ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

BÀI KIỂM TRA GIỮA KÌ
NĂM HỌC: 2020 - 2021

Môn học: Giải tích 1

Lớp: MAT 2501 Số tín chỉ: 3 Thời gian : 120′ Đề số 1

(Sinh viên không được sử dụng tài liệu.)

Câu 1. (1,5 điểm) Phát biểu và chứng minh *Định lí giá trị trung bình Lagrange.*

Câu 2. (2 điểm) Giới hạn dãy số

(1) Xét sự hội tụ của dãy số $a_n = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, n \geq 1.$

(2) Cho dãy số $\{u_n\}$ biết $\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}. \end{cases}$ Tính $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n u_n$.

Câu 3. (2 điểm) Tính các giới hạn hàm số sau

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{e^{x^2} - 1}$ (2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3}).$

Câu 4. (1,5 điểm) Xét tính liên tục của hàm hợp $f(g(x))$ trên $\mathbb{R}$ biết rằng $f(x) = \text{sgn}(x), g(x) = \sin(\pi x).$

Câu 5. (1 điểm) Tính $f^{(10)}(-1)$ với $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\ln(2 + x).$

Câu 6. (1 điểm) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$, khả vi trong khoảng $(0,1)$, thoả mãn điều kiện $f(1) = e^2 f(0)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 2f(c)$.

(Gợi ý: sử dụng hàm $g(x) = e^{-2x} f(x)$.

Câu 7. (1 điểm) Tính đạo hàm của hàm số $y = y(x)$ được cho bởi biểu thức $x^2 + 2xy + 3y^2 = 2x + 3y.$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

BÀI KIỂM TRA GIỮA KÌ
NĂM HỌC: 2020 - 2021

Môn học: Giải tích 1

Lớp: **MAT 2501** Số tín chỉ: **3** Thời gian : **120′** **Đề số 2**

(Sinh viên không được sử dụng tài liệu.)

Câu 1. (1,5 điểm) Phát biểu và chứng minh *Định lí giá trị trung bình Lagrange.*

Câu 2. (2 điểm) Giới hạn dãy số

(1) Xét sự hội tụ của dãy số $a_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{n}{(2n+1)^2}, n \geq 1.$

(2) Cho dãy số $\{u_n\}$ biết $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 4}. \end{cases}$ Tính $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n u_n$.

Câu 3. (2 điểm) Tính các giới hạn hàm số sau

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(x+1)^3} - 1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\log_2(3+x) - 1}{\log_3(4+x) - \log_4(5+x)}$

Câu 4. (1,5 điểm) Xét tính liên tục của hàm hợp $f(g(x))$ trên $\mathbb{R}$ biết rằng $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $g(x) = \cos(\pi x)$.

Câu 5. (1 điểm) Tìm a để hàm số $f(x) = |x - 2020| \cos(ax)$ khả vi tại $x = 2020$.

Câu 6. (1 điểm) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$, khả vi trong khoảng $(0,1)$, thoả mãn điều kiện $f(1) = e^2 f(0)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 2f(c)$.

(Gợi ý: sử dụng hàm $g(x) = e^{-2x} f(x)$.)

Câu 7. (1 điểm) Tính đạo hàm của hàm số $y = y(x)$ được cho bởi biểu thức $x^2 + 2xy + 3y^2 = 2x + 3y$.

Đáp án

Câu 1. (SGT). 0,5 + 1 or 1 + 0,5.

Câu 2. 1. phân kỳ theo nguyên lý Cauchy

2. Đề 1. $U_n = \frac{1}{2^n - 1} \Rightarrow \lim U_n . 2^n = 1$

Đề 2. $U_n = \frac{1}{4^n - 1} \Rightarrow \lim U_n . 4^n = 1$.

Câu 3. Đề 1

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x} . \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} + \frac{\sqrt{\cos x}\,(1 - \cos 3x)}{x^2\left[1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + (\sqrt[3]{\cos 3x})^2\right]}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x^2 . 2} + \frac{1 . \frac{(3x)^2}{2}}{x^2 . 3} = \frac{1}{4} + \frac{9}{6}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x . \frac{(x^2 + 1 - x^2 - 3)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+3}} = \frac{-2}{2}$.

Nếu $x \to -\infty$ kết quả $\frac{-2}{-2}$.

Đề 2.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{(x+1)^3} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left[1 + (x+1)^3 - 1\right]^{1/5} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1/5\left[(x+1)^3 - 1\right]}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{5} \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x)}{x} = \frac{3}{5}$.

2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\log_2(3+x) - 1}{\log_3(4+x) - \log_4(5+x)}$ Đặt $t = x + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \frac{\log_2(2+t) - \log_2 2}{\log_3(3+t) - \log_3 3 + \log_4 4 - \log_4(4+t)}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\log_2\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\log_3\left(1+\frac{t}{3}\right) - \log_4\left(1+\frac{t}{4}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t/2 / \ln 2}{t/3 / \ln 3 - t/4 / \ln 4}$$

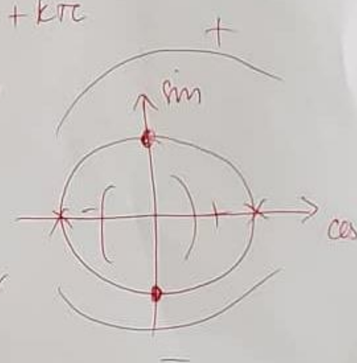
$$= \frac{1/2\ln 2}{\frac{1}{3\ln 3} - \frac{1}{4\ln 4}}$$ (Dùng $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$ $(x \to 0)$)

Câu 4. Đề 2.

$$f(g(x)) = \text{sgn}\left((\cos \pi x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \cos \pi x > 0 \\ 0 & \text{nếu } \cos \pi x = 0 \\ -1 & \text{nếu } \cos \pi x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \frac{\pi}{2}+k2\pi < \pi x < \frac{3\pi}{2}+k2\pi \\ 0 & \text{nếu } \pi x = \frac{\pi}{2}+k2\pi,\ \frac{3\pi}{2}+k2\pi = \frac{\pi}{2}+k\pi \\ -1 & \text{nếu } -\frac{\pi}{2}+k2\pi < \pi x < \frac{\pi}{2}+k2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \frac{1}{2}+2k < x < \frac{3}{2}+2k \\ 0 & \text{nếu } x = \frac{1}{2}+k \\ -1 & \text{nếu } -\frac{1}{2}+2k < x < \frac{1}{2}+2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



Đề 1.

$$f(g(x)) = \text{sgn}\left(\sin(\pi x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 2k\pi < \pi x < (2k+1)\pi \\ 0 & \text{nếu } \pi x = k\pi \\ -1 & \text{nếu } -\pi+2k\pi < \pi x < 2k\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } 2k < x < 2k+1 \\ 0 & \text{nếu } x = k \\ -1 & \text{nếu } 2k-1 < x < 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Câu 5

1. Hàm số liên tục tại $x = 2020$ do $\begin{cases} f(2020) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2020} f(x) = 0 \end{cases}$

Để hàm số khả vi tại $x = 2020$ thì

$$f'_+(2020) = f'_-(2020)$$

$$f'_+(2020) = \lim_{x \to 2020^+} \frac{f(x) - f(2020)}{x - 2020} = \lim_{x \to 2020^+} \frac{(x-2020)\cos a2020}{x - 2020} = \cos a2020$$

$$f'_-(2020) = -\cos a2020$$

$$\Rightarrow f'_+ = f'_- \Leftrightarrow \cos a2020 = 0 \Leftrightarrow a2020 = \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4040} + \frac{k\pi}{2020}.$$

2. $$f^{(10)}(x) = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (x^2+3x+1)^{(k)} \cdot \ln(2+x)^{(10-k)}$$

$$= C_{10}^0 \cdot (x^2+3x+1)^{(0)} \cdot \ln(2+x)^{(10)} + C_{10}^1 \cdot (2x+3) \cdot \ln(2+x)^{(9)}$$

$$+ C_{10}^2 \cdot 2 \cdot \ln(2+x)^{(8)} + 0 \quad (\text{vì } (x^2+3x+1)^{(k)} = 0 \; \forall k \geq 3).$$

$$= (x^2+3x+1) \cdot \frac{(-1)^{10} \cdot 10!}{(x+2)^{11}} + 10 \cdot (2x+3) \cdot \frac{(-1)^9 \cdot 9!}{(x+2)^{10}}$$

$$+ 10 \cdot 9 \cdot \frac{(-1)^8 \cdot 8!}{(x+2)^9}.$$

$$\Rightarrow f^{(10)}(-1) = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 10!}{1} + 10 \cdot \frac{1 \cdot (-1) \cdot 9!}{1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{1}$$

Câu 6. AD ĐL Lagrange cho $g(x) = e^{-2x} f(x)$ trên $[0;1]$ . . . . . .

$$g(1) - g(0) = g'(c) \cdot (1-0).$$

$$\Rightarrow e^{-2} \cdot f(1) - f(0) = -2 \cdot e^{-2c} \cdot f(c) + e^{-2c} \cdot f'(c)$$

$$0 = e^{-2c}(f'(c) - 2f(c)).$$