ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных

Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

Билет 116

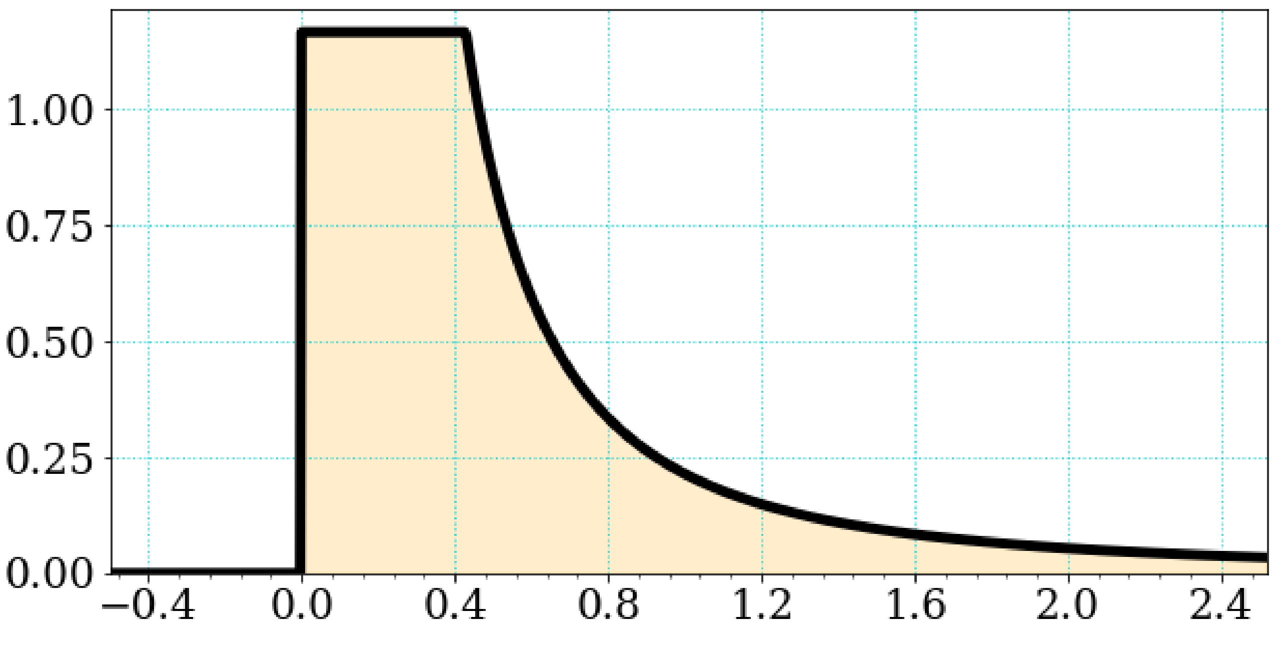
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Запишите плотность χ^2- распределения. Выведите формулы для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ χ^2-распределение с n степенями свободы. Найдите а) $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9)$, где χ^2_{20}–случайная величина, которая имеет χ^2– распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку $\chi^2_{0.93}(5)$ хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

   $\mathbb{P}(\chi^2_{20} > 10.9) = 0.948775$; $\chi^2_{0.93}(5) = 1.34721$.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;7]$ и $[0;3]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{7x}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ 1 - \frac{3}{14x}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$.

   2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{7}{6}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{7} \approx 0{,}429; \\ \frac{3}{14x^2}, x \geqslant \frac{3}{7}; \end{cases}$.



3) вероятность равна: ¶$(0{,}006 \leqslant Z \leqslant 0{,}519) = 0{,}57962$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{3, 4\}$, при этом $P(Y = 3) = 0.33$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9{*}y, \text{свероятностью } 0.34 \\ 7{*}y, \text{свероятностью } 1 - 0.34 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 3 * 0.33 + 4 * (1 - 0.33)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3^2 * 0.33 + 4^2 * (1 - 0.33) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(9*Y)*0.34 + E(7*Y)*(1-0.34)] = E(Y)*(9*0.34 + 7*(1-0.34)) = 28.1856$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 25.32915$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 54$, $x_1 = 64, y_1 = 68$, $x_2 = 34, y_2 = 51$, $x_3 = 48, y_3 = 73$, $x_4 = 81, y_4 = 69$, $x_5 = 62, y_5 = 69$, $x_6 = 76, y_6 = 59$, $x_7 = 84, y_7 = 45$, $x_8 = 97, y_8 = 77$, $x_9 = 76, y_9 = 87$, $x_{10} = 43, y_{10} = 67$, $x_{11} = 33, y_{11} = 55$, $x_{12} = 71, y_{12} = 96$, $x_{13} = 62, y_{13} = 97$, $x_{14} = 84, y_{14} = 37$, $x_{15} = 41, y_{15} = 70$, $x_{16} = 92, y_{16} = 41$, $x_{17} = 60, y_{17} = 54$, $x_{18} = 71, y_{18} = 44$, $x_{19} = 39, y_{19} = 70$, $x_{20} = 98, y_{20} = 75$, $x_{21} = 99, y_{21} = 32$, $x_{22} = 58, y_{22} = 42$, $x_{23} = 61, y_{23} = 92$, $x_{24} = 58, y_{24} = 32$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = 276.75 2) Коэффициент корреляции = 1.373

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	1	18	12
$X = 300$	31	26	12

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.6 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 256.084 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: -1.9911

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 6X_2 + X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 3X_3 + 3X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

Подготовил Рябов П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021 Феклин Феклин В.Г.