ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»
Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»
Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

1 Билет 101

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;5]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}915 \leqslant Z \leqslant 2{,}783)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 17%

4. Создайте эмперические совокупности exp и log вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(100)$ и $\log(1), \log(2), ..., \log(10$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и log на совокупности натуральных чисел от 1 до 100.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	24	17	3
$X=300$	13	24	19

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + 2X_3 + 6X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 5X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

2 Билет 102

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5{*}y, \text{свероятностью 0.11} \\ 8{*}y, \text{свероятностью 1 - 0.11} \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	25	26	10
$X = 300$	10	10	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 71.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 62.0%.

3 Билет 103

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;1]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $91,6667\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 6,\ 2 : 16,\ 3 : 9,\ 4 : 16,\ 5 : 14,\ 6 : 4,\ 7 : 25,\ 8 : 26,\ 9 : 24,\ 10 : 10\}$

   Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 60.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

4 Билет 104

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 5]$ и $[0; 10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(0{,}1 \leqslant Z \leqslant 3{,}714)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $91,6667\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59%

4. Создайте эмперические совокупности log и cos вида $\log(1), \log(2), ..., \log(61)$ и $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(61)$.

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности log, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков log и cos на совокупности натуральных чисел от 1 до 61.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	25	26	10
$X = 300$	10	10	19

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−6	X=−5	X=−4
Y = 5	0.039	0.207	0.054
Y = 6	0.035	0.255	0.41

Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 5.82286. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

5 Билет 105

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. (10) Сформулируйте критерий независимости χ^2 – Пирсона. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) явный вид статистики критерия в случае, когда таблица сопряженности двух признаков X и Y имеет вид

	$Y = y_1$	$Y = y_2$
$X = x_1$	a	b
$X = x_2$	c	d

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{10, 7\}$, при этом $P(Y = 10) = 0.24$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 4{*}y, \text{свероятностью } 0.53 \\ 9{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.53 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 11-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 13,\ 2 : 3,\ 3 : 14,\ 4 : 9,\ 5 : 6,\ 6 : 15,\ 7 : 1,\ 8 : 22,\ 9 : 17,\ 10 : 10,\ 11 : 16\}$

   Работы будут перепроверять 6 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−3	X=−2	X=−1
Y = 2	0.29	0.298	0.234
Y = 3	0.066	0.03	0.082

Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 2.10982. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

6 Билет 106

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;6]$ и $[0;1]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}087 \leqslant Z \leqslant 0{,}235)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 32, y_0 = 89$, $x_1 = 61, y_1 = 91$, $x_2 = 64, y_2 = 88$, $x_3 = 97, y_3 = 55$, $x_4 = 66, y_4 = 84$, $x_5 = 78, y_5 = 56$, $x_6 = 62, y_6 = 60$, $x_7 = 73, y_7 = 42$, $x_8 = 40, y_8 = 59$, $x_9 = 86, y_9 = 80$, $x_{10} = 76, y_{10} = 33$, $x_{11} = 56, y_{11} = 64$, $x_{12} = 87, y_{12} = 86$, $x_{13} = 70, y_{13} = 38$, $x_{14} = 87, y_{14} = 76$, $x_{15} = 72, y_{15} = 63$, $x_{16} = 79, y_{16} = 41$, $x_{17} = 33, y_{17} = 74$, $x_{18} = 67, y_{18} = 71$, $x_{19} = 65, y_{19} = 34$, $x_{20} = 57, y_{20} = 56$, $x_{21} = 63, y_{21} = 87$, $x_{22} = 68, y_{22} = 95$, $x_{23} = 46, y_{23} = 94$, $x_{24} = 50, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−4	X=−3	X=−2
Y = 3	0.07	0.084	0.205
Y = 4	0.011	0.201	0.429

   Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 3.49618. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

7 Билет 107

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

4. Создайте эмперические совокупности exp и cos вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(57)$ и $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(57$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и cos на совокупности натуральных чисел от 1 до 57.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 55.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 50.0%.

8 Билет 108

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;7]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{10, 7\}$, при этом $P(Y = 10) = 0.24$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 4{*}y, \text{свероятностью } 0.53 \\ 9{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.53 \end{cases}$$

   Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

   Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. Создайте эмпирические совокупности cos и log вида $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(98)$ и $\log(1), \log(2), ..., \log(98)$.

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности cos, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков cos и log на совокупности натуральных чисел от 1 до 98.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	23	3
$X = 300$	2	12	32

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 5 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3 + 4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

9 Билет 109

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 4]$ и $[0; 7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5{*}y, \text{свероятностью } 0.11 \\ 8{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.11 \end{cases}$$

   Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

   Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 40, y_0 = 84$, $x_1 = 83, y_1 = 71$, $x_2 = 85, y_2 = 64$, $x_3 = 77, y_3 = 32$, $x_4 = 86, y_4 = 59$, $x_5 = 99, y_5 = 77$, $x_6 = 91, y_6 = 74$, $x_7 = 46, y_7 = 48$, $x_8 = 73, y_8 = 42$, $x_9 = 82, y_9 = 89$, $x_{10} = 40, y_{10} = 43$, $x_{11} = 60, y_{11} = 31$, $x_{12} = 81, y_{12} = 57$, $x_{13} = 88, y_{13} = 50$, $x_{14} = 34, y_{14} = 31$, $x_{15} = 45, y_{15} = 63$, $x_{16} = 38, y_{16} = 45$, $x_{17} = 34, y_{17} = 92$, $x_{18} = 92, y_{18} = 83$, $x_{19} = 88, y_{19} = 56$, $x_{20} = 60, y_{20} = 36$, $x_{21} = 85, y_{21} = 59$, $x_{22} = 60, y_{22} = 87$, $x_{23} = 30, y_{23} = 53$, $x_{24} = 56, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	24	17	3
$X=300$	13	24	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

10 Билет 110

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}057 \leqslant Z \leqslant 0{,}556)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 32, y_0 = 89$, $x_1 = 61, y_1 = 91$, $x_2 = 64, y_2 = 88$, $x_3 = 97, y_3 = 55$, $x_4 = 66, y_4 = 84$, $x_5 = 78, y_5 = 56$, $x_6 = 62, y_6 = 60$, $x_7 = 73, y_7 = 42$, $x_8 = 40, y_8 = 59$, $x_9 = 86, y_9 = 80$, $x_{10} = 76, y_{10} = 33$, $x_{11} = 56, y_{11} = 64$, $x_{12} = 87, y_{12} = 86$, $x_{13} = 70, y_{13} = 38$, $x_{14} = 87, y_{14} = 76$, $x_{15} = 72, y_{15} = 63$, $x_{16} = 79, y_{16} = 41$, $x_{17} = 33, y_{17} = 74$, $x_{18} = 67, y_{18} = 71$, $x_{19} = 65, y_{19} = 34$, $x_{20} = 57, y_{20} = 56$, $x_{21} = 63, y_{21} = 87$, $x_{22} = 68, y_{22} = 95$, $x_{23} = 46, y_{23} = 94$, $x_{24} = 50, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	16	19	5
$X=300$	25	10	25

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 71.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 62.0%.

11 Билет 111

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;1]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(2{,}96 \leqslant Z \leqslant 17{,}91)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 11-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 13,\ 2 : 3,\ 3 : 14,\ 4 : 9,\ 5 : 6,\ 6 : 15,\ 7 : 1,\ 8 : 22,\ 9 : 17,\ 10 : 10,\ 11 : 16\}$

   Работы будут перепроверять 6 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

12 Билет 112

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;7]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(1{,}072 \leqslant Z \leqslant 1{,}953)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5 * y, \text{свероятностью } 0.11 \\ 8 * y, \text{свероятностью 1 - } 0.11 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 55$, $x_1 = 88, y_1 = 86$, $x_2 = 42, y_2 = 96$, $x_3 = 69, y_3 = 93$, $x_4 = 43, y_4 = 64$, $x_5 = 42, y_5 = 86$, $x_6 = 35, y_6 = 45$, $x_7 = 60, y_7 = 55$, $x_8 = 41, y_8 = 90$, $x_9 = 62, y_9 = 57$, $x_{10} = 52, y_{10} = 53$, $x_{11} = 67, y_{11} = 32$, $x_{12} = 72, y_{12} = 98$, $x_{13} = 42, y_{13} = 84$, $x_{14} = 97, y_{14} = 51$, $x_{15} = 32, y_{15} = 89$, $x_{16} = 38, y_{16} = 84$, $x_{17} = 42, y_{17} = 84$, $x_{18} = 61, y_{18} = 94$, $x_{19} = 96, y_{19} = 31$, $x_{20} = 67, y_{20} = 56$, $x_{21} = 66, y_{21} = 67$, $x_{22} = 41, y_{22} = 95$, $x_{23} = 54, y_{23} = 95$, $x_{24} = 36, y_{24} = 80$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	25	26	10
$X = 300$	10	10	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3 + 4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

13 Билет 113

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}057 \leqslant Z \leqslant 0{,}556)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

4. Создайте эмперические совокупности exp и log вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(77)$ и $\log(1), \log(2), ..., \log(77)$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и log на совокупности натуральных чисел от 1 до 77.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 14-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1 : 3,\ 2 : 7,\ 3 : 5,\ 4 : 2,\ 5 : 11,\ 6 : 9,\ 7 : 2,\ 8 : 19,\ 9 : 23,\ 10 : 26,\ 11 : 15,\ 12$

Работы будут перепроверять 16 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + 7X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + 5X_2 + X_3 + X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

14 Билет 114

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 2]$ и $[0; 6]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}532 \leqslant Z \leqslant 4{,}716)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	16	22
$X = 300$	7	26	13

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

15 Билет 115

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;4]$ и $[0;7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(0,035 $\leqslant Z \leqslant$ 2,775).

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	6	23
$X = 300$	13	30	27

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 13 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{5X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

16 Билет 116

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;7]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶(0,006 $\leqslant Z \leqslant$ 0,519).

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{3, 4\}$, при этом $P(Y = 3) =$ 0.33. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9{*}y, \text{свероятностью } 0.34 \\ 7{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.34 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 3X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

17 Билет 117

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. (10) Сформулируйте критерий независимости χ^2 – Пирсона. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) явный вид статистики критерия в случае, когда таблица сопряженности двух признаков X и Y имеет вид

	$Y = y_1$	$Y = y_2$
$X = x_1$	a	b
$X = x_2$	c	d

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет 75,0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	19	5
$X = 300$	25	10	25

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 52.0%.

18 Билет 118

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 3]$ и $[0; 8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $91,6667\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	17	3	13
$X=300$	21	23	23

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 10 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3 + 4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

19 Билет 119

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 9]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}719 \leqslant Z \leqslant 1{,}005)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^\beta, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $93,3333\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 19%

4. Создайте эмперические совокупности exp и sin вида $\exp(1), \exp(2), ..., \exp(85)$ и $\sin(1), \sin(2), ..., \sin(85)$

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности exp, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков exp и sin на совокупности натуральных чисел от 1 до 85.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	28	23	3
$X=300$	2	12	32

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 5 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

20 Билет 120

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;4]$ и $[0;7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8{*}y, \text{свероятностью 0.15} \\ 6{*}y, \text{свероятностью 1 - 0.15} \end{cases}$$

   Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

   Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 40, y_0 = 84$, $x_1 = 83, y_1 = 71$, $x_2 = 85, y_2 = 64$, $x_3 = 77, y_3 = 32$, $x_4 = 86, y_4 = 59$, $x_5 = 99, y_5 = 77$, $x_6 = 91, y_6 = 74$, $x_7 = 46, y_7 = 48$, $x_8 = 73, y_8 = 42$, $x_9 = 82, y_9 = 89$, $x_{10} = 40, y_{10} = 43$, $x_{11} = 60, y_{11} = 31$, $x_{12} = 81, y_{12} = 57$, $x_{13} = 88, y_{13} = 50$, $x_{14} = 34, y_{14} = 31$, $x_{15} = 45, y_{15} = 63$, $x_{16} = 38, y_{16} = 45$, $x_{17} = 34, y_{17} = 92$, $x_{18} = 92, y_{18} = 83$, $x_{19} = 88, y_{19} = 56$, $x_{20} = 60, y_{20} = 36$, $x_{21} = 85, y_{21} = 59$, $x_{22} = 60, y_{22} = 87$, $x_{23} = 30, y_{23} = 53$, $x_{24} = 56, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	13	10
$X = 300$	1	12	35

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 7 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{5X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

21 Билет 121

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(3{,}263 \leqslant Z \leqslant 5{,}35)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	6	23
$X = 300$	13	30	27

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 13 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−3	X=−2	X=−1
Y = 2	0.29	0.298	0.234
Y = 3	0.066	0.03	0.082

Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 2.10982. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

22 Билет 122

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;2]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность $\P(2{,}016 \leqslant Z \leqslant 6{,}716)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8 * y, \text{свероятностью } 0.15 \\ 6 * y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. Создайте эмперические совокупности sin и cos вида $\sin(1), \sin(2), ..., \sin(60)$ и $\cos(1), \cos(2), ..., \cos(60)$.

   Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности sin, её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

   Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков sin и cos на совокупности натуральных чисел от 1 до 60.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	11	26	27
$X=300$	5	10	21

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 62.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59.0%.

23 Билет 123

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 9]$ и $[0; 3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}059 \leqslant Z \leqslant 0{,}348)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 55$, $x_1 = 88, y_1 = 86$, $x_2 = 42, y_2 = 96$, $x_3 = 69, y_3 = 93$, $x_4 = 43, y_4 = 64$, $x_5 = 42, y_5 = 86$, $x_6 = 35, y_6 = 45$, $x_7 = 60, y_7 = 55$, $x_8 = 41, y_8 = 90$, $x_9 = 62, y_9 = 57$, $x_{10} = 52, y_{10} = 53$, $x_{11} = 67, y_{11} = 32$, $x_{12} = 72, y_{12} = 98$, $x_{13} = 42, y_{13} = 84$, $x_{14} = 97, y_{14} = 51$, $x_{15} = 32, y_{15} = 89$, $x_{16} = 38, y_{16} = 84$, $x_{17} = 42, y_{17} = 84$, $x_{18} = 61, y_{18} = 94$, $x_{19} = 96, y_{19} = 31$, $x_{20} = 67, y_{20} = 56$, $x_{21} = 66, y_{21} = 67$, $x_{22} = 41, y_{22} = 95$, $x_{23} = 54, y_{23} = 95$, $x_{24} = 36, y_{24} = 80$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	28	23	3
$X=300$	2	12	32

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 5 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−6	X=−5	X=−4
Y = 5	0.039	0.207	0.054
Y = 6	0.035	0.255	0.41

Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 5.82286. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

24 Билет 124

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 10]$ и $[0; 9]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}719 \leqslant Z \leqslant 1{,}005)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8{*}y, \text{свероятностью } 0.15 \\ 6{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	16	22
$X = 300$	7	26	13

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \le x \le 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 62.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 59.0%.

25 Билет 125

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;7]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 73, y_0 = 44$, $x_1 = 44, y_1 = 83$, $x_2 = 49, y_2 = 41$, $x_3 = 36, y_3 = 32$, $x_4 = 48, y_4 = 60$, $x_5 = 53, y_5 = 37$, $x_6 = 70, y_6 = 86$, $x_7 = 61, y_7 = 82$, $x_8 = 42, y_8 = 57$, $x_9 = 94, y_9 = 40$, $x_{10} = 44, y_{10} = 78$, $x_{11} = 85, y_{11} = 78$, $x_{12} = 48, y_{12} = 66$, $x_{13} = 88, y_{13} = 82$, $x_{14} = 31, y_{14} = 39$, $x_{15} = 84, y_{15} = 68$, $x_{16} = 49, y_{16} = 51$, $x_{17} = 84, y_{17} = 55$, $x_{18} = 65, y_{18} = 67$, $x_{19} = 37, y_{19} = 99$, $x_{20} = 46, y_{20} = 31$, $x_{21} = 84, y_{21} = 46$, $x_{22} = 40, y_{22} = 67$, $x_{23} = 86, y_{23} = 54$, $x_{24} = 89, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	19	5
$X = 300$	25	10	25

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

26 Билет 126

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(3{,}263 \leqslant Z \leqslant 5{,}35)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1:6,\ 2:16,\ 3:9,\ 4:16,\ 5:14,\ 6:4,\ 7:25,\ 8:26,\ 9:24,\ 10:10\}$

   Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 57.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 51.0%.

27 Билет 127

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;1]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}039 \leqslant Z \leqslant 5{,}208)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 97, y_0 = 80$, $x_1 = 45, y_1 = 92$, $x_2 = 41, y_2 = 62$, $x_3 = 56, y_3 = 75$, $x_4 = 88, y_4 = 53$, $x_5 = 45, y_5 = 93$, $x_6 = 91, y_6 = 71$, $x_7 = 31, y_7 = 62$, $x_8 = 57, y_8 = 69$, $x_9 = 48, y_9 = 84$, $x_{10} = 33, y_{10} = 82$, $x_{11} = 95, y_{11} = 34$, $x_{12} = 94, y_{12} = 40$, $x_{13} = 58, y_{13} = 78$, $x_{14} = 64, y_{14} = 60$, $x_{15} = 81, y_{15} = 47$, $x_{16} = 57, y_{16} = 55$, $x_{17} = 30, y_{17} = 93$, $x_{18} = 51, y_{18} = 52$, $x_{19} = 99, y_{19} = 88$, $x_{20} = 47, y_{20} = 60$, $x_{21} = 78, y_{21} = 31$, $x_{22} = 61, y_{22} = 37$, $x_{23} = 91, y_{23} = 81$, $x_{24} = 39, y_{24} = 98$ Требуется найти следующие условные эмпирические

характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	28	13	10
$X=300$	1	12	35

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 7 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 74.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 73.0%.

28 Билет 128

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;2]$ и $[0;7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}019 \leqslant Z \leqslant 3{,}843)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $75,0\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 20%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=5$
$X=200$	24	17	3
$X=300$	13	24	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 74.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 73.0%.

29 Билет 129

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;4]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}182 \leqslant Z \leqslant 1{,}21)$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $85,7143\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 96%

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 64, y_0 = 84$, $x_1 = 82, y_1 = 42$, $x_2 = 51, y_2 = 99$, $x_3 = 68, y_3 = 57$, $x_4 = 90, y_4 = 71$, $x_5 = 89, y_5 = 55$, $x_6 = 55, y_6 = 55$, $x_7 = 90, y_7 = 58$, $x_8 = 61, y_8 = 78$, $x_9 = 38, y_9 = 84$, $x_{10} = 56, y_{10} = 95$, $x_{11} = 86, y_{11} = 69$, $x_{12} = 71, y_{12} = 72$, $x_{13} = 35, y_{13} = 99$, $x_{14} = 82, y_{14} = 67$, $x_{15} = 79, y_{15} = 59$, $x_{16} = 83, y_{16} = 88$, $x_{17} = 45, y_{17} = 75$, $x_{18} = 70, y_{18} = 79$, $x_{19} = 89, y_{19} = 80$, $x_{20} = 33, y_{20} = 30$, $x_{21} = 63, y_{21} = 73$, $x_{22} = 55, y_{22} = 53$, $x_{23} = 31, y_{23} = 78$, $x_{24} = 50, y_{24} = 90$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	17	3	13
$X = 300$	21	23	23

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 10 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составила 76.0%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 74.0%.

30 Билет 130

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;3]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(2{,}475 \leqslant Z \leqslant 4{,}811)$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{7, 5\}$, при этом $P(Y = 7) = 0.08$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9{*}y, \text{свероятностью } 0.24 \\ 8{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.24 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом: $\{1:6,\ 2:16,\ 3:9,\ 4:16,\ 5:14,\ 6:4,\ 7:25,\ 8:26,\ 9:24,\ 10:10\}$

   Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть $\overline{X}$ - средний балл (по перепроверки) работ, попавших к одному преподавателю.

   Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

   а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Подготовил Рябов П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021 Феклин Феклин В.Г.