ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных

Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

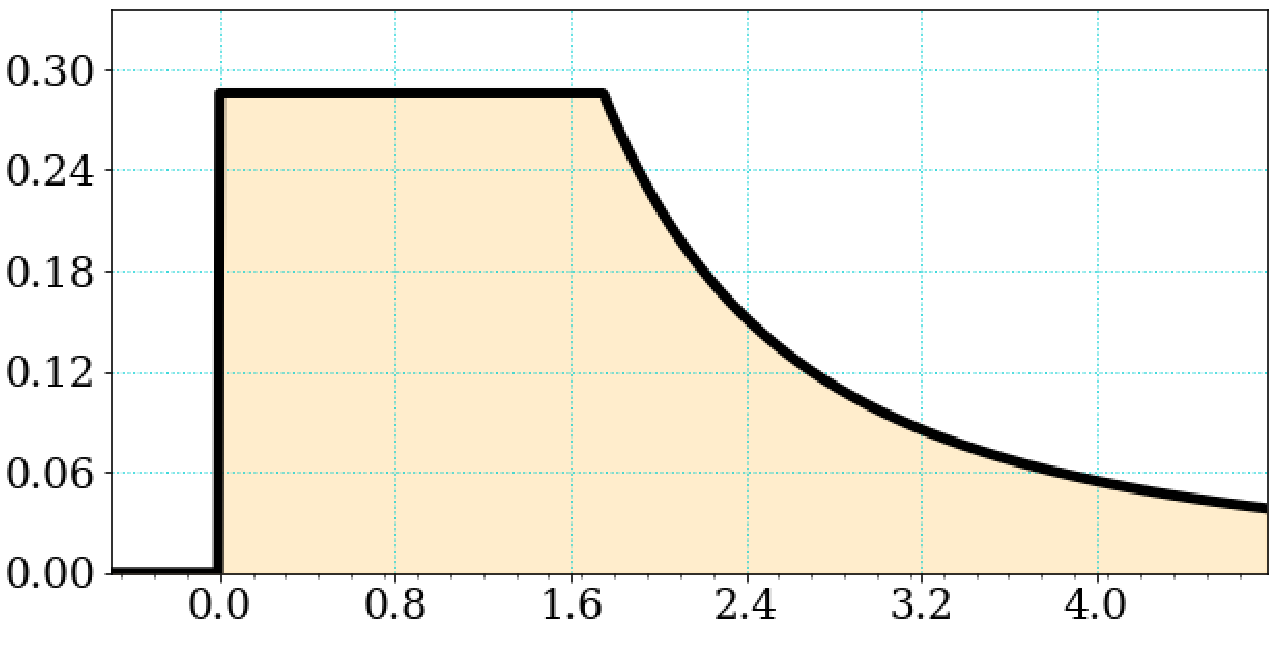
Билет 120

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;4]$ и $[0;7]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{2x}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ 1 - \frac{7}{8x}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$. 2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{2}{7}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4} \approx 1{,}75; \\ \frac{7}{8x^2}, x \geqslant \frac{7}{4}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}035 \leqslant Z \leqslant 2{,}775) = 0{,}67474$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{2, 1\}$, при этом $P(Y = 2) = 0.61$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 8{*}y, \text{свероятностью } 0.15 \\ 6{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.15 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 2 * 0.61 + 1 * (1 - 0.61)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2^2 * 0.61 + 1^2 * (1 - 0.61) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(8*Y)*0.15+E(6*Y)*(1-0.15)] = E(Y)*(8*0.15+6*(1-0.15)) = 10.143$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 10.88555$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 40, y_0 = 84$, $x_1 = 83, y_1 = 71$, $x_2 = 85, y_2 = 64$, $x_3 = 77, y_3 = 32$, $x_4 = 86, y_4 = 59$, $x_5 = 99, y_5 = 77$, $x_6 = 91, y_6 = 74$, $x_7 = 46, y_7 = 48$, $x_8 = 73, y_8 = 42$, $x_9 = 82, y_9 = 89$, $x_{10} = 40, y_{10} = 43$, $x_{11} = 60, y_{11} = 31$, $x_{12} = 81, y_{12} = 57$, $x_{13} = 88, y_{13} = 50$, $x_{14} = 34, y_{14} = 31$, $x_{15} = 45, y_{15} = 63$, $x_{16} = 38, y_{16} = 45$, $x_{17} = 34, y_{17} = 92$, $x_{18} = 92, y_{18} = 83$, $x_{19} = 88, y_{19} = 56$, $x_{20} = 60, y_{20} = 36$, $x_{21} = 85, y_{21} = 59$, $x_{22} = 60, y_{22} = 87$, $x_{23} = 30, y_{23} = 53$, $x_{24} = 56, y_{24} = 73$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

   1) Ковариация = -335.0 2) Коэффициент корреляции = -2.4919

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	28	13	10
$X = 300$	1	12	35

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 7 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.85 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 244.0153 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 3.7764

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{5X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

Рябов

Подготовил П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Феклин

Дата 01.06.2021 Феклин В.Г.