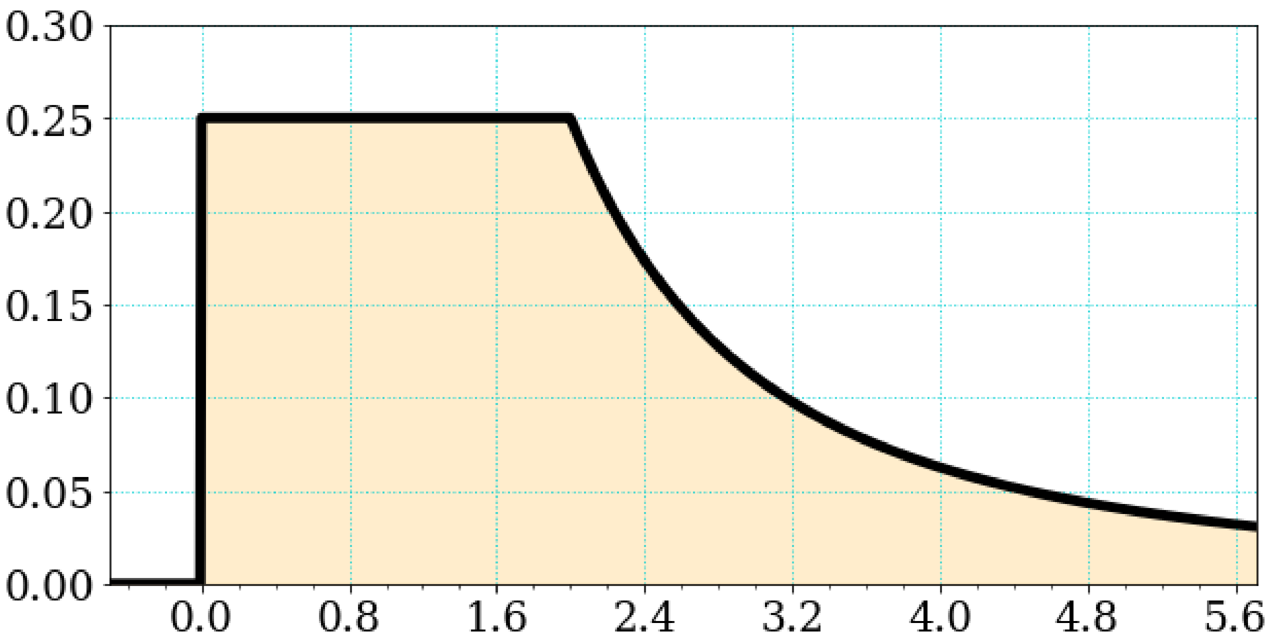
4 Билет 104

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 5]$ и $[0; 10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $¶(0{,}1 \leqslant Z \leqslant 3{,}714)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{4}, 0 \leqslant x \leqslant 2 \approx 2{,}0; \\ 1 - \frac{1}{x}, x \geqslant 2; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{4}, 0 \leqslant x \leqslant 2 \approx 2{,}0; \\ \frac{1}{x^2}, x \geqslant 2; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: $¶(0{,}1 \leqslant Z \leqslant 3{,}714) = 0{,}70575$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $91,6667\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 30155888444737842659

4. Создайте эмперические совокупности log и cos вида $\log(1), \log(2), ..., \log(61)$ и $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(61)$.

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности log, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков log и cos на совокупности натуральных чисел от 1 до 61.

   Используя

   $E(X) = sum(X)/n$

   $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

   $Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

   $r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X)*E(Y)}{\sigma(X)*\sigma(Y)}$

   рассчитаем искомые значения.

   Ответы: $3.15966, 0.89438, 3.08587, 1.82265, -1.0 \cdot 10^{-5}$.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	25	26	10
$X = 300$	10	10	19

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.59 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 228.8693 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 1.3324

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−6	X=−5	X=−4
Y = 5	0.039	0.207	0.054
Y = 6	0.035	0.255	0.41

   Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 5.82286. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

   $E(Y|X+Y=1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

   Ответ: 5.82286

5 Билет 105

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

   Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. (10) Сформулируйте критерий независимости χ^2 – Пирсона. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) явный вид статистики критерия в случае, когда таблица сопряженности двух признаков X и Y имеет вид

	$Y = y_1$	$Y = y_2$
$X = x_1$	a	b
$X = x_2$	c	d

Здесь формулировки критерия независимости Пирсона и приводится пример

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{10, 7\}$, при этом $P(Y = 10) = 0.24$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 4*y, \text{свероятностью 0.53} \\ 9*y, \text{свероятностью 1 - 0.53} \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 10 * 0.24 + 7 * (1 - 0.24)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 10^2 * 0.24 + 7^2 * (1 - 0.24) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(4*Y)*0.53+E(9*Y)*(1-0.53)] = E(Y)*(4*0.53+9*(1-0.53)) = 49.022$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 447.56552$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = 276.75 2) Коэффициент корреляции = 1.373

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 11-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 13,\ 2 : 3,\ 3 : 14,\ 4 : 9,\ 5 : 6,\ 6 : 15,\ 7 : 1,\ 8 : 22,\ 9 : 17,\ 10 : 10,\ 11 : 16\}$

   Работы будут перепроверять 6 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: 6.57937, 0.64259.

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−3	X=−2	X=−1
Y = 2	0.29	0.298	0.234
Y = 3	0.066	0.03	0.082

Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 2.10982. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

$E(Y|X+Y=1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

Ответ: 2.10982

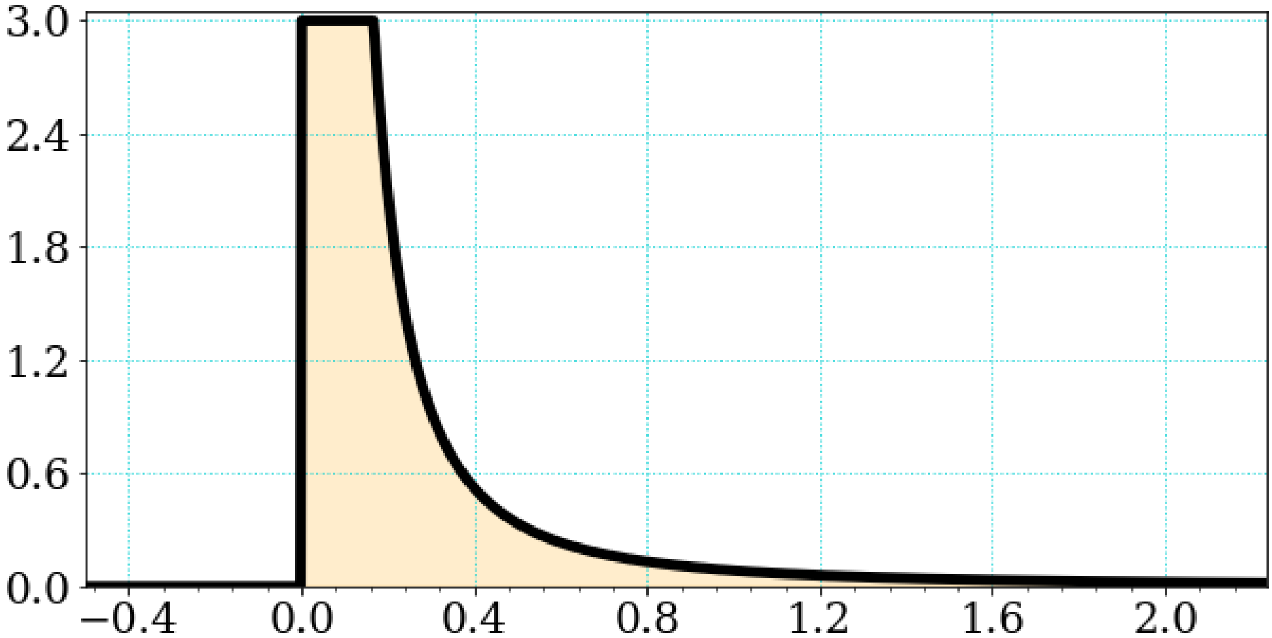
6 Билет 106

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите a) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 6]$ и $[0; 1]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(0,087 ⩽ Z ⩽ 0,235).

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ 3x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{6} \approx 0{,}167; \\ 1 - \frac{1}{12x}, x \geqslant \frac{1}{6}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 3, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{6} \approx 0{,}167; \\ \frac{1}{12x^2}, x \geqslant \frac{1}{6}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶(0,087 ⩽ Z ⩽ 0,235) = 0,38564.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 1174711139837

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 32, y_0 = 89$, $x_1 = 61, y_1 = 91$, $x_2 = 64, y_2 = 88$, $x_3 = 97, y_3 = 55$, $x_4 = 66, y_4 = 84$, $x_5 = 78, y_5 = 56$, $x_6 = 62, y_6 = 60$, $x_7 = 73, y_7 = 42$, $x_8 = 40, y_8 = 59$, $x_9 = 86, y_9 = 80$, $x_{10} = 76, y_{10} = 33$, $x_{11} = 56, y_{11} = 64$, $x_{12} = 87, y_{12} = 86$, $x_{13} = 70, y_{13} = 38$, $x_{14} = 87, y_{14} = 76$, $x_{15} = 72, y_{15} = 63$, $x_{16} = 79, y_{16} = 41$, $x_{17} = 33, y_{17} = 74$, $x_{18} = 67, y_{18} = 71$, $x_{19} = 65, y_{19} = 34$, $x_{20} = 57, y_{20} = 56$, $x_{21} = 63, y_{21} = 87$, $x_{22} = 68, y_{22} = 95$, $x_{23} = 46, y_{23} = 94$, $x_{24} = 50, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -262.8$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.5753$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.084 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.9911

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−4	X=−3	X=−2
Y = 3	0.07	0.084	0.205
Y = 4	0.011	0.201	0.429

   Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 3.49618. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

   $E(Y|X+Y=1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

   Ответ: 3.49618

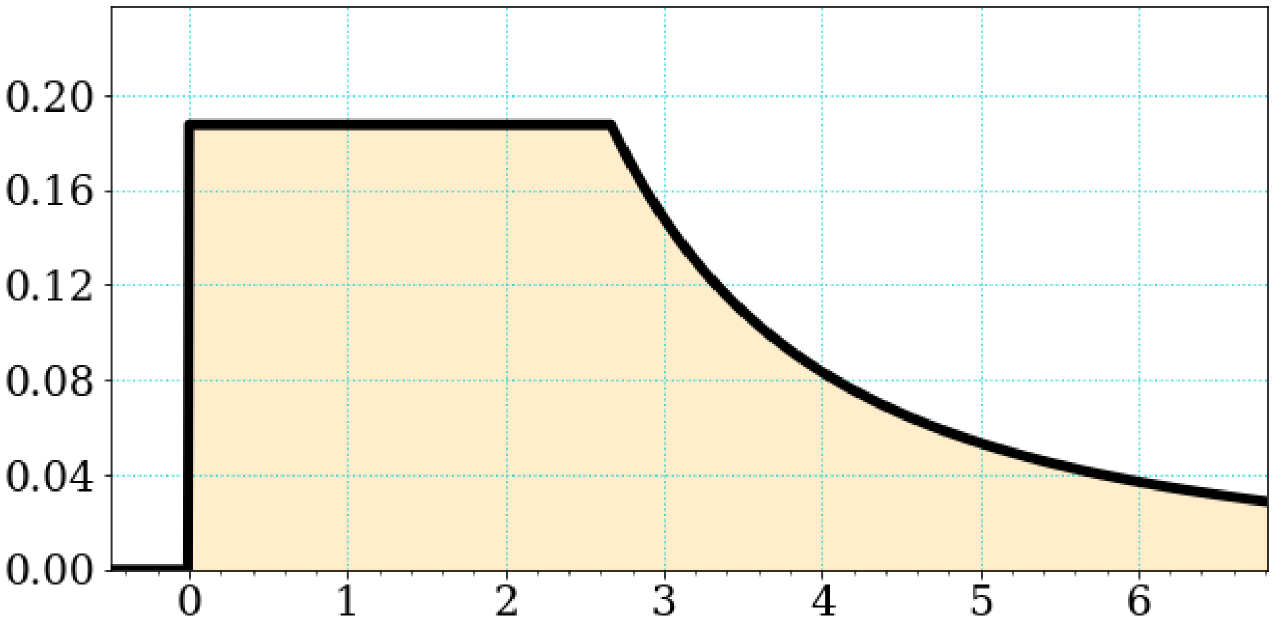
7 Билет 107

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

   Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 3]$ и $[0; 8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ 1 - \frac{4}{3x}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ \frac{4}{3x^2}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811) = 0{,}25884$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. Создайте эмперические совокупности exp и cos вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(57)$ и $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(57$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и cos на совокупности натуральных чисел от 1 до 57.

   Используя

   $E(X) = sum(X)/n$

   $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

   $Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

   $r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X)*E(Y)}{\sigma(X)*\sigma(Y)}$

   рассчитаем искомые значения.

   Ответы: $1.57801343872465 \cdot 10^{23}, 7.94364472492678 \cdot 10^{23}, 1.66305653632206 \cdot 10^{97}, 38.76647, 0.00352$.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) коварицию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.084 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.9911

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \le x \le 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 55.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 50.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

   $\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\bigg|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

   $\beta = (\beta+1) \cdot 55.0$

   $\beta = \frac{55.0}{1-55.0}$

   $P(x \le 50.0) = F(50.0) = 50.0^{1.22}$

   Ответ: $1.22, 0.43$

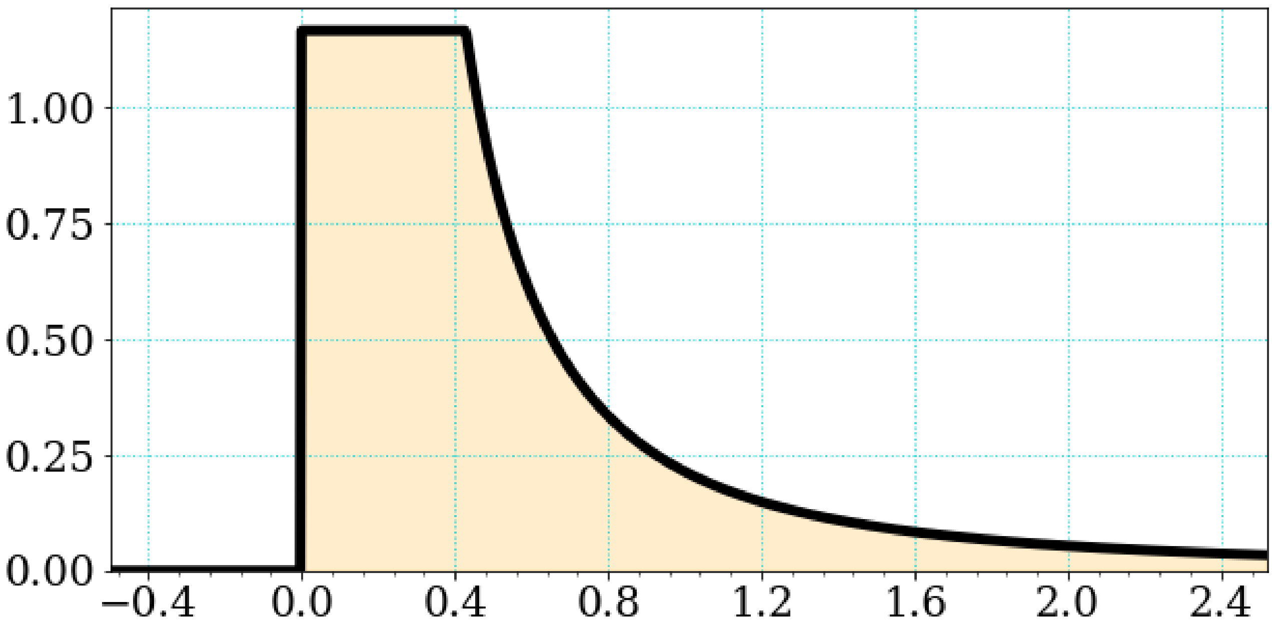
8 Билет 108

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

   Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 7]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{7x}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ 1 - \frac{3}{14x}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{7}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ \frac{3}{14x^2}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519) = 0{,}57962$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{10, 7\}$, при этом $P(Y = 10) = 0.24$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 4{*}y, \text{свероятностью 0.53} \\ 9{*}y, \text{свероятностью 1 - 0.53} \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 10 * 0.24 + 7 * (1 - 0.24)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 10^2 * 0.24 + 7^2 * (1 - 0.24) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(4{*}Y){*}0.53{+}E(9{*}Y){*}(1{-}0.53)] = E(Y){*}(4{*}0.53{+}9{*}(1{-}0.53)) = 49.022$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 447.56552$

4. Создайте эмперические совокупности cos и log вида $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(98)$ и $\log(1), \log(2), ..., \log(98)$.

Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности cos, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков cos и log на совокупности натуральных чисел от 1 до 98.

Используя

$E(X) = sum(X)/n$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

$Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

$r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) * E(Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$

рассчитаем искомые значения.

Ответы: $-0.01464, 0.70686, 0.37349, -1.50394, 1.0 \cdot 10^{-5}$.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	23	3
$X = 300$	2	12	32

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 5 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.75 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 244.6913 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 3.7904

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3 + 4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

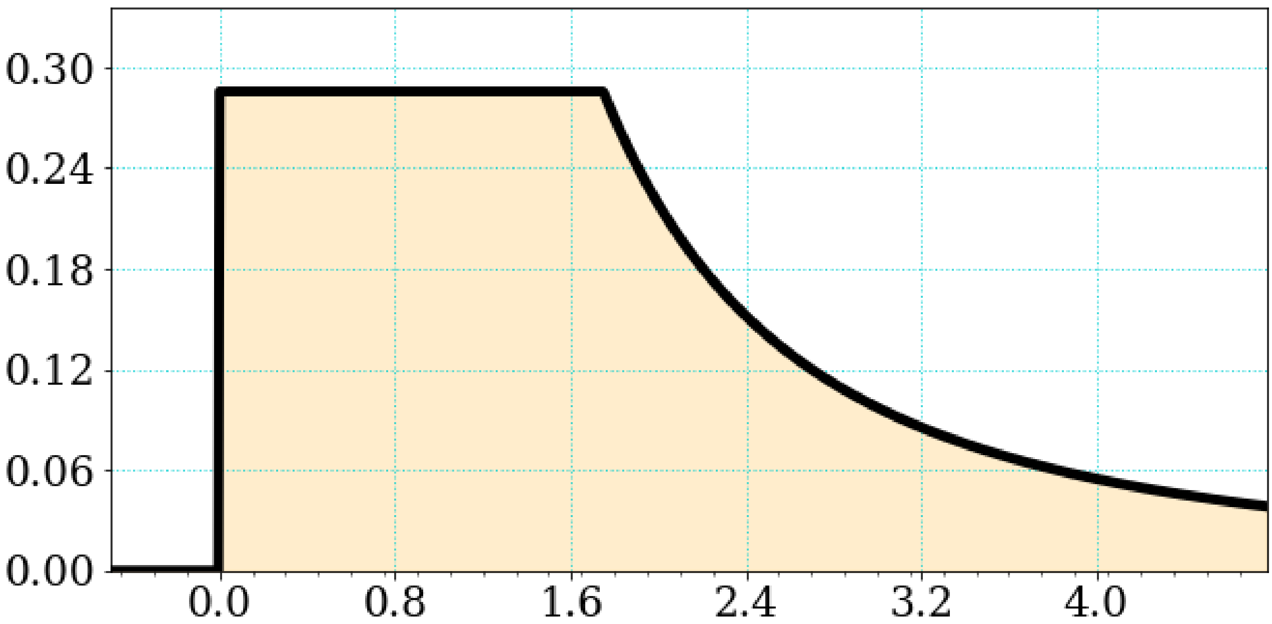
9 Билет 109

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 4]$ и $[0; 7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{2x}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ 1 - \frac{7}{8x}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{2}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ \frac{7}{8x^2}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775) = 0{,}67474$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5{*}y, \text{свероятностью } 0.11 \\ 8{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.11 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 1 * 0.7 + 10 * (1 - 0.7)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1^2 * 0.7 + 10^2 * (1 - 0.7) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(5{*}Y){*}0.11{+}E(8{*}Y){*}(1{-}0.11)] = E(Y){*}(5{*}0.11{+}8{*}(1{-}0.11)) = 28.379$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 1027.72936$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 40, y_0 = 84$, $x_1 = 83, y_1 = 71$, $x_2 = 85, y_2 = 64$, $x_3 = 77, y_3 = 32$, $x_4 = 86, y_4 = 59$, $x_5 = 99, y_5 = 77$, $x_6 = 91, y_6 = 74$, $x_7 = 46, y_7 = 48$, $x_8 = 73, y_8 = 42$, $x_9 = 82, y_9 = 89$, $x_{10} = 40, y_{10} = 43$, $x_{11} = 60, y_{11} = 31$, $x_{12} = 81, y_{12} = 57$, $x_{13} = 88, y_{13} = 50$, $x_{14} = 34, y_{14} = 31$, $x_{15} = 45, y_{15} = 63$, $x_{16} = 38, y_{16} = 45$, $x_{17} = 34, y_{17} = 92$, $x_{18} = 92, y_{18} = 83$, $x_{19} = 88, y_{19} = 56$, $x_{20} = 60, y_{20} = 36$, $x_{21} = 85, y_{21} = 59$, $x_{22} = 60, y_{22} = 87$, $x_{23} = 30, y_{23} = 53$, $x_{24} = 56, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -335.0$ 2) Коэффициент корреляции $= -2.4919$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	24	17	3
$X=300$	13	24	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X},\bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 248.8024 3) ковариацию $Cov(\bar{X},\bar{Y})$: 2.0333

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x)=x^{\beta}, 0\le x\le 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

   $f(x)=F'(x)=\beta\cdot x^{\beta-1}$

   $\mu_1=E(X)=\int_{-\inf}^{\inf}x\cdot f(x)=\int_{-\inf}^{\inf}\beta\cdot x^{\beta}=\beta\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1=\frac{\beta}{\beta+1}$

   $\beta=(\beta+1)\cdot 67.0$

   $\beta=\frac{67.0}{1-67.0}$

   $P(x\le 52.0)=F(52.0)=52.0^{2.03}$

   Ответ: $2.03, 0.27$

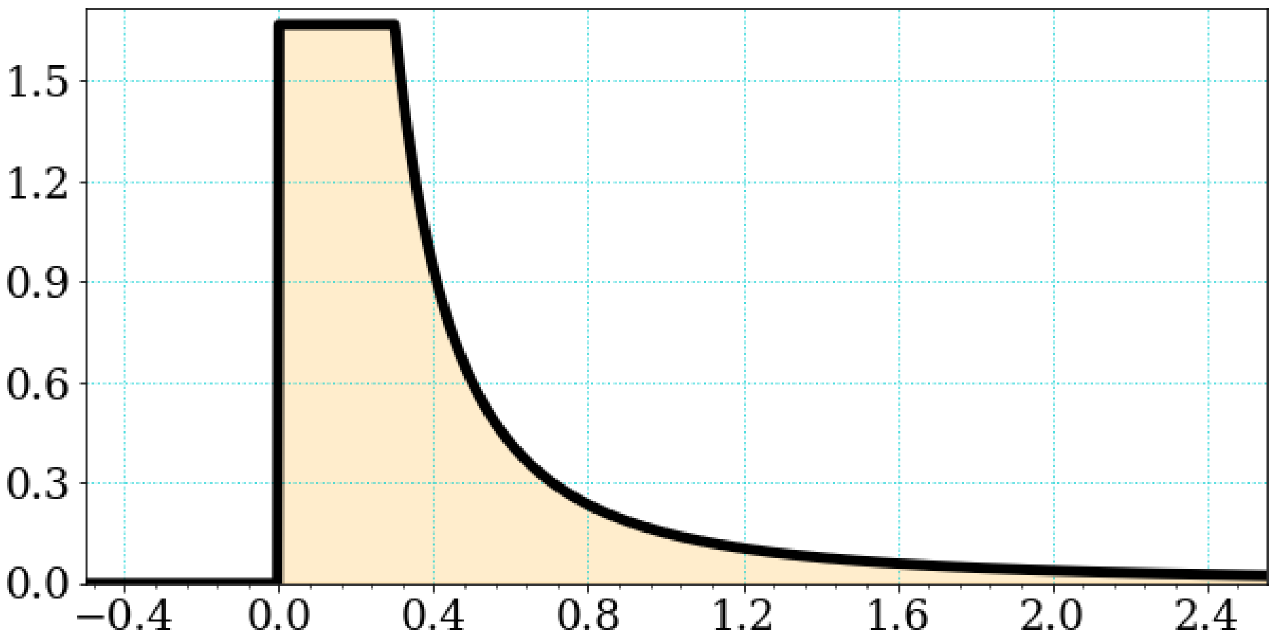
10 Билет 110

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20}>10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20}>10.9)=0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5)=1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;10]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z=\frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}057\leqslant Z\leqslant 0{,}556)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0;\\ \frac{5x}{3}, 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{10}\approx 0{,}3;\\ 1-\frac{3}{20x}, x\geqslant\frac{3}{10};\end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \frac{5}{3}, 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{10}\approx 0{,}3;\\ \frac{3}{20x^2}, x\geqslant\frac{3}{10};\end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}057 \leqslant Z \leqslant 0{,}556) = 0{,}63552$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 140608

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 32, y_0 = 89$, $x_1 = 61, y_1 = 91$, $x_2 = 64, y_2 = 88$, $x_3 = 97, y_3 = 55$, $x_4 = 66, y_4 = 84$, $x_5 = 78, y_5 = 56$, $x_6 = 62, y_6 = 60$, $x_7 = 73, y_7 = 42$, $x_8 = 40, y_8 = 59$, $x_9 = 86, y_9 = 80$, $x_{10} = 76, y_{10} = 33$, $x_{11} = 56, y_{11} = 64$, $x_{12} = 87, y_{12} = 86$, $x_{13} = 70, y_{13} = 38$, $x_{14} = 87, y_{14} = 76$, $x_{15} = 72, y_{15} = 63$, $x_{16} = 79, y_{16} = 41$, $x_{17} = 33, y_{17} = 74$, $x_{18} = 67, y_{18} = 71$, $x_{19} = 65, y_{19} = 34$, $x_{20} = 57, y_{20} = 56$, $x_{21} = 63, y_{21} = 87$, $x_{22} = 68, y_{22} = 95$, $x_{23} = 46, y_{23} = 94$, $x_{24} = 50, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -262.8$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.5753$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	19	5
$X = 300$	25	10	25

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.5595 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.5887

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 71.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 62.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta+1) \cdot 71.0$

$\beta = \frac{71.0}{1-71.0}$

$P(x \leq 62.0) = F(62.0) = 62.0^{2.45}$

Ответ: $2.45, 0.31$

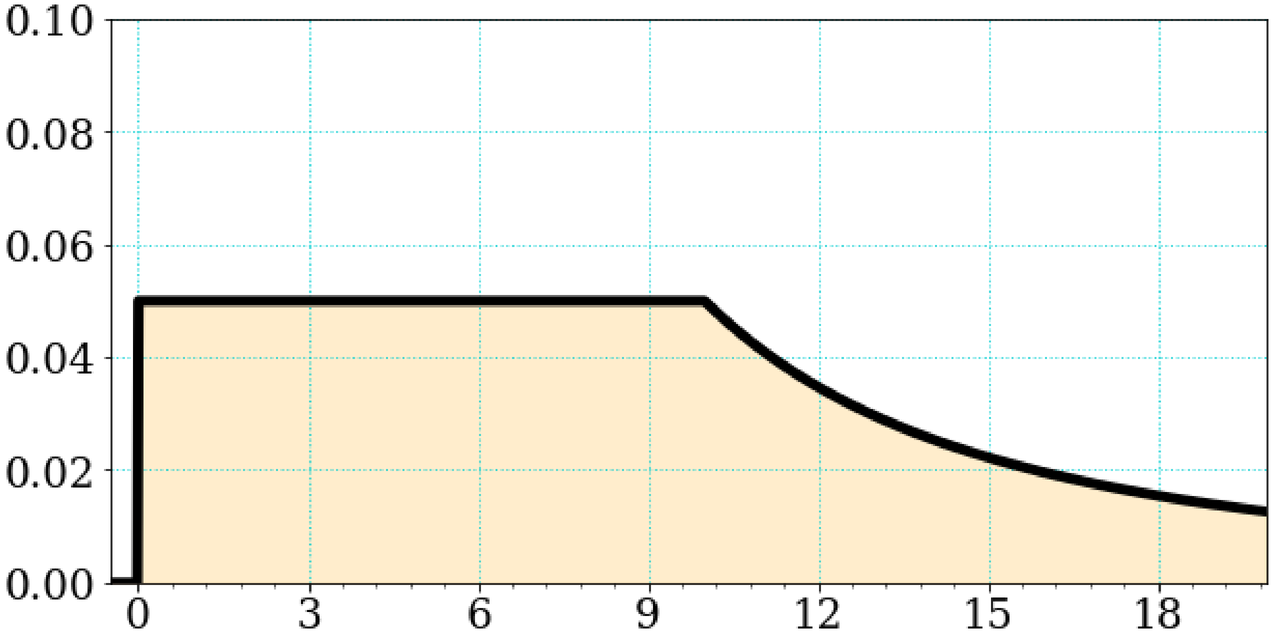
11 Билет 111

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;1]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{20}, 0 \leqslant x \leqslant 10 \approx 10{,}0; \\ 1 - \frac{5}{x}, x \geqslant 10; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{20}, 0 \leqslant x \leqslant 10 \approx 10{,}0; \\ \frac{5}{x^2}, x \geqslant 10; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: $\P(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91) = 0{,}57283$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = -876.6667 2) Коэффициент корреляции = -4.7659

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 11-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 13,\ 2 : 3,\ 3 : 14,\ 4 : 9,\ 5 : 6,\ 6 : 15,\ 7 : 1,\ 8 : 22,\ 9 : 17,\ 10 : 10,\ 11 : 16\}$

   Работы будут перепроверять 6 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: $6.57937, 0.64259$.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

   Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

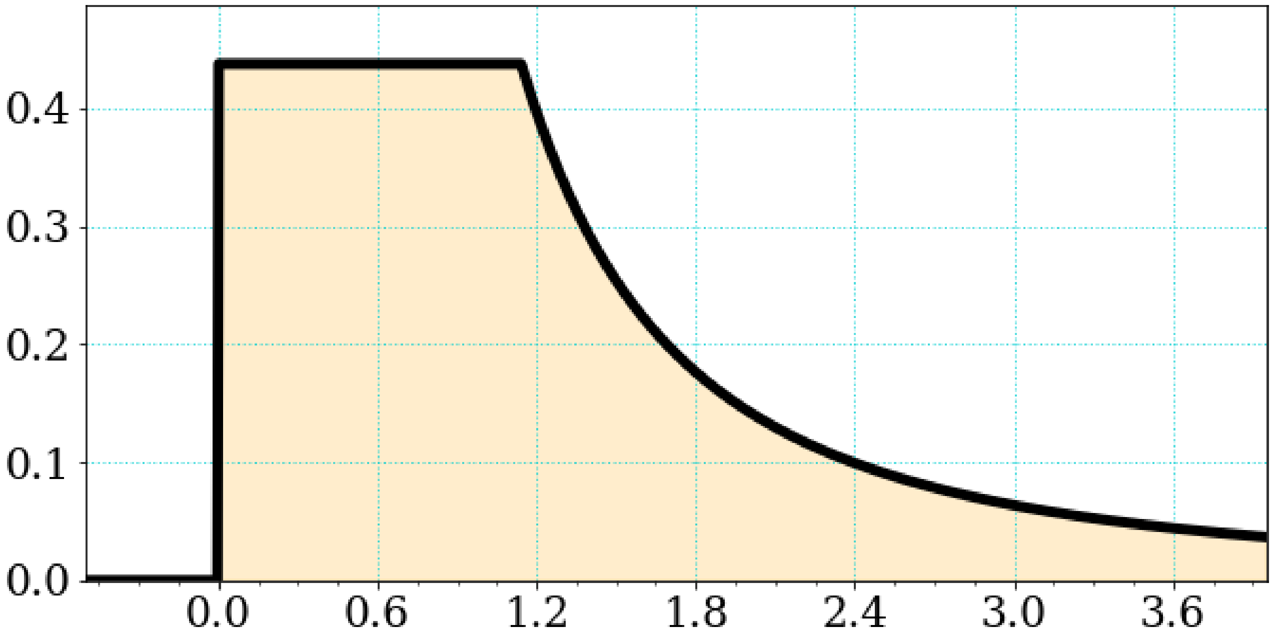
12 Билет 112

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 7]$ и $[0; 8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(1{,}072 \leqslant Z \leqslant 1{,}953)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{7x}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{7} \approx 1{,}143; \\ 1 - \frac{4}{7x}, x \geqslant \frac{8}{7}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{7}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{7} \approx 1{,}143; \\ \frac{4}{7x^2}, x \geqslant \frac{8}{7}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶(1,072 ⩽ Z ⩽ 1,953) = 0,23843.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5*y, \text{свероятностью 0.11} \\ 8*y, \text{свероятностью 1 - 0.11} \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 1 * 0.7 + 10 * (1 - 0.7)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1^2 * 0.7 + 10^2 * (1 - 0.7) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(5*Y)*0.11+E(8*Y)*(1-0.11)] = E(Y)*(5*0.11+8*(1-0.11)) = 28.379$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 1027.72936$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 55$, $x_1 = 88, y_1 = 86$, $x_2 = 42, y_2 = 96$, $x_3 = 69, y_3 = 93$, $x_4 = 43, y_4 = 64$, $x_5 = 42, y_5 = 86$, $x_6 = 35, y_6 = 45$, $x_7 = 60, y_7 = 55$, $x_8 = 41, y_8 = 90$, $x_9 = 62, y_9 = 57$, $x_{10} = 52, y_{10} = 53$, $x_{11} = 67, y_{11} = 32$, $x_{12} = 72, y_{12} = 98$, $x_{13} = 42, y_{13} = 84$, $x_{14} = 97, y_{14} = 51$, $x_{15} = 32, y_{15} = 89$, $x_{16} = 38, y_{16} = 84$, $x_{17} = 42, y_{17} = 84$, $x_{18} = 61, y_{18} = 94$, $x_{19} = 96, y_{19} = 31$, $x_{20} = 67, y_{20} = 56$, $x_{21} = 66, y_{21} = 67$, $x_{22} = 41, y_{22} = 95$, $x_{23} = 54, y_{23} = 95$, $x_{24} = 36, y_{24} = 80$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = 92.6667 2) Коэффициент корреляции = 0.3814

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	25	26	10
$X=300$	10	10	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X},\bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.59 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 228.8693 3) ковариацию $Cov(\bar{X},\bar{Y})$: 1.3324

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta,\sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1+4X_2+X_3+4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1+3X_2+3X_3+2X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

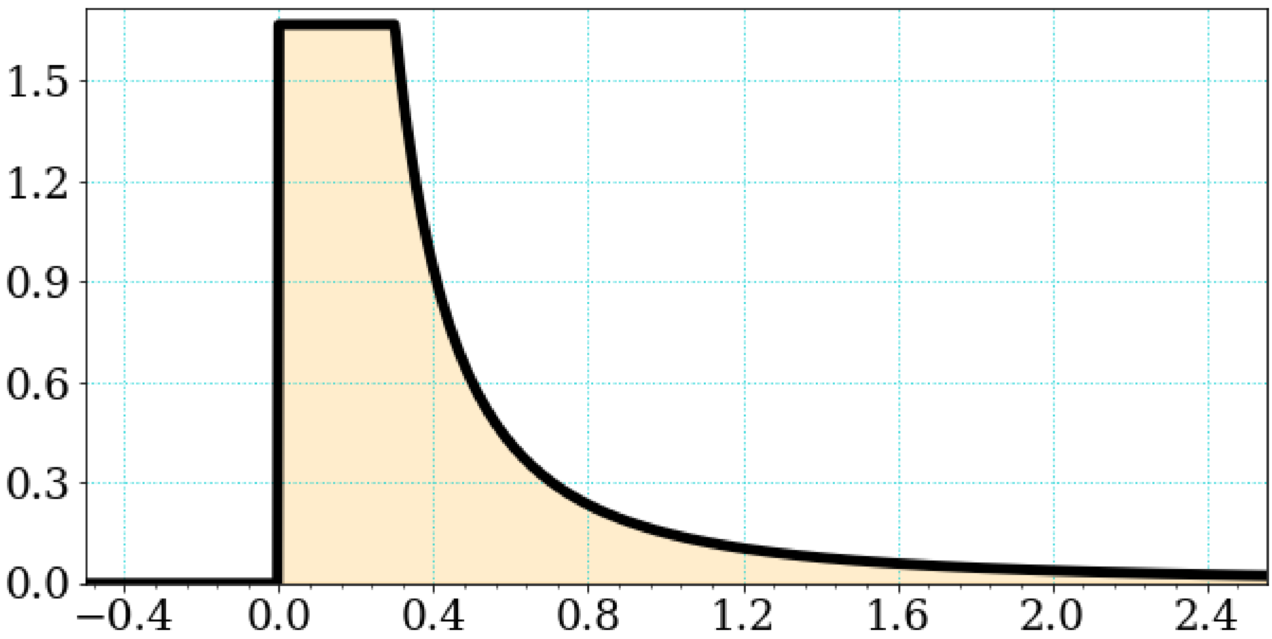
13 Билет 113

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;10]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z=\frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}057 \leqslant Z \leqslant 0{,}556)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x\leqslant 0; \\ \frac{5x}{3}, 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{10}\approx 0{,}3; \\ 1-\frac{3}{20x}, x\geqslant \frac{3}{10}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x<0; \\ \frac{5}{3}, 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{10}\approx 0{,}3; \\ \frac{3}{20x^2}, x\geqslant \frac{3}{10}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}057 \leqslant Z \leqslant 0{,}556) = 0{,}63552$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. Создайте эмперические совокупности exp и log вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(77)$ и $\log(1), \log(2), ..., \log(77)$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и log на совокупности натуральных чисел от 1 до 77.

   Используя

   $E(X) = sum(X)/n$

   $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

   $Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

   $r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) * E(Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$

   рассчитаем искомые значения.

   Ответы: $5.66740783200168 \cdot 10^{31}, 3.33285124990578 \cdot 10^{32}, 7.03150966623892 \cdot 10^{131}, 53.98819, 0.0006$.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 14-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1:3,\ 2:7,\ 3:5,\ 4:2,\ 5:11,\ 6:9,\ 7:2,\ 8:19,\ 9:23,\ 10:26,\ 11:15,\ 12$

   Работы будут перепроверять 16 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: $9.83854, 0.99615$.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + 7X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + 5X_2 + X_3 + X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

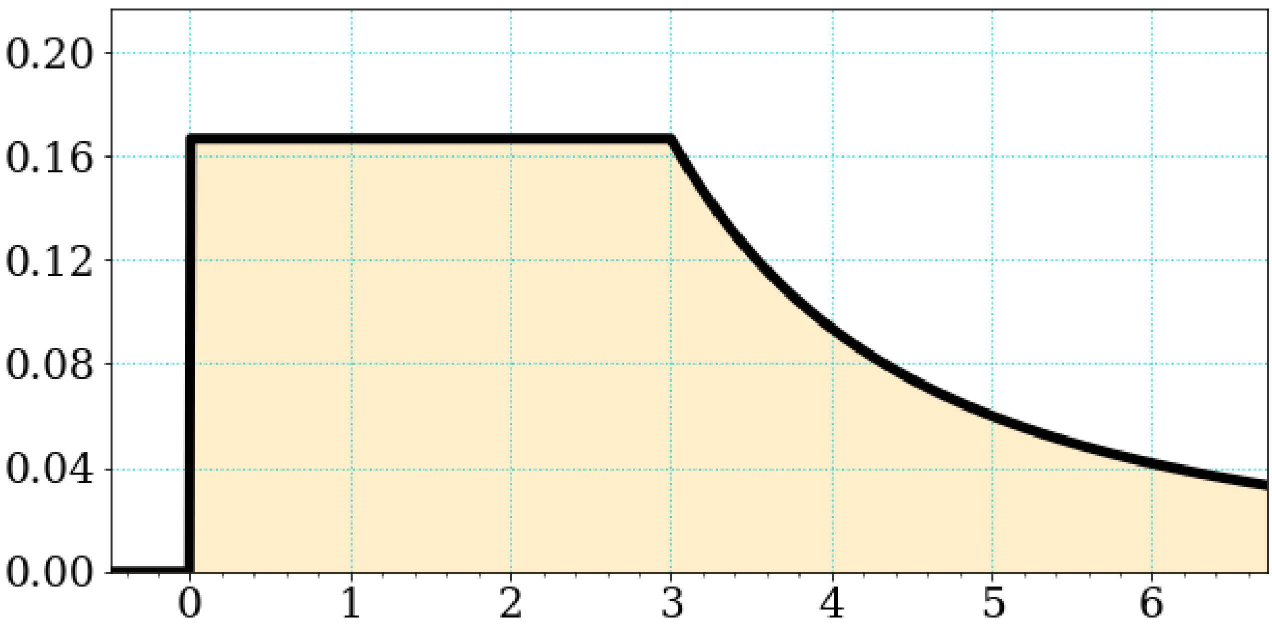
14 Билет 114

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 2]$ и $[0; 6]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}532 \leqslant Z \leqslant 4{,}716)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{6}, 0 \leqslant x \leqslant 3 \approx 3{,}0; \\ 1 - \frac{3}{2x}, x \geqslant 3; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{6}, 0 \leqslant x \leqslant 3 \approx 3{,}0; \\ \frac{3}{2x^2}, x \geqslant 3; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(2{,}532 \leqslant Z \leqslant 4{,}716) = 0{,}25993$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75{,}0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 140608

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -350.8333$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	16	22
$X = 300$	7	26	13

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.89 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 239.4845 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.3732

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

   $\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

   $\beta = (\beta + 1) \cdot 67.0$

   $\beta = \frac{67.0}{1-67.0}$

   $P(x \leq 52.0) = F(52.0) = 52.0^{2.03}$

   Ответ: $2.03, 0.27$

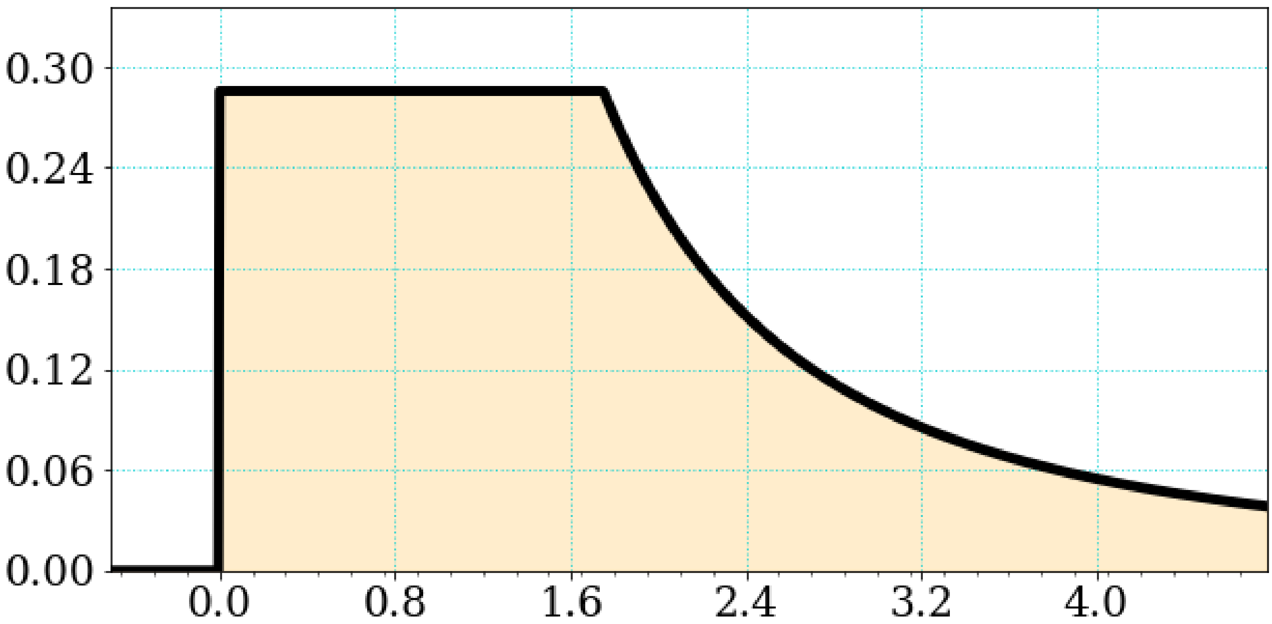
15 Билет 115

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 4]$ и $[0; 7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{2x}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ 1 - \frac{7}{8x}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{2}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ \frac{7}{8x^2}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775) = 0{,}67474$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75, 0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -345.5$ 2) Коэффициент корреляции $= -2.9554$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	6	23
$X = 300$	13	30	27

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 13 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 4.22 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 255.4769 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.2655

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{5X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

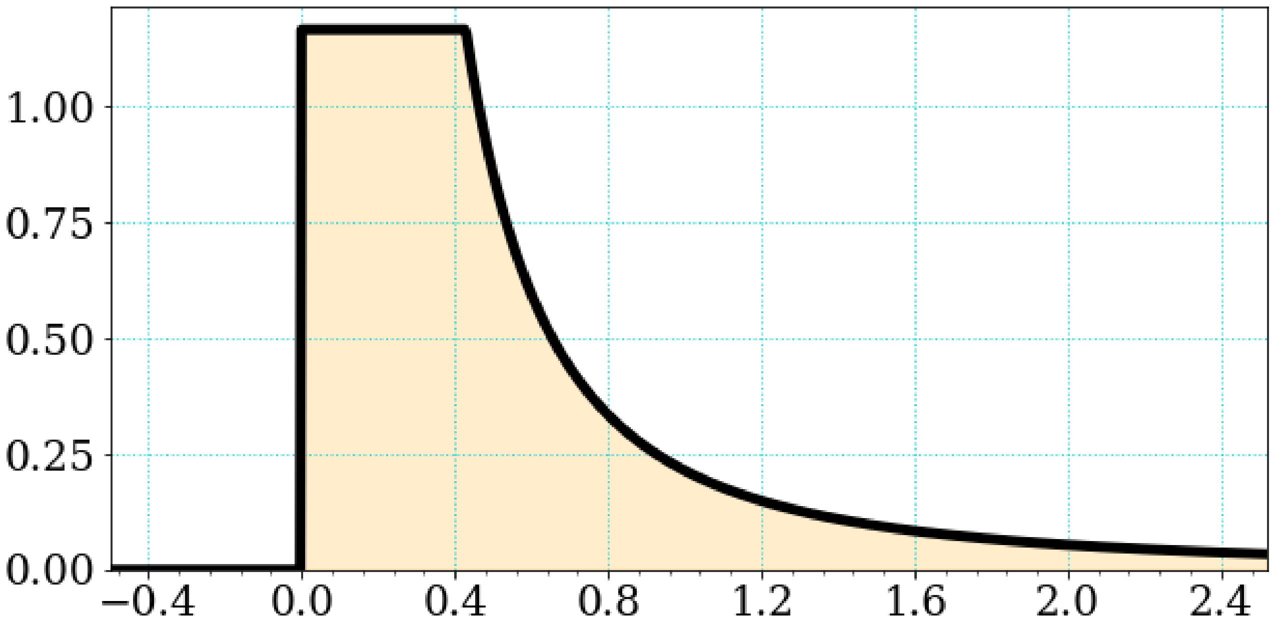
16 Билет 116

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 7]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{7x}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ 1 - \frac{3}{14x}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{7}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ \frac{3}{14x^2}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519) = 0{,}57962$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{3, 4\}$, при этом $P(Y = 3) = 0.33$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9*y, \text{свероятностью } 0.34 \\ 7*y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.34 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 3 * 0.33 + 4 * (1 - 0.33)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3^2 * 0.33 + 4^2 * (1 - 0.33) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(9*Y)*0.34+E(7*Y)*(1-0.34)] = E(Y)*(9*0.34+7*(1-0.34)) = 28.1856$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 25.32915$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = 276.75 2) Коэффициент корреляции = 1.373

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.084 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.9911

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 3X_3 + 3X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

   Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

17 Билет 117

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. (10) Сформулируйте критерий независимости χ^2 – Пирсона. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) явный вид статистики критерия в случае, когда таблица сопряженности двух признаков X и Y имеет вид

	$Y = y_1$	$Y = y_2$
$X = x_1$	a	b
$X = x_2$	c	d

Здесь формулировки критерия независимости Пирсона и приводится пример

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация $= -345.5$ 2) Коэффициент корреляции $= -2.9554$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	19	5
$X = 300$	25	10	25

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.5595 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.5887

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta + 1) \cdot 67.0$

$\beta = \frac{67.0}{1-67.0}$

$P(x \leq 52.0) = F(52.0) = 52.0^{2.03}$

Ответ: $2.03, 0.27$

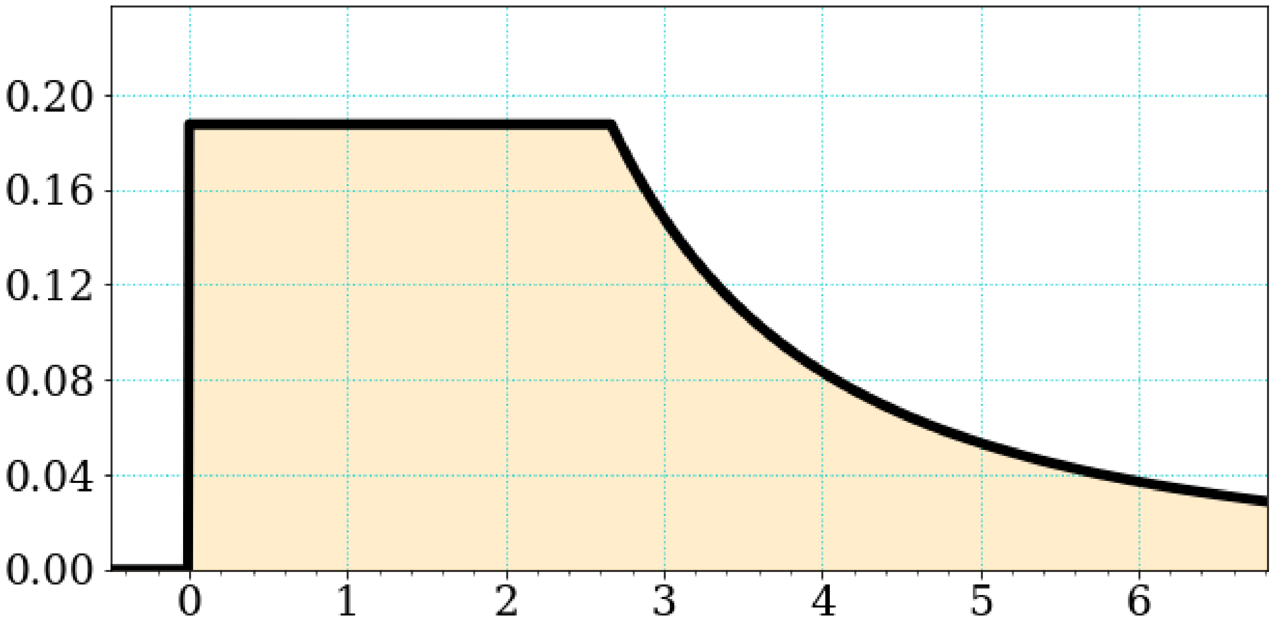
18 Билет 118

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ 1 - \frac{4}{3x}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ \frac{4}{3x^2}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$.

   3) вероятность равна: ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811) = 0{,}25884$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $91,6667\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 30155888444737842659

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические

характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация $= -876.6667$ 2) Коэффициент корреляции $= -4.7659$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	17	3	13
$X = 300$	21	23	23

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 10 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 257.2355 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.7091

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3 + 4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

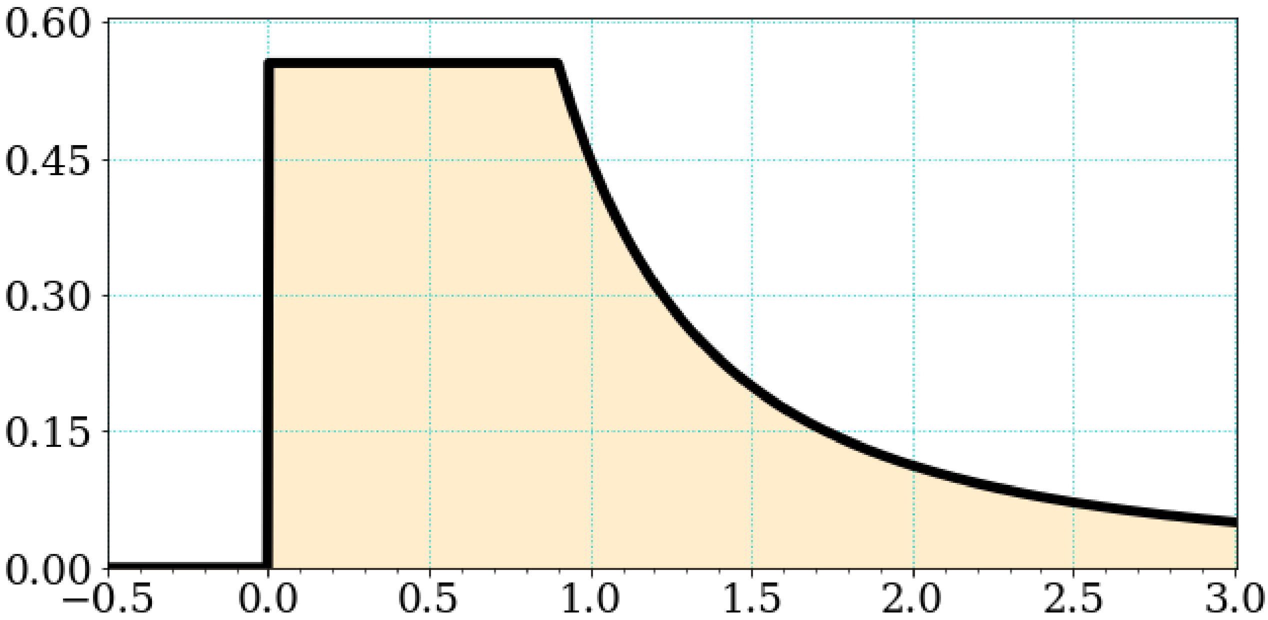
19 Билет 119

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 9]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(0{,}719 \leqslant Z \leqslant 1{,}005)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{5x}{9}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{10} \approx 0{,}9; \\ 1 - \frac{9}{20x}, x \geqslant \frac{9}{10}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{5}{9}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{10} \approx 0{,}9; \\ \frac{9}{20x^2}, x \geqslant \frac{9}{10}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}719 \leqslant Z \leqslant 1{,}005) = 0{,}15287$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $93,3333\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 19%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 799006685782884121

4. Создайте эмперические совокупности exp и sin вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(85)$ и $\sin(1), \sin(2), ..., \sin(85)$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и sin на совокупности натуральных чисел от 1 до 85.

   Используя

   $E(X) = sum(X)/n$

   $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

   $Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

   $r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) * E(Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$

   рассчитаем искомые значения.

   Ответы: $1.53042524409691 \cdot 10^{35}, 9.46886335007349 \cdot 10^{35}, 5.07073544919377 \cdot 10^{145}, 60.07824, 0.00032$.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	23	3
$X = 300$	2	12	32

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 5 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.75 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 244.6913 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 3.7904

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

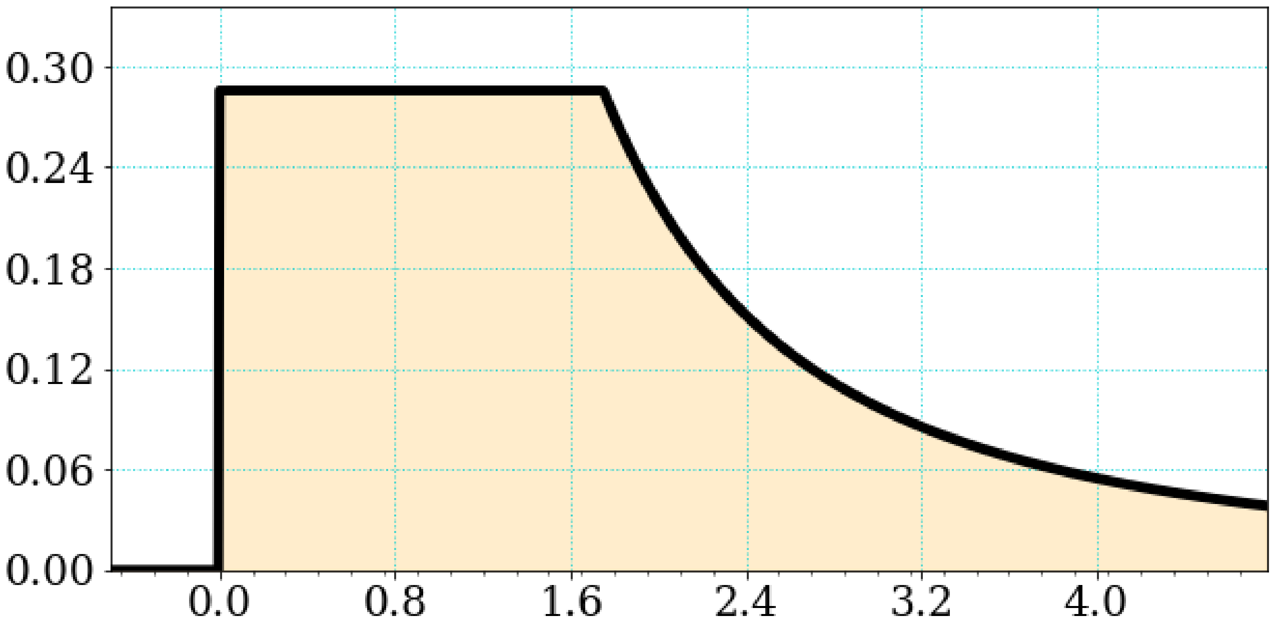
20 Билет 120

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 4]$ и $[0; 7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{2x}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ 1 - \frac{7}{8x}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{2}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ \frac{7}{8x^2}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775) = 0{,}67474$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8*y, \text{свероятностью } 0.15 \\ 6*y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 2 * 0.61 + 1 * (1 - 0.61)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2^2 * 0.61 + 1^2 * (1 - 0.61) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(8*Y)*0.15 + E(6*Y)*(1-0.15)] = E(Y)*(8*0.15+6*(1-0.15)) = 10.143$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 10.88555$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 40, y_0 = 84$, $x_1 = 83, y_1 = 71$, $x_2 = 85, y_2 = 64$, $x_3 = 77, y_3 = 32$, $x_4 = 86, y_4 = 59$, $x_5 = 99, y_5 = 77$, $x_6 = 91, y_6 = 74$, $x_7 = 46, y_7 = 48$, $x_8 = 73, y_8 = 42$, $x_9 = 82, y_9 = 89$, $x_{10} = 40, y_{10} = 43$, $x_{11} = 60, y_{11} = 31$, $x_{12} = 81, y_{12} = 57$, $x_{13} = 88, y_{13} = 50$, $x_{14} = 34, y_{14} = 31$, $x_{15} = 45, y_{15} = 63$, $x_{16} = 38, y_{16} = 45$, $x_{17} = 34, y_{17} = 92$, $x_{18} = 92, y_{18} = 83$, $x_{19} = 88, y_{19} = 56$, $x_{20} = 60, y_{20} = 36$, $x_{21} = 85, y_{21} = 59$, $x_{22} = 60, y_{22} = 87$, $x_{23} = 30, y_{23} = 53$, $x_{24} = 56, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -335.0$ 2) Коэффициент корреляции $= -2.4919$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	13	10
$X = 300$	1	12	35

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 7 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.85 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 244.0153 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 3.7764

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{5X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

   Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

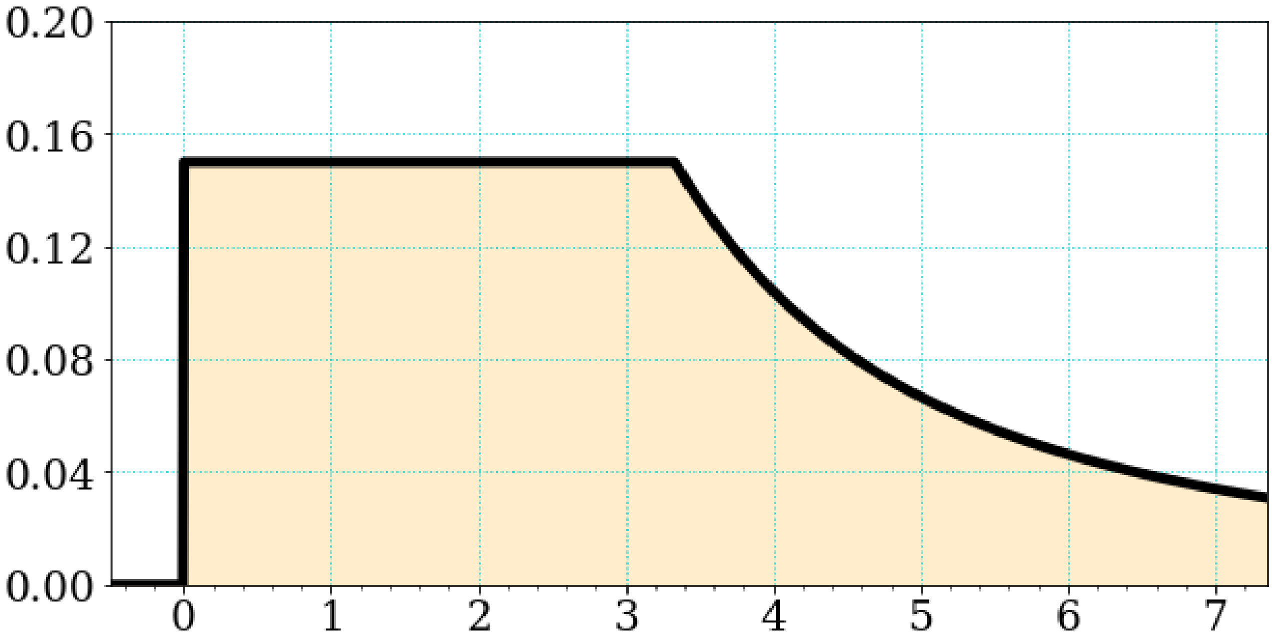
21 Билет 121

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(3,263 $\leqslant Z \leqslant$ 5,35).

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{20}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3} \approx 3{,}333; \\ 1 - \frac{5}{3x}, x \geqslant \frac{10}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{20}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3} \approx 3{,}333; \\ \frac{5}{3x^2}, x \geqslant \frac{10}{3}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶(3,263 $\leqslant Z \leqslant$ 5,35) = 0,19897.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 1174711139837

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1 ... 25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация $= -350.8333$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	6	23
$X = 300$	13	30	27

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 13 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 4.22 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 255.4769 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.2655

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−3	X=−2	X=−1
Y = 2	0.29	0.298	0.234
Y = 3	0.066	0.03	0.082

Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 2.10982. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

$E(Y|X+Y=1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

Ответ: 2.10982

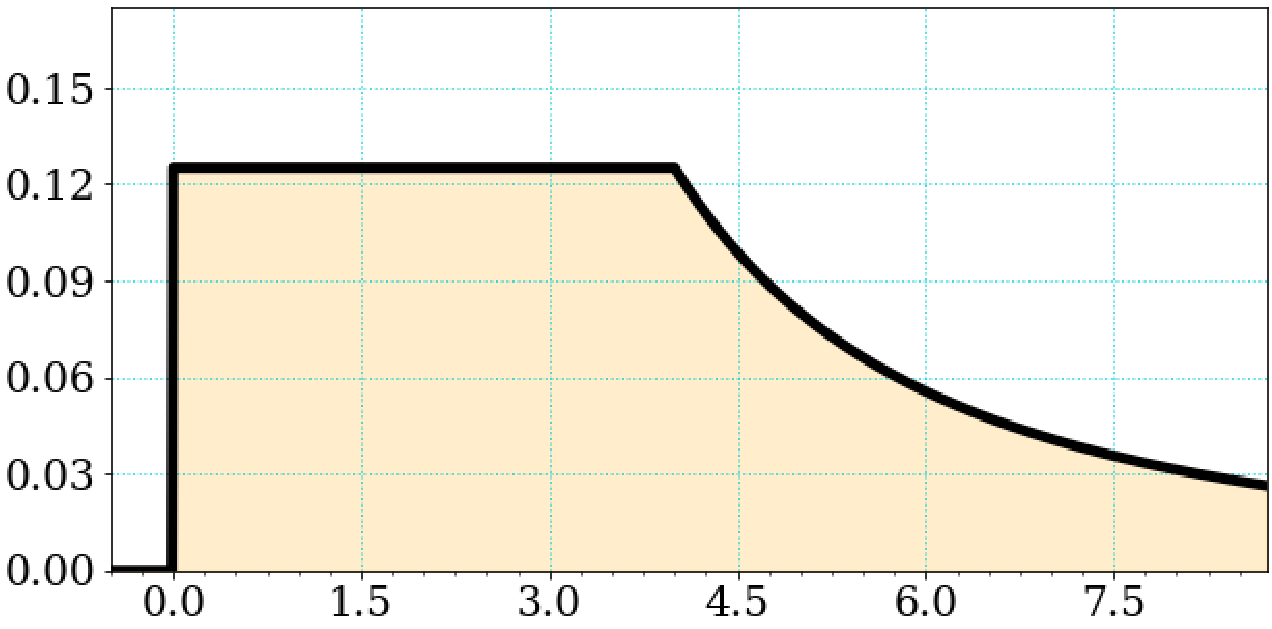
22 Билет 122

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 2]$ и $[0; 8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}016 \leqslant Z \leqslant 6{,}716)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{8}, 0 \leqslant x \leqslant 4 \approx 4{,}0; \\ 1 - \frac{2}{x}, x \geqslant 4; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{8}, 0 \leqslant x \leqslant 4 \approx 4{,}0; \\ \frac{2}{x^2}, x \geqslant 4; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(2{,}016 \leqslant Z \leqslant 6{,}716) = 0{,}4502$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8{*}y, \text{свероятностью } 0.15 \\ 6{*}y, \text{свероятностью 1 - } 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 2 * 0.61 + 1 * (1 - 0.61)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2^2 * 0.61 + 1^2 * (1 - 0.61) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(8{*}Y){*}0.15{+}E(6{*}Y){*}(1{-}0.15)] = E(Y){*}(8{*}0.15{+}6{*}(1{-}0.15)) = 10.143$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 10.88555$

4. Создайте эмперические совокупности sin и cos вида $\sin(1), \sin(2), ..., \sin(60)$ и $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(60)$.

Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности sin, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков sin и cos на совокупности натуральных чисел от 1 до 60.

Используя

$E(X) = sum(X)/n$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$

$Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$

$r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) * E(Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$

рассчитаем искомые значения.

Ответы: $0.02724, 0.70603, 0.37291, -1.49926, 0.00012$.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	11	26	27
$X = 300$	5	10	21

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 4.16 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 233.542 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.4975

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 62.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

   $\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

   $\beta = (\beta+1) \cdot 62.0$

   $\beta = \frac{62.0}{1-62.0}$

   $P(x \leq 59.0) = F(59.0) = 59.0^{1.63}$

   Ответ: $1.63, 0.42$

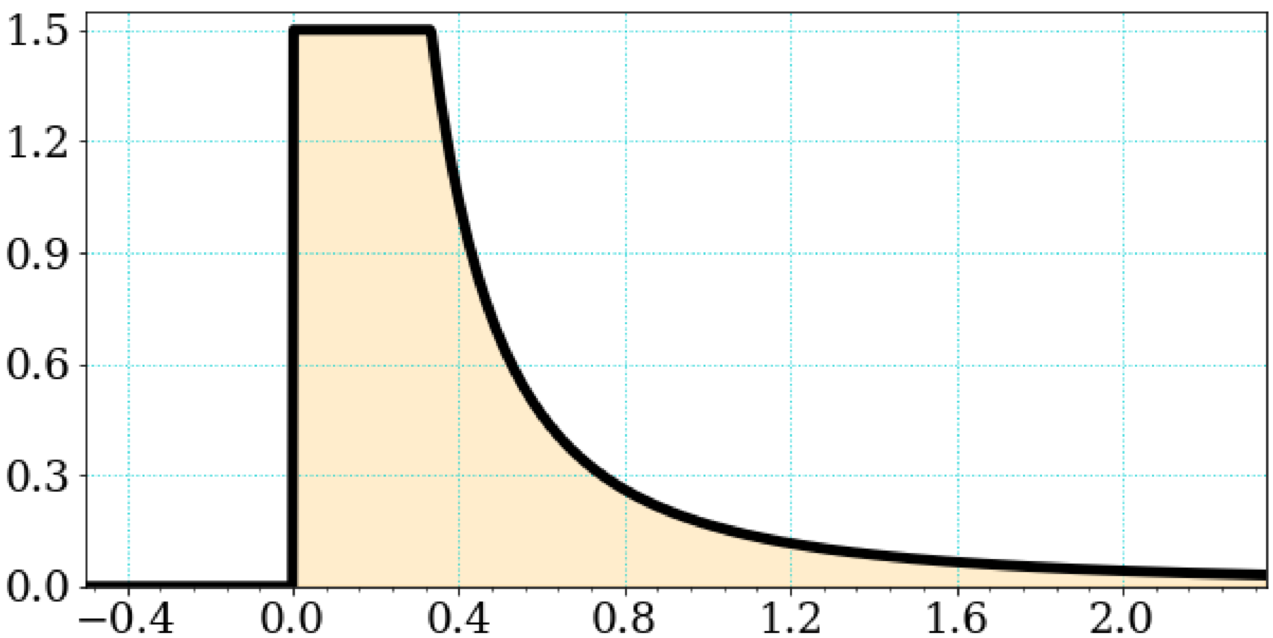
23 Билет 123

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;9]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(0{,}059 \leqslant Z \leqslant 0{,}348)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \approx 0{,}333; \\ 1 - \frac{1}{6x}, x \geqslant \frac{1}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \approx 0{,}333; \\ \frac{1}{6x^2}, x \geqslant \frac{1}{3}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: $\P(0{,}059 \leqslant Z \leqslant 0{,}348) = 0{,}43307$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 782757789696

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 55$, $x_1 = 88, y_1 = 86$, $x_2 = 42, y_2 = 96$, $x_3 = 69, y_3 = 93$, $x_4 = 43, y_4 = 64$, $x_5 = 42, y_5 = 86$, $x_6 = 35, y_6 = 45$, $x_7 = 60, y_7 = 55$, $x_8 = 41, y_8 = 90$, $x_9 = 62, y_9 = 57$, $x_{10} = 52, y_{10} = 53$, $x_{11} = 67, y_{11} = 32$, $x_{12} = 72, y_{12} = 98$, $x_{13} = 42, y_{13} = 84$, $x_{14} = 97, y_{14} = 51$, $x_{15} = 32, y_{15} = 89$, $x_{16} = 38, y_{16} = 84$, $x_{17} = 42, y_{17} = 84$, $x_{18} = 61, y_{18} = 94$, $x_{19} = 96, y_{19} = 31$, $x_{20} = 67, y_{20} = 56$, $x_{21} = 66, y_{21} = 67$, $x_{22} = 41, y_{22} = 95$, $x_{23} = 54, y_{23} = 95$, $x_{24} = 36, y_{24} = 80$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = 92.6667 2) Коэффициент корреляции = 0.3814

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	23	3
$X = 300$	2	12	32

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 5 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.75 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 244.6913 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 3.7904

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−6	X=−5	X=−4
Y = 5	0.039	0.207	0.054
Y = 6	0.035	0.255	0.41

   Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 5.82286. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

   $E(Y|X + Y = 1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

   Ответ: 5.82286

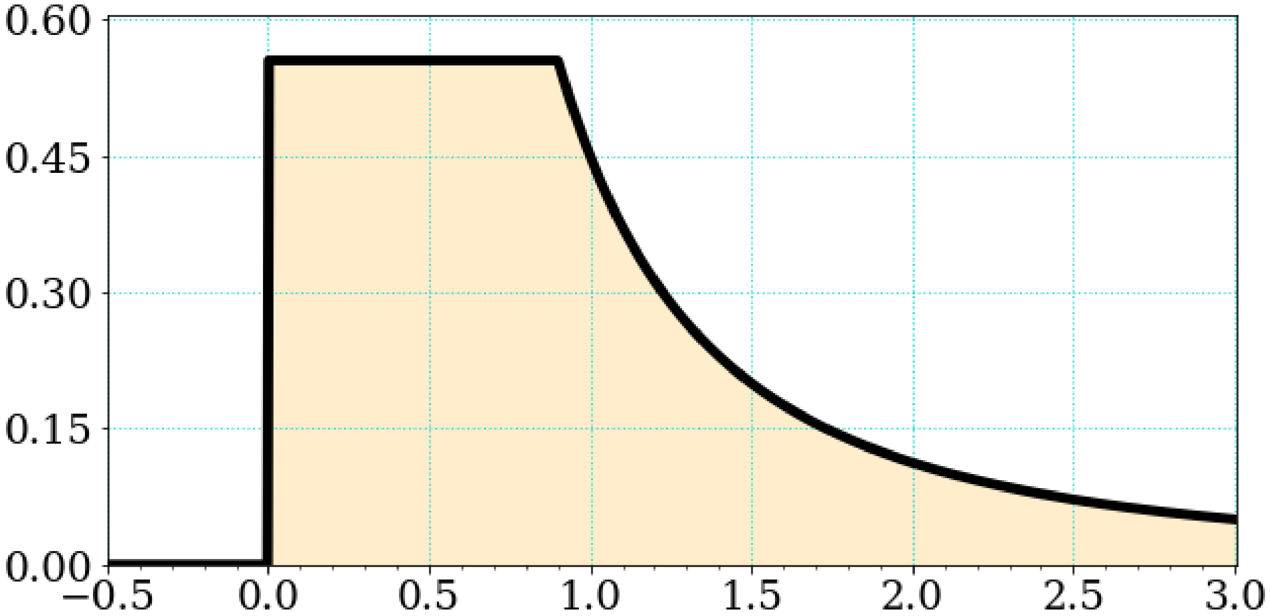
24 Билет 124

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 9]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(0,719 ⩽ Z ⩽ 1,005).

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{5x}{9}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{10} \approx 0{,}9; \\ 1 - \frac{9}{20x}, x \geqslant \frac{9}{10}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{5}{9}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{10} \approx 0{,}9; \\ \frac{9}{20x^2}, x \geqslant \frac{9}{10}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}719 \leqslant Z \leqslant 1{,}005) = 0{,}15287$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8{*}y, \text{свероятностью } 0.15 \\ 6{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 2 * 0.61 + 1 * (1 - 0.61)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2^2 * 0.61 + 1^2 * (1 - 0.61) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(8{*}Y){*}0.15{+}E(6{*}Y){*}(1{-}0.15)] = E(Y){*}(8{*}0.15{+}6{*}(1{-}0.15)) = 10.143$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 10.88555$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$,

$x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация $= -350.8333$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	16	22
$X = 300$	7	26	13

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.89 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 239.4845 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.3732

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 62.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59.0%.

$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta - 1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta + 1) \cdot 62.0$

$\beta = \frac{62.0}{1-62.0}$

$P(x \leq 59.0) = F(59.0) = 59.0^{1.63}$

Ответ: $1.63, 0.42$

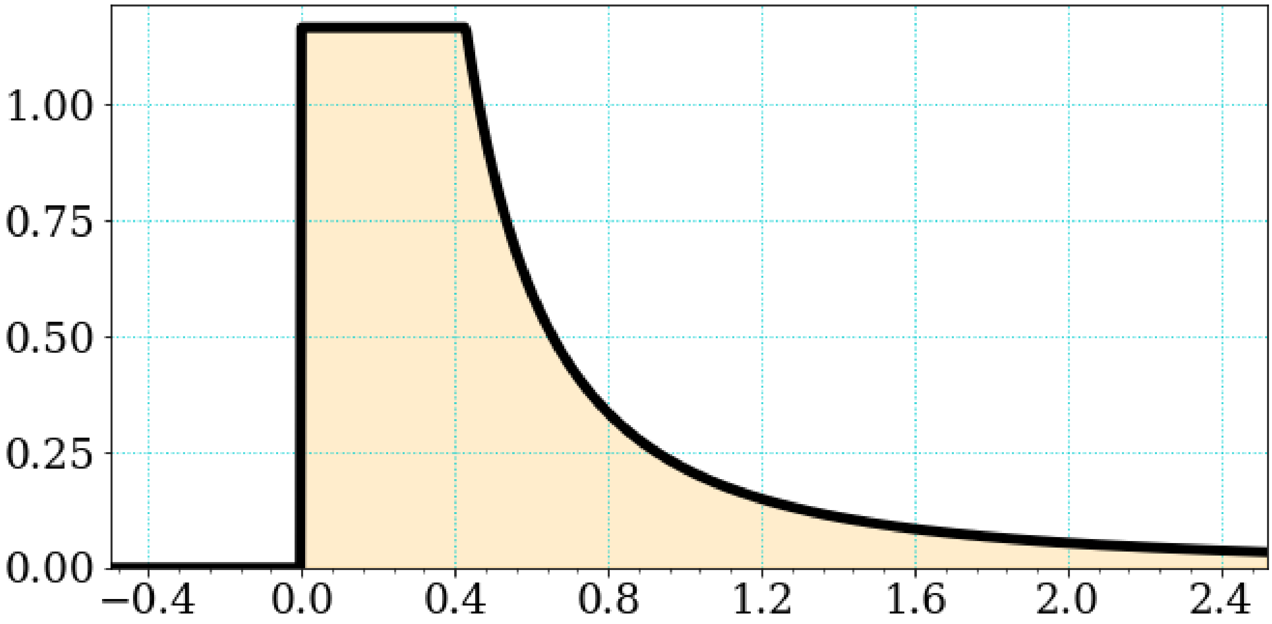
25 Билет 125

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 7]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519)$.

1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{7x}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ 1 - \frac{3}{14x}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{7}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ \frac{3}{14x^2}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519) = 0{,}57962$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 1174711139837

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -345.5$ 2) Коэффициент корреляции $= -2.9554$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	19	5
$X = 300$	25	10	25

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.5595 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.5887

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

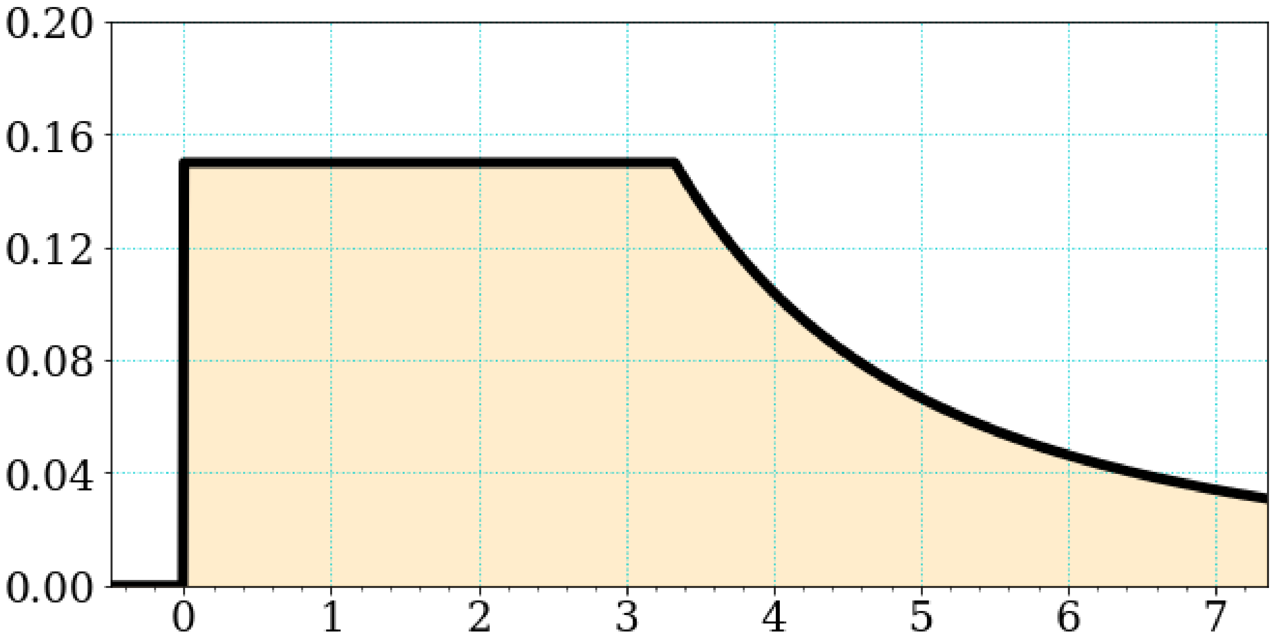
26 Билет 126

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(3{,}263 \leqslant Z \leqslant 5{,}35)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{20}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3} \approx 3{,}333; \\ 1 - \frac{5}{3x}, x \geqslant \frac{10}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{20}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3} \approx 3{,}333; \\ \frac{5}{3x^2}, x \geqslant \frac{10}{3}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(3{,}263 \leqslant Z \leqslant 5{,}35) = 0{,}19897$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 782757789696

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$,

$x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = −350.8333 2) Коэффициент корреляции = −1.2925

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 6,\ 2 : 16,\ 3 : 9,\ 4 : 16,\ 5 : 14,\ 6 : 4,\ 7 : 25,\ 8 : 26,\ 9 : 24,\ 10 : 10\}$

   Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: $6.14667, 0.65542$.

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 57.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 51.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

   $\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

   $\beta = (\beta + 1) \cdot 57.0$

   $\beta = \frac{57.0}{1-57.0}$

   $P(x \leq 51.0) = F(51.0) = 51.0^{1.33}$

   Ответ: $1.33, 0.41$

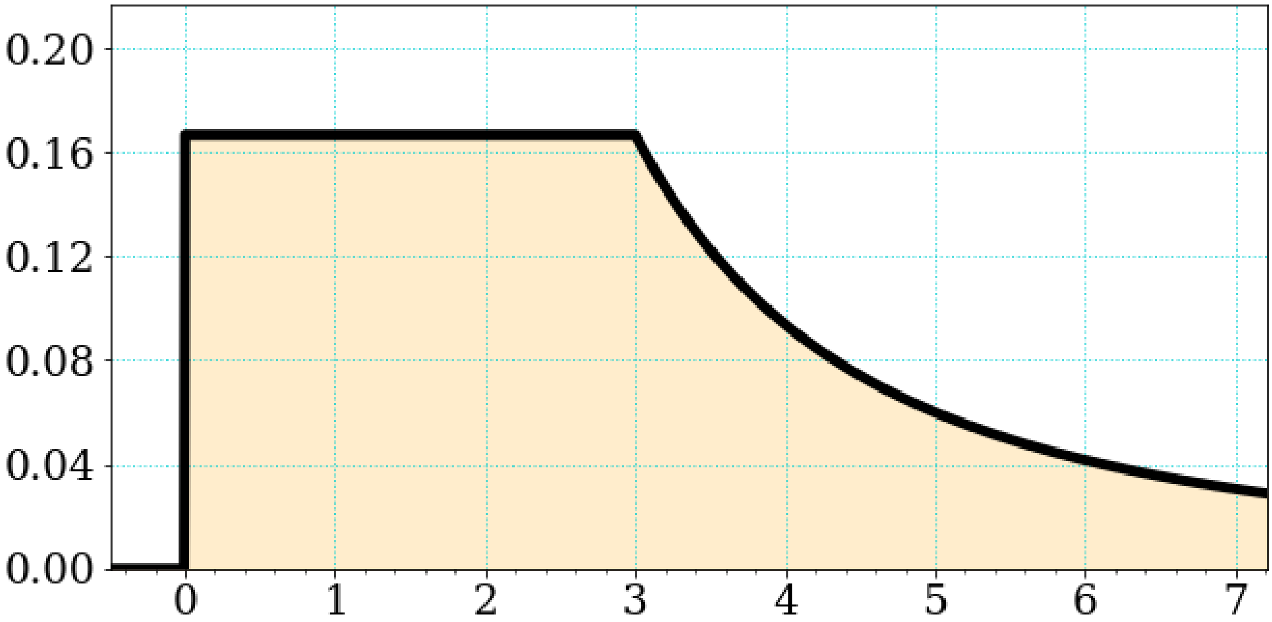
27 Билет 127

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 1]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(0,039 $\leqslant Z \leqslant$ 5,208).

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{6}, 0 \leqslant x \leqslant 3 \approx 3{,}0; \\ 1 - \frac{3}{2x}, x \geqslant 3; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{6}, 0 \leqslant x \leqslant 3 \approx 3{,}0; \\ \frac{3}{2x^2}, x \geqslant 3; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}039 \leqslant Z \leqslant 5{,}208) = 0{,}70548$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 782757789696

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 97, y_0 = 80$, $x_1 = 45, y_1 = 92$, $x_2 = 41, y_2 = 62$, $x_3 = 56, y_3 = 75$, $x_4 = 88, y_4 = 53$, $x_5 = 45, y_5 = 93$, $x_6 = 91, y_6 = 71$, $x_7 = 31, y_7 = 62$, $x_8 = 57, y_8 = 69$, $x_9 = 48, y_9 = 84$, $x_{10} = 33, y_{10} = 82$, $x_{11} = 95, y_{11} = 34$, $x_{12} = 94, y_{12} = 40$, $x_{13} = 58, y_{13} = 78$, $x_{14} = 64, y_{14} = 60$, $x_{15} = 81, y_{15} = 47$, $x_{16} = 57, y_{16} = 55$, $x_{17} = 30, y_{17} = 93$, $x_{18} = 51, y_{18} = 52$, $x_{19} = 99, y_{19} = 88$, $x_{20} = 47, y_{20} = 60$, $x_{21} = 78, y_{21} = 31$, $x_{22} = 61, y_{22} = 37$, $x_{23} = 91, y_{23} = 81$, $x_{24} = 39, y_{24} = 98$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = 1210.3636 2) Коэффициент корреляции = 5.5178

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	13	10
$X = 300$	1	12	35

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 7 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.85 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 244.0153 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 3.7764

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 74.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 73.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta - 1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta + 1) \cdot 74.0$

$\beta = \frac{74.0}{1-74.0}$

$P(x \leq 73.0) = F(73.0) = 73.0^{2.85}$

Ответ: $2.85, 0.41$

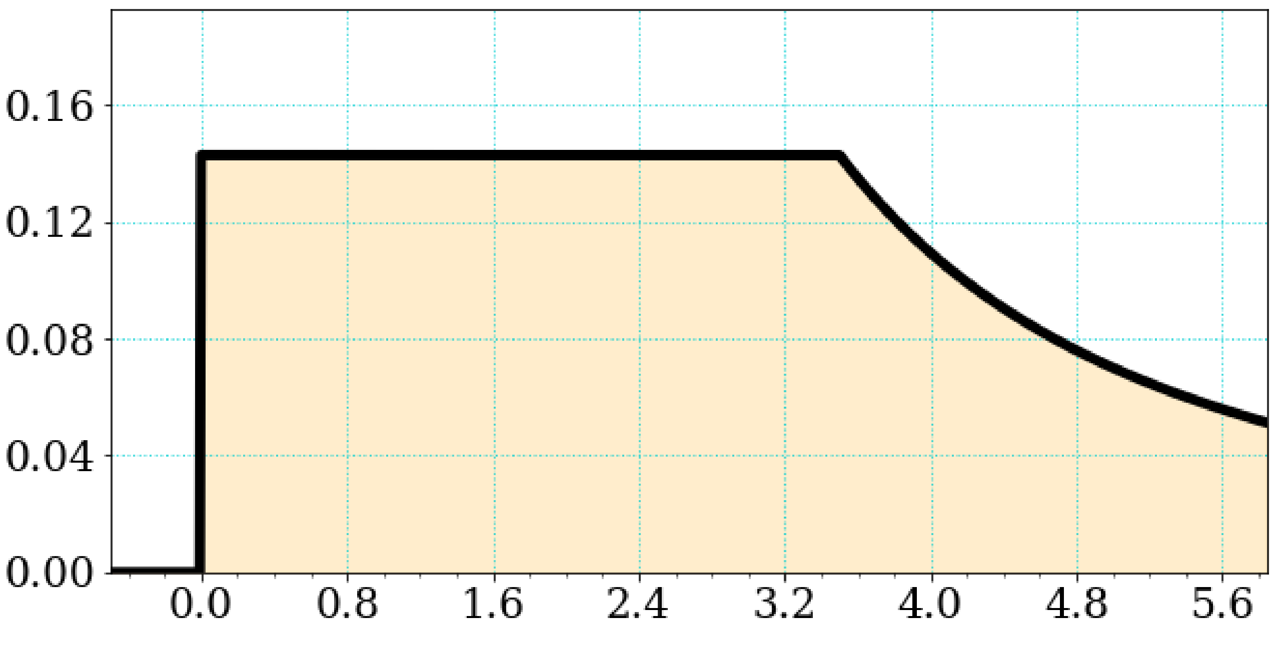
28 Билет 128

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

   Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;2]$ и $[0;7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}019 \leqslant Z \leqslant 3{,}843)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2} \approx 3{,}5; \\ 1 - \frac{7}{4x}, x \geqslant \frac{7}{2}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2} \approx 3{,}5; \\ \frac{7}{4x^2}, x \geqslant \frac{7}{2}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(2{,}019 \leqslant Z \leqslant 3{,}843) = 0{,}25613$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -350.8333$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	24	17	3
$X = 300$	13	24	19

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.48 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 248.8024 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 2.0333

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \le x \le 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 74.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 73.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$

   $\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

   $\beta = (\beta + 1) \cdot 74.0$

   $\beta = \frac{74.0}{1-74.0}$

   $P(x \le 73.0) = F(73.0) = 73.0^{2.85}$

   Ответ: $2.85, 0.41$

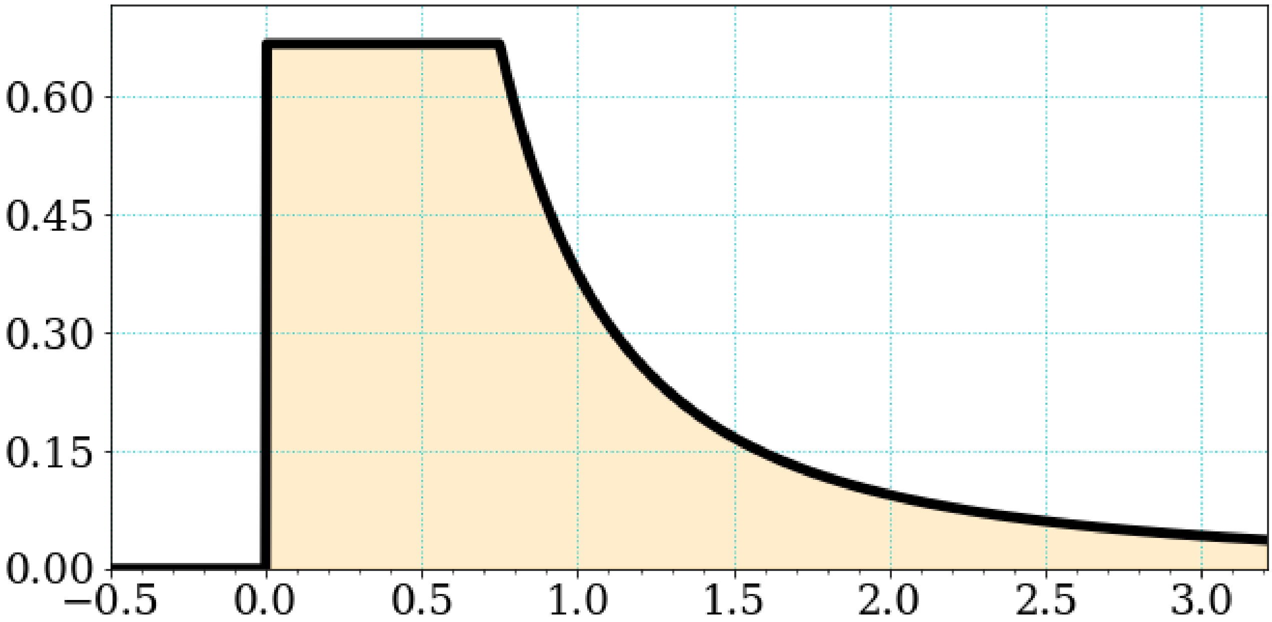
29 Билет 129

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 4]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}182 \leqslant Z \leqslant 1{,}21)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{2x}{3}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \approx 0{,}75; \\ 1 - \frac{3}{8x}, x \geqslant \frac{3}{4}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{2}{3}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \approx 0{,}75; \\ \frac{3}{8x^2}, x \geqslant \frac{3}{4}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}182 \leqslant Z \leqslant 1{,}21) = 0{,}56852$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 782757789696

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -876.6667$ 2) Коэффициент корреляции $= -4.7659$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	17	3	13
$X = 300$	21	23	23

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 10 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 257.2355 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 0.7091

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 76.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 74.0%.

   $f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta - 1}$

$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^{\beta} = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$

$\beta = (\beta + 1) \cdot 76.0$

$\beta = \frac{76.0}{1-76.0}$

$P(x \leq 74.0) = F(74.0) = 74.0^{3.17}$

Ответ: $3.17, 0.39$

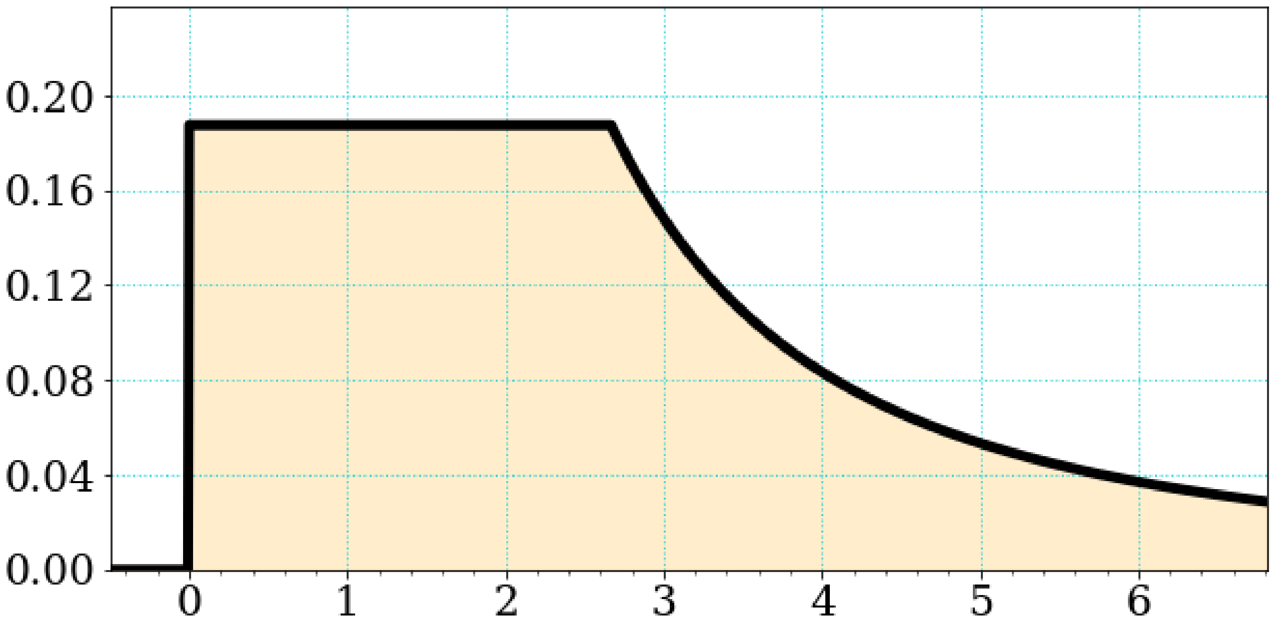
30 Билет 130

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 3]$ и $[0; 8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ 1 - \frac{4}{3x}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3} \approx 2{,}667; \\ \frac{4}{3x^2}, x \geqslant \frac{8}{3}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: $\P(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811) = 0{,}25884$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{7, 5\}$, при этом $P(Y = 7) = 0.08$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9*y, \text{свероятностью 0.24} \\ 8*y, \text{свероятностью 1 - 0.24} \end{cases}$$

   Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 7 * 0.08 + 5 * (1 - 0.08)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 7^2 * 0.08 + 5^2 * (1 - 0.08) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(9*Y)*0.24 + E(8*Y)*(1-0.24)] = E(Y)*(9*0.24+8*(1-0.24)) = 42.5184$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 24.89926$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = 276.75 2) Коэффициент корреляции = 1.373

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 6,\ 2 : 16,\ 3 : 9,\ 4 : 16,\ 5 : 14,\ 6 : 4,\ 7 : 25,\ 8 : 26,\ 9 : 24,\ 10 : 10\}$

   Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: $6.14667, 0.65542$.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

   Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

Рябов

Подготовил П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021 | Феклин | Феклин В.Г.