

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных  
Департамент анализа данных и машинного обучения

**Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

**Билет 114**

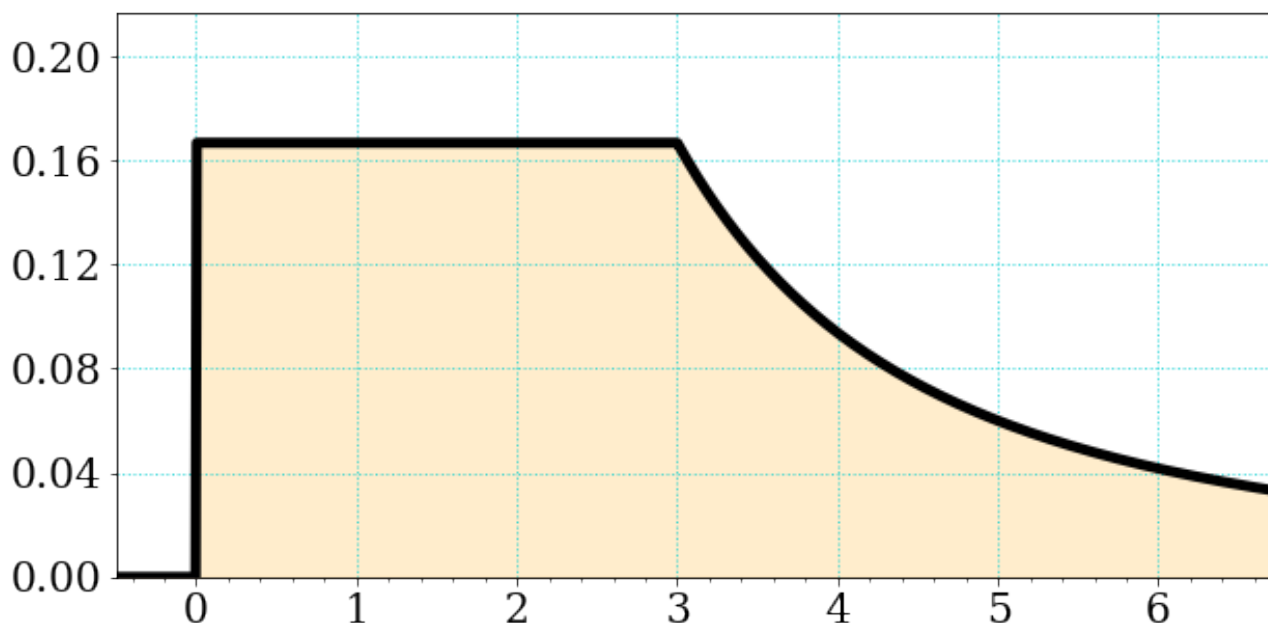
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Запишите плотность  $\chi^2$ -распределения. Выведите формулы для математического ожидания  $E(X)$  и дисперсии  $Var(X)$   $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Найдите а)  $P(\chi_{20}^2 > 10.9)$ , где  $\chi_{20}^2$  –случайная величина, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку  $\chi_{0.93}^2(5)$  хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

$$P(\chi_{20}^2 > 10.9) = 0.948775; \chi_{0.93}^2(5) = 1.34721.$$

2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезках  $[0; 2]$  и  $[0; 6]$  соответственно. Для случайной величины  $Z = \frac{Y}{X}$  найдите: 1) функцию распределения  $F_Z(x)$ ; 2) плотность распределения  $f_Z(x)$  и постройте график плотности; 3) вероятность  $P(2,532 \leq Z \leq 4,716)$ .

1) Функция распределения  $F_Z(x)$  имеет вид: 
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{6}, & 0 \leq x \leq 3 \approx 3,0; \\ 1 - \frac{3}{2x}, & x \geq 3; \end{cases}$$
 2)

Плотность распределения  $f_Z(x)$  имеет вид: 
$$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq x \leq 3 \approx 3,0; \\ \frac{3}{2x^2}, & x \geq 3; \end{cases}$$



3) вероятность равна:  $\mathbb{P}(2,532 \leq Z \leq 4,716) = 0,25993$ .

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение  $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$ . Наблюдения показали, что в среднем она составляет 75,0%. Методом моментов оцените параметр  $\beta$  и вероятность того, что она опустится ниже 52%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою  
 Ответ: 140608

4. (10) В группе  $\Omega$  учатся студенты:  $\omega_1 \dots \omega_{25}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки  $\omega_i$  студента обозначаются:  $x_i = X(\omega_i)$  и  $y_i = Y(\omega_i)$ ,  $i = 1 \dots 25$ . Все оценки известны  $x_0 = 33, y_0 = 72, x_1 = 94, y_1 = 94, x_2 = 91, y_2 = 52, x_3 = 47, y_3 = 59, x_4 = 53, y_4 = 45, x_5 = 96, y_5 = 54, x_6 = 60, y_6 = 99, x_7 = 70, y_7 = 44, x_8 = 50, y_8 = 81, x_9 = 57, y_9 = 40, x_{10} = 99, y_{10} = 61, x_{11} = 94, y_{11} = 43, x_{12} = 85, y_{12} = 96, x_{13} = 30, y_{13} = 91, x_{14} = 57, y_{14} = 37, x_{15} = 42, y_{15} = 35, x_{16} = 84, y_{16} = 75, x_{17} = 96, y_{17} = 97, x_{18} = 69, y_{18} = 92, x_{19} = 91, y_{19} = 93, x_{20} = 45, y_{20} = 30, x_{21} = 35, y_{21} = 94, x_{22} = 83, y_{22} = 53, x_{23} = 53, y_{23} = 60, x_{24} = 36, y_{24} = 69$  Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию  $X$  и  $Y$  при условии, что одновременно  $X \geq 50$  и  $Y \geq 50$ ; 2) коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$  при том же условии.

1) Ковариация =  $-350.8333$  2) Коэффициент корреляции =  $-1.2925$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков  $X$  и  $Y$  на генеральной совокупности  $\Omega$  задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	16	22
$X = 300$	7	26	13

Из  $\Omega$  случайным образом без возвращения извлекаются 9 элементов. Пусть  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание  $\mathbb{E}(\bar{Y})$ ; 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ ; 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание  $\mathbb{E}(\bar{Y})$ : 3.89 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ : 239.4845  
 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$ : 0.3732

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение  $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$ . Наблюдения показали, что в среднем она составила 67.0%. Методом моментов оцените параметр  $\beta$  и вероятность того, что она опустится ниже 52.0%.

$$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$$

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \Bigg|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$\beta = (\beta + 1) \cdot 67.0$$

$$\beta = \frac{67.0}{1-67.0}$$

$$P(x \leq 52.0) = F(52.0) = 52.0^{2.03}$$

Ответ: 2.03, 0.27

Подготовил



П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021



Феклин В.Г.