

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных  
Департамент анализа данных и машинного обучения

**Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

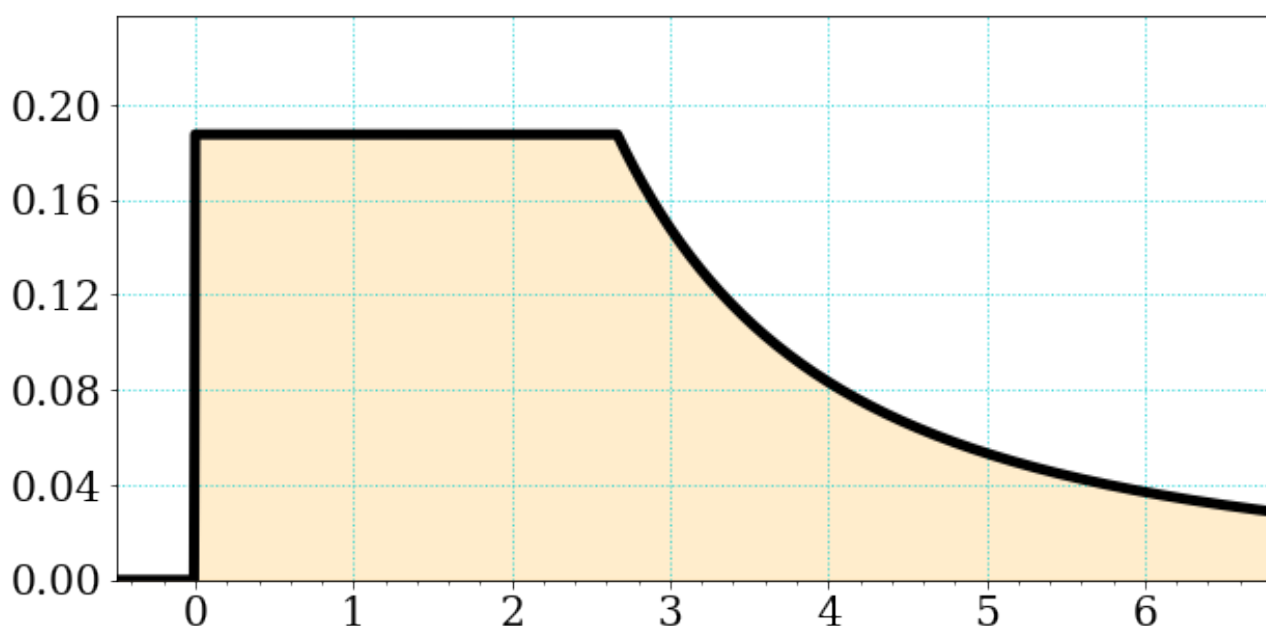
**Билет 130**

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ , и выведите основные свойства гамма-распределения. Запишите формулы для математического ожидания  $\mathbb{E}(X)$  и дисперсии  $\text{Var}(X)$  гамма-распределения

Здесь написано много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезках  $[0; 3]$  и  $[0; 8]$  соответственно. Для случайной величины  $Z = \frac{Y}{X}$  найдите: 1) функцию распределения  $F_Z(x)$ ; 2) плотность распределения  $f_Z(x)$  и постройте график плотности; 3) вероятность  $\mathbb{P}(2,475 \leq Z \leq 4,811)$ .

- 1) Функция распределения  $F_Z(x)$  имеет вид: 
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{3x}{16}, & 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \approx 2,667; \\ 1 - \frac{4}{3x}, & x \geq \frac{8}{3}; \end{cases}$$
- 2) Плотность распределения  $f_Z(x)$  имеет вид: 
$$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{3}{16}, & 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \approx 2,667; \\ \frac{4}{3x^2}, & x \geq \frac{8}{3}; \end{cases}$$



- 3) вероятность равна:  $\mathbb{P}(2,475 \leq Z \leq 4,811) = 0,25884$ .

3. Случайная величина  $Y$  принимает только значения из множества  $\{7, 5\}$ , при этом  $P(Y = 7) = 0.08$ . Распределение случайной величины  $X$  определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9*Y, \text{ с вероятностью } 0.24 \\ 8*Y, \text{ с вероятностью } 1 - 0.24 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию  $X$ .

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины  $X$

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины  $Y$

$$E(Y) = 7 * 0.08 + 5 * (1 - 0.08)$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 7^2 * 0.08 + 5^2 * (1 - 0.08) - [E(Y)]^2$$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайной величины  $X$

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(9*Y) * 0.24 + E(8*Y) * (1 - 0.24)] = E(Y) * (9 * 0.24 + 8 * (1 - 0.24)) = 42.5184$$

$$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$$

$$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 24.89926$$

4. (10) В группе  $\Omega$  учатся студенты:  $\omega_1 \dots \omega_{25}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки  $\omega_i$  студента обозначаются:  $x_i = X(\omega_i)$  и  $y_i = Y(\omega_i)$ ,  $i = 1 \dots 25$ . Все оценки известны  $x_0 = 55, y_0 = 54, x_1 = 64, y_1 = 68, x_2 = 34, y_2 = 51, x_3 = 48, y_3 = 73, x_4 = 81, y_4 = 69, x_5 = 62, y_5 = 69, x_6 = 76, y_6 = 59, x_7 = 84, y_7 = 45, x_8 = 97, y_8 = 77, x_9 = 76, y_9 = 87, x_{10} = 43, y_{10} = 67, x_{11} = 33, y_{11} = 55, x_{12} = 71, y_{12} = 96, x_{13} = 62, y_{13} = 97, x_{14} = 84, y_{14} = 37, x_{15} = 41, y_{15} = 70, x_{16} = 92, y_{16} = 41, x_{17} = 60, y_{17} = 54, x_{18} = 71, y_{18} = 44, x_{19} = 39, y_{19} = 70, x_{20} = 98, y_{20} = 75, x_{21} = 99, y_{21} = 32, x_{22} = 58, y_{22} = 42, x_{23} = 61, y_{23} = 92, x_{24} = 58, y_{24} = 32$ . Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию  $X$  и  $Y$  при условии, что одновременно  $X \geq 50$  и  $Y \geq 50$ ; 2) коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$  при том же условии.

1) Ковариация = 276.75 2) Коэффициент корреляции = 1.373

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом:  $\{1 : 6, 2 : 16, 3 : 9, 4 : 16, 5 : 14, 6 : 4, 7 : 25,$

Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть  $\bar{X}$  - средний балл (по перепроверке) работ, попавших к одному преподавателю.

Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

`k = len(marks) // k`

`ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n`

$\text{varx} = \text{np.var}([m \text{ for } m \text{ in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)$   
 $\text{sigmax} = \text{varx}^{**}(0.5)$  Ответы: 6.14667, 0.65542.

6. (10) Пусть  $X_1, X_2, X_3, X_4$  выборка из  $N(\theta, \sigma^2)$ . Рассмотрим две оценки параметра  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

Подготовил




П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021



Феклин В.Г.