

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных  
Департамент анализа данных и машинного обучения

**Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

## 1 Билет 101

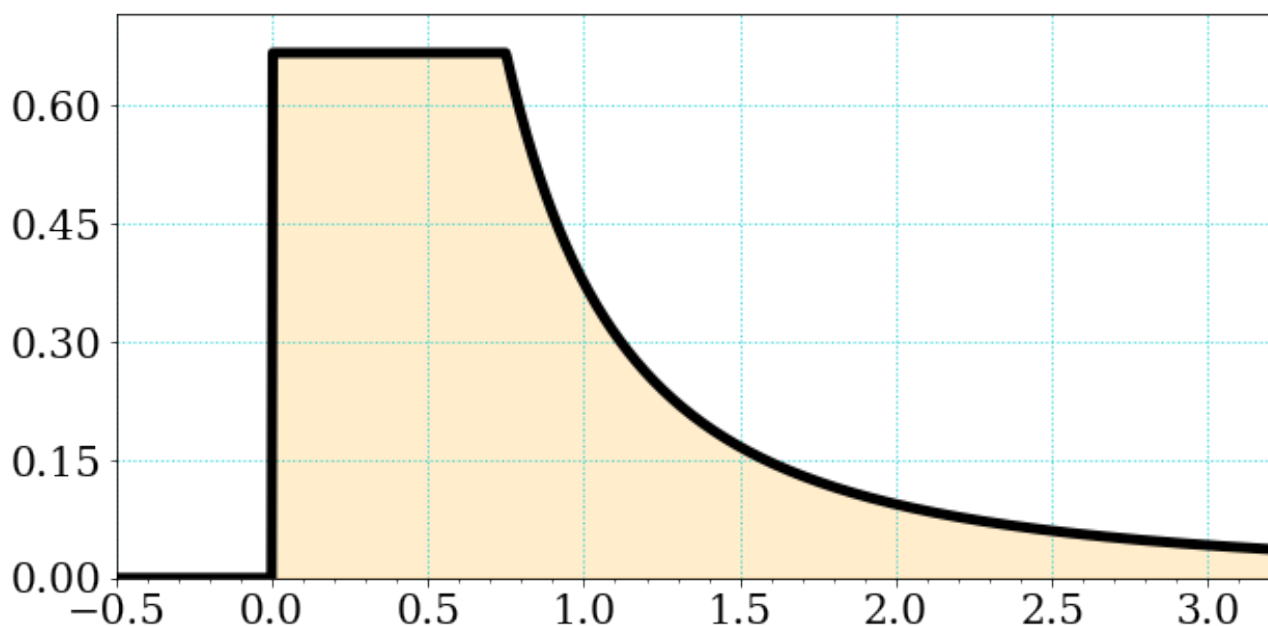
1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезках  $[0; 4]$  и  $[0; 3]$  соответственно. Для случайной величины  $Z = \frac{Y}{X}$  найдите: 1) функцию распределения  $F_Z(x)$ ; 2) плотность распределения  $f_Z(x)$  и постройте график плотности; 3) вероятность  $\mathbb{P}(0,182 \leq Z \leq 1,21)$ .

1) Функция распределения  $F_Z(x)$  имеет вид:  $F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \approx 0,75; \\ 1 - \frac{3}{8x}, & x \geq \frac{3}{4}; \end{cases}$  . 2) Плотность

распределения  $f_Z(x)$  имеет вид:  $f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \approx 0,75; \\ \frac{3}{8x^2}, & x \geq \frac{3}{4}; \end{cases}$  .



3) вероятность равна:  $\mathbb{P}(0,182 \leq Z \leq 1,21) = 0,56852$ .

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение  $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$ . Наблюдения показали, что в среднем она составляет 88,8889%. Методом моментов оцените параметр  $\beta$  и вероятность того, что она опустится ниже 89%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 3936588805702081

4. Создайте эмперические совокупности  $\cos$  и  $\log$  вида  $\cos(1), \cos(2), \dots, \cos(98)$  и  $\log(1), \log(2), \dots, \log(98)$ .

Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности  $\cos$ , её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков  $\cos$  и  $\log$  на совокупности натуральных чисел от 1 до 98.

Используя

$$E(X) = \text{sum}(X)/n$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$$

$$Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$$

$$r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) * E(Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$$

рассчитаем искомые значения.

Ответы:  $-0.01464, 0.70686, 0.37349, -1.50394, 1.0 \cdot 10^{-5}$ .

5. (10) Эмпирическое распределение признаков  $X$  и  $Y$  на генеральной совокупности  $\Omega$  задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	17	3	13
$X = 300$	21	23	23

Из  $\Omega$  случайным образом без возвращения извлекаются 10 элементов. Пусть  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание  $E(\bar{Y})$ ; 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ ; 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание  $E(\bar{Y})$ : 3.6 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ : 257.2355 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$ : 0.7091

6. (10) Пусть  $X_1, X_2, X_3, X_4$  выборка из  $N(\theta, \sigma^2)$ . Рассмотрим две оценки параметра  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{5X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_2 = \frac{4X_1 + 4X_2 + X_3 + X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

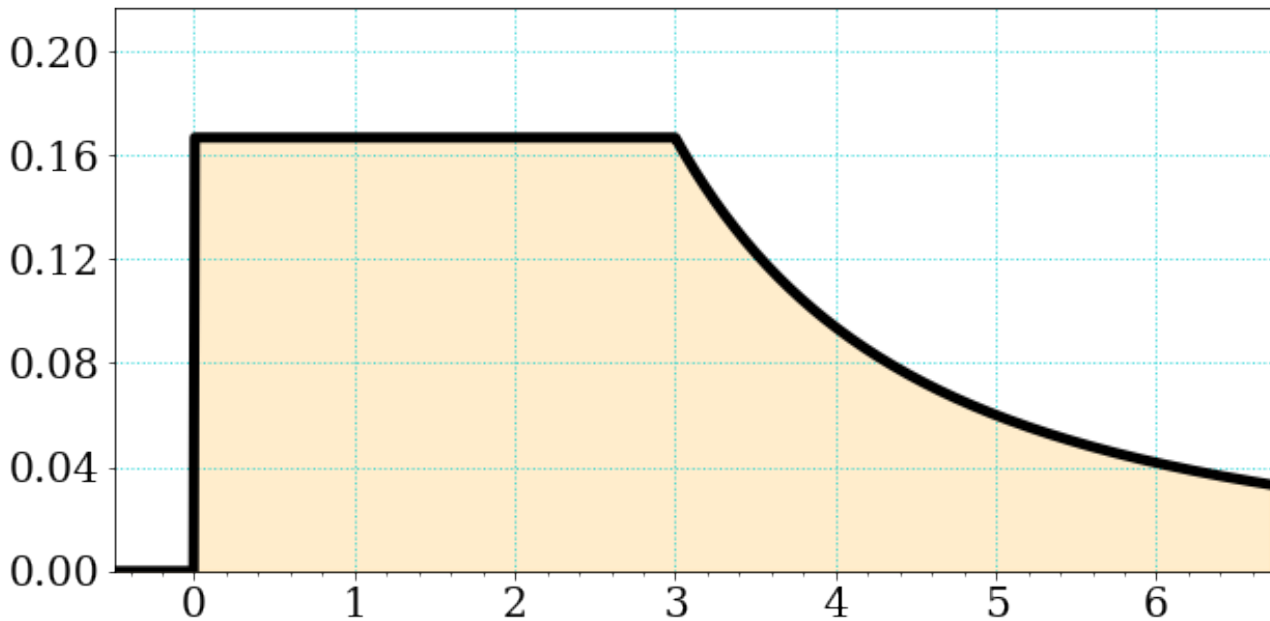
## 2 Билет 102

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезках  $[0; 2]$  и  $[0; 6]$  соответственно. Для случайной величины  $Z = \frac{Y}{X}$  найдите: 1) функцию распределения  $F_Z(x)$ ; 2) плотность распределения  $f_Z(x)$  и постройте график плотности; 3) вероятность  $\mathbb{P}(2,532 \leq Z \leq 4,716)$ .

- 1) Функция распределения  $F_Z(x)$  имеет вид:  $F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{6}, & 0 \leq x \leq 3 \approx 3,0; \\ 1 - \frac{3}{2x}, & x \geq 3; \end{cases}$  2) Плотность распределения  $f_Z(x)$  имеет вид:  $f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq x \leq 3 \approx 3,0; \\ \frac{3}{2x^2}, & x \geq 3; \end{cases}$



- 3) вероятность равна:  $\mathbb{P}(2,532 \leq Z \leq 4,716) = 0,25993$ .
3. Случайная величина  $Y$  принимает только значения из множества  $\{10, 7\}$ , при этом  $P(Y = 10) = 0.24$ . Распределение случайной величины  $X$  определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 4*Y, & \text{с вероятностью } 0.53 \\ 9*Y, & \text{с вероятностью } 1 - 0.53 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию  $X$ .

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины  $X$

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины  $Y$

$$E(Y) = 10 * 0.24 + 7 * (1 - 0.24)$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 10^2 * 0.24 + 7^2 * (1 - 0.24) - [E(Y)]^2$$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайной величины  $X$

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(4*Y)*0.53 + E(9*Y)*(1-0.53)] = E(Y)*(4*0.53 + 9*(1-0.53)) = 49.022$$

$$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$$

$$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$$

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 447.56552$$

4. Создайте эмпирические совокупности  $\exp$  и  $\log$  вида  $\exp(1), \exp(2), \dots, \exp(77)$  и  $\log(1), \log(2), \dots, \log(77)$

Найдите эмпирическое среднее и эмпирическое стандартное отклонение совокупности  $\exp$ , её четвёртый эмпирический центральный момент и эмпирический эксцесс.

Кроме того, найдите эмпирический коэффициент корреляции признаков  $\exp$  и  $\log$  на совокупности натуральных чисел от 1 до 77.

Используя

$$E(X) = \text{sum}(X)/n$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$$

$$Ex = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3$$

$$r_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) * E(Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$$

рассчитаем искомые значения.

Ответы:  $5.66740783200168 \cdot 10^{31}$ ,  $3.33285124990578 \cdot 10^{32}$ ,  $7.03150966623892 \cdot 10^{131}$ , 53.98819, 0.0006.

5. (10) Эмпирическое распределение признаков  $X$  и  $Y$  на генеральной совокупности  $\Omega$  задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	6	23
$X = 300$	13	30	27

Из  $\Omega$  случайным образом без возвращения извлекаются 13 элементов. Пусть  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание  $E(\bar{Y})$ ; 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ ; 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание  $E(\bar{Y})$ : 4.22 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ : 255.4769 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$ : -1.2655

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	$X = -9$	$X = -8$	$X = -7$
$Y = 8$	0.09	0.005	0.23
$Y = 9$	0.249	0.095	0.331

Дарья получила, что  $E(Y|X + Y = 1) = 8.2921$ . Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

$$E(Y|X + Y = 1) = \frac{\sum (P(X=1-y_i, Y=y_i) * y_i)}{\sum (P(X=1-y_i, Y=y_i))}.$$

Ответ: 8.2921

Подготовил

*Рябов*

П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021

*Феклин*

Феклин В.Г.