ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI	**CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
Trường Đại Học KHTN	**Độc lập-Tự do- Hạnh phúc**
- - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - - - -

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI KÌ

Môn thi:	Hàm biến phức; Mã số: MAT3344	
Đối tượng dự thi:	K64A1T, C, SP	
Thời gian:	120 phút (Không kể thời gian phát đề)	Đề số: 1

Câu 1 (2đ). Định nghĩa hàm $\mathbb{C}$-khả vi và hàm chỉnh hình. Phát biểu điều kiện Cauchy-Riemann để hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ là $\mathbb{C}$-khả vi tại $z = x + iy$. Chứng minh rằng $f(z) = |z|^2 + z^2$ chỉ $\mathbb{C}$-khả vi tại $z = 0$. Tính tích phân $\oint\limits_{|z|=1} (|z|^2 + z^2)dz$.

Câu 2 (2đ). Phát biểu và chứng minh định lý Cauchy về tổng thặng dư.

Câu 3 (2đ)

a) Tìm ánh xạ bảo giác $w = f(z)$ biến miền $D = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) > 0, |z| > 1\} \setminus [i, 2i]$ lên nửa mặt phẳng trên $H = \{w \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(w) > 0\}$.

b) Giả sử f là hàm chỉnh hình và bị chặn trong hình tròn thủng $\Delta^* := \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| < 1\}$. Khai triển hàm f thành chuỗi Laurent, ta có $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, trong đó $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$ và với mọi $0 < \rho < 1$. Hãy chứng minh rằng $a_n = 0$ với mọi $n = -1, -2, \ldots$ (hàm f có bất thường khử được tại $z = 0$).

Câu 4 (2đ). Tính tích phân

$$\oint\limits_{|z|=2} \left(1 - z + z^2\right) \left[e^{\frac{1}{z}} + \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)\right] dz.$$

Câu 5 (2đ). Tính các tích phân

a) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} dx.$ b) $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - x + 1} dx.$

Câu 6 (Được cộng 1 điểm nếu sv làm được). Dùng lý thuyết thặng dư để tính tổng của chuỗi

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

với mọi $0 < a < 1$. Từ đó, hãy tính tổng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Hết

- -

Thí sinh không được sử dụng bất kì tài liệu nào.