ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»
Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»
Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

Билет 121

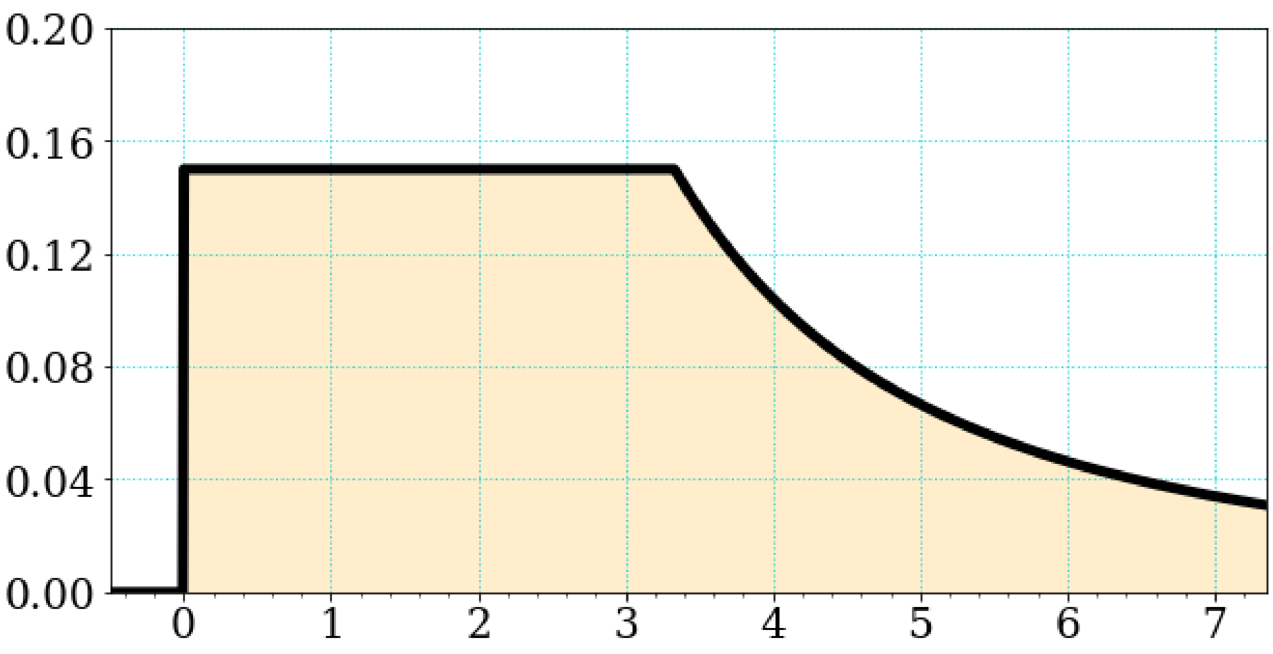
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 3]$ и $[0; 10]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(3{,}263 \leqslant Z \leqslant 5{,}35)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{3x}{20}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3} \approx 3{,}333; \\ 1 - \frac{5}{3x}, x \geqslant \frac{10}{3}; \end{cases}$.

   2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{3}{20}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3} \approx 3{,}333; \\ \frac{5}{3x^2}, x \geqslant \frac{10}{3}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(3{,}263 \leqslant Z \leqslant 5{,}35) = 0{,}19897$.

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение $F(x) = x^{\beta}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет $87,5\%$. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 53%

   Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою Ответ: 1174711139837

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 33, y_0 = 72$, $x_1 = 94, y_1 = 94$, $x_2 = 91, y_2 = 52$, $x_3 = 47, y_3 = 59$, $x_4 = 53, y_4 = 45$, $x_5 = 96, y_5 = 54$, $x_6 = 60, y_6 = 99$, $x_7 = 70, y_7 = 44$, $x_8 = 50, y_8 = 81$, $x_9 = 57, y_9 = 40$, $x_{10} = 99, y_{10} = 61$, $x_{11} = 94, y_{11} = 43$, $x_{12} = 85, y_{12} = 96$, $x_{13} = 30, y_{13} = 91$, $x_{14} = 57, y_{14} = 37$, $x_{15} = 42, y_{15} = 35$, $x_{16} = 84, y_{16} = 75$, $x_{17} = 96, y_{17} = 97$, $x_{18} = 69, y_{18} = 92$, $x_{19} = 91, y_{19} = 93$, $x_{20} = 45, y_{20} = 30$, $x_{21} = 35, y_{21} = 94$, $x_{22} = 83, y_{22} = 53$, $x_{23} = 53, y_{23} = 60$, $x_{24} = 36, y_{24} = 69$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация $= -350.8333$ 2) Коэффициент корреляции $= -1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	6	23
$X = 300$	13	30	27

   Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 13 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

   1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 4.22 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 255.4769 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.2655

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	X=−3	X=−2	X=−1
Y = 2	0.29	0.298	0.234
Y = 3	0.066	0.03	0.082

   Дарья получила, что E(Y|X + Y = 1) = 2.10982. Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

   $E(Y|X+Y=1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)*y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i)}$.

   Ответ: 2.10982

Подготовил Рябов П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021 Феклин Феклин В.Г.