ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных

Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

Билет 106

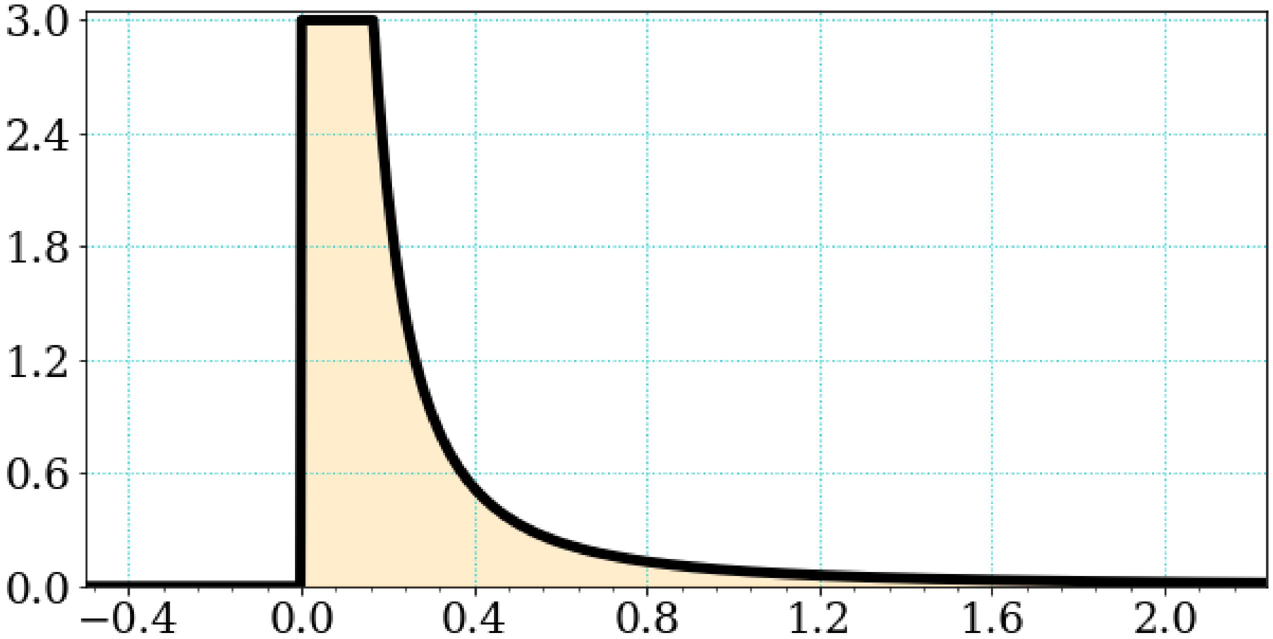
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 6]$ и $[0; 1]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}087 \leqslant Z \leqslant 0{,}235)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ 3x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{6} \approx 0{,}167; \\ 1 - \frac{1}{12x}, x \geqslant \frac{1}{6}; \end{cases}$.

   2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 3, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{6} \approx 0{,}167; \\ \frac{1}{12x^2}, x \geqslant \frac{1}{6}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}087 \leqslant Z \leqslant 0{,}235) = 0{,}38564$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою
   Ответ: 1174711139837

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 32, y_0 = 89$, $x_1 = 61, y_1 = 91$, $x_2 = 64, y_2 = 88$, $x_3 = 97, y_3 = 55$, $x_4 = 66, y_4 = 84$, $x_5 = 78, y_5 = 56$, $x_6 = 62, y_6 = 60$, $x_7 = 73, y_7 = 42$, $x_8 = 40, y_8 = 59$, $x_9 = 86, y_9 = 80$, $x_{10} = 76, y_{10} = 33$, $x_{11} = 56, y_{11} = 64$, $x_{12} = 87, y_{12} = 86$, $x_{13} = 70, y_{13} = 38$, $x_{14} = 87, y_{14} = 76$, $x_{15} = 72, y_{15} = 63$, $x_{16} = 79, y_{16} = 41$, $x_{17} = 33, y_{17} = 74$, $x_{18} = 67, y_{18} = 71$, $x_{19} = 65, y_{19} = 34$, $x_{20} = 57, y_{20} = 56$, $x_{21} = 63, y_{21} = 87$, $x_{22} = 68, y_{22} = 95$, $x_{23} = 46, y_{23} = 94$, $x_{24} = 50, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -262.8$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.5753$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.084 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.9911

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−4	X=−3	X=−2
Y = 3	0.07	0.084	0.205
Y = 4	0.011	0.201	0.429

   Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 3.49618. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.
   $E(Y|X+Y=1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

   Ответ: 3.49618

Подготовил Рябов П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021 Феклин Феклин В.Г.