ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»
Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»
Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр
Билет 112

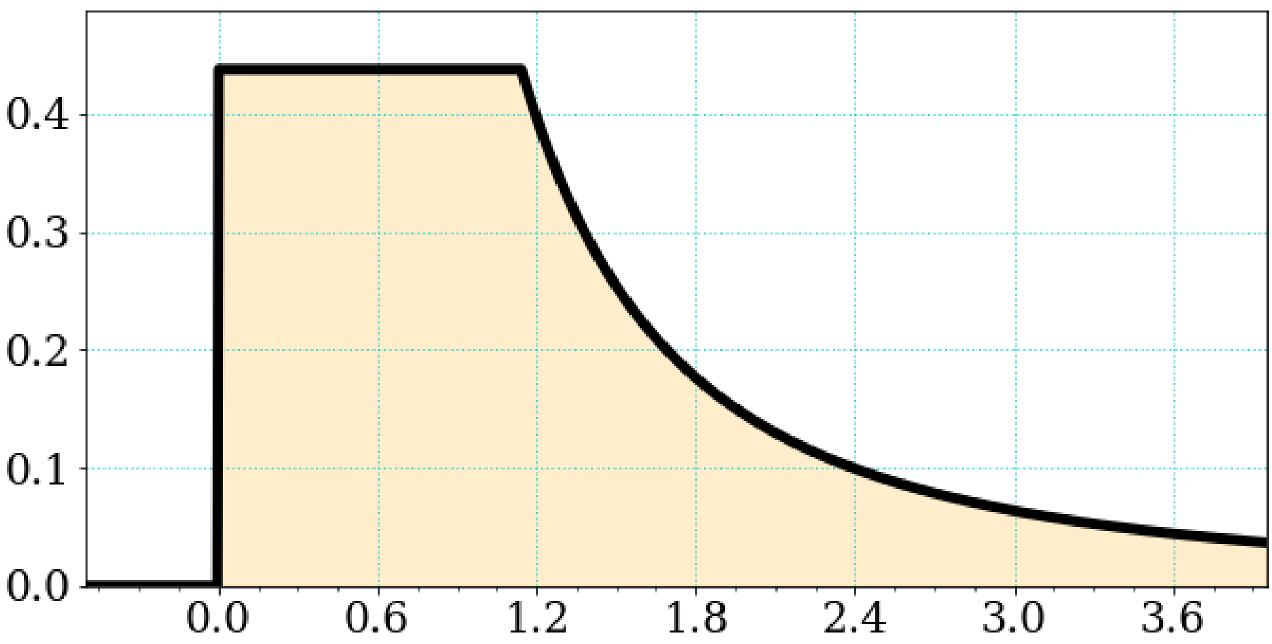
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, и выведите основные свойства гамма-расределения. Запишите формулы для математичсекого ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$ гамма-распределения

   Здесь написанно много всего интересного и полезного о гамма-распределении

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0;7]$ и $[0;8]$ соответственно. Для случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ найдите: 1) функцию распределения $F_Z(x)$; 2) плотность распределения $f_Z(x)$ и постройте график плотности; 3) вероятность ¶$(1{,}072 \leqslant Z \leqslant 1{,}953)$.

   1) Функция распределения $F_Z(x)$ имеет вид: $F_Z(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{7x}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{7} \approx 1{,}143; \\ 1 - \frac{4}{7x}, x \geqslant \frac{8}{7}; \end{cases}$.

   2) Плотность распределения $f_Z(x)$ имеет вид: $f_Z(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{7}{16}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{7} \approx 1{,}143; \\ \frac{4}{7x^2}, x \geqslant \frac{8}{7}; \end{cases}$.



   3) вероятность равна: ¶$(1{,}072 \leqslant Z \leqslant 1{,}953) = 0{,}23843$.

3. Случайная величина Y принимает только значения из множества $\{1, 10\}$, при этом $P(Y = 1) = 0.7$. Распределение случайной величины X определено следующим образом:

$$X|Y = \begin{cases} 5{*}y, \text{свероятностью } 0.11 \\ 8{*}y, \text{свероятностью } 1 \text{ - } 0.11 \end{cases}$$

Юный аналитик Дарья нашла матожидание и дисперсию X.

Помогите Дарье найти матожидание и дисперсию величины X

Первым этапом надо найти характеристики случайной величины Y

$E(Y) = 1 * 0.7 + 10 * (1 - 0.7)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1^2 * 0.7 + 10^2 * (1 - 0.7) - [E(Y)]^2$

Перейдем к рассмотрению характеристик условной случайно величины X

$E(X) = E(E(X|Y)) = E[E(5 * Y) * 0.11 + E(8 * Y) * (1 - 0.11)] = E(Y) * (5 * 0.11 + 8 * (1 - 0.11)) = 28.379$

$E(Var(X|Y)) = E[b * Var(c3 * Y) + (1 - b) * Var(c4 * Y)] = Var(Y) * (c3^2 * b + c4^2 * (1 - b))$

$Var(E(X|Y)) = E(X^2|Y) - [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 * (b * c3^2 + (1 - b) * c4^2) - E(X)]^2$

$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = 1027.72936$

4. (10) В группе Ω учатся студенты:$\omega_1 ... \omega_{25}$. Пусть X и Y – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки ω_i студента обозначаются: $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $i = 1...25$. Все оценки известны $x_0 = 55, y_0 = 55$, $x_1 = 88, y_1 = 86$, $x_2 = 42, y_2 = 96$, $x_3 = 69, y_3 = 93$, $x_4 = 43, y_4 = 64$, $x_5 = 42, y_5 = 86$, $x_6 = 35, y_6 = 45$, $x_7 = 60, y_7 = 55$, $x_8 = 41, y_8 = 90$, $x_9 = 62, y_9 = 57$, $x_{10} = 52, y_{10} = 53$, $x_{11} = 67, y_{11} = 32$, $x_{12} = 72, y_{12} = 98$, $x_{13} = 42, y_{13} = 84$, $x_{14} = 97, y_{14} = 51$, $x_{15} = 32, y_{15} = 89$, $x_{16} = 38, y_{16} = 84$, $x_{17} = 42, y_{17} = 84$, $x_{18} = 61, y_{18} = 94$, $x_{19} = 96, y_{19} = 31$, $x_{20} = 67, y_{20} = 56$, $x_{21} = 66, y_{21} = 67$, $x_{22} = 41, y_{22} = 95$, $x_{23} = 54, y_{23} = 95$, $x_{24} = 36, y_{24} = 80$ Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию X и Y при условии, что одновременно $X \geqslant 50$ и $Y \geqslant 50$; 2) коэффициент корреляции X и Y при том же условии.

1) Ковариация = 92.6667 2) Коэффициент корреляции = 0.3814

5. (10) Эмпирическое распределение признаков X и Y на генеральной совокупности Ω задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	25	26	10
$X = 300$	10	10	19

Из Ω случайным образом без возвращения извлекаются 12 элементов. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$; 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$; 3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(\bar{Y})$: 3.59 2) стандартное отклонение $\sigma(\bar{X})$: 228.8693
3) ковариацию $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$: 1.3324

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 выборка из $N(\theta, \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3 + 4X_4}{10}, \hat{\theta}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4}{10}$$

а) Покажите, что обе оценки несмещенные. б) Какая из оценок оптимальная?

Обе они несмещенные, потому что в числителе выходит в сумме 10. Какая-то точно должна быть, а может и нет....

Подготовил Рябов П.Е. Рябов

Утверждаю:
Первый заместитель
руководителя департамента

Дата 01.06.2021 Феклин Феклин В.Г.