

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных  
Департамент анализа данных и машинного обучения

**Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

**Билет 105**

1. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей

Здесь очень много исчерпывающей информации о выборках из генеральной совокупности и про различные виды выборок

2. (10) Сформулируйте критерий независимости  $\chi^2$  – Пирсона. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) явный вид статистики критерия в случае, когда таблица сопряженности двух признаков  $X$  и  $Y$  имеет вид

	$Y = y_1$	$Y = y_2$
$X = x_1$	$a$	$b$
$X = x_2$	$c$	$d$

Здесь формулировки критерия независимости Пирсона и приводится пример

3. Случайная величина  $Y$  принимает только значения из множества  $\{10, 7\}$ , при этом  $P(Y = 10) = 0.24$ . Распределение случайной величины  $X$  определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 4*y, \text{ с вероятностью } 0.53 \\ 9*y, \text{ с вероятностью } 1 - 0.53 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию  $X$ .

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины  $X$

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины  $Y$

$$E(Y) = 10 * 0.24 + 7 * (1 - 0.24)$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 10^2 * 0.24 + 7^2 * (1 - 0.24) - [E(Y)]^2$$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайной величины  $X$

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(4*Y) * 0.53 + E(9*Y) * (1 - 0.53)] = E(Y) * (4 * 0.53 + 9 * (1 - 0.53)) = 49.022$$

$$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$$

$$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)^2$$

$$\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|Y)) + \text{Var}(E(X|Y)) = 447.56552$$

4. (10) В группе  $\Omega$  учатся студенты:  $\omega_1 \dots \omega_{25}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки  $\omega_i$  студента обозначаются:  $x_i = X(\omega_i)$  и  $y_i = Y(\omega_i)$ ,  $i = 1 \dots 25$ . Все оценки известны  $x_0 = 55, y_0 = 54, x_1 = 64, y_1 = 68, x_2 = 34, y_2 = 51, x_3 = 48, y_3 = 73, x_4 = 81, y_4 = 69, x_5 = 62, y_5 = 69, x_6 = 76, y_6 = 59, x_7 = 84, y_7 = 45, x_8 = 97, y_8 = 77, x_9 = 76, y_9 = 87, x_{10} = 43, y_{10} = 67, x_{11} = 33, y_{11} = 55, x_{12} = 71, y_{12} = 96, x_{13} = 62, y_{13} = 97, x_{14} = 84, y_{14} = 37, x_{15} = 41, y_{15} = 70, x_{16} = 92, y_{16} = 41, x_{17} = 60, y_{17} = 54, x_{18} = 71, y_{18} = 44, x_{19} = 39, y_{19} = 70, x_{20} = 98, y_{20} = 75, x_{21} = 99, y_{21} = 32, x_{22} = 58, y_{22} = 42, x_{23} = 61, y_{23} = 92, x_{24} = 58, y_{24} = 32$ . Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию  $X$  и  $Y$  при условии, что одновременно  $X \geq 50$  и  $Y \geq 50$ ; 2) коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$  при том же условии.

1) Ковариация = 276.75 2) Коэффициент корреляции = 1.373

5. Распределение результатов экзамена в некоторой стране с 11-балльной системой оценивания задано следующим образом:  $\{1 : 13, 2 : 3, 3 : 14, 4 : 9, 5 : 6, 6 : 15, 7 : 1, 8 : 1, 9 : 1, 10 : 1, 11 : 1\}$ .

Работы будут перепроверять 6 преподавателей, которые разделили все имеющиеся работы между собой случайным образом. Пусть  $\bar{X}$  - средний балл (по перепроверке) работ, попавших к одному преподавателю.

Требуется найти матожидание и стандартное отклонение среднего балла работ, попавших к одному преподавателю, до перепроверки.

$k = \text{len}(\text{marks}) // k$

$ex = \text{np.sum}([\text{marks}[m] * m \text{ for } m \text{ in marks}]) / n$

$varx = \text{np.var}([m \text{ for } m \text{ in marks for temp in range(marks}[m])]) / k * (n - k) / (n - 1)$

$\text{sigma}x = \text{var}x^{**}(0.5)$  Ответы: 6.57937, 0.64259.

6. Юный аналитик Дарья использовала метод Монте-Карло для исследования Дискретного случайного вектора, описанного ниже.

	$X=-3$	$X=-2$	$X=-1$
$Y = 2$	0.29	0.298	0.234
$Y = 3$	0.066	0.03	0.082

Дарья получила, что  $E(Y|X + Y = 1) = 2.10982$ . Проверьте, можно ли доверять результату Дарьи аналитически. Сформулируйте определение метода Монте-Карло.

$$E(Y|X + Y = 1) = \frac{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i) * y_i)}{\sum(P(X=1-y_i, y=y_i))}.$$

Ответ: 2.10982

Утверждаю:  
Первый заместитель  
руководителя департамента

Дата 01.06.2021

*Феклин* Феклин В.Г.