ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»
Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»
Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

Билет 111

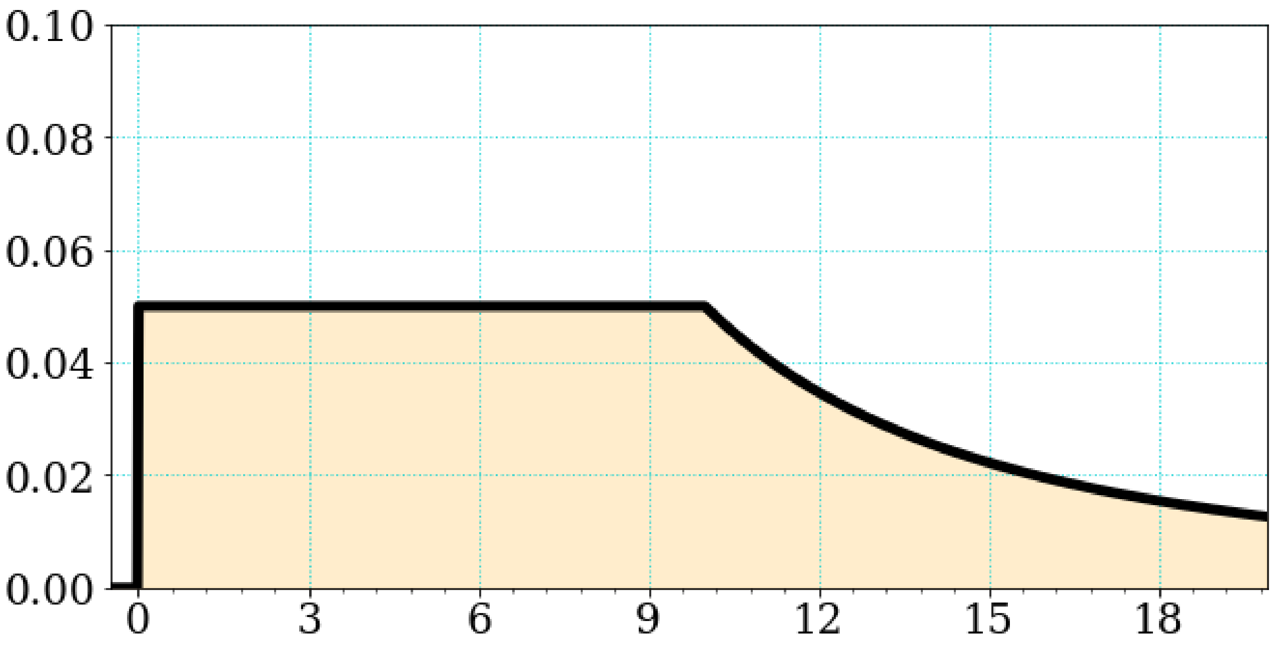
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 1]$ и $[0; 10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{20}, 0 \leqslant x \leqslant 10 \approx 10{,}0; \\ 1 - \frac{5}{x}, x \geqslant 10; \end{cases}$. 2)

   Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{20}, 0 \leqslant x \leqslant 10 \approx 10{,}0; \\ \frac{5}{x^2}, x \geqslant 10; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: $\P(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91) = 0{,}57283$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 8000

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -876.6667$ 2) Коэффициент корреляции $= -4.7659$

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 11-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 13,\ 2 : 3,\ 3 : 14,\ 4 : 9,\ 5 : 6,\ 6 : 15,\ 7 : 1,\ 8$

   Работы будут перепроверять 6 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

   k = len(marks) // k

   ex = np.sum([marks[m] * m for m in marks]) / n

   varx = np.var([m for m in marks for temp in range(marks[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)

   sigmax = varx**(0.5) Ответы: $6.57937, 0.64259$.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:
$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

   Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

Рябов

Подготовил П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021

Феклин Феклин В.Г.