Chương 1: Phép tính vi phân hàm một biến số

1.1–1.4. Dãy số, hàm số

Bài 1.

Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2\,\text{arccot}\, x - \pi}$

b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2\,\text{arccot}\, x - \pi \ge 0 \Leftrightarrow \text{arccot}\, x \ge \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \le 0.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = (-\infty,\ 0]$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \left|\dfrac{2x}{1+x}\right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ \dfrac{4x^2}{(1+x)^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^2 \le (1+x)^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \le x \le 1$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbf{D} = \left[\dfrac{-1}{3}, 1\right]$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sin(\pi x) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \notin \mathbb{N} \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = (0,\ +\infty) \setminus \mathbb{N}$.

<u>*Lưu ý:*</u> Có thể có nhiều cách biểu diễn khác nhau cho tập xác định của hàm số này:

$\mathbf{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle|\ x \ge 0,\ x \notin \mathbb{N}\right\}$ hay $\mathbf{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \middle|\ x \notin \mathbb{N}\right\}$ đều được.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow |\sin x| \le 1$, điều này luôn đúng với mọi số thực *x*.

$\Rightarrow$ tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = \mathbb{R}$.

<u>*Chú ý:*</u> Với dạng bài người ta đi tìm tập xác định, sau khi giải các điều kiện ràng buộc về *x*, thì lúc kết luận các bạn cần viết được tập xác định **ở dạng tập hợp**. Lỗi mà các bạn hay mắc phải khi làm dạng bài này:

– Khi giải xong điều kiện đối với *x*, các bạn *không viết được dạng tập hợp* khi kết luận.Ví dụ như với câu **b)**, nếu các bạn kết luận:

"Tập xác định là hàm số là $\dfrac{-1}{3} \le x \le 1$" **hay**

"Hàm số xác định khi và chỉ khi $\dfrac{-1}{3} \le x \le 1$"

thì rất có thể bạn sẽ không được điểm tối đa cho câu đó.

– Các bạn biểu diễn dạng tập hợp, nhưng lại kết luận như sau thì cũng chưa chính xác. Ví dụ với câu **b)**, việc các bạn kết luận như sau cũng chưa chuẩn:

"Tập xác định là hàm số là $x \in \left[\frac{-1}{3}, 1\right]$"

Đề bài đã hỏi tập hợp, thì bạn nên kết luận tập hợp. Còn "$x \in \left[\frac{-1}{3}, 1\right]$" chỉ là một mệnh đề mà thôi, vậy nên các bạn lưu ý khi làm câu này để tránh mất điểm oan trong bài thi giữa kỳ/cuối kỳ.

Bài 2.

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sinh(-x) = -\sinh x$

b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

d) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

e) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

a) Ta có: $\text{VT} = \sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x = \text{VP} \Rightarrow$ đpcm.

(VT, VP: lần lượt viết tắt cho "*vế trái*", "*vế phải*")

b) $$\text{VP} = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y) = \text{VT} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

c) $$\text{VP} = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y) = \text{VT} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

d) $$\text{VP} = 2\sinh x \cosh x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right)}{2}$$

$$= \frac{\left(e^x\right)^2 - \left(e^{-x}\right)^2}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x = \text{VT} \Rightarrow \text{đpcm}$$

e) Ta có: $\text{VT} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1 = \text{VP} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

f) $\text{VP} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \text{VT} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 3.
Tìm miền giá trị của hàm số:

a) $y = \lg(1-2\cos x)$ **b)** $y = \arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$

c) $y = \text{arccot}(\sin x)$ **d)** $y = \arctan(e^x)$

a) *Nhắc lại:* lg là viết tắt của log cơ số 10.
Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1-2\cos x > 0$.
Với x làm cho hàm số xác định, ta có đánh giá: $0 < 1-2\cos x \le 1-2\cdot(-1) = 3$.
(dấu bằng có thể xảy ra, chẳng hạn tại $x = \pi$)
$\Rightarrow$ miền giá trị của hàm số đã cho là $(-\infty,\ \lg 3]$.

b) Tập xác định: $\mathbf{D} = [1,\ 100]$. Với $x \in \mathbf{D}$ ta có tập giá trị của $\lg\frac{x}{10}$ là $[-1,\ 1]$

$\Rightarrow$ tập giá trị của hàm số đã cho là $\left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Tập xác định $\mathbf{D} = \mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ ta có tập giá trị của $\sin x$ là $[-1;\ 1]$, mặt khác $\text{arccot}(y)$ là hàm nghịch biếnvới y

$\Rightarrow$ tập giá trị của hàm số đã cho là $[\text{arccot}\,1,\ \text{arccot}(-1)] = \left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

d) Tập xác định $\mathbf{D} = \mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ ta có tập giá trị của e^x là $(0,\ +\infty)$

$\Rightarrow$ do đó tập giá trị của $\arctan(e^x)$ là $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 4.
Tìm $f(x)$, biết: **a)** $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ **b)** $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

a) Ta có $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

Đặt $u = x+\frac{1}{x}$ $(|u| \ge 2)$, ta có $f(u) = u^2-2,\ \forall |u| \ge 2 \Rightarrow f(x) = x^2-2,\ \forall |x| \ge 2.$

b) Đặt $t = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow (1+x)t = x \Leftrightarrow t = x(1-t) \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1 \\ x = \frac{t}{1-t} \end{cases}$.

Thay $x = \frac{t}{1-t}$ vào bài ra, ta có: $f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 = \frac{t^2}{(t-1)^2}$, $\forall t \neq 1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$.

Bài 5.
Tìm hàm ngược của hàm số:

a) $y = 2\arcsin x$ **b)** $y = \frac{1-x}{1+x}$ **c)** $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

a) Xét phương trình $y = 2\arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = \arcsin x \\ \frac{-\pi}{2} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin\frac{y}{2} = f^{-1}(y) \\ -\pi \leq y \leq \pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm ngược của hàm số đã cho là $f^{-1}(x) = \sin\frac{x}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Trình bày rõ ràng hơn:
Hàm số $y = f(x) = 2\arcsin x$ là song ánh từ $[-1, 1] \to [-\pi, \pi]$.
Với $x \in [-1, 1]$, ta giải phương trình ẩn *x*, tham số $y \in [-\pi, \pi]$ như sau:

$$y = 2\arcsin x \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin\frac{y}{2} = f^{-1}(y)$$

$\Rightarrow$ hàm ngược của hàm số đã cho là $f^{-1}: [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$, $f^{-1}(x) = \sin\frac{x}{2}$.

b) Xét phương trình $y = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow (1+x)y = 1-x \Leftrightarrow x(y+1) = 1-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-y}{1+y} = f^{-1}(y) \\ y \neq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm ngược của hàm số đã cho là $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$.

c) $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Leftrightarrow 2ye^x = \left(e^x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x = y + \sqrt{y^2+1} > 0 \quad (\text{thoả mãn}) \\ e^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0 \quad (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Suy ra hàm ngược của hàm số đã cho là $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Bài 6.
Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

a) $f(x)=a^x+a^{-x}\quad(a>0)$

b) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

c) $f(x)=\sin x+\cos x$

d) $f(x)=\arcsin(\tan x)$

a) Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$, là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{D}$, suy ra $f(x)$ là hàm chẵn.

b) Vì $x+\sqrt{1+x^2}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$, là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\ln\dfrac{\left(1+x^2\right)-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=-f(x),\ \forall x\in\mathbf{D}.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lẻ.

c) Ta có $\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2} \\ f\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{-\pi}{4}+\cos\dfrac{-\pi}{4}=0 \end{cases}\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\neq\pm f\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow$ ta **không** thể có $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{D}$, cũng **không** thể có $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbf{D}$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ **không** phải hàm chẵn, cũng **không** phải hàm lẻ.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow -1\leq\tan x\leq 1\Leftrightarrow k\pi-\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq k\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định: $\mathbf{D}=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ k\pi-\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$, là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x)=\arcsin(\tan(-x))=\arcsin(-\tan x)=-\arcsin(\tan x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbf{D}$.

Do đó hàm số đã cho là hàm lẻ.

Bài 7.
Chứng minh rằng bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a,\ a)$ (với $a>0$) cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

Tập $(-a,\ a)$ là tập đối xứng. Ta có phân tích: $f(x)=g(x)+h(x)$, trong đó:

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Công việc còn lại của các bạn là chứng minh $g(x)$ là hàm chẵn, còn $h(x)$ là hàm lẻ trên $(-a,\ a)$ (điều này thì các bạn dễ dàng làm được).

Giờ còn ý chứng minh biểu diễn $f(x)=g(x)+h(x)$ trên là duy nhất. Thật vậy, giả sử còn một biểu diễn khác thoả mãn đề bài là $f(x)=G(x)+H(x),\ \forall x\in(-a,\ a)$, trong đó $G(x)$ là hàm chẵn, còn $H(x)$ là hàm lẻ, $G(x)\neq g(x),\ H(x)\neq h(x)$.

Lúc đó: $f(x)=g(x)+h(x)=G(x)+H(x),\ \forall x\in(-a,\ a)$

$\Rightarrow G(x)-g(x)=H(x)-h(x),\ \forall x\in(-a,\ a)$ **(1)**.

– Vì $G(x),\ g(x)$ là các hàm lẻ nên $G(x)-g(x)$ là hàm lẻ trên $(-a,\ a)$ **(2)**.

– Vì $H(x),\ h(x)$ là các hàm chẵn nên $H(x)-h(x)$ là hàm lẻ trên $(-a,\ a)$ **(3)**.

Từ **(1)**, **(2)**, **(3)** $\Rightarrow G(x)-g(x)=H(x)-h(x)=0,\ \forall x\in(-a,\ a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}G(x)=g(x)\\ H(x)=h(x)\end{cases}$ $\rightarrow$ điều này mâu thuẫn với điều ta đã giả sử.

Tóm lại, ta có điều phải chứng minh.

Bài 8.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm xác định trên miền đối xứng. Chứng minh:

a) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn, thì tổng và tích của chúng là hàm chẵn.

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ thì tổng của chúng là hàm lẻ, và tích của chúng là hàm chẵn.

c) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ và $g(x)$ là hàm chẵn, thì tích của chúng là hàm lẻ.

a) Giả sử miền đối xứng đã cho là **D**. Ta có $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chẵn trên **D**, tức là:

$$\begin{cases}f(x)=f(-x),\ \forall x\in\mathbf{D}\\ g(x)=g(-x),\ \forall x\in\mathbf{D}\end{cases}$$

+) Tổng của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là $h(x)=f(x)+g(x)$. Ta có:

$$h(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=h(-x),\forall x\in\mathbf{D}$$

$\Rightarrow h(x)$ là hàm chẵn trên miền đối xứng **D**.

+) Tích của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là $k(x)=f(x)g(x)$. Ta có:

$$k(x)=f(x)g(x)=f(-x).g(-x)=k(-x),\forall x\in\mathbf{D}$$

$\Rightarrow k(x)$ là hàm chẵn trên miền đối xứng **D**.

Như vậy, ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử miền đối xứng đã cho là **D**. Các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ trên **D**, tức là:

$$\begin{cases} f(x) = -f(-x), \ \forall x \in \mathbf{D} \\ g(x) = -g(-x), \ \forall x \in \mathbf{D} \end{cases}$$

+) Tổng của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là $h(x) = f(x) + g(x)$. Ta có:

$$h(x) = f(x) + g(x) = [-f(-x)] + [-g(-x)] = -[f(-x) + g(-x)] = -h(-x), \forall x \in \mathbf{D}$$

$\Rightarrow h(x)$ là hàm lẻ trên miền đối xứng **D**.

+) Tích của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là $k(x) = f(x)g(x)$. Ta có:

$$k(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)].[-g(-x)] = f(-x)g(-x) = k(-x), \forall x \in \mathbf{D}$$

$\Rightarrow k(x)$ là hàm chẵn trên miền đối xứng **D**.

Tóm lại, ta có điều phải chứng minh.

c) Giả sử miền đối xứng đã cho là **D**. Vì $f(x)$ là hàm lẻ, $g(x)$ là hàm chẵn trên **D**, tức là:

$$\begin{cases} f(x) = -f(-x), \ \forall x \in \mathbf{D} \\ g(x) = g(-x), \ \forall x \in \mathbf{D} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tích của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là $h(x) = f(x)g(x)$. Ta có:

$$h(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)].g(-x) = -f(-x)g(-x) = -h(-x), \forall x \in \mathbf{D}$$

$\Rightarrow h(x)$ là hàm lẻ trên miền đối xứng **D** $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 9.

Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau (nếu có)

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$ **b)** $f(x) = \sin\left(x^2\right).$

c) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x.$ **d)** $f(x) = \cos^2 x.$

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$

Trường hợp 1: $A = B = 0.$

Lúc này $f(x) = 0,$ là hàm hằng nên tuần hoàn, nhưng không có chu kì cơ sở.

Trường hợp 2: $A^2 + B^2 \neq 0.$

TH 2.1: Nếu $\lambda = 0$ thì $f(x) = A$ là hàm hằng, tuần hoàn nhưng không có chu kì cơ sở.

TH 2.2: Nếu $\lambda \neq 0$. Giả sử T là số dương nhỏ nhất thỏa mãn:

$$f(x) = f(x+T), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow A\sin\lambda x + B\cos\lambda x = A\sin[\lambda(x+T)] + B\cos[\lambda(x+T)], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A\left[\sin[\lambda(x+T)] - \sin\lambda x\right] + B\left[\cos[\lambda(x+T)] - \cos\lambda x\right] = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2A\cos\frac{\lambda(2x+T)}{2}\sin\frac{\lambda T}{2} - 2B\sin\frac{\lambda(2x+T)}{2}\sin\frac{\lambda T}{2} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[A\cos\frac{\lambda(2x+T)}{2} - B\sin\frac{\lambda(2x+T)}{2}\right]\sin\frac{\lambda T}{2} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\lambda T}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda T}{2} = n\pi\ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow T = \left|\frac{2n\pi}{\lambda}\right|$$ (do $T > 0$ như ta đã giả sử).

Để T nhỏ nhất thì $n = 1$. Do đó $f(x)$ tuần hoàn với chu kì cơ sở là $T = \dfrac{2\pi}{|\lambda|}$.

b) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$.

Giả sử $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kì cơ sở là $T > 0$. Ta có: $\sin x^2 = \sin(x+T)^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = (x+T)^2 + k2\pi \\ x^2 = \pi - (x+T)^2 + 2k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2xT + T^2 = k2\pi \\ 2x^2 + 2xT + T^2 = \pi + 2k\pi \end{array}\right., \forall x \in \mathbb{R}.$$

+) Thay $x = 0$ vào hệ ta suy ra được $T = \sqrt{n\pi}\ \ (n \in \mathbb{N}^*)$. Thay trở lại hệ ta được:

$$\left[\begin{array}{l} 2x\sqrt{n\pi} + n\pi = k2\pi \\ 2x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi = \pi + k2\pi \end{array}\right. (*)$$

+) Thay $x = \sqrt{\pi}$ vào hệ (*) ta suy ra được n là số chính phương.

+) Thay $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ vào hệ (*) $\Rightarrow \sqrt{2n} + n = 2k$. Vì n chính phương, $n > 0$ thì $\sqrt{2n}$ **không** thể là số tự nhiên $\Rightarrow$ không có giá trị nào của T nào thỏa mãn giả thiết $\Rightarrow f(x)$ không phải hàm tuần hoàn.

c) Dễ thấy $f(x)$ là hàm tuần hoàn, vì $f(x) = f(x + 2\pi),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có thể tìm chu kì T tương tự như câu **a)**, nhưng để đơn giản hơn cho các bài toán tiếp theo thì ta áp dụng nhận xét:

Chu kì cơ sở của các hàm sin$x$, sin2x, sin3x lần lượt là $2\pi,\ \pi,\ \dfrac{2\pi}{3}$, từ đó suy ra chu kì cơ sở của $f(x)$ là số dương T nhỏ nhất chia cho các số $2\pi,\ \pi,\ \dfrac{2\pi}{3}$ đều cho kết quả là một số **tự nhiên**, tức là: $T = k_1.2\pi = k_2.\pi = k_3.\dfrac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy $T = 2\pi$ (vì $k_1 \geq 1$ nên $T \geq 2\pi$, đến đây có thể thử trực tiếp).

Vậy, chu kỳ của hàm số $f(x)$ là 2π.

d) $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, suy ra $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ sở là $\dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$.

(*Chú ý:* số 2 ở dưới mẫu số chính là số 2 ở trong cos2x).

Bài 10.

Tìm giới hạn của những dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau:

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

b) $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$.

c) $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$.

d) $x_n = \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n - \sqrt{n^2-n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-\left(n^2-n\right)}{n+\sqrt{n^2-n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-0 = 1.$$

c) Ta có: $\left|\sin^2 n - \cos^3 n\right| \le \left|\sin^2 n\right| + \left|\cos^3 n\right| \le 1+1 = 2.$

$\Rightarrow -2 \le \sin^2 n - \cos^3 n \le 2 \Rightarrow \frac{-2}{n} \le x_n \le \frac{2}{n},\ \forall n \ge 1$. Mặt khác $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ theo nguyên lý kẹp.

d) Ta có: $-1 \le \cos n \le 1 \Rightarrow \frac{-\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

Tức là: $\frac{-\sqrt{n}}{n+1} \le x_n \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \forall n \ge 1$, mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\sqrt{n}}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$, do đó theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Bài 11.

Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy số với số hạng tổng quát như sau:

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2+2}$.

b) $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right),\quad x_0 > 0.$

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2+2} = \left(n^2+2\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln\left(n^2+2\right)}{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n^2+2\right)}{n}}$.

Giờ ta đi tính $K = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n^2+2\right)}{n}$. Có 2 cách các bạn thường dùng:

Cách 1: Dùng nguyên lý kẹp (phù hợp với các bạn có tư duy đánh giá):

Ta sẽ chứng minh $\ln\left(n^2+2\right) < 2\sqrt{n}$, $\forall n \ge 1$.

Để chứng minh điều này, ta xét hàm số $f(x) = \ln\left(x^2+2\right) - 2\sqrt{x}$, $x \ge 1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - 2\sqrt{x} = \frac{2x - 2x^2\sqrt{x} - 4\sqrt{x}}{x^2+2} = \frac{2x\left(1-2x\sqrt{x}\right) - 4\sqrt{x}}{x^2+2} < 0,\ \forall x > 1$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(1,\ +\infty) \Rightarrow f(x) \le f(1) = \ln 3 - 2 < 0,\ \forall x \ge 1$

$\Rightarrow \ln\left(x^2+2\right) - 2\sqrt{x} < 0,\ \forall x \ge 1 \Rightarrow \ln\left(n^2+2\right) < 2\sqrt{n},\ \forall n \ge 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{\ln\left(n^2+2\right)}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}},\ \forall n \ge 1$, mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow K = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n^2+2\right)}{n} = 0$ theo nguyên lý kẹp $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e^K = e^0 = 1$.

Cách 2: Đưa về giới hạn hàm số tương ứng, để có thể sử dụng các quy tắc tính giới hạn hàm số. Ở đây, quy tắc ta dùng là quy tắc L'Hospital.

Xét giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+2}}{1} = 0$

$\Rightarrow K = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n^2+2\right)}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e^K = e^0 = 1$.

Bài làm ngắn hơn. Nhưng thời điểm làm bài này thì ta chưa học đến giới hạn hàm số, nên các bạn hãy cẩn trọng khi mang bài giải này để "lên bảng chữa" nhé.

b) Dễ thấy $x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

+) Ta có $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \ge \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{1}{x_{n-1}}} = 1,\ \forall n \ge 1$ **(*)**.

+) Xét hiệu: $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = \frac{1-x_{n-1}^2}{2x_n} \le 0,\ \forall n \ge 1$

$\Rightarrow \{x_n\}$ là dãy **không** tăng kể từ $n = 1$, mặt khác theo (*) thì $\{x_n\}$ bị chặn dưới bởi 1

$\Rightarrow$ tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \geq 1$.

Cho $n \to +\infty$ trong đẳng thức $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1} + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}}\right) \text{ và lưu ý, } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n-1} = a$$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right) \Leftrightarrow a = \pm 1$. Với nhận xét $a \geq 1$, ta lấy $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

1.5–1.6. Giới hạn hàm số

Bài 12.
Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $\left(m, n \in \mathbb{N}^*\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln(1+3x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{2}$.

<u>*Cách khác:*</u> Dùng vô cùng bé: $\left(\sqrt{1+x}-1\right) \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sqrt{1+x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}.$$

b) $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)} - 1\right]$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$, nên $\left(\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)} - 1\right) \overset{x\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

$$\Rightarrow L \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{100x^{99}-2}{50x^{49}-2}=\dfrac{100-2}{50-2}=\dfrac{49}{24}$.

d) Áp dụng VCB: $\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right)\overset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\alpha}{m}x$, ta có:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\alpha}{m}x}{x}=\dfrac{\alpha}{m}$. Tương tự, ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\dfrac{\beta}{n}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}..$$

e) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)+\left((2x+1)-2\sqrt{x^2+x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}+\frac{(2x+1)^2-4\left(x^2+x\right)}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}+\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2}+x}+\frac{x}{2x+2\sqrt{x^2}}\right)=\frac{-1}{1+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

f) Dùng VCB: $\left(\sqrt{1+4x}-1\right)\overset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{2}\cdot 4x=2x$, ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln(1+3x)}\overset{\text{VCB}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Bài 13.
Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(x+\arccos^3 x\right)-\ln x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x+\arccos^3 x\right)=\ln\left(0+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3\right)=3\ln\dfrac{\pi}{2}$, mà $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(x+\arccos^3 x\right)-\ln x\right]=+\infty, \text{ mà } x^2 \xrightarrow{x\to 0^+} 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(x+\arccos^3 x\right)-\ln x}{x^2}=+\infty.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

Vì $\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\sin 0=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0.$$

Vậy giới hạn đã cho bằng 0.

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2\cos x}=\frac{\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{-1}{12}.$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\cos x\sin 2x\cos 3x+3\cos x\cos 2x\sin 3x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\cos 3x+4\cos x\cos 3x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}+9\cos x\cos 2x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$$

$$=1+4+9=14$$

<u>*Chú ý:*</u> Cũng có thể thực hiện nhóm, tách để áp dụng VCB.

$$K=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x\left(1-\cos 2x\cos 3x\right)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)+\cos x\left[1-\cos 2x+\left(\cos 2x-\cos 2x\cos 3x\right)\right]}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x\left(1-\cos 2x\right)}{1-\cos x}+\frac{\cos x\cos 2x\left(1-\cos 3x\right)}{1-\cos x}\right)$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(1-\cos 2x\right)}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\left(1-\cos 3x\right)}{1-\cos x}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\frac{(2x)^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\cdot\frac{(3x)^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}=1+4+9=14.$$

Bài 14.
Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right),\ x>0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot\pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(e+2x\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$

a) Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1^1=1.$

(*Giới hạn này* ***không*** *có dạng vô định*).

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)}{x}}$. Xét giới hạn:

$$K=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)}{x}\ \left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\cos\sqrt{x}}{1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{2\cos\sqrt{x}}=\frac{-1}{2}$$

$$\left(\text{vì }\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^K = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

c) $K = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n^2+n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{\ln x}{n^2+n}} - 1\right)$$

Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{n^2+n} = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, nên:

$$K = \lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\ln x}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\cdot x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\ln x = 1.1.\ln x = \ln x.$$

d) Đặt $u = \frac{1}{x}$ thì khi $x\to\infty$, ta có $u\to 0$. Giới hạn đã cho trở thành:

$$K = \lim_{u\to 0}\left(\sin u + \cos u\right)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0} e^{\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}$$

Xét giới hạn: $L = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u}}{1} = \frac{\frac{1-0}{0+1}}{1} = 1.$

$\Rightarrow K = e^L = e.$

e) $\lim_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot\pi x} = \lim_{x\to 1} e^{\cot(\pi x)\cdot\ln(1+\sin\pi x)}.$

Xét $K = \lim_{x\to 1}\cot(\pi x)\cdot\ln(1+\sin\pi x).$

Vì $\lim_{x\to 1}\sin(\pi x) = 0$, nên $\ln(1+\sin\pi x) \overset{x\to 0}{\sim} \sin\pi x.$

$$\Rightarrow K \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{x\to 1}\cot(\pi x)\cdot\sin(\pi x) = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}\cdot\sin(\pi x) = \lim_{x\to 1}\cos(\pi x) = -1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot\pi x} = e^K = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

f) $\lim_{x\to 0}\left[\ln(e+2x)\right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln[\ln(e+2x)]}{\sin x}}.$

Xét $K = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\ln\left(e+2x\right)\right]}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\ln\left(e\cdot\left(1+\dfrac{2x}{e}\right)\right)\right]}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\ln\left(1+\dfrac{2x}{e}\right)\right]}{\sin x}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{2x}{e}\right)=0 \Rightarrow \ln\left[1+\ln\left(1+\dfrac{2x}{e}\right)\right] \overset{x\to 0}{\sim} \ln\left(1+\dfrac{2x}{e}\right)$.

$\Rightarrow K \overset{\text{VCB}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{e}\right)}{\sin x} \overset{\text{VCB}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{e}}{x} = \dfrac{2}{e} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(e+2x\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{2}{e}}$.

Bài 15.

So sánh các cặp VCB sau:

a) $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ và $\beta(x)=e^{\sin x}-\cos x$, khi $x\to 0^+$.

b) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$ và $\beta(x)=\cos x-1$, khi $x\to 0^+$.

c) $\alpha(x)=x^3+\sin^2 x$ và $\beta(x)=\ln\left(1+2\arctan\left(x^2\right)\right)$, khi $x\to 0$.

a) Xét giới hạn:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x}-\cos x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \overset{\text{ngắt bỏ VCB}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x}-\cos x}{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x}-\cos x}{\sqrt[4]{x}}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x}\cos x+\sin x}{\dfrac{1}{4.\sqrt[4]{x^3}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 4.\sqrt[4]{x^3}\left(e^{\sin x}\cos x+\sin x\right) = 4.0.(1+0)=0.$$

$\Rightarrow \beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$, khi $x\to 0^+$.

b) Xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$.

Ta có: $(\cos x-1) \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$, và $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right) \overset{x\to 0}{\sim} \sqrt[3]{x}$ (ngắt bỏ VCB).

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x^2}{2}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt[3]{x^5}}{2} = 0.$$

$\Rightarrow \beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$, khi $x\to 0^+$.

c) $\alpha(x)=x^3+\sin^2 x$ và $\beta(x)=\ln\left(1+2\arctan\left(x^2\right)\right)$, khi $x\to 0$.

Ta có: $\sin^2 x \overset{x\to 0}{\sim} x^2$, là VCB thấp hơn x^3 khi $x \to 0$

$\Rightarrow \alpha(x) = x^3 + \sin^2 x \overset{x\to 0}{\sim} \sin^2 x \overset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0} 2\arctan\left(x^2\right) = 0$ nên $\beta(x) = \ln\left(1 + 2\arctan\left(x^2\right)\right) \overset{x\to 0}{\sim} 2\arctan\left(x^2\right) \overset{x\to 0}{\sim} 2x^2$.

Ta lại có x^2 và $2x^2$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to 0$.

$\Rightarrow \alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to 0$.

<u>*Cách trình bày khác:*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+\sin^2 x}{1-\cos x} \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x^3+\sin^2 x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} 2\left[x + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]$$

$$= 2\left(0 + 1^2\right) = 2.$$

Vì 2 là một hằng số khác 0 $\Rightarrow \alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc, khi $x \to 0$.

1.7. Hàm số liên tục

Bài 16.

Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a\cos x + b\sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{VCB}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

$f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = a$. Vậy $a = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có: $f(0) = a.0^2 + b.0 + 1 = 1$. Xét các giới hạn:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(ax^2 + bx + 1\right) = a.0^2 + b.0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(a\cos x + b\sin x\right) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \text{ (luôn đúng)} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 17.
Hàm $f(x)$ sau liên tục tại những giá trị x nào?

a) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,}\\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.}\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,}\\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.}\end{cases}$

a) Hàm số gián đoạn tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, tại điểm x^* hữu tỉ, ta có $f(x^*)=0$. Chọn một dãy con $\{x_n\}$ tiến đến x^*, cụ thể là x_n vô tỉ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$. Lúc đó ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1 \neq 0 = f(x^*)$, do đó $f(x)$ gián đoạn tại các điểm x^* hữu tỉ.

Chứng minh tương tự, ta có $f(x)$ gián đoạn tại các điểm x^* vô tỉ.

Do đó, $f(x)$ không liên tục tại bất kì giá trị thực x nào.

b) +) Tại điểm $x_0 \neq 0$ bất kỳ thì hàm số $f(x)$ gián đoạn. Chứng minh điều này tương tự như câu **a**, công việc này để cho các bạn tự giải quyết.

+) Tại điểm $x = 0$, chọn bất kì dãy con $\{x_n\}$ tiến đến 0, tức là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 = f(0)$. Như vậy với mọi dãy con $\{x_n\}$ tiến đến 0, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ hàm số đã cho liên tục tại duy nhất một điểm, đó là điểm $x = 0$.

Chú ý: Các bạn cũng có thể dùng định nghĩa để chứng minh $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Bài 18.
Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số?

a) $y = \dfrac{8}{1-2^{\cot x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}\arcsin x$

c) $y = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{1/x}+1}$ **d)** $y = \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a \neq b)$

a) $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số. Xét các giới hạn:

$$\lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+}\frac{8}{1-2^{\cot x}} = 0 \text{ (vì } \lim_{x\to0^+}\cot x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^+} 2^{\cot x} = +\infty)$$

$$\lim_{x\to0^-} y = \lim_{x\to0^-}\frac{8}{1-2^{\cot x}} = \frac{8}{1-0} = 8 \text{ (vì } \lim_{x\to0^-}\cot x = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^-} 2^{\cot x} = 0)$$

Hai giới hạn trên hữu hạn $\Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

b) $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số. Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\arcsin x = 1 = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\arcsin x$, hai giới hạn này hữu hạn $\Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

Chú ý: Khi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \text{const}$, thì $x = a$ là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số. Thế nhưng *trong bài làm phân loại điểm gián đoạn*, thì ta chỉ cần chỉ ra nó là loại 1 hoặc loại 2, do đó không cần nêu rõ đó có phải là điểm gián đoạn bỏ được hay không. Có nêu thì càng tốt, mà không nêu cũng chẳng sao.
Trong bài trên, đề bài hỏi điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì, nên ta cũng chỉ cần kết luận nó là loại 1, không cần thiết phải nói cụ thể đó là điểm gián đoạn bỏ được.

c) $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số. Xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{1/x}+1}$.

Chọn hai dãy con tiến đến 0^- là $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ và $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ có công thức như sau:

+) $a_k = \dfrac{-1}{k\pi}\ (k\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow y(a_k) = \dfrac{\sin(-k\pi)}{e^{-k\pi}+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} y(a_k) = 0.$

+) $b_k = \dfrac{-1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi} \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} y(b_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\sin\left(-k2\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{e^{\left(-k2\pi-\frac{\pi}{2}\right)}+1} = \dfrac{-1}{0+1} = -1.$

Từ 2 điều trên suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0^-} y \Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

d) $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số. Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = a,\ \forall a\in\mathbb{R}$, do đó:

$\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{ax}-1\right)-\left(e^{bx}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-1}{x} = a-b$, giới hạn này là hữu hạn $\Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số đã cho.

Bài 19.
Các hàm số sau đây có *liên tục đều* trên miền đã cho không?

a) $y = \dfrac{x}{4-x^2},\quad -1\le x\le 1.$ **b)** $y = \ln x,\quad 0 < x < 1.$

a) Vì $y = f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$ liên tục trên $[-1,\ 1]$

$\Rightarrow y$ liên tục đều trên $[-1,\ 1]$ theo định lý Cantor.

b) Chọn $x_n = \dfrac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Ta có $x_n \to 0^+$ khi $n\to+\infty$.

Ta có: $\left|y(x_n) - y(x_{2n})\right| = \left|\ln\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{1}{2n}\right| = \ln 2 \to \ln 2 \ne 0$, khi $n\to+\infty$

$\Rightarrow$ hàm số đã cho **không** liên tục đều trên $(0,\ 1)$.

1.8. Đạo hàm và vi phân

Bài 20.

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x)$, biết $f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{nếu } x<1,\\ (1-x)(2-x), & \text{nếu } 1\le x\le 2,\\ x-2, & \text{nếu } x>2.\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)=\begin{cases}-1, & \text{nếu } x<1,\\ 2x-3, & \text{nếu } 1<x<2,\\ 1, & \text{nếu } x>2.\end{cases}$

+) Tại điểm $x = 1$, ta có:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)-0}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(2-x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-2)=-1$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1\Rightarrow f'(1)=-1.$

+) Tại điểm $x = 2$, ta có:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(1-x)(2-x)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x-1)=1$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)-0}{x-2}=1$$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=1\Rightarrow f'(2)=1.$

Kết hợp các trường hợp lại, ta có: $f'(x)=\begin{cases}-1, & \text{nếu } x\le 1,\\ 2x-3, & \text{nếu } 1<x<2,\\ 1, & \text{nếu } x\ge 2.\end{cases}$

Bài 21.

Tính $f'(x)$, biết $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(2017x)\right]=x^2.$

Đặt $u=2017x\Rightarrow x=\frac{u}{2017}\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{2017}$. Ta có:

$$\frac{\mathrm{d}\left[f(u)\right]}{\frac{\mathrm{d}u}{2017}}=\left(\frac{u}{2017}\right)^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\left[f(u)\right]}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{2017}\left(\frac{u}{2017}\right)^2=\frac{u^2}{2017^3}$$

$$\Rightarrow f'(u)=\frac{u^2}{2017^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{2017^3}.$$

Bài 22.

Với điều kiện nào thì hàm số: $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x\neq 0,\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}\quad (n\in\mathbb{Z})$

a) Liên tục tại $x=0$. **b)** Khả vi tại $x=0$. **c)** Có đạo hàm liên tục tại $x=0$.

a)

TH1: Nếu $n<0,\ n\in\mathbb{Z}$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^n\sin\frac{1}{x}$.

Chọn dãy $a_k=\dfrac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\xrightarrow{k\to+\infty} 0$, thì:

$$f(a_k)=\left(\frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)^n\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^n\pi^n}.$$

Vì $n<0\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} f(a_k)=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **không** thể tồn tại hữu hạn.

$\Rightarrow f(x)$ **không** liên tục tại $x=0$.

TH2: Nếu $n=0$, thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^0\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Chọn hai dãy con tiến đến 0 là $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ và $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ có công thức như sau:

+) $a_k=\dfrac{1}{k\pi}\ (k\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow f(a_k)=\sin(k\pi)=0\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} f(a_k)=0.$

+) $b_k=\dfrac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\Rightarrow f(b_k)=\sin\left[\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=1\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} f(b_k)=1.$

Vì 2 giới hạn trên khác nhau $\Rightarrow$ **không** tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ **không** liên tục tại $x=0$.

TH3: Nếu $n>0,\ n\in\mathbb{Z}$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} x^n=0\\ \left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Vậy, với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$.

b) $f(x)$ khả vi tại $x = 0$ khi và chỉ khi giới hạn sau tồn tại hữu hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$$

Biện luận tương tự như câu **a**, ta có điều kiện để $f(x)$ khả vi tại $x = 0$ là $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$.

c) Điều kiện **cần** để hàm số $f(x)$ có *đạo hàm liên tục* tại $x = 0$, là $f(x)$ khả vi tại $x = 0$.

Tức là $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ (theo câu **b**). Lúc này, ta tính được: $f'(0) = 0$. **(1)**

Ta có: $f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}+x^n\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}=x^{n-2}\left(nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),\forall x\neq 0$.

+) Với $n = 2$, ta có $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\forall x\neq 0$.

Bạn hãy chỉ ra $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ không tồn tại với cách chọn dãy giống như câu **a**.

+) Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$, ta có:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}x^{n-2}=0\\ \left|nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right|\le n+1,\forall |x|<1,x\neq 0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0}f'(x)=0\ \textbf{(2)}$$

(theo nguyên lý kẹp)

Từ **(1)** và **(2)**, ta có $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$, tức là hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

Vậy, điều kiện để $f(x)$ có đạo hàm liên tục tại $x = 0$ là $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$.

Bài 23.
Chứng minh rằng hàm số $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ không khả vi tại điểm $x = a$, biết $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a)\neq 0$.

Ta có: $f(x)=\begin{cases}(x-a)\varphi(x), & \text{nếu } x>a\\ 0 & \text{nếu } x=a\\ (a-x)\varphi(x), & \text{nếu } x<a\end{cases}$. Xét các giới hạn:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a)\ \text{(do } \varphi(x) \text{ liên tục)}$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)\varphi(x)-0}{x-a}=-\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=-\varphi(a).$$

Vì $\varphi(a)\neq 0\Rightarrow \varphi(a)\neq-\varphi(a)\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\neq\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **không** khả vi tại điểm $x = a$ (đpcm).

Bài 24.

Tìm vi phân của hàm số:

a) $y=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\ \left(a\neq 0\right)$ **b)** $y=\arcsin\frac{x}{a}\ \left(a\neq 0\right)$

c) $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\ \left(a\neq 0\right)$ **d)** $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$

a) $dy=y'dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\frac{dx}{a^2+x^2}$.

b) $dy=y'dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx=\frac{|a|}{a\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{\operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ \forall|x|<|a|$.

c) Ta có: $y=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)$. Do đó:

$$dy=y'dx=\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{dx}{x^2-a^2},\ \forall x\neq\pm a.$$

d) $dy=y'dx=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},\ \forall x^2>-a.$

Bài 25.

Tìm: **a)** $\frac{d}{d\left(x^2\right)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ **b)** $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ **c)** $\frac{d}{d\left(x^3\right)}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$

a) $\frac{d}{d\left(x^2\right)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{d}{2x\,dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2x}\cdot\frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{dx}=\frac{1}{2x}\cdot\frac{\cos x.x-\sin x}{x^2}$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3},\ \forall x\neq 0.$$

b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}=\frac{d(\sin x)}{-\sin x\,dx}=\frac{-1}{\sin x}\cdot\frac{d(\sin x)}{dx}=\frac{-1}{\sin x}\cdot\cos x=-\cot x,\ \forall x\neq k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

c) $\frac{d}{d\left(x^3\right)}\left(x^3-2x^6-x^9\right)=\frac{d\left(x^3-2x^6-x^9\right)}{3x^2dx}=\frac{1}{3x^2}\cdot\frac{d\left(x^3-2x^6-x^9\right)}{dx}$

$$=\frac{1}{3x^2}\cdot\left(3x^2-12x^5-9x^8\right)=1-4x^3-3x^6,\ \forall x\neq 0.$$

Chú ý: Một số bạn sẽ thắc mắc, tại sao không lấy vi phân tử số và mẫu số cùng một lúc:

$$\frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{\mathrm{d}\left(g(x)\right)}=\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{g'(x)\mathrm{d}x}$$, sau đó rút gọn dx.

Mặc dù các bạn đạo hàm tử và mẫu cùng lúc thì *vẫn có điểm tối đa* tuỳ vào thầy, cô chấm. Thế nhưng nếu ai được học thầy Thảo thì thầy sẽ giải thích rằng việc lấy vi phân cùng lúc gặp vấn đề liên quan đến bản chất, vậy nên tôi cứ trình bày như bài giải cho an toàn ☺. Tốt nhất là các bạn nhớ công thức này: $\dfrac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{\mathrm{d}\left(g(x)\right)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, đừng có nhớ thêm cái d$x$.

Bài 26.
Tính gần đúng giá trị của các biểu thức:

a) $\sqrt[3]{7,97}$ **b)** $\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}}$ **c)** $\sqrt{3e^{0,04}+1,02^2}$

a) Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}},\forall x\neq 0.$

Chọn $x_0=8,\ \Delta x=-0,03.$ Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$\sqrt[3]{7,97}=f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+\Delta x.f'\left(x_0\right)=\sqrt[3]{8}+(-0,03).\frac{1}{3.\sqrt[3]{8^2}}=1,9975.$$

b) Xét hàm số $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{2-x}{2+x}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-4}{(2+x)^2}\cdot\dfrac{1}{7.\sqrt[7]{\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^6}},\forall x\neq\pm 2.$

Chọn $x_0=0,\ \Delta x=0,02.$ Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$\sqrt[7]{\frac{2-0,02}{2+0,02}}=f(0,02)=f\left(x_0+\Delta x\right)$$

$$\approx f\left(x_0\right)+\Delta x.f'\left(x_0\right)=\sqrt[7]{\frac{2}{2}}+0,02.\frac{-4}{2^2}.\frac{1}{7.\sqrt[7]{1^6}}=1-\frac{0,02}{7}\approx 0,99714.$$

c) Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3e^{2x}+(1+x)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3e^{2x}+1+x}{\sqrt{3e^{2x}+(1+x)^2}}.$

Chọn $x_0=0,\ \Delta x=0,02.$ Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$\sqrt{3e^{0,04}+1,02^2}=f(0,02)=f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+\Delta x.f'\left(x_0\right)=\sqrt{4}+0,02.\frac{4}{\sqrt{4}}=2,04.$$

Bài 27.
Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm chi phí $C(x)=2000+3x+0,01x^2+0,0002x^3$. Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x=100$, giá trị đó nói lên điều gì?

Hàm chi phí biên: $C'(x)=3+0,02x+0,0006x^2 \Rightarrow C'(100)=11.$

Chi phí biên tại $x=100$ là 11, ý nghĩa kinh tế của giá trị này là: Tại mức sản lượng $x=100$, nếu muốn tăng mức sản lượng lên 1 đơn vị thì phải **tăng** chi phí lên khoảng 11 đơn vị.

Bài 28.
Tính đạo hàm cấp cao của các hàm số:

a) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$.

b) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$.

c) $y=\ln\left(2x-x^2\right)$, tính $y^{(5)}$.

d) $y=x^2\sin x$, tính $y^{(50)}$.

e) $y=e^{x^2}$, tính $y^{(10)}(0)$.

f) $y=x\ln(1+2x)$, tính $y^{(10)}(0)$.

a) Áp dụng: $y(x)=\dfrac{1}{ax+b}\Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{a^n(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}, \forall x\neq\dfrac{-b}{a}\quad (n\in\mathbb{N},\ a\neq 0).$

Ta có: $y=\dfrac{x^2}{1-x}=-x-1-\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow y^{(8)}=0-\dfrac{(-1)^8.8!}{(x-1)^9}=\dfrac{40320}{(1-x)^9},\ \forall x\neq 1.$

b) Áp dụng: $y=(ax+b)^c\Rightarrow y^{(n)}=a^n\cdot\underbrace{c\cdot(c-1)\cdot\ldots\cdot(c-n+1)}_{n\text{ số hạng}}\cdot(ax+b)^{c-n}\quad(n\in\mathbb{N}).$

Ta có: $y=\dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1-x}=2\cdot(1-x)^{-1/2}-(1-x)^{1/2}$. Do đó:

$$y^{(100)}=2\cdot(-1)^{100}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\ldots\frac{-199}{2}\cdot(1-x)^{\frac{-201}{2}}-(-1)^{100}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\ldots\frac{-197}{2}\cdot(1-x)^{\frac{-199}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^{100}}\left[\frac{2\cdot199!!}{\sqrt{(1-x)^{201}}}+\frac{197!!}{\sqrt{(1-x)^{199}}}\right]=\frac{197!!\left[398+(1-x)\right]}{2^{100}\sqrt{(1-x)^{201}}}$$

$$=\frac{197!!\,(399-x)}{2^{100}\sqrt{(1-x)^{201}}},\ \forall x<1.$$

<u>*Chú ý:*</u> Ký hiệu **!!** là giai thừa kép, chứ không phải là giai thừa hai lần. Giai thừa kép, giai thừa bội ba là gì thì mời các bạn tra Google.

c) $y=\ln\left(2x-x^2\right)=\ln\left(x\left(2-x\right)\right)=\ln x+\ln\left(2-x\right)$ (điều kiện: $0<x<2$)

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=g\left(x\right)$$

$$\Rightarrow y^{(5)}=g^{(4)}\left(x\right)=\frac{(-1)^4.4!}{x^5}+\frac{(-1)^4.4!}{\left(x-2\right)^5}=\frac{4!}{x^5}+\frac{4!}{\left(x-2\right)^5},\ \forall 0<x<2.$$

d) Đặt $u\left(x\right)=x^2$, $v\left(x\right)=\sin x$ thì $y=uv$. Lần lượt tính các đạo hàm cấp cao của *u*, *v*:

$$u'=2x;\ u''=2;\ u^{(k)}=0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\geq 3.$$

$$v^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Áp dụng công thức Leibniz, ta có:

$$y^{(50)}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^k u^{(k)}v^{(50-k)}=C_{50}^0uv^{(50)}+C_{50}^1u'.v^{(49)}+C_{50}^2u''.v^{(48)}+\underbrace{0+0+0+....+0}_{48\text{ số }0}$$

$$=x^2\sin\left(x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)+50.2x.\sin\left(x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1125.2.\sin\left(x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\left(2450-x^2\right)\sin x+100x\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

e) $y=e^{x^2}$, tính $y^{(10)}\left(0\right)$.

Ta có khai triển Maclaurin: $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+o\left(t^5\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, ta thay *t* bởi x^2, ta có khai triển Maclaurin của:

$$y=e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{\left(x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(x^2\right)^4}{4!}+\frac{\left(x^2\right)^5}{5!}+o\left(\left(x^2\right)^5\right)$$

$$=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}}{5!}+o\left(x^{10}\right)$$

Hệ số của x^{10} trong khai triển trên là $\frac{1}{5!}=\frac{y^{(100)}\left(0\right)}{10!}\Rightarrow y^{(100)}\left(0\right)=\frac{10!}{5!}=30240.$

f) Có 2 cách xử lý bài này:

Cách 1: Dùng khai triển Maclaurin:

$$y=x\ln\left(1+2x\right)=x\cdot\left[x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-...+\frac{(2x)^9}{9}-o\left(\left(2x\right)^9\right)\right]$$

$$=x^2-2x^3+\frac{8}{3}x^4-...+\frac{512}{9}x^{10}+o\left(x^{10}\right)$$

Hệ số của x^{10} là $\dfrac{512}{9}=\dfrac{y^{(10)}(0)}{10!}\Rightarrow y^{(10)}(0)=\dfrac{512}{9}10!=20643840.$

<u>*Cách 2:*</u> Đặt $u(x)=x,\ v(x)=\ln(1+2x)$ thì $y=uv$. Lần lượt tính các đạo hàm cấp cao:

$$u'=1;\ u^{(k)}=0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\ge 2.$$

$$v^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}2^n(n-1)!}{(1+2x)^n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow v^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}2^n(n-1)!$$

Áp dụng công thức Leibniz, ta có:

$$y^{(10)}(0)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k u^{(k)}(0).v^{(10-k)}(0)$$

$$=C_{10}^0.u(0).v^{(10)}(0)+C_{10}^1.u'(0).v^{(9)}(0)\quad\left(\text{vì } u^{(k)}(0)=0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\ge 2.\right)$$

$$=0+10.1.(-1)^{9+1}2^9.8!=206438400.$$

Bài 29.

Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

a) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ **b)** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ **c)** $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

d) $y=e^{ax}\sin(bx+c)$ **e)** $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ **f)** $y=x^{n-1}e^{1/x}$

a) Ta có: $y=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)\Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}\right]$

$$\Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right],\forall x\ne\pm1\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right).$$

b) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}},\forall x\ne 1,\ x\ne 2\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right).$$

c) Ta có: $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}=\dfrac{(1+x)-1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{2/3}-(1+x)^{-1/3}$. Do đó:

$$y^{(n)}=\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{3}\cdots\frac{5-3n}{3}}_{n\text{ số hạng}}\cdot(1+x)^{\frac{2}{3}-n}-\underbrace{\frac{-1}{3}\cdot\frac{-4}{3}\cdots\frac{2-3n}{3}}_{n\text{ số hạng}}\cdot(1+x)^{\frac{-1}{3}-n}$$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3^n}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3n-2)!!!}{3n-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^{3n-2}}} - \frac{(-1)^n(3n-2)!!!}{3^n}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!!!}{3^n.\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}\cdot\left[\frac{1}{3n-2}\cdot(1+x)+1\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!!!}{3^n.(3n-2).\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}(x-1+3n),\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

<u>*Lưu ý:*</u> Chắc rằng các bạn thi tốt nghiệp THPT, quen với kiến thức phổ thông, thì hàm số $y=(1+x)^{-1/3}$ và hàm số $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ có tập xác định khác nhau. Nhưng lên Đại học rồi thì hãy xem như cả hai hàm số trên đều có tập xác định giống nhau là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, và một cách hiểu "hợp lý hơn cho các bạn" là việc viết $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{-1/3}$ chỉ là một bước trung gian, để đi đến kết quả cuối cùng.

"*Hãy quen với điều đó đi!*" – Mai Ngô said.

Ngoài ra, các bạn có thể thắc mắc $\frac{(3n-2)!!!}{3n-2}$ tại sao lại không viết là $(3n-5)!!!$, lý do đơn giản là với $n = 1$ thì $(3n - 5) = -1$, chả lẽ lại viết $(-1)!!!$, có vẻ không hợp lý lắm.

d) $y=e^{ax}\sin(bx+c)$

<u>*Trường hợp 1:*</u> Nếu $a=b=0$ thì $y=\sin c\Rightarrow y^{(n)}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

<u>*Trường hợp 2:*</u> Nếu $a^2+b^2\neq 0$. Chọn θ sao cho $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ta sử dụng phép quy nạp để chứng minh mệnh đề sau:

$$y^{(n)}=e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\sin(bx+c+n\theta),\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)\ \textbf{(*)}.$$

Thật vậy, ta có:

$$y' = ae^{ax}.\sin(bx+c)+e^{ax}.b\cos(bx+c)=e^{ax}\left[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)\right]$$

$$=e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right]$$

$$=e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\theta\sin(bx+c)+\sin\theta\cos(bx+c)\right]$$

$$=e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+c+\theta),\forall x\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Mệnh đề **(*)** đúng với $n = 1$ **(1)**.

Giả sử **(*)** đúng với $n = k \ge 1$, tức là: $y^{(k)} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \sin\left(bx+c+k\theta\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y^{(k+1)} = \left[y^{(k)}\right]' = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \left[ae^{ax}.\sin\left(bx+c+k\theta\right)+e^{ax}.b\cos\left(bx+c+k\theta\right)\right]$$

$$= e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \left[a\sin\left(bx+c+k\theta\right)+b\cos\left(bx+c+k\theta\right)\right]$$

$$= e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{k+1} \left[\cos\theta\sin\left(bx+c+k\theta\right)+\sin\theta\cos\left(bx+c+k\theta\right)\right]$$

$$= e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{k+1} \sin\left(bx+c+(k+1)\theta\right),\forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ mệnh đề **(*)** đúng với $n = k + 1$ **(2)**.

Từ **(1)**, **(2)** suy ra mệnh đề **(*)** đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Kết hợp hai trường hợp lại, ta có kết quả tổng quát cho cả hai trường hợp là:

$$y^{(n)} = e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \sin\left(bx+c+n\theta\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right).$$

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Ta có: $y = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\left(4x\right)$. Do đó:

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right).$$

f) $y = x^{n-1}e^{1/x}$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $y_n^{(n)} = \dfrac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}},\forall x \ne 0\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ **(*)**.

Thật vậy:

+) Với $n = 1$ ta có: $y_1 = e^{1/x} \Rightarrow y_1' = \dfrac{-e^{1/x}}{x^2} \Rightarrow$ mệnh đề **(*)** đúng với $n = 1$ **(1)**.

+) Với $n = 2$ ta có: $y_2 = xe^{1/x} \Rightarrow y_2' = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{1/x} \Rightarrow y_2^{(2)} = \dfrac{e^{1/x}}{x^3} \Rightarrow$ mệnh đề **(*)** đúng với $n = 2$ **(2)**.

+) Giả sử **(*)** đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots, k$ $(k \ge 3)$, tức là: $y_m^{(m)} = \dfrac{(-1)^m e^{1/x}}{x^{m+1}},\ \forall m = \overline{1,\ k}$.

Cụ thể, ta sử dụng: $y_k^{(k)} = \dfrac{(-1)^k e^{1/x}}{x^{k+1}}$ và

$$y_{k-1}^{(k-1)}=\frac{(-1)^{k-1}e^{1/x}}{x^k}\Rightarrow y_{k-1}^{(k)}=(-1)^k e^{1/x}\left(\frac{k}{x^{k+1}}+\frac{1}{x^{k+2}}\right).$$

Ta tiếp tục có: $y_{k+1}=x^k e^{1/x}\Rightarrow y'_{k+1}=kx^{k-1}e^{1/x}-x^{k-2}e^{1/x}=ky_k-y_{k-1}$. Suy ra:

$$y_{k+1}^{(k+1)}=ky_k^{(k)}-y_{k-1}^{(k)}=k\cdot\frac{(-1)^k e^{1/x}}{x^{k+1}}-(-1)^k e^{1/x}\left(\frac{k}{x^{k+1}}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)=\frac{(-1)^{k+1}e^{1/x}}{x^{k+2}}$$

$\Rightarrow$ mệnh đề **(*)** đúng với $n=k+1$ **(3)**.

Từ **(1)**, **(2)**, **(3)** suy ra mệnh đề **(*)** đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy, $y_n^{(n)}=\dfrac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}},\forall x\neq 0\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Bài 30.

Tìm vi phân cấp cao của hàm số:

a) $y=(2x+1)\sin x$. Tính $d^{10}y(0)$.

b) $y=e^x\cos x$. Tính $d^{20}y(0)$.

c) $y=x^9\ln x$. Tính $d^{10}y(1)$.

d) $y=x^2e^{ax}$. Tính $d^{20}y(0)$.

Các bài tìm vi phân cấp cao ở bài này đều tính vi phân tại một điểm, thế nên từng bài đều có 2 cách triển khai: thứ nhất là áp dụng khai triển Maclaurin, thứ 2 là dùng công thức Leibnitz. Tuỳ vào bài tập mà chúng ta chọn cách nào để thuận tiện cho việc trình bày.

a) Khai triển Maclaurin của y là: $y=(2x+1)\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}+O\left(x^{11}\right)\right)$

$\Rightarrow$ hệ số của x^{10} trong khai triển trên là:

$$a_{10}=\frac{2}{9!}=\frac{y^{(10)}(0)}{10!}\Rightarrow y^{(10)}(0)=20\Rightarrow d^{10}y(0)=y^{(10)}(0)dx^{10}=20dx^{10}.$$

b) Khai triển Maclaurin của $y=\left[\left(\sum_{k=0}^{20}\dfrac{x^k}{k!}\right)+o\left(x^{20}\right)\right]\cdot\left[\left(\sum_{h=0}^{10}\dfrac{(-1)^h x^{2h}}{(2h)!}\right)+o\left(x^{20}\right)\right]$

$\Rightarrow$ hệ số của x^{20} trong khai triển trên là: $a_{20}=\sum_{h=0}^{10}\left[\dfrac{1}{(20-2h)!}\cdot\dfrac{(-1)^h}{(2h)!}\right]$

$$y^{(20)}(0)=20!a_{20}=\sum_{h=0}^{10}\left[(-1)^h\frac{20!}{(20-2h)!\,(2h)!}\right]=\sum_{h=0}^{10}\left[(-1)^h C_{20}^{2h}\right]=-1024.$$

(chỗ này bấm máy cái tổng xích ma được nhé!)

$\Rightarrow d^{20}y(0)=y^{(20)}(0)dx^{20}=-1024dx^{20}$.

<u>*Cách giải khác:*</u> Dùng câu thức ở **Bài 29d**, với $y=e^x\cos x=e^x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

c) Đặt $u(x)=x^9$, $v(x)=\ln x$. Ta có:

$$u^{(n)}=\frac{9!}{(9-n)!}x^{9-n},\ \forall n=\overline{0,\ 9}\Rightarrow u^{(10)}=0; \qquad v^{(k)}=\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k},\forall k=\overline{0,\ 10}$$

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$y^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k u^{(k)}v^{(10-k)}=\sum_{k=0}^{9}C_{10}^k\cdot\frac{9!}{(9-k)!}x^{9-k}\cdot\frac{(-1)^{11-k}(9-k)!}{x^{10-k}}$$

$$=9!\sum_{k=0}^{9}\frac{(-1)^{1-k}C_{10}^k}{x}$$

$\Rightarrow y^{(10)}(1)=9!\sum_{k=0}^{9}(-1)^{1-k}C_{10}^k=9!\times 1=362880$ (phần $\sum_{k=0}^{9}(-1)^{1-k}C_{10}^k$ $\to$ bấm máy).

$\Rightarrow d^{10}y(1)=y^{(10)}(1).dx^{10}=362880dx^{10}$.

d) Khai triển Maclaurin: $y=x^2\left[\left(\sum_{k=1}^{18}\frac{(ax)^k}{k!}\right)+o\left(x^{18}\right)\right]=\left(\sum_{k=1}^{18}\frac{a^k}{k!}x^{k+2}\right)+o\left(x^{20}\right)$

$\Rightarrow$ hệ số của x^{20} trong khai triển Maclaurin của y là:

$$b_{20}=\frac{a^{18}}{18!}=\frac{y^{(20)}(0)}{20!}\Rightarrow y^{(20)}(0)=\frac{20!}{18!}a^{18}=380a^{18}.$$

$\Rightarrow d^{20}y(0)=y^{(20)}(0)dx^{20}=380a^{18}dx^{20}$.

Bài 31.

Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình: $P'(t)=r_0\left(1-\frac{P(t)}{P_c}\right)P(t)-\beta P(t)$, với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c=10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

Với $r_0=\frac{5}{100}$, $\beta=\frac{4}{100}$, $P_c=10000$, ta có:

$$P'(t)=\frac{5}{100}\left(1-\frac{P(t)}{10000}\right)P(t)-\frac{4}{100}P(t)=\frac{\left[2000-P(t)\right]P(t)}{200000}.$$

Lượng cá ổn định $\Leftrightarrow P'(t)=0,\ \forall t\geq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left[2000-P(t)\right]P(t)}{200000}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P(t)=0,\ \forall t\geq 0\\ P(t)=2000,\ \forall t\geq 0\end{array}\right.$$

Vậy số lượng cá ổn định là 0 hoặc 2000.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài 32.

Chứng minh rằng với mọi a, b, $c \in \mathbb{R}$, phương trình $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0,\ \pi)$.

Xét hàm số $f(x) = a\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + \dfrac{c}{3}\sin 3x$ liên tục và khả vi trên $[0,\ \pi]$, ta có:

$$f'(x) = a\cos x + b\cos x + c\cos 3x,\ \forall x \in (0,\ \pi).$$

Theo định lý Rolle, phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0,\ \pi)$, tức là phương trình $a\cos x + b\cos x + c\cos 3x = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0,\ \pi)$ (đpcm).

Bài 33.

Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ (với *n* nguyên dương, $n \geq 2$) không thể có quá 2 nghiệm thực nếu *n* chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu *n* lẻ.

Xét hàm số $f(x) = x^n + px + q$ liên tục và khả vi *n* cấp trên $\mathbb{R}$ ($\forall\, p, q \in \mathbb{R}$).

<u>*Trường hợp 1:*</u> Nếu *n* chẵn, $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $n \geq 2$.

Ta có: $f'(x) = nx^{n-1} + p$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = \dfrac{-p}{n} \Leftrightarrow x = x_0 = \sqrt[n-1]{\dfrac{-p}{n}}$ (do $(n-1)$ lẻ).

Bảng biến thiên của $f(x)$ có dạng:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm thực.

<u>*Trường hợp 2:*</u> Nếu *n* lẻ, $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $n \geq 3$. Ta có: $f'(x) = nx^{n-1} + p = n\left(x^{n-1} + \dfrac{p}{n}\right)$.

+) Nếu $p \geq 0$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm (thực chất trường hợp này phương trình có duy nhất 1 nghiệm luôn).

+) Nếu $p < 0$. Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} + \dfrac{p}{n} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = \sqrt[n-1]{\dfrac{-p}{n}} > 0 \\ x = x_2 = -\left(\sqrt[n-1]{\dfrac{-p}{n}}\right) < 0 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $f(x)$ trong trường hợp này có dạng:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, nhận xét, phương trình $f(x)=0$ không thể có quá 3 nghiệm.
Kết hợp cả 2 trường hợp, ta có điều phải chứng minh.

Bài 34.
Cho bộ ba số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng phương trình $8ax^7+3bx^2+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,\ 1)$.

Xét hàm số $f(x)=ax^8+bx^3+cx$ là hàm liên tục trên $[0,\ 1]$, khả vi trên $(0,\ 1)$.

$$f'(x)=8ax^7+3bx^2+c,\ \forall x\in(0,\ 1).$$

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow f(0)=f(1)$, vậy nên theo định lý Rolle, ta có phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x\in(0,\ 1)$, tức là $8ax^7+3bx^2+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,\ 1)$ (đpcm).

Bài 35.
Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, $-1\le x\le 1$.

Ta có: $g'(x)=3x^2, \forall x\in[-1,\ 1]$.
Công thức Cauchy dạng như trên không áp dụng được trong trường hợp này, vì tồn tại một điểm $x_0=0\in(-1,\ 1)$ làm cho $g'(x)=0$.

Bài 36.
Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

b) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b},\ \forall 0<b<a$.

c) $\dfrac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{1+a^2},\ \forall 0<a<b$.

a) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.
– Nếu $x=y$, thoả mãn bất đẳng thức đã cho.

– Nếu $x \neq y$, không mất tính tổng quát, giả sử $x < y$. Với giá trị cụ thể x, y thoả mãn $x < y$, xét hàm số $f(t) = \sin t$ liên tục trên $[x,\ y]$ và khả vi trên $(x,\ y)$.

Ta có: $f'(t) = \cos t, \forall t \in (y,\ x)$. Do đó theo định lý Lagrange thì tồn tại $c \in (x, y)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ hay } \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos c \Rightarrow \left|\frac{\sin y - \sin x}{y - x}\right| = |\cos c| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\sin y - \sin x| \leq |y - x| \Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Kết hợp hai trường hợp lại, ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn tại $x = y = 0$.

b) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b},\quad \forall 0 < b < a.$

Xét hàm số $f(t) = \ln t$ trên $[b,\ a]$. Hàm số liên tục trên $[b,\ a]$ và khả vi trên $(b,\ a)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t}, \forall t \in (b,\ a)$. Theo định lí Lagrange thì tồn tại $c \in (b,\ a)$ sao cho:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c} \text{ mà } 0 < b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} = \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b}.$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \text{ (đpcm).}$$

c) $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2},\ \forall 0 < a < b.$

Xét hàm số $f(t) = \arctan t$ trên $[a,\ b]$. Hàm số liên tục trên $[a,\ b]$ và khả vi trên $(a,\ b)$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}, \forall t \in (a,\ b)$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (b,\ a)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a} = \frac{1}{1+c^2}.$$

Vì $0 < a < c < b \Rightarrow \dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$. Do đó:

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a} < \frac{1}{1+a^2} \Leftrightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \text{ (do } b > a\text{)}$$

Như vậy, ta có điều phải chứng minh.

Bài 37.
Tồn tại hay không hàm f sao cho $f(0) = -1, f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$?

Giả sử tồn tại hàm f liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$, thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Xét hàm số $f(x)$ trên $[0,\ 2]$. Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0,\ 2]$ và khả vi trên $(0,\ 2)$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0,\ 2)$ sao cho:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)\Rightarrow f'(c)=\frac{4-(-1)}{2-0}=\frac{5}{2}>2.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f'(x)\le 2,\forall x\in\mathbb{R}$ của đề bài. Do đó, ta kết luận không tồn tại hàm f thoả mãn các điều kiện đề bài.

Bài 38.

Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)$

f) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-a\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$

g) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(1-x)}$

h) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{\tan x}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3^x\right)^{\tan\frac{1}{x}}$

a) $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}+1}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

Cách giải khác:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}-1\right)\overset{\text{VCB}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\right).$$

b) Ta có: $L_2=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$.

Đặt $t=x-1$ thì khi $x\to1$, ta có $t\to0$. Giới hạn trở thành:

$$L_2 = \lim_{t\to 0}\frac{(t+1)\ln(t+1)-t}{t\ln(t+1)} \underset{\text{VCB}}{\overset{\text{khai triển Maclaurin}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{(t+1)\left[t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right]-t}{t.t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

c) Đặt $t=\frac{1}{x}$. Khi $x\to\infty$ thì $t\to 0^+$. Giới hạn đã cho trở thành:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-\cos t}{1-\sqrt{1-t^2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{[1-t+o(t)]-(1+o(t))}{-\left(\frac{1}{2}.\left(-t^2\right)\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2}{t} = +\infty.$$

d) $L_4 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right].\left[x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]-x(1+x)}{x^3}$$

(khai triển Maclaurin)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

e) $L_5 = \lim\limits_{x\to 1}\tan\dfrac{\pi x}{2}\ln(2-x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}\ \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{-1}{2-x}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$

$$= \frac{\frac{-1}{2-1}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{1^2}} = \frac{2}{\pi}.$$

f) Nếu $a=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-0\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}1^{\frac{1}{x\sin x}} = 1.$

+) Nếu $a\neq 0$, ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-a\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1-a\tan^2 x\right)}{x\sin x}}.$

Xét $K=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-a\tan^2x\right)}{x\sin x}\overset{\text{VCB}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-a\tan^2x}{x.x}\overset{\text{VCB}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-ax^2}{x^2}=-a.$

Do đó $\lim\limits_{x\to0}\left(1-a\tan^2x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}=e^K=e^{-a}.$

Tóm lại, ta có $\lim\limits_{x\to0}\left(1-a\tan^2x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}=e^{-a},\ \forall a\in\mathbb{R}.$

g) $L_7=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(1-x)}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{\dfrac{-1}{1-x}}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\pi}{2(x-1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}\overset{\text{VCB}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\pi}{2(x-1)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2}{\pi(x-1)^3}=-\infty.$$

h) $L_8=\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln(1-\cos x)\tan x}$. Xét giới hạn:

$$K=\lim_{x\to0}\ln(1-\cos x)\tan x=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}}{\dfrac{-1}{\sin^2x}}.$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{\cos x-1}\overset{\text{VCB}}{=}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{-x^2/2}=\lim_{x\to0}(-2x)=0.$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{\tan x}=e^K=e^0=1.$

i) $L_9=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{\ln\left(x^2+2^x\right)}{x}}$. Xét giới hạn:

$$K=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+2^x\right)}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x}{x^2+2^x}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x}{x^2}}{1}=0.$$

$\Rightarrow L_9=e^K=e^0=1.$

j) $L_{10} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 3^x\right)^{\tan\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln\left(x^3+3^x\right)\tan\frac{1}{x}}$. Xét giới hạn:

$$K = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^3+3^x\right)\tan\frac{1}{x} \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^3+3^x\right)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^3+3^x\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[3^x\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)\right]}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(3^x\right)+\ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\ln 3+\ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)}{x} = \ln 3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)}{x}$$

Xét: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{3^x} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{3^x \ln 3} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x}{3^x (\ln 3)^2} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{3^x (\ln 3)^3} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right) = \ln(1+0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow K = \ln 3 + 0 = \ln 3 \Rightarrow L_{10} = e^K = e^{\ln 3} = 3.$$

Bài 39.
Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Ta có: $f(x) = \dfrac{x^3 - \left(1+ax+bx^2\right)\sin^3 x}{x^3 \sin^3 x} = \dfrac{x^3 - \left(1+ax+bx^2\right)\cdot\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}}{x^3 \sin^3 x}$.

Khai triển Maclaurin của $\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ là:

$$\frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{1}{4}\left[3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right)\right) - \left((3x) - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + O\left(x^6\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4x^3 - 2x^5 + o\left(x^6\right)\right] = x^3 - \frac{x^5}{2} + o\left(x^6\right)$$

$\Rightarrow$ Khai triển Maclaurin của $g(x) = x^3 - \left(1+ax+bx^2\right)\cdot\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ là:

$$g(x) = x^3 - \left(1+ax+bx^2\right)\cdot\left[x^3 - \frac{x^5}{2} + o\left(x^6\right)\right] = -ax^4 + \left(\frac{1}{2} - b\right)x^5 + o\left(x^5\right)$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-ax^4 + \left(\frac{1}{2}-b\right)x^5 + o\left(x^5\right)}{x^6}$

Giới hạn này hữu hạn $\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ \frac{1}{2} - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $(a,\ b) = \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

Bài 40.

Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a,\ b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên $(a,\ b)$. Chứng minh rằng với mọi $x \in (a,\ b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a,\ b)$ sao cho:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c).$$

Đặt $g_\lambda(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{2}\lambda$ (λ là tham số).

Với bất kỳ $x_0 \in (a,\ b)$, ta chọn $\lambda_0 = \dfrac{f(x_0) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)}{\frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}}$.

Ta có: $g_{\lambda_0}(x_0) = f(x_0) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) - \dfrac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}\lambda_0 = 0.$

+) $g_{\lambda_0}(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) - \dfrac{(a-a)(a-b)}{2}\lambda_0 = 0.$

+) $g_{\lambda_0}(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - \dfrac{(b-a)(b-b)}{2}\lambda_0 = 0.$

Xét hàm số $g_{\lambda_0}(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{2}\lambda_0$ liên tục trên $[a,\ x_0]$, khả vi trên $(a,\ x_0)$. Lại có $g_{\lambda_0}(a) = g_{\lambda_0}(x_0) = 0$ nên áp dụng định lý Rolle, ta có tồn tại $c_1 \in (a,\ x_0)$ sao cho $g'_{\lambda_0}(c_1) = 0$, tức là:

$$g'_{\lambda_0}(c_1) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \left(c - \frac{a+b}{2}\right)\lambda_0 = 0.$$

Tương tự, xét hàm số $g_{\lambda_0}(x)$ liên tục trên $\left[x_0,\, b\right]$, khả vi trên $\left(x_0,\, b\right)$. Tiếp tục dùng định Rollle, ta có tồn tại $c_2 \in \left(x_0,\, b\right)$ sao cho $g'_{\lambda_0}\left(c_2\right) = 0$.

Bây giờ ta đi xét $g'_{\lambda_0}(x)$ liên tục trên $\left[c_1,\, c_2\right]$ và khả vi trên $\left(c_1,\, c_2\right)$.

Ta có $g'_{\lambda_0}\left(c_1\right) = g'_{\lambda_0}\left(c_2\right) = 0$, nên áp dụng định lý Rolle, ta có tồn tại $c \in \left(c_1,\, c_2\right)$ sao cho: $g''_{\lambda_0}(c) = f''(c) - \lambda_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = f''(c)$.

Vậy, với bất kỳ $x \in (a,\, b)$ thì luôn tìm được $c \in (a,\, b)$ sao cho:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

Bài 41.
Dùng phương pháp Newton, tính $\sqrt[6]{2}$ đúng đến 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Đặt $f(x) = x^6 - 2$. Ta thấy $\sqrt[6]{2}$ là nghiệm dương của phương trình $f(x) = 0$.

Xét hàm số $f(x)$ trên liên tục và khả vi trên $[1,\, 2]$. Trên đoạn này thì $f'(x) = 6x^5$ và $f''(x) = 30x^4$ đều không đổi dấu.

$$m_1 = \min_{[1,\, 2]} f'(x) = 6,\; M_2 = \max_{[1,\, 2]} f''(x) = 480.$$

Xét dãy $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} = x_n - \dfrac{x_n^6 - 2}{6x_n^5} \end{cases}$ hội tụ về nghiệm. Tính:

$$x_1 \approx 1{,}677083333$$
$$x_2 \approx 1{,}422694413$$
$$x_3 \approx 1{,}242768746$$
$$x_4 \approx 1{,}148082251$$
$$x_5 \approx 1{,}123849554$$
$$x_6 \approx 1{,}122466324$$
$$x_7 \approx 1{,}122462048$$
$$x_8 \approx 1{,}122462048$$

Đến đây ta thấy $\left|x_7 - x_8\right| < \varepsilon = 10^{-8}$. Vậy $\sqrt[6]{2} \approx 1{,}122462048$.

Chú ý: Khi học sang học phần Phương pháp tính, các bạn sẽ có công thức sai số cho phương pháp Newton (phương pháp tiếp tuyến). Việc đánh giá $\left|x_7 - x_8\right| < 10^{-8}$ là do ta chưa có công thức sai số, nên đành phải lấy hiệu 2 nghiệm liên tiếp.

Bài 42.
Giải thích tại sao phương pháp Newton không áp dụng được để giải phương trình $x^3 - 2x + 6 = 0$, với xấp xỉ đầu $x_1 = 1$.

Đặt $f(x) = x^3 - 2x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = t_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right.$

Vẽ bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 2x + 6$:

x	$-\infty$		t_2		t_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(t_2)$	$\searrow$	$f(t_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Lưu ý rằng $f(t_1) = f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{54 - 4\sqrt{6}}{9} > 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm x_0 thoả mãn $x_0 < t_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Nếu chọn giá trị ban đầu $x_1 = 1$ thì khoảng phân ly nghiệm có dạng là $[a, 1]$, trong đó $a < x_0 < -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Rõ ràng, trên khoảng $(a, 1)$ thì $f'(x)$ đổi dấu, do đó không dụng được phương pháp Newton để giải phương trình đã cho với xấp xỉ đầu $x_1 = 1$.

Bài 43.
Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số:
a) $y = x^4 + x^2 - x + 1$ **b)** $y = \arctan x - x$ **c)** $y = x + |\sin 2x|$

a) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 4x^3 + 2x - 1$. Chỉ ra: $\begin{cases} y'(0) = -1 < 0 \\ y'(1) = 5 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y'(x)$ đổi dấu trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số đã cho không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$. Nhận xét $\begin{cases} y' < 0, \forall x \neq 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$.

Với $0<\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$, ta có: $y(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+1$

$\Rightarrow y(0)<y\left(\dfrac{\pi}{3}\right),\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)>y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$ hàm số **không** đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Bài 44.
Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $2x\arctan x\ge \ln\left(1+x^2\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $x-\dfrac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x,\ \forall x\ge 0$

c) $\cos x\le 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24},\ \forall x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Xét hàm số $f(x)=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}+2\arctan x-\dfrac{2x}{1+x^2}=2\arctan x,\forall x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \arctan x=0\Leftrightarrow x=0$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2x\arctan x\ge\ln\left(1+x^2\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

b) Xét hai hàm $f(x)=x-\ln(1+x)$ và $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ trên $[0,\ +\infty)$.

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}\ge 0,\forall x\ge 0$.

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+2x=\frac{x(1+2x)}{1+x}\ge 0,\forall x\ge 0.$$

$\Rightarrow f(x)$ và $g(x)$ là các hàm đồng biến trên $(0,\ +\infty)\Rightarrow\begin{cases} f(x)\ge f(0)=0,\ \forall x\ge 0\\ g(x)\ge g(0)=0,\ \forall x\ge 0\end{cases}$

Từ đây chúng ta suy ra điều phải chứng minh.
2 dấu đẳng thức cùng xảy ra tại $x=0$.
c) Với $x=0$ thì đẳng thức xảy ra.
Với $x>0$, xét hàm: $f(x)=\cos x$.

Khai triển với phần dư Lagrange, ta có:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5,\ \forall x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right), \text{ chắc chắn } 0<c<\frac{\pi}{2}.$$

Ta có: $f^{(5)}(x)=\cos\left(x+5\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \Rightarrow f^{(5)}(c)=-\sin c<0$ (vì $0<c<\frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow f(x)<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24},\ \forall x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Kết hợp 2 trường hợp, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Bài 45.

Tìm cực trị của các hàm số

a) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

b) $y=x-\ln(1+x)$

c) $y=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

d) $y=x^{\frac{2}{3}}+(x-2)^{\frac{2}{3}}$

a) Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $$y'=\frac{(6x+4)\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\left(3x^2+4x+4\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-x^2-2x}{\left(x^2+x+1\right)^2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên của y trên $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

hình vẽ bởi AHUST

Từ bảng biến thiên, ta suy ra hàm số đạt cực trị tại hai điểm:

– Đạt cực tiểu $x=-2,\ y_{CT}=\frac{8}{3}$.

– Đạt cực đại $x=0,\ y_{CĐ}=4$.

b) Tập xác định $\mathbf{D}=(-1,\ +\infty)$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Lập bảng biến thiên của y:

x	-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số có đạt cực trị tại 1 điểm duy nhất, là điểm cực tiểu $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

c) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$. Ta có: $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2} = \sqrt[3]{-x^3 + 5x^2 - 8x + 4}$. Ta có:

$$y' = \frac{-3x^2 + 10x - 8}{3.\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} \forall x \notin \{1,\ 2\};\quad y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \in \mathbf{D} \\ x = 2 \notin \mathbf{D} \end{array}\right.$$

Do đó $y' = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{4}{3}$. Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-\sqrt[3]{4}}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta kết luận hàm số đạt cực trị tại 2 điểm:

– Đạt cực tiểu $x = \dfrac{4}{3}$, $y_{CT} = \dfrac{-\sqrt[3]{4}}{3}$. – Đạt cực đại $x = 2$, $y_{CĐ} = 0$.

d) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ (nếu thắc mắc chỗ này thì các bạn đọc lại lưu ý ở **Bài 29c**).

Ta có: $y' = \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x}} + \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x(x-2)}}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2-x}\right), \forall x \notin \{0,\ 2\}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta kết luận hàm số có 3 điểm cực trị:

– Các điểm cực tiểu $x=0,\ x=2$, các điểm này có cùng giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}}=0$.

– Điểm cực đại $x=1,\ y_{\text{CĐ}}=2$.

<u>*Chú ý:*</u> Qua các bài tập trên, ta phải cẩn thận với những điểm *đạo hàm không xác định* (nó có thể là cực trị, hoặc không là cực trị). Muốn tránh được lỗi này, thì bạn hãy tập thói quen khi tập xác định cho đạo hàm, để tránh những sai lầm đáng tiếc.

Bài 46.

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a,\ b]$, chứng minh rằng $\forall c\in(a,\ b)$ ta có:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Với bất kì $c\in(a,\ b)$, tồn tại duy nhất $t\in(0,\ 1)$ sao cho: $c=ta+(1-t)b$.

Vì $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a,\ b]$ nên:

$$f(c)=f\big(ta+(1-t)b\big)\le t\,f(a)+(1-t)f(b).$$

$$\Rightarrow\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\le\frac{t\,f(a)+(1-t)f(b)-f(a)}{ta+(1-t)b-a}$$

$$=\frac{(1-t)\big[f(b)-f(a)\big]}{(1-t)(b-a)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tương tự, ta chứng minh được $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$.

Bài 47.

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\tan\dfrac{x+y}{2}\le\dfrac{\tan x+\tan y}{2},\ \forall x,y\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $x\ln x+y\ln y\ge(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2},\ \forall x,y>0$.

a) Xét hàm số $f(t)=\tan t$ trên $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $g'(t)=\dfrac{1}{\cos^2 t}\Rightarrow g''(t)=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}>0,\ \forall t>0.$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm lồi trên $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Với $x,y\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, áp dụng bất đẳng thức hàm lồi:

$$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\le\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)\Leftrightarrow \tan\frac{x+y}{2}\le\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}\tan y,\ \forall x,y\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $x=y=0$.

b) Xét hàm số $g(t)=t\ln t$ trên $(0, +\infty)$. Ta có: $g'(t)=\ln t+1\Rightarrow g''(t)=\dfrac{1}{t}>0,\forall t>0.$

$\Rightarrow g(t)$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$. Với $x, y \in (0, +\infty)$, áp dụng bất đẳng thức hàm lồi, ta có:

$$\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}g(y)\ge g\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}y\ln y\ge\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\ln x+y\ln y\ge(x+y)\ln\frac{x+y}{2},\forall x,y\in(0,\ +\infty)$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $x=y>0$.

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

Bài 48.
Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a) $y=\sqrt[3]{1+x^3}$ **b)** $y=\ln\left(1+e^{-x}\right)$ **c)** $y=\dfrac{x^3\operatorname{arccot}x}{1+x^2}$

d) $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=\dfrac{2016t^2}{1-t^3}\end{cases}$ **e)** $\begin{cases}x=t\\ y=t+2\arctan t\end{cases}$

a) Tập xác định: **D** = $\mathbb{R}$, đồ thị không có tiệm cận đứng.

Xét: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+1}=1$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số *có thể* có tiệm cận xiên, chắc chắn không có tiệm cận ngang. Ta có:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}-1\right)\overset{\text{VCB}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{3x^2}=0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận, đó là đường tiệm cận xiên $y=x$.
Chú ý: Có thể tính b sử dụng VCB, bằng cách dùng x làm nhân tử chung.
b) Tập xác định: **D** = $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. Xét:

+) Khi $x \to +\infty$, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln 1 = 0$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bên trái là $y = 0$.

+) Khi $x \to -\infty$, ta có:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}}{1} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[y-(-x)\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\ln\left[e^{-x}\left(e^{x}+1\right)\right]+x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[-x+\ln\left(e^{x}+1\right)+x\right] = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^{x}+1\right) = \ln 1 = 0.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên bên phải là $y = -x$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang bên trái là $y = 0$, tiệm cận xiên bên phải là $y = -x$, và không có tiệm cận đứng.

c) Tập xác định: **D** $= \mathbb{R}$, đồ thị không có tiệm cận đứng. Xét:

+) Khi $x \to +\infty$, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \arctan\frac{1}{x}}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \frac{1}{x}}{x^2} = 1$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bên phải là $y = 1$.

+) Khi $x \to -\infty$, ta có: $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{\left(1+x^2\right)x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arccot} x}{\frac{1}{x^2}+1} = \pi$.

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(y-\pi x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2} - \pi x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 \operatorname{arccot} x - \pi x - \pi x^3}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{x^2} - \pi}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}+\frac{2\pi}{x^3}}{-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}+\frac{2\pi}{x}}{-\frac{2}{x}-1} = \frac{-1+0}{0-1} = 1$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên bên trái là $y = \pi x - 1$.

Vậy, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bên phải là $y = 0$, tiệm cận xiên bên trái là $y = \pi x + 1$, và đồ thị không có tiệm cận đứng.

d)

+) Với $t_0 \neq 1$, t_0 hữu hạn: $\lim\limits_{t\to t_0} x = 2t_0 - t_0^2$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y = \dfrac{2016t_0^2}{1-t_0^3}$ là các giới hạn hữu hạn.

$\Rightarrow$ trường hợp này không có tiệm cận.

+) $\lim\limits_{t\to 1} x = \lim\limits_{t\to 1}\left(2t - t^2\right) = 1$ (hữu hạn) mà $\lim\limits_{t\to 1^+} y = \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{2016t^2}{1-t^3} = -\infty$

$\Rightarrow$ $x = 1$ là tiệm cận đứng của đường cong.

+) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x = \lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(2t - t^2\right) = -\infty$ và $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{2016t^2}{1-t^3} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{2016t^2}{-t^3} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đường cong.

Vậy, đường cong có 2 đường tiệm cận, đó là đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 0$.

e)

+) Với t_0 hữu hạn, ta có: $\lim\limits_{t\to t_0} x = t_0$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y = t_0 + 2\arctan t_0$ là các giới hạn hữu hạn.

$\Rightarrow$ trường hợp này không có tiệm cận.

+) Khi $t \to \infty$ ta có:

$$a = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t + 2\arctan t}{t}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1 + \dfrac{2}{1+t^2}}{1} = 1 \neq 0.$$

Xét các giới hạn:

$$b_1 = \lim_{t\to+\infty}\left(y - ax\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(t + 2\arctan t - 1.t\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(2\arctan t\right) = \pi$$

$\Rightarrow$ $y = x + \pi$ là tiệm cận xiên bên phải của đường cong.

$$b_2 = \lim_{t\to-\infty}\left(y - ax\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(t + 2\arctan t - 1.t\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(2\arctan t\right) = -\pi$$

$\Rightarrow$ $y = x - \pi$ là tiệm cận xiên bên trái của đường cong.

Bài 49.

Khảo sát các hàm số, đường cong sau:

a) $y = e^{\frac{1}{x} - x}$.

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g) $r = a + b\cos\varphi \quad \left(0 < a \le b\right)$

h) $r = a\sin 3\varphi \quad \left(a > 0\right)$.

a) +) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+) Ta có: $y' = \left(\dfrac{-1}{x^2} - 1\right) e^{\frac{1}{x} - x} < 0,\ \forall x \neq 0.$

– Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty,\ 0)$ và $(0,\ +\infty)$.

– Điểm uốn, các khoảng lồi, lõm:

$$y'' = \left(\frac{-1}{x^2} - 1\right)^2 e^{\frac{1}{x} - x} + \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x} - x} = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4} e^{\frac{1}{x} - x}$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + (x+1)^2}{x^4} e^{\frac{1}{x} - x} > 0,\ \forall x \neq 0$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có điểm uốn. Các khoảng lồi: $(-\infty,\ 0)$ và $(0,\ +\infty)$.

– Cực trị: Hàm số **không** có cực trị.

– Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x} - x} = 0 \text{ (vì } \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x} - x\right) = -\infty)$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ là tiệm cận ngang bên phải của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x} - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x} - x}}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\dfrac{-1}{x^2} - 1\right) e^{\frac{1}{x} - x}}{1} = -\infty$$

$\Rightarrow$ trường hợp $x \to -\infty$ thì **không** có tiệm cận ngang, không có tiệm cận xiên.

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

+) Đồ thị:

b) +) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$.

+) Ta có: $y' = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3.\sqrt[3]{\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)^2}} = \dfrac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}, \forall x \neq \pm 1.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}.$$

– Điểm uốn, các khoảng lồi, lõm:

Ta có: $y'' = \dfrac{-8}{9.\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^5}}, \forall x \neq \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y'' < 0, \ \forall x > -1, \ x \neq 1 \\ y'' > 0, \ \forall x < -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có điểm uốn duy nhất là $(-1,\ 0)$. Đồ thị hàm số lồi trên $(-\infty,\ -1)$; đồ thị hàm số lõm trên các khoảng $(-1,\ 1)$ và $(1,\ +\infty)$.

– Các khoảng tăng, giảm: Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty,\ \dfrac{-1}{3}\right)$ và $(1,\ +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{-1}{3},\ 1\right)$.

– Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1,\ y_{CT} = 0$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \dfrac{-1}{3},\ y_{CĐ} = \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

– Tiệm cận: Ta có: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}} = 1$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-ax\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{-1}{3}$$

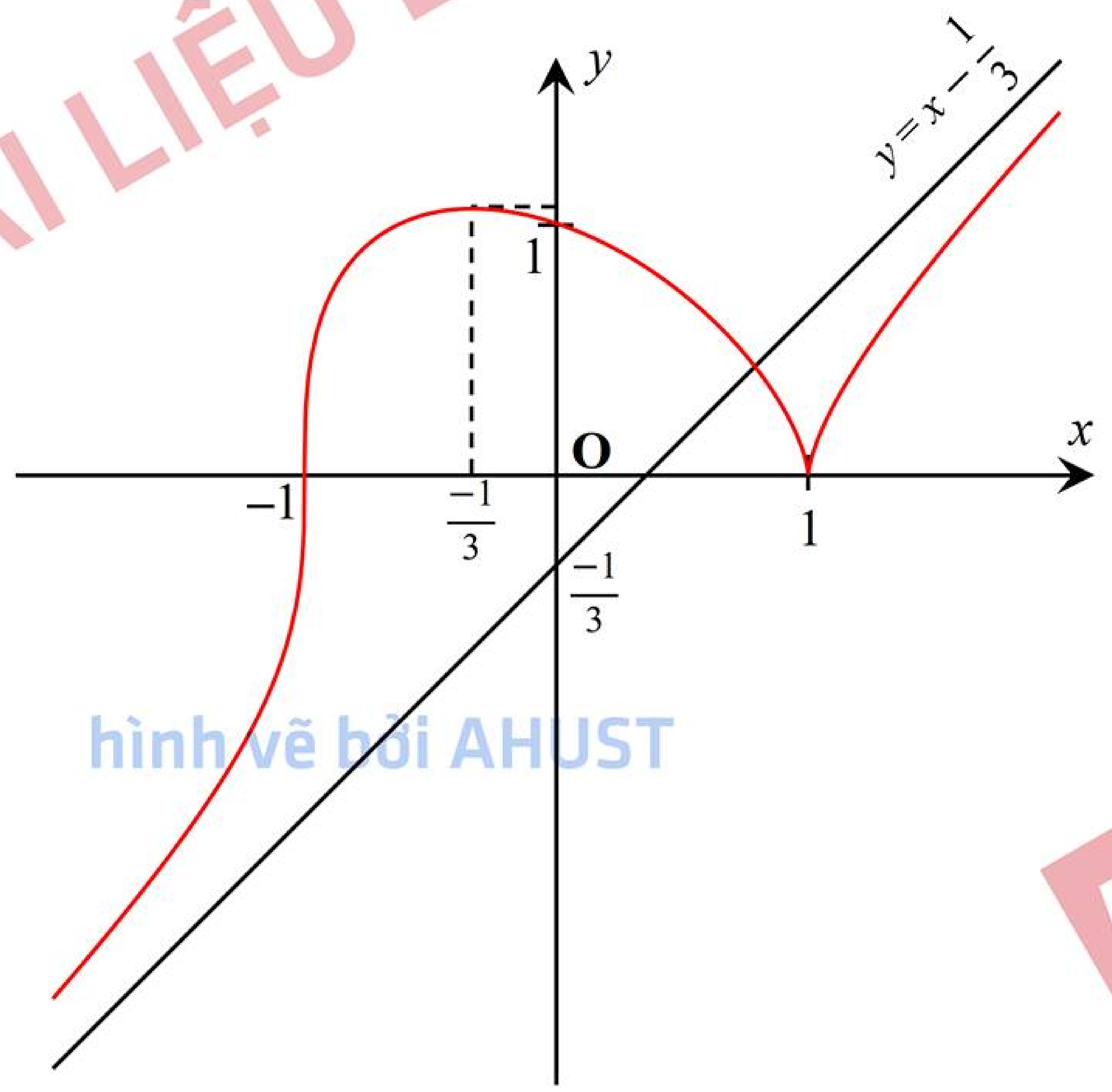
$\Rightarrow\ y=x-\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+) Đồ thị: Đồ thị hàm số giao với trục hoành tại các điểm (–1, 0) và (1, 0), giao với trục tung tại điểm (0, 1).



c) +) Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$.

+) Ta có: $y' = \dfrac{3x^2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

– Điểm uốn, các khoảng lồi, lõm:

Ta có: $y'' = \dfrac{\left(4x^3+6x\right)\left(x^2+1\right) - 4x\left(x^4+3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'' < 0,\ \forall x \in \left(-\sqrt{3},\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3},\ +\infty\right) \\ y'' > 0,\ \forall x \in \left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\ \sqrt{3}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 3 điểm uốn $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{-3\sqrt{3}}{4}\right)$.

Các khoảng lồi: $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$ và $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$. Các khoảng lõm: $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ và $\left(\sqrt{3},\ +\infty\right)$.

– Các khoảng tăng, giảm: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

– Cực trị: Hàm số **không** có cực trị.

– Tiệm cận: Ta có: $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - ax) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0$

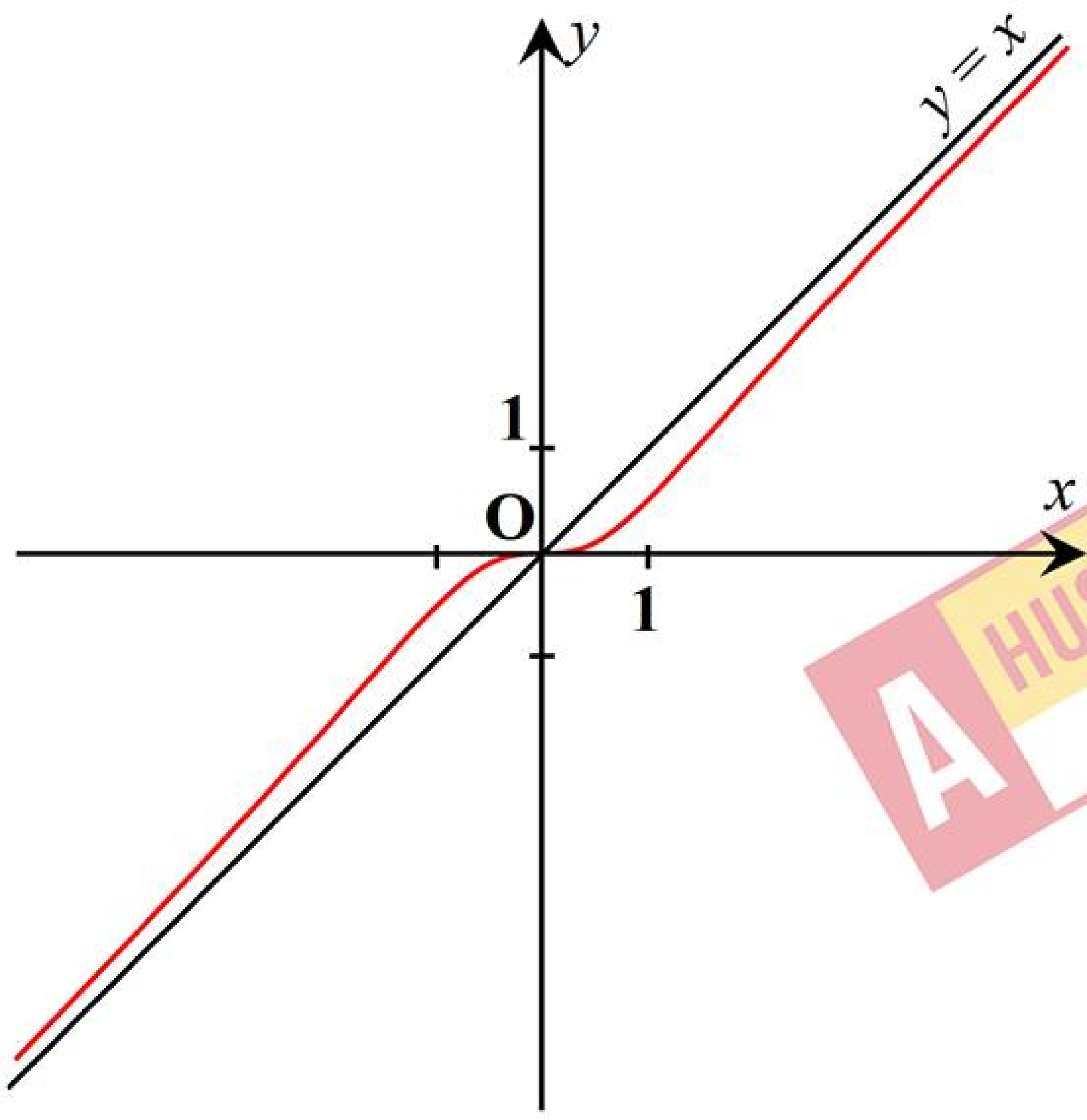
$\Rightarrow\ y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

+) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+) Đồ thị: Đồ thị hàm số đi gốc toạ độ O.



d) +) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$.

+) Ta có: $y' = \dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - (x-2)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \dfrac{2x+1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

– Các khoảng tăng, giảm: Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{-1}{2}, +\infty\right)$.

– Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{-1}{2}$, $y_{CT} = -\sqrt{5}$. Đây là điểm cực trị duy nhất của hàm số.

– Điểm uốn, các khoảng lồi, lõm:

Ta có: $y'' = \dfrac{2-3x-4x^2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}, \forall x \in \mathbb{R};\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$.

Xét dấu: $y'' > 0, \ \forall x \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}, \dfrac{\sqrt{41}-3}{8}\right)$; $\ y'' < 0, \ \forall x \notin \left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}, \dfrac{\sqrt{41}-3}{8}\right)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị có 2 điểm uốn là $\left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}, \dfrac{-19-\sqrt{41}}{\sqrt{114+6\sqrt{41}}}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{41}-3}{8}, \dfrac{\sqrt{41}-19}{\sqrt{114-6\sqrt{41}}}\right)$.

Đồ thị hàm số lồi trên khoảng $\left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}, \dfrac{\sqrt{41}-3}{8}\right)$; đồ thị hàm số lõm trên các khoảng $\left(-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{41}-3}{8}, +\infty\right)$.

– Tiệm cận:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1; \quad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = -1.$$

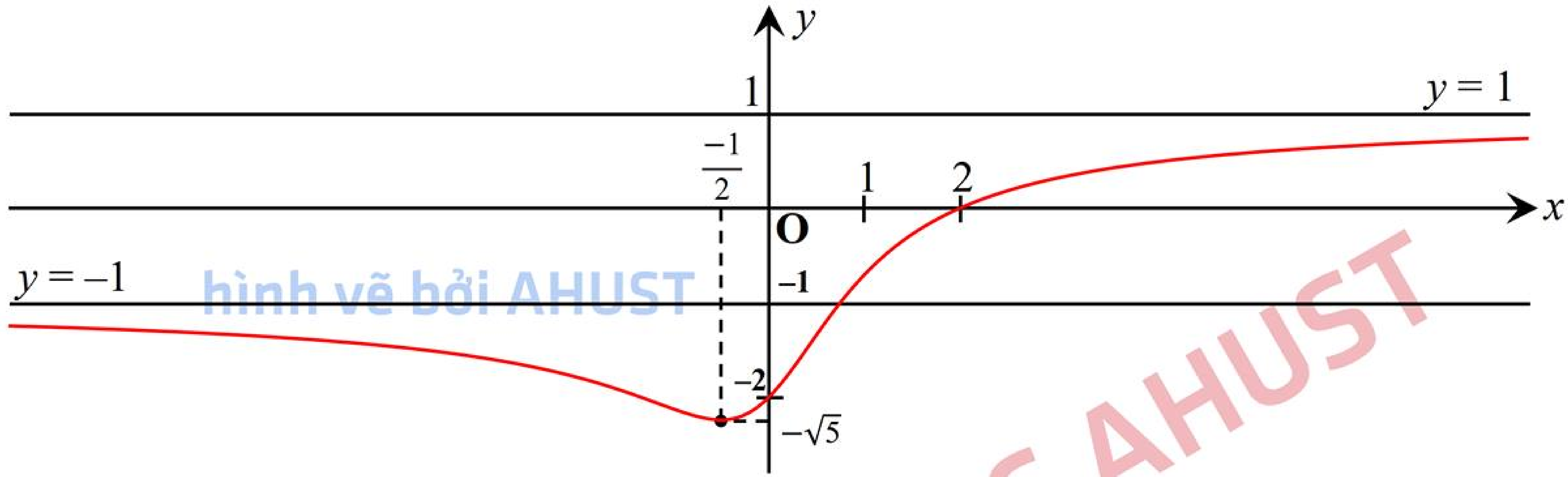
$\Rightarrow y = 1$ và $y = -1$ là các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên, không có tiệm cận đứng.

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow$	1

+) Đồ thị: Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại (2, 0), cắt trục tung tại (0, –2).



e) +) $x(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ xác định trên $\mathbf{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; $y(t) = \dfrac{t^2}{1+t}$ xác định trên $\mathbf{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

+) Ta có: $\dfrac{dx}{dt} = 2 \cdot \dfrac{t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2} > 0, \forall t \in \mathbf{D}_1$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t(t+2)}{(1+t)^2}, \forall t \in \mathbf{D}_2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t(t+2)}{(1+t)^2}}{2 \cdot \frac{t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2}} = \frac{t(t+2)(t-1)^2}{2\left(t^2+1\right)}, \forall t \neq \pm 1.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{2 \cdot \frac{t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2} dt}\left(\frac{t(t+2)(t-1)^2}{2\left(t^2+1\right)}\right) = \frac{\left(t^2-1\right)^3\left(t^3+3t-1\right)}{\left(t^2+1\right)^3}, \forall t \neq \pm 1.$$

Ta có: $\dfrac{dy}{dx} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -2 \\ 0 < t < 1, \\ 1 < t \end{array}\right.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t < -1 \\ -1 < t < 0 \end{array}\right.$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ có nghiệm duy nhất $t = t_0 = \dfrac{\sqrt[3]{4+4\sqrt{5}}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{4+4\sqrt{5}}} \approx 0{,}3222$.

Bảng biến thiên của $x(t)$ trên **D**:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x(t)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Kết hợp lại ta có bảng:

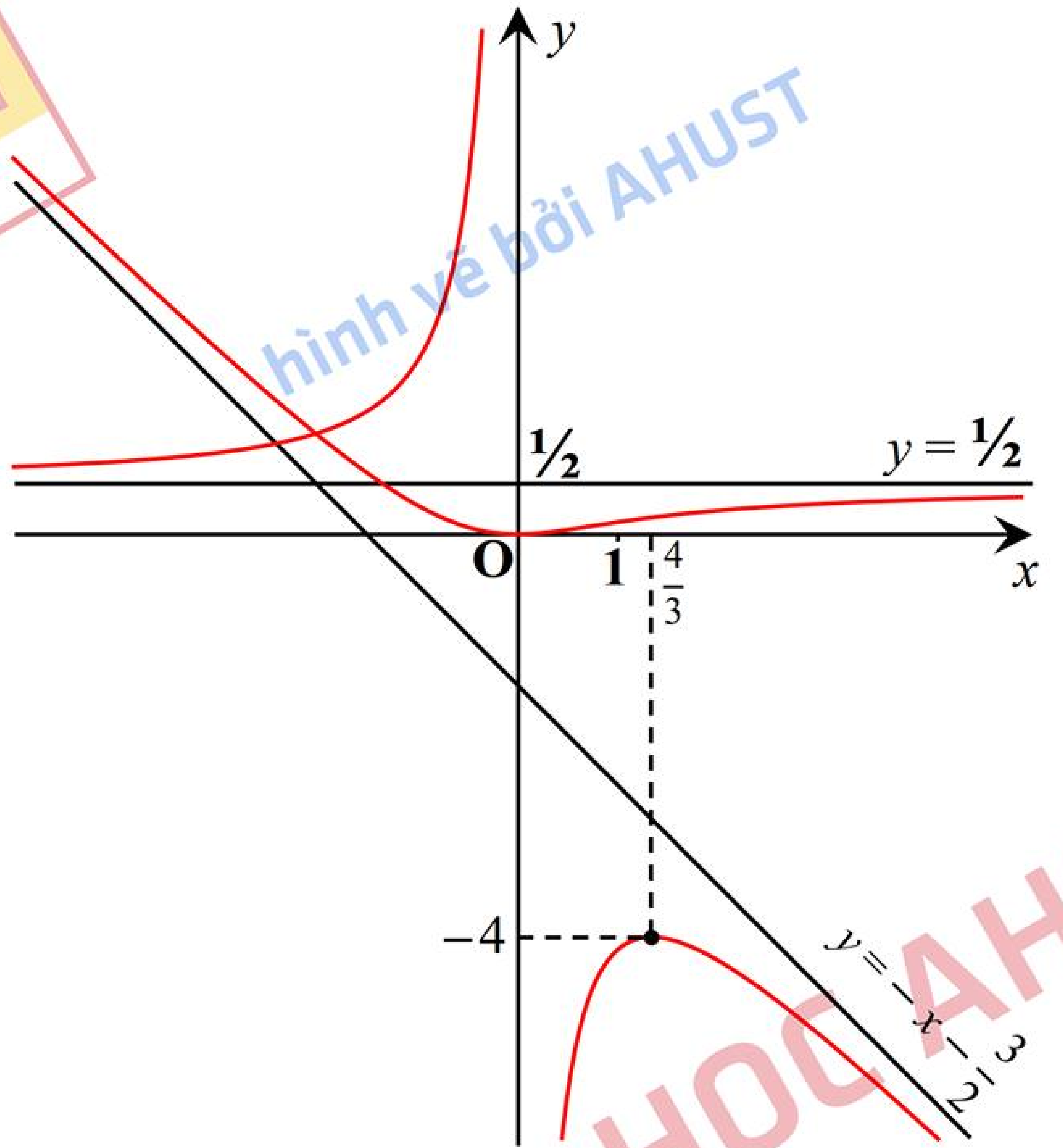
t	$-\infty$		-2		-1		0		t_0		1		$+\infty$
x	0	↗	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗			$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0
$y'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$			‖	$+$	
$y''(x)$			$-$		‖			$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗			$\frac{1}{2}$ ‖ $\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

– Tiệm cận:

Đường cong có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = \dfrac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y = -x - \dfrac{3}{2}$.

– Điểm uốn: Đường cong đã cho có một điểm uốn là $\left(x\left(t_0\right), y\left(t_0\right)\right)$.

+) Đồ thị: Đường cong đi qua gốc toạ độ.



f) +) x, y xác định với mọi $t \in \mathbb{R}$.

+) Ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(2t - t^2\right)}{d\left(3t - t^3\right)} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(t+1),\ \forall t \neq 1.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{(2-2t)dt}\left(\frac{3}{2}(t+1)\right) = \frac{1}{2-2t} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4(1-t)},\ \forall t \neq 1.$$

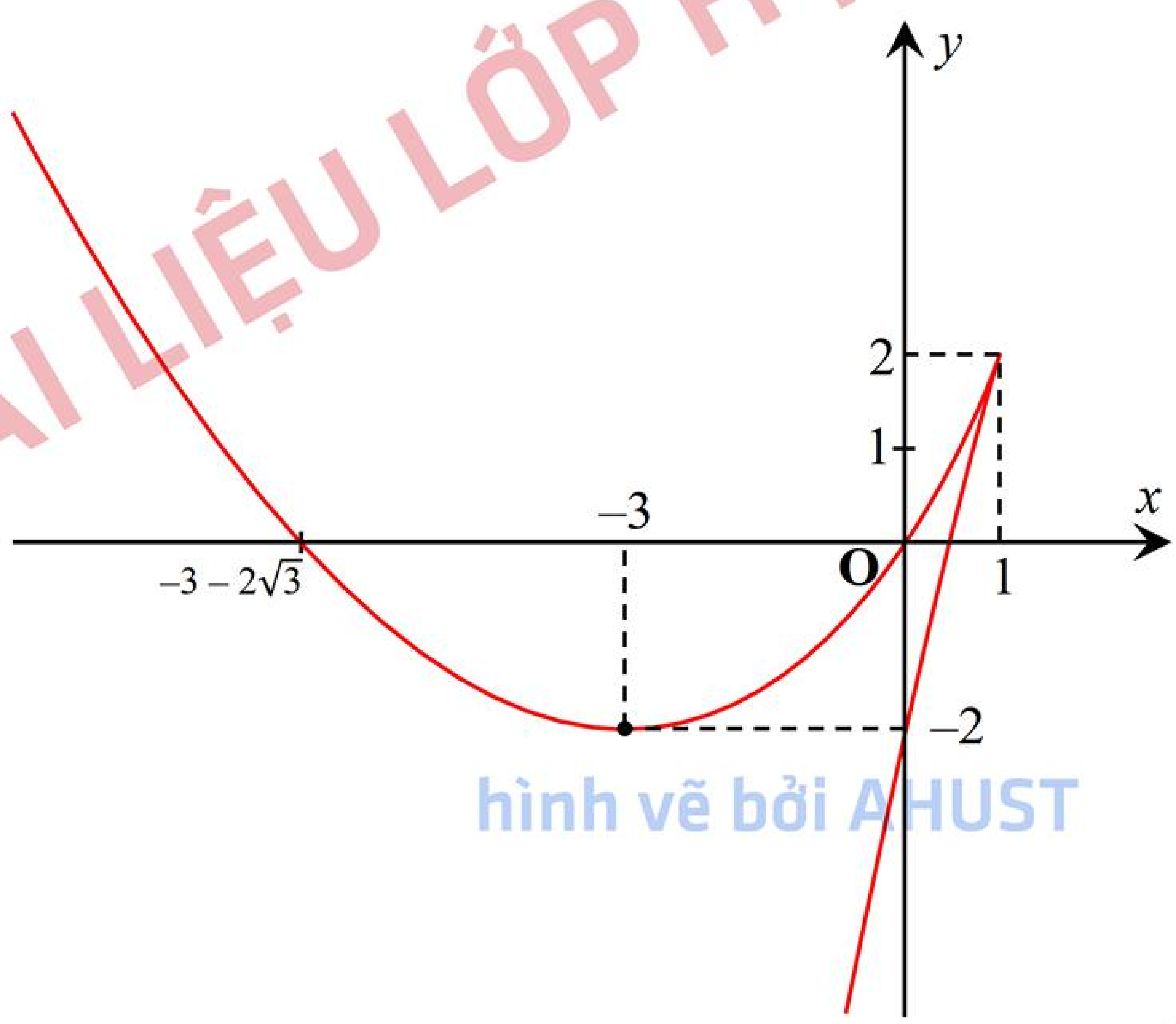
Ta có: $\dfrac{dy}{dx} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ 1 < t \end{array}\right.$, $\quad \dfrac{dy}{dx} < 0 \Leftrightarrow t < -1.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Leftrightarrow t < 1, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Leftrightarrow t > 1$$

Ta có bảng sau:

t	$-\infty$		-1		1		$-\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$y''(x)$			$+$		$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

– Tiệm cận: Đường cong không có tiệm cận.
– Điểm uốn: Đường cong không có điểm uốn.
+) Đồ thị: Đường cong đã cho đi qua gốc toạ độ, ngoài ra đường cong còn cắt trục hoành tại các điểm $\left(-3 \pm 2\sqrt{3},\ 0\right)$, đồ thị còn cắt trục tung tại điểm $\left(0,\ -2\right)$.



g) $r = a + b\cos\varphi \quad \left(0 < a \le b\right)$

Trường hợp 1: Nếu $0 < a = b$ thì $r = a\left(1 + \cos\varphi\right)$.

+) $r = a\left(1 + \cos\varphi\right)$ xác định với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$. Hàm $r\left(\varphi\right)$ có chu kỳ 2π. Lại có đường cong đối xứng qua trục hoành vì $r\left(\varphi\right) = r\left(-\varphi\right)$, do đó ta chỉ cần xét $\varphi \in \left[0,\ \pi\right]$.

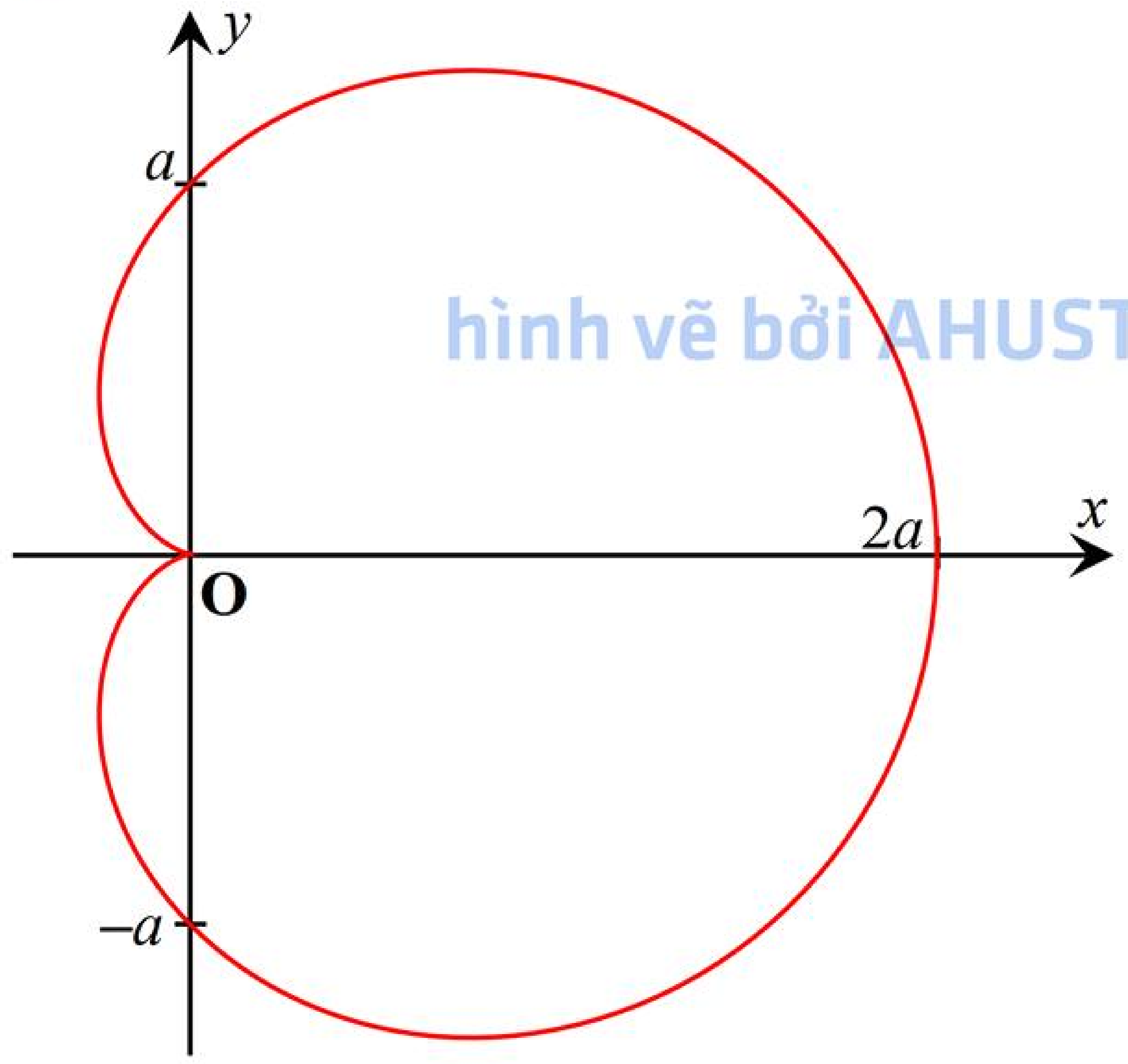
$r'(\varphi)=-a\sin\varphi\le 0,\ \forall\varphi\in[0,\ \pi];\quad r'(\varphi)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=0\\ \varphi=\pi\end{array}\right.$.

$$\tan V=\frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}=\frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi}=\frac{2a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{-2a\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=-\cot\frac{\varphi}{2}=\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\ \forall\varphi\in(0,\ \pi).$$

$\Rightarrow V=\dfrac{\varphi+\pi}{2},\ \forall\varphi\in(0,\ \pi)$. Lập bảng:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$r'(\varphi)$	0	$-$	0
r	$2a$ ↘	a ↘	0
V	$\frac{\pi}{2}$ ↗	$\frac{3\pi}{4}$ ↗	π

+) Đồ thị: Vì tính đối xứng của đường cong qua trục hoành, ta có thể vẽ được đường cong:



<u>*Trường hợp 2:*</u> Nếu $0<a<b$.

+) $r=a+b\cos\varphi$ xác định với mọi $\varphi\in\mathbb{R}$. Hàm $r(\varphi)$ có chu kỳ 2π.

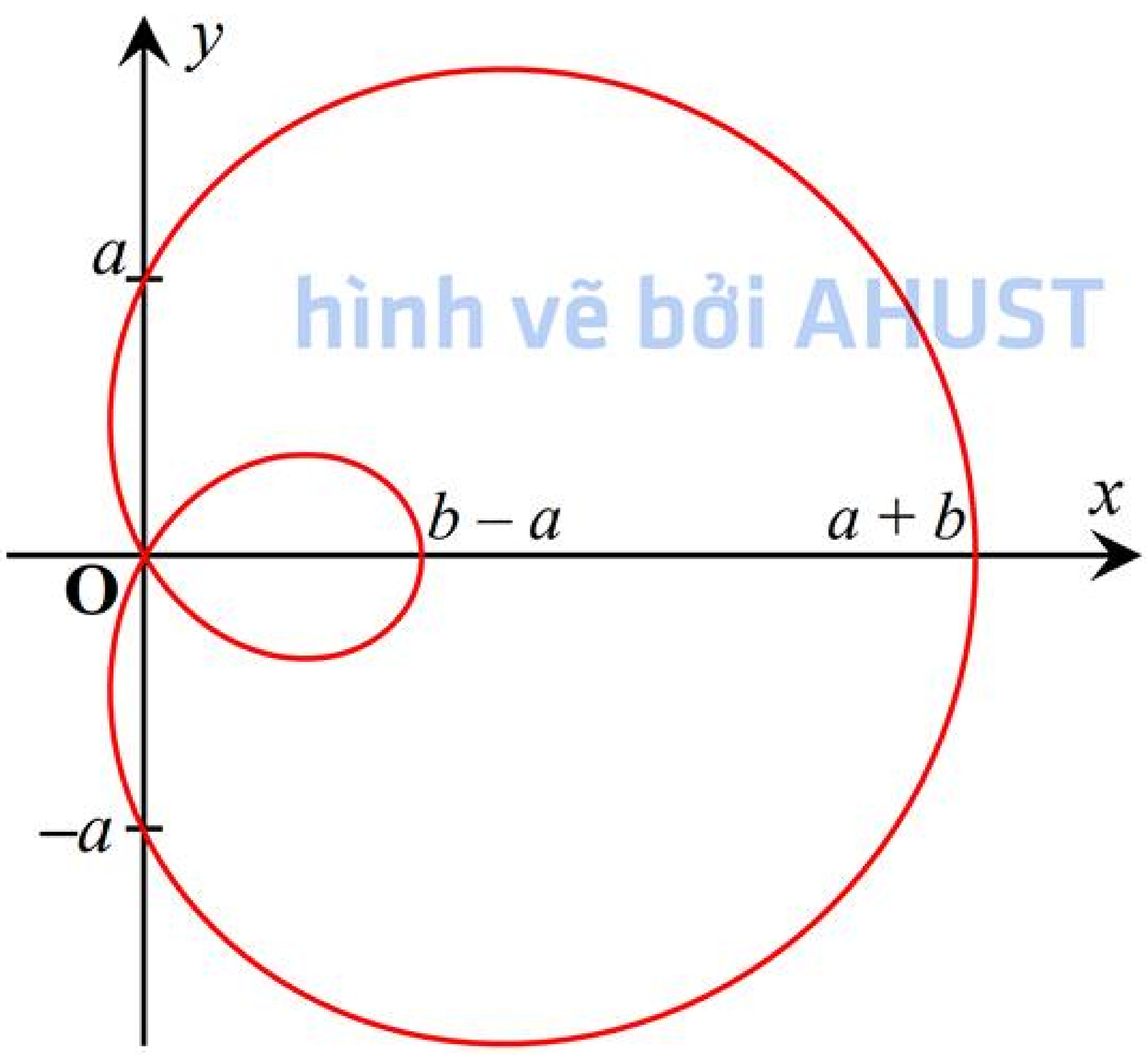
Đường cong đối xứng qua trục hoành vì $r(\varphi) = r(-\varphi)$, do đó ta chỉ cần xét $\varphi \in [0,\ \pi]$.

$r'(\varphi) = -b\sin\varphi \le 0,\ \forall \varphi \in [0,\ \pi];\quad r'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \varphi = \pi\end{array}\right.$.

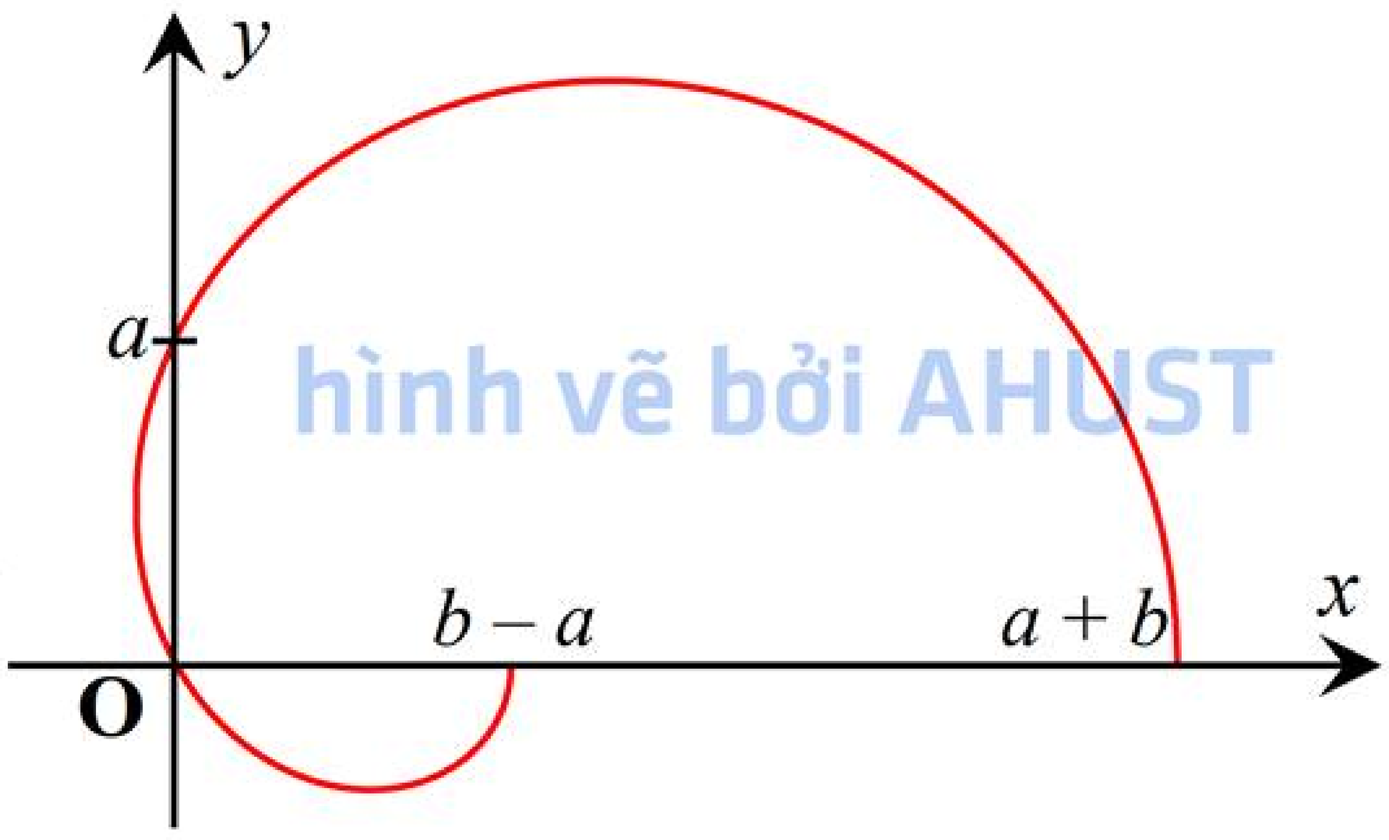
$\tan V = \dfrac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = \dfrac{a + b\cos\varphi}{-b\sin\varphi},\ \forall \varphi \in (0,\ \pi)$. Lập bảng:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \arccos\frac{a}{b}$	π
$r'(\varphi)$	0	$-$		0
r	$a+b$ ↘	a ↘	0 ↘	$a-b$
V	$\frac{\pi}{2}$ ↗	$\pi - \arctan\frac{a}{b}$ ↗	π ↗	$\frac{3\pi}{2}$

+) Đồ thị: Vì tính đối xứng của đường cong qua trục hoành, ta có thể vẽ được đường cong:



<u>*Chú ý:*</u> Để đỡ nhầm lẫn, thì các bạn có thể theo dõi phần đường cong ứng với $0 \le \varphi \le \pi$ như sau:



h) +) $r = a\sin 3\varphi$ xác định với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$. Hàm $r(\varphi)$ có chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$. Lại có đường cong đối xứng qua trục tung, vì $r(-\varphi) = -r(\varphi)$. do đó ta chỉ cần xét $\varphi \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$.

$$r'(\varphi) = -3a\cos 3\varphi,\ \forall \varphi \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]; \quad r'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \vee \varphi = \frac{\pi}{3} \vee \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

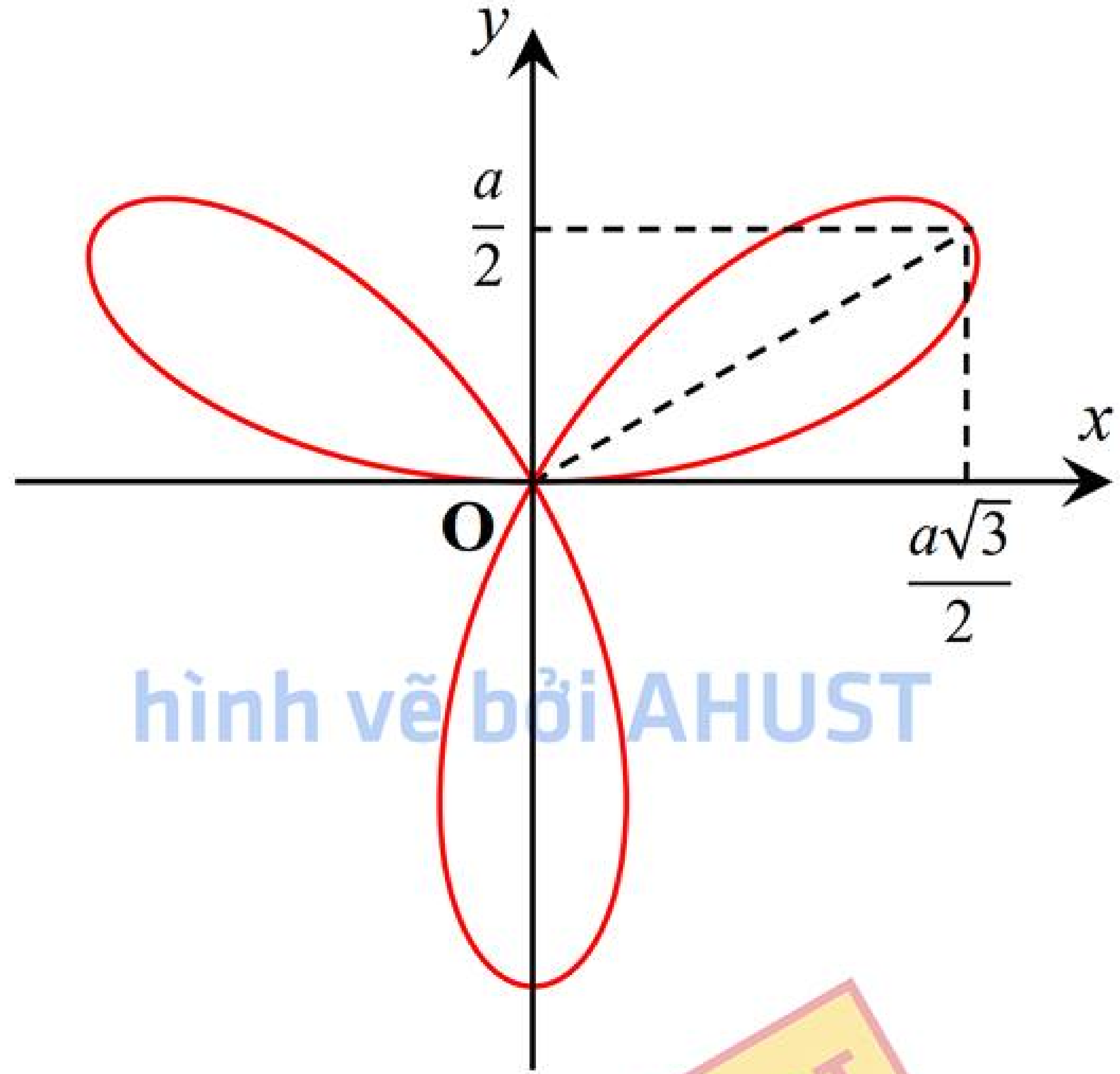
$$\tan V = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = \frac{a\sin 3\varphi}{-3a\cos 3\varphi} = \frac{-\tan 3\varphi}{3},\ \forall \varphi \in \left(0,\ \frac{\pi}{3}\right),\ \varphi \neq \frac{\pi}{6}$$

Lập bảng:

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$r'(\varphi)$	0	$+$	0	$-$	0
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
V	0	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$ || $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

– Tiệm cận: Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

+) Đồ thị: Thực hiện lấy đối xứng qua trục trung, kết hợp với phép xoay $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, ta thu được đồ thị của đường cong đã cho là:



Chương 2: Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1. Tích phân bất định

Bài 50.

Tính các tích phân:

a) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\mathrm{d}x$ **b)** $\int (x+2)\ln x\mathrm{d}x$ **c)** $\int \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)(x+5)}$ **e)** $\int \frac{x^2+2}{x^3+1}\mathrm{d}x$ **f)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2}$

g) $\int \sin 5x\cos 3x\mathrm{d}x$ **h)** $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$ **i)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x-4\cos x}$

j) $\int \frac{(3-2x)\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **k)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+4x+5}}$ **l)** $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

a) Đặt $t=\sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x = \sin 2x\mathrm{d}x$.

Tích phân trở thành: $\int e^t\mathrm{d}t = e^t + C$. Thay $t=\sin^2 x$ ta có:

$$\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\mathrm{d}x = e^{\sin^2 x}+C.$$

<u>*Chú ý:*</u> Lên đại học rồi, các bạn nên làm quen với việc "ẩn" phép đặt ẩn phụ. Cụ thể, các bạn trình bày như sau:

$$\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\mathrm{d}x = \int e^{\sin^2 x}2\sin x\cos x\mathrm{d}x = \int e^{\sin^2 x}\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right) = e^{\sin^2 x}+C.$$

Bản chất ở đây vẫn dùng phép đổi biến $t=\sin^2 x$, thế nhưng việc này các bạn có thể "nháp" trong đầu và viết kết quả như trên. Rất nhiều bài về sau trình bày theo kiểu này, thế nên các bạn chú ý nhé.

b) Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=(x+2)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v=\dfrac{x^2}{2}+2x \end{cases}$. Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có:

$$\int (x+2)\ln x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x}{2}+2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C.$$

Cách trình bày khác: Các bạn cũng sẽ rất hay gặp cách trình bày sau: người ta sẽ cho hàm *v* vào vi phân. Làm như thế này thì sẽ không cần phải chỉ rõ *u*, *v* là gì trong quá trình làm bài → ngắn gọn hơn.

Lưu ý, bản chất của cách trình bày dưới đây vẫn là tích phân từng phần.

Suy nghĩ	***Trình bày***
Trong đầu nhẩm tính: hàm ở trong **d** là *v*, còn hàm ở ngoài **d** là *u*	$\int (x+2)\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathbf{d}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)$
dùng công thức tích phân từng phần	$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\mathrm{d}(\ln x)$
Tính vi phân $\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$
Giờ tính tích phân thu được	$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x}{2}+2\right)\mathrm{d}x$ $=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4}-2x+C$

Và từ bây giờ, các bạn cũng tập làm quen với cách trình bày này!

c) $\int\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$

Ta có: $\left|x^2-3x+2\right|=\left|(x-1)(x-2)\right|$.

– Nếu $x\in[1,\ 2]$ thì $\int\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\int\left(-x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x=\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x+C_1$.

– Nếu $x\notin[1,\ 2]$ thì $\int\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\int\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+C_2$.

d) Thực hiện phép đồng nhất: $\frac{x}{(x+2)(x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}$, ta được $A=\frac{-2}{3}$, $B=\frac{5}{3}$.

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)(x+5)}=\int\left[\frac{-2}{3(x+2)}+\frac{5}{3(x+5)}\right]\mathrm{d}x=\frac{-2}{3}\ln|x+2|+\frac{5}{3}\ln|x+5|+C.$$

e) $\frac{x^2+2}{x^3+1}=\frac{x^2+2}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{\left(x^2-x+1\right)+(x+1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}$.

$$\int\frac{x^2+2}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \ln|x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

f) Nếu $a=b$ thì $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \int\frac{dx}{(x+a)^4} = \frac{-1}{3(x+a)^3} + C_1$.

– Nếu $a \neq b$, thực hiện đồng nhất:

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{x+b} + \frac{D}{(x+b)^2}$$

Ta tìm được: $A = \frac{2}{(a-b)^3}$, $B = D = \frac{1}{(a-b)^2}$, $C = \frac{2}{(b-a)^3}$. Do đó:

$$\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \int\left[\frac{\frac{2}{(a-b)^3}}{x+a} + \frac{\frac{1}{(a-b)^2}}{(x+a)^2} + \frac{\frac{2}{(b-a)^3}}{x+b} + \frac{\frac{1}{(a-b)^2}}{(x+b)^2}\right]dx$$

$$= \frac{2\ln|x+a|}{(a-b)^3} - \frac{1}{(a-b)^2(x+a)} + \frac{2\ln|x+b|}{(b-a)^3} - \frac{1}{(a-b)^2(x+b)}$$

$$= \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| - \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right) + C_2$$

g) $\int \sin 5x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)dx$ (công thức biến đổi tích thành tổng)

$$= \frac{-1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

i) Cách đơn giản nhất là các bạn đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, sau đó dùng: $\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ và đưa tích phân về tích phân biến t. Dưới đây sẽ là cách khác, dùng công thức lượng giác.

$$3\sin x - 4\cos x = \sqrt{3^2 + (-4)^2}\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{-4}{5}\cos x\right)$$

Chọn α sao cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$ thì:

$$3\sin x - 4\cos x = 5(\sin\alpha\sin x + \cos\alpha\cos x) = 5\cos(x-\alpha).$$

$$\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}=\int\frac{dx}{5\cos(x-\alpha)}=\frac{1}{5}\int\frac{\cos(x-\alpha)dx}{\cos^2(x-\alpha)}=\frac{1}{5}\int\frac{d[\sin(x-\alpha)]}{1-\sin^2(x-\alpha)}.$$

(bản chất đến đây các bạn dùng phép đặt ẩn phụ $t=\sin(x-\alpha)$)

$$=\frac{-1}{5}\int\frac{d[\sin(x-\alpha)]}{[\sin(x-\alpha)+1]\cdot[\sin(x-\alpha)-1]}$$

$$=\frac{-1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin(x-\alpha)-1}{\sin(x-\alpha)+1}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\sin(x-\alpha)+1}{\sin(x+\alpha)-1}\right|+C$$

j) $\int\frac{(3-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=3\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}+C.$

k) Đặt $t=x+2+\sqrt{x^2+4x+5}$

$$\Rightarrow\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=\frac{(x^2+4x+5)-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}=\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2).$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\ x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Tích phân trở thành:

$$\int\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{1+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\int\frac{t^2+1}{t(t+1)^2}dt=\int\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{(t+1)^2}\right]dt=\ln|t|+\frac{2}{t+1}+C.$$

Thay trở lại $t=x+2+\sqrt{x^2+4x+5}$, ta có:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+4x+5}}=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+\frac{2}{x+3+\sqrt{x^2+4x+5}}+C.$$

Đến đây là đạt yêu cầu rồi. Nhưng bạn nào tinh ý thì có thể phá dấu trị tuyệt đối:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+4x+5}}=\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+\frac{2}{x+3+\sqrt{x^2+4x+5}}+C.$$

(vì $x+2+\sqrt{x^2+4x+5}=x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}>x+2+|x+2|=0$)

l) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}=\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x^2-2x-1}}dx$

$$=\int\frac{d\left(x^2-2x-1\right)}{2\sqrt{x^2-2x-1}}+2\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-2}}$$

$$=\sqrt{x^2-2x-1}+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$$

Chú ý: Công thức được sử dụng: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$.

Bài 51.

Tính các tích phân:

a) $\int\frac{x^4}{x^{10}-1}dx$

b) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$

c) $\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$

d) $\int\sin^{n-1}x\sin\left[(n+1)x\right]dx\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

e) $\int e^{-2x}\cos 3x\,dx$

h) $\int\arcsin^2 x\,dx$

a) $\int\frac{x^4}{x^{10}-1}dx=\frac{1}{5}\int\frac{d\left(x^5\right)}{\left(x^5\right)^2-1}=\frac{1}{5}\int\frac{d\left(x^5\right)}{\left(x^5-1\right)\left(x^5+1\right)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^5-1}{x^5+1}\right|+C.$

(bản chất là ta dùng phép đặt $t=x^5$ trong bài giải trên).

b) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx=\int\sqrt{-x^2+3x-2}\left(x-\frac{3}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$

$$=\frac{-1}{2}\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,d\left(-x^2+3x-2\right)+\frac{3}{2}\int\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(-x^2+3x-2\right)^3}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{x-\frac{3}{2}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{1/4}{2}\arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{1/2}\right]+C$$

$$=\frac{-1}{3}\sqrt{\left(-x^2+3x-2\right)^3}+\frac{6x-9}{8}\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{3}{16}\arcsin(2x-3)+C$$

c) Biến đổi: $\left(x^2+2x+5\right)^2=\left[(x+1)^2+4\right]^2$.

Đặt $x+1=2\tan u\Rightarrow dx=2\left(1+\tan^2 u\right)du$. Tích phân trở thành:

$$\int \frac{2\left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u}{\left(4\tan^2 u+4\right)^2}=\frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2 u}=\int \frac{\cos^2 u}{8}\mathrm{d}u=\int \frac{1+\cos 2u}{16}\mathrm{d}u=\frac{u}{16}+\frac{\sin 2u}{32}+C.$$

Nhớ lại biểu diễn: $\sin 2u=\dfrac{2\tan u}{1+\tan^2 u}\xrightarrow{x+1=2\tan u}\dfrac{x+1}{1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}$.

Với phép đặt $x+1=2\tan u \Leftrightarrow u=k\pi+\arctan\dfrac{x+1}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Do C là hằng số nên:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+2x+5\right)^2}=\frac{1}{16}\left(k\pi+\arctan\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{32}\cdot\frac{x+1}{1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}+C$$

$$=\frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)}+\frac{1}{16}\arctan\frac{x+1}{2}+D\quad\left(\text{với } D=C+\frac{k\pi}{16}\right)$$

<u>*Chú ý:*</u> Với các phép đổi biến các hàm số tuần hoàn, chẳng hạn $x=\tan u$ hay $x=\sin u,\ldots$ các bạn đừng nghĩ rằng mình sẽ có tương ứng $u=\arctan x$ hay $u=\arcsin x,\ldots$ Điều này còn phụ thuộc vào tập giá trị của u mà các bạn chọn. Bài giải trên chỉ nhắc nhở các bạn điều đó, lúc đổi biến dạng $x+a=f\left(u\right)$ (với $f\left(u\right)$ là hàm tuần hoàn) $\to$ hãy biết chọn điều kiện phù hợp cho u (nếu cần).

Ví dụ với bài giải trên, ta có thể đặt điều kiện $u\in\left(\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Lúc đó $u=\arctan\dfrac{x+1}{2}$, nên có thể thay trở lại nguyên hàm với u vừa tính được.

Tương tự cho phép đổi biến $x=\cos u$, các bạn có thể đặt điều kiện là $u\in\left[0,\ \pi\right]$. Lúc này ta có $u=\arccos x$.

Nếu đổi biến $x=\sin u$ thì điều kiện có thể là $u\in\left[\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]\to$ ta có $u=\arcsin x$.

<u>*Cách giải khác:*</u> Đặt $t=x+1$, tích phân trở thành:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{1}{4}\int \frac{\left(t^2+4\right)-t^2}{\left(t^2+4\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t^2+4}-\frac{t^2}{\left(t^2+4\right)^2}\right]\mathrm{d}t$$

Xét $\displaystyle\int \frac{t^2}{\left(t^2+4\right)^2}\mathrm{d}t=\int t\cdot\frac{t}{\left(t^2+4\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{\mathrm{d}\left(t^2+4\right)}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\left(\frac{-1}{t^2+4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(t\cdot\frac{-1}{t^2+4}-\int\frac{-1}{t^2+4}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-t}{t^2+4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\right)+C_1$$

Do đó: $\int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+4)-t^2}{(t^2+4)^2}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-t}{t^2+4} + \arctan\frac{t}{2}\right)\right] + C_2$

$= \frac{1}{16}\arctan\frac{t}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{t}{t^2+4} + C_2$. Việc còn lại là "trả lại tên cho x".

d) $\int \sin^{n-1} x \sin(nx+x)dx = \int \sin^{n-1} x[\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x]dx$

$= \int\left[\sin(nx)\sin^{n-1} x\cos x + \cos(nx)\sin^n x\right]dx$

$= \frac{1}{n}\int\left[\sin(nx).n\sin^{n-1} x\cos x + n\cos(nx).\sin^n x\right]dx$

$= \frac{1}{n}\int\left[\sin(nx).(\sin^n x)' + (\sin nx)'.\sin^n x\right]dx = \frac{1}{n}\sin(nx).\sin^n x + C_2$

e) $I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = \frac{-1}{2}\int \cos 3x d\left(e^{-2x}\right) = \frac{-1}{2}\cos 3x.e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}d(\cos 3x)$

$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{2}\int e^{-2x}\sin 3x dx = \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int \sin 3x d\left(e^{-2x}\right)$

$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\left[\sin 3x.e^{-2x} - \int e^{-2x}d(\sin 3x)\right]$

$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x - \frac{3}{4}\int e^{-2x}.3\cos 3x dx$

$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x dx$

$\Rightarrow I = \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I \Rightarrow I = \frac{e^{-2x}(3\sin 3x - 2\cos 3x)}{13} + C.$

f) $\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x - \int x\cdot\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x\cdot\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x d\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$= x\arcsin^2 x + 2\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$

Bài 52.
Lập công thức truy hồi tính $I_n \quad (n\in\mathbb{N})$:

a) $I_n = \int x^n e^x dx$ **b)** $I_n = \int \sin^n x dx$ **c)** $I_n = \int\frac{dx}{\cos^n x}$

a) $I_0 = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$

$$I_n = \int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\left(e^x\right) = x^n e^x - \int e^x \mathrm{d}\left(x^n\right) = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ công thức truy hồi cần tìm là: $\begin{cases} I_0 = e^x + C \\ I_n = x^n e^x - nI_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

b) $I_0 = \int \mathrm{d}x = x + C_0.$

+) $I_1 = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C_1.$

+) Với $n \geq 2,$ ta có:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x \mathrm{d}x = \int \sin^{n-1} x.\sin x \mathrm{d}x = \int \sin^{n-1} x.\mathrm{d}(-\cos x) \\ &= \sin^{n-1} x.(-\cos x) - \int (-\cos x)\mathrm{d}\left(\sin^{n-1} x\right) \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x.(n-1)\cos x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Suy ra: $I_n = -\sin^{n-1}\cos x + (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \Rightarrow I_n = \frac{-1}{n}\sin^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$

Vậy, công thức truy hồi cần tìm là: $\begin{cases} I_0 = x + C_0,\ I_1 = -\cos x + C_1 \\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n}\sin^{n-1}\cos x, \forall n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

c) $I_0 = \int \mathrm{d}x = x + C_0.$

+) $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C_1.$

+) Với $n \geq 2,$ ta có:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x}\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \frac{1}{\cos^{n-2} x} \cdot \tan x - \int \tan x \mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos^{n-2} x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - \int \tan x \cdot (2-n) \cdot \cos^{1-n} x \cdot (-\sin x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + (2-n)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x}\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + (2-n)\int \left(\frac{1}{\cos^n x} - \frac{1}{\cos^{n-2} x}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Suy ra: $I_n = \dfrac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + (2-n)\left(I_n - I_{n-2}\right) \Rightarrow I_n = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \forall n \ge 2.$

Vậy, công thức truy hồi cần tìm là: $\begin{cases} I_0 = x + C_0,\ I_1 = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C_1 \\ I_n = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \forall n \ge 2,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

2.2. Tích phân xác định:

Bài 53.
Tính các đạo hàm:

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ **b)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ **c)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot e^{y^2} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\cdot e^{x^2} = 0.e^{y^2} - 1.e^{x^2} = -e^{x^2}$ (coi y là tham số $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$).

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\cdot e^{y^2} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot e^{x^2} = 1.e^{y^2} - 0.e^{x^2} = e^{y^2}.$

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(x^3\right)^4}} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^4}}$

$= \dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$

Bài 54.
Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} + \dfrac{1}{n\alpha+2\beta} + \ldots + \dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$ $(\alpha,\ \beta > 0)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right).$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} + \dfrac{1}{n\alpha+2\beta} + \ldots + \dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\alpha+\beta\cdot\dfrac{0}{n}} + \dfrac{1}{\alpha+\beta\cdot\dfrac{1}{n}} + \dfrac{1}{\alpha+\beta\cdot\dfrac{2}{n}} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha+\beta\cdot\dfrac{n-1}{n}}\right]$

$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, với $f(x) = \dfrac{1}{\alpha + \beta x}$ là làm liên tục, khả tích trên $[0,\ 1]$ (vì $\alpha,\ \beta > 0$).

$$= \int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\mathrm{d}x = \left.\frac{\ln(\alpha + \beta x)}{\beta}\right|_0^1 = \frac{\ln(\alpha+\beta) - \ln\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$

$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (với $f(x) = \sqrt{1+x}$ là làm liên tục, khả tích trên $[0,\ 1]$).

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

Bài 55.
Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^{x} (\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\int_0^{x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^{x} e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$

a) Khi $x \to 0^+$ thì $\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t \to 0^+$ và $\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t \to 0^+$.

Áp dụng duy tắc L'Hospital, ta có:

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\sin(\tan x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \cos^3 x.\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}} \overset{\text{khai triển Maclaurin}}{=} \lim_{x\to 0^+} \cos^3 x.\sqrt{\frac{\tan\left[x + o\left(x^2\right)\right]}{\sin\left[x + o\left(x^2\right)\right]}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \cos^3 x.\sqrt{\frac{x + o\left(x^2\right)}{x + o\left(x^2\right)}} = \lim_{x\to 0^+} \cos^3 x.\sqrt{\frac{x}{x}} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

Khi $x\to+\infty$ thì $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}\to+\infty\\ \int\limits_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t\to+\infty\end{cases}$ (do $\lim\limits_{t\to+\infty}(\arctan t)^2=\dfrac{\pi^2}{4}>0$).

Do đó ta có thể áp dụng được quy tắc L'Hospital:

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{1}=\frac{\pi^2}{4}\quad\left(\text{vì }\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1\right)$$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t=+\infty$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có:

$$L_3=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2\right]}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}\cdot 2\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(ta áp dụng được L'Hospital lần thứ 2 vì có $\lim\limits_{x\to+\infty}2\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2}=+\infty$).

Bài 55.
Tính các tích phân:

a) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|(x+1)\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{1}^{e} (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin^2 x\cos x}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\cos(nx)\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}^*$

a) $$I_1=\int_{1/e}^{e}|\ln x|(x+1)\mathrm{d}x=\int_{1/e}^{1}|\ln x|(x+1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}|\ln x|(x+1)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{1/e}^{1}(x+1)\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}(x+1)\ln x\mathrm{d}x.$$

Tìm nguyên hàm: $\displaystyle\int(x+1)\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{d}(\ln x)$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x+C$$

$$I_1=-\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x\right]\Bigg|_{1/e}^{1}+\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x\right]\Bigg|_{1}^{e}$$

$$=-\left[\frac{-5}{4}+\left(\frac{3}{4e^2}+\frac{2}{e}\right)\right]+\left(\frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{2}{e}-\frac{3}{4e^2}+\frac{5}{2}$$

b) $$I_2=\int_{1}^{e}(x\ln x)^2\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{e}x^2\ln^2 x\mathrm{d}x=\int_{1}^{e}\ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Bigg|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{x^3}{3}\cdot\mathrm{d}\left(\ln^2 x\right)$$

$$=\frac{e^3}{3}-\int_{1}^{e}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\ln x\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}-\int_{1}^{e}\frac{2x^2}{3}\ln x\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}-\int_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{2x^3}{9}\right)$$

$$=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{2x^3}{9}\ln x\right)\Bigg|_{1}^{e}+\int_{1}^{e}\frac{2x^3}{9}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{e^3}{3}-\frac{2e^3}{9}+\int_{1}^{e}\frac{2x^3}{9}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^3}{9}+\left(\frac{2x^3}{27}\right)\Bigg|_{1}^{e}=\frac{e^3}{9}+\frac{2e^3-2}{27}=\frac{5e^3-2}{27}$$

c) Xét tích phân $J_3=\int\frac{dx}{2+\cos x}$ *trên từng khoảng* $(k\pi-\pi,\ k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$. Ta có: $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ và $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Tích phân J_3 trở thành:

$$G_3=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{t^2+3}dt=2\int\frac{1}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

Thay trở lại $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow J_3=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C$. Ta có:

$$I_3=\int_0^{3\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{\pi}^{3\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$$

$$=\lim_{a\to\pi^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^a+\lim_{b\to\pi^+}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_b^{3\pi/2}$$

$$=\lim_{a\to\pi^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}-0\right)+\lim_{b\to\pi^+}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\pi}{6}-\arctan\frac{\tan\frac{b}{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\pi}{6}-\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$$

Vậy tích phân cần tính bằng $\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$.

d) $I_4=\int_0^1\frac{\sin^2x\cos x}{\left(1+\tan^2x\right)^2}dx=\int_0^1\frac{\sin^2x\cos x}{\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)^2}dx=\int_0^1\sin^2x\cos^5x\,dx=\int_0^1\sin^2x\cos^4x.\cos x\,dx$

Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x\,dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow u=0\\x=1\Rightarrow u=\sin 1\end{cases}$. Tích phân trở thành:

$$I_4=\int_0^{\sin 1}u^2\left(1-u^2\right)^2du=\int_0^{\sin 1}\left(u^6-2u^4+u^2\right)du=\left(\frac{u^7}{7}-\frac{2}{5}u^5+\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sin 1}$$

$$=\frac{\sin^7(1)}{7}-\frac{2\sin^5(1)}{5}+\frac{\sin^3(1)}{3}.$$

e) $I_5=\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx=\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,d(x+1)$

$$=(x+1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3-\int_0^3(x+1)\,d\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3(x+1)\cdot\frac{\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}dx=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3\frac{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{1+x}}}dx$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{4\pi}{3}-\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^3=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

<u>*Lưu ý:*</u> Nếu bạn dùng tích phân từng phần như sau thì cũng sẽ ra đáp số:

$$I_5=\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int_0^3 x\,d\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$$

Sở dĩ tôi chọn $d(x+1)$ trong bài làm, là do tôi đã tính sẵn $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)}$ ngoài nháp, nên chọn $v=x+1$ để rút gọn đi phần $(x+1)$ có trong $du\to$ bài giải gọn hơn.

f) Đặt $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\cos(nx)\,dx$. Ta có: $I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$. Xét $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x.\cos x\cos(nx)\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\cdot\frac{\cos\left[(n-1)x\right]+\cos\left[(n+1)x\right]}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\cdot\cos\left[(n+1)x\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\cdot\cos\left[(n-1)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\cdot\left[\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x\right]dx+\frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\left[n\cos(nx).\cos^n x+\sin(nx).\left(-n\sin x\cos^{n-1}x\right)\right]dx+\frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\left[(\sin nx)'.\cos^n x+\sin(nx).(\cos^n x)'\right]dx+\frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$=\left.\frac{\sin nx\cdot\cos^n x}{2n}\right|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}I_{n-1}=0+\frac{1}{2}I_{n-1}=\frac{1}{2}I_{n-1}$$

Vậy, ta có: $\begin{cases} I(0)=\dfrac{\pi}{2} \\ I_n=\dfrac{1}{2}I_{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}\Rightarrow I_n=\dfrac{\pi}{2^{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Bài 57.

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,\ 1]$ thì:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(\sin x)dx$

Áp dụng tính các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

a) $f(x)$ liên tục trên $[0,\ 1]$ nên $f(\sin x)$ và $f(\cos x)$ khả tích trên $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$. Đổi biến $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; khi $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$. Ta có:

$$I=\int_{\pi/2}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\cdot(-dt)=\int_0^{\pi/2} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Xét $J=\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx$. Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\pi \\ x=\pi\Rightarrow t=0 \end{cases}$. Ta có:

$$J=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-dt)=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt$$

Tức là: $J = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - J \Rightarrow J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin t) dt.$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} x f(\sin t) dt = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin t) dt$, đây chính là điều phải chứng minh.

Áp dụng tính các tích phân:

1. Áp dụng đẳng thức ở câu **b**, với $f(x) = \frac{x}{2 - x^2}$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$.

$\Rightarrow f(\sin x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$. Ta có:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{-\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \frac{-\pi}{2} \arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

2. Áp dụng đẳng thức ở câu **a**, với $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{1 - x^2}}$ liên tục trên $[0, 1]$.

$$\Rightarrow f(\sin x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$ Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 58.
Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)\left(\int_a^b g^2(x) dx \right) \quad (\text{với } a < b)$$

(Bất đẳng thức Cauchy–Schwartz)

Với bất kỳ các hàm $f(x), g(x)$ thoả mãn đề bài, ta có:

$$(t f(x) + g(x))^2 \ge 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b (t f(x) + g(x))^2 dx \ge 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)t^2 + \left(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)t + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\ (*)$$

+) Nếu $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in (a,\, b) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$ thoả mãn bất đẳng thức đã cho.

+) Nếu $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \neq 0 \Rightarrow$ Vế trái **(*)** là một hàm bậc hai đối với biến *t*, lại có đa thức này không âm với mọi giá trị $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

Kết hợp hai trường hợp lại, ta có điều phải chứng minh.

2.3 Tích phân suy rộng

Bài 59.
Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau:

a) $\int_{-\infty}^{0} xe^x\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ **c)** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ **e)** $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$ **f)** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

a) Trước hết ta tính tích phân bất định:

$$\int xe^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(e^x) = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Suy ra:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 xe^x\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\Big[(x-1)e^x\Big]\Big|_A^0 = \lim_{A\to-\infty}\Big[-1-(A-1)e^A\Big]$$

$$= -1 + \lim_{A\to-\infty}\frac{1-A}{e^{-A}} \overset{(L)}{=} -1 + \lim_{A\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-A}} = -1+0 = -1$$

Do đó tích phân đã cho hội tụ, và $\int_{-\infty}^{0} xe^x\mathrm{d}x = -1.$

Chú ý: Khi đề bài gộp cả 2 yêu cầu:

1) Xét sự hội tụ.

2) Tính (trong trường hợp hội tụ).

Nếu ta đã "nhẩm" được tích phân đã cho hội tụ (sử dụng các tiêu chuẩn so sánh, tích phân,…) thì lúc đó ta có thể bắt tay vào việc tính tích phân luôn. Kết quả thu được một hằng số hữu hạn, thì rõ ràng điều đó cũng đã chứng minh được tích phân đã cho hội tụ.
Còn nếu ta "nhẩm" được tích phân đã cho phân kỳ, thì nên sử dụng các tiêu chuẩn so sánh, tích phân (nếu sử dụng được) để chứng minh nó phân kỳ luôn. Chứ không dại gì đi tính tích phân trong trường hợp tích phân phân kỳ, vì đa số các bài đều khó triển khai theo hướng này.

b) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}}_{J}+\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}}_{K}$. Lần lượt thực hiện tính:

+) Tính J. Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x\to+\infty\Rightarrow t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\end{cases}$

Tích phân trở thành:

$$J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 2t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt=\left(\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

+) Tính K. Có thể thực hiện tương tự trên, hoặc thực hiện phép đổi biến $u=-x$ để chứng minh $J=K$. Đổi biến $x=-u\Rightarrow dx=-du$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow u=0\\ x\to-\infty\Rightarrow u=+\infty\end{cases}$. Do đó:

$$K_3=\int\limits_{+\infty}^{0}\frac{-du}{\left((-u)^2+1\right)^2}=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{du}{\left(u^2+1\right)^2}=J_3=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=J+K=\frac{\pi}{2}$, điều này chứng tỏ tích phân đã cho hội tụ.

Chú ý:

– Có thể dùng tích phân từng phần (tương tự *Cách giải khác* ở bài **2e**) để tính tích phân.

– Tránh mắc sai lầm khi gặp 2 cận vô cực: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\to$ điều này cho kết quả đúng, nhưng về bản chất toán học thì không đúng.

c) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\underbrace{\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}_{J}+\underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}_{K}.$

Trước hết ta đi tính nguyên hàm:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C=\arcsin(2x-1)+C.$$

$$J=\lim_{A\to 0^+}\int_A^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{A\to 0^+}\left(\arcsin(2x-1)\right)\Big|_A^{1/2}=\lim_{A\to 0^+}\left(-\arcsin(2A-1)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$K=\lim_{B\to 1^-}\int_{1/2}^{B}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{B\to 1^-}\left(\arcsin(2x-1)\right)\Big|_{1/2}^{B}=\lim_{B\to 1^-}\left(\arcsin(2B-1)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Do đó, $I=J+K=\pi$, điều này chứng tỏ I hội tụ.

d) $I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\ln\left[\ln(x)\right]\Big|_2^A$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln(\ln A)-\ln(\ln 2)\right)=+\infty.$$

$\Rightarrow$ tích phân đã cho phân kỳ.

e) $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3x+2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{x^2+3x+2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right)\Big|_0^A=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{A+1}{A+2}\right|-\ln\frac{1}{2}\right)=\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

$\Rightarrow$ tích phân đã cho hội tụ.

f) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}dx}_{J}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx}_{K}$

J là tích phân xác định $\Rightarrow J$ hội tụ.

K là tích phân suy rộng có điểm bất thường $+\infty$.

Ta có: $\frac{x^2+1}{x^4+1}\overset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$, mà $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ hội tụ (do $\alpha=2>1$)

$\Rightarrow K$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vì J, K hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

J hội tụ nên: $J=\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\lim_{A\to 0^+}\int_A^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$$=\lim_{A\to 0^+}\int_A^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\lim_{A\to 0^+}\int_A^1 \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\lim_{A\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_A^1$$

$$=\lim_{A\to 0^+}\left(0-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{A-\frac{1}{A}}{\sqrt{2}}\right)=0-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\pi}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Với cách lấy nguyên hàm tương tự, ta có:

$$K=\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_1^B=\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{B-\frac{1}{B}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Vậy $I=J+K=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

<u>*Chú ý:*</u> Bạn nào không suy nghĩ được cách trên, thì có thể đưa về xử lý nhân tử:

$$x^4+1=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right).$$

Bài 60.

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

a) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ **b)** $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ **c)** $\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{\ln^3 x}$

d) $\int_0^1\frac{dx}{\tan x-x}$ **e)** $\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$ **f)** $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

g) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$ **h)** $\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}}dx$ **i)** $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}dx$ **j)** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$

Việc đặt tên cho tiêu chuẩn so sánh tích phân còn chưa được thống nhất. Có 2 trường phái chính: Chia ra tiêu chuẩn so sánh 1 và tiêu chuẩn so sánh 2, có nơi lại gọi là tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn so sánh giới hạn… Nói chung, các bài tập dưới đây chỉ gọi chung là "tiêu chuẩn so sánh", còn các bạn gọi nó cụ thể là gì thì hãy dựa vào thầy/cô các bạn đang dạy.

a) Đặt $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, chọn $g(x)=\dfrac{1}{x^{3/2}}$ là các hàm dương, liên tục trên $[1,\ +\infty)$.

Xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=0.$$

Mà $\int\limits_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ hội tụ (vì $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$)

$\Rightarrow\int\limits_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}>0$ liên tục trên $[1,\ +\infty)$. Điểm bất thường của tích phân là $+\infty$.

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}\overset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=\dfrac{1}{x^{3/2}}$, mà $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ hội tụ (vì $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$)

$\Rightarrow\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^3}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

c) Xét $f(x)=\dfrac{x}{\ln^3 x}$, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{3}=+\infty$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow$ tồn tại $N_0>2$ sao cho: $f(x)>10,\ \forall x>N_0$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{\ln^3 x} = \int_2^{N_0} \frac{x\mathrm{d}x}{\ln^3 x} + \int_{N_0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{\ln^3 x}.$$

Xét $J = \int_{N_0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{\ln^3 x}$. Ta có: $\frac{x}{\ln^3 x} > 10,\ \forall x > N_0$, mà $\int_{N_0}^{+\infty} 10\mathrm{d}x$ phân kỳ $\Rightarrow J$ phân kỳ

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{\ln^3 x}$ phân kỳ.

d) Nhận xét: $f(x) = \tan x - x$ đồng biến trên $(0, +\infty) \Rightarrow 0 = f(0) < f(x) \le f(1) < 2$.

Tích phân đã cho là tích phân suy rộng có điểm bất thường là $x = 0$.

Khi $x \to 0^+$, ta có: $\frac{1}{\tan x - x} = \frac{1}{\left[x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right] - x} \sim \frac{3}{x^3}$.

Mặt khác $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ phân kỳ (vì $\alpha = 3 \notin (0,\ 1)$) $\Rightarrow \int_0^1 \frac{3}{x^3}\mathrm{d}x$ phân kỳ

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\tan x - x}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh tích phân.

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^4}} \ge 0$ liên tục trên $[0,\ 1)$.

Điểm bất thường của tích phân suy rộng là $x = 1$.

Khi $x \to 1^-$, ta có: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)\left(1+x+x^2+x^3\right)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

Ta lại có $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\mathrm{d}x$ hội tụ (do $\alpha = \frac{1}{2} \in (0,\ 1)$)

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh tích phân.

f) $I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin x}} = I_1 + I_2$, trong đó: $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin x}}$ và $I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

+) Xét I_1. Ta có: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} > 0$, liên tục trên $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow I_1$ có điểm bất thường $x=0$. Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \overset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}}$, mà $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{1}{x^{1/3}}dx$ hội tụ (do $\alpha = \dfrac{1}{3} \in (0,1)$) $\Rightarrow I_1$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Xét I_2. Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} > 0$, liên tục trên $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$\Rightarrow I_2$ có điểm bất thường $x=\pi$. Ta có:

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin(\pi - x)}} \overset{x\to\pi^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi - x}} = \dfrac{1}{(\pi-x)^{1/3}}$, mà $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{1}{(\pi-x)^{1/3}}dx$ hội tụ (do $\alpha = \dfrac{1}{3} \in (0,\ 1)$) $\Rightarrow I_2$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vì I_1 và I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

g) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx = \underbrace{\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx}_{I_2}$

+) Xét I_1 là tích phân suy rộng, có duy nhất 1 điểm bất thường $x=0$.

Xét $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} > 0,\ \forall x \in (0,\ 1]$. Ta có:

$$f(x) \overset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{3x}{x\sqrt{x}} = \dfrac{3}{x^{1/2}}, \text{ mà } \int\limits_0^1 \dfrac{3}{x^{1/2}}dx \text{ hội tụ (do } \alpha = \dfrac{1}{2} < 1)$$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Xét I_2. Ta có: $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} > 0,\ \forall x \ge 1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{x^\alpha} = 0$ với $\alpha > 0$ tuỳ ý. Chọn $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Ta có: $0 < \ln(1+3x) < x^{1/3}$ khi $x \to +\infty$

$$\Rightarrow 0 < \dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} < \dfrac{x^{1/3}}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{7/6}} \text{ khi } x \to +\infty$$

mà $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{7/6}}dx$ hội tụ (do $\alpha = \dfrac{7}{6} > 1$)

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Do I_1 và I_2 cùng hội tụ, nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$ hội tụ.

<u>*Cách 2:*</u> Xét I_2.

Xét $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} > 0,\ \forall x \ge 1$ và $g(x) = \frac{1}{x^{7/6}} > 0,\ \forall x \ge 1$, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{7/6}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x^{1/3}} \quad \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^{2/3}}{1+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^{2/3}}{3x} = 0$$

mà $\int\limits_1^{+\infty} g(x) dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/6}} dx$ hội tụ (do $\alpha = \frac{7}{6} > 1$)

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x) dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

h) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx = \underbrace{\int\limits_0^{1} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx}_{I_2}$

+) Xét I_1 là tích phân suy rộng, có duy nhất 1 điểm bất thường $x = 0$.

Xét $f(x) = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}}$ liên tục trên $(0,\ 1]$.

Dùng khai triển Maclaurin, ta có: $x - \sin x \overset{x\to0^+}{\sim} \frac{x^3}{6}$. Ta có:

$$f(x) \overset{x\to0^+}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{6x^{1/2}} > 0,\ \forall x \in (0,\ 1], \text{ mà } \int\limits_0^1 \frac{1}{6x^{1/2}} dx \text{ hội tụ (do } \alpha = \frac{1}{3} < 1)$$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Xét I_2. Ta có $f(x) = \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}} \geq 0,\ \forall x \geq 1$ (vì $x - \sin x \geq 1 - \sin x \geq 0, \forall x \geq 1$)

Vì $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \sin x$ bị chặn, do đó:

$$f(x) = \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{x^{5/2}},\text{ mà } \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx \text{ hội tụ (do } \alpha = \frac{5}{2} > 1)$$

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy I_1 và I_2 cùng hội tụ, nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ hội tụ.

i) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx}_{I_2}$.

+) Xét I_1. Với $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} > 0$ là hàm liên tục trên $(0,\ 1] \Rightarrow$ tích phân I_1 có điểm bất thường $x = 0$.

Ta có: $f(x) \overset{x\to0^+}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{1/2}}$, mà $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ hội tụ (do $\alpha = \frac{1}{2} \in (0,\ 1)$)

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh tích phân.

+) Xét I_2. Với $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} > 0$ là hàm liên tục trên $[1,\ +\infty) \Rightarrow$ tích phân I_2 có điểm bất thường $x = 0$.

Ta có: $f(x) \overset{x\to0^+}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^3}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{3/2}}$, mà $\int\limits_0^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{3/2}} dx$ hội tụ (do $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh tích phân.

Vậy I_1, I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

j) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx}_{I_2}$

+) Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên **có thể coi** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ liên tục trên $[0,\ 1]$

$\Rightarrow I_1$ là tích phân xác định $\Rightarrow I_1$ hội tụ.

+) Xét tích phân I_2. Ta có: $F(A) = \int\limits_1^A \sin x\, dx = (-\cos x)\Big|_1^A = \cos 1 - \cos A$

$\Rightarrow |F(A)| = |\cos 1 - \cos A| \le |\cos 1| + |\cos A| < 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow F(A)$ bị chặn khi $A \to +\infty$

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet (do $\alpha = 1 > 0$)

Vậy, I_1 và I_2 hội tụ $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx$ hội tụ.

Bài 61.

Nếu $\int\limits_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ hay không?

Xét ví dụ $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx$.

Nếu $\int\limits_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì ta **không** suy ra được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ta chỉ ra một ví dụ:

Xét $I = \int\limits_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx$. Đặt $x = \sqrt{t}$ (do miền lấy tích phân có $x > 0$) $\Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2t^{1/2}} dt$

Do $\int\limits_1^{+\infty} \sin t dt$ bị chặn, và $\alpha = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow I$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet.

Như vậy $\int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ hội tụ, nhưng ta **không** có $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(x^2\right)=0$. Không khó khăn gì để chứng minh $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(x^2\right)$ không tồn tại bằng cách chọn hai dãy $a_k=\sqrt{k\pi}$ và $b_k=\sqrt{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$.

Bài 62.

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,\ +\infty)$ và $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$. Tích phân $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ có hội tụ không?

Xét trường hợp $A>0$. Vì $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Rightarrow$ tồn tại N_0 đủ lớn $\left(N_0>a\right)$ sao cho:

$$f(x)>\frac{A}{2},\ \forall x>N_0\ (*).$$

Ta có: $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{N_0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{N_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Xét tích phân $\int_{N_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, ta có so sánh (*), mà $\int_{N_0}^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x$ phân kỳ $\Rightarrow \int_{N_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ.

Với trường hợp $A<0$, ta chứng minh tương tự.

Tóm lại, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ.

2.4. Ứng dụng của tích phân xác định

Bài 63.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Parabol $y=x^2+4$ và đường thẳng $x-y+4=0$.

b) Đường cong $y=x^3$ và các đường $y=x,\ y=4x\ \ (x\geq 0)$.

c) Đường tròn $x^2+y^2=2x$ và parabol $y^2=x\ \ \left(y^2\leq x\right)$.

d) Đường $y^2=x^2-x^4$.

a) $x-y+4=0 \Leftrightarrow y=x+4$.

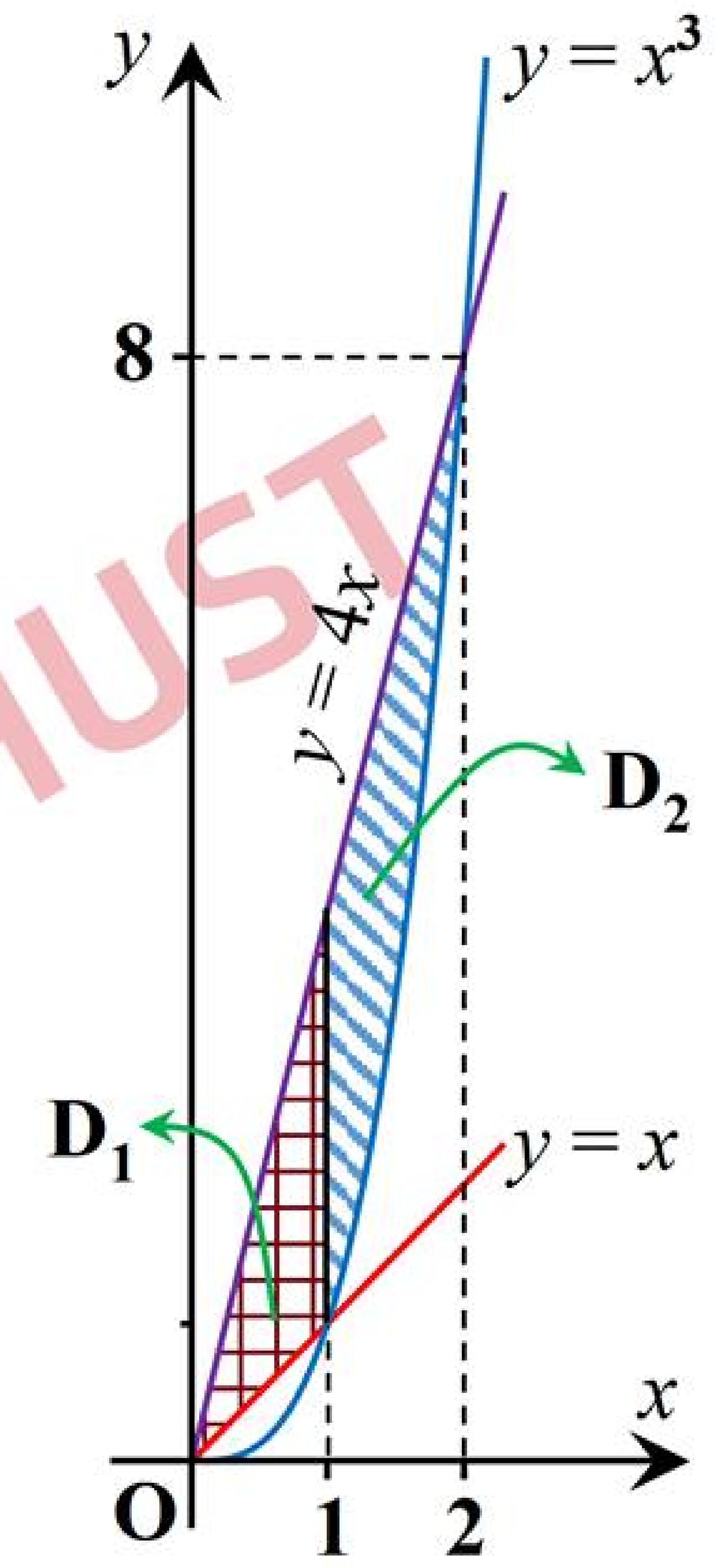
Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là: $x^2+4=x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

(Bạn nào vẽ hình ra, thì khỏi cần giải phương trình này.
P/s: Trên hình phải chú thích được toạ độ giao điểm nhé)

Trên $[0,\ 1]$ thì $x^2+4 \le x+4$, do đó diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int_0^1\left[(x+4)-\left(x^2+4\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\ \text{(đvdt)}.$$

b) Lưu ý rằng đề bài cho $x \ge 0$, ta có hình vẽ bên.
Cách hay sử dụng nhất của ta có lẽ là tính diện tích trong hệ toạ độ Oxy, mà muốn làm được điều này thì đa số các bạn sẽ chia miền để tính.
Hình phẳng đã cho được gạch chéo là miền $D=D_1\cup D_2$, được biểu diễn như hình vẽ.



Tính diện tích từng miền:

+) $S_{D_1}=\int_0^1(4x-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}$

+) $S_{D_2}=\int_1^2\left(4x-x^3\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{4}.$

$\Rightarrow S_D=S_{D_1}+S_{D_2}=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$ (đvdt).

__Cách giải khác:__ Đổi biến $\begin{cases} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$, thay vào phương trình $y=x^3$ ta được;

$$r(\varphi)\sin\varphi=\left[r(\varphi)\cos\varphi\right]^3 \Rightarrow r(\varphi)=\sqrt{\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}},\ \forall\varphi\in\left[\frac{\pi}{4},\ \arctan 4\right].$$

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi $r=r(\varphi),\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\arctan 2$.

Do đó diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\arctan 4} r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\arctan 4}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\arctan 4}\frac{-\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\arctan 4}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\tan^2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\arctan 4}=\frac{1}{4}\left[\tan^2(\arctan 4)-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(4^2-1^2\right)=\frac{15}{4}\ \text{(đvdt)}$$

c) Hình phẳng đã cho được chia thành 2 miền D_1 và D_2 như hình vẽ dưới.

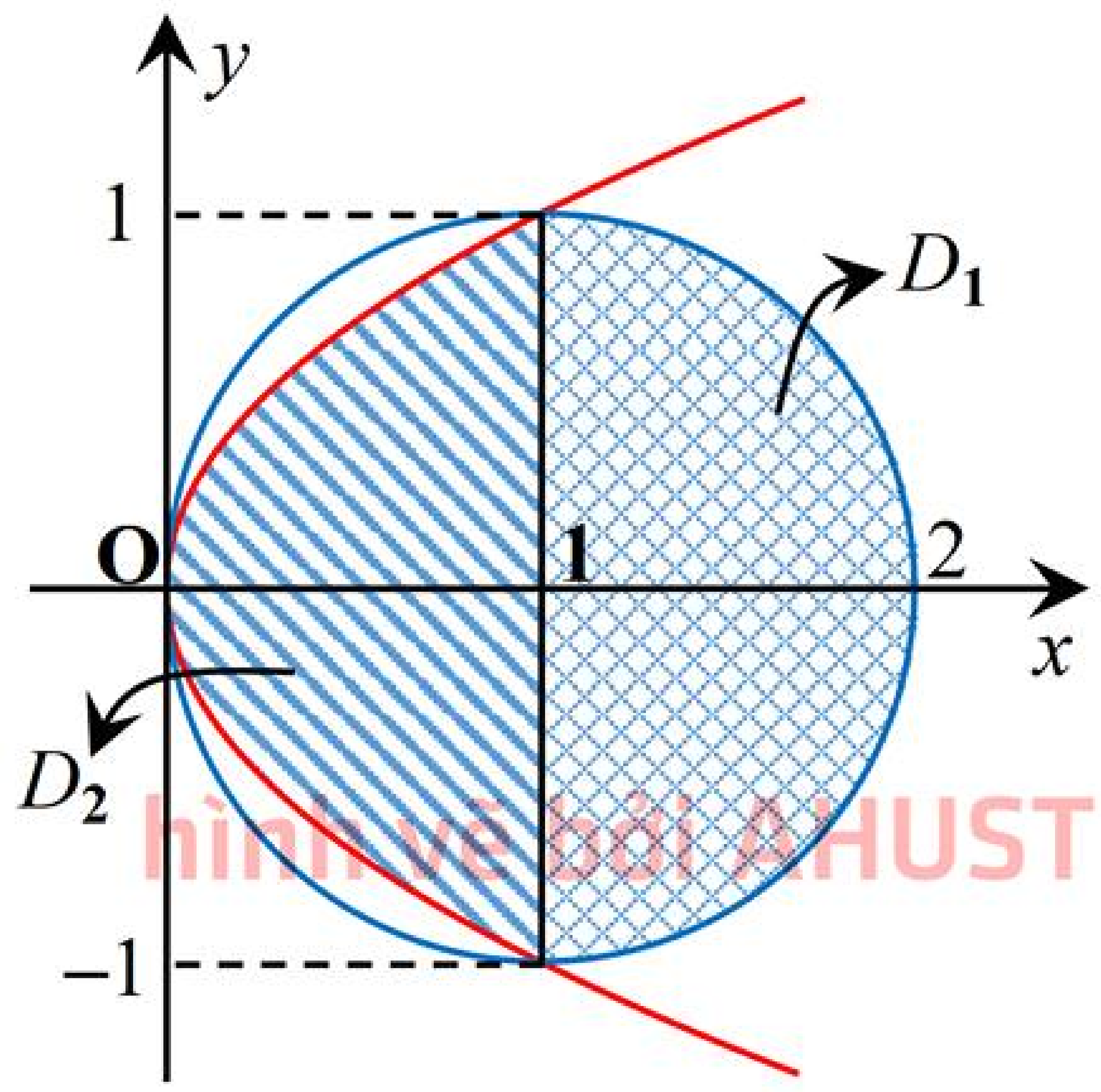
+) D_1 là nửa hình tròn bán kính $R = 1$ nên:

$$S_{D_1} = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}.$$

+) D_2 được giới hạn bởi $x = y^2$ và $x = 1$.

Theo hình vẽ, ta có:

$$S_{D_2} = \int_{-1}^{1}\left(1 - y^2\right)\mathrm{d}y = \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$



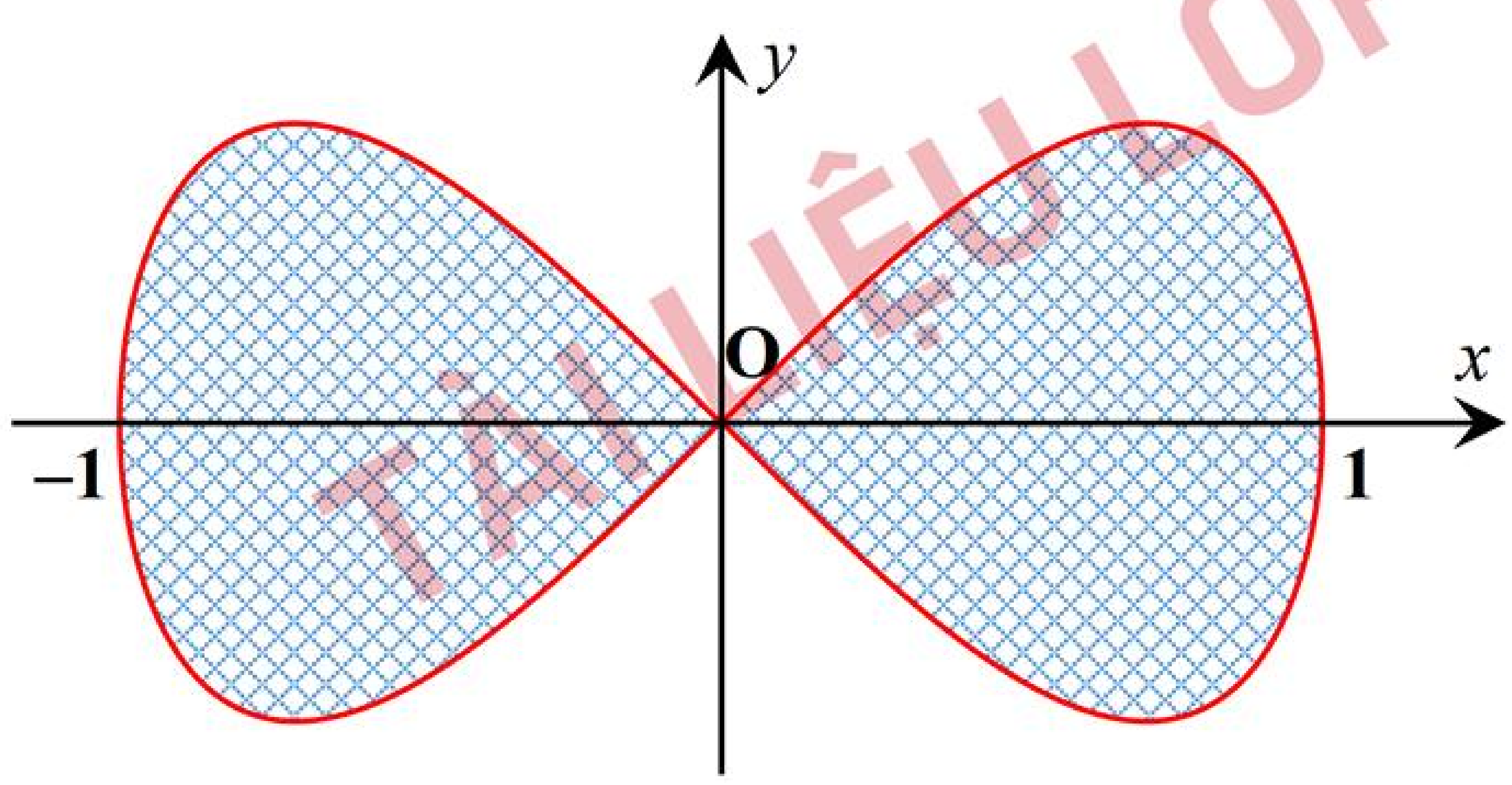
Vậy diện tích miền phẳng cần tính là $S = S_{D_1} + S_{D_2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$ (đvdt).

<u>*Cách giải khác:*</u> Có thể tính diện tích miền D mà không cần chia miền:

$$S = \int_{-1}^{1}\left[\left(1 + \sqrt{1 - y^2}\right) - y^2\right]\mathrm{d}y = \left(y + \frac{y\sqrt{1 - y^2}}{2} + \frac{\arcsin y}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

d) $y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - x^4 \ge 0 \Leftrightarrow x^2\left(1 - x^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1.$

Nhận xét rằng nếu điểm (x, y) thuộc đường đã cho thì $(\pm x, \pm y)$ cũng thuộc đường đã cho.



Do đó hình phẳng đã cho đối xứng qua trục tung, trục hoành.

Với $x \ge 0, y \ge 0$ thì đồ thị hàm số là đường: $y = \sqrt{x^2 - x^4}$ $\quad (0 \le x \le 1)$.

Dùng tính chất đối xứng, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.

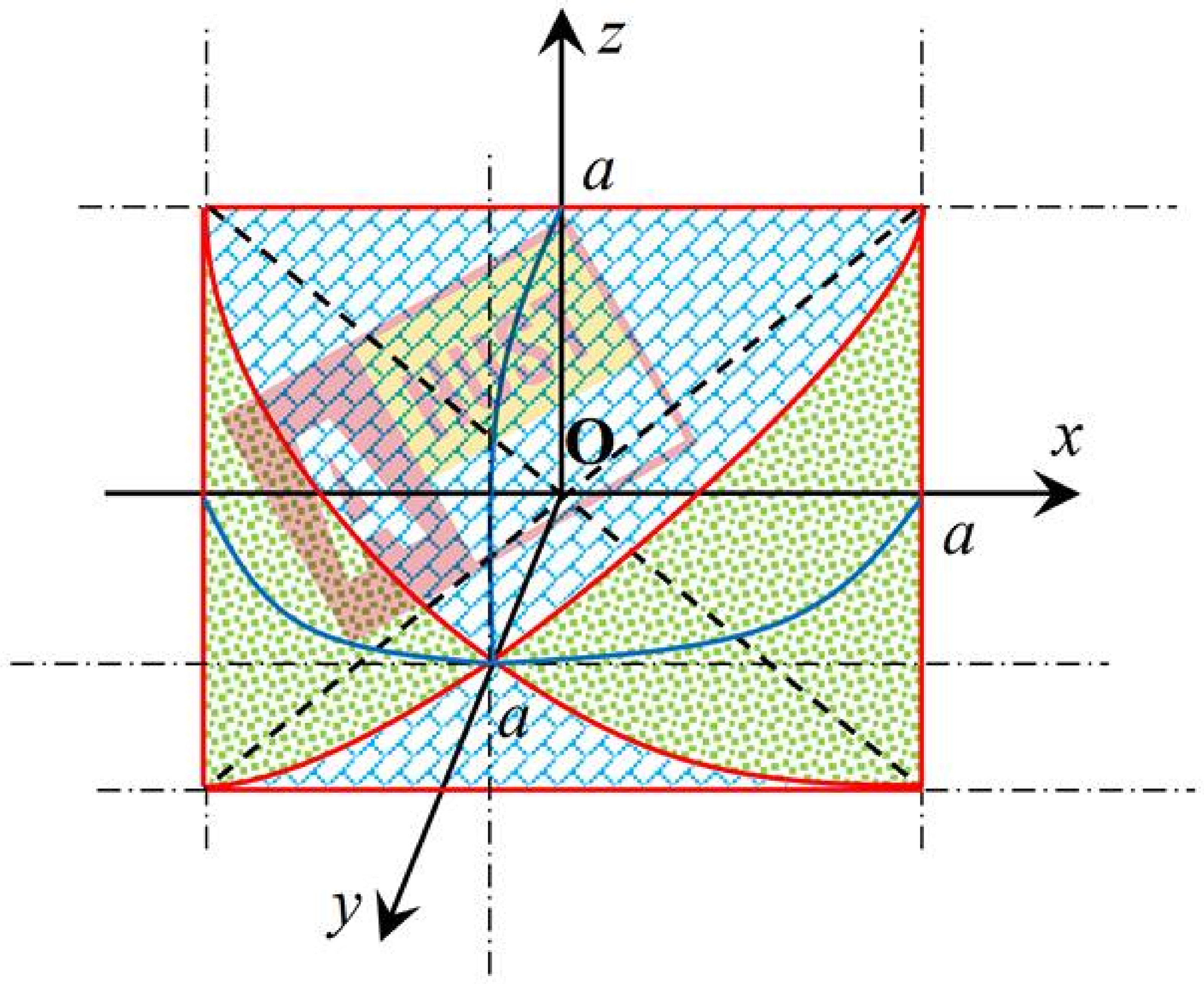
Gọi D là miền giới hạn bởi đường thẳng $y = 0$ và đường $y = \sqrt{x^2 - x^4}$.

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = 4S_D = 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= -2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}\left(1 - x^2\right) = \frac{-4}{3}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

Bài 64.

Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$ và $y^2 + z^2 \le a^2$.



Ta thấy nếu điểm $(x,\ y,\ z)$ thuộc vật thể đã cho, thì điểm $(x,\ -y,\ z)$ cũng thuộc vật thể. Do đó vật thể đã cho đối xứng qua (Oxz).
Không mất tính tổng quát, giả sử $a > 0$.
Hình vẽ bên, ta chỉ biểu diễn phần vật thể ứng với $y \ge 0$ để hình vẽ không bị rối thêm nữa.
Gọi vật thể đã cho là Q, thì nếu ta cắt Q bởi mặt phẳng $y = y_0$ $\left(y_0 \in [-a,\ a]\right)$ thì thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{a^2 - y_0^2}$ $\Rightarrow$ diện tích thiết diện:

$$S(y_0) = \left(2\sqrt{a^2 - y_0^2}\right)^2 = 4\left(a^2 - y_0^2\right)$$

Thể tích vật thể Q là:

$$V_Q = \int_{-a}^{a} S(y)\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} 4\left(a^2 - y^2\right)\mathrm{d}y = 4\left(a^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{16a^3}{3} \text{ (đvtt).}$$

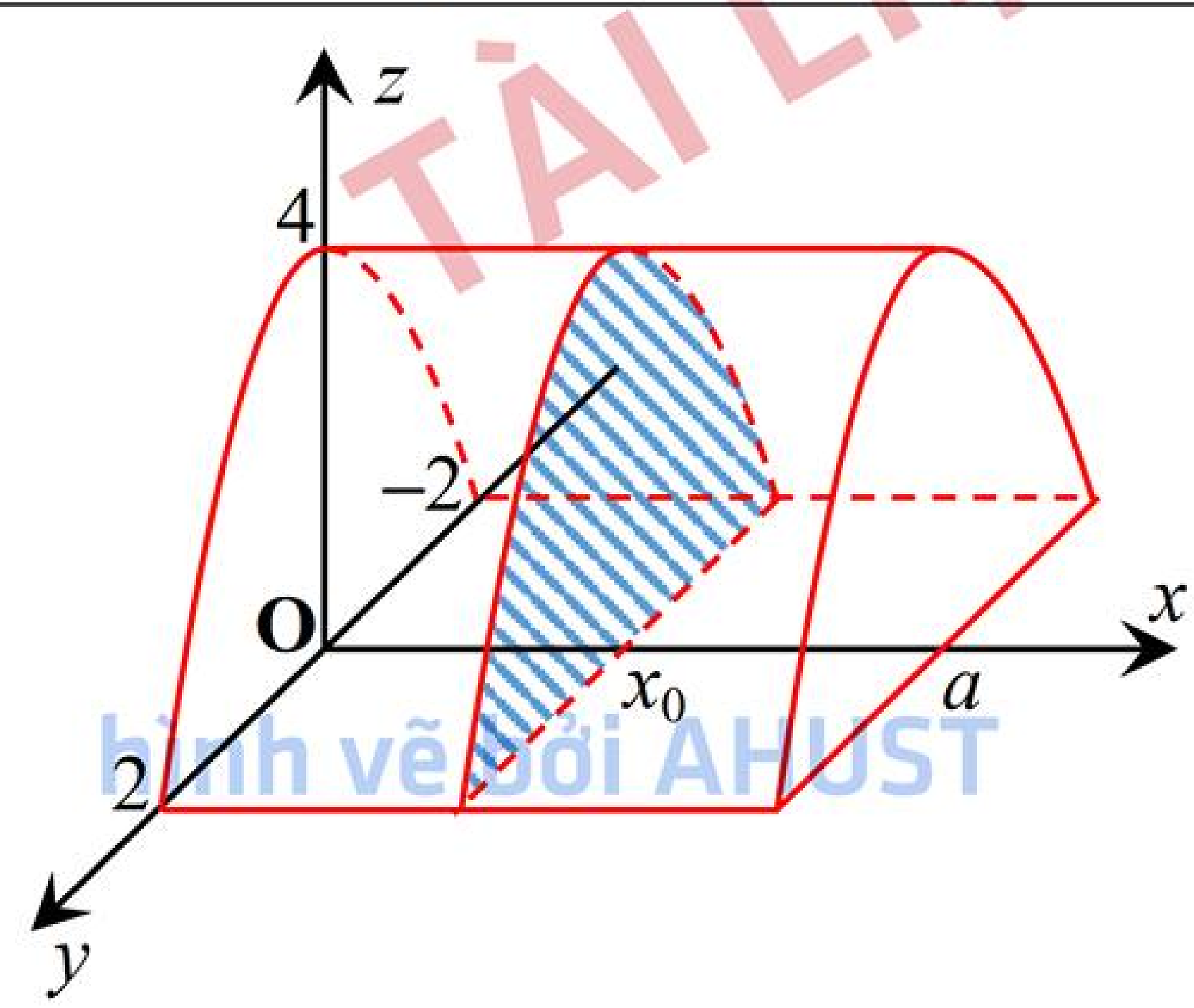
<u>*Chú ý:*</u> Các bạn nếu chưa hình dung được hình vẽ này, có thể tham khảo tại link:

bit.ly/GT1Giao2HinhTru

(link này phân biệt chữ thường, chữ hoa)

Bài 65.

Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng toạ độ $x = 0$, $z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ ($a \ne 0$).



Do tính đối xứng của mặt paraboloit $z = 4 - y^2$ qua mặt phẳng (Oyz), nên ta chỉ cần xét với trường hợp $a > 0$.
Cắt vật thể P đã cho bởi mặt phẳng $x = x_0$ (trong đó $x_0 \in [0,\ a]$) thì thiết diện thu được có diện tích:

$$S(x_0) = \int_{-2}^{2}\left[\left(4 - y^2\right) - 0\right]\mathrm{d}y = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

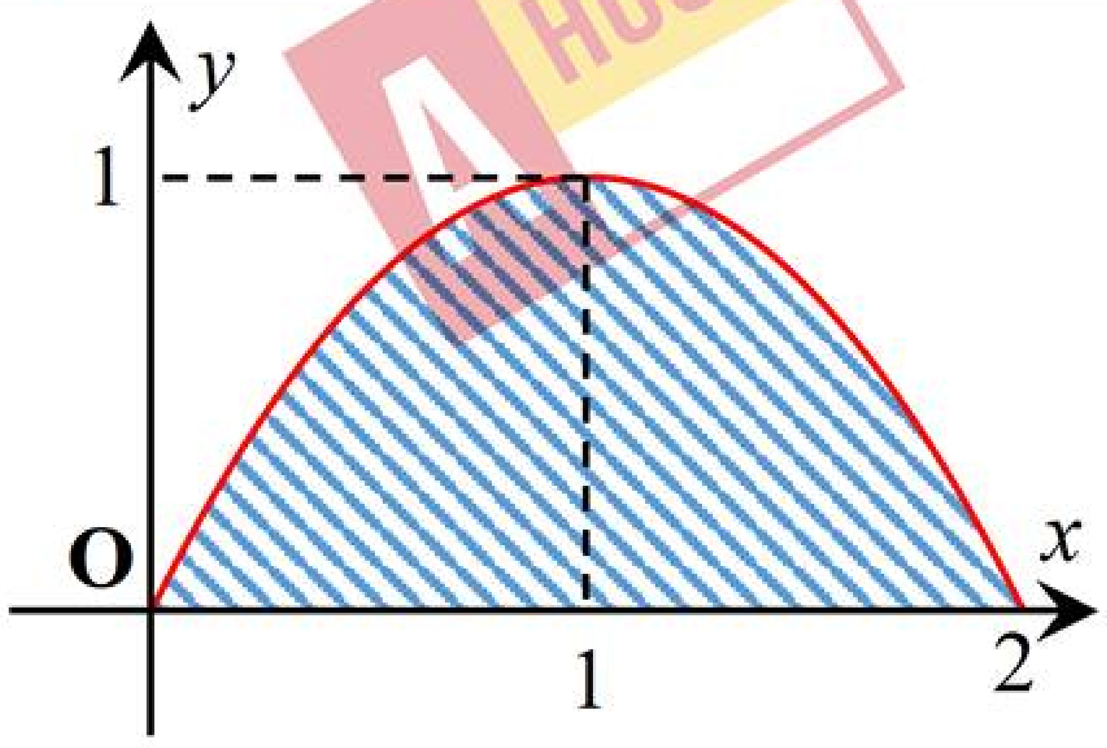
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể P là: $V_P = \int_0^a S(x_0)\mathrm{d}x = \dfrac{32a}{3}$ (đvtt).

Tổng quát, với a bất kỳ, $a \ne 0$ thì thể tích vật thể là $V = \dfrac{32|a|}{3}$ (đvtt).

Bài 66.

Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

a) Quanh trục Ox một vòng. **b)** Quanh trục Oy một vòng.



a)

$$V_1 = \pi\int_0^2 y^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{16\pi}{15} \quad \text{(đvtt)}$$

b) $V_2 = 2\pi\int_0^2 x.y(x)\,dx = 2\pi\int_0^2 x\left(2x - x^2\right)dx = 2\pi\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$ (đvtt).

<u>*Cách giải khác:*</u> Ở câu **b**, ta có thể tính V_2 bằng cách coi đó là vật thể thu được khi quay hình bị giới hạn bởi các đường $f(y) = 1 + \sqrt{1-y}$, $g(y) = 1 - \sqrt{1-y}$ $(0 \le y \le 1)$ quanh trục Oy. Do đó thể tích là: $V_2 = \pi\int_0^1 \left[f^2(y) - g^2(y)\right]dy = \pi\int_0^1 4\sqrt{1-y}\,dy = \frac{8\pi}{3}$.

Bài 67.

Tính độ dài đường cong:

a) $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2.

b) $\begin{cases} x = a\left[\cos t + \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right] \\ y = a\sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$ (với $a > 0$).

a) $y = \ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(e^x-1\right)$, $\forall x \in [1,\ 2]$. Ta có:

$$y'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{-2e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)} = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1},\ \forall x \in [1,\ 2].$$

Độ dài đường cong đã cho:

$$L_1 = \int_1^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}\,dx = \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-1\right)\mathrm{d}x=\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)-x\right)\Big|_1^2=\ln\left(e^2+1\right)-1 \text{ (đvđd)}$$

b) $x'(t)=a\left[-\sin t+\dfrac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}\cdot\dfrac{1}{\tan\dfrac{t}{2}}\right]=a\left(-\sin t+\dfrac{1}{\sin t}\right),\ \forall t\in\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

$y'(t)=a\cos t,\ \forall t\in\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right].$

Độ dài của đường cong đã cho là:

$$L_2=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\left[a\left(-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right)\right]^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t-2+\frac{1}{\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t=a\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}\,\mathrm{d}t=a\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t$$

$$=a\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=a\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin t}=a\ln(\sin t)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}=0-a\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=a\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\ \ (\text{đvđd})$$

Bài 68.

Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y=\sin x,\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox.

b) $y=\dfrac{1}{3}(1-x)^3,\ \ 0\le x\le 1$ quay quanh trục Ox.

a) Ta có: $y'=\cos x,\ \forall x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Diện tích mặt tròn xoay cần tính là:

$$S_1=2\pi\int_0^{\pi/2}|y(x)|\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin x\sqrt{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\pi\int_0^{\pi/2}2\sqrt{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}(\cos x)=-\pi\left(\cos x\sqrt{\cos^2 x+1}+\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1}\right|\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \text{ (đvdt)}$$

b) Ta có: $y'=-(x-1)^2,\ \forall x\in[0,\ 1]$. Diện tích mặt tròn xoay cần tính là:

$$S_2=2\pi\int_0^1|y(x)|\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3\sqrt{1+\left[-(1-x)^2\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-\pi}{6}\int_0^1 4(x-1)^3\sqrt{1+(x-1)^4}\,\mathrm{d}x=\frac{-\pi}{6}\int_0^1\sqrt{1+(x-1)^4}\,\mathrm{d}\left((x-1)^4\right)$$

$$=\frac{-\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+(x-1)^4}\right)^3\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{9}\pi \text{ (đvdt)}$$

Lưu ý:

– Trong công thức thì hãy lưu ý là $|y(x)|$ chứ không phải là $y(x)$.

– Các dạng bài tập tính **diện tích** mặt có dạng tròn xoay, thì các bạn **hãy cẩn thận** nếu chơi kiểu "cắt lát" mặt ra rồi tính chu vi mặt vừa nhận được. Nếu không hiểu bản chất thì bạn nên nhớ công thức, còn đừng dại mà làm kiểu như ví dụ dưới đây nhé (có rất nhiều bạn "hồn nhiên" làm trong bài thi vì không nhớ công thức).

Ví dụ muôn thở: Ứng dụng tích phân tính diện tích mặt cầu bán kính 1.

*Lý luận "**sai muôn thở**" để giải bài toán trên:*

Đặt cái hình cầu vào hệ toạ độ Oxyz, sao cho tâm cầu trùng với gốc toạ độ O.

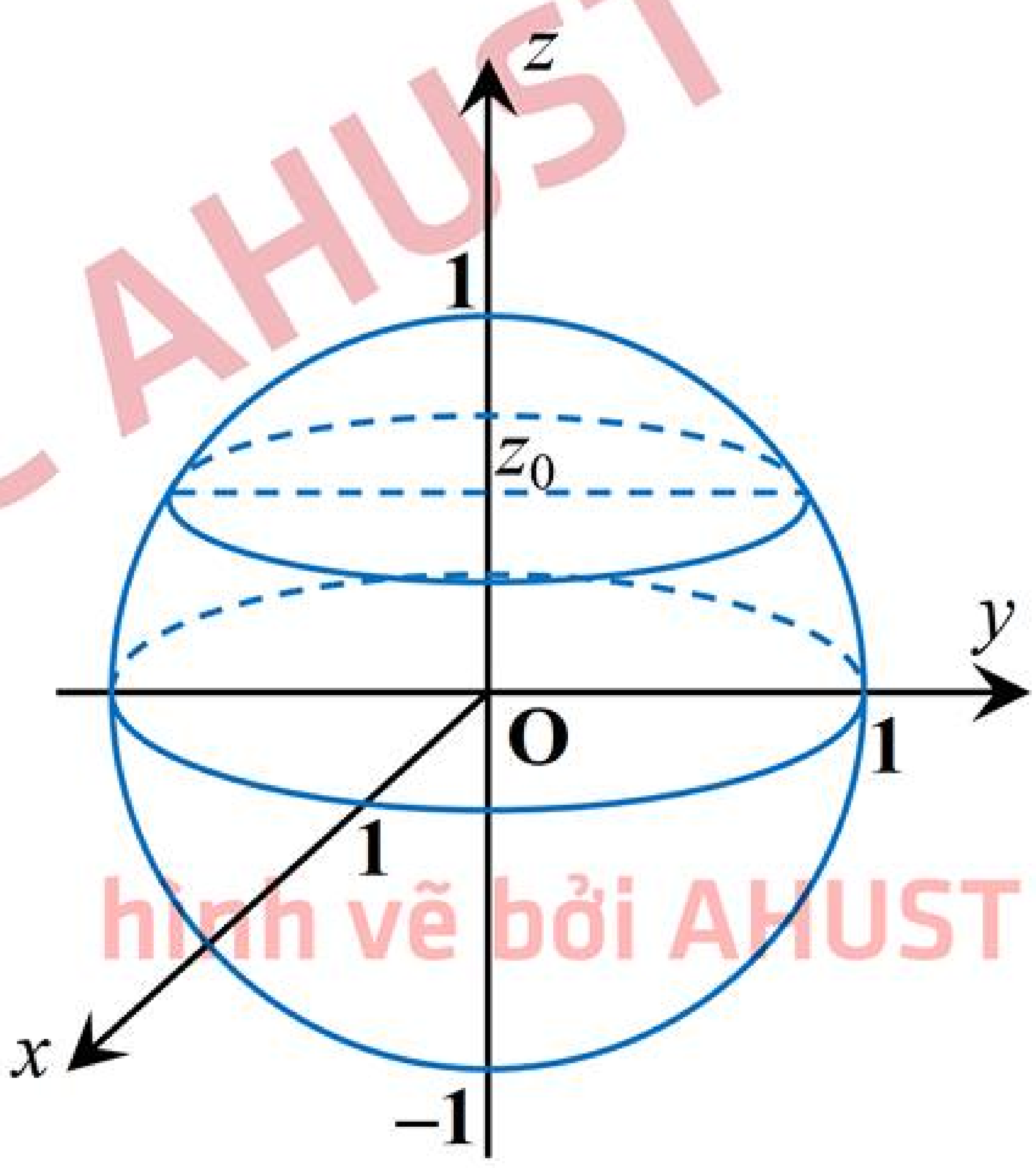
Mặt phẳng $z=z_0$ $(-1\le z_0\le 1)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là hình tròn có bán kính $\sqrt{1^2-z_0^2}$

$\Rightarrow$ chu vi hình tròn giao tuyến là $S(z_0)=2\pi\sqrt{1-z_0^2}$

$\Rightarrow$ diện tích mặt cầu:

$$\int_{-1}^{1}2\pi\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\pi\left(z\sqrt{1-z^2}+\arcsin z\right)\Big|_{-1}^{1}=\pi^2$$

(đvdt).



Bình loạn: Kết thúc lời giải này thì một số bạn sẽ thấy nó "hợp lý quá cơ" =)). Bây giờ là thời gian bạn nhớ lại giúp mình công thức tính diện tích mặt cầu chuẩn: $S=4\pi R^2$, vậy bài này kết quả là 4π thì mới đúng. Tóm lại, điều mình muốn nói ở đây là *đừng đưa tư duy "cắt lát" vào tính diện tích mặt cong, nếu bạn chưa hiểu rõ* nó. Lời giải trên bị sai là hiểu sai lượng dz trong tích phân.

Bạn có thể tính lại bằng công thức tính diện tích mặt tròn xoay, cũng sẽ ra đáp số 4π.

$$S=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=4\pi.$$

So sánh hai công thức thì các bạn biết là công thức ở lý luận trên thiếu ở chỗ nào rồi chứ? Tất nhiên, là mình chỉ lưu ý với việc tính diện tích mặt cong thôi nhé. Còn gặp bài tính thể tích thì các bạn cứ cắt lát như bình thường các bạn hay thao tác.

Chương 3: Hàm số nhiều biến số

3.1. Các khái niệm cơ bản

Bài 69.
Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ **b)** $z(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

c) $z(x,y)=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$ **d)** $z(x,y)=\sqrt{x\sin y}$

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2+y^2>1$.

Miền xác định của hàm số là $\mathbf{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2>1\right\}$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow (x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)\ge 0 \Leftrightarrow 1\le x^2+y^2\le 4$.

Miền xác định của hàm số là $\mathbf{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \left|\dfrac{y-1}{x}\right|\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ (y-1)^2\le x^2 \end{cases}$

Miền xác định của hàm số là $\mathbf{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (y-1)^2\le x^2,\ x\ne 0\right\}$.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x\sin y\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ \sin y\ge 0 \end{cases} \\ x=0 \\ \begin{cases} x<0 \\ \sin y\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 2k\pi\le y\le (2k+1)\pi \end{cases} \\ x=0 \\ \begin{cases} x<0 \\ (2k-1)\pi\le y\le 2k\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$ **(*)**

Miền xác định của hàm số là $\mathbf{D}=\mathbf{D}_1\cup\mathbf{D}_2\cup\mathbf{D}_3$, trong đó:

$$\mathbf{D}_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ 2k\pi\le y\le (2k+1)\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

$$\mathbf{D}_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x<0,\ (2k-1)\pi\le y\le 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

$$\mathbf{D}_3=\left\{(0,y) \,\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\}$$

Chú ý: Có thể làm gọn hơn kết quả trên:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ 2k\pi \le y \le (2k+1)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ 2k\pi \le y \le (2k+1)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ (2k-1)\pi \le y \le 2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ (2k-1)\pi \le y \le 2k\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ 2k\pi \le y \le (2k+1)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ (2k-1)\pi \le y \le 2k\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hoặc đơn giản có thể viết gọn lại: $\mathbf{D} = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x,\, y \text{ thoả mãn } (*) \right\}$.

Bài 70.

Tìm các giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x,\, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x \to 0,\, y \to 0)$

b) $f(x,\, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + 3xy}$, $(x \to \infty,\, y \to \infty)$

c) $f(x,\, y) = \dfrac{(x-1)^3 - (y-2)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, $(x \to 1,\, y \to 2)$

d) $f(x,\, y) = \dfrac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x \to 0,\, y \to 0)$

e) $f(x,\, y) = \dfrac{x\left(e^y - 1\right) - y\left(e^x - 1\right)}{x^2 + y^2}$, $(x \to 0,\, y \to 0)$

f) $f(x,\, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $(x \to 0,\, y \to 0)$

a) $f(x,\, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

+) Chọn $M_1(a,\, a)$. Khi $a \to 0$ thì $M_1(a,\, a) \to (0,\, 0)$.

Ta có: $f(M_1) = f(a,\, a) = \dfrac{a \cdot a}{a^2 + a^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f(M_1) \to \dfrac{1}{2}$ khi $M_1 \to (0,\, 0)$ **(1)**.

+) Chọn $M_2(b,\ 3b)$. Khi $b \to 0$ thì $M_2(b,\ 3b) \to (0,\ 0)$.

Ta có: $f(M_2) = f(b,\ 3b) = \dfrac{3b^2}{b^2+9b^2} = \dfrac{3}{10}$

$\Rightarrow f(M_2) \to \dfrac{3}{10}$ khi $M_2 \to (0,\ 0)$ **(2)**.

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow f(x,y)$ **không** cùng tiến tới một giá trị khi $(x,y) \to (0,\ 0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,\ 0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

b) $f(x,\ y) = \dfrac{y^2}{x^2+3xy}$.

+) Chọn $M_1(a,\ a)$. Khi $a \to \infty$ thì $M_1(a,\ a) \to (\infty,\ \infty)$.

Ta có: $f(M_1) = f(a,\ a) = \dfrac{a^2}{a^2+3a^2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow f(M_1) \to \dfrac{1}{4}$ khi $M_1 \to (0,\ 0)$ **(1)**.

+) Chọn $M_2(b,\ 2b)$. Khi $b \to \infty$ thì $M_2(b,\ 2b) \to (\infty,\ \infty)$.

Ta có: $f(M_2) = f(b,\ 2b) = \dfrac{(2b)^2}{b^2+6b^2} = \dfrac{4}{7}$

$\Rightarrow f(M_2) \to \dfrac{4}{7}$ khi $M_2 \to (\infty,\ \infty)$ **(2)**.

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow f(x,y)$ **không** cùng tiến tới một giá trị khi $(x,\ y) \to (\infty,\ \infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\ \infty)} \dfrac{y^2}{x^2+3xy}$ không tồn tại.

c) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\ 2)} f(x,\ y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\ 2)} \dfrac{(x-1)^3-(y-2)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2}$.

Đặt $\begin{cases} x-1=u \\ y-2=v \end{cases}$ thì khi $\begin{cases} x\to 1 \Rightarrow u \to 0 \\ y \to 2 \Rightarrow v \to 0 \end{cases}$. Giới hạn trở thành: $L = \lim\limits_{(u,v)\to(0,\ 0)} \dfrac{u^3-v^3}{u^2+v^2}$.

$$\frac{u^3-v^3}{u^2+v^2}-(u-v) = \frac{(u-v)\left(u^2+v^2+uv\right)}{u^2+v^2}-(u-v) = \frac{(u-v)uv}{u^2+v^2}$$

$\Rightarrow \dfrac{u^3-v^3}{u^2+v^2} = \dfrac{(u-v)uv}{u^2+v^2}+(u-v),\ \forall (u,\ v) \neq (0,\ 0)$.

Xét $0 \le \left|\dfrac{(u-v)uv}{u^2+v^2}\right| = |u-v| \cdot \dfrac{|uv|}{u^2+v^2} \le |u-v| \cdot \dfrac{\frac{u^2+v^2}{2}}{u^2+v^2} = \dfrac{|u-v|}{2}$,

Mà $\lim\limits_{(u,\,v)\to(0,\,0)} \dfrac{|u-v|}{2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(u,\,v)\to(0,\,0)} \left|\dfrac{(u-v)uv}{u^2+v^2}\right| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(u,\,v)\to(0,\,0)} \dfrac{(u-v)uv}{u^2+v^2} = 0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{(u,\,v)\to(0,\,0)} \dfrac{u^3-v^3}{u^2+v^2} = \lim\limits_{(u,\,v)\to(0,\,0)} \dfrac{(u-v)uv}{u^2+v^2} + \lim\limits_{(u,\,v)\to(0,\,0)} (u-v) = 0+0=0.$

Vậy $L=0$.

d) $L = \lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+y^2}$ thì khi $(x,\,y)\to(0,\,0)$ ta có $t\to 0^+$. Giới hạn trở thành:

$$L = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t^2} \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

e) $f(x,\,y) = \dfrac{x\left(e^y-1\right) - y\left(e^x-1\right)}{x^2+y^2}$

Áp dụng khai triển Maclaurin, ta có khai triển Taylor của $f(x,\,y)$ tại $(0,\,0)$ là:

$$f(x,\,y) = \frac{x\left(y+\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)\right) - y\left(x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\frac{xy^2}{2} - \frac{yx^2}{2} + x\cdot o\left(y^2\right) + y\cdot o\left(x^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{xy^2}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2} + \frac{x\cdot o\left(y^2\right)}{x^2+y^2} + \frac{x\cdot o\left(y^2\right)}{x^2+y^2}$$

Ta có: $0 \le \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |y| \cdot \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \le |y| \cdot \dfrac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \dfrac{|y|}{2}$, mà $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{|y|}{2} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = 0 \text{ (theo nguyên lý kẹp)}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot o\left(y^2\right)}{x^2+y^2} = 0.$$

Vì tính đối xứng của x, y nên: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\cdot o\left(x^2\right)}{x^2+y^2} = 0.$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

f) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

+) Chọn $M_1\left(a^2, a\right)$. Khi $a \to 0$ thì $M_1\left(a^2, a\right) \to (0, 0)$.

Ta có: $f\left(M_1\right) = f\left(a^2, a\right) = \dfrac{a^2\cdot a^2}{a^4+a^4} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f\left(M_1\right) \to \dfrac{1}{2}$ khi $M_1 \to (0, 0)$ **(1)**.

+) Chọn $M_2\left(-b^2, b\right)$. Khi $b \to 0$ thì $M_2(b, 3b) \to (0, 0)$.

Ta có: $f\left(M_2\right) = f\left(-b^2, b\right) = \dfrac{-b^2\cdot b^2}{\left(-b^2\right)^2+b^4} = \dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow f\left(M_2\right) \to \dfrac{-1}{2}$ khi $M_2 \to (0, 0)$ **(2)**.

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow f(x,y)$ **không** cùng tiến tới một giá trị khi $(x,y) \to (0, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ không tồn tại.}$$

Bài 71.

Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. **b)** $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

b) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0^2}{0^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}0=0.$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}.$

+) Chọn $M_1(a, a)$. Khi $a\to 0$ thì $M_1(a, a)\to(0, 0)$.

Ta có: $f(M_1)=f(a, a)=\dfrac{a^2}{a^2+a^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f(M_1)\to\dfrac{1}{2}$ khi $M_1\to(0, 0)$ **(1)**.

+) Chọn $M_2(b, 3b)$. Khi $b\to 0$ thì $M_2(b, 3b)\to(0, 0)$.

Ta có: $f(M_2)=f(b, 3b)=\dfrac{b^2}{b^2+9b^2}=\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow f(M_2)\to\dfrac{1}{10}$ khi $M_2\to(0, 0)$ **(2)**.

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow f(x,y)$ **không** cùng tiến tới một giá trị khi $(x,y)\to(0, 0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

3.2. Đạo hàm riêng và vi phân

Bài 72.

Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a) $z=z(x, y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

b) $z=z(x, y)=y^2\sin\dfrac{x}{y}$

c) $z=z(x, y)=\arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

d) $z=z(x, y)=x^{y^3}\quad(x>0)$

e) $u=u(x, y, z)=x^{y^z}\quad(x, y, z>0)$

f) $u=u(x, y, z)=e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

a) Tập xác định: $\mathbf{D}=\left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\, x+\sqrt{x^2+y^2}>0\right\}$. Các đạo hàm riêng của hàm số:

$$z'_x=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall(x, y)\in\mathbf{D}$$

$$z'_y = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2},\ \forall (x, y) \in \mathbf{D}$$

b) Tập xác định: $\mathbf{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \neq 0\right\}$.

$$z'_x = y^2 \cdot \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} = y\cos\frac{x}{y},\ \forall (x, y) \in \mathbf{D}$$

$$z'_y = 2y \cdot \sin\frac{x}{y} + y^2 \cdot \frac{-x}{y^2}\cos\frac{x}{y} = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y},\ \forall (x, y) \in \mathbf{D}$$

c) $z = z(x, y) = \arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} = \arctan\sqrt{1-\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}} = \arctan\sqrt{\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}-1}$

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{2y^2.2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}},\ \forall |x| > |y|.$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{-2x^2.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}},\ \forall |x| > |y|.$$

d) $z'_x = y^3 \cdot x^{y^3-1},\ \forall x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$

$$z'_y = x^{y^3}\ln x \cdot 3y^2 = 3y^2 x^{y^3}\ln x,\ \forall x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

e) $u'_x = y^z \cdot x^{y^z-1},\ \forall x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

$$u'_y = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot \left(z \cdot y^{z-1}\right) = x^{y^z} y^{z-1} z\ln x,\ \forall x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

$$u'_z = x^{y^z}\ln x \cdot \left(y^z \ln y\right) = x^{y^z} y^z \ln x \ln y,\ \forall x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

f) $u'_x = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}},\ \forall (x, y, z) \neq (0,\ 0,\ 0)$

$$u'_y = \frac{-2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}},\ \forall (x, y, z) \neq (0,\ 0,\ 0)$$

$$u'_z = \frac{-2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, \ \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Bài 73.
Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó sau:

a) $f(x, y) = \begin{cases} x \arctan\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2\right], & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) *Phần 1:* Khảo sát sự liên tục của $f(x, y)$:

Dễ thấy $f(x,y)$ liên tục tại các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. **(1)**

Ta có: $0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}|x|, \ \forall x \neq 0$. Lại có $f(0, y) = 0$, nên ta có đánh giá tổng quát:

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}|x|, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Ta lại có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\pi}{2}|x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = 0 = f(0, y_0), \ \forall y_0 \in \mathbb{R}$. **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Phần 2: Khảo sát sự tồn tại của các đạo hàm riêng.

– Các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ tồn tại tại các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. **(3)**

– Xét tại các điểm $(0, y_0)$ $(y_0 \in \mathbb{R})$, ta có:

$$f'_x(0, y_0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \arctan \frac{y_0^2}{x^2} - 0}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \arctan \frac{y_0^2}{x^2} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } y_0 = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{nếu } y_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$f'_y(0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(0, y) - f(0, y_0)}{y - 0} = \lim_{y \to y_0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

$\Rightarrow$ Các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ tồn tại $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b) *Phần 1:* Khảo sát sự liên tục của $f(x, y)$:

Dễ thấy $f(x,y)$ liên tục tại các điểm $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\neq 0$. **(1)**

Khai triển Taylor cho $f(x,y)$ tại lân cận điểm $(0,\ 0)$:

$$f(x, y)=\frac{x\left(y-\frac{y^3}{3!}+o\left(y^3\right)\right)-y\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{xy^3}{x^2+y^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3y}{x^2+y^2}+\frac{x\cdot o\left(y^3\right)}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot o\left(x^3\right)}{x^2+y^2},\ \forall(x, y)\neq(0,\ 0)$$

Ta có: $0\leq\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right|=y^2\cdot\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leq y^2\cdot\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{2}$, mà $\lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}\frac{y^2}{2}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right|=0$ (theo nguyên lý kẹp)

$\Rightarrow \lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}\frac{xy^3}{x^2+y^2}=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}\frac{x\cdot o\left(y^3\right)}{x^2+y^2}=0.$

Vì tính đối xứng của x, y nên: $\lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}\frac{x^3y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}\frac{y\cdot o\left(x^3\right)}{x^2+y^2}=0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x, y)\to(0,\ 0)}f(x, y)=0=f(0,\ 0)$ **(2)**.

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Phần 2: Khảo sát sự tồn tại của các đạo hàm riêng.

– Các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ tồn tại ở các điểm $(x, y)\neq(0,\ 0)$.

– Xét tại điểm $(0,\ 0)$:

$$f'_x(0,\ 0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f'_y(0,\ 0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,\ y)-f(0,\ 0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

Như vậy, $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ tồn tại với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Bài 74.

Giả sử $z = y f\left(x^2 - y^2\right)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{x} z'_x + \dfrac{1}{y} z'_y = \dfrac{z}{y^2}$.

Vì f là hàm khả vi nên:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x^2 - y^2\right)\right) = f'\left(x^2 - y^2\right) \cdot 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(x^2 - y^2\right)\right) = f'\left(x^2 - y^2\right) \cdot (-2y)$$

$$z'_x = y f'\left(x^2 - y^2\right) \cdot 2x$$

$$z'_y = 1 \cdot f\left(x^2 - y^2\right) + y \cdot f'\left(x^2 - y^2\right) \cdot (-2y) = f\left(x^2 - y^2\right) - 2y^2 f\left(x^2 - y^2\right)$$

Với $x, y \neq 0$ ta có:

$$\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = 2y f'\left(x^2 - y^2\right) + \frac{f\left(x^2 - y^2\right)}{y} - 2y f'\left(x^2 - y^2\right) = \frac{f\left(x^2 - y^2\right)}{y} = \frac{z}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{z}{y^2}, \ \forall x \neq 0, y \neq 0 \text{ (đpcm).}$$

Bài 75.

Tìm các đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây:

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = \ln\left(u^2 + v^2\right)$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$

c) $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$

a) $$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = 2u \cdot e^{u^2 - 2v^2} \cdot (-\sin x) + (-4v) e^{u^2 - 2v^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \left(-2\cos x \sin x - 4v \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) e^{u^2 - 2v^2} = (-\sin 2x - 4x) e^{\cos^2 x - 2\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = 2u \cdot e^{u^2 - 2v^2} \cdot 0 - 4e^{u^2 - 2v^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -4ye^{\cos^2 x - 2\left(x^2 + y^2\right)}$$

Chú ý: Cách trình bày trên chỉ gợi nhớ cho bạn công thức đạo hàm hàm hợp, trong trường hợp hàm nhiều biến. Bạn có thể thay *u*, *v* ngay từ đầu vào hàm *z* rồi lấy đạo hàm cũng ra kết quả.

b) $z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = \dfrac{2u}{u^2+v^2} \cdot y + \dfrac{2v}{u^2+v^2} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{2xy^2 + 2 \cdot \dfrac{x}{y^2}}{(xy)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \dfrac{2}{x}, \ \forall xy \neq 0.$

$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = \dfrac{2u \cdot x}{u^2+v^2} + \dfrac{2v}{u^2+v^2} \cdot \dfrac{-x}{y^2} = \dfrac{2x^2y - 2 \cdot \dfrac{x^2}{y^3}}{(xy)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \dfrac{2\left(y^4-1\right)}{y\left(y^4+1\right)}, \ \forall xy \neq 0.$

<u>*Cách giải khác:*</u> Thay vào từ đầu và rút gọn: $z = 2\ln|x| + \ln\left(y^4+1\right) - 2\ln|y|$. Biểu thức này lấy đạo hàm đơn giản hơn.

c) $z = \arcsin(x-y), \ x = 3t, \ y = 4t^3$

$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 + \dfrac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^2 = \dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}, \ \forall |x-y| < 1.$

Bài 76.
Cho f là hàm khả vi đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $\omega(x, t) = f(x-3t)$ thoả mãn phương trình truyền sóng: $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Đặt $u(x, t) = x - 3t$ thì $\omega(x, t) = f(u)$. Ta có:

$\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = f'(u) \cdot u'_x = f'(u) \cdot 1 = f'(x-3t)$

$\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = f'(u) \cdot u'_t = f'(u) \cdot (-3) = -3f'(x-3t)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(f'(x-3t)\Big) = 1 \cdot f''(x-3t) = f''(x-3t) \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(-3f'(x-3t)\Big) = -3 \cdot (-3) \cdot f''(x-3t) = 9f''(x-3t) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

Đây chính là đpcm.

Bài 77.
Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$

b) $z = \ln\left(\tan\dfrac{y}{x}\right)$

c) $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $u = x^{y^2 z}$

a) $dz = z'_x dx + z'_y dy = 2x\cos\left(x^2+y^2\right)dx + 2y\cos\left(x^2+y^2\right)dy.$

b) $dz = z'_x dx + z'_y dy = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}\cdot\dfrac{-y}{x^2}}{\tan\dfrac{y}{x}}dx + \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}\cdot\dfrac{1}{x}}{\tan\dfrac{y}{x}}dy = \dfrac{2(xdy - ydx)}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}.$

c) $dz = z'_x dx + z'_y dy = \dfrac{\dfrac{1\cdot(x-y)-1\cdot(x+y)}{(x-y)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}dx + \dfrac{\dfrac{1\cdot(x-y)-(-1)\cdot(x+y)}{(x-y)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}dy$

$= \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$

d) $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = y^2 z\cdot x^{y^2 z - 1}dx + x^{y^2 z}\ln x\cdot 2yzdy + x^{y^2 z}\ln x\cdot y^2 dz$

$= \left(\dfrac{y^2 z}{x}dx + 2yz\ln x dy + y^2\ln x dz\right)x^{y^2 z}$

Bài 78.
Ứng dụng vi phân, tính gần đúng:

a) $A = \sqrt[3]{(1{,}02)^2 + (0{,}05)^2}$

b) $B = \ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$

c) $C = \sqrt{(2{,}02)^3 + e^{0{,}03}}$

d) $D = (1{,}02)^{1{,}01}$

a) Xét hàm số $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$. Ta có:

$$\forall (x,y)\neq(0,0):\ f'_x(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}},\ f'_y(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$

Chọn $\begin{cases} x_0 = 1, & \Delta x = 0{,}02 \\ y_0 = 0, & \Delta y = 0{,}05 \end{cases}$. Áp dụng công thức tính gần đúng:

$A = \sqrt[3]{(1{,}02)^2 + (0{,}05)^2} = f\left(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y\right)$

$\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y$

$= f(1,\ 0) + f'_x(1,\ 0)\cdot 0{,}02 + f'_y(1,\ 0)\cdot 0{,}05 = 1 + \dfrac{2}{3}\cdot 0{,}02 + 0\cdot 0{,}05 \approx 1{,}01333.$

Vậy $A \approx 1{,}01333.$

b) Xét hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$. Ta có:

$$\forall x > 1,\ y > 0{,}5:\quad f'_x(x,y) = \frac{\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1},\quad f'_y(x,y) = \frac{\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{y^3}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}$$

Chọn $\begin{cases} x_0 = 1, & \Delta x = 0{,}03 \\ y_0 = 1, & \Delta y = -0{,}02 \end{cases}$. Áp dụng công thức tính gần đúng:

$B = \ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$

$\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y$

$= f(1,\ 1) + f'_x(1,\ 1)\cdot 0{,}03 + f'_y(1,\ 0)\cdot(-0{,}02) = 0 + \dfrac{1}{3}\cdot 0{,}03 + \dfrac{1}{4}\cdot(-0{,}02) \approx 0{,}005.$

Vậy $B \approx 0{,}005.$

c) Xét hàm số $f(x,\ y) = \sqrt{x^3 + e^y}$. Ta có:

$$f'_x(x,\ y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + e^y}},\ f'_y(x,\ y) = \frac{e^y}{2\sqrt{x^3 + e^y}},\ \forall x^3 + e^y > 0.$$

Chọn $\begin{cases} x_0 = 2, & \Delta x = 0{,}02 \\ y_0 = 0, & \Delta y = 0{,}03 \end{cases}$. Áp dụng công thức tính gần đúng:

$C = \sqrt{(2{,}02)^3 + e^{0{,}03}} = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$

$\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y$

$= f(2,\ 0) + f'_x(2,\ 0)\cdot 0{,}02 + f'_y(2,\ 0)\cdot 0{,}05 = 3 + 2\cdot 0{,}02 + \dfrac{1}{6}\cdot 0{,}03 = 3{,}045.$

Vậy $C \approx 3{,}045$.

d) Xét hàm số $f(x,\ y) = x^y$. Ta có: $f'_x(x,\ y) = yx^{y-1},\ f'_y(x,\ y) = x^y \ln x$

Chọn $\begin{cases} x_0 = 1, & \Delta x = 0{,}02 \\ y_0 = 1, & \Delta y = 0{,}01 \end{cases}$. Áp dụng công thức tính gần đúng:

$D = (1{,}02)^{1{,}01} = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y$

$= f(1,\ 1) + f'_x(1,\ 1)\cdot 0{,}02 + f'_y(1,\ 1)\cdot 0{,}01 = 1 + 1\cdot 0{,}02 + 0\cdot 0{,}01 = 1{,}02.$

Vậy $D \approx 1{,}02$.

Bài 79.

Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0{,}99;\ 0{,}02)$.

$f(0{,}99;\ 0{,}02). = f(1 - 0{,}01;\ 0 + 0{,}02)$. Chọn $\begin{cases} x_0 = 1, & \Delta x = -0{,}01 \\ y_0 = 0, & \Delta y = 0{,}02 \end{cases}$.

Đặt $F(x, y, z) = z - ye^{\frac{z}{x}}$. Ta có: $F'_x = \dfrac{yz}{x^2}e^{\frac{z}{x}}$, $F'_y = -e^{\frac{z}{x}}$, $F'_z = 1 - \dfrac{y}{x}e^{\frac{z}{x}}$.

Ứng với $x = 1$, $y = 0$ ta có: $z - 0.e^{\frac{z}{1}} = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow z(1;\ 0) = 0$. Gọi điểm $M(1,\ 0,\ 0)$.

$\Rightarrow F'_x(M) = 0, \quad F'_y(M) = -1, \quad F'_z(M) = 1$

$\Rightarrow f'_x(1;\ 0) = \dfrac{-F'_x(M)}{F'_z(M)} = \dfrac{0}{1} = 0, \quad f'_y(0;\ 1) = \dfrac{-F'_y(M)}{F'_z(M)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$\begin{aligned} f(0{,}99;\ 0{,}02) &= f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) \approx f(1;\ 0) + f'_x(1;\ 0)\cdot(-0{,}01) + f'_y(1;\ 0)\cdot 0{,}02 \\ &= 0 + 0\cdot(-0{,}01) + 1\cdot 0{,}02 \qquad (\text{vì } f(0;\ 1) = z(0;\ 1) = 0) \\ &= 0{,}02 \end{aligned}$$

Vậy $f(0{,}99;\ 0{,}02) \approx 0{,}02$.

Bài 80.

Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y'.

b) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y.

c) $\arctan\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$, tính y'.

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y.

a) Ta hiểu *a* ở đây là tham số. Đặt $F(x, y) = x^3y - y^3x - a^4$.

Ta có: $F'_x = 3x^2y - y^3$, $\quad F'_y = x^3 - 3y^2x$.

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-F'_x}{F'_y} = \frac{-(3x^2y - y^3)}{x^3 - 3y^2x} = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3y^2x}, \quad \forall x:\ x^3 \neq 3y^2x.$$

Cách giải khác: Với $y = y(x)$, ta có: $x^3 y(x) - y^3(x)\cdot x = a^4$.

Đạo hàm hai vế theo biến *x*, ta có:

$$\left[3x^2 y(x) + x^3 y'(x)\right] - \left[3y^2(x)\cdot y'(x)\cdot x + y^3(x)\cdot 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 3y^2(x)\cdot x\right) y'(x) = y^3(x) - 3x^2 y(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{y^3 - 3x^2 y}{x^3 - 3y^2 x},\ \forall x^3 \neq 3y^2 x.$$

b) Đặt $F(x, y, z) = e^z - z - y - x$.

Ta có: $F'_x = -1,\quad F'_y = -1,\quad F'_z = e^z - 1$.

Với mọi $z(x, y) \neq 0$, ta có: $z'_x = \dfrac{-F'_x}{F'_z} = \dfrac{1}{e^z - 1},\quad z'_y = \dfrac{-F'_y}{F'_z} = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

c) Đặt $F(x, y) = \arctan\dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y}{a}$.

$$\text{Ta có: } F'_x = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2},\quad F'_y = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-F'_x}{F'_y} = \frac{\frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}} = \left(\frac{a}{x+y}\right)^2,\quad \forall x \neq -y(x).$$

d) Đặt $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thì $F(x, y, z) = 0$ là phương trình xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Ta có: $F'_x = 3x^2 - 3yz,\quad F'_y = 3y^2 - 3xz,\quad F'_y = 3z^2 - 3xy$.

Với mọi $z^2 \neq xy$:

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z} = \frac{-\left(3x^2 - 3yz\right)}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},\quad z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z} = \frac{-\left(3y^2 - 3xz\right)}{3z^2 - 3xy} = \frac{y^2 - xz}{xy - z^2}$$

Bài 81.

Cho hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0;\ 1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0;\ 1)$.

Đặt $F(x, y, z) = 2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 - 3$.

Ta có: $F'_x = 4xy + 2xz$, $F'_y = 2x^2 + 8y$, $F'_z = x^2 + 3z^2$.

Ứng với $x = 0$, $y = 1$, thay vào phương trình ta có: $0 + 4 + 0 + z^3 = 3 \Leftrightarrow z = -1$.
Gọi điểm $M(0;\ 1;\ 1)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0;\ 1) = \frac{-F'_x(M)}{F'_z(M)} = \frac{0}{3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0;\ 1) = \frac{-F'_y(M)}{F'_z(M)} = \frac{-8}{3}.$$

Bài 82.

Cho $u = \dfrac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Đặt $F(x, y, z) = ze^z - xe^x - ye^y$.

Ta có: $F'_x = -(1+x)e^x$, $F'_y = -(1+y)e^y$, $F'_z = (1+z)e^z$.

Với $z(x, y) \neq -1$, ta có: $z'_x = \dfrac{-F'_x}{F'_z} = \dfrac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z}$, $\quad z'_y = \dfrac{-F'_y}{F'_z} = \dfrac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z}$.

$$u'_x = \frac{(1+z'_x)\cdot(y+z) - z'_x\cdot(x+z)}{(y+z)^2} = \frac{\left[1 + \dfrac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z}\right](y+z) - \dfrac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z}\cdot(x+z)}{(y+z)^2}$$

$$= \frac{(1+x)(y-x)e^{x-z} + (z+1)(y+z)}{(z+1)(y+z)^2}, \ \forall z \neq -1,\ y \neq -z.$$

$$u'_y = \frac{z'_y\cdot(y+z) - (1+z'_y)\cdot(x+z)}{(y+z)^2} = \frac{\dfrac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z}\cdot(y+z) - \left[1 + \dfrac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z}\right](x+z)}{(y+z)^2}$$

$$= \frac{(1+y)(y-x)e^{y-z} - (z+1)(x+z)}{(z+1)(y+z)^2}, \ \forall z \neq -1,\ y \neq -z.$$

Bài 83.

Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

Đạo 2 vế hàm theo x các phương trình trong hệ, ta có:

$$\begin{cases} 1+y'+z'=0 \\ 2x+2y\cdot y'+2z\cdot z'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z'=-1-y' \\ 2x+2y\cdot y'+2z\cdot\left(-1-y'\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z'=-1-y' \\ (y-z)y'=z-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{z-x}{y-z} \\ z'=\dfrac{x-y}{y-z} \end{cases} \quad (\text{với } y\neq z).$$

Sẽ không xảy ra trường hợp $y=z$, vì lúc đó thay vào hệ ban đầu ta có:

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ x^2+2z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ z=\dfrac{-1}{\sqrt{6}} \end{cases} \to \text{chỉ với 2 điểm thì hàm } z \text{ không có đạo hàm.}$$

Bài 84.

Phương trình $z^2+\dfrac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$, xác định hàm ẩn $z=z(x,y)$. Chứng minh rằng:

$$x^2z'_x+\frac{1}{y}z'_y=\frac{1}{z}.$$

Đặt $F(x,y,z)=z^2+\dfrac{2}{x}-\sqrt{y^2-z^2}$.

Ta có: $F'_x=\dfrac{-2}{x^2},\quad F'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}},\quad F'_z=2z+\dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}$.

Với $z\neq 0$, $|y|>|z|$: $z'_x=\dfrac{-F'_x}{F'_z}=\dfrac{\dfrac{2}{x^2}}{2z+\dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}},\quad z'_y=\dfrac{-F'_y}{F'_z}=\dfrac{\dfrac{y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z+\dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}$

$$\Rightarrow x^2z'_x+\frac{1}{y}z'_y=\frac{2}{2z+\dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}+\frac{\dfrac{1}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z+\dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}=\frac{2+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z+\dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}=\frac{1}{z} \text{ (đpcm).}$$

Bài 85.

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số sau:

a) $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$ **b)** $z=x^2\ln(x+y)$

c) $z=\arctan\frac{y}{x}$ **d)** $z=\sin\left(x^3+y^2\right)$.

a) $z'_x=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2x=x\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_y=y\sqrt{x^2+y^2}$.

Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $z=z(x,y)$ là:

$$z''_{xx}=1\cdot\sqrt{x^2+y^2}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall(x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

$$z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall(x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

$$z''_{yy}=1\cdot\sqrt{x^2+y^2}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall(x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

b) $z'_x=2x\ln(x+y)+\frac{x^2}{x+y}$, $z'_y=\frac{x^2}{x+y}$.

Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $z=z(x,\ y)$ là:

$$z''_{x^2}=2\ln(x+y)+\frac{2x}{x+y}+\frac{2x(x+y)-x^2}{(x+y)^2}=2\ln(x+y)+\frac{3x^2+4xy}{(x+y)^2},\ \forall x+y>0$$

$$z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{2x}{x+y}-\frac{x^2}{(x+y)^2}=\frac{x^2+2xy}{(x+y)^2},\ \forall x+y>0$$

$$z''_{y^2}=\frac{-x^2}{(x+y)^2},\ \forall x+y>0$$

c) $\forall x\neq 0$: $z'_x=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $z'_y=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $z=z(x,\ y)$ là:

$$z''_{xx}=\frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \forall x\neq 0;\quad z''_{yy}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \forall x\neq 0$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot(-y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \forall x \neq 0$$

d) $z'_x = 3x^2\cos\left(x^3+y^2\right)$, $\quad z'_y = 2y\cos\left(x^3+y^2\right)$.

$z''_{xx} = 6x\cos\left(x^3+y^2\right) - 9x^4\sin\left(x^3+y^2\right)$

$z''_{yy} = -4y^2\sin\left(x^3+y^2\right) + 2\cos\left(x^3+y^2\right)$

$z''_{xy} = z''_{yx} = -6x^2y\sin\left(x^3+y^2\right)$

Bài 86.

Tính vi phân cấp 2 của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$ **b)** $z = e^{2x}\left(x+y^2\right)$ **c)** $z = \ln\left(x^3+y^2\right)$

a) $z'_x = y^3 - 2xy$, $\quad z'_y = 3xy^2 - x^2$.

$z''_{xx} = -2y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 3y^2 - 2x$, $z''_{yy} = 6xy$.

$\Rightarrow \mathrm{d}z^2 = z''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}\mathrm{d}y^2 = -2y\mathrm{d}x^2 + 2\left(3y^2-2x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6xy\mathrm{d}y^2$.

b) $z'_x = 2e^{2x}\left(y^2+x\right) + e^{2x} = e^{2x}\left(2y^2+2x+1\right)$, $\quad z'_y = 2ye^{2x}$.

$z''_{xx} = 2e^{2x}\left(2y^2+2x+1\right) + 2e^{2x} = 4e^{2x}\left(y^2+x+1\right)$

$z''_{xy} = z''_{yx} = 4ye^{2x}$, $z''_{yy} = 2e^{2x}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}z^2 = z''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}\mathrm{d}y^2 = 4e^{2x}\left(y^2+x+1\right)\mathrm{d}x^2 + 8ye^{2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2e^{2x}\mathrm{d}y^2$.

c) $z'_x = \dfrac{3x^2}{x^3+y^2}$, $\quad z'_y = \dfrac{2y}{x^3+y^2}$.

$$z''_{xx} = \frac{6x\left(x^3+y^2\right) - 3x^2\cdot 3x^2}{\left(x^3+y^2\right)^2} = \frac{3x\left(2y^2-x^3\right)}{\left(x^3+y^2\right)^2}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-6x^2y}{\left(x^3+y^2\right)^2},\quad z''_{yy} = \frac{2\left(x^3+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^3+y^2\right)^2} = \frac{2\left(x^3-y^2\right)}{\left(x^3+y^2\right)^2}.$$

$\Rightarrow \mathrm{d}z^2 = z''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}\mathrm{d}y^2$

$$=\frac{3x\left(2y^2-x^3\right)}{\left(x^3+y^2\right)^2}\mathrm{d}x^2-\frac{12x^2y}{\left(x^3+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{2\left(x^3-y^2\right)}{\left(x^3+y^2\right)^2}\mathrm{d}y^2.$$

Bài 87.

a) Khai triển hàm số $f(x,y)=x^2+3y^2-2xy+6x+2y-4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $(-2,\ 1)$.

b) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x,y)=e^x\sin y$ đến bậc 3.

a) Khai triển Taylor của $f(x,y)$ tại lân cận điểm $(-2,\ 1)$ là:

$$f(x,y)=\left[(x+2)-2\right]^2+3\left[(y-1)+1\right]^2-2\left[(x+2)-2\right]\cdot\left[(y-1)+1\right]+6\left[(x+2)-2\right]+2\left[(y-1)+1\right]-4$$

$$=(x+2)^2+3(y-1)^2-2(x+2)(y-1)+12(y-1)-3$$

b) $f(x,y)=e^x\sin y=\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]\cdot\left[y-\frac{y^3}{3!}+o\left(y^3\right)\right]$

Khai triển và giữ lại các số hạng có (tổng bậc của x và y) ≤ 3, ta có:

$$f(x,y)=y-\frac{1}{6}y^3+xy+\frac{1}{2}x^2y+R_3(x,y).$$

3.3. Cực trị của hàm số nhiều biến số

Bài 88.

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $z=4x^3+6x^2-4xy-y^2-8x+2.$

b) $z=2x^2+3y^2-e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$

c) $z=4xy-x^4-2y^4.$

d) $z=\frac{4}{x}+\frac{3}{y}-\frac{xy}{12}.$

e) $z=e^{2x}\left(4x^2-2xy+y^2\right).$

f) $z=x^3+y^3-(x+y)^2.$

a) $z=4x^3+6x^2-4xy-y^2-8x+2.$

Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}^2$. Ta có: $z'_x=12x^2+12x-4y-8,\quad z'_y=-4x-2y.$

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases}z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x^2+12x-4y-8=0\\ -4x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\ 12x^2+20x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{-2}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm dừng $M\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ và $N(-2,\ 4)$.

+) Ta có: $A = z''_{xx} = 24x + 12, \quad B = z''_{xy} = -4, \quad C = z''_{yy} = -2$

$\Rightarrow B^2 - AC = 16 + 2(24x + 12) = 40 + 48x.$

– Tại $M\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ ta có $B^2 - AC = 56 > 0 \Rightarrow$ hàm số **không** đạt cực trị tại M.

– Tại $N(-2,\ 4)$ ta có $\begin{cases} B^2 - AC = -56 < 0 \\ A = -36 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $N(-2,\ 4)$, $z_{\text{CĐ}} = z(-2,\ 4) = 26.$

Vậy, hàm số đã cho đạt cực trị tại duy nhất một điểm, đó là điểm cực đại $N(-2,\ 4)$, giá trị cực đại $z_{\text{CĐ}} = z(-2,\ 4) = 26.$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$

Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}^2$. Ta có: $z'_x = 4x + 2xe^{-x^2-y^2}, \quad z'_y = 6y + 2ye^{-x^2-y^2}.$

+) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(2 + e^{-x^2-y^2}\right) = 0 \\ 2y\left(3 + e^{-x^2-y^2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (vì $e^{-x^2-y^2} > 0$)

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 điểm dừng $M(0,\ 0)$.

+) Ta có: $A = z''_{xx} = 4 + 2e^{-x^2-y^2} - 4x^2e^{-x^2-y^2}, \quad B = z''_{xy} = -4xye^{-x^2-y^2}$

$$C = z''_{yy} = 6 + 2e^{-x^2-y^2} - 4y^2e^{-x^2-y^2}.$$

– Tại $M(0,\ 0)$ ta có $A = 6,\ B = 0,\ C = 8 \Rightarrow \begin{cases} B^2 - AC = -48 < 0 \\ A = 6 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $M(0,\ 0)$, $z_{\text{CT}} = z(0,\ 0) = -1.$

Vậy, hàm số đã cho đạt cực trị tại duy nhất một điểm, đó là điểm cực tiểu $M(0,\ 0)$, giá trị cực tiểu $z_{\text{CT}} = z(0,\ 0) = -1.$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^4.$

Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}^2$. Ta có: $z'_x = 4y - 4x^3, \quad z'_y = 4x - 8y^3.$

+) Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = 2y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = 2x^9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1}{\sqrt[8]{2}} \\ y = \dfrac{-1}{\sqrt[8]{8}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có 3 điểm dừng $M(0,\ 0)$, $N\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}\right)$, $P\left(\dfrac{-1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[8]{8}}\right)$.

+) Ta có: $A = z''_{xx} = -12x^2$, $\quad B = z''_{xy} = 4$, $\quad C = z''_{yy} = -24y^2$

$\Rightarrow B^2 - AC = 4 - 288x^2y^2$.

– Tại điểm $M(0,\ 0)$ ta có $B^2 - AC = 4 > 0 \Rightarrow$ hàm số **không** đạt cực trị tại M.

– Tại các điểm $N\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}\right)$ và $P\left(\dfrac{-1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[8]{8}}\right)$, ta có $\begin{cases} B^2 - AC = -128 < 0 \\ A = -6\sqrt[4]{8} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $N\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}\right)$ và $P\left(\dfrac{-1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[8]{8}}\right)$

Giá trị cực đại $f_{CĐ} = f\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}\right) = f\left(\dfrac{-1}{\sqrt[8]{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[8]{8}}\right) = \sqrt{2}$.

d) $z = \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{xy}{12}$.

Tập xác định: **D** $= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$. Ta có: $z'_x = \dfrac{-4}{x^2} - \dfrac{y}{12}$, $\quad z'_y = \dfrac{-3}{y^2} - \dfrac{x}{12}$.

+) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-4}{x^2} - \dfrac{y}{12} = 0 \\ \dfrac{-3}{y^2} - \dfrac{x}{12} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-48}{x^2} \\ \dfrac{-3}{\left(\dfrac{-48}{x^2}\right)^2} - \dfrac{x}{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-48}{x^2} \\ \dfrac{-x^4}{768} - \dfrac{x}{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-48}{x^2} \\ \dfrac{-x^3}{768} - \dfrac{1}{12} = 0 \end{cases} \ (\text{vì } x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 điểm dừng $M(-4,\ -3)$.

+) Ta có: $A = z''_{xx} = \dfrac{8}{x^3}$, $\quad B = z''_{xy} = \dfrac{-1}{12}$, $\quad C = z''_{yy} = \dfrac{6}{y^3} \Rightarrow B^2 - AC = \dfrac{1}{144} - \dfrac{48}{x^3y^3}$.

– Tại điểm $M(-4,\ -3)$ ta có $\begin{cases} B^2 - AC = \dfrac{-1}{48} < 0 \\ A = \dfrac{-1}{8} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $M(-4,\ -3)$, $z_{\text{CĐ}} = z(-4,\ -3) = -3$.

Vậy, hàm số đã cho đạt cực trị tại duy nhất một điểm, đó là điểm cực đại $M(-4,\ -3)$, giá trị cực đại $z_{\text{CĐ}} = z(-4,\ -3) = -3$.

e) $z = e^{2x}\left(4x^2 - 2xy + y^2\right)$

Tập xác định: **D** = $\mathbb{R}^2$. Ta có:

$z'_x = 2e^{2x}\left(4x^2 - 2yx + y^2\right) + e^{2x}(8x - 2y) = 2e^{2x}\left(4x^2 - 2yx + y^2 + 4x - y\right)$

$z'_y = e^{2x}(-2x + 2y)$

+) Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2yx + y^2 + 4x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -1 \\ x = y = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ hàm số có 2 điểm dừng là $M(-1,\ -1)$ và $N(0,\ 0)$.

+) Ta có:

$A = z''_{xx} = 4e^{2x}\left(4x^2 - 2yx + y^2 + 4x - y\right) + 2e^{2x}(8x - 2y + 4)$

$B = z''_{xy} = 2e^{2x}(-2x + 2y) - 2e^{2x}, \quad C = z''_{yy} = 2e^{2x}$

– Tại $M(-1,\ -1)$ ta có: $A = -4e^{-2},\ B = -2e^{-2},\ C = 2e^{-2}$

$\Rightarrow B^2 - AC = 12e^{-4} > 0 \Rightarrow$ hàm số **không** đạt cực trị tại $M(-1,\ -1)$.

– Tại $N(0,\ 0)$ ta có: $A = 8,\ B = -2,\ C = 2 \Rightarrow \begin{cases} B^2 - AC = -12 < 0 \\ A > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $N(0,\ 0)$, $z_{\text{CT}} = z(0,\ 0) = 0$.

Vậy, hàm số đã cho đạt cực trị tại duy nhất một điểm, đó là điểm cực tiểu $N(0,\ 0)$, giá trị cực tiểu $z_{\text{CT}} = z(0,\ 0) = 0$.

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$.

Tập xác định: **D** = $\mathbb{R}^2$. Ta có: $z'_x = 3x^2 - 2(x + y),\quad z'_y = 3y^2 - 2(x + y)$

+) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 2(x+y) \\ 3y^2 = 2(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 3y^2 \\ 3x^2 = 2(x+y) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \vee x = -y \\ 3x^2 = 2(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 4x \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y \\ 3x^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ hàm số có 2 điểm dừng là $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ và $N(0, 0)$.

Ta có: $A = z''_{xx} = 6x - 2, \quad B = z''_{xy} = 2, \quad C = z''_{yy} = 6y - 2$

$\Rightarrow B^2 - AC = 4 - (6x-2)(6y-2)$

– Tại $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ta có $\begin{cases} B^2 - AC = -32 < 0 \\ A = 6 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $z_{CT} = z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{-64}{27}$.

– Tại $N(0, 0)$, ta có $B^2 - AC = 0$. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} H &= z(0+\Delta x, 0+\Delta y) - z(0, 0) = z(\Delta x, \Delta y) - z(0, 0) \\ &= (\Delta x)^3 + (\Delta y)^3 - (\Delta x + \Delta y)^2 - 0 \\ &= (\Delta x + \Delta y)\left[(\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y + (\Delta y)^2 - (\Delta x + \Delta y)\right] \end{aligned}$$

Trong đó $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Ta thấy rằng khi $\begin{cases} \Delta x = -\Delta y \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ thì $H = 0$

$\Rightarrow$ hàm số **không** đạt cực trị tại $N(0, 0)$.

Vậy, hàm số đã cho đạt cực trị tại duy nhất một điểm, đó là điểm cực tiểu $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, giá trị cực tiểu $z_{CT} = z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{-64}{27}$.

Bài 89.

Tìm cực trị có điều kiện:

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

b) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$.

c) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

a) Ta có $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$. Hàm số trở thành $z=f(x)=x(1-x)=x-x^2$.

Xét $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x)=1-2x, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Lại có $f''(x)=-2<0$

$\Rightarrow f(x)$ đạt cực đại tại $x=\frac{1}{2}$, $f_{CĐ}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow z$ đạt cực đại với điều kiện đã cho tại điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z_{CĐ}=z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Cách giải khác: Dùng phương pháp Lagrange:
Xét hàm Lagrange: $\mathscr{L}(x, y)=xy+\lambda(x+y-1)$.

+) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} \mathscr{L}'_x=y+\lambda=0 \\ \mathscr{L}'_y=x+\lambda=0 \\ \mathscr{L}'_\lambda=x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=-\lambda \\ 2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{-1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ điểm dừng là $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ với $\lambda=\frac{-1}{2}$.

Ta có: $\mathscr{L}''_{xx}=0, \quad \mathscr{L}''_{xy}=1, \quad \mathscr{L}''_{yy}=0$. Điều kiện: $x+y=1 \Rightarrow \mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$.

+) Tại điểm $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ứng với $\lambda=\frac{-1}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2\mathscr{L}(M) &= \mathscr{L}''_{xx}(M)\cdot \mathrm{d}x^2+2\mathscr{L}''_{xy}(M)\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathscr{L}''_{yy}(M)\cdot \mathrm{d}y^2 \\ &= 0\cdot \mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0\cdot \mathrm{d}y^2=-2\mathrm{d}x^2<0, \ \forall \mathrm{d}x\neq 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ là điểm cực đại của hàm số với điều kiện đã cho, $z_{\max}=z(M)=\frac{1}{4}$.

b) Ta có $3x-4y=5 \Leftrightarrow y=\frac{3x-5}{4}$.

Hàm số trở thành $z=x^2+\left(\frac{3x-5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}x^2-\frac{15}{8}x+\frac{25}{16}=f(x)$.

Xét $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x)=\frac{25x}{8}-\frac{15}{8}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$. Lại có $f''(x)=\frac{25}{8}>0$

$\Rightarrow f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=\frac{3}{5}$, $f_{CT}=f\left(\frac{3}{5}\right)=1$

$\Rightarrow z$ đạt cực tiểu với điều kiện đã cho tại điểm $\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$, $z_{CT}=z\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)=1$.

Các bạn cũng có thể dùng phương pháp Lagrage để xử lý câu này.

c) Đặt $b=|a|>0$. Xét hàm Lagrange: $\mathcal{L}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{b^2}\right)$.

+) Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases}\mathcal{L}'_x=\frac{-1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0\\ \mathcal{L}'_y=\frac{-1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0\\ \mathcal{L}'_\lambda=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=-2\lambda\neq 0\\ \frac{2}{x^2}=\frac{1}{b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=b\sqrt{2}\\ \lambda=\frac{-b}{\sqrt{2}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=y=-b\sqrt{2}\\ \lambda=\frac{b}{\sqrt{2}}\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ các điểm dừng là $M_1\left(b\sqrt{2},\, b\sqrt{2}\right)$ với $\lambda=\frac{-b}{\sqrt{2}}$; $M_2\left(-b\sqrt{2},\, -b\sqrt{2}\right)$ với $\lambda=\frac{b}{\sqrt{2}}$.

$$\mathcal{L}''_{xx}=\frac{2}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4},\quad \mathcal{L}''_{xy}=0,\quad \mathcal{L}''_{yy}=\frac{2}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4}.$$

+) Tại điểm $M_1\left(b\sqrt{2},\, b\sqrt{2}\right)$ ứng với $\lambda=\frac{-b}{\sqrt{2}}$, ta có:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(M_1)=\mathcal{L}''_{xx}(M_1)\cdot\mathrm{d}x^2+2\mathcal{L}''_{xy}(M_1)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathcal{L}''_{yy}(M_1)\cdot\mathrm{d}y^2$$
$$=\frac{-\sqrt{2}}{4}\mathrm{d}x^2+0\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{-\sqrt{2}}{4}\mathrm{d}y^2=\frac{-\sqrt{2}}{4}\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)<0,\ \forall\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0.$$

$\Rightarrow M_1\left(b\sqrt{2},\, b\sqrt{2}\right)$ là điểm cực đại của z với điều kiện đã cho, $z_{\text{CĐ}}=z(M_1)=\frac{\sqrt{2}}{b}$.

+) Tại điểm $M_2\left(-b\sqrt{2},\, -b\sqrt{2}\right)$ ứng với $\lambda=\frac{b}{\sqrt{2}}$, ta có:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(M_1)=\mathcal{L}''_{xx}(M_1)\cdot\mathrm{d}x^2+2\mathcal{L}''_{xy}(M_1)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathcal{L}''_{yy}(M_1)\cdot\mathrm{d}y^2$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{d}x^2+0\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{d}y^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)>0,\ \forall\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0.$$

$\Rightarrow M_2\left(-b\sqrt{2},\, -b\sqrt{2}\right)$ là điểm cực tiểu của z với điều kiện đã cho, $z_{\text{CT}}=z(M_2)=\frac{-\sqrt{2}}{b}$

Thay trở lại $b=|a|$, ta kết luận:

– Điểm $\left(|a|\sqrt{2},\, |a|\sqrt{2}\right)$ là điểm cực đại với điều kiện đã cho, $z_{\text{CĐ}}=\frac{\sqrt{2}}{b}$.

– Điểm $\left(-|a|\sqrt{2},\, -|a|\sqrt{2}\right)$ là điểm cực tiểu với điều kiện đã cho, $z_{\text{CT}}=\frac{-\sqrt{2}}{b}$.

<u>*Cách giải khác:*</u> Với điều kiện $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$, thực hiện phép lượng giác hoá:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{|a|}\cos t\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{|a|}\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{|a|}{\cos t}\\ y=\dfrac{|a|}{\sin t}\end{cases}\quad\left(t\in(0,\ 2\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$$

Hàm số trở thành: $z=f(t)=\dfrac{1}{|a|}(\cos t+\sin t)$. Xét $f(t)$ trên $\mathbf{D}=(0,\ 2\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

$f'(t)=\dfrac{1}{|a|}(-\sin t+\cos t)$, $\quad f'(t)=0\Leftrightarrow \sin t=\cos t\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\ \vee\ t=\dfrac{3\pi}{4}$ (do $t\in\mathbf{D}$)

$f''(t)=\dfrac{1}{|a|}(-\cos t-\sin t)$

– Tại điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$, ta có $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{|a|}<0\Rightarrow f(t)$ đạt cực đại tại điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z$ đạt cực đại có điều kiện tại điểm $M_1\left(|a|\sqrt{2},\ |a|\sqrt{2}\right)$, $z_{\max}=z(M_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$.

– Tại điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}$, ta có $f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}>0\Rightarrow f(t)$ đạt cực tiểu tại điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z$ đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $\left(-|a|\sqrt{2},\ -|a|\sqrt{2}\right)$, $z_{\min}=z(M_2)=\dfrac{-\sqrt{2}}{|a|}$.

Bài 90.
Tìm một điểm thuộc elip $4x^2+y^2=4$ sao cho nó xa điểm $A(1;\ 0)$ nhất.

Gọi $M(x,\ y)$ là một điểm thuộc elip đã cho $\Rightarrow 4x^2+y^2=4$.

Ta có: $AM^2=(x-1)^2+y^2$.

M xa điểm A nhất $\Leftrightarrow AM^2$ lớn nhất.

Như vậy, ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ với điều kiện $4x^2+y^2=4$. Các bạn có thể thao tác bằng phương pháp Lagrange. Dưới đây sẽ là cách làm gọn hơn:

$4x^2+y^2=4\Leftrightarrow y^2=4-4x^2\Rightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow x\in[-1,\ 1]$.

Thay $y^2=4-x^2$ vào hàm $f(x,\ y)$, ta có:

$$f(x,\ y)=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+4-4x^2=-3x^2-2x+5=g(x).$$

Xét $g(x)=-3x^2-2x+5$ trên $[-1,\ 1]$.

Ta có: $g'(x)=-6x-2,\ g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{3}\in[-1,\ 1]$.

$g(-1)=4,\ g\left(\dfrac{-1}{3}\right)=\dfrac{16}{3},\ g(1)=0$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1,\ 1]} g(x)=\dfrac{16}{3}$, đạt được khi $x=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow y=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

$\Rightarrow$ Các điểm thoả mãn đề bài là $\left(\dfrac{-1}{3},\ \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

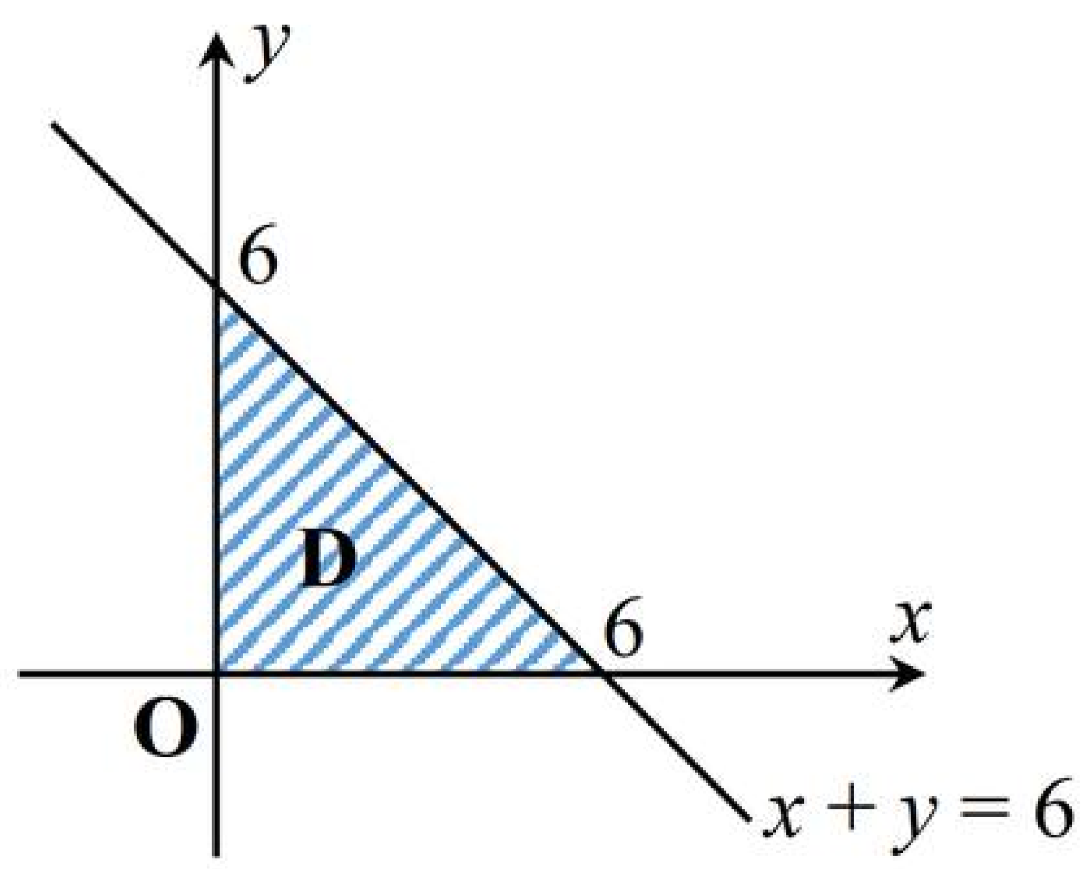
Bài 91.
Tình giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số:

a) $z=x^2+y^2+xy-7x-8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x=0$, $y=0, x+y=6$.

b) $z=4x^2-9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Xét $z=z(x,\ y)$ liên tục trên $\mathbf{D}=\{x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 6\}$.

+) Tìm điểm dừng trong miền **D** (không tính biên):



Giải hệ: $\begin{cases} z'_x=2x+y-7=0 \\ z'_y=2y+x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$

$\Rightarrow$ điểm dừng $M_1(2,\ 3)\in\mathbf{D}$.

$\Rightarrow z(2,\ 3)=-19$ **(1)**

+) Xét trên biên:

– Xét trên đoạn $x=0$, $0\le y\le 6$, hàm số trở thành:

$$g(y)=y^2-8y,\ y\in[0,\ 6].$$

Khảo sát hàm số này cho ta:

$$\max_{y\in[0,\ 6]} g(y)=g(0)=0,\qquad \min_{y\in[0,\ 6]} g(y)=g(4)=-16\ \textbf{(2)}$$

– Xét trên đoạn $y=0$, $0\le x\le 6$, hàm số trở thành $h(x)=x^2-7x,\ x\in[0,\ 6]$.

Khảo sát hàm số này cho ta:

$$\max_{x\in[0,\ 6]} h(x)=h(0)=0,\qquad \min_{x\in[0,\ 6]} h(x)=h\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{-49}{4}\ \textbf{(3)}$$

– Xét trên đoạn $y=6-x,\ 0\le x\le 6$, hàm số trở thành:

$$z=x^2+(6-x)^2+x(6-x)-7x-8(6-x)=x^2-5x-12=f(x),\ x\in[0,\ 6]$$

$$\max_{x\in[0,\ 6]} f(x) = f(6) = -6, \quad \min_{x\in[0,\ 6]} f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-73}{4} \quad \textbf{(4)}$$

So sánh các giá trị ở **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**, ta có:

$$\max\{-19,\ 0,\ 0,\ -6\} = 0$$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của z trên **D** là 0, đạt được chẳng hạn tại $(x,\ y) = (0,\ 0) \in \mathbf{D}$.

$$\min\left\{-19,\ -16,\ \frac{-49}{4},\ \frac{-73}{4}\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của z là -19, đạt được tại $(x,\ y) = (2,\ 3) \in \mathbf{D}$.

Cách giải khác: Nếu có tư duy đánh giá bất đẳng thức, thì bày này quá đơn giản:

$$z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y = \left(x + \frac{y}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3(y-3)^2}{4} - 19 \ge -19$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{7}{2} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, điểm $(2,\ 3) \in \mathbf{D}$.

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của z là -19, đạt được tại $(x,\ y) = (2,\ 3)$.

$$z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y = x(x + y - 7) + y(y - 8)$$

Với $(x,\ y) \in \mathbf{D}$, ta có các đánh giá $\begin{cases} x \ge 0 \\ x + y - 7 < 0 \\ y \ge 0 \\ y - 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow z \le 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x,\ y) = (0,\ 0) \in \mathbf{D}$.

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của z trên **D** là 0, đạt được chẳng hạn tại $(x,\ y) = (0,\ 0)$.

b) Các bạn có thể xử lý câu này bằng phương pháp Lagrange. Dưới đây là cách giải ngắn gọn:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 4 - \frac{4x^2}{9} \ge 0 \Rightarrow x \in [-3,\ 3]$$

$$\Rightarrow z = 4x^2 - 9y^2 = 4x^2 - 9\left(4 - \frac{4x^2}{9}\right) = 8x^2 - 36.$$

Với $x \in [-3,\ 3] \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 9$, ta có: $8.0 - 36 \le z \le 8.9 - 36 \Leftrightarrow -36 \le z \le 36$.

– Giá trị lớn nhất của z với điều kiện đã cho là 36, đạt được tại $(x,\ y) = (\pm 3,\ 0)$.

– Giá trị nhỏ nhất của z với điều kiện đã cho là -36, đạt được tại $(x,\ y) = (0,\ \pm 2)$.