

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Факультет информационных технологий и анализа больших данных  
Департамент анализа данных и машинного обучения

**Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Форма обучения очная, учебный 2020/2021 год, 4 семестр

**Билет 110**

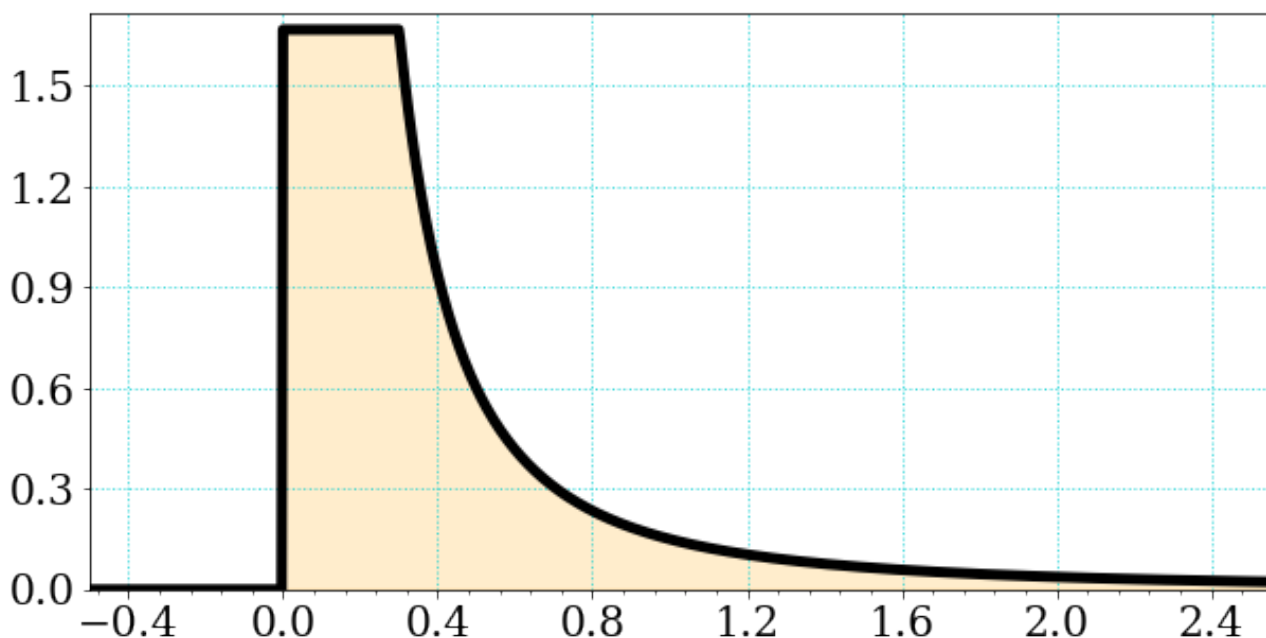
1. Дайте определение случайной величины, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Запишите плотность  $\chi^2$ -распределения. Выведите формулы для математического ожидания  $E(X)$  и дисперсии  $Var(X)$   $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Найдите а)  $P(\chi_{20}^2 > 10.9)$ , где  $\chi_{20}^2$  – случайная величина, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку  $\chi_{0.93}^2(5)$  хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы

$$P(\chi_{20}^2 > 10.9) = 0.948775; \chi_{0.93}^2(5) = 1.34721.$$

2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезках  $[0; 10]$  и  $[0; 3]$  соответственно. Для случайной величины  $Z = \frac{Y}{X}$  найдите: 1) функцию распределения  $F_Z(x)$ ; 2) плотность распределения  $f_Z(x)$  и постройте график плотности; 3) вероятность  $P(0,057 \leq Z \leq 0,556)$ .

1) Функция распределения  $F_Z(x)$  имеет вид: 
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{5x}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{10} \approx 0,3; \\ 1 - \frac{3}{20x}, & x \geq \frac{3}{10}; \end{cases} \quad 2)$$

Плотность распределения  $f_Z(x)$  имеет вид: 
$$f_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{5}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{10} \approx 0,3; \\ \frac{3}{20x^2}, & x \geq \frac{3}{10}; \end{cases} .$$



3) вероятность равна:  $\mathbb{P}(0,057 \leq Z \leq 0,556) = 0,63552$ .

3. (10) Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение  $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$ . Наблюдения показали, что в среднем она составляет 75,0%. Методом моментов оцените параметр  $\beta$  и вероятность того, что она опустится ниже 52%

Найдём плотность рапределения как интеграл от ФР, а дальше всё и вовсе простою  
 Ответ: 140608

4. (10) В группе  $\Omega$  учатся студенты:  $\omega_1 \dots \omega_{25}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки  $\omega_i$  студента обозначаются:  $x_i = X(\omega_i)$  и  $y_i = Y(\omega_i)$ ,  $i = 1 \dots 25$ . Все оценки известны  $x_0 = 32, y_0 = 89, x_1 = 61, y_1 = 91, x_2 = 64, y_2 = 88, x_3 = 97, y_3 = 55, x_4 = 66, y_4 = 84, x_5 = 78, y_5 = 56, x_6 = 62, y_6 = 60, x_7 = 73, y_7 = 42, x_8 = 40, y_8 = 59, x_9 = 86, y_9 = 80, x_{10} = 76, y_{10} = 33, x_{11} = 56, y_{11} = 64, x_{12} = 87, y_{12} = 86, x_{13} = 70, y_{13} = 38, x_{14} = 87, y_{14} = 76, x_{15} = 72, y_{15} = 63, x_{16} = 79, y_{16} = 41, x_{17} = 33, y_{17} = 74, x_{18} = 67, y_{18} = 71, x_{19} = 65, y_{19} = 34, x_{20} = 57, y_{20} = 56, x_{21} = 63, y_{21} = 87, x_{22} = 68, y_{22} = 95, x_{23} = 46, y_{23} = 94, x_{24} = 50, y_{24} = 73$  Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию  $X$  и  $Y$  при условии, что одновременно  $X \geq 50$  и  $Y \geq 50$ ; 2) коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$  при том же условии.

1) Ковариация =  $-262.8$  2) Коэффициент корреляции =  $-1.5753$

5. (10) Эмпирическое распределение признаков  $X$  и  $Y$  на генеральной совокупности  $\Omega$  задано таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 200$	16	19	5
$X = 300$	25	10	25

Из  $\Omega$  случайным образом без возвращения извлекаются 6 элементов. Пусть  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  – средние значения признаков на выбранных элементах. Требуется найти: 1) математическое ожидание  $\mathbb{E}(\bar{Y})$ ; 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ ; 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$

1) математическое ожидание  $\mathbb{E}(\bar{Y})$ : 3.48 2) стандартное отклонение  $\sigma(\bar{X})$ : 256.5595  
 3) ковариацию  $Cov(\bar{X}, \bar{Y})$ : 0.5887

6. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение  $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$ . Наблюдения показали, что в среднем она составила 71.0%. Методом моментов оцените параметр  $\beta$  и вероятность того, что она опустится ниже 62.0%.

$$f(x) = F'(x) = \beta \cdot x^{\beta-1}$$

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\inf}^{\inf} x \cdot f(x) = \int_{-\inf}^{\inf} \beta \cdot x^\beta = \beta \cdot \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \Bigg|_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$\beta = (\beta + 1) \cdot 71.0$$

$$\beta = \frac{71.0}{1-71.0}$$

$$P(x \leq 62.0) = F(62.0) = 62.0^{2.45}$$

Ответ: 2.45, 0.31

Подготовил



П.Е. Рябов

Утверждаю:

Первый заместитель

руководителя департамента

Дата 01.06.2021



Феклин В.Г.