

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ , и выведите основные свойства гамма-распределения. Запишите формулы для математического ожидания  $E(X)$  и дисперсии  $Var(X)$  гамма-распределения
2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезках  $[0; 3]$  и  $[0; 8]$  соответственно. Для случайной величины  $Z = \frac{Y}{X}$  найдите: 1) функцию распределения  $F_Z(x)$ ; 2) плотность распределения  $f_Z(x)$  и постройте график плотности; 3) вероятность  $\mathbb{P}(2,475 \leq Z \leq 4,811)$ .
3. Случайная величина  $Y$  принимает только значения из множества  $\{7, 5\}$ , при этом  $P(Y = 7) = 0.08$ . Распределение случайной величины  $X$  определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 9 \cdot y, & \text{с вероятностью } 0.24 \\ 8 \cdot y, & \text{с вероятностью } 1 - 0.24 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию  $X$ .

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины  $X$

4. (10) В группе  $\Omega$  учатся студенты:  $\omega_1 \dots \omega_{25}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки  $\omega_i$  студента обозначаются:  $x_i = X(\omega_i)$  и  $y_i = Y(\omega_i)$ ,  $i = 1 \dots 25$ . Все оценки известны  $x_0 = 55, y_0 = 54, x_1 = 64, y_1 = 68, x_2 = 34, y_2 = 51, x_3 = 48, y_3 = 73, x_4 = 81, y_4 = 69, x_5 = 62, y_5 = 69, x_6 = 76, y_6 = 59, x_7 = 84, y_7 = 45, x_8 = 97, y_8 = 77, x_9 = 76, y_9 = 87, x_{10} = 43, y_{10} = 67, x_{11} = 33, y_{11} = 55, x_{12} = 71, y_{12} = 96, x_{13} = 62, y_{13} = 97, x_{14} = 84, y_{14} = 37, x_{15} = 41, y_{15} = 70, x_{16} = 92, y_{16} = 41, x_{17} = 60, y_{17} = 54, x_{18} = 71, y_{18} = 44, x_{19} = 39, y_{19} = 70, x_{20} = 98, y_{20} = 75, x_{21} = 99, y_{21} = 32, x_{22} = 58, y_{22} = 42, x_{23} = 61, y_{23} = 92, x_{24} = 58, y_{24} = 32$ . Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию  $X$  и  $Y$  при условии, что одновременно  $X \geq 50$  и  $Y \geq 50$ ; 2) коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$  при том же условии.
5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 10-балльной системой оценивания задано следующим образом:  $\{1 : 6, 2 : 16, 3 : 9, 4 : 16, 5 : 14, 6 : 4, 7 : 25, 8 : 26, 9 : 24, 10 : 10\}$   
Работы будут перепроверять 10 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть  $\bar{X}$  – средний балл (по перепроверке) работ, попавших к одному преподавателю.  
Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.
6. (10) Пусть  $X_1, X_2, X_3, X_4$  выборка из  $N(\theta, \sigma^2)$ . Рассмотрим две оценки параметра  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4}{10}, \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4}{10}$$

- а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Подготовил

*Рябов*

П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021

*Феклин*

Феклин В.Г.