P.F.I.E.V

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán - Tập 2

GIẢI TÍCH 2

Giáo trình và
600 Bài tập có lời giải

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

DUNOD

Giáo trình Toán - Tập 2

GIẢI TÍCH 2

Cours de mathématiques –2

ANALYSE 2

Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hoá và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hoà Xã hội chủ nghĩa Việt Nam

Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieers d'Excellence au Vietnam, bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République Socialiste du Vietnam

Jean - Marie Monier

Giáo trình Toán

Tập 2

GIẢI TÍCH 2

Giáo trình và 600 bài tập có lời giải

(Tái bản lần thứ tư)

Người dịch :

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Cours de mathématiques - 2

ANALYSE 2

Cours et 600 exercices corrigés

1^re^ année MPSI. PCSI. PTSI

Jean-Marie Monier
Professeur en classe de Spéciales
au lycée la Martinière–Monplaisir à Lyon

Lời tựa

Thuở còn là một học sinh trung học trẻ tuổi, tôi vẫn mang một sự tôn kính gần như thần thánh đối với các cuốn sách giáo khoa. Khi đó, đối với tôi, các cuốn sách giáo khoa, mà cứ đầu năm học lại được một bàn tay mẫn cán bọc lại cẩn thận, có ý nghĩa như thế nào thì tôi cũng không thể nói lên chính xác được : điều chắc chắn là chúng chứa đựng Chân lý. Chẳng hạn, tôi cho rằng chỉ có thể phát biểu một định lý theo đúng từng câu chữ như trong sách giáo khoa. Lúc đó các giáo sư chưa sử dụng thường xuyên các tờ sao chụp (ôn tập và bổ sung lý thuyết, đề bài tập...) ; ngày nay thì tôi nghĩ rằng tình hình đó là do những khó khăn về sao chụp hơn là vì các giáo sư đó lại không muốn để lại dấu ấn cá nhân qua việc lựa chọn những bài tập độc đáo. Các giáo sư khi đó thường xuyên tham chiếu đến các sách giáo khoa, tuân thủ trung thành trình tự của sách giáo khoa, lấy bài tập từ sách giáo khoa. Tuy nhiên tôi vẫn còn nhớ đã rất lúng túng khi thày giáo Toán, ở lớp cuối cấp Trung học phổ thông, mà tôi cũng rất tôn sùng, đôi khi lại phát biểu một số lời phê phán đối với một cuốn sách mà chính ông ta đã khuyên chúng tôi sử dụng ! Còn các tác giả của các cuốn sách đó thì lại càng bí ẩn : họ là ai, các vị thần linh nắm giữ Tri thức đó ? Sau này, tất nhiên là các mối quan hệ của tôi với tư cách sinh viên đối với các cuốn giáo trình đã thay đổi dần, nhưng hình như tôi vẫn giữ lại cách tiếp cận vừa ham thích vừa tôn kính đó, chắc là do ngây thơ, cách nhìn vốn đã ngăn cản tôi không làm những việc chẳng hạn như ghi nhận xét ở lề trang sách - tôi sẽ không nhại việc làm của một Pierre de Fermat ! - và cả cái định kiến tôn trọng sẽ khiến cho tôi khó mà soạn thảo được một bản nhận xét khách quan.

Không một giáo sư nào, dù cho là một tác giả đã viết giáo trình, lại nghĩ đến việc thay việc giảng dạy sống động bằng một cuốn sách. Nhưng một giáo trình được xuất bản, nếu trung thành với nội dung và tinh thần của chương trình của một lớp, có thể giúp ích rất nhiều cho những sinh viên chăm chỉ. Người sinh viên, nhất là các sinh viên mới bắt đầu học, sẽ cảm thấy yên tâm khi có được một lược đồ sáng sủa, chính xác, chặt chẽ, một cách trình bày thật chau chuốt, với các kiểu chữ khác nhau được xen kẽ một cách hợp lí, một cách nhìn toàn cục đối với các vấn đề được khảo sát trong cuốn sách. Người sinh viên sẽ tin chắc là sẽ tìm được trong cuốn sách đó một phép chứng minh chưa thấu hiểu, một thí dụ hay phản thí dụ giúp cho việc nắm vững hơn một khái niệm, câu giải đáp cho một câu hỏi mà anh ta không dám nêu ra...

Để cuốn sách có thể hoàn thành vai trò trợ lý đó - tuy thụ động nhưng luôn luôn có mặt - tôi cho rằng cuốn sách phải thật gần gũi với những khúc mắc trực tiếp của người sinh viên, không đòi hỏi những hiểu biết chưa thấu hiểu, không làm cho người sinh viên chán nản do thường xuyên đưa ra những khái niệm quá tinh tế ; tuy nhiên cuốn sách đó vẫn phải chứa đựng một nội dung đủ để có thể tạo nên được những cơ sở chắc chắn làm nền tảng cho tri thức khoa học.

Như thế chúng ta dễ hình dung được rằng việc biên soạn một bộ giáo trình dành cho sinh viên các lớp dự bị hay sinh viên học phần 1 bậc đại học, sẽ đòi hỏi, cùng với sự hiểu biết chuyên môn cần thiết, một trình độ sư phạm chắc chắn, được rèn luyện qua kinh nghiệm giảng dạy lâu năm ở các cấp học đó, một đức tính kiên trì và tỷ mỉ to lớn.

Jean-Marie Monier đã đủ dũng cảm để thực hiện công việc lớn lao đó, và những cuốn sách mà ông ta cho ra mắt chúng ta hôm nay - nối tiếp các tập bài tập vốn đã gặt hái thành công mà chúng ta đều biết - đã chứng tỏ rằng ông ta đã đi đúng hướng; tôi nghĩ rằng ông đã đạt được mục tiêu đề ra, tức là biên soạn những giáo trình hoàn chỉnh dành cho tất cả các sinh viên, chứ không riêng cho những sinh viên tương lai của Trường Bách khoa. Tất nhiên sau này họ sẽ đọc và thưởng thức những cuốn sách chuyên sâu..., những người sẽ tiếp tục học lên. Trước mắt, sau khi học xong lớp cuối cấp, họ cần phải thấu hiểu đầy đủ những khái niệm cơ sở mới (tính liên tục, sự hội tụ, cấu trúc tuyến tính...) ; người đọc sẽ được một bàn tay chắc chắn dẫn dắt từng bước, bàn tay đó sẽ là chỗ tựa vững chắc mỗi khi xuất hiện nguy cơ : những đoạn nhận xét đối với một số sai lầm chính là kết quả của sự quan sát nhiều lần các sai lầm mà sinh viên mắc phải.

Suốt trong quá trình học, thường xuyên có những bài tập để người sinh viên tập dượt : vài chục trang sau đó, anh ta sẽ cảm thấy hài lòng khi nhận ra rằng mình đã đạt được kết quả đúng đắn do đi đúng hướng, hoặc thu lượm được một chỉ dẫn quý báu để tiếp tục nghiên cứu thêm : thật vậy cuốn sách đã tạo nên một cái gì hoàn chỉnh, có hiệu quả và chặt chẽ.

Tôi đã nói về vai trò cơ bản mà một cuốn giáo trình, được sử dụng trong một thời gian dài như một công cụ tra cứu, có thể có trong việc hình thành một trí tuệ khoa học trẻ trung. Như vậy cấu trúc, cách biên soạn và trình bày một cuốn giáo trình là những yếu tố cơ bản : ở đây chúng ta chỉ được phép tạo ra một cái gì hoàn hảo. Đó chính là ý nghĩa của công việc mà J-M. Monier đã hoàn thành, với một trình độ hiểu biết, một cách lựa chọn và sự kiên trì tuyệt vời, từ bản thảo đầu tiên tới những công việc sửa chữa cuối cùng, tới từng chi tiết, trước khi hoàn chỉnh. Các tập sách này đáp ứng đúng một nhu cầu thực sự hiện có, và tôi tin chắc rằng chúng sẽ được đón chào nồng nhiệt từ đối tượng của chúng là các sinh viên - và chắc chắn là cả những người khác nữa - những người sau này sẽ nói rằng : "Tôi đã học được nền tảng Toán học trong các cuốn Monier !"

H.DURAND
Giáo sư Toán đặc biệt
Trường Trung học
La Martinière
Montplaisir – Lyon

Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán này, kèm theo bài tập có lời giải, dành cho học sinh các lớp chuẩn bị thi vào các trường cao đẳng công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và năm thứ 2, tất cả mọi ban), cho sinh viên giai đoạn một các ban khoa học, và các thí sinh các kì thi tuyển giáo sư trung học.

Lược đồ bộ giáo trình này như sau :

Tập 1 : Giải tích 1	}	Giải tích năm thứ nhất
Tập 2 : Giải tích 2		(xuất bản lần thứ 2 6/1996)
Tập 3 : Giải tích 3	}	Giải tích năm thứ hai
Tập 4 : Giải tích 4		(xuất bản lần thứ 2 6/1997)
Tập 5 : Đại số 1 :		Đại số năm thứ nhất
Tập 6 : Đại số 2 :		Đại số năm thứ hai
Tập 7 : Hình học :		Hình học năm thứ nhất và năm thứ hai (xuất bản năm 1997)

Để kiểm tra kiến thức đã lĩnh hội, độc giả sẽ thấy ở cuối mỗi chương nhiều bài tập có lời giải, các lời giải in ở cuối cuốn sách và hầu hết các bài tập này đều khác với các bài tập đã có trong năm cuốn bài tập đã xuất bản. Cuối mỗi chương là việc khảo sát một số vấn đề ở ranh giới chương trình, được trình bày thành những bổ sung có lời giải.

Tác giả xin cám ơn trước về các nhận xét và gợi ý, và xin đề nghị độc giả vui lòng chuyển qua Nhà xuất bản Dunod, 15 phố Gossin, 92513 Montronge CEDEX.

Jean-Marie Monier

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ tại đây lòng biết ơn đến rất nhiều bạn đồng nghiệp đã vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy, là : Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle **BIGEARD**, Jaques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Gilles CHAFFARD, Jean-Yves **CHEVROLAT**, Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole **GAILLARD**, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, Alain **GOURET**, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Jean-Paul **MARGIRIER**, Annie **MICHEL**, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ và Gérard SIBERT.

Cuối cùng, tôi cảm ơn sâu sắc Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic, mà trình độ chuyên môn và tính kiên trì đã tạo điều kiện hoàn thành các tập sách này.

Jean-Marie Monier

Mục lục Tập 1

PHẦN THỨ NHẤT - GIÁO TRÌNH

Chương III. - Dãy số

Chương IV. - Hàm một biến lấy giá trị thực hoặc phức

Chương VI. - Tích phân

PHẦN THỨ HAI
CHỈ DẪN VÀ TRẢ LỜI CỦA CÁC BÀI TẬP

Mục lục tập 2

PHẦN THỨ NHẤT - GIÁO TRÌNH

Chương 7. - Các hàm số thông dụng

Chương 8. - So sánh các hàm số trong lân cận một điểm

Chương 9. - Phép tính nguyên hàm

Chương 10. - Tích phân trên một khoảng bất kì

Chương 11. - Đại cương về phương trình vi phân

Chương 12. - Khái niệm về hàm số hai biến số thực

Chương 13. - Bổ sung về phép tính tích phân (nghiên cứu sơ bộ)

PHẦN THỨ HAI
CHỈ DẪN VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Phần thứ nhất

Giáo trình

Chương 7

Các hàm số thông dụng

7.1 Hàm lôgarit nêpe

♦ **Định nghĩa** **Hàm lôgarit nêpe,** ký hiệu là ln, là ánh xạ từ $\mathbb{R}_+^*$ vào $\mathbb{R}$ định nghĩa như sau :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Người ta cũng nói rằng $\ln x$ là lôgarit tự nhiên của x.

Ta có $\ln 1 = 0$; hàm số ln khả vi trên $\mathbb{R}_+^*$ và $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Công thức này chứng tỏ rằng ln tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}_+^*$ và thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}_+^*$.

♦ **Định lý**

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$; $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Chứng minh :

Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$ và $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(ax)$. Ánh xạ φ khả vi trên $\mathbb{R}_+^*$ và

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} = \ln'(x).$$

Do đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \ln x + \lambda$.

Vậy $\lambda = \varphi(1) = \ln a$, suy ra : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ax) = \ln a + \ln x$. ■

Từ định lý trên dễ dàng suy ra các tính chất sau đây :

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Đặc biệt : $\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

(chứng minh dễ dàng bằng quy nạp).

- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(a^n) = n \ln a$.

◆ **Mệnh đề 1**

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Chứng minh :

1) Vì hàm số ln tăng trên $\mathbb{R}_+^*$, nên tại $+\infty$ ln có giới hạn hữu hạn hoặc bằng $+\infty$.
Nếu tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho $\ln x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L$, thì $\ln(2x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L$, và
$\ln(2x) = \ln 2 + \ln x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2 + L$, suy ra $\ln 2 = 0$, mâu thuẫn với $\ln 2 > \ln 1 = 0$.
Mâu thuẫn đó chứng tỏ : $\ln x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x = -\ln \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ theo 1).

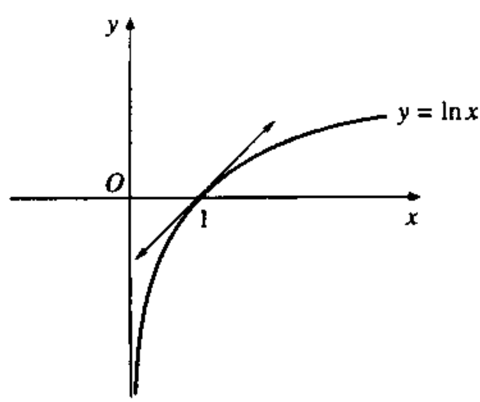
◆ **Mệnh đề 2**

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Chứng minh :

Hàm số ln khả vi tại 1 và

$\dfrac{\ln x}{x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$. ■



Vì hàm số ln khả vi hai lần trên $\mathbb{R}_+^*$ và ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$), nên ln là hàm lõm. Trong mục 7.5, Mệnh đề 1, chúng ta sẽ thấy là $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; vậy đường cong biểu diễn hàm số ln nhận một nhánh parabôlic theo hướng tiệm cận $(x'x)$.

Bài tập

◊ **7.1.1** Chứng tỏ rằng với mọi (a, b) thuộc $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\ln \frac{a+b}{4} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.$$

◊ **7.1.2** Chứng tỏ rằng : $\forall x \in]-1 ; 1[- \{0\}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \le -\dfrac{\ln(1-|x|)}{|x|}$.

7.2 Hàm mũ

Vì ánh xạ $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ liên tục, tăng nghiêm ngặt, và vì $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$, nên ánh xạ ln có ánh xạ ngược (xem 4.3.5, Định lý, Tập 1), ánh xạ ngược này được gọi là **hàm mũ**, ký hiệu là $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Như vậy ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y$.

Thông thường ánh xạ $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp x\end{array}$ cũng được gọi là ánh xạ exp.

Các tính chất sau đây suy ra từ các tính chất tương ứng của hàm số lôgarit :

- Ánh xạ exp khả vi trên $\mathbb{R}$ (xem 5.3, Định lý 3, Tập 1) và :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp x.$$

Như vậy rõ ràng ánh xạ exp thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

- $\exp 0 = 1$, vì $\ln 1 = 0$.

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(a + b) = (\exp a)(\exp b)$,

vì $\ln(\exp(a + b)) = a + b = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = \ln((\exp a)(\exp b))$.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a - b) = \frac{\exp a}{\exp b}.$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exp(-b) = \frac{1}{\exp b}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i).$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, \exp(na) = (\exp a)^n.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$.

◆ **Mệnh đề**

exp1 = e.

Chứng minh :
Ta nhắc lại rằng e là giới hạn của dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi hệ thức $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (xem 3.2.2, Thí dụ 1, Tập 1).

Chúng ta hãy áp dụng định lý Taylor với số dư dạng tích phân vào hàm số exp trên [0 ; 1] tới bậc n :

$$\exp 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= u_n + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - x)^n \exp x\,\mathrm{d}x .$$

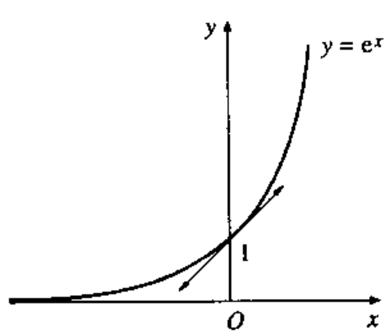
Vì $0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - x)^n \exp x\,\mathrm{d}x \leq \frac{\exp 1}{n!}$, nên ta suy ra $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \exp 1$, và do đó $\exp 1 = e$. ■

Cho tới lúc này thì ký hiệu e^t được định nghĩa với $t \in \mathbb{Z}$ hay $t = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (xem 1.2.3, 2), Tập 1). Ta thấy $\exp t$ trùng với e^t trong cả hai trường hợp này. Như vậy chúng ta có thể thác triển ký hiệu e^t cho trường hợp $t \in \mathbb{R}$ bằng cách đặt :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \exp t.$$

Từ đây chúng ta sẽ dùng ký hiệu e^t thay vì $\exp t$.

Đường cong biểu diễn hàm số $x \mapsto e^x$ là hình đối xứng của đường cong biểu diễn hàm số ln đối với đường phân giác thứ nhất (trong một hệ quy chiếu trực chuẩn).



Bài tập

◊ **7.2.1** Tìm tất cả các ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$ (Sử dụng bài tập 4.3.3, Tập 1).

7.3 Hàm lôgarit và hàm mũ cơ số a

Trong cả mục §7.3 này, a chỉ một số thực cố định thuộc

$$]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[.$$

7.3.1 Hàm lôgarit cơ số a

♦ **Định nghĩa** Hàm **lôgarit cơ số a**, ký hiệu là $\log_a$, là ánh xạ từ $\mathbb{R}_+^*$ vào $\mathbb{R}$ được xác định như sau :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\ .$$

Người ta cũng gọi $\log_a x$ là lôgarit cơ số a của x.

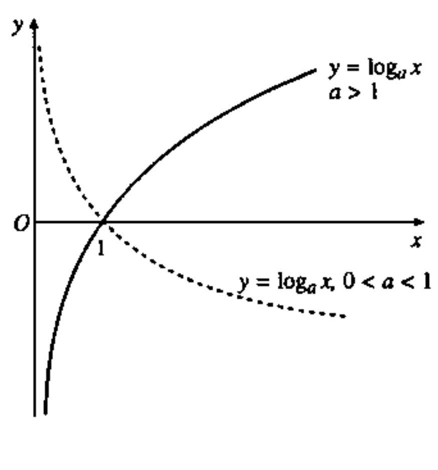
Trường hợp đặc biệt : $\log_e = \ln$.

Từ các tính chất của hàm lôgarit nêpe, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây :

- $\log_a$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}_+^*$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}\ .$$

- $\log_a 1 = 0$.
- $\forall (x,\ y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- $\forall (a,\ b) \in (]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \log_b x = \log_b a\ .\ \log_a x$ (công thức đổi cơ số).
- $\forall a \in\ ]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \log_{\frac{1}{a}} x = -\ \log_a x$.



Bài tập

◊ **7.3.1** Cho $a \in]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$; giải phương trình

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4},$$

với ẩn số $x \in \mathbb{R}_+^*$.

◊ **7.3.2** Xác định tập hợp các bộ ba $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn :

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \log_{c-b} a.$$

◊ **7.3.3** Tìm tất cả các ánh xạ $f :]0\ ;\ +\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn :

$$\forall (x, y) \in]0\ ;\ +\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

(Sử dụng bài tập 4.3.3, Tập 1).

7.3.2 Hàm mũ cơ số a

◆ **Định nghĩa** **Hàm mũ cơ số a**, ký hiệu là $\exp_a$, là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}_+^*$ ngược với ánh xạ $\log_a$.

Như vậy ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ (y = \exp_a x \Leftrightarrow x = \log_a y)$.

◆ **Mệnh đề**

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a x = e^{x\ln a}$.

Chứng minh : $x = \log_a (\exp_a x) = \dfrac{\ln(\exp_a x)}{\ln a}$, do đó $\ln(\exp_a x) = x\ln a$, suy ra $\exp_a x = e^{x\ln a}$ ■.

Từ các tính chất của hàm mũ (xem 7.2), hoặc các tính chất của hàm lôgarit cơ số a (xem 7.3.1) dễ dàng suy ra :

- Hàm số $\exp_a$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp_a)'(x) = (\ln a)(\exp_a x).$$

- $\exp_a(0) = 1$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$.

• $\forall a \in]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp_{\frac{1}{a}}(x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$.

Cho đến lúc này thì ký hiệu a^x đã được định nghĩa khi ($a \in \mathbb{R}_+^*$ và ($x \in \mathbb{Z}$ hay $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}^*$)), hoặc khi $a = \mathrm{e}$. Trong các trường hợp đó (và với $a \neq 1$), ta có :

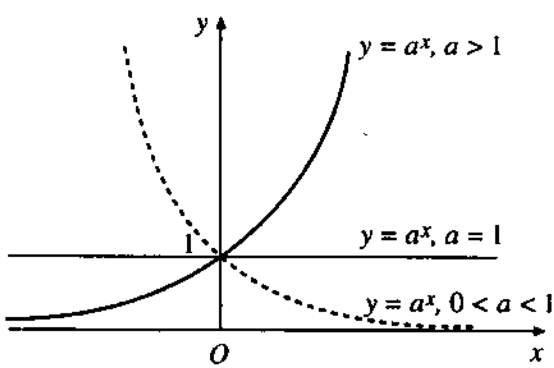
$$\begin{cases} \ln(a^x) = x\ln a \\ \ln(\exp_a x) = x\ln a \end{cases}, \text{ do đó } a^x = \exp_a(x).$$

Như vậy ta có thể thác triển ký hiệu a^x ra trường hợp $x \in \mathbb{R}$ bằng cách định nghĩa : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = \exp_a x$.

Từ đây chúng ta sẽ viết a^x thay vì $\exp_a x$.

Người ta cũng định nghĩa : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ 1^x = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0^x = 0 \\ 0^0 = 1 \end{cases}$

Các đường cong biểu diễn các hàm $x \mapsto a^x$ và $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau đối với trục $(y'y)$.



Bằng cách viết lại các tính chất của $\exp_a$ bằng ký hiệu a^x, ta có :

• $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $a^0 = 1$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0^x = 0$

• $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a^x a^y = a^{x+y}$

- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (a^x)^y = a^{xy}$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (ab)^x = a^x b^x$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Bài tập

◊ **7.3.4** Giải các phương trình sau đây, trong đó ẩn số $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^{2x} - 34 \,.\, 15^{x-1} + 5^{2x} = 0$ b) $x^x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $x > 0$

c) $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$, $x > 0$.

◊ **7.3.5** Giải trên $\mathbb{R}^2$ các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x^{x+y} = y^4 \\ y^{x+y} = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}$

◊ **7.3.6** Chứng tỏ rằng : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \left(\begin{cases} a^a = b \\ b^b = a \end{cases} \Rightarrow a = b = 1\right)$

◊ **7.3.7** Giải trên $(\mathbb{R}_+)^3$: $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \,.\, 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$

◊ **7.3.8** Tìm tất cả các ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 = f(x)f(y).$$

(Sử dụng bài tập 4.3.3, Tập 1).

◊ **7.3.9*** Xác định $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x \in]0;+\infty[}\left(2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}}\right)$.

7.4 Hàm lũy thừa

♦ **Định nghĩa** Cho $\alpha \in \mathbb{R}$; **hàm lũy thừa với số mũ α** là ánh xạ từ $\mathbb{R}_+^*$ vào $\mathbb{R}$, ở đây được ký hiệu là p_α và được xác định như sau:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Nếu $\alpha > 0$ thì $e^{\alpha \ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, và do đó ta có thể thác triển liên tục phải hàm số p_α bằng cách đặt $p_\alpha(0) = 0$.

Mặt khác, ta có thể thác triển liên tục p_0 tại 0 bằng $p_0(0) = 1$.

Ánh xạ p_α thuộc lớp C^∞ trên $]0\,;+\infty[$ và :

$$\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \begin{cases} p'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{(\alpha - 1)\ln x} = \alpha x^{\alpha - 1} \\ p''_\alpha(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra được bảng biến thiên của p_α và hướng lõm của đường cong biểu diễn p_α.

Nếu $\alpha > 1$, p_α khả vi tại 0 và $p'_\alpha(0) = 0$.

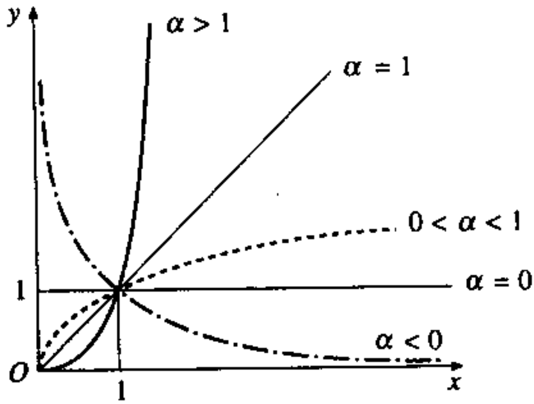
Nếu $0 < \alpha < 1$, p_α không khả vi tại 0 và $p'_\alpha(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Trường hợp $\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$p'_\alpha(x)$		$-$	
$p_\alpha(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Trường hợp $\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$p'_\alpha(x)$		$+$	
$p_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Biểu diễn đồ thị hàm số $x \mapsto x^{\alpha}$

Với $\alpha \in \mathbb{R}^*$, các ánh xạ $\begin{array}{c}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^{\alpha}\end{array}$ và $\begin{array}{c}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}\end{array}$ là những ánh xạ ngược nhau.

Đặc biệt, với mọi $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

NHẬN XÉT : Theo cách viết thông thường, đối với $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ta ký hiệu là a^{b^c} thay vì $a^{(b^c)}$.

Bài tập

◊ **7.4.1** Chứng tỏ rằng với mọi $n \in \mathbb{N} - \{0 ; 1\}$: $\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} < 2\sqrt[n]{n}$.

◊ **7.4.2** Chứng tỏ rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq 7$: $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$.

◊ **7.4.3** Giải các phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1$

b) $\sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{x-13} = 4$.

◊ **7.4.4** Chứng tỏ rằng, với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+$, thì : $(1 + x)^{\frac{1}{4}} \geq 1 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32}$.

◊ **7.4.5** Tìm tất cả các ánh xạ liên tục $f :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\forall (x, y) \in (]0 ; +\infty[)^2 ; f(xy) = f(x).f(y).$$

(Sử dụng bài tập 7.2.1).

7.5 So sánh cục bộ các hàm số lôgarit, lũy thừa, mũ

♦ **Mệnh đề 1**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Chứng minh :

Với mọi x thuộc $]1 ; +\infty[$ ta có :

$$0 < \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \le \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}$$

do đó $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, và theo định lý giới hạn kẹp : $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

♦ **Mệnh đề 2**

$$\forall(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

Chứng minh : Theo mệnh đề 1 và $x^{\frac{\beta}{\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln (x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Ta nói rằng tại $+\infty$, các lũy thừa của lôgarit *không đáng kể* so với các lũy thừa cơ số > 0 của biến số.

♦ **Mệnh đề 3**

$$\forall(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

Chứng minh : Chỉ cần thực hiện phép đổi biến $X = \dfrac{1}{x}$ (tức là đưa về một hàm số hợp) để quy về Mệnh đề 2 :

$$x^\beta |\ln x|^\alpha = X^{-\beta} (\ln X)^\alpha = \frac{(\ln X)^\alpha}{X^\beta}.$$

Ta nói rằng tại 0 các lũy thừa của lôgarit *không đáng kể* so với các lũy thừa cơ số > 0 của biến số.

♦ **Mệnh đề 4**

$$\forall a \in]1 ; +\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

Chứng minh : Phép đổi biến $y = e^x$ đưa mệnh đề này về Mệnh đề 2 :

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{e^{x\ln a}}{x^\alpha} = \frac{y^{\ln a}}{(\ln y)^\alpha}, \text{ và } \ln a > 0.$$

Ta nói rằng tại $+\infty$ các hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 *chiếm ưu thế* so với các hàm số lũy thừa.

Mệnh đề 5

$\forall a \in]1\,;+\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to -\infty} a^x|x|^\alpha = 0.$

Chứng minh :

Phép đổi biến $t = -x$ cho phép quy về Mệnh đề 4 :

$$a^x|x|^\alpha = a^{-t}t^\alpha = \left(\frac{a^t}{t^\alpha}\right)^{-1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

Ta nói rằng tại $-\infty$ các hàm số mũ với cơ số > 1 *chiếm ưu thế so với* các hàm số lũy thừa.

Sau đây là những thí dụ về cách tính các giới hạn bằng phép so sánh các hàm số lôgarit, hàm số lũy thừa và hàm số mũ :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$? $x^x = e^{x\ln x}$ và $x\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, do đó $x^x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$? $\dfrac{\ln x}{e^x} = \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{x}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$? $\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^6}{e^{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 x^4 e^{-x}$? $(\ln x)^2 x^4 e^{-x} = \left(\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)(x^5 e^{-x}) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

7.6 Các hàm hypebôlic thuận

- **Định nghĩa 1**

Sin hypebôlic là ánh xạ sh : R → R

$$x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cosin hypebôlic là ánh xạ ch : R → R

$$x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

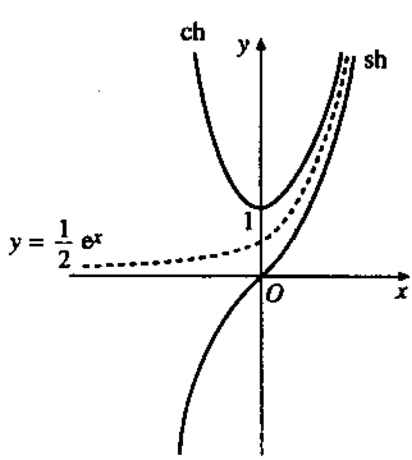
Các ánh xạ sh và ch thuộc lớp C^∞ trên R và : sh' = ch, ch' = sh ; sh là hàm lẻ và ch là hàm chẵn. Ta có :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, ch$x > 0$
- sh 0 = 0, ch 0 = 1
- sh'0 = 1, ch'0 = 0.

Từ đây suy ra các bảng biến thiên sau :

x	0		$+\infty$
sh' = ch	1	+	
sh	0	↗	$+\infty$

x	0		$+\infty$
ch' = sh	0	+	
ch	1	↗	$+\infty$



Ta có ngay mệnh đề sau đây :

♦ **Mệnh đề**

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{cases}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Từ đó ta suy ra được một cách biểu diễn tham số đường hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ở đây $(a, b) \in (\mathrm{R}_+^*)^2$ cố định) : $\begin{cases} x = \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$
với $(\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathrm{R}$, chính cách biểu diễn tham số này lý giải cho tên gọi "hypebôlic" của các hàm số đó.

♦ **Định nghĩa 2**

tang hypebôlic là ánh xạ th : $\mathrm{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

cotang hypebôlic là ánh xạ coth : $\mathrm{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

- Các ánh xạ th và coth theo thứ tự thuộc lớp C^∞ trên R và R^*, và

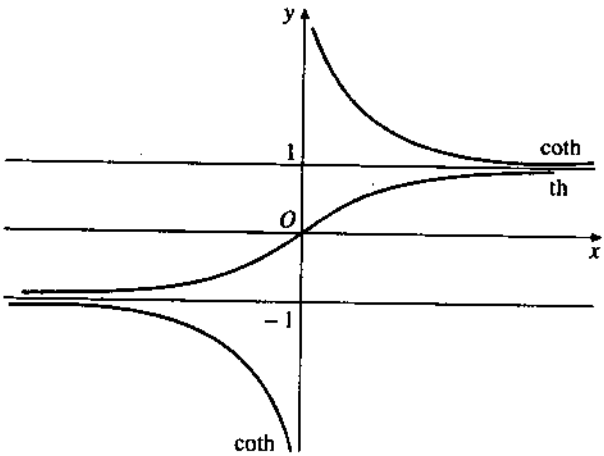
$$\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$$

$$\operatorname{coth}' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2} = 1 - \operatorname{coth}^2$$

- th và coth là những hàm số lẻ.
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{th} = 1$, $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{coth} = 1$.

x	0		$+\infty$
$\operatorname{th}'x$	1	+	
$\operatorname{th}x$	0	↗	1

x	0		$+\infty$
$\operatorname{coth}'x$	‖	−	
$\operatorname{coth}x$	‖ $+\infty$	↘	1



Bảng công thức lượng giác hypebôlic

Ta có được một cách dễ dàng các công thức sau đây, đối với mọi x, a, b, p, q thuộc R :

- $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1.$
- $\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$

  $\mathrm{ch}(a - b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$

  $\mathrm{sh}(a + b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$

  $\mathrm{sh}(a - b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$

  $\mathrm{th}(a + b) = \dfrac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}$

  $\mathrm{th}(a - b) = \dfrac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}.$
- $\mathrm{ch}\, 2a = \mathrm{ch}^2a + \mathrm{sh}^2a = 2\mathrm{ch}^2a - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2a$

  $\mathrm{sh}\, 2a = 2\mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, a$

  $\mathrm{th}\, 2a = \dfrac{2\mathrm{th}\, a}{1 + \mathrm{th}^2a}.$
- $\mathrm{ch}^2a = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2a + 1}{2}$, $\mathrm{sh}^2a = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2a - 1}{2}.$
- $\mathrm{ch}\, p + \mathrm{ch}\, q = 2\mathrm{ch}\, \dfrac{p+q}{2}\, \mathrm{ch}\, \dfrac{p-q}{2}$

  $\mathrm{ch}\, p - \mathrm{ch}\, q = 2\mathrm{sh}\, \dfrac{p+q}{2}\, \mathrm{sh}\, \dfrac{p-q}{2}$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\operatorname{ch}\frac{p-q}{2}.$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{ch}\frac{p+q}{2}\operatorname{sh}\frac{p-q}{2}.$$

Trong Tập 3 chúng ta sẽ thấy là có thể thác triển các hàm số thực ch, sh, cos, sin ra các số phức bằng các công thức :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}), & \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) \\ \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{cases}$$

và khi đó ta sẽ có : $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \cos iz = \operatorname{ch} z \\ \sin iz = i \operatorname{sh} z \end{cases}$

Như vậy, để thu được bảng công thức lượng giác hypebôlic từ bảng công thức lượng giác (vòng) (quen thuộc hơn), chỉ cần thay cos bằng ch và sin bằng i sh (và do đó tan bằng i th).

Chẳng hạn : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

cho ta : $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - (i \operatorname{sh} x)(i \operatorname{sh} y)$

tức là : $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

Bài tập

◊ **7.6.1** Với $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, hãy tính $\prod_{k=0}^{n} (2\operatorname{ch}(2^k x) - 1)$.

◊ **7.6.2** Với $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, hãy tính $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$,

với nhận xét là $\operatorname{th}((k+1)x) - \operatorname{th}(kx) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$.

◊ **7.6.3** Cho $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, tính đạo hàm cấp n của $f_a : x \mapsto e^{x \operatorname{ch} a}\operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$.

◊ **7.6.4** Cho $a \in \mathbb{R}$ cố định, giải phương trình $\operatorname{ch} x + \cos a = 2\operatorname{sh} x + \sin a$, với ẩn số là $x \in \mathbb{R}$.

◊ **7.6.5** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{25}{12} \end{cases}$ với ẩn số là $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7.7 Bổ sung : các hàm số hypebôlic ngược

7.7.1 Argsh

Ánh xạ sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, tăng nghiêm ngặt, và $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$, $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$; vậy ánh xạ sh nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

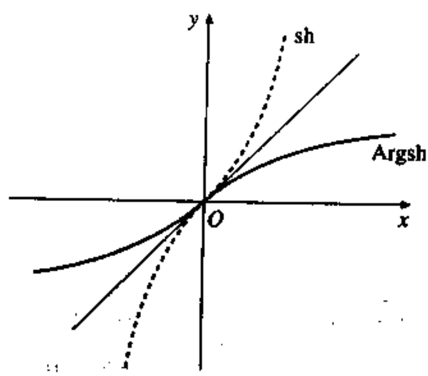
Ta cũng có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(y = \text{Arg sh}x \Leftrightarrow x = \text{sh}y)$.

Hàm số Arg sh là hàm số lẻ.

Vì sh khả vi trên $\mathbb{R}$ và ($\forall y \in \mathbb{R}$, $\text{sh}'y = \text{ch}y \geq 1$), nên Argsh khả vi trên $\mathbb{R}$ và : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}\,x)} = \dfrac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Do đó Argsh thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

x	0		$+\infty$
$\text{Argsh}'x$	1	$+$	
$\text{Argsh}x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Biểu thức lôgarit của Argsh x

Ta có với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$y = \text{Argsh}x \Leftrightarrow x = \text{sh}y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Phương trình bậc hai $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ (với ẩn số là $Y \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm thực $x - \sqrt{1+x^2}$ (< 0) và $x + \sqrt{1+x^2}$ (> 0). Vì $e^y > 0$ nên :

$$y = \text{Argsh}x \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Vậy : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Ta cũng có thể tìm lại được giá trị của đạo hàm của Argsh :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argsh}'x = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7.7.2 Argch

Ánh xạ ch : $[0\ ;+\infty[\ \to [1\ ;+\infty[$ liên tục, tăng nghiêm ngặt và $\text{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{+\infty} \text{ch} = +\infty$; vậy ánh xạ ch nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là

$$\text{Argch} : [1\ ;+\infty[\ \to [0\ ;+\infty[$$

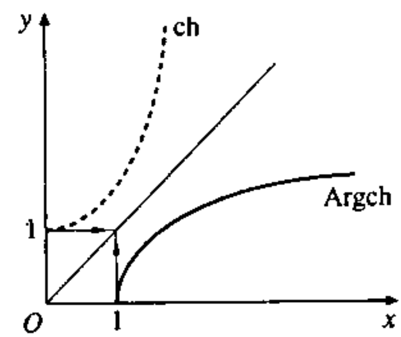
$$\forall (x, y) \in [1\ ;+\infty[\ \times [0\ ;+\infty[,\ (y = \text{Argch}x \Leftrightarrow x = \text{ch}y).$$

Vì ch khả vi trên $[0\ ;+\infty[$ và $(\forall y \in\ ]0\ ;+\infty[,\ \text{ch}'y = \text{sh}y > 0)$, nên Argch cũng khả vi trên $]1\ ;+\infty[$ và

$$\forall x \in\ ]1\ ;+\infty[,\ \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{Argch}\,x)} = \frac{1}{\text{sh}(\text{Argch}\,x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Suy ra hàm số Argch thuộc lớp C^∞ trên $]1\ ;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$\text{Argch}'x$	$\Vert +\infty$	$+$	
$\text{Argch}\,x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Biểu thức lôgarit của Argch x

Với mọi $(x, y) \in [1\ ;+\infty[\ \times [0\ ;+\infty[$, ta có :

$y = \text{Argch}x \Leftrightarrow x = \text{ch}y \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$. Phương trình bậc hai $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ (với ẩn số $Y \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm thực (nếu $x > 1$) là $Y_1 = x - \sqrt{x^2-1}$, $Y_2 = x + \sqrt{x^2-1}$. Vì $y \geq 0$, nên ta có $e^y \geq 1$.

Mặt khác : $0 \leq Y_1 \leq 1 \leq Y_2$, vì $Y_1 . Y_2 = 1$ và $Y_1 + Y_2 = x \geq 0$.

Ta suy ra : $y = \text{Argch}x \Leftrightarrow e^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2-1}$.

Vậy $\forall x \in [1\ ;+\infty[,\ \text{Argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Ta lại có : $\forall x \in\ ]1\ ;+\infty[,\ \text{Argch}'x = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7.7.3 Argth

Ánh xạ th : $\mathbb{R} \to]-1\ ;\ 1[$ liên tục, tăng nghiêm ngặt, và $\lim\limits_{-\infty} \text{th} = -1$, $\lim\limits_{+\infty} \text{th} = 1$; vậy ánh xạ th nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là

Argth : $]-1\ ;\ 1[\to \mathbb{R}$.

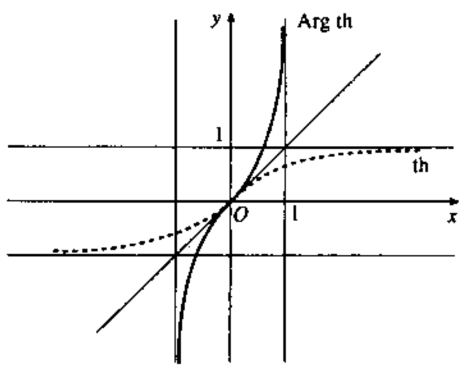
Như thế ta có : $\forall (x, y) \in]-1\ ;\ 1[\times \mathbb{R}$, $(y = \text{Argth}x \Leftrightarrow x = \text{th}y)$.

Argth là hàm lẻ.

Vì th khả vi trên $\mathbb{R}$ và vì $(\forall y \in \mathbb{R},\ \text{th}'y = 1 - \text{th}^2 y > 0)$, nên Argth khả vi trên $]-1\ ;\ 1[$ và : $\forall x \in]-1\ ;\ 1[$, $\text{Argth}'x = \dfrac{1}{\text{th}'(\text{Argth}x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Suy ra Argth thuộc lớp C^∞ trên $]-1\ ;\ 1[$.

x	0		1
$\text{Argth}'x$	1	$+$	
$\text{Argth}x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Biểu thức lôgarit của Argth

Với mọi (x, y) thuộc $]-1\ ;\ 1[\times \mathbb{R}$ ta có :

$$y = \text{Argth}\,x \Leftrightarrow x = \text{th}y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Như vậy : $\forall x \in]-1\ ;\ 1[$, $\text{Argth}x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

Ta lại có : $\forall x \in]-1\ ;\ 1[$, $\text{Argth}'x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7.7.4 Argcoth

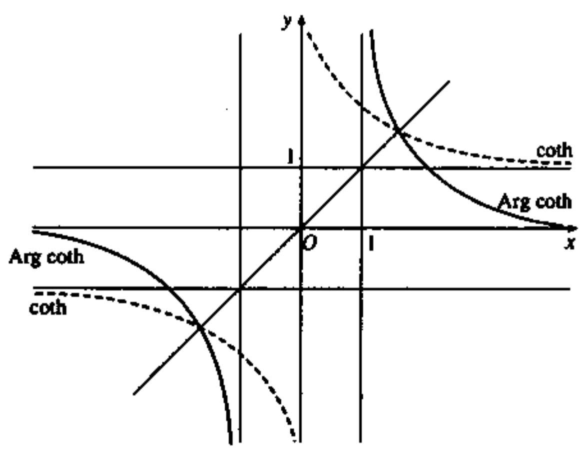
Ánh xạ coth : $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[\to]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ liên tục, giảm nghiêm ngặt trên $]-\infty\ ;\ 0[$ và trên $]0\ ;\ +\infty[$, và $\lim\limits_{-\infty} \text{coth} = -1$,

$\lim\limits_{0^-} \coth = -\infty$, $\lim\limits_{0^+} \coth = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} \coth = 1$, vậy ánh xạ coth nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là Argcoth: $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1;+\infty[\ \to\ ]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
Như thế ta có : $\forall(x, y) \in\ ]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[\,\times \mathbb{R}^*$, $(y = \text{Argcoth}x \Leftrightarrow x = \coth y)$. Argcoth là hàm số lẻ.

Vì coth khả vi trên $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ và do $(\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\coth' x = 1 - \coth^2 x < 0)$, nên Argcoth khả vi trên $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, và $\forall x \in\ ]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $\text{Argcoth}'(x) = \dfrac{1}{\coth'(\text{Argcoth}x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Suy ra Argcoth thuộc lớp C^∞ trên $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$\text{Argcoth}'x$		$-$	
$\text{Argcoth}x$	$+\infty$	$\searrow$	0



Biểu thức lôgarit của Argcoth x

Với mọi x thuộc $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, ta có :

$$\text{Argcoth}x = \text{Argth}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Vậy : $\forall x \in\ ]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $\text{Argcoth}\,x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

NHẬN XÉT : Ta có thể "gộp" các ánh xạ Argth và Argcoth lại thành một ánh xạ duy nhất, đó là ánh xạ

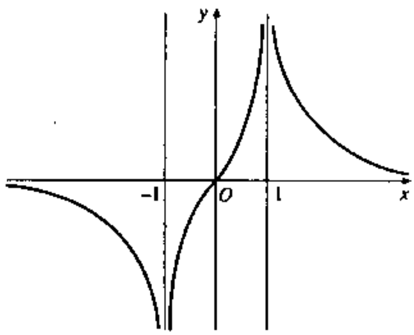
$f : \mathbb{R}-\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| .$$

Ánh xạ f khả vi trên $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, f'(x) = \frac{1}{1-x^2} .$$



Biểu diễn đồ thị của f

Bài tập

◊ **7.7.1** Khảo sát các hàm số từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ xác định bởi các biểu thức sau đây (biến số x ; hãy biến đổi biểu thức) :

a) $\mathrm{ch}(2\mathrm{Argth}x)$ b) $\mathrm{th}(3\mathrm{Argth}x)$

c) $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{Argch}\, x\right)$ d) $\mathrm{Argth}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

e) $\mathrm{Argth}\dfrac{1+3\mathrm{th}x}{3+\mathrm{th}x}$

◊ **7.7.2** Giải các phương trình có ẩn số là $x \in \mathbb{R}$ sau :

a) $\mathrm{Argch}x = \mathrm{Argsh}(2-x)$ b) $\mathrm{Argch}(4x^3 - 3x) - \mathrm{Argch}(2x^2 - 1) = 1$.

◊ **7.7.3** Cho x, y là những số thực, hãy biến đổi các biểu thức :

a) $\mathrm{Argsh}\ x + \mathrm{Argsh}\ y$ b) $\mathrm{Argch}\ x + \mathrm{Argch}\ y$

c) $\mathrm{Argth}\ x + \mathrm{Argth}\ y$ d) $\mathrm{Argcoth}\ x + \mathrm{Argcoth}\ y$.

◊ **7.7.4** Khảo sát các hàm số hợp $g \circ f$, trong đó $f \in \{\mathrm{Argsh}, \mathrm{Argch}, \mathrm{Argth}, \mathrm{Argcoth}\}$ và $g \in \{\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th}, \mathrm{coth}\}$.

◊ **7.7.5** Chứng tỏ rằng luật hợp thành $*$ xác định bởi :

$$x * y = \sqrt{x^2-1}\ \sqrt{y^2-1} + xy$$

là một luật hợp thành trong trên $[1 ; +\infty[$.

Bộ đôi $([1 ; +\infty[, *)$ có là một nhóm không ?

◊ **7.7.6** Cũng câu hỏi như ở 7.7.5 với $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ trên $]-1 ; 1[$.

◊ **7.7.7** Tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to]-1 ; 1[$, liên tục và thỏa mãn :

$$\forall (x, y) \in (]-1 ; 1[)^2, f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} .$$

(Sử dụng các bài tập 4.3.3, Tập 1).

◊ **7.7.8** Tìm điều kiện cần và đủ đối với $a \in \mathbb{R}$ để các đường cong có phương trình $y = \mathrm{sh}x$, $y = 2x + a$ có ba điểm chung phân biệt.

7.8 Các hàm số lượng giác thuận

Chúng tôi giả định rằng độc giả đã biết định nghĩa và các tính chất thông thường của các hàm số lượng giác thuận sin, cos, tan, cotan. Trong C 7.1. độc giả sẽ thấy một phương pháp đơn giản để xây dựng các hàm số đó, và có thể đọc ở Tập 3 cách xây dựng kinh điển bằng các dãy nguyên.

Chúng ta nhắc lại rằng :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\ \text{cotan}x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Các hàm số sin, cos, tan, cotan thuộc lớp C^∞ trên các tập xác định của chúng và :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\sin' x = \cos x,\ \cos' x = -\sin x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\ \text{cotan}' x = -(1 + \text{cotan}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- Công thức cộng :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{cases} \quad \text{khi các số hạng đó xác định.}$$

- Các công thức tuyến tính hóa :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \end{cases}$$

- Biến đổi tổng thành tích :

$$\forall(p,\ q) \in \mathrm{R}^2, \begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p-q}{2}\sin\dfrac{p+q}{2} \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)$, $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

- Bằng cách đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, ta được : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ khi các biểu thức đó xác định.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \end{cases}$

- sin 2π – tuần hoàn, là hàm lẻ, và với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

  $\sin(\pi + x) = -\sin x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
  $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
  $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

- cos : 2π – tuần hoàn, là hàm chẵn, và với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$
  $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
  $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

- tan : π – tuần hoàn, là hàm lẻ, và với mọi x thuộc $\mathrm{R} - \pi\mathbb{Z}$ ta có :

  $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotan} x$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}x\,.$$

- Với mọi (a, b) thuộc $\mathbb{R}^2$:

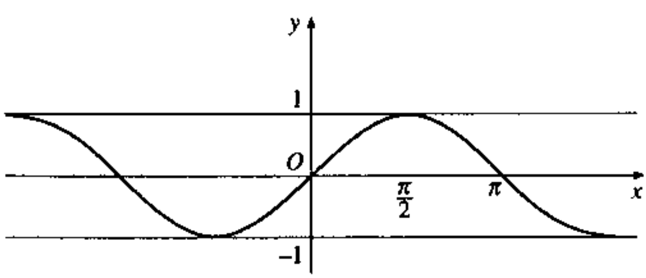
$$\cos b = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv a\ [2\pi] \\ \text{hoặc} \\ b \equiv -a\ [2\pi] \end{cases}.$$

$$\sin b = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv a\ [2\pi] \\ \text{hoặc} \\ b \equiv \pi - a\ [2\pi] \end{cases}$$

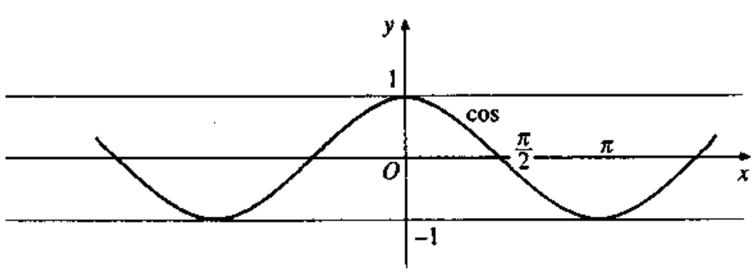
Với mọi (a, b) thuộc $\left(\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)^2$; $\tan b = \tan a \Leftrightarrow b \equiv a\ [\pi]$.

- Với mọi (x, y) thuộc R^2 sao cho $x^2 + y^2 = 1$, tồn tại $\theta_0 \in [-\pi\ ;\ \pi[$ duy nhất sao cho :

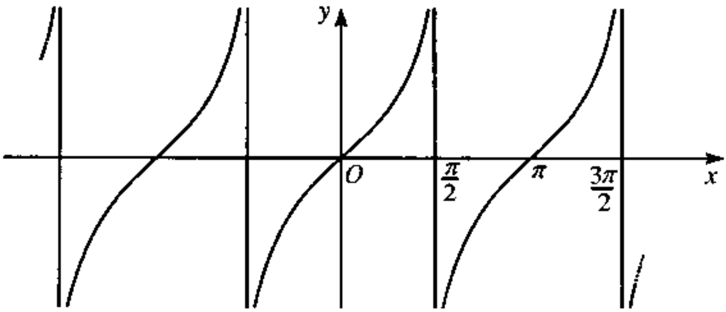
$$\left\{\theta \in \mathrm{R}\ ,\ \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}\right\} = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}.$$



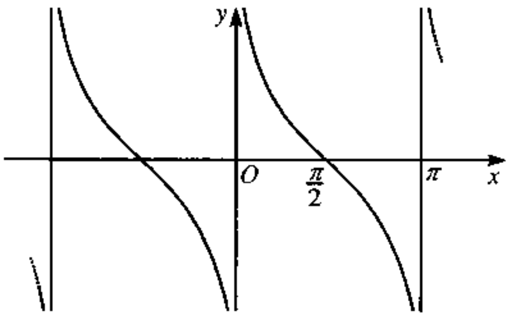
Biểu diễn đồ thị của hàm sin



Biểu diễn đồ thị của hàm cos



Biểu diễn đồ thị của hàm tan



Biểu diễn đồ thị của hàm cotan

Bài tập

◊ **7.8.1** Tính hoặc đơn giản các biểu thức sau đây khi chúng xác định :

a) $\dfrac{\sin x + \sin(nx) + \sin((2n-1)x)}{\cos x + \cos(nx) + \cos((2n-1)x)}$

b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x)$ (giả thiết rằng $\forall k \in \{0, ..., n+1\}$, $2^k x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$)

c) $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$

d) $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{\cos(2^k x)}\right)$

e) $\sum_{k=0}^{n} \tan(kx)\tan((k+1)x)$

f) $\prod_{k=0}^{n} \left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) + \cos\left(\frac{y}{2^k}\right)\right)$

g) $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\sin((k+1)x)$ (sử dụng bài tập 2.5.1, Tập 1)

h) $\sum_{k=0}^{n} \cos^k x\cos(kx)$ (sử dụng bài tập 2.5.4, Tập 1)

i) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\cos^3(3^k x)}{3^k}$

◊ **7.8.2** Chứng tỏ rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có :

$$\sum_{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos a_k.$$

◊ **7.8.3** Chứng minh bất đẳng thức :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, |\sin(nx)| < n|\sin x|.$$

◊ **7.8.4** Có tồn tại hay không $n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) > 0 \ ?$$

◊ **7.8.5** Chứng tỏ rằng : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3$.

◊ **7.8.6** Chứng tỏ rằng : $\forall(x, y) \in \left[0 \ ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\sqrt{xy}) \geq \sqrt{\sin x \sin y}$.

◊ **7.8.7** Giải trên R :

a) $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1$; b) $\sin x + \sin 2x < \sin 3x$.

◊ **7.8.8** Cho ánh xạ $f : \left]-\frac{\pi}{2} \ ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)$$

Hãy kiểm chứng lại rằng, với mọi x thuộc $\left]-\frac{\pi}{2} \ ; \frac{\pi}{2}\right[$ thì :

$$\text{th}\,\frac{f(x)}{2} = \tan\frac{x}{2}, \ \text{th} f(x) = \sin x, \ \text{ch} f(x) = \frac{1}{\cos x}, \ \text{sh} f(x) = \tan x.$$

◊ **7.8.9** Cho $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Chứng tỏ rằng : $(x, y, z) \in (]-\infty \ ; -1] \cup [1 \ ; +\infty[)^3 \cup ([-1 \ ; 1]^3)$.

7.9 Các hàm số lượng giác ngược

7.9.1 Arcsin

Ánh xạ sin : $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1 ; 1]$ liên tục, tăng nghiêm ngặt, và $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; vậy ánh xạ sin nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là Arcsin : $[-1 ; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy ta có : $\forall(x, y) \in [-1 ; 1] \times \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $(y = \mathrm{Arcsin}x \Leftrightarrow x = \sin y)$.

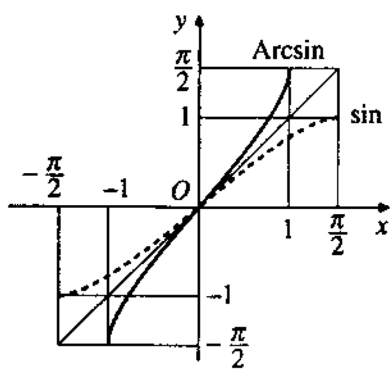
Arcsin là hàm số lẻ .

Do sin khả vi trên $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, và vì $\left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[, \sin' y = \cos y \neq 0\right)$ nên Arcsin khả vi trên $]-1 ; 1[$ và :

$$\forall x \in\ ]-1 ; 1[, \ \mathrm{Arcsin}'x = \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}x)} = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ta suy ra rằng Arcsin thuộc lớp C^∞ trên $]-1 ; 1[$.

x	-1		1
$\mathrm{Arcsin}'x$	$\Vert\ +\infty$	$+$	$+\infty\ \Vert$
$\mathrm{Arcsin}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



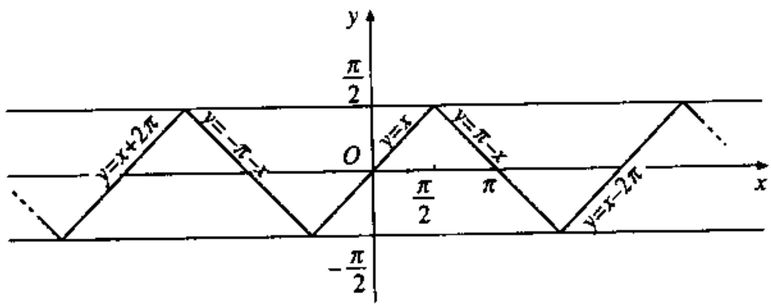
Biểu diễn đồ thị của hàm Arcsin

NHẬN XÉT :

1) $\forall x \in [-1 ; 1]$, $\sin(\mathrm{Arcsin}x) = x$.

2) Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin x)$ f là hàm số 2π – tuần hoàn, lẻ và :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{nếu } x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right] \end{cases}$$



Biểu diễn đồ thị của Arcsin ∘ sin

7.9.2 Arccos

Ánh xạ cos : $[0\ ;\ \pi] \to [-1\ ;\ 1]$ liên tục, giảm nghiêm ngặt, và $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$; vậy ánh xạ cos nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là Arccos : $[-1\ ;\ 1] \to [0\ ;\ \pi]$.

Vậy ta có : $\forall(x, y) \in [-1\ ;\ 1] \times [0\ ;\ \pi]$, $(y = \text{Arccos}x \Leftrightarrow x = \cos y)$.

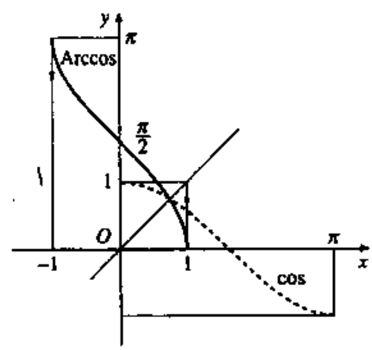
Arccos không chẵn cũng không lẻ.

Vì cos khả vi trên $[0\ ;\ \pi]$ và vì $(\forall y \in]0\ ;\ \pi[,\ \cos' y = -\sin y \neq 0)$, nên Arccos khả vi trên $]-1\ ;\ 1[$ và :

$$\forall x \in]-1\ ;\ 1[,\ \text{Arccos}'x = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}x)} = -\frac{1}{\sin(\text{Arccos}x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ta suy ra rằng Arccos thuộc lớp C^∞ trên $]-1\ ;\ 1[$.

x	-1		1
Arccos'x	‖ $-\infty$	$-$	$-\infty$ ‖
Arccos$x$	π	↘	0



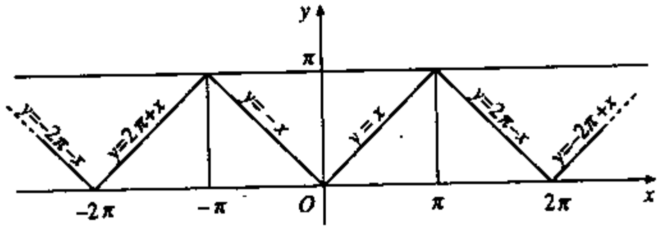
Biểu diễn đồ thị của hàm Arccos

NHẬN XÉT :

1) $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$, $\cos(\text{Arccos}x) = x$.

2) Cho g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \text{Arccos}(\cos x)$ g là hàm số 2π – tuần hoàn, chẵn,

và : $\forall x \in [0\ ;\ \pi]$, $g(x) = x$.



Biểu diễn đồ thị của Arccos ∘ cos

3) Ta có : $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$, $\text{Arccos}x = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\,x$, vì rằng $\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\,x \in [0\ ;\ \pi]$

và $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\,x\right) = \sin(\text{Arcsin}\,x) = x$.

Hệ thức này cho phép ta quy việc khảo sát hàm số Arccos về việc khảo sát hàm số Arcsin. Đường cong biểu diễn Arccos suy từ đường cong biểu diễn Arcsin bằng phép đối xứng qua đường thẳng có phương trình $y = \dfrac{\pi}{4}$ và có hướng của $(y'y)$.

7.9.3. Arctan

Ánh xạ tan : $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\ \to \mathbb{R}$ liên tục, tăng nghiêm ngặt, và $\lim\limits_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan = -\infty$, $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan = +\infty$; vậy ánh xạ tan nhận một ánh xạ ngược, ký hiệu là Arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Như vậy ta có :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $(y = \text{Arctan}x \Leftrightarrow x = \tan y)$.

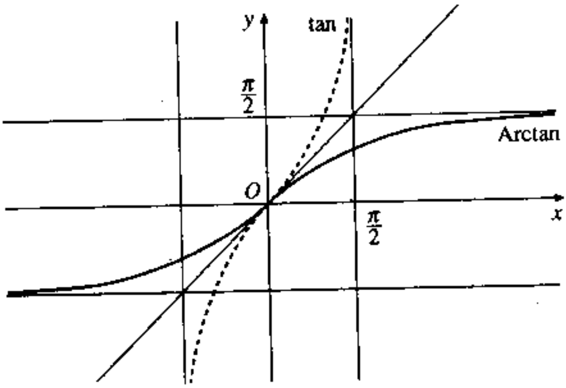
Arctan là hàm lẻ.

Do tan khả vi trên $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ và vì $\left(\forall y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[, \tan' y = \right.$ $\left. = 1 + \tan^2 y \neq 0\right)$, nên Arctan khả vi trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}'x = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Suy ra Arctan thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

x	0		$+\infty$
$\text{Arctan}'x$	1	$+$	
$\text{Arctan}x$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

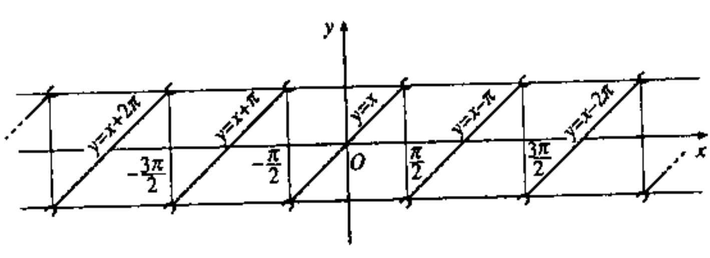


Biểu diễn đồ thị của hàm Arctan

NHẬN XÉT :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan}x) = x$.

2) Hàm số $h : x \mapsto \text{Arctan}(\tan x)$ xác định trên $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ là hàm π-tuần hoàn, lẻ, và : $\forall x \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = x$.



Biểu diễn đồ thị của Arctan ∘ tan

Mệnh đề

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan}x + \text{Arctan}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}\,\text{sgn}x$.

Chứng minh :

Với $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ và $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,x\right) = \dfrac{1}{\tan(\text{Arctan}x)} = \dfrac{1}{x}$;

do đó : $\dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}x = \text{Arctan}\dfrac{1}{x}$.

Với $x \in \mathbb{R}_-^*$ ta cũng lập luận tương tự (hoặc lập luận theo tính chẵn lẻ).

Hàm dấu, ký hiệu là sgn, được xác định như sau :

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ và } \text{sgn}x = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Thực hành : Khảo sát hàm số Arctan*a* + Arctan*b*

Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = \text{Arctan}a$, $\beta = \text{Arctan}b$. Ta có $(\alpha, \beta) \in \left(\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)^2$, và

nếu $\alpha + \beta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Bây giờ thì vấn đề là xác định được một khoảng có dạng

$$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{chứa } \alpha + \beta.$$

Ta đã có $-\pi < \alpha + \beta < \pi$.

$$\text{Ta lại có : } -\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{hay } \left(\alpha > 0 \text{ và } \beta < \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \text{hay } \left(\alpha < 0 \text{ và } \beta > -\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{hay } \left(a > 0 \text{ và } b < \dfrac{1}{a}\right) \\ \text{hay } \left(a < 0 \text{ và } b > \dfrac{1}{a}\right) \end{cases} \Leftrightarrow ab < 1.$$

Bây giờ chúng ta đã có thể biện luận :

- Nếu $ab < 1$ thì khi đó $\alpha + \beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, và do đó

$$\alpha + \beta = \text{Arctan}(\tan(\alpha + \beta)) = \text{Arctan}\frac{a+b}{1-ab}.$$

- Nếu ($ab > 1$ và $a > 0$), thì khi đó $\alpha + \beta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$, và do đó

$$\alpha + \beta = \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} + \pi.$$

- Nếu ($ab > 1$ và $a < 0$), thì khi đó $\alpha + \beta \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$, và do đó

$$\alpha + \beta = \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} - \pi.$$

- Trường hợp $ab = 1$ đã được khảo sát (Mệnh đề trang trước).

Cuối cùng ta có :

$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Arctan}a + \text{Arctan}b = \begin{cases} \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} & \text{nếu } ab < 1 \\ \dfrac{\pi}{2}\ \text{sgn}a & \text{nếu } ab = 1 \\ \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} + \pi\,\text{sgn}a & \text{nếu } ab > 1 \end{cases}$$

Có thể thực hiện việc khảo sát này theo một cách khác (xem bài tập 7.9.1).

Bài tập

◊ **7.9.1** Xác lập lại kết quả về Arctan$a$ + Arctan$b$ (xem 7.9.3) bằng cách khảo sát hàm số $f_a : x \mapsto \text{Arctan}\,\frac{a+x}{1-ax}$, với a cố định.

◊ **7.9.2** Khảo sát các hàm số f từ R đến R, xác định bởi các công thức sau đây (biến số là x ; hãy biến đổi biểu thức) :

a) $\sin(2\text{Arctan}x)$ b) $\tan(3\text{Arctan}x)$

c) $\sin\left(\frac{1}{2}\text{Arcsin}x\right)$ d) $\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

e) $\text{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ f) $2\text{Arctan}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$

g) $\text{Arccos}(2x^2 - 1)$.

◊ **7.9.3** Giải các phương trình sau đây với ẩn số $x \in \mathbb{R}$:

a) $\text{Arccos}x = \text{Arcsin}\,\frac{1}{3} + \text{Arccos}\,\frac{1}{4}$ b) $\text{Arcsin}(\tan x) = x$

c) $2\text{Arccos}x = \text{Arccos}(|2x^2 - 1|)$ d) $\text{Arccos}x = \text{Arcsin}(1 - x)$

e) $\text{Arctan}x + 2\text{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$ f) $\text{Arctan}x + \text{Arctan}2x = \frac{\pi}{4}$.

◊ **7.9.4** Chứng tỏ rằng :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\text{Arctan}(\text{sh}x)| = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}x}\right)$ b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arcsin}(\text{th}x) = \text{Arctan}(\text{sh}x)$.

◊ **7.9.5** Giải trên $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \text{Arcsin}y = 2\text{Arcsin}x \\ 2\text{Arccos}y = \text{Arccos}x \end{cases}$

◊ **7.9.6** Khảo sát các hàm số hợp $g\circ f$, trong đó $f \in \{\text{Arcsin}, \text{Arccos}, \text{Arctan}\}$ và $g \in \{\sin, \cos, \tan\}$.

◊ **7.9.7** Chứng tỏ rằng : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}x > \dfrac{x}{1 + x^2}$.

◊ **7.9.8** Cho $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $a < x < b$, hãy so sánh $\text{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$

và $\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.

◊ **7.9.9** Chứng tỏ rằng luật hợp thành $*$ định nghĩa như sau :

$$x * y = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$$

là một luật hợp thành trong trên $[-1 ; 1]$, và $([-1 ; 1], *)$ tạo thành một nhóm.

7.10 Hàm mũ phức

♦ **Định nghĩa** Cho $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **hàm mũ của** z, ký hiệu là $\exp(z)$, được định nghĩa như sau :

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Ánh xạ $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ định nghĩa như trên là thác triển của ánh xạ $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa trong mục 7.2, cũng như là ánh xạ $i\theta \mapsto e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ đã biết trong mục 2.4.1, Tập 1. Vậy ta có thể ký hiệu e^z thay vì $\exp(z)$.

♦ **Định lý 1**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$

Chứng minh :

Bằng cách viết $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, ta có :

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{x+x'}(\cos(y + y') + i\sin(y + y')) \\ &= e^x e^{x'}((\cos y\cos y' - \sin y\sin y') + i(\sin y\cos y' + \cos y\sin y')) \\ &= (e^x(\cos y + i\sin y))(e^{x'}(\cos y' + i\sin y')) = e^z e^{z'}. \end{aligned}$$ ■

Ta suy ra :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ e^{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{z_k}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \left(e^z \neq 0 \text{ và } e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}\right)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C},\ (e^z)^n = e^{nz}$.

Ta chú ý rằng ký hiệu $(e^z)^n$ (với z là số phức tùy ý) cho đến đây chỉ mới được xác định với $n \in \mathbb{Z}$.

♦ **Định lý 2** Ánh xạ $\varepsilon : \theta \mapsto e^{i\theta}$ là một song ánh liên tục từ $]-\pi ; \pi[$ lên $\mathbb{U} - \{-1\}$, và ánh xạ ngược của ε liên tục trên $\mathbb{U} - \{-1\}$.

Chứng minh : (có thể bỏ qua khi đọc lần thứ nhất) :

1) Rõ ràng là : $\forall \theta \in]-\pi ; \pi[,\ \varepsilon(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{U} - \{-1\}$.

2) Giả sử $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$. Bằng cách ký hiệu $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$, ta có : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $x^2 + y^2 = 1$. Vậy tồn tại $\theta \in [-\pi ; \pi[$ (duy nhất) sao cho $x = \cos\theta$ và $y = \sin\theta$ (xem 7.8). Ngoài ra $\theta \neq -\pi$.

Vậy $z = e^{i\theta} = \varepsilon(\theta)$, chứng tỏ ε là toàn ánh.

3) Nếu $(\theta_1, \theta_2) \in]-\pi ; \pi[^2$ và $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ thì $\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, do vậy $\theta_1 = \theta_2$, nên ε là đơn ánh.

4) Vì cos và sin liên tục trên R nên ánh xạ $\varepsilon : \theta \longmapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ liên tục trên $]-\pi ; \pi[$.

5) Giả sử $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$; ta ký hiệu $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Tồn tại $\theta \in]-\pi ; \pi[$ duy nhất sao cho $x = \cos\theta$ và $y = \sin\theta$, và $\theta = \varepsilon^{-1}(z)$ (xem 2). Vậy $x \neq -1$ và :

$$\frac{y}{1+x} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Vì $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ nên ta suy ra : $\frac{\theta}{2} = \mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}$, và do đó $\varepsilon^{-1}(z) = \theta =$

$= 2\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}$, chứng tỏ ε^{-1} liên tục trên $\mathbb{U} - \{-1\}$ (xem như hàm hợp của

$z \mapsto (x, y) \mapsto 2\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}$, với hàm trung gian là một hàm hai biến).

♦ **Định lý 3 (Định lý thay thế một hàm thuộc lớp C^1 từ I vào $\mathbb{U}$)**

Cho I là một khoảng thuộc R, $f : I \to \mathbb{U}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1.

1) Tồn tại một ánh xạ $\varphi : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 thỏa mãn :

$$\forall t \in I, f(t) = e^{i\varphi(t)}.$$

Ta nói rằng φ là một **hàm thay thế** cho f.

2) Nếu φ_1, φ_2 là hai hàm thay thế f, thì tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Chứng minh : (có thể bỏ qua khi đọc lần đầu) :

1) Ánh xạ $g : I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto -i\,\frac{f'(t)}{f(t)}$ liên tục trên I (vì f khác không và f thuộc lớp C^1 trên I), do đó tồn tại ít nhất một nguyên hàm của g trên I.

Nếu f là hằng số bằng -1, thì tính chất đang cần chứng minh là tầm thường (chẳng hạn φ là ánh xạ hằng π).

Vậy ta giả thiết $f \neq -1$; tồn tại $t_0 \in I$ sao cho $f(t_0) \in \mathbb{U} - \{-1\}$.

Theo Định lý 2, tồn tại $\theta_0 \in]-\pi ; \pi[$ sao cho $f(t_0) = e^{i\theta_0}$.

Bây giờ ta xét nguyên hàm φ của g trên I thỏa mãn $\varphi(t_0) = \theta_0$; nói cách khác :

$$\forall t \in I, \varphi(t) = \theta_o + \int_{t_o}^{t} -\mathrm{i}\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u\ .$$

Đặt $H : I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)e^{-i\varphi(t)}$. Vì f và φ thuộc lớp C^1 trên I, nên H cũng thế và :

$$\forall t \in I,\ \ H'(t) = f'(t)e^{-i\varphi(t)} + f(t)(-i\varphi'(t))e^{-i\varphi(t)} =$$
$$= (f'(t) - i f(t)\varphi'(t))\,e^{-i\varphi(t)} = 0.$$

Vậy H là ánh xạ hằng.

Hơn nữa : $H(t_o) = f(t_o)e^{-i\varphi(t_o)} = 1$.

Do đó : $H = 1$, và suy ra : $\forall t \in I, f(t) = e^{i\varphi(t)}$.

Hơn nữa, vì ($\forall t \in I, |f(t)| = 1$) nên φ lấy giá trị thực.

2) Giả sử $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 và sao cho :

$$\forall t \in I, f(t) = e^{i\varphi_1(t)} = e^{i\varphi_2(t)}.$$

Khi đó ta có : $\forall t \in I, \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Vì $\varphi_1 - \varphi_2$ liên tục trên I, nên ảnh $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$ (định lý các giá trị trung gian, Tập 1, 4.3.3 Định lý). Vì khoảng $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ đó bao hàm trong $2\pi\mathbb{Z}$, nên ta kết luận rằng $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ là một đơn tử, tức là :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

♦ **Hệ quả** Với mọi ánh xạ $f : I \to \mathbb{U}$ thuộc lớp C^p ($p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), các hàm thay thế của f đều thuộc lớp C^p trên I.

Chứng minh :

Giả sử $f : I \to \mathbb{U}$ thuộc lớp C^p.

Với các ký hiệu như trong phép chứng minh trước, một hàm thay thế của f là $\varphi : I \to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$\forall t \in I, \varphi(t) = \theta_o + \int_{t_o}^{t} -\mathrm{i}\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Vì $-\mathrm{i}\,\dfrac{f'}{f}$ thuộc lớp C^{p-1}, nên φ thuộc lớp C^p (xem như hàm tích phân của cận trên).

Cuối cùng, vì các hàm thay thế f chỉ khác với φ những hằng số, nên chúng đều thuộc lớp C^p trên I.

Bổ sung

◊ C7.1 Một phương pháp xây dựng các hàm số lượng giác

1) Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Chứng tỏ rằng φ là hàm lẻ, tăng nghiêm ngặt, thuộc lớp C^∞ trên R, và lõm trên $\mathbb{R}_+$.

b) Chứng minh rằng : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ \varphi(x) \le 1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, và từ đó suy ra rằng φ có giới hạn bằng L tại $+\infty$, và $L > 0$. Ta ký hiệu $\pi = 2L$.

c) Suy ra rằng hàm thu hẹp của φ trên $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ là song ánh, do đó nhận một ánh xạ ngược. Vậy ta sẽ dùng ký hiệu : $\tan : \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \to \mathbb{R}$ để chỉ ánh xạ π–tuần hoàn xác định như sau :

$$\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan y = \varphi^{-1}(y).$$

2) Chứng tỏ rằng tan thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, và :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \tan' x = 1 + \tan^2 x.$$

3) a) Ta dùng ký hiệu $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ để chỉ ánh xạ 2π–tuần hoàn, chẵn, xác định bởi :

$$\cos x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{nếu } x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{nếu } x = \frac{\pi}{2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{nếu } x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right] \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng cos liên tục trên R.

b) Ta dùng ký hiệu $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ để chỉ ánh xạ 2π–tuần hoàn, lẻ, xác định bởi :

$$\sin x = \begin{cases} \dfrac{|\tan x|}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{nếu } x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right] \\ 1 & \text{nếu } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng sin liên tục trên R và : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

4) Chứng tỏ rằng cos và sin thuộc lớp C^∞ trên R và rằng : $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.

◊ C7.2 Tính vô tỷ của $\tan r$ khi $r \in \mathbb{Q}^*$

A) Với mọi $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ ta ký hiệu $I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n \cos t\,\mathrm{d}t$.

1) Chứng tỏ rằng với mọi $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$:

$$I_{(n+1)}(x) = 2(2n+1)I_n(x) - 4x^2 I_{n-1}(x).$$

2) Suy ra rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại một cặp đa thức (C_n, S_n) với hệ số thuộc $\mathbb{Z}$, bậc không lớn hơn n, sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_n(x) = C_n(x)\cos x + S_n(x)\sin x.$$

B) Cho $r \in \mathbb{Q}_+^*$; ta chứng minh rằng : $\tan r \notin \mathbb{Q}$. Vì $\pi \notin \mathbb{Q}$ (xem Tập 1, 6.6.33), ta có : $r \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, và vì vậy tồn tại $\tan r$.

1) a) Ký hiệu $r = \dfrac{a}{b}$, $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\tan r = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, chứng tỏ rằng :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ qb^n C_n\left(\frac{a}{b}\right) + pb^n S_n\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{I_n(r)}{\cos r}\, qb^n.$$

b) Suy ra rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow I_n(r) = 0).$$

Bây giờ chúng ta sẽ suy ra một điều mâu thuẫn, bằng cách chỉ ra rằng $I_n(r)$ khác không kể từ một thứ tự nào đó.

2) Chứng tỏ rằng nếu $r \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(r) > 0$.

3) Ta giả thiết rằng ở đây thì $r \in \left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

a) Chứng minh rằng : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{r} (r^2 - t^2)^n \cos t\, dt\right| \leq \left(r - \dfrac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \dfrac{\pi^2}{4}\right)^n$

và :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - t^2)^n \cos t\, dt \geq \frac{r^n}{2(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right)$$

b) Suy ra rằng tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_1 \Rightarrow I_n(r) > 0)$.

◊ C7.3 Thể các số đại số

Một số thực α được gọi là **đại số** nếu và chỉ nếu tồn tại một đa thức P (phụ thuộc α), với hệ số hữu tỷ, sao cho : $P \neq 0$ và $P(\alpha) = 0$. Ta ký hiệu tập các số đại số là $\mathbb{A}$.

1) Kiểm tra rằng $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

2) Chứng tỏ rằng một số thực α là đại số khi và chỉ khi họ các số thực $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{Q}$.

3)* Chứng minh rằng : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{A}^2,\ \alpha\beta \in \mathbb{A}$.

4) Chứng tỏ rằng : $\forall\alpha \in \mathbb{A} - \{0\}, \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{A}$.

5) Cho $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{A} - \{0\}) \times \mathbb{A}$ và $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

a) Chứng tỏ rằng : $1 + \gamma \in \mathbb{A}$.

b) Suy ra rằng : $\alpha + \beta \in \mathbb{A}$.

Như vậy ta đã chứng minh rằng $\mathbb{A}$ là một thể con của $\mathbb{R}$.

6)* Chứng minh rằng $\mathbb{A}$ đếm được (xem C1.2, Tập 1).

◊ C7.4* Tính siêu việt của e

Mọi số thực không đại số (xem C7.3) được gọi là **siêu việt**. Vì $\mathbb{R}$ không đếm được (xem C1.2, Tập 1) và do $\mathbb{A}$ bao hàm trong $\mathbb{R}$ và đếm được, nên tập hợp các số siêu việt, tức là $\mathbb{R} - \mathbb{A}$, là không đếm được, do vậy không rỗng.

1) Với mọi $t \in \mathbb{R}$ và mọi $P \in \mathbb{R}[X]$, ta sẽ ký hiệu :

$$I_P(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u)\mathrm{d}u$$

a) Ký hiệu $d = \deg(P)$, chứng tỏ rằng :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ I_P(t) = e^t \sum_{j=0}^{d} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{d} P^{(j)}(t).$$

b) Ký hiệu $\widetilde{P}$ là đa thức thu được khi thay trong P mỗi hệ số bằng giá trị tuyệt đối của nó, chứng tỏ rằng :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |I_P(t)| \le |t|\, e^{|t|}\, \widetilde{P}(|t|).$$

Bây giờ chúng ta lập luận phản chứng : Giả sử $e \in \mathbb{A}$. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ thỏa mãn : $a_0 \neq 0$ và $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k e^k = 0$.

Xét một số nguyên tố p (sẽ xác định sau), đa thức

$$P = X^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (X - k)^p,\ m = pn + (p-1) = \deg(P), \text{ và } J = \sum_{k=0}^{n} a_k I_P(k).$$

2) Chứng minh rằng : $J = -\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(j)}(k)$.

3) a)* Chứng minh rằng, với mọi (j, k) thuộc $\{0, ..., m\} \times \{0, ..., n\}$:

$$\begin{cases} p! & \text{chia hết } P^{(j)}(k) \text{ nếu } (j, k) \neq (p-1, 0) \\ (p-1)! & \text{chia hết } P^{(p-1)}(0) \\ p! & \text{không chia hết } P^{(p-1)}(0) \text{ nếu } p > n. \end{cases}$$

b) Từ đó suy ra rằng, nếu $p > n$ và $p > |a_0|$, thì khi đó J là số nguyên chia hết cho $(p-1)!$ và không chia hết cho $p!$, và do đó $|J| \geq (p-1)!$

4) Mặt khác, chứng tỏ rằng : $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $\widetilde{P}(k) \leq (2n)^m$, và suy ra rằng tồn tại số thực C, không phụ thuộc p, sao cho : $|J| \leq C^p$.

5) Kết luận.

Bằng cách cải biên phương pháp trên đây, chúng ta cũng có thể chứng minh rằng π là số siêu việt.

(Tài liệu tham khảo : Alan Baker, *Transcendantal number theory*, Cambridge University Press, 1979, trang 4).

Chương 8

So sánh các hàm số trong lân cận một điểm

Các hàm số sử dụng trong chương này, nếu không có gì nói trái lại, đều xác định trong lân cận một phần tử a thuộc $\overline{\mathbb{R}}$, trên một khoảng I không rỗng và không thu về còn một điểm, và lấy giá trị thực. Các định nghĩa và các mệnh đề sẽ được mở rộng một cách dễ dàng :

- cho các hàm số lấy giá trị phức, và tổng quát hơn, cho các hàm lấy giá trị trong một không gian vectơ định chuẩn
- cho các hàm số xác định trong lân cận của a, có thể trừ ra tại a (chẳng hạn như hàm số $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ với $a = 0$)
- cho các dãy số thực (hay phức), chúng vốn là các ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$ (hay $\mathbb{C}$), trong trường hợp này thì ∞ đóng vai trò của a
- cho các hàm số xác định trong lân cận phải của a (hay lân cận trái a).

8.1 Tính trội, ưu thế

8.1.1 Các định nghĩa

♦ **Định nghĩa 1** Cho các ánh xạ $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$, giả sử :

$$\forall x \in I - \{a\},\ \varphi(x) \neq 0.$$

Ta nói rằng f là **không đáng kể** so với φ (hay : φ **trội hơn** f) trong lân cận của a nếu và chỉ nếu tồn tại một ánh xạ $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x) \\ \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Khi đó ta ký hiệu $f \underset{a}{\ll} \varphi$ (ký hiệu Hardy) hay $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ (ký hiệu Landau).

Nhận xét về các ký hiệu

1) Để cách viết bớt cồng kềnh, với điều kiện không gây ra nhầm lẫn, người ta viết $f \ll \varphi$, $f = o(\varphi)$ thay cho $f \underset{a}{\ll} \varphi$, $f = \underset{a}{o}(\varphi)$; nhưng khi đó cần luôn luôn nhớ rằng tính chất ($f \ll \varphi$) đó là ứng với a ("cục bộ" tại a).

2) Vì nhiều hàm số khác nhau f_1, f_2, ... có thể không đáng kể so với φ tại a, nên theo 1) chúng ta sẽ viết : $f_1 = o(\varphi)$, $f_2 = o(\varphi)$, ..., tuy rằng $f_1 \neq f_2$. Để tránh cách sử dụng dấu đẳng thức không hợp lệ đó, ta có thể viết $f \in o(\varphi)$, (thay vì $f = o(\varphi)$), khi đó $o(\varphi)$ sẽ chỉ **tập hợp** các hàm số không đáng kể so với φ tại a. Nhưng cách ký hiệu liên thuộc đó sẽ trái ngược với các thói quen tính toán đã hình thành.

3) Trên thực tế thì các hàm số được sử dụng thường lại được xác định bằng giá trị $f(x)$ của ảnh của một phần tử biến thiên x. Khi đó chúng ta sẽ lạm dụng và ký hiệu $f(x) \underset{x \to a}{\ll} \varphi(x)$, $f(x) \ll \varphi(x)$, $f(x) = \underset{x \to a}{o}(\varphi(x))$, $f(x) = o(\varphi(x))$, thay vì $f \underset{a}{\ll} \varphi$, $f \ll \varphi$, $f = \underset{a}{o}(\varphi)$, $f = o(\varphi)$.

THÍ DỤ :

- Trong lân cận của $+\infty$: $x = o(x^2)$
- Trong lân cận của 0 : $(\sin x)^3 = o(x)$.

NHẬN XÉT :

1) Ta có : $f = \underset{a}{o}(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\to} 0 \\ \varphi(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \end{cases}$

2) $f = \underset{a}{o}(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{a} f = 0$.

♦ **Định nghĩa 2** Cho $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$; giả sử : $\forall x \in I - \{a\}$, $\varphi(x) \neq 0$.

Ta nói rằng φ có **ưu thế so với** f trong lân cận của a nếu và chỉ nếu tồn tại một ánh xạ $C : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x) = C(x)\varphi(x) \\ C \text{ bị chặn trong lân cận của } a \end{cases}$$

Khi đó ta sẽ viết $f \underset{a}{\leq} \varphi$ (ký hiệu Hardy) hay $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ (ký hiệu Landau).

Các nhận xét về ký hiệu sau Định nghĩa 1, cũng vẫn áp dụng cho Định nghĩa 2 trên đây.

THÍ DỤ :

- trong lân cận $+\infty$: $2x^2 = O(x^2)$
- trong lân cận $+\infty$: $\sin x = O(1)$
- trong lân cận 0 : $x^2 = O(x)$ (và cả $x^2 = o(x)$).

NHẬN XÉT :

1) $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ nếu và chỉ nếu $\dfrac{f}{\varphi}$ bị chặn trong lân cận của a.

2) $f = \underset{o}{O}(1)$ nếu và chỉ nếu f bị chặn trong lân cận của a.

8.1.2 Các phép toán về các hàm trội, hàm ưu thế

Tất cả các quan hệ so sánh dùng trong mục 8.1.2 này đều ứng với một phần tử a cố định thuộc $\overline{\mathbb{R}}$ (ngoại trừ các tính chất từ 9) đến 13)). Ở đây :

$f, g, \varphi, \psi, u, v$ chỉ những hàm xác định trong lân cận của a và lấy giá trị thực

λ chỉ một số thực cố định

h chỉ một hàm số xác định trong lân cận một phần tử b thuộc $\overline{\mathbb{R}}$ và lấy giá trị thực.

♦ **Mệnh đề 1**

1) $f = o(\varphi) \quad \Rightarrow \quad f = O(\varphi)$

2) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ g = o(\varphi) \end{cases} \Rightarrow f + g = o(\varphi)$

3) $f = o(\varphi) \quad \Rightarrow \lambda f = o(\varphi)$

4) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = O(\varphi) \end{cases} \Rightarrow f + g = O(\varphi)$

5) $f = O(\varphi) \quad \Rightarrow \lambda f = O(\varphi)$

6) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = O(\psi) \end{cases} \Rightarrow fg = O(\varphi\psi)$

7) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \Rightarrow fg = o(\varphi\psi)$

8) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \Rightarrow fg = o(\varphi\psi)$

9) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \Rightarrow f = O(u)$

10) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \Rightarrow f = o(u)$

11) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = o(u) \end{cases} \Rightarrow f = o(u)$

12) $\begin{cases} f = \underset{a}{o}(\varphi) \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Rightarrow f \circ h = \underset{b}{o}(\varphi \circ h)$

13) $\begin{cases} f = \underset{a}{O}(\varphi) \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Rightarrow f \circ h = \underset{b}{O}\ (\varphi \circ h).$

Chứng minh : Các tính chất trên đây được chứng minh dễ dàng từ các định nghĩa. Chẳng hạn đối với 10) :

nếu $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\rightarrow} 0$ và nếu $\dfrac{\varphi}{u}$ bị chặn trong lân cận của a, thì

$$\frac{f}{u} = \frac{f}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{u} \underset{a}{\rightarrow} 0 .$$

NHẬN XÉT : Ta có thể viết các tính chất trên đây theo một cách lạm dụng ký hiệu :

1) $o(\varphi) = O(\varphi)$

2) $o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi)$

⋮

6) $O(\varphi)\, O(\psi) = o(\varphi\psi)$

⋮

9) $O(O(u)) = O(u)$

⋮

♦ **Mệnh đề 2** **(So sánh theo lôgarit)**

Nếu $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ là hai dãy số thực dương thực sự, và nếu từ một số thứ tự nào đó mà $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, thì $u_n = O(v_n)$.

Chứng minh :

Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n \geq N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > N$, ta có :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}},\ \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}},\ \ldots,\ \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N},$$

từ đó bằng cách nhân từng vế và giản ước ta thu được : $\dfrac{u_n}{u_N} \leq \dfrac{v_n}{v_N}$.

Như thế : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \dfrac{u_N}{v_N} v_n$,

và suy ra : $$u_n = O(v_n).$$

THÍ DỤ : $u_n = \dfrac{4^n}{C_{2n}^n}\ (> 0),\ v_n = \sqrt{n}\ (> 0)\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+1} \text{ và } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Một phép tính đơn giản chứng tỏ rằng :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+2}{2n+1} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \text{ do đó } u_n = o(v_n),$$

tức là : $$\frac{4^n}{C_{2n}^n} = O(\sqrt{n}).$$

8.1.3 Các thí dụ thông dụng

- 1) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta)$.

  2) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (x^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} o(x^\beta) \Leftrightarrow \alpha > \beta)$.

- Theo 3.1.4, 5), Tập 1, ta có :

  $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$ (khi n dần đến vô cùng).

- Theo 7.5, ta có :

1) $\ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$

2) $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$

3) $\forall(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ $|\ln x|^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} o(x^\gamma)$

4) $\forall(a, \alpha) \in]1 ; +\infty[\times \mathbb{R}$, $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(a^x)$

5) $\forall(a, \alpha) \in]1 ; +\infty[\times \mathbb{R}$, $a^x \underset{x \to -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$.

Bài tập

◊ **8.1.1** Cho $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ là hai dãy có phần tử thuộc $\mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn $u_n = o(v_n)$. Chứng tỏ rằng tồn tại một dãy $(w_n)_n$ có phần tử thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho : $u_n = o(w_n)$ và $w_n = o(v_n)$.

◊ **8.1.2** So sánh trong lân cận của $+\infty$:

$$f : x \mapsto (\ln(\ln x))^{x^{\ln x}} \text{ và } g : x \mapsto (\ln x)^{x^{\ln(\ln x)}}.$$

8.2 Hàm tương đương

8.2.1 Định nghĩa

♦ **Định nghĩa** Cho $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in I - \{a\} \; ; f(x) \neq 0 \text{ và } \varphi(x) \neq 0.$$

Người ta nói rằng f **tương đương với** φ trong lân cận của a nếu và chỉ nếu tồn tại một ánh xạ $\lambda : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x) = \lambda(x)\varphi(x) \\ \lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1. \end{cases}$$

Khi đó ta viết $f \underset{a}{\sim} \varphi$, hay theo cách lạm dụng, $f \sim \varphi$, $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$,

$f(x) \sim \varphi(x)$.

NHẬN XÉT :

1) $f \underset{a}{\sim} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[a]{} 1 \\ \varphi(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \end{cases}$

2) $f \underset{a}{\sim} \varphi \Leftrightarrow f - \varphi = \underset{a}{o}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi - f = \underset{a}{o}(f)$.

THÍ DỤ : $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$.

♦ **Mệnh đề 1**

$$f \sim \varphi \Rightarrow \begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = O(f) \end{cases}$$

Chứng minh :

Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$ thì $\dfrac{f}{\varphi}$ và $\dfrac{\varphi}{f}$ đều có giới hạn hữu hạn (bằng 1) tại a, và do đó bị chặn trong lân cận của a.

NHẬN XÉT : Đảo của mệnh đề trên sai : chẳng hạn với $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \end{array}$ và $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \end{array}$, $a = 0$, ta có $f = O(\varphi)$ và $\varphi = O(f)$, nhưng ta không có $f \sim \varphi$.

♦ **Mệnh đề 2** Quan hệ $\underset{a}{\sim}$ là một quan hệ tương đương trên tập các hàm số xác định trong lân cận của a và không triệt tiêu trong lân cận của a, có thể trừ ra tại a.

Chứng minh :

• *Tính phản xạ :* $f - f = 0 = o(f)$.

• *Tính đối xứng :* Giả sử $f \sim \varphi$. Theo Mệnh đề 1 ta có $f - \varphi = o(\varphi)$ và $\varphi = O(f)$, do đó (xem 8.1.2, Mệnh đề 10) : $f - \varphi = o(f)$. Khi đó $\varphi - f = o(f)$, tức là $\varphi \sim f$.

• *Tính bắc cầu :* Giả sử $f \sim \varphi$ và $\varphi \sim u$. Vì $f - \varphi = o(\varphi)$ và $\varphi = O(u)$ nên ta có : $f - \varphi = o(u)$ (xem 8.1.2, Mệnh đề 10). Do đó :

$$\begin{cases} f - \varphi = o(u) \\ \varphi - u = o(u) \end{cases}, \text{ từ đó suy ra } f - u = o(u)$$

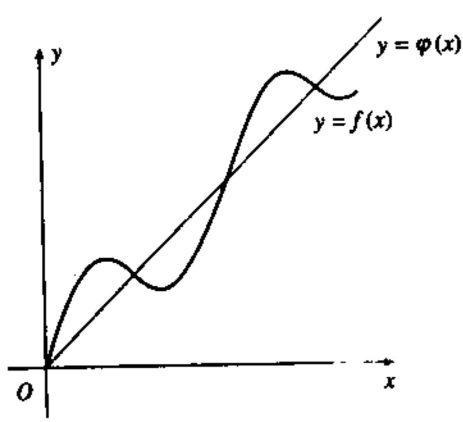
(xem 8.1.2, Mệnh đề 2), tức là $f \sim u$.

NHẬN XÉT :

1) Giả sử $l \in \mathrm{R} - \{0\}$, ta có : $f \underset{a}{\sim} l \Leftrightarrow f \xrightarrow[a]{} l$.

2) Cách viết $f \underset{a}{\sim} 0$ là vô nghĩa, vì các hàm số xét ở đây không được triệt tiêu tại bất cứ điểm nào thuộc $I - \{a\}$.

3) Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$, và nếu $\varphi(x) > 0$ trong lân cận của a, thì $f(x) > 0$ trong lân cận của a. Thực vậy vì $\dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[a]{} 1$ nên trong lân cận của a ta có $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$, từ đó suy ra $f(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\varphi(x) > 0$. Như thế nếu φ dương trong lân cận của a thì tính chất (dương) đó được truyền cho các hàm số tương đương với φ trong lân cận của a.



4) Nhưng ngược lại nếu φ đơn điệu trong lân cận của a thì tính chất đơn điệu này không truyền sang các hàm số tương đương với φ trong lân cận của a. Chẳng hạn, với $f: \begin{array}{l} \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R} \\ x \mapsto x + 2\sin x \end{array}$ và

$\varphi : \mathbb{R}_+ \xrightarrow[x \mapsto x]{} \mathbb{R}$, ta có $f \underset{+\infty}{\sim} \varphi$, φ tăng, f không đơn điệu trong bất cứ lân cận nào của $+\infty$. Chúng ta sẽ trở lại vấn đề này khi nghiên cứu các chuỗi số thực có "dấu thay đổi" trong Tập 3.

5) Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$ và nếu $f(a)$ và $\varphi(a)$ tồn tại thì $f(a) = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0$.

Như vậy hai hàm số xác định trong một lân cận của a và tương đương trong lân cận của a sẽ đồng thời bằng không hay khác không tại a.

8.2.2 Các phép toán trên các hàm tương đương

Trong mục này các ký hiệu giống như ở § 8.1.2.

♦ **Mệnh đề 1**

1) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ g \sim \psi \end{cases} \Rightarrow fg \sim \varphi\psi$

2) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow f^n \sim \varphi^n$

(ở đây f^n chỉ $f \dots f$ với n thừa số)

3) $f \sim \varphi \Rightarrow \dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{\varphi}$

4) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ \varphi \sim \psi \end{cases} \Rightarrow f = o(\psi)$.

5) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ \varphi = o(u) \end{cases} \Rightarrow f = o(u)$

6) Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$, nếu φ nhận những giá trị > 0 trong lân cận của a (có thể trừ ra tại a), và nếu $\alpha \in \mathbb{R}$, thì $f^\alpha \underset{a}{\sim} \varphi^\alpha$ (ở đây φ^α chỉ ánh xạ $x \mapsto (\varphi(x))^\alpha$)

7) (Phép hợp bên phải) Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$ và nếu $\lim\limits_{b} h = a$, thì

$f \circ h \underset{b}{\sim} \varphi \circ h$.

Chứng minh : Cũng như trường hợp Mệnh đề §8.1.2, phép chứng minh là dễ dàng. Chẳng hạn với 1) :

$$\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[a]{} 1 \\ \dfrac{g}{\psi} \xrightarrow[a]{} 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{fg}{\varphi\psi} = \frac{f}{\varphi} \cdot \frac{g}{\psi} \xrightarrow[a]{} 1 \Rightarrow fg \underset{a}{\sim} \varphi\psi.$$

♦ **Mệnh đề 2 (Phép hợp hàm số bằng hàm mũ)**

$$e^f \underset{a}{\sim} e^\varphi \Leftrightarrow f - \varphi \xrightarrow[a]{} 0.$$

Ở đây e^f chỉ ánh xạ $x \mapsto e^{f(x)}$, mà ta cũng có thể ký hiệu là $\exp \circ f$.

Chứng minh : Chỉ cần nhận xét rằng $\dfrac{e^f}{e^\varphi} = e^{f-\varphi}$.

NHẬN XÉT : Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$ thì ta không thể suy ra rằng $e^f \underset{a}{\sim} e^\varphi$. Chẳng hạn

$x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, nhưng $e^{x+1} \underset{x \to +\infty}{\not\sim} e^x$. Ta có thể diễn đạt điều này như sau : không được phép mặc nhiên hợp bằng hàm mũ những hàm số tương đương.

♦ **Mệnh đề 3 (Hợp bằng hàm lôgarit)**

Giả sử φ nhận những giá trị > 0 trong lân cận của a (có thể trừ ra tại a). Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$ và nếu tại a φ có giới hạn l thuộc $\overline{\mathbb{R}}_+ - \{1\}$, thì

$$\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ \varphi.$$

Chứng minh : Ta phân biệt ba trường hợp.

1) $l = +\infty$. Trong lân cận của a : $\varphi(x) > 1$, và do đó $\ln(\varphi(x)) \neq 0$, suy ra :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(\varphi(x))} - 1 = \frac{\ln\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)}{\ln(\varphi(x))} \xrightarrow[x \to a]{} 0, \text{ vì } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \text{ và } \ln\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty.$$

2) $l = 0$. Ta quy về trường hợp trên bằng cách xét $\dfrac{1}{f}$ và $\dfrac{1}{\varphi}$.

3) $l \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. $\begin{cases} \ln f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ln l \neq 0 \\ \ln \varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ln l \neq 0 \end{cases}$, do đó $\ln f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ln l \underset{x \to a}{\sim} \ln \varphi(x)$.

NHẬN XÉT : Nếu $f \underset{a}{\sim} \varphi$ và $\varphi \xrightarrow[a]{} 1$, thì ta không thể kết luận là

$\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ \varphi$. Chẳng hạn $1 + x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + 2x$, nhưng $\ln(1 + x) \underset{x\to 0}{\not\sim} \ln(1 + 2x)$ (vì

$\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, xem 7.1, Mệnh đề 2), hay 8.2.3, $\ln(1 + 2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$, $x \underset{x\to 0}{\not\sim} 2x$).

Khảo sát phép cộng

• Ta không được phép mặc nhiên cộng các hàm tương đương với nhau, tức là :

$\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases}$ không kéo theo $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$. Chẳng hạn :

$\begin{cases} x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x \\ -x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} -x \end{cases}$, nhưng $(x + x^2) + (-x + x^3) =$

$$= x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x^2 \underset{x \to 0}{\not\sim} 0 = x + (-x).$$

Việc cộng máy móc các tương đương thức là một nguyên nhân quan trọng gây lỗi.

• Tuy nhiên, với một số giả thiết nhất định, chúng ta có thể "cộng các tương đương thức". Các tính chất sau đây rất hay dùng :

1) $f = o(\varphi) \Rightarrow f + \varphi \underset{a}{\sim} \varphi$.

Chẳng hạn : $x^2 + \sin x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.

2) Nếu $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases}$ và nếu φ và ψ nhận những giá trị > 0 trong lân cận của a,

thì $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$. Thực vậy :

$(f + g) - (\varphi + \psi) = (f - \varphi) + (g - \psi)$, $f - \varphi = o(\varphi) = o(\varphi + \psi)$,
$g - \psi = o(\psi) = o(\varphi + \psi)$, suy ra $(f + g) - (\varphi + \psi) = o(\varphi + \psi)$, tức là

$$f + g \sim \varphi + \psi.$$

3) Bây giờ ta giả thiết rằng tồn tại $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ và $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho :
$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda x^\alpha$ và $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mu x^\beta$.

Trong trường hợp này ta nói rằng f và φ có một **phần chính là lũy thừa thực của x** (trong lân cận của $+\infty$).

• Theo 1) : $\begin{cases} \text{nếu } \alpha < \beta : \text{khi đó } f(x) + \varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mu x^\beta \\ \text{nếu } \alpha > \beta : \text{khi đó } f(x) + \varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda x^\alpha \end{cases}$

• Nếu $\alpha = \beta$ và $\lambda + \mu \neq 0$ thì :

$$\frac{f(x) + \varphi(x)}{(\lambda + \mu)x^\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1,$$ và do đó

$f(x) + \varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (\lambda + \mu)x^\alpha$.

• Nếu $\alpha = \beta$ và $\lambda + \mu = 0$ thì từ các giả thiết ta chưa thể suy ra được một biểu thức đơn giản nào tương đương với $f + \varphi$; đặc biệt không thể suy ra rằng $f + \varphi \underset{+\infty}{\sim} 0$. Thí dụ :

$x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$, $-x^2 + 3x \underset{x \to +\infty}{\sim} -x^2$, nhưng $(x^2 + x) + (-x^2 + 3x) = 4x \underset{x \to +\infty}{\not\sim} 0$.

Tóm lại ta có $\begin{cases} f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda x^\alpha \\ \varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mu x^\beta \end{cases} \Rightarrow f(x) + \varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda x^\alpha + \mu x^\beta$, ngoại trừ trường hợp khi tổng các phần chính bằng không ($\alpha = \beta$ và $\lambda + \mu = 0$).

8.2.3 Các tương đương thức thông dụng

1) Nếu f khả vi tại a và $f'(a) \neq 0$, thì do $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$, nên

ta có $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x - a)$. Suy ra :

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x,\ \ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x,\ \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x,\ \operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x,\ \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x,\ \operatorname{th} x \underset{x \to 0}{\sim} x, \\[2ex] \operatorname{Arcsin} x \underset{x \to 0}{\sim} x,\ \ \operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x, \end{array}}$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \quad (\text{với } \alpha \in \mathbb{R} \text{ cố định}).}$$

2) Nhận xét rằng $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ và $\text{ch}x - 1 = 2\text{sh}^2 \dfrac{x}{2}$, ta thu được :

$$\boxed{1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \text{ch}x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$$

3) Vì $\text{Arccos}\, x \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$, nên ta có :

$$\boxed{\text{Arccos}\, x \underset{x \to 1^-}{\sim} \sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\,\sqrt{1-x}.}$$

4) Tại $+\infty$ và $-\infty$, mọi đa thức khác đa thức không đều tương đương với số hạng bậc cao nhất của nó.

5) Tại 0, mọi đa thức khác đa thức không đều tương đương với số hạng bậc thấp nhất của nó.

6) Tại $+\infty$ và $-\infty$, mọi phân thức hữu tỷ khác không đều tương đương với thương của các số hạng bậc cao nhất.

7) Tại 0, mọi phân thức hữu tỷ khác không đều tương đương với thương của các số hạng bậc thấp nhất.

THÍ DỤ : $x^3 + 2x^2 - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3$, $x^4 + x^2 + 2x \underset{x \to 0}{\sim} 2x$, $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$,

$\dfrac{2x^4 - x^2 + x}{x^2 - 1} \underset{x \to 0}{\sim} -x.$

NHẬN XÉT : Vì hầu hết các tương đương thức thông dụng đều được xác lập trong lân cận của 0, nên việc đổi biến số để quy về lân cận đó thường có hiệu quả. Chẳng hạn chúng ta hãy xác định phần chính của $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + x - 6}$ trong lân cận của 2 (theo thang các hàm số $x \mapsto (x-2)^n$, $n \in \mathbb{Z}$). Ký hiệu $t = x - 2$, ta có :

$$f(x) = f(2 + t) = \frac{(2+t)^3 + 2(2+t)}{(2+t)^2 + (2+t) - 6} = \frac{12 + 14t + 6t^2 + t^3}{5t + t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{12}{5t}.$$

Vậy $f(x) \underset{x \to 2}{\sim} \dfrac{12}{5}(x-2)^{-1}$.

8.2.4 Thí dụ về việc sử dụng hàm tương đương

Việc sử dụng đúng đắn hàm tương đương có thể cho phép ta tính được nhanh chóng một số giới hạn dạng không xác định

THÍ DỤ :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$?

$$\begin{cases} \ln(1+2\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\tan x \underset{x\to 0}{\sim} 2x \\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \end{cases}$$, suy ra $\dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} 2$, và do đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} = 2.$$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$?

$\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\dfrac{1}{x} = 1$, do đó

$\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, sau đó do tính liên tục của exp tại 1,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\mathrm{cotan}4x}$?

Ta thực hiện phép đổi biến $h = \dfrac{\pi}{4} - x$; $h \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}]{} 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} - h$. Vậy :

$$\ln\left((\tan x)^{\mathrm{cotan}4x}\right) = \mathrm{cotan}(\pi - 4h)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - h\right)\right) = -\mathrm{cotan}4h\ln\frac{1-\tan h}{1+\tan h}.$$

Vì $\begin{cases} \ln(1-\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \sim -h \\ -\ln(1+\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \sim -h \end{cases}$, và vì tổng các phần chính khác không nên

ta suy ra $\ln(1-\tan h) - \ln(1+\tan h) \sim -2h$ (xem 8.2.2, 3)).

Vậy $\ln\left((\tan x)^{\mathrm{cotan}4x}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} \dfrac{1}{2}$, do đó $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\mathrm{cotan}4x} = e^{\frac{1}{2}}$.

Bài tập

◊ **8.2.1** Hãy nêu ra thí dụ về hai dãy số thực $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ sao cho :

$$\begin{cases} u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n\geq 1} \text{ giảm} \\ (v_n)_{n\geq 1} \text{ chỉ đơn điệu kể từ một thứ tự nào đó} \end{cases}$$

◊ **8.2.2** Cho $x \in \mathbb{R}_+^*$; hãy tìm một tương đương đơn giản (loại λn^α, với $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}$) của $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$, khi n dần tới vô cùng.

◊ **8.2.3** Hãy xác định một tương đương đơn giản của $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}$ khi n dần tới vô cùng (sử dụng định lí Césaro, C3.1, Tập 1).

◊ **8.2.4** Cho $f, g, \varphi, \psi : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ sao cho :

$$f \underset{+\infty}{\sim} \varphi,\ g \underset{+\infty}{\sim} \psi,\ \lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = 0.$$

Chứng tỏ rằng : $e^{(f(x))^2} + e^{(g(x))^2} - 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{(\varphi(x))^2} + e^{(\psi(x))^2} - 2.$

◊ **8.2.5** Tính các giới hạn sau đây :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(x\,\mathrm{sh}\,\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\log_x a - \log_a x}{\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,a}$, $a \in \,]0 ; 1[\, \cup \,]1 ; +\infty[$ cố định

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x} - \mathrm{sh}\sqrt{x^2-x})$

f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$ g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$

h) $\lim\limits_{x\to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$, $a \in \mathbb{R}^*$ cố định.

i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{sh}\,x\sin x}}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{x^3+1}}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$

m) $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} (\tan 2x)^{\sin 4x}$ n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{x^{\frac{1}{x}}} - x\right)$

o) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln(1 + x))^{\ln(1+x^2)}$ p) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(\sin x)^{\operatorname{sh} x} - 1}{(\operatorname{sh} x)^{\sin x} - 1}$.

◊ **8.2.6** Cho $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ là hai dãy số thực thỏa mãn :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (a_n > 0 \text{ và } b_n > 0) \\ a_n^n \xrightarrow[n\infty]{} a > 0 \\ b_n^n \xrightarrow[n\infty]{} b > 0 \end{cases}$$

Cho $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho $p + q = 1$. Tính $\lim\limits_{n\infty} (pa_n + qb_n)^n$.

◊ **8.2.7** Chứng minh rằng : $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1 + x))^n \mathrm{d}x \underset{n\infty}{\sim} \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$.

◊ **8.2.8*** Cho dãy số thực $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi :

$$\begin{cases} u_o \in \,]0 \,;\, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ (lập luận như trong C3.1, III, 2), Tập 1).

◊ **8.2.9*** Cho dãy số thực $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0 \,;\, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \end{cases}$$

Hãy xác định phần chính của u_n theo thang các hàm số $n \mapsto \lambda n^{\alpha}$, với $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, khi n dần tới $+\infty$ (xét u_n^3 và lập luận như trong C3.1, III, 2), Tập 1).

8.3 Khai triển hữu hạn

8.3.1 Đại cương về khai triển hữu hạn

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $0 \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f nhận một **khai triển hữu hạn tới bậc n tại 0** (viết tắt là KTHH$_n$(0)) khi và chỉ khi tồn tại một đa thức P với hệ số thực sao cho :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \text{trong lân cận của } 0,\ f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \end{cases}$$

NHẬN XÉT : f nhận một KTHH$_n$(0) khi và chỉ khi tồn tại một đa thức P với hệ số thực và một ánh xạ $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \forall x \in I,\ f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)\ . \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề 1** **(Tính duy nhất của phần chính quy của một KTHH$_n$(0))**
Nếu f nhận một KTHH$_n$(0) thì tồn tại $P \in \mathbb{R}[X]$ duy nhất sao cho :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \text{trong lân cận của } 0,\ f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \end{cases}$$

P được gọi là **phần chính quy** của KTHH$_n$(0) của f.

Chứng minh : Giả sử tồn tại hai đa thức thích hợp P_1, $P_2 \in \mathbb{R}[X]$. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} \deg(P_1 - P_2) \leq n \\ \text{trong lân cận của } 0,\ P_1(x) - P_2(x) = o(x^n) \end{cases}$$

Nếu $P_1 \neq P_2$, thì bằng cách xét số hạng bậc thấp nhất $\alpha_k X^k$ của $P_1 - P_2$ (tức là $\alpha_k \neq 0$), ta có : $\begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ P_1(x) - P_2(x) \underset{x \to 0}{\sim} \alpha_k x^k \end{cases}$, mâu thuẫn với $P_1(x) - P_2(x) = o(x^n)$.

♦ **Định nghĩa 2**

1) Cho $a \in \mathbb{R}$, I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $a \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ta nói rằng f nhận một **khai triển hữu hạn tới bậc n trong lân cận của a** (viết tắt là KTHH$_n(a)$) khi và chỉ khi ánh xạ

$$f_0 : I_0 = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ a + t \in I\} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(a + t)$$

nhận một $\text{KTHH}_n(0)$. Đa thức $x \mapsto P(x-a)$, trong đó P là phần chính của $\text{KTHH}_n(0)$ của f_0, gọi là **phần chính quy** của $\text{KTHH}_n(a)$ của f.

Nói cách khác : $\begin{cases} \deg(P) \le n \\ \forall t \in I_0, \quad f(a+t) = P(t) + \underset{t \to 0}{o}(t^n) \\ \forall x \in I, \quad f(x) = P(x-a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n) \end{cases}$

Cần chú ý biểu thị $P(x-a)$ theo các lũy thừa bậc tăng dần của $(x-a)$, chứ không phải của x.

2) Cho I là một khoảng không bị chặn trên, $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ta nói rằng f nhận một **khai triển hữu hạn tới bậc n trong lân cận của $+\infty$** (viết tắt là $\text{KTHH}_n(+\infty)$) khi và chỉ khi ánh xạ

$$f_0 : J_0 = \{t = \mathbb{R}_+^* \,;\, \frac{1}{t} \in I\} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{nhận một } \text{KTHH}_n(0).$$

Hàm phân thức hữu tỉ $x \mapsto P\left(\frac{1}{x}\right)$ gọi là **phần chính quy** của $\text{KTHH}_n(+\infty)$ của f, trong đó P là phần chính quy của $\text{KTHH}_n(0)$ của f_o.

Nói cách khác : $\begin{cases} \deg(P) \le n \\ \forall t \in J_0, \quad f_o(t) = P(t) + \underset{t \to 0}{o}(t^n) \\ \forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) \end{cases}$

Có thể phát biểu một định nghĩa tương tự bằng cách thay $+\infty$ bằng $-\infty$. Như vậy khi nghiên cứu các khai triển hữu hạn, chúng ta sẽ quy về lân cận của 0 một cách gần như có hệ thống.

♦ **Mệnh đề 2** **(Chặt cụt một KTHH(0))**

Nếu f nhận một $\text{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy P, thì với mọi k thuộc $\{0, ..., n\}$, f nhận một $\text{KTHH}_k(0)$ mà phần chính quy nhận được từ P bằng cách chặt cụt P đến bậc k, tức là chỉ giữ lại các số hạng có bậc $\le k$ của P.

Chứng minh : Ta ký hiệu đa thức thu được khi chặt cụt P đến bậc k là P_1 ; khi đó tồn tại một đa thức Q sao cho : $P = P_1 + X^{k+1}Q$.

Do đó : $\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) = P_1(x) + (x^{k+1}Q(x) + o(x^n)) =$

$$= P_1(x) + o(x^k).$$

♦ **Mệnh đề 3**

1) Điều kiện cần và đủ để f nhận một $KTHH_0(0)$ là f liên tục tại 0. Khi đó ta có : $\forall x \in I, f(x) = f(0) + o(1)$.

2) Điều kiện cần và đủ để f nhận một $KTHH_1(0)$ là f khả vi tại 0. Khi đó ta có : $\forall x \in I, f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$.

Chứng minh :

1) f liên tục tại 0 khi và chỉ khi $f(x) - f(0) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, cũng tức là :

$$\forall x \in I, f(x) = f(0) + o(1).$$

2) • Giả sử f khả vi tại 0 : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$. Vậy ta có :

$\forall x \in I - \{0\}, f(x) - f(0) = x(f'(0) + o(1))$; do tại 0 thì hệ thức này hiển nhiên đúng nên ta thu được : $\forall x \in I, f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.

• Ngược lại, giả sử f nhận một $KTHH_1(0)$:

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1 x + o(x).$$

Khi đó f nhận một $KTHH_0(0)$: $\forall x \in I, f(x) = a_0 + o(1)$, vậy f liên tục và $a_0 = f(0)$ (xem 1)).

Đến đây thì : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} a_1$, nghĩa là f khả vi tại 0 và $f'(0) = a_1$.

NHẬN XÉT :

1) Chúng ta sẽ thấy (8.3.2) rằng nếu f thuộc lớp C^n trên I thì f nhận một $KTHH_n(0)$ mà phần chính quy chứa các đạo hàm liên tục đến cấp n của f tại 0.

2) Một hàm số có thể nhận một $KTHH_n(0)$ ($n \geq 2$) mà không nhất thiết khả vi đến cấp n tại 0. Thí dụ :

• $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

a) f nhận một $KTHH_2(0)$:

$$\forall x \in \mathrm{R}, f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^2) \quad (\text{vì } x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0) .$$

b) f khả vi trên R và : $\begin{cases} \forall x \in \mathrm{R}^*, f'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} - 2\cos \dfrac{1}{x^2} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

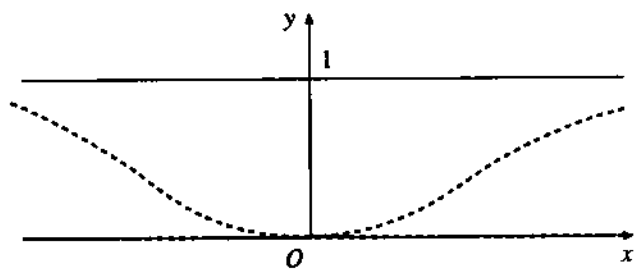
c) f không khả vi đến cấp 2 tại 0, vì f' không liên tục tại 0 (tại 0 f' không có giới hạn).

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) f nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ vì :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \underset{x \to 0}{=} o\,(x^n).$$



b) f chỉ liên tục tại 0, f chỉ khả vi tại 0, f'' không xác định tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

♦ **Mệnh đề 4** Giả sử f là một hàm nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$, với phần chính quy ký hiệu là P.

1) Nếu f là hàm chẵn thì P chẵn.

2) Nếu f là hàm lẻ thì P lẻ.

Chứng minh : Vì $(\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n))$, nên ta cũng có :

$\forall x \in I, f(-x) = P(-x) + o(x^n)$, và $x \mapsto P(-x)$ là một đa thức bậc $\leq n$.

1) Nếu f là hàm chẵn, thì do tính duy nhất của từng phần chính quy của $\mathrm{KTHH}_n(0)$ của f, $P(-X) = P$, tức là P chẵn.

2) Nếu f là hàm lẻ, ta cũng suy ra như trên rằng $P(-X) = -P$, và do đó P lẻ.

NHẬN XÉT : Các khai triển hữu hạn được định nghĩa cho đến đây trong điểm 8.3.1 này đôi khi được gọi là **khai triển hữu hạn yếu** :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Ta nói rằng f nhận một khai triển hữu hạn **mạnh** khi và chỉ khi tồn tại $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \forall x \in I, f(x) = P(x) + O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Rõ ràng, nếu f nhận một KTHH$_n(0)$ mạnh có "phần chính quy" là P, thì f cũng nhận một KTHH$_n(0)$ yếu với phần chính quy cũng là P. Một hàm số có thể nhận một KTHH$_n(0)$ yếu mà không nhận một KTHH$_n(0)$ mạnh ; thí dụ $f : \mathrm{R} \underset{x \longmapsto \sqrt[3]{x}}{\longrightarrow} \mathrm{R}$ nhận một KTHH$_0(0)$ yếu ($f(x) = o(1)$), nhưng không có KTHH$_0(0)$ mạnh (ta không có $f(x) = O(x)$). Nhưng nếu một hàm số f nhận một KTHH$_{n+1}(0)$ yếu thì nó sẽ nhận một KTHH$_n(0)$ mạnh : chỉ cần ghép số hạng chứa x^{n+1} với $o(x^{n+1})$ để được $O(x^{n+1})$. Như vậy theo một cách sơ lược thì đối với một hàm số đã cho :

KTHH$_{n-1}(0)$ yếu $\Rightarrow$ KTHH$_n(0)$ mạnh $\Rightarrow$ KTHH$_n(0)$ yếu. Trong thực tế thì sử dụng một KTHH$_n(0)$ mạnh rất thường quy về việc sử dụng một KTHH$_{n+1}(0)$ yếu, nhưng không biểu thị định lượng được số hạng chứa x^{n+1} ; việc này có lợi khi khảo sát một số chuỗi hay tích phân suy rộng (xem Tập 3).

8.3.2 Định lý Taylor–Young

♦ **Định lý (Định lý Taylor–Young)**

Cho $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng trong R, $a \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$; nếu f thuộc lớp C^n trên I, thì f nhận một KTHH$_n(a)$, có phần chính quy là $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$; nói cách khác :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n),$$

hay :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

Chứng minh : Rõ ràng ta có thể giả thiết rằng $n \geq 1$ (xem 8.3.1, Mệnh đề 3). Theo định lý Taylor với phần dư dạng tích phân (6.4.5, Định lý, Tập 1) với mọi x thuộc V ta có :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

Ta có :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\,dt.$$

Cho $\varepsilon > 0$; vì $f^{(n)}$ liên tục tại a nên tồn tại $\eta \in]0 ; 1[$ sao cho :

$$\begin{cases} [a-\eta ; a+\eta] \subset I. \\ \forall t \in [a-\eta ; a+\eta],\ |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Vậy với mọi x thuộc $[a-\eta ; a+\eta]$ ta có :

$$\left|\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a))\,dt\right| \leq \left|\int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right|dt\right|$$

$$\leq \varepsilon \left|\int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}\,dt\right| = \varepsilon\frac{|x-a|^n}{n!}.$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\,dt \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n).$$

Cuối cùng ta có : $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \underset{x\to a}{+ o}((x-a)^n).$

♦ **Hệ quả** Nếu f thuộc lớp C^∞ trong lân cận của a, thì f nhận một khai triển hữu hạn tùy ý trong lân cận của a, thu được bằng cách áp dụng công thức Taylor–Young :

$$\forall x \in I,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \underset{x\to a}{+ o}((x-a)^n).$$

Hệ quả này cho phép ta thu được những KTHH(0) của nhiều hàm số thông dụng :

1) $$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

2) $$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})}$$

3) $$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$

4) $$\boxed{\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})}$$

5) $$\boxed{\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$

6) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ánh xạ $f_\alpha : x \mapsto (1 + x)^\alpha$ thuộc lớp C^∞ trên $]-1 ; +\infty[$, và bằng phép quy nạp ta có ngay :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1 ; +\infty[, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$

Đặc biệt : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)$.

Ta suy ra :

$$\boxed{(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Thay α bằng -1 :

$$\boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

Rồi thay x bằng $-x$:

$$\boxed{\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)}$$

Chú ý rằng ta có thể tìm lại $\text{KTHH}_n(0)$ cuối cùng này như sau :

$$\boxed{\frac{1}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).}$$

8.3.3 Tính đạo hàm và nguyên hàm của một KTHH(0)

♦ **Mệnh đề** **(Tính nguyên hàm một KTHH(0))**

Cho $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ chứa 0, $f : I \to \mathbb{R}$. Nếu f thuộc lớp C^1 trên I và nếu f' nhận một $\text{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy ký hiệu là P, thì f nhận một $\text{KTHH}_{n+1}(0)$ với phần chính quy là phần chính quy của các nguyên hàm của P mà giá trị tại 0 bằng $f(0)$:

$$\forall x \in I, f(x) = f(0) + \int_0^x P + o(x^{n+1}).$$

Chứng minh : Tồn tại một ánh xạ $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I, f'(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

Đặt $\varphi : I \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^n\varepsilon(x)$; vì f' và P liên tục trên I và vì rằng $\varphi = f' - P$, nên φ liên tục trên I, do đó có nguyên hàm trên I. Những nguyên hàm của φ trên I mà nhận giá trị 0 tại 0 là $\phi : I \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \varphi$$

Ta có : $\forall x \in I,\ f(x) = f(0) + \int_0^x f' = f(0) + \int_0^x (P + \varphi) = \left(f(0) + \int_0^x P\right) + \Phi$

Ta ký hiệu là Q đa thức xác định như sau : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = f(0) + \int_0^x P$; rõ ràng là $\deg(Q) \leq n + 1$.

Ta còn phải chứng tỏ rằng : $\phi(x) = o(x^{n+1})$.

Giả sử $\alpha > 0$; vì $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho :

$$\begin{cases} [-\eta\ ;\ \eta] \subset I \\ \forall t \in [-\eta\ ;\ \eta],\ |\varepsilon(t)| \leq \alpha \end{cases}$$

Khi đó với mọi x thuộc $[-\eta\ ;\ \eta]$ ta có : $|\Phi(x)| \leq \left| \int_0^x |t^n| \alpha \, dt \right| = \dfrac{\alpha |x|^{n+1}}{n+1}$.

Hệ thức trên chứng tỏ rằng $\dfrac{\Phi(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, tức là $\phi(x) = o(x^{n+1})$. ■

Bằng cách áp dụng mệnh đề trên ta thu được các KTHH(0) của một số hàm số thông dụng :

1) $$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

2) $$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

3) $$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2p+2}) = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \end{aligned}}$$

4) $$\boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2p+2}) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})}$$

5) Ánh xạ $f :]-1\ ;\ 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ thuộc lớp C^∞, và với mọi x thuộc $]-1\ ;\ 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + ...$$

$$... + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{p!}(-x^2)^p + o(x^{2p+1})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + ... + \frac{1.3...(2p-1)}{2.4...(2p)}x^{2p} + o(x^{2p+1})$$

Hơn nữa vì ta có $f(0) = 0$ nên suy ra :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Arcsin}x &= x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + ... + \\ &+ \frac{1.3...(2p-1)}{2.4...(2p)}\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})\end{aligned}}$$

6) Tương tự :

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} - ... \\ &+ (-1)^p\frac{1.3...(2p-1)}{2.4...(2p)}\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})\end{aligned}}$$

♦ **Hệ quả** **(Đạo hàm của một KTHH(0))**

Cho $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng mở thuộc $\mathbb{R}$ có chứa 0, $f : I \to \mathbb{R}$. Nếu f thuộc lớp C^1 trên I và nếu f và f' nhận những khai triển hữu hạn theo thứ tự đến bậc $n + 1$ và n trong lân cận của 0, thì phần chính quy của KTHH$_n$(0) của f' là đạo hàm của phần chính quy của KTHH$_{n+1}$(0) của f.

NHẬN XÉT : Có thể xảy ra là một hàm số f thuộc lớp C^1 trên I, nhận một KTHH$_{n+1}$(0) mà f' không nhận KTHH$_n$(0) ($n \geq 1$), chẳng hạn như thí dụ sau :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} |x|^{n+\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

8.3.4 Các phép toán đối với các hàm số có KTHH$_n$(0)

♦ **Mệnh đề 1** **(Phép cộng và luật kết hợp ngoài)**

Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$, f, $g : I \to \mathbb{R}$. Nếu f và g nhận những KTHH$_n$(0) với các phần chính quy theo thứ tự là P, Q :

$$\begin{cases} \begin{cases} \deg(P) \le n \\ \forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases} \\ \begin{cases} \deg(Q) \le n \\ \forall x \in I, g(x) = Q(x) + o(x^n) \end{cases} \end{cases}$$

thì khi đó $\lambda f + g$ nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy là $\lambda P + Q$:

$$\begin{cases} \deg(\lambda P + Q) \le n \\ \forall x \in I, (\lambda f + g)(x) = (\lambda P + Q)(x) + o(x^n). \end{cases}$$

Chứng minh : $\lambda P + Q$ là một đa thức có bậc $\le n$ và ta có :

$$\forall x \in I, (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda(P(x) + o(x^n)) + (Q(x) + o(x^n))$$
$$= (\lambda P + Q)(x) + o(x^n).$$

NHẬN XÉT : Giả sử f có $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy là P, và g có $\mathrm{KTHH}_p(0)$ với phần chính quy là Q (chẳng hạn với $n \le p$). Khi đó $f + g$ nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy thu được bằng cách chặt cụt $P + Q$ đến bậc n. Nhưng có thể xảy ra là $f + g$ không có $\mathrm{KTHH}_p(0)$, hoặc là $f + g$ nhận một $\mathrm{KTHH}_p(0)$ mà phần chính quy không phải là $P + Q$. Nói cách khác, khi ta cộng các KTHH(0), thì các KTHH đó phải "cùng bậc".

♦ **Mệnh đề 2 (Phép nhân)**

Cho $n \in \mathbb{N}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$. Nếu f và g có những $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với các phần chính quy theo thứ tự là P, Q :

$$\begin{cases} \begin{cases} \deg(P) \le n \\ \forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases} \\ \begin{cases} \deg(Q) \le n \\ \forall x \in I, g(x) = Q(x) + o(x^n) \end{cases} \end{cases}$$

thì khi đó fg nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$ mà phần chính quy thu được bằng cách chặt cụt PQ đến bậc n.

Chứng minh : Giả sử A là đa thức thu được khi chặt cụt PQ đến bậc n : $\deg(A) \le n$ và tồn tại $R \in \mathbb{R}[X]$ sao cho : $PQ = A + X^{n+1}R$. Khi đó ta có :

$$\forall x \in I, (fg)(x) = (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n))$$
$$= A(x) + (x^{n+1}R(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^{2n}))$$
$$= A(x) + o(x^n).$$

THÍ DỤ : Nếu $f(x) = 2 - x + x^2 + o(x^2)$ và $g(x) = 3 + 2x - x^2 + o(x^2)$ thì

$$(fg)(x) = 6 + x - x^2 + o(x^2).$$

NHẬN XÉT :

1) Với các ký hiệu như ở Mệnh đề 2, "nói chung" PQ không phải là phần chính quy (nếu có) của $\mathrm{KTHH}_{2n}(0)$ của fg.

2) Để có $\mathrm{KTHH}_n(0)$ của một tích fg, trong một số trường hợp ta có thể dùng những KTHH(0) của f và g với bậc thấp hơn hay bằng n, và có chú ý đến giá trị của các phần chính quy của các KTHH(0) của f và g. Chẳng hạn, nếu $f(x) = 3x^2 - x^3 + o(x^4)$ và $g(x) = 4x^2 + 3x^3 + o(x^4)$, thì qua phép nhân ta được một $\mathrm{KTHH}_6(0)$: $(fg)(x) = 12x^4 + 5x^5 + o(x^6)$. Xem thêm bài tập 8.3.1, f).

♦ **Mệnh đề 3** **(Phép hợp)**

Cho $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng thỏa mãn $0 \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$, J là một khoảng thỏa mãn $0 \in \overset{\circ}{J}$, $g : J \to \mathbb{R}$. Nếu f và g nhận những $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với các phần chính quy theo thứ tự là P, Q và nếu $f(0) = 0$ thì khi đó $g \circ f$ nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy thu được bằng cách chặt cụt đa thức hợp $Q \circ P$ đến bậc n.

Chứng minh : Vì f nhận một $\mathrm{KTHH}_0(0)$, nên f liên tục tại 0 và tồn tại một khoảng I_1 sao cho $0 \in \overset{\circ}{I_1}$ và $f(I_1) \subset J$; vậy nếu cần thay I bằng I_1, ta có thể giả thiết rằng $f(I) \subset J$, và do đó $g \circ f$ xác định trên I.

Tồn tại $\varepsilon_1 : I \to \mathbb{R}$ và $\varepsilon_2 : J \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \begin{cases} \forall x \in I, f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \forall y \in J, g(y) = Q(y) + y^n \varepsilon_2(y) \\ \varepsilon_2(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \end{cases} \end{cases}$$

Với mọi $x \in I$ ta có :

$$(g \circ f)(x) = Q(P(x) + x^n\varepsilon_1(x)) + (P(x) + x^n\varepsilon_1(x))^n\varepsilon_2(P(x) + x^n\varepsilon_1(x)).$$

• Ký hiệu $Q = b_1X + \ldots + b_nX^n$ (với $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$), rồi khai triển :

$$b_1(P(x) + x^n\varepsilon_1(x)) + \ldots + b_n(P(x) + x^n\varepsilon_1(x))^n,$$

ta thấy là tồn tại $\varepsilon_3 : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I, Q(P(x) + x^n\varepsilon_1(x)) = Q(P(x)) + x^n\varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

Sau đó ký hiệu là T đa thức thu được khi chặt cụt $Q \circ P$ đến bậc n, ta thấy là tồn tại $\varepsilon_4 : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I, Q(P(x)) = T(x) + x^n\varepsilon_4(x) \\ \varepsilon_4(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

• Trường hợp $n = 0$ quy về việc khảo sát hàm hợp của hai hàm số liên tục (xem 4.3.2, Tập 1, Mệnh đề 2) ; vậy ta có thể giả thiết $n \geq 1$.

Vì $P(0) = f(0) = 0$, nên tồn tại $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $P = XP_1$. Khi đó ta có :

$$\forall x \in I,\ (P(x) + x^n\varepsilon_1(x))^n = x^n(P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x))^n.$$

Khi ký hiệu là $\varepsilon_5 : I \to \mathbb{R}$ ánh xạ xác định như sau :

$$\forall x \in I,\ \varepsilon_5(x) = (P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x))^n\varepsilon_2(f(x)),$$

thì các định lý về giới hạn cho phép ta khẳng định : $\varepsilon_5(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Cuối cùng tồn tại $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ ($\varepsilon = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5$) sao cho :

$$\begin{cases} \forall x \in I : (g \circ f)(x) = T(x) + x^n\varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

Vậy $g \circ f$ nhận một KTHH$_n(0)$ với phần chính quy là T.

THÍ DỤ : KTHH$_6(0)$ của $\varphi : x \mapsto \cos(\sin x)$.

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$, sau đó ta có :

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^6 + o(x^6)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 - \frac{2x^6}{3}\right) - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + o(x^6).$$

Trong thực tế người ta khai triển $(a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)^k$ (với $k \in \{1, \dots, n\}$) mà chỉ giữ lại các số hạng bậc $\leq n$. Khi cần đến nhiều lũy thừa bậc liên tiếp thì nhận xét sau có thể có ích :

$$(a_1x + \dots + a_nx^n)^k = (a_1x + \dots + a_nx^n)^{k-1}(a_1x + \dots + a_nx^n).$$

NHẬN XÉT :

1) Nếu $f(0) \neq 0$ thì thường ta đổi biến số ($z = y - f(0)$) và thực hiện phép biến đổi biểu thức của $g(f(x))$ để đưa về lân cận của 0.

THÍ DỤ :

a) KTHH$_4(0)$ của $\varphi : x \mapsto \ln(2\cos x + \sin x)$

• $2\cos x + \sin x = 2\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right) + \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$

$$= 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

• $\ln(2\cos x + \sin x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$

$$= \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{8}\right) - \frac{1}{4}\frac{x^4}{16} + o(x^4)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{24}x^3 - \frac{35}{192}x^4 + o(x^4).$$

b) $\mathrm{KTHH}_3(0)$ của $\varphi : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$

• $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

• $$e^{\sqrt{1+x}} = e \,.\, e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$$

$$= e\left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right) = e + \frac{e}{2}x + \frac{e}{48}x^3 + o(x^3).$$

2) Số hạng bậc thấp nhất của phần chính quy của $\mathrm{KTHH}_n(0)$ của f có thể ≥ 2 (do tính chẵn lẻ) : $f(x) = \sum_{k=\nu}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, trong đó $\nu \in \{2, ..., n\}$. Ta có thể sửa lại phép chứng minh của Mệnh đề 3 ; ta sẽ thấy rằng khi đó, đối với g thì một KTHH(0) tới một bậc m nào đó, thấp hơn n, cũng đủ. Ta xác định m bằng điều kiện : $(m + 1)\nu \geq n + 1$.

THÍ DỤ : $\mathrm{KTHH}_8(0)$ của $\varphi : x \mapsto \ln(1 + x^2\sin x)$. Do các KTHH(0) (bậc ≥ 3) của $x \mapsto x^2\sin x$ có bậc thấp nhất là 3, nên ta sẽ tính $\mathrm{KTHH}_8(0)$ của $x \mapsto x^2\sin x$ và $\mathrm{KTHH}_3(0)$ của $u \mapsto \ln(1 + u)$:

• $$x^2\sin x = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) = x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} + o(x^8)$$

• $$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

(Thật ra chỉ cần $\mathrm{KTHH}_3(0)$: $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$).

• Suy ra $$\varphi(x) = x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} - \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120}\right)^2 + o(x^8)$$

$$= x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} - \frac{1}{2}\left(x^6 - \frac{x^8}{3}\right) + o(x^8)$$

$$= x^3 - \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{720}x^7 + \frac{1}{6}x^8 + o(x^8).$$

Nói chung, khi đã biết các KTHH(0) của f và g và muốn có một KTHH(0) của $g \circ f$, và nếu $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_\nu x^\nu$ và $g(y) \underset{y \to 0}{\sim} b_\mu y^\mu$ (với $(\mu, \nu) \in \{1, ..., n\}^2$, $(a_\nu, b_\mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$),

thì ta sẽ tính KTHH$_p$(0) của f và KTHH$_q$(0) của g, trong đó p và q là những số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn :

$$\nu \le p,\ \mu(p+1) \ge n+1,\ \mu \le q,\ \nu(q+1) \ge n+1.$$

THÍ DỤ : KTHH$_6$(0) của $\varphi : x \mapsto \operatorname{ch}(1 - \cos x)$.

- $1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

- $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^6) = 1 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + o(x^6).$

◆ **Mệnh đề 4 (KTHH của hàm nghịch đảo của một hàm)**

Cho $n \in \mathbb{N}$, $g : I \to \mathbb{R}$. Nếu g có KTHH$_n$(0) với phần chính quy Q và nếu $g(0) \neq 0$, thì $\frac{1}{g}$ xác định trong lân cận của 0 và có một KTHH$_n$(0).

Chứng minh :

Chỉ cần chú ý rằng $\frac{1}{g}$ là hàm hợp $\varphi \circ g_1$, trong đó $g_1 : x \mapsto \frac{g(x) - g(0)}{g(0)}$ và

$\varphi : y \mapsto \frac{1}{g(0)} \frac{1}{1+y}$, vì $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(0)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(x) - g(0)}{g(0)}}$, rồi áp dụng Mệnh đề 3.

THÍ DỤ :

1) KTHH$_5$(0) của tan

- $$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

- $$\tan x = \sin x \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

2) KTHH$_5$(0) của th.

Theo cách tương tự ta được : $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$

NHẬN XÉT : Nếu $g(0) = 0$, trong biểu thức của $g(x)$ (và, nếu cần, của $f(x)$) ta sẽ viết một lũy thừa thích hợp của x thành thừa số chung, để sau đó quy về Mệnh đề 3.

THÍ DỤ : Chứng tỏ rằng hàm số $\varphi : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$, xác định trong lân cận của 0 (trừ ra tại 0) có thể thác triển liên tục tại 0, và hàm thác triển đó (vẫn ký hiệu là φ) nhận một $KTHH_3(0)$. Tính KTHH(0) đó.

• $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ và $\tan^2 x \underset{x \to 0}{\sim} x^2$, vậy $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$; vậy ta sẽ thác triển liên tục tại 0 bằng cách đặt $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$.

• Để thu được một $KTHH_3(0)$ cho φ, và vì các phần chính quy của các KTHH(0) của $1 - \cos x$ và của $\tan^2 x$ đều có thừa số chung là một số hạng bậc 2, nên ta sẽ tính một $KTHH_5(0)$ cho $1 - \cos x$ và $\tan^2 x$.

a) $1 - \cos x = 1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = x^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + o(x^3)\right)$

b) tan thuộc lớp C^∞ trong lân cận của 0, và $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$, do đó (xem 8.3.3, Hệ quả) :

$$1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5)$$

$$\tan^2 x = x^2\left(1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^3)\right).$$

Vậy : $$\varphi(x) = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + o(x^3)}{1 + \dfrac{2x^2}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^3).$$

•NHẬN XÉT : *Sử dụng phép chia theo lũy thừa bậc tăng (không thuộc chương trình).*

Cho $n \in \mathbb{N}$, $f, g : I \to \mathbf{R}$. Nếu f và g nhận những $KTHH_n(0)$ với các phần chính quy theo thứ tự là P, Q, và nếu $g(0) \neq 0$, thì khi đó $\dfrac{f}{g}$ xác định trong lân cận của 0 và nhận một $KTHH_n(0)$, với phần chính là thương tới bậc n của phép chia P cho Q theo các lũy thừa bậc tăng dần. Chúng ta nhớ lại rằng (xem Tập 5) nếu P, Q là những đa thức một ẩn sao cho $Q(0) \neq 0$, thì khi đó với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại một cặp (U, R) duy nhất sao cho :

$$\begin{cases} P = QU + X^{n+1}R \\ \deg(U) \le n \end{cases}$$

Ta nói rằng U là thương tới bậc n của phép chia P cho Q theo các lũy thừa tăng.

Chứng minh : Tồn tại $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ thỏa mãn :

$$\begin{cases} \forall x \in I : \begin{cases} f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x) \end{cases} \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Mặt khác, vì $Q(0) = g(0) \neq 0$, tồn tại một cặp đa thức (U, R) duy nhất sao cho :

$$\begin{cases} P = QU + X^{n+1}R \\ \deg(U) \leq n \end{cases}$$

Ta có : $\forall x \in I, f(x) - x^n\varepsilon_1(x) = P(x) = Q(x)\,U(x) + x^{n+1}R(x)$

$$= (g(x) - x^n\varepsilon_2(x))\,U(x) + x^{n+1}R(x)$$

$$= g(x)\,U(x) + x^n(-\varepsilon_2(x)\,U(x) + xR(x)).$$

Ánh xạ g liên tục tại 0 (vì g nhận một $\mathrm{KTHH}_0(0)$) và $g(0) \neq 0$; vậy trong lân cận của 0 thì $g(x) \neq 0$.

Ta suy ra rằng trong lân cận của 0 : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = U(x) + x^n\varepsilon(x)$,

trong đó ε được xác định bởi :

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)\,U(x) + xR(x)}{g(x)}$$

Rõ ràng là : $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Vậy $\dfrac{f}{g}$ nhận một $\mathrm{KTHH}_n(0)$ với phần chính quy là U.

Bài tập

◊ **8.3.1** Hãy tính lập khai triển hữu hạn với bậc và lân cận quy định của hàm số xác định bởi biểu thức sau (biến số thực x) :

a) bậc 3, lân cận của 0, $f(x) = (1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^{-1}$

b) 5, 0, $\operatorname{ch}2x\operatorname{sh}3x$ c) n, 0, $\cos^3 x$ ($n \in \mathbb{N}$), d) 4, 0, $\ln\dfrac{\sin x}{x}$

e) 3, 0, $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\operatorname{Arcsin} x)^2}$ f) 11, 0, $((\operatorname{ch}x - \cos x)(\operatorname{sh}x - \sin x))^2$

g) 3, 0, $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2)$ h) 3, 0, $\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$

i) 2, 0, $\ln\left(e^{ax} + e^{bx}\right)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ j) 9, 0, $\tan\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}\right)$

k) 3, 0, $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ l) 5, 0, $e^{\cos x}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

m) 3, 0, $\operatorname{Arctan}(e^x)$ n) 2, 0, $(1 + \operatorname{Arctan}x)^{\frac{x}{\sin^2 x}}$

o) 3, 0^+, $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ p) 2, 0, $\left(\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{-\operatorname{cotan}2x}$

q) 4, 0, $\cos(\ln(\cos x))$

r) 4, 0, $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

s) 5, 0, $(\cos x)^{\sin x}$

t) 4, 0, $\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$

u) 8, 0, $\tan^3 x((\cos x)^{x^2} - 1)$

v) 5, 0, $\frac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$

w) 2, 0, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$

x) 3, 0, $\ln(2 + x + \sqrt{1 + x})$

y) 11, 0, $\sin(x - \text{Arctan} x)$

z) 13, 0, $\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

a') 3, $\frac{\pi}{3}$, $\text{Arctan}(2\sin x)$

b') 2, 2π, $\cos\sqrt{x^2 + 5\pi^2}$

c') 3, $+\infty$, $\text{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$.

◊ **8.3.2** Chứng tỏ rằng ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{x^2}$ nhận một ánh xạ ngược, và hãy thành lập $KTHH_5(0)$ của hàm số f^{-1}.

◊ **8.3.3** Thành lập $KTHH_4(0)$ của hàm số f xác định trong lân cận V của 0 và thỏa mãn :

$$\begin{cases} \forall x \in V, f'(x) = \tan(x + f(x)) \\ f(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

8.3.5 Thí dụ về ứng dụng các khai triển hữu hạn

A) Tính giới hạn

Để tính một số giới hạn dạng không xác định ($\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, ∞^0, 1^∞), ta có thể sử dụng các khai triển hữu hạn.

THÍ DỤ :

1) Tính $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sh}\, x - 2\text{sh}2x + \text{sh}3x}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}$.

• $\text{sh}x - 2\text{sh}2x + \text{sh}3x = \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - 2\left(2x + \frac{8x^3}{6}\right) + \left(3x + \frac{27x^3}{6}\right) + o(x^3)$

$$= 2x^3 + o(x^3)$$

• $\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2 = \left((x+2x^2) - \frac{1}{2}(x^2+4x^5) + \frac{1}{3}x^3\right)$

$$+\left(1+\frac{1}{2}(-2x)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3\right)-1-x^2+o(x^3) = -\frac{13}{6}x^3+o(x^3).$$

Vậy giới hạn cần tính bằng $-\frac{12}{13}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(2^x + 3^x - 5^x)^{(2^x+3^x-2.5^x)^{-1}}$?

Ký hiệu biểu thức đã cho là $f(x)$ (f xác định trong lân cận của 0), ta có :

$$\ln f(x) = \frac{\ln(2^x+3^x-5^x)}{2^x+3^x-2.5^x}.$$

• $2^x+3^x-2.5^x = e^{x\ln 2}+e^{x\ln 3}-2e^{x\ln 5} =$

$$= (1 + x\ln 2) + (1 + x\ln 3) - 2(1 + x\ln 5) + o(x) = x\ln\frac{6}{25} + o(x)$$

• $2^x + 3^x - 5^x = 1 + x\ln\frac{6}{5} + o(x)$, vậy $\ln(2^x + 3^x - 5^x) \sim x\ln\frac{6}{5}$.

Vậy $\ln f(x) \sim \dfrac{x\ln\frac{6}{5}}{x\ln\frac{6}{25}}$, và cuối cùng thì giới hạn cần tìm là : $\exp\left(\dfrac{\ln\frac{6}{5}}{\ln\frac{6}{25}}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$?

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2} = \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}.2x}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

Giới hạn phải tìm bằng $\frac{1}{3}$.

Trong thí dụ này ta chú ý rằng nếu cộng máy móc các hàm tương đương $\left(\frac{1}{\sin^2 x}\sim\frac{1}{x^2}\right)$, thì ta sẽ thu được một điều vô lý $\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\sim 0 : \text{sai}\right)$.

B) Tìm phần chính quy theo các hàm $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Chẳng hạn, nếu một hàm số f được biểu diễn thành hiệu của hai hàm số tương đương, thì nên tiến hành như sau đây : thành lập các KTHH(0) của hai hàm số đó (nếu các KTHH đó tồn tại) để suy ra KTHH(0) của f, và do đó (nếu như phần chính quy của KTHH(0) đó khác không), suy ra phần chính quy của f trong lân cận của 0, bằng cách lấy số hạng bậc thấp nhất. Tuy nhiên, thường thì ta không thể "đoán" được là cần phải khai triển đến bậc mấy.

THÍ DỤ : Xác định phần chính quy tại 0 của

$$f : x \mapsto \operatorname{ch}(1 - \cos x) + \cos(\operatorname{ch}x - 1) - 2.$$

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^6) \text{ và } \operatorname{ch}x - 1 = \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^6),$$

do đó : $f(x) = \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)^2\right)+\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)^2\right)-2+o(x^6)$

$= -\frac{x^6}{24} + o(x^6)$, suy ra ra kết quả : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{24}$.

Bài tập

◊ **8.3.4** Tính các giới hạn sau đây :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\ln(1+x)}{(e^x-1)\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\text{Arc}\tan(1+x)-\text{Arc}\tan(1-x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln \text{ch} x - \ln\cos x)^2}{\sqrt{\text{ch} x}+\sqrt{\cos x}-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{Arc}\tan(x^2(1-\cos x))}{(1-\sqrt{\cos x})\ln\frac{\sin x}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1+x}-\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b}\right)$, $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

o) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ax^{a+1}-(a+1)x^a+1}{x^{b+1}-x^b-x+1}$, $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^x-\left(\frac{x}{2}\right)^{2x}}{x^{\sin x}-\left(\frac{x}{2}\right)^{\sin 2x}}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

s) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\text{th}\, x)^{\ln x}$

t) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\text{cotan} x}$.

u) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan 3x}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} (a^x)^{b^x}$, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

w) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\text{cotan}^2 x}$

x) $\lim\limits_{x\to 2} (2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$

y) $\lim\limits_{x\to 3} (9^x + 10^x - 12^x)^{(4^{x-1} + 7^{x-1} - 8^{x-1} - 1)^{-1}}$

z) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\text{th}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{ch}\,\dfrac{1}{x}} \right)^{\frac{1}{x}}$ a') $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$

b') $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(e - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \right)^{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}$ c') $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x \left(\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x - 1 \right)$.

◊ **8.3.5** Tính phần chính quy lân cận của 0 (theo thang các hàm số $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$) của hàm số f với $f(x)$ cho trước là :

a) $x(2 + \cos x) - 3\sin x$

b) $\ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) - \dfrac{3\sin x}{1 + 2\cos x}$

c) $\tan x - \sin x - \dfrac{1}{2}\sin^3 x$

d) $\text{Arcsin}(x + a) - \text{Arcsin}\,a$, $a \in [0\,;\,1[$

e) $\text{Arctan}(\text{Arcsin}\,x) - \text{Arcsin}(\text{Arctan}\,x)$

f) $\sin(\tan x) - \tan(\sin x)$

g) $\sin\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) - \left(\sin x - \dfrac{\sin^3 x}{6}\right)$

h) $x^x - (\sin x)^x$

i) $(2 + \cos x)(2 + \text{ch}\,x) - 9$.

◊ **8.3.6** a) Xác định $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ để phần chính của $x \mapsto e^x - \dfrac{1 + ax}{1 + bx}$ trong lân cận của 0 đạt bậc cao nhất có thể.

b) Cũng câu hỏi đó với $x \mapsto a\,\text{th}^2 x + b\tan^2 x + \ln(\cos x)$

◊ **8.3.7** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, liên tục trên $[0\,;\,1]$, khả vi tại 0, sao cho $f(0) = 0$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta ký hiệu $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$. Chứng tỏ rằng $(u_n)_{n\geq 1}$ hội tụ và tính giới hạn của dãy số đó.

8.4 Khái niệm về khai triển tiệm cận

8.4.1 Khai triển tiệm cận theo các hàm $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ta nói một hàm số f, xác định trong lân cận của 0 (có thể ngoại trừ tại 0), nhận một **khai triển tiệm cận theo các hàm x^n** ($n \in \mathbb{Z}$) khi và chỉ khi tồn tại $\alpha \in \mathbb{Z}$ và $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \text{trong lân cận của } 0 : f(x) = x^{\alpha}(P(x) + o(x^n)) \end{cases}$$

Ta nói rằng khi đó có một **khai triển tiệm cận với độ chính xác $x^{\alpha+n}$**.

THÍ DỤ :

1) Khai triển tiệm cận của $x \mapsto \operatorname{cotan} x$ trong lân cận của 0 với độ chính xác x^3 :

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3).$$

Cũng vậy trong lân cận của 0 ta thu được : $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)$.

2) Khai triển tiệm cận của $f : x \mapsto \left(\frac{1}{\ln(1+x)}\right)^2$ trong lân cận của 0 với độ chính xác x.

Vì $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ và vì $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^2$, nên chúng ta sẽ cần đến một KTHH$_3$(0) của hàm $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$, tức là một KTHH$_4$(0) của $x \mapsto \ln(1+x)$. Ta lần lượt thu được :

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

- $\frac{x}{\ln(1+x)} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^{-1}$

$$= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

- $\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{12} + o(x^3)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{12} + o(x).$

8.4.2 Khai triển tiệm cận theo các hàm $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Ta nói rằng một hàm f xác định trên khoảng $]0\,;\,\eta[$ $(\eta > 0)$ nhận một **khai triển tiệm cận theo các hàm x^{α}** $(\alpha \in \mathbb{R})$ khi và chỉ khi tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha_1 < ... < \alpha_p \\ \forall x \in\,]0\,;\,\eta[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k x^{\alpha_k} + o(x^{\alpha_p}) \end{cases}$$

Như thế ta nói rằng có một **khai triển tiệm cận với độ chính xác x^{α_p}.**

THÍ DỤ :

Trong lân cận của 0^+, khai triển tiệm cận của $f : x \mapsto \sqrt{x + x^2}$ với độ chính xác $x^{\frac{5}{2}}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+x^2} &= x^{\frac{1}{2}}(1 + x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}). \end{aligned}$$

8.4.3 Thí dụ về khai triển tiệm cận có sử dụng hàm lôgarit hoặc hàm mũ

1) Trong lân cận của $+\infty$:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + x + 2) &= 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\ &= 2\ln x + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2\ln x + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Ta được một khai triển tiệm cận trong lân cận của $+\infty$ theo các hàm số $x \mapsto (\ln x)^{\alpha} x^{\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

2) Trong lân cận của $+\infty$:

$$e^{\sqrt{x^2+2x+4}} = e^{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = e^{x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}$$

$$= e^{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{x+1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{x+1}\, e^{\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{x+1}\left(1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= ee^x + \frac{3e}{2}x^{-1}e^x + o(x^{-1}e^x).$$

Ta được một khai triển tiệm cận trong lân cận của $+\infty$ theo các hàm số $x \mapsto x^{\beta}e^{\gamma x}$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$.

3) Trong lân cận của $+\infty$:

$$\ln(x\ln x + 1) = \ln(x\ln x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x\ln x}\right)$$

$$= \ln x + \ln\ln x + \frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{2x^2(\ln x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2(\ln x)^2}\right),$$

đây là một khai triển tiệm cận trong lân cận của $+\infty$ theo các hàm số

$$x \mapsto (\ln\ln x)^{\alpha}(\ln x)^{\beta}x^{\gamma},\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Bài tập

◊ **8.4.1** Tính các giới hạn sau đây :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x} - \mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{sh}(\mathrm{ch}\, x) - \mathrm{ch}(\mathrm{sh}\, x)\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{ch}\sqrt{x+1} - \mathrm{ch}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((e^x+x)^{e^x-x^2} - (e^x+x^2)^{e^x-x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+1)^{\left((x+1)^{\frac{1}{x+1}}\right)} - x^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}\right)$.

◊ **8.4.2** Thành lập khai triển tiệm cận của $f : x \mapsto \ln\mathrm{sh}x$, trong lân cận của $+\infty$, theo các hàm số $x \mapsto x^{\alpha}e^{\beta x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, với độ chính xác tới e^{-4x}.

◊ **8.4.3** Tính khai triển tiệm cận của $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}(1 - x)$, trong lân cận của 0^+, theo các hàm số $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, với độ chính xác tới $x^{n+\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

◊ **8.4.4** Tìm cho hàm $x \mapsto (\mathrm{sh}\, x)^{\mathrm{ch}\, x}$ một tương đương dưới dạng $e^{P(x)e^x}$, $P \in \mathbb{R}[X]$, trong lân cận của $+\infty$.

◊ **8.4.5** a) Chứng tỏ rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, phương trình $\tan x = x$, với ẩn số $x \in \mathbb{R}_+^*$, nhận một và chỉ một nghiệm số thuộc $\left]n\pi\ ;\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$; ký hiệu nghiệm số này là x_n.

b) Tính khai triển tiệm cận của x_n với độ chính xác $\frac{1}{n^2}$ khi n dần đến vô cùng.

◊ **8.4.6** Cũng câu hỏi như trong bài tập 8.4.5 với phương trình $\tan x = \frac{x^2}{1+x}$.

◊ **8.4.7** Tính khai triển tiệm cận với độ chính xác tới $\frac{1}{n}$ của hàm $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}$, khi số nguyên n dần đến vô cùng.

◊ **8.4.8** Chứng tỏ rằng tồn tại $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\int_0^1 (1 + x^2)^{\frac{1}{n}}\, dx = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ khi n dần đến vô cùng (tính a và b).

◊ **8.4.9** Tìm phần chính khi n dần đến vô cùng của $u_n = \sum\limits_{\substack{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$.

◊ **8.4.10** a) Chứng tỏ rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ tồn tại một phần tử duy nhất của $\mathbb{R}_+^*$, ký hiệu là x_n, sao cho $x_n^n = x_n + n$.

b) Chứng tỏ rằng : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

c) Tính phần chính của $x_n - 1$ khi n dần đến vô cùng.

◊ **8.4.11** Với n bất kì thuộc $\mathbb{N}^*$ ta sẽ ký hiệu $f_n :]0\ ;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + \ln x - n$$

a) Chứng tỏ rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, phương trình $f_n(x) = 0$ với ẩn số là $x \in]0\ ;+\infty[$ có một và chỉ một nghiệm duy nhất, ký hiệu là x_n.

b) Thiết lập khai triển tiệm cận của x_n với độ chính xác $\frac{\ln n}{n}$ khi n dần đến vô cùng.

◊ **8.4.12** Với n bất kỳ thuộc $\mathbb{N}^*$, ta sẽ ký hiệu $d(n)$ là số ước số ≥ 1 của n. Chứng minh :

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) \underset{n\infty}{\sim} n \ln n.$$

8.5 Khảo sát một hàm số từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, biểu diễn đồ thị

Các khái niệm được phát triển trong chương 8 này về việc so sánh cục bộ các hàm số thường sẽ cho phép ta khảo sát một hàm số trong lân cận của một số thực (giới hạn, tính liên tục, tính khả vi, tính lõm địa phương), hay trong lân cận của $+\infty$ và $-\infty$ (khảo sát các nhánh vô hạn).
Đặc biệt, nếu tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho trong lân cận của $+\infty$ (hay $-\infty$) $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$, thì khi đó đường thẳng (Δ) với phương trình $y = \alpha x + \beta$ là **tiệm cận** với đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Hơn nữa nếu biết dấu của hiệu $f(x) - \alpha x - \beta$ trong lân cận của $+\infty$ (hay $-\infty$) thường sẽ cho phép ta xác định các vị trí tương đối của (C) và (Δ) trong lân cận đó. Chẳng hạn nếu $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{g}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ và $\gamma > 0$ (tương ứng : $\gamma < 0$),

thì khi đó (C) sẽ nằm trên (tương ứng : nằm dưới) (Δ) trong lân cận của $+\infty$.
Trong các thí dụ sau đây, hàm số $f(x)$ sẽ được cho bằng $y = f(x)$, và phải khảo sát f và vẽ đường cong (C) biểu diễn f (thường trên mặt phẳng Euclid $\mathfrak{P}$ quy về một hệ quy chiếu trực chuẩn $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\ )$).

THÍ DỤ :

1) $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$

• f liên tục trên R, khả vi trên $\mathbf{R} - \{0, 2\}$ và :

$$\forall x \in \mathbf{R} - \{0, 2\},\ f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2(x-2))^2}} . (3x^2 - 4x).$$

Suy ra bảng biến thiên của f :

x	$-\infty$		0		$4/3$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty \parallel -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty \parallel +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tại O đường biểu diễn (C) nhận một bán tiếp tuyến nằm trên Oy', và tại điểm $(2, 0)$ một tiếp tuyến song song với $y'y$.

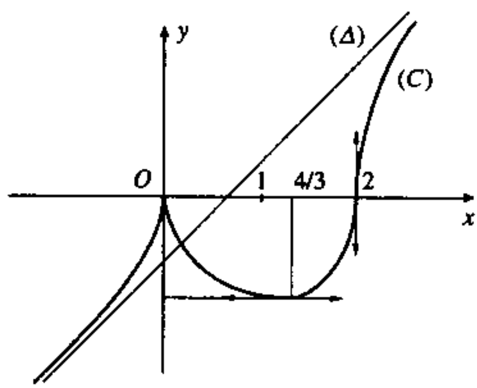
• Trong lân cận của $+\infty$ (và $-\infty$) :

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{3x} - \frac{4}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

do đó $$f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vậy (C) nhận đường thẳng (Δ) có phương trình $y = x - \dfrac{2}{3}$ làm tiệm cận, và trong lân cận của $+\infty$ (tương ứng : $-\infty$) (C) nằm dưới (tương ứng : nằm trên) đường thẳng (Δ).



2) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}\, e^{\frac{1}{x}}$

• f thuộc lớp C^{∞} trên $\mathrm{R} - \{0, 1\}$. Ta tính dễ dàng được :

$$\forall x \in \mathrm{R} - \{0, 1\},\ f'(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

Đa thức $P = X^4 - 3X^3 - X + 1$ có hai và chỉ hai không điểm là số thực ký hiệu là α, β $(\alpha < \beta)$; tính toán bằng số được $\alpha \approx 0{,}564$; $\beta \approx 3{,}071$.

x	$-\infty$		0		a		1		b		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

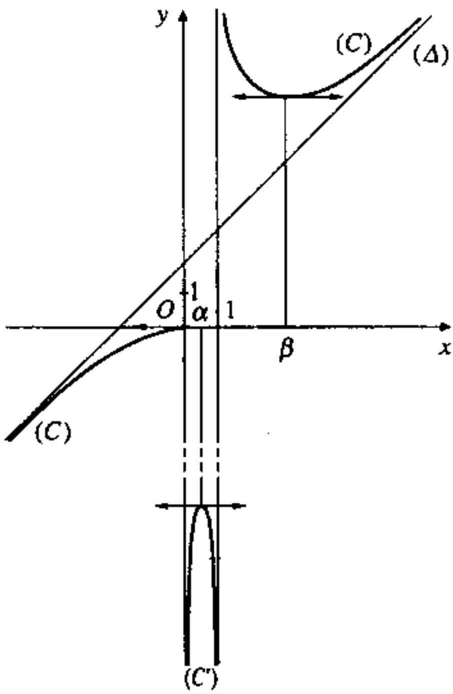
• Khảo sát tại lân cận của $+\infty$ (hay $-\infty$) :

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x \ \left(\text{vì } e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1\right),$$

$$f(x) = x\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}} = x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x + 2 + \frac{7}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vậy (C) nhận đường thẳng (Δ) có phương trình $y = x + 2$ làm tiệm cận, và trong lân cận của $+\infty$ (tương ứng : $-\infty$) (C) nằm trên (tương ứng : nằm dưới) (Δ).



3) $y = \sqrt{x^3 + x - 2}$

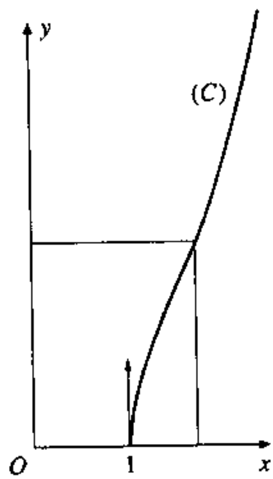
▪ Miền xác định của $f = [1\ ;\ +\infty[$; f liên tục trên $[1\ ;\ +\infty◊[$, khả vi trên $]1\ ;\ +\infty[$ và :

$$\forall x \in\ ]1\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x - 2}} > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

• $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{\frac{3}{2}}$; vì $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ nên (C) nhận một nhánh parabôlic theo phương tiệm cận $y'y$.

• f'' triệt tiêu và đổi dấu tại một điểm thực duy nhất α, $\alpha \approx 1{,}689$, do đó (C) có một điểm uốn, có tọa độ gần đúng là $(1{,}689\ ;\ 2{,}123)$.



Bài tập

◊ **8.5.1** Dựng các đường cong (C) với phương trình $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ được xác định bởi biểu thức sau đây :

a) $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}$ b) $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ c) $(x + 2)e^{\frac{1}{x}}$

d) $e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ e) $\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ f) $(x + \sqrt{x})e^{\sqrt{x^2+x}}$

g) $(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$ h) $(\cos x)^{\cotan^2 x}$ i) $\left(1 - x + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

j) $x^{x - x^2}$ k) $\frac{\operatorname{Arc}\tan x}{1+x^2}$ l) $\sqrt{1 - x^2}\ \operatorname{Arc}\tan x$

m) $\operatorname{Arc}\tan(1 + \tan x + \tan^2 x)$.

Chương 9

Phép tính nguyên hàm

9.1 Mở đầu

Mục tiêu của chương này là trình bày các phương pháp cho phép ta, khi có thể, biểu thị các nguyên hàm của một hàm f, chính hàm này được cho bằng một biểu thức tường minh.

Các khoảng xét đến được giả định không trống và không thu về một điểm. Trước hết ta nhắc lại rằng (xem 6.4.2, Tập 1) :

1) Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và $f, \phi : I \to \mathbb{R}$; ta nói rằng ϕ là một nguyên hàm của f trên I khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \phi \text{ khả vi trên I} \\ \phi' = f \end{cases}$$

2) Ở đây giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng I. Với mọi x_o thuộc I, ánh xạ $F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{x_o}^{x} f \end{array}$ là một nguyên hàm của f trên I, và tập hợp các nguyên hàm của f trên I là $\{F + \lambda \ ; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Với mọi nguyên hàm ϕ của f trên I và mọi (a, b) thuộc I^2 ta có :

$$\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a) = [\phi(x)]_a^b \, .$$

Ta sẽ ký hiệu một nguyên hàm bất kỳ của f trên I là $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$,

và ta sẽ giữ nguyên cách ký hiệu này trong trường hợp tổng quát hơn khi tập nguồn của f là hợp (hữu hạn hay vô hạn) những khoảng.

Chữ cái C dùng trong các đẳng thức loại :

$$\forall x \in I, \int f(x)\mathrm{d}x = \phi(x) + C$$

sẽ chỉ một hằng "tùy ý", tức là một ánh xạ bằng $C : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto C \end{array}$, khi I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Khi tập nguồn E của f là một hợp những khoảng (thí dụ : $E = \mathbb{R}^*$, $E =]-\infty \, ; -1[\cup]1 \, ; +\infty[$, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n\pi \, , (n+1)\pi[$, ...), thì ta sẽ ký hiệu

$$\forall x \in E, \int f(x)\mathrm{d}x = \phi(x) + C(x)$$

trong đó C sẽ chỉ một ánh xạ **hằng địa phương** từ E đến $\mathbb{R}$, tức là một ánh xạ hằng trên mỗi khoảng của E. Thí dụ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C(x)$$

ở đây $C : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 \text{ nếu } x < 0 \\ C_2 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$$

Ta sẽ hiểu các đẳng thức liên tiếp như :

$$\int f_1(x)\mathrm{d}x = \int f_2(x)\mathrm{d}x = \int f_3(x)\mathrm{d}x = \ldots$$

theo cách sau đây : mỗi vế của các đẳng thức đó chỉ sai khác nhau những hằng (địa phương).

Hằng nguyên hàm xuất hiện vào lúc mà ký hiệu tượng trưng "$\int$" mất đi. Thí dụ :

$$\int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C = \sin x\cos x + C$$

Các định nghĩa, ký hiệu và kết quả trên đây có thể mở rộng một cách dễ dàng cho các hàm lấy giá trị trong $\mathbb{C}$; đặc biệt chúng ta sẽ phải dùng (xem 9.3) tới hàm mũ với số mũ phức (xem 7.10).

Một số nguyên hàm không thể biểu diễn được từ các hàm số thông dụng qua một dãy hữu hạn các phép toán : cộng, nhân, hợp. Như vậy chúng ta sẽ không thể "tính" được các nguyên hàm đó ; chẳng hạn trường hợp $\int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$. Khi đó ta nói rằng những nguyên hàm đó là những **hàm đặc biệt**.

Cuối cùng, các phần mềm tính toán hiện đại về các phép toán hình thức có khả năng tính được các nguyên hàm (khi không phải là những hàm đặc biệt), và đã làm cho các năng lực kỳ diệu về tính nhẩm các nguyên hàm trở nên vô nghĩa. Tuy nhiên chúng tôi cho rằng cần thiết phải nắm vững các phương pháp và các kiểu loại kinh điển trong việc tính nguyên hàm để có thể học tốt phần tiếp theo của giáo trình Giải tích.

9.2 Phép đổi biến

Chúng ta nhắc lại rằng (xem 6.4.3, Tập 1) nếu $\varphi : [\alpha ; \beta] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 và nếu F là một ánh xạ liên tục trên một khoảng chứa $\varphi([\alpha ; \beta])$ thì :

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F(u)\mathrm{d}u.$$

Ta nói rằng đã thực hiện phép đổi biến $u = \varphi(x)$.

Vậy ta sẽ viết : $\int F(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int F(u)\mathrm{d}u$, và ghi rõ : $u = \varphi(x)$.

Đối với việc tính nguyên hàm, sau khi tính được $\int F(u)\mathrm{d}u$, cần phải "trở lại" chữ x, bằng cách thay "khắp nơi" trong kết quả u bằng $\varphi(x)$.

Đối với việc tính tích phân, thì ta có thể làm thông qua việc tính các nguyên hàm, hoặc "đổi" các cận kèm theo với những phép đổi biến đã phải sử dụng đến.

NHẬN XÉT : Với các ký hiệu trên đây, nếu φ chỉ thuộc lớp C^1 trên $[\alpha ; \beta[$ (chẳng hạn như : $\varphi(x) \xrightarrow[x \to \beta^-]{} +\infty$) thì cách viết

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F(u)\mathrm{d}u$$

sẽ dẫn đến các tích phân suy rộng : xem 10.2.3.

Các thí dụ kinh điển

• Với $a \in \mathbb{R}^*$ cố định, bằng phép đổi biến $u = \frac{x}{a}$ (hay $u = \frac{x}{|a|}$), ta được :

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}$

2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + c(u) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C(x)$, với

$$C : \mathbb{R} - \{-a, a\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} C_1 \text{ nếu } x < -a \\ C_2 \text{ nếu } -a < x < a \\ C_3 \text{ nếu } a < x \end{cases},\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,\ C \in \mathbb{R}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a}{|a|} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}$

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \varepsilon \ln(|x| + \sqrt{x^2 - a^2}) + C(x)$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$

$$C :]-\infty ; -|a|[\cup] |a| ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} C_1 \text{ nếu } x < -|a| \\ C_2 \text{ nếu } x > |a| \end{cases}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

• 1) $\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x \underset{u = \cos x}{=} -\int \frac{\mathrm{d}x}{u} = -\ln|u| + c(u) =$

$$= -\ln|\cos x| + C(x),$$

trong đó C không đổi trên mỗi khoảng $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Tương tự : $\int \operatorname{cotan} x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C(x)$, trong đó C không đổi trên mỗi khoảng $]n\pi ; (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bài tập

◊ **9.2.1** Tính các nguyên hàm của các hàm số sau đây (biến số x), và chỉ rõ miền xác định :

a) $\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $(e^x - 1)^2$ c) $\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$

d) $\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$ f) $\frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$.

◊ **9.2.2** Tính $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$.

9.3 Tính nguyên hàm từng phần

Ta nhắc lại rằng (xem 6.4.4, Tập 1) :

1) Nếu $u, v : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên I, thì :

$$\int u'v = uv - \int uv', \text{ hay : } \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

2) Nếu $u, v : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $[a\ ;\ b]$ thì :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Như vậy để tính các nguyên hàm của một tích hai nhân tử ta sẽ biểu diễn một trong hai nhân tử như một đạo hàm (u'), và quy việc tính $\int u'v$ về việc tính $\int uv'$.

Các thí dụ sau đây là những ứng dụng kinh điển của phép tính nguyên hàm từng phần.

1) Tính $\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$, trong đó P là một đa thức thuộc $\mathbb{C}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{C}^*$

Phương pháp thứ nhất

Một phép tính nguyên hàm từng phần cho ta :

$$\int P(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} P(x)\, e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P'(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Tiếp tục thủ tục này ta sẽ "khử" được đa thức.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int (x^2 - x + 3)e^{2x}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x - 1)e^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x - 1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R} \text{ (hay } C \in \mathbb{C}\text{)}.
\end{aligned}$$

Phương pháp thứ hai

Ngay khi $\deg(P) \geq 3$ thì phương pháp thứ nhất đã không thực tế lắm. Theo như phương pháp đó thì tồn tại $Q \in \mathbb{C}[X]$ sao cho :

$$\begin{cases} \deg(Q) = \deg(P) \\ \int P(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x = Q(x)e^{\alpha x} + C,\ C \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Cụ thể là : $Q = \dfrac{1}{\alpha} P - \dfrac{1}{\alpha^2} P' + \dfrac{1}{\alpha^3} P'' - \dots$

Trong thực tế, để tính Q ta tiến hành theo phương pháp hệ số bất định.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}\,dx$.

Tồn tại $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho :

$$\int (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}\,dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7,$$

tức là : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 3a = 4 \\ 2c + 2b = -2 \\ 2d + c = 7 \end{cases}$

Giải hệ phương trình tuyến tính "tam giác" này (theo cách "thế dần") ta được : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{5}{4}$, $c = -\dfrac{9}{4}$, $d = \dfrac{37}{8}$.

Vậy : $I(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{9}{4}x + \dfrac{37}{8}\right)e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2) Tính $\int P(x)\cos\beta x\,dx$ và $\int P(x)\sin\beta x\,dx$, trong đó $P \in \mathbb{R}[X]$ và $\beta \in \mathbb{R}^*$

Phương pháp thứ nhất

Có thể tính hai tích phân trên theo cách tương tự. Ta sẽ tính nguyên hàm từng phần để hạ bậc đa thức.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x\,dx$.

$$\begin{aligned} I(x) &= -(x^3 - x^2 + 2x - 3)\cos x + \int (3x^2 - 2x + 2)\cos x\,dx \\ &= -(x^3 - x^2 + 2x - 3)\cos x + (3x^2 - 2x + 2)\sin x - \int (6x - 2)\sin x\,dx = \\ &= -(x^3 - x^2 + 2x - 3)\cos x + (3x^2 - 2x + 2)\sin x + (6x - 2)\cos x - 6\int \cos x\,dx \\ &= (-x^3 + x^2 + 4x + 1)\cos x + (3x^2 - 2x - 4)\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Phương pháp thứ hai

Theo phương pháp thứ nhất thì tồn tại hai đa thức A, B thuộc $\mathbb{R}[X]$, có bậc $\leq \deg(P)$, sao cho :

$$\int P(x)\sin\beta x\,dx = A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ta sẽ viết $A(x)$, $B(x)$ với các hệ số bất định, lấy đạo hàm vế thứ hai trên đây, rồi cho "đồng nhất" với $P(x)\sin\beta x$.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x\,dx$.

$$I(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cos x + (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

trong đó a, ..., δ là những số thực mà ta phải tính. Lấy đạo hàm :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (-(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma))\sin x +$$

$$+ ((\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + (3ax^2 + 2bx + c))\cos x$$
$$= (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x.$$

Một điều kiện (cần và) đủ là : $\begin{cases} -a = 1 \\ -b + 3\alpha = -1 \\ -c + 2\beta = 2 \\ -d + \gamma = -3 \end{cases}$ và $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + 3a = 0 \\ \gamma + 2b = 0 \\ \delta + c = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình tuyến tính này bằng cách thế dần (a và α, rồi b và β, rồi c và γ, ...) sẽ cho ta :

$$a = -1,\ \alpha = 0,\ b = 1,\ \beta = 3,\ c = 4,\ \gamma = -2,\ d = 1,\ \delta = -4.$$

Vậy : $I(x) = (-x^3 + x^2 + 4x + 1)\cos x + (3x^2 - 2x - 4)\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Phương pháp thứ nhất khá thuận tiện khi $\deg(P) \le 2$; nếu $\deg(P) \ge 3$ thì phương pháp thứ hai tỏ ra nhanh hơn.

Phương pháp thứ ba

Cũng có thể là ta cần tính đồng thời $I(x) = \int P(x)\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ và $J(x) = \int P(x)\sin\beta x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó thay cho hai phương pháp trên đây, nên áp dụng phương pháp dùng hàm mũ với số mũ phức và phương pháp thứ nhất của phần 1 trên đây.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int x^3\cos x\,\mathrm{d}x$ và $J(x) = \int x^3\sin x\,\mathrm{d}x$.

$$I(x) + \mathrm{i}J(x) = \int x^3(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\,\mathrm{d}x = \int x^3 e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{\mathrm{i}x} + C,$$

$(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ cần phải tính, $C \in \mathbb{C}$.

Bằng cách lấy đạo hàm ta được :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) = x^3,$$

tức là : $\begin{cases} \mathrm{i}a = 1 \\ \mathrm{i}b + 3a = 0 \\ \mathrm{i}c + 2b = 0 \\ \mathrm{i}d + c = 0 \end{cases}$, do đó $\begin{cases} a = -\mathrm{i} \\ b = 3 \\ c = 6\mathrm{i} \\ d = -6 \end{cases}$

Vậy : $I(x) + \mathrm{i}J(x) = (-\mathrm{i}x^3 + 3x^2 + 6\mathrm{i}x - 6)(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + C,\ C \in \mathbb{C}$; từ đó bằng cách lấy phần thực và phần ảo ta được :

$$\begin{cases} I(x) = (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + C_1 \\ J(x) = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + C_2 \end{cases},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3) Tính $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ và $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Ký hiệu $I(x) = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ và $J(x) = \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, ta có :

$$I(x) - \mathrm{i}J(x) = \int e^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x}}{\alpha + \mathrm{i}\beta} + C$$

$$= \frac{\alpha - \mathrm{i}\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\,e^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x) + C,\ C \in \mathbb{C}.$$

Bằng cách tách phần thực và phần ảo, ta suy ra :

$$\begin{cases} I(x) = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C_1 \\ J(x) = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x}(-\ \beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x) + C_2 \end{cases}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4) Tính $\int P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ và $\int P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $P \in \mathbb{R}[X]$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Trong việc tính này hình như thuận lợi nhất là qua hàm mũ với số mũ phức. Ký hiệu $I(x)$ và $J(x)$ là các nguyên hàm cần tính, ta có :

$$I(x) + iJ(x) = \int P(x)e^{(\alpha + i\beta)x}\,dx,$$

và ta sẽ áp dụng phương pháp thứ hai ở 1).

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int (x + 3)e^x\cos 3x\,dx$.

Đặt : $J(x) = \int (x + 3)e^x\sin 3x\,dx$, ta có :

$$I(x) + iJ(x) = \int (x + 3)e^{(1+3i)x}dx = (ax + b)e^{(1+3i)x} + C,$$

trong đó $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ cần tính, và $C \in \mathbb{C}$.

Lấy đạo hàm : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1 + 3i)(ax + b) + a = x + 3$, tức là

$$\begin{cases} (1+3i)a = 1 \\ (1 + 3i)b + a = 3 \end{cases}, \text{ suy ra : } a = \frac{1 - 3i}{10},\ b = \frac{19 - 42i}{50}.$$

$$\text{Vậy : } I(x) = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1-3i}{10}x + \frac{38 - 84i}{100}\right)e^x(\cos 3x + i\sin 3x)\right) + C$$

$$= e^x\left(\left(\frac{x}{10} + \frac{38}{100}\right)\cos 3x + \left(\frac{3x}{10} + \frac{84}{100}\right)\sin 3x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5) Với mọi α thuộc $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\int x^\alpha \ln x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Đặc biệt : $\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x + C(x)$, với C không đổi trên $\mathbb{R}_+^*$ và trên $\mathbb{R}_-^*$.

Ta cũng nhận xét rằng việc tính $\int x^\alpha \ln x\,dx$, bằng phép đổi biến số $u = \ln x$, cũng quy về việc tính $\int e^{(\alpha+1)u}u\,du$, là bài toán đã xét ở 1).

Bài tập

◊ **9.3.1** Tính các nguyên hàm của các hàm số sau đây (biến số x), và chỉ rõ miền xác định :

a) $(x^2 - 1)e^{3x}$ b) $(x^2 - x + 3)\sin x$ c) $(x^3 - 1)\mathrm{ch}x$

d) $(x^2 + 1)e^x\cos x$ e) $(x\,\mathrm{sh}x)^2$ f) $\mathrm{Arcsin}x$

g) $\mathrm{Arccos}x$ h) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ i) $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

j) $\dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(x^{\alpha}+1)^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ k) $x^2\ln(x^6-1)$ l) $\ln(1+x^2)$

m) $\operatorname{Arctan}\dfrac{x+1}{x-2}$ n) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$ o) $\cos x\ln(1+\cos x)$

p) $3^{\sqrt{2x+1}}$.

◊ **9.3.2** Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^1 (\operatorname{Arcsin} x)^2 \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{Arccos}(1-2x)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\tan^2 x-\tan x)e^{-x}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$.

9.4 Bảng các nguyên hàm thông dụng

Ở cột thứ nhất là hàm số f có các nguyên hàm ghi trong bảng (biến số được ký hiệu là x).

Ở cột thứ hai là một trong các nguyên hàm F của f.

Cuối cùng, ở cột thứ ba là miền xác định, miền xác định này là một khoảng hay một hợp của nhiều khoảng. Để có được tất cả mọi nguyên hàm của f, thêm vào F một ánh xạ hằng trên mỗi khoảng thuộc miền xác định.

NHẬN XÉT :

Với mọi h thuộc $\mathbb{R}^*$: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = \ln|x+\sqrt{x^2+h}| + C$ trên các khoảng xác định.

Hàm số f $f(x)$	Nguyên hàm F $F(x)$	Tập xác định
$e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ cố định	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}x$ $\mathrm{sh}x$ $\cos x$ $\sin x$	$\mathrm{sh}x$ $\mathrm{ch}x$ $\sin x$ $-\cos x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$
$\mathrm{th}x$ $\mathrm{coth}x$ $\tan x$ $\mathrm{cotan}x$	$\ln \mathrm{ch}x$ $\ln\lvert\mathrm{sh}x\rvert$ $-\ln\lvert\cos x\rvert$ $\ln\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}$ $\mathbb{R}-\{n\pi\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}$

$\frac{1}{\text{ch}^2x} = 1 - \text{th}^2x$	$\text{th}x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\text{sh}^2x} = \coth^2x - 1$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\cos^2x} = 1 + \tan^2x$	$\tan x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2x} = 1 + \text{cotan}^2x$	$-\text{cotan}x$	$\mathbb{R} - \{n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^n, n \in \mathbb{Z}_- - \{0, -1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}x$	$]-1\ ;\ 1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$	$]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

9.5 Tính nguyên hàm các hàm số hữu tỷ

Nhận xét mở đầu

1) Trường hợp hàm phân thức hữu tỷ lẻ

Nếu hàm phân thức hữu tỷ F lẻ thì tồn tại hai đa thức P, Q sao cho $F = X\dfrac{P(X^2)}{Q(X^2)}$, do đó $\int F(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{P(u)}{Q(u)}\mathrm{d}u$ qua phép đổi biến $u = x^2$.

Như vậy ta đã hạ thấp bậc của hai đa thức tham gia vào biểu thức của F.

2) Khái quát nhận xét trên

Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ và một phân thức hữu tỷ G sao cho $F(X) = X^{n-1}G(X^n)$, thì ta sẽ thực hiện phép đổi biến $u = x^n$:

$$\int F(x)\mathrm{d}x = \int x^{n-1}G(x^n)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int G(u)\mathrm{d}u.$$

3) Đôi khi, bằng cách ứng dụng tính chất tuyến tính của phép tính nguyên hàm, ta có thể khai thác nhiều phép đổi biến.

Phương pháp chung là phân tích phân thức hữu tỷ thành những phân thức (thường thì trên $\mathbb{R}$) (xem Tập 5, Đại số), rồi tính nguyên hàm của mỗi phân thức đơn giản đó.

1) ***Tính nguyên hàm các phân thức đơn giản loại thứ nhất***

Vấn đề đặt ra là tính $\int \dfrac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$.

a) Trong trường hợp $(a, n) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{N} - \{0, 1\})$, ta có :

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

trong đó • $C : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 \text{ nếu } x < a \\ C_2 \text{ nếu } x > a \end{cases}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ nếu } a \in \mathbb{R}$$

• $C : R \to \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{C}$ nếu $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
$\quad x \mapsto C$

b) Nếu $n = 1$ và $a \in \mathbb{R}$, ta có : $\int \dfrac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|x - a| + C$, trong đó

$$C : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 \text{ nếu } x < a \\ C_2 \text{ nếu } x > a \end{cases}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

c) Nếu $n = 1$ và $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, thì phép tính nguyên hàm "trực tiếp" như trên sẽ đòi hỏi tới một lôgarit phức tạp, là một khái niệm mà giáo trình này không đề cập đến. Ký hiệu $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, ta có :

$$\int \frac{1}{x - a}\, dx = \int \frac{(x - a_1) + ia_2}{(x - a_1)^2 + a_2^2}\, dx$$

$$= \int \frac{x - a_1}{(x - a_1)^2 + a_2^2}\, dx + ia_2 \int \frac{dx}{(x - a_1)^2 + a_2^2}$$

và bài toán quy về việc tính nguyên hàm của hai phân thức đơn giản loại thứ 2 (xem dưới đây).

2) ***Tính nguyên hàm các phân thức đơn giản loại thứ 2***

Vấn đề là tính $I(x) = \int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx$, trong đó λ, μ, a, b, c là những số thực sao cho $b^2 - 4ac < 0$, và $n \in \mathbb{N}^*$.

Giai đoạn 1 : nếu $\lambda \neq 0$, làm xuất hiện ở tử thức đạo hàm của tam thức $ax^2 + bx + c$, sai khác một thừa số :

$$I(x) = \frac{\lambda}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx + \frac{\lambda}{2a}\left(\frac{2a\mu}{\lambda} - b\right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Trong vế cuối trên đây thì tích phân đầu tiên có thể tính được dễ dàng bằng phép đổi biến $u = ax^2 + bx + c$.

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx = \int \frac{du}{u^n}.$$

Giai đoạn 2 : đưa việc tính tích phân $J(x) = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ về việc tính $\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$ bằng một phép đổi biến afin.

Ký hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và đưa tam thức về dạng chính tắc :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}\left(1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right).$$

Bằng phép đổi biến $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$, ta có :

$$J(x) = \left(\frac{4a}{-\Delta}\right)^n \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}.$$

Giai đoạn 3 : tính $I_n(t) = \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$, theo phương pháp tính tuần tự bằng một hệ thức truy hồi.

Trước tiên ta có : $I_1(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}\, t + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, bằng phép tính nguyên hàm từng phần ta được :

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\,(I_n(t) - I_{n+1}(t)),$$

suy ra : $2nI_{n+1}(t) = (2n-1)I_n(t) + \frac{t}{(1+t^2)^n}$.

THÍ DỤ :

- $2I_2(t) = I_1(t) + \frac{t}{1+t^2}$, suy ra $I_2(t) = \frac{1}{2}\text{Arctan}\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} + C$
- $4I_3(t) = 3I_2(t) + \frac{t}{1+t^2}$, suy ra $I_3(t) = \frac{3}{8}\text{Arctan}\, t + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{t}{4(1+t^2)^2} + C$.

NHẬN XÉT : Ta cũng có thể tính được $I_n(t)$ bằng phép đổi biến $\theta = \text{Arctan}t$ (khi đó ta sẽ có $t = \tan\theta$, và $dt = (1+\tan^2\theta)d\theta$) :

$$I_n(t) = \int \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}} = \int \cos^{2(n-1)}\theta d\theta.$$

Ta tuyến tính hóa $\cos^{2(n-1)}\theta$, sau đó tính nguyên hàm, rồi cuối cùng trở lại biến t. Chẳng hạn :

$$I_2(t) = \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{Arctan}\, t + \frac{t}{1+t^2}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

THÍ DỤ :

1) Tính $I(x) = \int \frac{dx}{x^3(x+1)}$.

Phép phân tích thành phân thức đơn giản cho ta :

$$\frac{1}{X^3(X+1)} = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}\text{, suy ra}$$

$I(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|x+1| + C(x)$, trong đó C là hằng trên mỗi khoảng $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;0[$, $]0\,;+\infty[$.

2) Tính $I(x) = \int \frac{dx}{x^3+1}$, rồi tính $J(x) = \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

- Trước hết ta có : $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$; sau đó tiến hành phép phân tích thành phân thức đơn giản trên $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}}{X^2-X+1}$$

Do đó $\quad I(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}I_1(x)$, trong đó :

$$I_1(x) = \int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}I_2(x)$$

trong đó :

$$I_2(x) = \int\frac{dx}{x^2-x+1} = \int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuối cùng :

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C(x),$$

trong đó C là hằng trên mỗi khoảng $]-\infty\,;-1[,\ ]-1\,;+\infty[$.

• Bằng một phép tính nguyên hàm từng phần (như trong phép tính $I_n(t)$ trên đây), ta được :

$$I(x) = \frac{x}{x^3+1} + 3\int\frac{x^3}{(x^3+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^3+1} + 3(I(x) - J(x)),\ \text{suy ra :}$$

$$J(x) = \frac{1}{3}\left(2I(x) + \frac{x}{x^3+1}\right)$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x}{3(x^3+1)} + C(x),$$

trong đó C không đổi trên mỗi khoảng $]-\infty\,;-1[,\ ]-1\,;+\infty[$.

Bài tập

◊ **9.5.1** Tính các nguyên hàm của các hàm số sau đây (biến số x) và chỉ rõ tập xác định :

a) $\dfrac{1}{x(x^2+1)^3}$ b) $\dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$ c) $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+4x+5)^2}$

d) $\dfrac{1}{(x+1)^5-x^5-1}$ e) $\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2+1}$.

◊ **9.5.2** Cũng câu hỏi như ở 9.5.1 :

a) $\dfrac{1}{e^x+1}$ b) $\sqrt[3]{e^x-1}$ c) $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

d) $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}}$ e) $\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2 - e^{-x}}}$.

◊ **9.5.3** Tính : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1 - x^2}\right) \mathrm{d}x$.

◊ **9.5.4** Tìm một điều kiện cần và đủ trên $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ để cho các nguyên hàm của $x \mapsto \dfrac{ax + b}{x^3(x-1)^2}$ (trên $\mathbb{R} - \{0, 1\}$) là những hàm phân thức hữu tỷ (sai khác những số hạng không đổi).

◊ **9.5.5** Cũng câu hỏi như ở 9.5.4 với $a \in \mathbb{R}$ và $x \mapsto \dfrac{x^3 + a}{x(x^2+1)^2}$.

9.6 Tính nguyên hàm các hàm phân thức hữu tỷ đối với một số hàm thông dụng

9.6.1 Hàm hữu tỷ đối với sin*x* và cos*x*

Để tính $\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x$, trong đó R chỉ một "hàm phân thức hữu tỷ hai biến", thông thường chúng ta phải thực hiện một phép đổi biến. Ta "luôn luôn" có thể lấy $t = \tan\frac{x}{2}$ (có tính đến những điểm không liên tục tạo ra), vì khi đó thì :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\ ,$$

và như vậy ta có thể quy về việc tính nguyên hàm của một hàm phân thức hữu tỷ F đối với biến số t. Nhưng thường thì khi đó bậc của tử thức (và nhất là) của mẫu thức sẽ quá cao, làm cho việc tính toán trở nên nặng nhọc. Do đó ta sẽ chỉ sử dụng cách đổi biến này khi không còn khả năng nào khác nữa.

1) Một trường hợp đặc biệt

Trước hết ta chú ý rằng sẽ có thể tính được khá dễ dàng các nguyên hàm của các đa thức đối với sin*x* và cos*x*. Việc tính các nguyên hàm đó quy về việc tính $\int \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x$, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

- Nếu m lẻ, ta có thể tiến hành phép đổi biến $u = \sin x$.
- Nếu n lẻ, ta có thể lấy $u = \cos x$.
- Nếu m và n chẵn, ta có thể tuyến tính hóa rồi tính nguyên hàm. Cần chú ý rằng cách tuyến tính hóa này cũng áp dụng được cho hai trường hợp trên.

THÍ DỤ :

1) $\int \cos^3 x \sin^4 x\, \mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int (1 - u^2)u^4 \mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2) Tính $I(x) = \int \cos^4 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

Tuyến tính hóa (xem Tập 1, 2.5.2) :

$$\cos^4 x \sin^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\left(\frac{1}{4}\sin^2 2x\right) = \frac{1}{16}(1+\cos 2x)(1-\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right)$$

$$= \frac{1}{32}(2 + \cos 2x - 2\cos 4x - \cos 6x), \text{ suy ra}$$

$$I(x) = \frac{1}{32}\left(2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Có thể ta còn phải biểu diễn kết quả này (sai khác một số hạng $\frac{x}{16}$) thành một đa thức theo sin$x$ và cos$x$ (xem Tập 1, 2.5.1) :

$$I(x) = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}\sin x\cos x\left(1 + \frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{8}{3}\cos^4 x\right) + C.$$

2) Trường hợp tổng quát

Thí dụ 1) trên đây chứng tỏ rằng, trong những trường hợp nhất định, ta có thể áp dụng phép đổi biến $u = \sin x$; trong các trường hợp khác thì có thể là $u = \cos x$, hay $u = \tan x$.

Khi ta có thể dùng phép đổi biến $u = \sin x$, thì đó có nghĩa là có thể viết $R(\sin x, \cos x)dx$ thành dạng $F(\sin x)\cos x\,dx$ (trong đó F là một hàm phân thức hữu tỷ). Ta thấy rằng khi thay x bởi $\pi - x$ thì biểu thức $F(\sin x)\cos x dx$ không thay đổi. Sự kiện này dẫn chúng ta đến các quy tắc sau đây, gọi là các quy tắc Bioche.

♦ **Mệnh đề** **(Quy tắc Bioche)**

Giả sử phải tính $\int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó R là một hàm phân thức hữu tỷ hai biến ; ta ký hiệu $\omega(x) = R(\sin x, \cos x)dx$, gọi là **vi phân của nguyên hàm phải tính.**

1) Nếu với mọi x thuộc miền đang xét mà ta có $\omega(-x) = \omega(x)$, khi đó có thể quy về việc tính nguyên hàm của một hàm phân thức hữu tỷ đối với biến u, bằng phép đổi biến $u = \cos x$.

2) Nếu $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, thì ta có thể đặt $u = \sin x$.

3) Nếu $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, thì ta có thể đặt $u = \tan x$.

Chứng minh : Ta sẽ chứng minh 1), còn với 2) và 3) thì phép chứng minh cũng tương tự.

Vì ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) nên tồn tại bốn đa thức A, B, C, D thuộc R[X], sao cho với mọi x thuộc E (E là miền đang xét) ta có :

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{A(\cos x) + B(\cos x)\sin x}{C(\cos x) + D(\cos x)\sin x}\ ;$$

để có được kết quả này ta chỉ cần thay thế $\sin^2 x$ bởi $1 - \cos^2 x$ "khắp nơi" trong $R(\sin x, \cos x)$.

Sau đó, bằng cách nhân tử thức và mẫu thức với $C(\cos x) - D(\cos x)\sin x$ (nếu D không phải là đa thức không), biểu thức này vốn chỉ triệt tiêu tại một số hữu hạn điểm trong mỗi khoảng biên độ 2π :

$$\frac{A(\cos x) + B(\cos x)\sin x}{C(\cos x) + D(\cos x)\sin x} = \frac{(A(\cos x) + B(\cos x)\sin x)(C(\cos x) - D(\cos x)\sin x)}{(C(\cos x))^2 - (D(\cos x))^2(1 - \cos^2 x)}$$
$$= U(\cos x) + V(\cos x)\sin x$$

trong đó U, V là những phân thức hữu tỷ.

Khi đó :

$(\forall x \in E, \omega(-x) = \omega(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E, -(U(\cos x) - V(\cos x)\sin x)dx = (U(\cos x) + V(\cos x)\sin x)dx)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E, U(\cos x) = 0) \Leftrightarrow U = 0,$

suy ra : $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int V(\cos x)\sin x\, dx = -\int V(u)du$, trong đó $u = \cos x$.

THÍ DỤ :

1) Tính $I(x) = \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\, dx$.

Miền xác định của $I = \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n\pi\,;(n+1)\pi[$.

Ở đây ta có $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, do đó ta có thể áp dụng phép đổi biến $u = \sin x$. Ta được :

$$I(x) = \int \frac{\cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\cos x dx = \int \frac{(1-u^2) + (1-u^2)^2}{u^2 + u^4}\, du$$
$$= \int \frac{2 - 3u^2 + u^4}{u^2(1+u^2)}\, du = \int \left(1 + \frac{2}{u^2} - \frac{6}{1+u^2}\right) du$$
$$= u - \frac{2}{u} - 6\text{Arctan}\, u + C(u) = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\text{Arctan}(\sin x) + C(x),$$

trong đó C không đổi trên mỗi khoảng $]n\pi\,;(n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Tính $I(x) = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}\, dx$.

Miền xác định : $\mathbb{R}$.

Ở đây có $\omega(-x) = \omega(x)$; vậy ta đặt $u = \cos x$:

$$I(x) = \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x}\sin x dx = \int \frac{u^2 - 1}{2 + u}\, du = \int \left(u - 2 + \frac{3}{u+2}\right) du =$$
$$= \frac{u^2}{2} - 2u + 3\ln|u+2| + C = \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(2 + \cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3) Tính $I(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$.

Miền xác định : $\mathbb{R}$.

Ta chú ý rằng : $I = I_1 + I_2$, với $I_1(x) = \int \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

và $I_2(x) = \int \frac{-\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

Ta đổi biến $u = \sin x$ (tương ứng $v = \cos x$) trong I_1 (tương ứng trong I_2) :

- $I_1(x) = \int \frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

- $I_2(x) = \int \frac{dv}{1+v^2} = \operatorname{Arctan} v + C_2 = \operatorname{Arctan}(\cos x) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$

Cuối cùng ta có :

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x} + \operatorname{Arctan}(\cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

4) Tính : $I(x) = \int \frac{dx}{\cos x(\sin x - \cos x)}$.

Miền xác định : $\mathbb{R} - \left(\left\{\frac{\pi}{4} + m\pi\ ;\ m \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

Ở đây có : $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, do đó ta đổi biến số $u = \tan x$, phép đổi biến này không loại bỏ điểm nào trên miền xác định. Ta có :

$$I(x) = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}\, dx = \int \frac{du}{u-1} = \ln|u-1| + c(u) = \ln|\tan x - 1| + C(x),$$

trong đó C không đổi trên mỗi khoảng thuộc miền xác định.

5) Tính $I(x) = \int \frac{dx}{a + \cos x}$, $a \in \left]1\ ;\ +\infty\right[$.

Do không quy tắc nào trong các quy tắc Bioche có thể áp dụng được, nên chúng ta đành phải áp dụng cách đổi biến $t = \tan\frac{x}{2}$, cách này có điều bất tiện là đưa đến những điểm "không liên tục ký sinh" đó là các điểm $\pi + 2n\pi$, với $n \in \mathbb{Z}$.

- Giả sử $n \in \mathbb{Z}$; với mọi x thuộc $\left]-\pi + 2n\pi\ ;\ \pi + 2n\pi\right[$, ta có :

$$I(x) = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{a + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{2dt}{(a+1)+(a-1)t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\ t\right) + C_n,\ C_n \in \mathbb{R}.$$

Như vậy tồn tại $C_n \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \left]-\pi + 2n\pi\ ;\ \pi + 2n\pi\right[,\ I(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\ \tan\frac{x}{2}\right) + C_n.$$

- Nhưng vì $x \mapsto \frac{1}{a+\cos x}$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$, nên I thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$. Như vậy chúng ta phải "nối" các nguyên hàm trên lại, bằng cách làm cho các giới hạn của I tại $(\pi + 2n\pi)^-$ và $(\pi + 2n\pi)^+$ bằng nhau.

Ta được : $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_n = -\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_{n+1}$, suy ra :

$C_{n+1} = C_n + \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. Ta suy ra : $\forall n \in \mathbb{Z}, C_n = C_o + \dfrac{2n\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, với $C_o \in \mathbb{R}$,

và như vậy ta thu được biểu thức của $I(x)$ với mọi x thuộc R :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\tan\dfrac{x}{2}\right) + n\pi\right) + C_o \\ \qquad\qquad \text{nếu } x \in\,]-\pi + 2n\pi\,;\,\pi + 2n\pi[,\ n \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{(2n+1)\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_0 \qquad \text{nếu } x = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Cho $n \in \mathbb{Z}$ và $x \in\,]-\pi + 2n\pi\,;\,\pi + 2n\pi[$. Chú ý rằng

$\mathrm{Arctan}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2} - n\pi$, ta suy ra (với ký hiệu $\alpha = \sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}$) :

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\alpha\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) + C_o$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{Arctan}\frac{\alpha\tan\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}}{1 + \alpha\tan^2\frac{x}{2}} + C_o \text{ (xem 7.9.3)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{Arctan}\frac{2(\alpha-1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{(1+\cos x) + \alpha(1-\cos x)} + C_o$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{Arctan}\frac{(\alpha-1)\sin x}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos x} + C_o.$$

Ta chú ý rằng khi đó thì giá trị tại $\pi + 2n\pi$ của biểu thức cuối cùng là $\dfrac{(2n+1)\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_o$. Như vậy ta có thể kết thúc bằng kết quả sau đây, trong đó không chứa một sự "ghép nối" nào cả (ta thu được một biểu thức duy nhất cho $I(x)$, có hiệu lực khi x chạy khắp R) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{Arctan}\frac{(\alpha-1)\sin x}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos x} + C,$$

$$C \in \mathbb{R}\left(\text{và } \alpha = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right).$$

NHẬN XÉT : Đôi khi ta cũng có thể áp dụng các quy tắc Bioche để tính $\int F(\sin x, \cos x)\,dx$, khi mà F không phải là một phân thức hữu tỷ (xem bài tập 9.6.2).

Bài tập

◊ **9.6.1** Tính các nguyên hàm của các hàm số sau đây (với biến số x), và chỉ rõ tập xác định :

a) $\sin^4 x$ b) $\sin x \sin 2x \sin 3x$ c) $\dfrac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

d) $\dfrac{\tan x}{1 + \cos x}$ e) $\dfrac{1}{\cos x \sin^4 x}$ f) $\cot an^3 x$ g) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$.

◊ **9.6.2** Cũng câu hỏi như trong bài tập 9.6.2 :

a) $\dfrac{1}{\sin x\sqrt{1 + \sin x}}$ b) $\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos 2x}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{\cos x(1 - \cos x)}}$.

◊ **9.6.3** Tính các tích phân sau đây :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{4}}$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2 + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}$.

9.6.2 Hàm hữu tỷ đối với sh$x$ và ch$x$

Vấn đề đặt ra là tính $I(x) = \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$, trong đó R là một hàm phân thức hữu tỷ của hai biến. Trong thực tế ta xét nguyên hàm J xác định như sau : $J(x) = \int R(\sin x, \cos x)dx$, và cố gắng áp dụng quy tắc Bioche cho nguyên hàm này. Việc tính $J(x)$ dẫn đến việc sử dụng một trong các phép đổi biến :

$$u = \cos x, \qquad u = \sin x, \qquad u = \tan x, \qquad u = \tan\frac{x}{2}.$$

Trong trường hợp ta đang xét thì phép đổi biến tương ứng với các hàm số hypebôlic, theo thứ tự là :

$$u = \operatorname{ch} x, \qquad u = \operatorname{sh} x, \qquad u = \operatorname{th} x, \qquad u = \operatorname{th}\frac{x}{2}.$$

Cần chú ý rằng vì th $\frac{x}{2}$ được biểu diễn như một hàm phân thức bậc nhất của $e^x\left(\operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$, nên phép đổi biến $u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ hầu như quy về phép đổi biến $v = e^x$ (xem thêm 9.6.3).

THÍ DỤ :

1) Tính $I(x) = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x(2\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{ch}^3 x)}\, dx.$

Miền xác định là $\mathbb{R}$, vì : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x > |\operatorname{sh} x|$.

Với ký hiệu $\omega(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x(2\sin^3 x + 3\cos^3 x)}\,dx$ thì về hình thức ta có $\omega(\pi + x) = \omega(x)$.

Như vậy để tính $I(x)$ ta sẽ thực hiện phép đổi biến $u = \text{th}x$:

$$I(x) = \int \frac{\dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}^3 x}\dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}}{2\text{th}^3 x + 3}\,dx = \int \frac{\text{th}^2 x(1-\text{th}^2 x)}{2\text{th}^3 x + 3}\,dx = \int \frac{u^2}{2u^3+3}\,du$$
$$= \frac{1}{6}\ln|2u^3 + 3| + C = \frac{1}{6}\ln(3 + 2\text{th}^3 x) + C$$
$$= \frac{1}{6}\ln(2\text{sh}^3 x + 3\text{ch}^3 x) - \frac{1}{2}\ln\text{ch}\,x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2) Tính $I(x) = \displaystyle\int \frac{\text{sh}^3 x}{\text{ch}\,x(2+\text{sh}^2 x)}\,dx$.

Bằng cách ký hiệu $\omega(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x(2 + \sin^2 x)}\,dx$, ta có $\omega(-x) = \omega(x)$; vậy ta sẽ thực hiện phép đổi biến $u = \text{ch}x$:

$$I(x) = \int \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}\,x(2+\text{sh}^2 x)}\,\text{sh}\,x\,dx = \int \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}\,du = \int\left(-\frac{1}{u} + \frac{2u}{u^2+1}\right)du$$
$$= -\ln|u| + \ln(u^2+1) + C = -\ln\text{ch}x + \ln(2 + \text{sh}^2 x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

◊ **9.6.4** Tính nguyên hàm các hàm số sau đây (với biến số x) và chỉ rõ miền xác định :

a) $\dfrac{\text{ch}^4 x}{\text{sh}^2 x}$ b) $\dfrac{1}{\text{sh}^4 x\,\text{ch}^4 x}$ c) $\dfrac{1}{\text{ch}^5 x}$ d) $\dfrac{\text{sh}\,x}{3+\text{sh}^2 x}$

e) $\dfrac{1}{1+\text{ch}^2 x}$ f) $\dfrac{\text{ch}3x}{1+\text{sh}\,x}$ g) $\dfrac{1}{\text{ch}3x - \text{ch}\,x}$ h) $\text{th}^3 x$.

◊ **9.6.5** Tính các nguyên hàm sau, với $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A(x) = \int \text{ch}(n+1)x\,\text{sh}^{n-1}x\,dx \qquad B(x) = \int \text{sh}(n+1)x\,\text{sh}^{n-1}x\,dx$$
$$C(x) = \int \text{ch}(n+1)x\,\text{ch}^{n-1}x\,dx \qquad D(x) = \int \text{sh}(n+1)x\,\text{ch}^{n-1}x\,dx.$$

◊ **9.6.6** Tính các nguyên hàm sau, trong đó $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n \geq 3$:

$$I(x) = \int \frac{\text{sh}\,2x}{\text{sh}^n x}\,dx\,,\quad J(x) = \int \frac{\text{sh}\,2x}{\text{ch}^n x}\,dx.$$

9.6.3 Hàm hữu tỷ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$

Vấn đề đặt ra ở đây là tính $I(x) = \int F(e^{\alpha x})dx$, trong đó $F \in \mathbb{C}(X)$ và $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Nói chung ta sẽ thực hiện phép đổi biến $u = e^{\alpha x}$:

$$I(x) = \frac{1}{\alpha}\int \frac{F(u)}{u}\,dx.$$

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int \frac{dx}{(e^x+2)^2}$.

$$I(x) \underset{u=e^x}{=} \int \frac{du}{u(u+2)^2} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{(u+2)^2} - \frac{1}{u+2} \right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u| + \frac{2}{u+2} - \ln|u+2| \right) + C = \frac{1}{4}\left(x + \frac{2}{e^x+2} - \ln(e^x+2) \right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

NHẬN XÉT :

1) Để tính $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ (xem 9.6.2), ta có thể thực hiện phép đổi biến $u = e^x$, vì vấn đề ở đây là tính nguyên hàm của một hàm phân thức hữu tỷ của e^x. Nhưng thông thường phép đổi biến này dẫn đến những phép tính dài hơn so với khi ta có thể áp dụng một trong các quy tắc Bioche.

2) Đôi khi người ta cũng sử dụng cùng phép đổi biến $u = e^x$ đó để tính $\int F(e^x)dx$, trong đó hàm F không nhất thiết phải là hàm phân thức hữu tỷ.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int \sqrt{e^x + 1}\, dx$.

$$I(x) \underset{u=e^x}{=} \int \sqrt{u+1}\, \frac{1}{u}\, du \underset{v=\sqrt{u+1}}{=} \int \frac{v}{v^2-1}\, 2v\, dv = 2 \int \frac{v^2}{v^2-1}\, dv$$

$$= 2 \int \left(1 + \frac{1}{v^2-1} \right) dv = 2\left(v - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right) + C$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} - \ln \frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

◊ **9.6.7** Tính $\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

9.6.4 Hàm hữu tỷ đối với x và $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Chỉ số $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, và các hệ số $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho $ad - bc \neq 0$ đều cố định. Ta sẽ thực hiện phép đổi biến $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, việc này sẽ quy việc tính $I(x) = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$ (trong đó R là một hàm phân thức hữu tỷ của hai biến) về việc tính $\int F(u) du$, trong đó $F \in \mathbb{R}(X)$.

THÍ DỤ :

1) Tính $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Miền xác định : $\mathbb{R}_+^*$.

$$I(x) \underset{u = \sqrt[6]{x}}{=} \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2}\, du = 6 \int \frac{u^3}{u+1}\, du$$

$$= 6 \int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1} \right) du = 6 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1| \right) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2) Tính $I(x) = \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\, dx$

Miền xác định = $[0 ; 1[$.

Ta có :

$$I(x) = \int \frac{1}{1-x} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx, \text{ bằng phép đổi biến } u = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\left(x = \frac{u^2}{1+u^2},\ dx = \frac{2u}{(1+u^2)^2}\, du \right), \text{ ta có :}$$

$$I(x) = \int (1 + u^2)\, u \frac{2u}{(1+u^2)^2}\, du = 2 \int \frac{u^2}{1+u^2}\, du = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du$$

$$= 2(u - \operatorname{Arctan} u) + C = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

◊ **9.6.8** Tính các nguyên hàm của các hàm số sau đây (với biến số x), và chỉ rõ miền xác định :

a) $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

b) $\frac{1}{x + \sqrt{x-1}}$

c) $\frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

d) $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$

e) $\frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}$

f) $\frac{x^2}{(2-x^3)\sqrt{1-x^3}}$.

◊ **9.6.9** Tính các tích phân sau :

a) $\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $0 < a < b$

b) $\int_2^3 \frac{dx}{x - \sqrt{x+1}}$.

9.6.5 Hàm hữu tỷ đối với x và $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Có nhiều phương pháp để tính

$$I(x) = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x$$

(với $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ và R là một hàm phân thức hữu tỷ của hai biến) : một số trong các phương pháp đó gắn liền với hình học (phương trình tham số hữu tỷ của các đường cônic). Chúng ta sẽ chỉ xét một phương pháp "thuần túy tính toán".

Trường hợp $a = 0$ là một trường hợp đặc biệt của 9.6.4, khi đó cơ sở của phương pháp tính là phép đổi biến $y = \sqrt{bx + c}$. Vậy ta sẽ giả thiết $a \neq 0$. Khi đó, với ký hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có :

$$\forall x \in \mathrm{R},\ ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Trường hợp $\Delta = 0$ có thể giải quyết dễ dàng (căn bậc hai "biến đi"). Vậy ta sẽ giả thiết $\Delta \neq 0$, và chia làm ba trường hợp :

Trường hợp thứ 1 : a > 0 và $\Delta < 0$

Lúc này ta có : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = \frac{-\Delta}{4a}\left(1 + \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)$.

Bằng phép đổi biến $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, ta quy việc tính $I(x)$ về việc tính $J(t) = \int S(t, \sqrt{1+t^2})\,\mathrm{d}t$, trong đó S là một hàm hữu tỷ. Sau đó phép đổi biến $\varphi = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$ sẽ quy việc tính $J(t)$ về việc tính $K(\varphi) = \int T(\mathrm{sh}\varphi, \mathrm{ch}\varphi)\mathrm{d}\varphi$, với T là một hàm hữu tỷ. Cuối cùng ta sẽ áp dụng một phương pháp trong 9.6.2.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Miền xác định của $I = \mathrm{R}$,

$$\forall x \in \mathrm{R},\ x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right),$$

do đó ta thực hiện phép đổi biến $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$I(x) = \int \frac{\frac{1}{2}(t\sqrt{3} - 1)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t\sqrt{3}-1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Bây giờ ta thực hiện phép đổi biến $\varphi = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$, tức là $t = \mathrm{sh}\varphi$:

$$I(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\varphi - 1}{\mathrm{ch}\varphi}\,\mathrm{ch}\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\varphi - \frac{1}{2}\varphi + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C_1$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} + \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C,\ \ C_1, C \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp thứ 2 : $a < 0$ và $\Delta > 0$

Khi đó : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c = \frac{-\Delta}{4a}\left(1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right)$.

Bằng cách thực hiện phép đổi biến $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ ta sẽ quy việc tính $I(x)$ về việc tính $J(t) = \int S(t, \sqrt{1-t^2})\,dt$, trong đó S là một hàm số hữu tỷ. Sau đó phép đổi biến $\theta = \text{Arcsin}t$ sẽ quy việc tính $J(t)$ về việc tính $K(\theta) = \int T(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$, với T là một hàm số hữu tỷ. Cuối cùng ta sẽ áp dụng một phương pháp trong 9.6.1.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int \sqrt{x-x^2}\,dx$.

Miền xác định của $I = [0\ ;\ 1]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x - x^2 = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(1-(2x-1)^2).$$

Phép đổi biến $t = 2x - 1$ cho ta : $I(x) = \frac{1}{4}\int \sqrt{1-t^2}\,dt$.

Bây giờ ta thực hiện phép đổi biến $\theta = \text{Arcsin}t$:

$$I(x) = \frac{1}{4}\int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C = \frac{1}{8}\text{Arcsin}\,t + \frac{1}{8}t\sqrt{1-t^2} + C$$

$$= \frac{1}{8}\text{Arcsin}(2x-1) + \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp thứ 3 : $a > 0$ và $\Delta > 0$

Bây giờ ta có : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c = \frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right)$.

Bằng phép đổi biến $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ ta sẽ quy việc tính $I(x)$ về việc tính $J(t) = \int S(t, \sqrt{t^2-1})\,dt$, trong đó S là một hàm số hữu tỷ. Sau đó phép đổi biến $\varphi = \ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1})$ (với $\varepsilon = \text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t > 0 \end{cases}$) sẽ quy việc tính $J(t)$ về việc tính $K(\varphi) = \int T(\text{sh}\varphi, \varepsilon\text{ch}\varphi)\,d\varphi$, trong đó T là một hàm số hữu tỷ vì $t = \varepsilon\text{ch}\varphi$ và $\sqrt{t^2-1} = \text{sh}\varphi$. Cuối cùng ta sẽ áp dụng một phương pháp trong 9.6.2.

THÍ DỤ : Tính $I(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Miền xác định của $I =]-\infty\ ;\ 1[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left((2x-3)^2 - 1\right),$$

do đó phép đổi biến $t = 2x - 3$ cho :

$$I(x) = \int \frac{\frac{t+5}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{t^2-1}}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t+5}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.$$

Bây giờ ta thực hiện phép đổi biến $\varphi = \ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1})$, với $\varepsilon = \mathrm{sgn}(t)$:

$$I(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\varepsilon\mathrm{ch}\,\varphi + 5}{\mathrm{sh}\,\varphi}\,\varepsilon\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int(\mathrm{ch}\varphi + 5\varepsilon)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\varphi + \frac{5\varepsilon}{2}\varphi + C_1(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{t^2-1} + \frac{5\varepsilon}{2}\ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1}) + C_2(t)$$

$$= \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5\varepsilon}{2}\ln\left(\left|x - \frac{3}{2}\right| + \sqrt{x^2-3x+2}\right) + C(x),$$

trong đó C không đổi trên $]-\infty\ ;\ 1[$ và trên $]2\ ;\ +\infty[$. Ta cũng còn có thể biểu diễn kết quả dưới dạng :

$$I(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2}\ln|2x - 3 + 2\sqrt{x^2-3x+2}| + C_3(x),$$

(với C_3 không đổi trên $]-\infty\ ;\ 1[$ và trên $]2\ ;\ +\infty[$).

NHẬN XÉT :

1) Không thể xảy ra trường hợp ($a < 0$ và $\Delta < 0$) vì khi đó thì :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c < 0.$$

2) Trường hợp đặc biệt khi cần tính $I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(\lambda x + \mu)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, thì nên bắt đầu bằng phép đổi biến $y = \frac{1}{\lambda x + \mu}$, việc này sẽ quy việc tính $I(x)$ về việc tính $J(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3) Các nguyên hàm ta nghiên cứu trong điểm 9.6.5 này là những trường hợp đặc biệt của các **tích phân Abel** $\int R(x, \varphi(x))\mathrm{d}x$, trong đó R là một hàm hữu tỷ hai biến, và φ là một hàm số thỏa mãn một hệ thức đa thức không tầm thường đối với đa thức $P(x, \varphi(x)) = 0$, sao cho đường cong (Γ) có phương trình $P(x, y) = 0$ là đường *đơn hoạch* (có thể vẽ được mà không nhấc đầu bút chì, sao cho mỗi cung chỉ được vẽ một lần (courbe unicursale)), tức là có một biểu diễn tham số hữu tỷ.

Bài tập

◊ **9.6.10** Tính các nguyên hàm của các hàm số sau đây (với biến số x), và chỉ ra miền xác định :

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-5x+4}}$ c) $\dfrac{1}{(4x-x^2)^{3/2}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ e) $\dfrac{1}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$ f) $\dfrac{1}{(1+x^2)(x-\sqrt{x^2-1})}$

g) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$ h) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ i) $\dfrac{1}{(x-2)^3\sqrt{x^2-4x+3}}$

j) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. k) $\dfrac{1}{(x-2)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

◊ **9.6.11** Cũng câu hỏi như bài tập 9.6.10 với :

a) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^\alpha+x^{2\alpha}}}$, $\alpha \in]1\,;+\infty[$ b) $\sqrt{2+\tan^2 x}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{4-(e^x+1)^2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}}$ e) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x\,x^4+x^2+1}}$.

◊ **9.6.12** a) Tính các nguyên hàm trên $\mathbb{R}-\{0, 1\}$ của $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x(1-x)|}}$.

b) Chứng minh rằng trong các nguyên hàm ở câu a) tồn tại một và chỉ một nguyên hàm có thể thác triển liên tục tới 0 và 1 và nhận giá trị 0 tại $\dfrac{1}{2}$; ký hiệu ánh xạ đó là F. Vẽ đường cong biểu diễn F.

◊ **9.6.13** Tính các tích phân sau đây :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos a\cos x}$, $a \in]0\,;\pi[$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(1+\cos 2x)\sqrt{1-\tan^2 x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

◊ **9.6.14** Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{x^2+x^3}$ nhận một ánh xạ ngược liên tục $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, và biểu thị $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+f^{-1}(x)}$ theo x và $f^{-1}(x)$ mà không dùng đến dấu tích phân.

◊ **9.6.15** Chứng minh : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\sin^2 a} \operatorname{Arcsin}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\cos^2 a} \operatorname{Arccos}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

◊ **9.6.16** Chứng tỏ rằng với mọi (x, y) thuộc $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$:

$$y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} \Leftrightarrow x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u}.$$

Chương 10

Tích phân trên một khoảng bất kỳ

Trong chương 10 này, nếu không ghi chú trái lại, thì I sẽ chỉ một khoảng không rỗng và không thu về một điểm. Các hàm số được xét đến đều xác định và liên tục trên I, và nhận giá trị trong $\mathbf{R}_+$ (§10.1) hoặc $\mathbf{C}$ (§10.2).

10.1 Các hàm số liên tục, khả tích, với giá trị thực dương hay bằng không

10.1.1 Định nghĩa

♦ **Định nghĩa 1** Cho $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục và thỏa mãn $f \geq 0$. Ta nói rằng f là **khả tích** (hoặc **khả tổng**) **trên** I khi và chỉ khi tồn tại một phần tử M thuộc $\mathbf{R}_+$ sao cho $\int_J f \leq M$ với mọi đoạn J bao hàm trong I.

Chúng ta nhắc lại rằng một đoạn (trên $\mathbf{R}$) là một khoảng đóng giới nội $[\alpha\ ;\ \beta]$, trong đó $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $\alpha \leq \beta$.

NHẬN XÉT :

Nếu I là một đoạn, và nếu $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0, thì khi đó f khả tích trên I, và với mọi đoạn J bao hàm trong I (ký hiệu $I = [\alpha\ ;\ \beta]$) : $\int_J f \leq \int_\alpha^\beta f$.

Với các ký hiệu trên, nếu $f : I \to \mathbf{R}_+$ khả tích trên I, thì tập hợp các $\int_J f$ (khi J chạy khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong I) là một bộ phận không rỗng và bị chặn trên của $\mathbf{R}$, và do đó có cận trên trong $\mathbf{R}$.

Từ nhận xét này ta có định nghĩa sau :

♦ **Định nghĩa 2** Cho $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục, ≥ 0 và khả tích.

Tích phân của f **trên** I, ký hiệu là $\int_I f$, là cận trên của các $\int_J f$ khi J chạy khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong I.

NHẬN XÉT :

1) Với các giả thiết và ký hiệu trong Định nghĩa 2 thì : $\int_I f \geq 0$.

2) Nếu I là một đoạn $[\alpha ; \beta]$ thì mọi ánh xạ $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0 đều khả tích trên I và : $\int_I f = \int_\alpha^\beta f$.

3) Ta quy ước rằng nếu I là một đơn tử thì mọi ánh xạ $f : I \to \mathrm{R}$, ≥ 0 được coi như khả tích trên I và : $\int_I f = 0$.

♦ Mệnh đề 1

$$\text{Nếu } \left\{ \begin{array}{l} f : I \to \mathbf{R} \text{ liên tục và } \geq 0 \\ f \text{ khả tích trên } I \\ \int_I f = 0 \end{array} \right. \quad , \text{ thì } f = 0$$

Chứng minh :

Cho $x_0 \in I$. Tồn tại một đoạn J không rỗng và không thu về một điểm sao cho $x_0 \in J \subset I$.

Khi đó ta có : $0 \leq \int_J f \leq \int_I f = 0$, vậy $\int_J f = 0$.

Theo Tập 1, 6.2.5, Hệ quả 4, ta suy ra : $\forall x \in J, f(x) = 0$, và đặc biệt $f(x_0) = 0$.

Vậy ta đã chứng tỏ rằng : $\forall x_0 \in I, f(x_0) = 0$, tức là $f = 0$.

♦ Hệ quả

$$\text{1) Nếu } \left\{ \begin{array}{l} f : I \to \mathbf{R} \text{ liên tục} \\ f^2 \ (= f.f) \text{ khả tích trên } I \\ \int_I f^2 = 0 \end{array} \right. \quad , \text{ thì } f = 0$$

$$\text{2) Nếu } \left\{ \begin{array}{l} f : I \to \mathbf{C} \text{ liên tục} \\ |f| \text{ khả tích trên } I \\ \int_I |f| = 0 \end{array} \right. \quad , \text{ thì } f = 0$$

♦ Mệnh đề 2

Giả sử $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục, ≥ 0. Các tính chất sau đây từng đôi một tương đương với nhau.

(i) f khả tích trên I

(ii) Tồn tại $M \in \mathbf{R}_+$ sao cho với mọi dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn có hợp bằng I thì : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{J_n} f \leq M$.

(iii) Tồn tại $M \in \mathbf{R}_+$ và một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn có hợp bằng I sao cho :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{J_n} f \leq M.$$

Hơn nữa, nếu (i), (ii) hay (iii) thỏa mãn thì, với mọi dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn có hợp bằng I, ta có :

$$\int_I f = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f.$$

Ở đây $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng có nghĩa là : $\forall n \in \mathbf{N}^*, J_n \subset J_{n+1}$.

Chứng minh :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Giả sử f khả tích trên I và $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những đoạn sao cho : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = I$.

Theo các Định nghĩa 1 và 2, ta có : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{J_n} f \leq \int_I f$.

Vậy số thực $M = \int_I f$ thỏa mãn (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

Ta chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại ít nhất một dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mà hợp bằng I, bằng cách xét các loại đoạn có thể bao hàm trong I. Chẳng hạn với $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$:

$$]a\ ;\ b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{b-a}{n}\ ;\ b \right],\ [a\ ;\ -\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a\ ;\ a+n].$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) :

Giả sử tồn tại $M \in \mathbf{R}_+$ và một dãy đoạn tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, có hợp bằng I, sao cho : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{J_n} f \leq M$.

Giả sử $J = [\alpha\ ;\ \beta]$ là một đoạn bao hàm trong I. Vì $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = I$, nên tồn tại $(n_1, n_2) \in (\mathbf{N}^*)^2$ sao cho $\alpha \in J_{n_1}$ và $\beta \in J_{n_2}$. Ký hiệu $n_o = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$, vì $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng nên ta có : $\alpha \in J_{n_o}$ và $\beta \in J_{n_o}$, suy ra $J = [\alpha\ ;\ \beta] \subset J_{n_o}$, từ đó vì

$f \geq 0$ ta có : $\int_J f \leq \int_{J_{n_o}} f \leq M$. Như vậy với mọi đoạn J bao hàm trong I ta có : $\int_J f \leq M$. Hệ thức này chứng tỏ f khả tích trên I. ■

Giả sử (i), (ii) hoặc (iii) được thỏa mãn, và xét dãy đoạn tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, có hợp bằng I.

• Dãy số thực $\left(\int_{J_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng (vì $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng và $f \geq 0$), bị chặn trên bởi $\int_I f$, do đó hội tụ về một số thực ký hiệu là M_0, và :

$$\operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f = M_o \leq \int_I f.$$

• Trong phép chứng minh (iii) ⇒ (i) ta đã thấy rằng, với mọi đoạn J bao hàm trong I, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $J \subset J_{n_o}$, và do đó $\int_J f \leq \int_{J_{n_o}} f \leq M_o$. Chuyển qua cận trên khi J duyệt qua toàn bộ tập hợp các đoạn bao hàm trong I, ta suy ra được :

$$\int_I f \leq M_o.$$

Cuối cùng ta có : $M_o = \int_I f$.

10.1.2 Các tính chất đại số

♦ **Mệnh đề 1**

Cho $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $f, g : I \to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0.
Nếu f và g khả tích trên I, thì $\lambda f + g$ cũng khả tích trên I, và :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

Chứng minh :

• Ánh xạ $\lambda f + g$ liên tục và ≥ 0.

• Tồn tại một dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng, có hợp bằng I. Ta có :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \leq \lambda \int_I f + \int_I g,$$

do đó (xem 10.1.1, Mệnh đề 2) $\lambda f + g$ khả tích.

Hơn nữa, vì $\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f$ và $\int_{J_n} g \xrightarrow[n\infty]{} \int_I g$, nên ta có :

$$\int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \xrightarrow[n\infty]{} \lambda \int_I f + \int_I g,$$

suy ra $$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

♦ **Mệnh đề 2** **(Định lý về hàm ưu thế)**

Giả sử $f, g : I \to \mathbf{R}$ liên tục.

Nếu $\begin{cases} 0 \leq f \leq g \\ g \text{ khả tích trên } I \end{cases}$, thì khi đó f khả tích trên I và $\int_I f \leq \int_I g$.

Chứng minh :

Giả sử $0 \leq f \leq g$ và g khả tích trên I.

Với mọi đoạn J bao hàm trong I :

$$\int_J f \leq \int_J g \leq \int_I g$$

Theo 10.1.1, Định nghĩa 1 và 2, f khả tích trên I và :

$$\int_I f = \operatorname{Sup}_J \int_J f \leq \int_I g.$$

♦ **Định nghĩa**

Giả sử $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0, I' là một khoảng (không rỗng và không thu về một điểm) sao cho $I' \subset I$.

- Ta nói rằng f **khả tích trên** I' khi và chỉ khi hàm thu hẹp $f\big|_{I'}$ khả tích trên I'.
- Nếu f khả tích trên I' thì ta sẽ viết $\int_{I'} f$ thay cho $\int_{I'} f\big|_{I'}$.

♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0, I' là một khoảng thỏa mãn $I' \subset I$. Nếu f khả tích trên I, thì f cũng khả tích trên I' và :

$$\int_{I'} f \leq \int_I f.$$

Chứng minh :

Giả sử f khả tích trên I. Với mọi đoạn J' bao hàm trong I' (do đó bao hàm trong I), ta có :

$$\int_{J'} f \leq \int_I f.$$

Hệ thức này chứng tỏ (xem 10.1.1, Định nghĩa 1 và 2) rằng f khả tích trên I' và

$$\int_{I'} f \leq \int_I f.$$

♦ **Mệnh đề 4**

Giả sử $f : I \to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0, $a \in I$.

1) f khả tích trên I khi và chỉ khi f khả tích trên $]-\infty ; a] \cap I$ và $I \cap [a ; +\infty[$.

2) Hơn nữa, nếu f khả tích trên I thì :

$$\int_I f = \int_{]-\infty ; a] \cap I} f + \int_{I \cap [a ; +\infty[} f$$

Chứng minh :

1) • Nếu f khả tích trên I, thì theo Mệnh đề trên đây, f khả tích trên $]-\infty ; a] \cap I$ và $I \cap [a ; +\infty[$.

• Ngược lại giả sử f khả tích trên $]-\infty ; a] \cap I$ và trên $[a ; +\infty[\cap I$. Tồn tại một dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ tăng sao cho $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} J_n = I$ và ($\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a \in J_n$), và ta có (xem 10.1.1, Mệnh đề 2) :

$$\int_I f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f.$$

Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, ta ký hiệu $J_n' =]-\infty ; a] \cap J_n$, $J_n'' = J_n \cap [a ; +\infty[$.

Rõ ràng là $(J_n')_{n \in \mathbf{N}^*}$ và $(J_n'')_{n \in \mathbf{N}^*}$ là những dãy đoạn tăng sao cho :

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} J_n' =]-\infty ; a] \cap I, \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} J_n'' = I \cap [a ; +\infty[.$$

Theo 10.1.1, Mệnh đề 2 :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{]-\infty ; a[\cap I} f = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbf{N}^*} \int_{J_n'} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n'} f \\ \displaystyle\int_{I \cap [a ; +\infty[} f = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbf{N}^*} \int_{J_n''} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n''} f \end{cases}$$

Theo hệ thức Chasles (Tập 1, 6.2.6, Mệnh đề 1) :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{J_n} f = \int_{J_n'} f + \int_{J_n''} f \leq \int_{]-\infty ; a] \cap I} f + \int_{I \cap [a ; +\infty[} f$$

và do đó (10.1.1, Định nghĩa 1 và 2) f khả tích trên I và :

$$\int_I f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n'} f + \lim_{n\infty} \int_{J_n''} f = \int_{]-\infty ; a] \cap I} f + \int_{I \cap [a ; +\infty[} f$$

10.1.3 Hàm khả tích trên một khoảng nửa mở

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $(a, b) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho $a < b$, $f : [a ; b[\to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0. Ta ký hiệu ánh xạ xác định bởi

$$\forall X \in [a\ ;\ b[\ ;\ F(X) = \int_a^X f$$

là $F : [a\ ;\ b[\to \mathbf{R}$.

Các tính chất sau đây từng đôi một tương đương :

(i) f khả tích trên $[a\ ;\ b[$

(ii) F bị chặn trên trên $[a\ ;\ b[$

(iii) F có giới hạn hữu hạn tại b.

Hơn nữa, nếu một trong ba tính chất đó được thỏa mãn thì :

$$\int_{[a\,;\,b[} f = \sup_{X \in [a\,;\,b[} \int_a^X f = \lim_{X \to b} \int_a^X f.$$

Khi đó tích phân $\int_{[a\,;\,b[} f$ cũng được ký hiệu là $\int_a^b f$ (hay $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Chứng minh :

(i) $\to$ (ii) :

Giả sử f khả tích trên $[a\ ;\ b[$. Với mọi x thuộc $[a\ ;\ b[$, vì $[a\ ;\ X]$ là một đoạn bao hàm trong $[a\ ;\ b[$, nên ta có :

$$F(X) = \int_a^X f = \int_{[a\,;\,X]} f \le \int_{[a\,;\,b[} f,$$

chứng tỏ rằng F bị chặn trên (bởi $\int_{[a\,;\,b[} f$).

(ii) $\to$ (iii) :

Giả sử f bị chặn trên $[a\ ;\ b[$. Vì F tăng (do $f \ge 0$), nên suy ra F có giới hạn hữu hạn tại b.

(iii) $\Rightarrow$ (i) :

Giả sử F có giới hạn hữu hạn L tại b. Vì F tăng (do $f \ge 0$), nên ta có :

$\forall X \in [a\ ;\ b[$, $\int_a^X f = F(X) \le L$. Cho J là một đoạn bao hàm trong $[a\ ;\ b[$; ký hiệu mút phải của J là X, ta có :

$$\int_J f \le \int_a^X f = F(X) \le L.$$

Vậy (xem 10.1.1, Định nghĩa 1 và 2), f khả tích trên $[a\ ;\ b[$ và

$$\int_{[a\,;\,b[} f \le L.$$

Cuối cùng, nếu một trong các điều kiện (i), (ii), (iii) được thỏa mãn thì F có giới hạn hữu hạn L tại b.

Một mặt ta có : $L \le \int_{[a\,;\,b[} f$, vì $\forall x \in [a\,;\,b[,\ F(X) \le \int_{[a\,;\,b[} f$.

Mặt khác ta đã thấy là : $\int_{[a\,;\,b[} f \le L$.

Do đó : $\displaystyle\int_{[a\,;\,b[} f = L.$

♦ **Hệ quả**

Giả sử $(a\,,\,b) \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbf{R}$ thỏa mãn $a < b, f :]a\,;\,b] \to \mathbf{R}$, liên tục và ≥ 0. Ta ký hiệu là $F :]a\,;\,b] \to \mathbf{R}$ ánh xạ xác định như sau:

$$\forall X \in\ ]a\,;\,b],\ F(X) = \int_X^b f.$$

Ba tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi một :

(i) f khả tích trên $]a\,;\,b]$

(ii) F bị chặn trên trên $]a\,;\,b]$

(iii) F có giới hạn hữu hạn tại a.

Hơn nữa, nếu một trong ba tính chất đó được thỏa mãn, thì :

$$\int_{]a\,;\,b]} f = \sup_{X \in]a\,;\,b]} \int_X^b f = \lim_{X \to a} \int_X^b f.$$

Khi đó tích phân $\int_{]a\,;\,b]} f$ cũng được ký hiệu là $\int_a^b f$ (hay $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Chứng minh :

Ta chỉ cần áp dụng Mệnh đề trên đây cho hàm số $\begin{array}{l}[a\,;\,b[\ \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(a+b-x)\end{array}$ nếu $a \in \mathbf{R}$, hoặc hàm $\begin{array}{l}[-b\,;\,+\infty[\ \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(-x)\end{array}$ nếu $a = -\infty$.

THÍ DỤ :

1) Với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, ánh xạ $x \mapsto e^{\alpha x}$ khả tích trên $[0\,;\,+\infty[$ khi và chỉ khi $\alpha < 0$, vì

$$\forall X \in [0\,;\,+\infty[,\ \int_0^X e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\,(e^{\alpha X} - 1) & \text{nếu } \alpha \ne 0 \\ X & \text{nếu } \alpha = 0 \end{cases}$$

Hơn nữa, với mọi α thuộc $\mathbb{R}_-^*$:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\alpha}\,(e^{\alpha X} - 1) = \frac{1}{-\alpha}.$$

2) Ánh xạ $x \mapsto -\ln x$ khả tích trên $]0\,;\,1]$ vì :

$$\begin{cases} \forall X \in]0\,;\,1],\ \displaystyle\int_X^1 -\ln x\,dx = [x - x\ln x]_X^1 = 1 - X + X\ln X \\ 1 - X + X\ln X \xrightarrow[X \to 0^+]{} 1 \end{cases}$$

Hơn nữa $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\,dx = 1$.

♦ **Định lý 1** **(Thí dụ Riemann tại +∞)**

Với mọi α thuộc $\mathbf{R}$, ánh xạ $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $[1\,;\,+\infty[$ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

Chứng minh :

Ta tính $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ với mọi X thuộc $[2\,;\,+\infty[$:

• Nếu $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X = \frac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$.

1) Nếu $\alpha > 1$: $\dfrac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha-1}$, do đó $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $[1\,;\,+\infty[$ và $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Nếu $\alpha < 1$: $\dfrac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, do đó $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ không khả tích trên $[1\,;\,+\infty[$.

• Nếu $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x}\,dx = \ln X \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, do đó $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ không khả tích trên $[1\,;\,+\infty[$.

♦ **Định lý 2** **(Thí dụ Riemann tại 0)**

Với mọi α thuộc $\mathbf{R}$, ánh xạ $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $]0\,;\,1]$ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

Chứng minh :

Phương pháp thứ nhất : cải biên phép chứng minh Định lý trên.

Phương pháp thứ hai : bằng phép đổi biến $u = \frac{1}{x}$:

$\forall X \in]0 \,;\, 1]$, $\int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \int_1^{\frac{1}{X}} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\, du$, và $\int_{[1\,;\,+\infty[} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\, du$ tồn tại khi và chỉ khi $-\alpha + 2 > 1$, tức là $\alpha < 1$.

THÍ DỤ :

Ánh xạ $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$ là khả tích trên $[1 \,;\, +\infty[$ vì :

- $\forall x \in [1 \,;\, +\infty[$, $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$
- $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ khả tích trên $[1 \,;\, +\infty[$.

Phép đổi biến $u = x - a$ cho phép ta chứng minh Hệ quả sau, tổng quát hóa kết quả của Định lý trên :

◆ **Hệ quả**

Với mọi $(a, c, \alpha) \in \mathbf{R}^3$ sao cho $a \neq c$, ánh xạ $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ khả tích trên $]a \,;\, c]$ (hoặc $[c \,;\, a[$) khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

◆ **Mệnh đề 2 (Định lý tương đương)**

Cho $(a, b) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho $a < b$, $f, g : [a \,;\, b[\to \mathbf{R}$ liên tục. Giả sử : $f \ge 0$, $g \ge 0$, $f \underset{b}{\sim} g$.

Khi đó : f khả tích trên $[a \,;\, b[$ khi và chỉ khi g khả tích trên $[a \,;\, b[$.

Chứng minh :

Vì $f \underset{b}{\sim} g$ nên tồn tại $c \in [a \,;\, b[$ sao cho :

$$\forall x \in [c \,;\, b[, |f(x) - g(x)| \le \frac{1}{2} g(x),$$

và suy ra
$$\forall x \in [c \,;\, b[, \frac{1}{2} g(x) \le f(x) \le \frac{3}{2} g(x).$$

- Nếu f khả tích trên $[a \,;\, b[$ thì khi đó f cũng khả tích trên $[c \,;\, b[$, và vì :

$$\forall x \in [c \,;\, b[, 0 \le g(x) \le 2f(x),$$

nên g khả tích trên $[c \,;\, b[$, do đó khả tích trên $[a \,;\, b[$.

- Nếu g khả tích trên $[a \,;\, b[$ thì khi đó g cũng khả tích trên $[c \,;\, b[$, và vì $\forall x \in [c \,;\, b[$, $0 \le f(x) \le \frac{3}{2} g(x)$, nên f khả tích trên $[c \,;\, b[$, và do đó khả tích trên $[a \,;\, b[$.

THÍ DỤ :

Khảo sát tính khả tích của $f : [1 \,;\, +\infty[\to \mathbf{R}$ xác định như sau :

$$\forall x \in [1 \,;\, +\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Ánh xạ f liên tục, và $f \geq 0$ vì :

$$\forall x \in [1 \,;\, +\infty[,\ (x^2 + x + 1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{3}{4} \geq 0.$$

Với mọi $x \in [1 \,;\, +\infty[$ ta có :

$$f(x) = \frac{1}{x}\,\frac{(x^2+x+1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4x\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x^2}.$$

Vì ánh xạ $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ khả tích trên $[1 \,;\, +\infty[$ (thí dụ Riemann, $2 > 1$), nên ánh xạ $x \mapsto \dfrac{3}{8x^2}$ cũng khả tích, rồi theo định lý tương đương suy ra f khả tích trên $[1 \,;\, +\infty[$.

♦ **Mệnh đề 3** **(Quy tắc "$x^\alpha f(x)$" tại $+\infty$)**

Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [a \,;\, +\infty[\to \mathbf{R}$ liên tục và ≥ 0.

1) Nếu tồn tại $\alpha \in \,]1 \,;\, +\infty[$ sao cho $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, thì f khả tích trên $[a \,;\, +\infty[$.

2) Nếu tồn tại $\alpha \in \,]-\infty \,;\, 1]$ sao cho $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, thì f không khả tích trên $[a \,;\, +\infty[$.

Chứng minh :

1) Tồn tại $c \in [a \,;\, +\infty[$ sao cho : $\forall x \in [c \,;\, +\infty[,\ 0 \leq x^\alpha f(x) \leq 1$, do đó :

$$\forall x \in [c \,;\, +\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Dựa trên định lý về hàm ưu thế (10.1.2, Mệnh đề 2) và thí dụ Riemann tại $+\infty$, ta suy ra kết luận cần thiết.

2) Tồn tại $c \in [a \,;\, +\infty[$ thỏa mãn : $\forall x \in [c \,;\, +\infty[,\ x^\alpha f(x) \geq 1$, suy ra :

$$\forall x \in [c \,;\, +\infty[,\ f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Kết luận cần thiết suy ra dựa trên mệnh đề phản của định lý về hàm ưu thế và thí dụ Riemann tại $+\infty$.

THÍ DỤ :

Khảo sát tính khả tích của $f : x \mapsto e^{-\sqrt[3]{x} + \sin x}$ trên $[1 \,;\, +\infty[$.

Rõ ràng f liên tục và ≥ 0, nên với mọi α thuộc $\mathbf{R}$:

$$x^\alpha e^{-\sqrt[3]{x} + \sin x} = \exp(\alpha \ln x - \sqrt[3]{x} + \sin x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Đặc biệt : $x^2f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ và và $2 > 1$, nên do đó f khả tích trên $[1\ ;\ +\infty[$. ■

Ta cũng có thể thử áp dụng quy tắc "$x^\alpha f(x)$" khi thấy rằng hình như f không nhận một hàm tương đương "đơn giản" nào (khi x dần đến $+\infty$).

NHẬN XÉT :

Quy tắc "$x^\alpha f(x)$" quy về việc so sánh $f(x)$ và $\dfrac{1}{x^\alpha}$ (trong lân cận của $+\infty$), với một α được chọn thích hợp. Một số hàm số f thì không thích hợp với sự so sánh đó, nên quy tắc "$x^\alpha f(x)$ (tại $+\infty$)" không cho phép ta khảo sát tính khả tích của các hàm số f đó trên $[a\ ;\ +\infty[$. Chẳng hạn với $f : [2\ ;\ +\infty[\xrightarrow[x \mapsto \frac{1}{x\ln x}]{} \mathbb{R}$, thì ta có :

$$\begin{cases} \forall\alpha \in\ ]1\ ;\ +\infty[,\ x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ \forall\alpha \in\ ]-\infty\ ;\ 1\,],\ x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

và do đó không thể áp dụng quy tắc "$x^\alpha f(x)$" được. Đối với thí dụ này xin xem thí dụ của Bertrand sau đây.

◆ **Mệnh đề 4** **(Quy tắc "$(x - a)^\alpha f(x)$" tại a^+)**

Cho $(a, b) \in \mathrm{R}^2$ thỏa mãn $a < b$, $f :]a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ liên tục và ≥ 0.

1) Nếu tồn tại $\alpha \in\ ]-\infty\ ;\ 1[$ sao cho $(x - a)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} 0$, thì f khả tích trên $]a\ ;\ b]$.

2) Nếu tồn tại $\alpha \in [1\ ;\ +\infty[$ sao cho $(x - a)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$, thì f không khả tích trên $]a\ ;\ b]$.

Chứng minh :

Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 1.

Ta cũng có thể quy về Mệnh đề 1 bằng phép đổi biến $u = \dfrac{1}{x - a}$.

THÍ DỤ :

Ánh xạ $f : x \mapsto -\ln x$ khả tích trên $]0\ ;\ 1]$, vì f liên tục, $f \geq 0$ và $x^{\frac{1}{2}}f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.

Ta cũng có thể chứng minh được rằng f là khả tích trên $]0\ ;\ 1]$ với nhận xét rằng f liên tục, $f \geq 0$ và qua một phép tính tích phân từng phần thì :

$$\int_X^1 f(x)\mathrm{d}x = [-x\ln x]_X^1 + \int_X^1 \mathrm{d}x = X\ln X + 1 - X \xrightarrow[X \to 0^+]{} 1,$$

và áp dụng 10.1.3, Mệnh đề 1.

Bằng phương pháp thứ hai ta còn được : $\int_0^1 -\ln x\,dx = 1$ (xem thêm Thí dụ 2).

Thí dụ Bertrand tại +∞ (không thuộc chương trình)

Với $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ta hãy khảo sát tính khả tích của hàm số $f_{\alpha,\beta} : [2\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$\forall x \in [2\,;+\infty[,\ f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$$

• Nếu $\alpha > 1$, bằng cách ký hiệu $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, ta có

$$x^{\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln x)^{-\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$

và do đó $f_{\alpha,\beta}$ là khả tích trên $[2\,;+\infty[$.

• Nếu $\alpha < 1$ ta có : $x f_{\alpha,\beta}(x) = x^{1-\alpha}(\ln x)^{-\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, và suy ra $f_{\alpha,\beta}$ không khả tích trên $[2\,;+\infty[$.

• Nếu $\alpha = 1$ thì ta thực hiện phép đổi biến $u = \ln x$:

$$\forall X \in [2\,;+\infty[,\ \int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{u^{\beta}}\,du.$$

Vậy $f_{\alpha,\beta}$ khả tích trên $[2\,;+\infty[$ khi và chỉ khi $u \mapsto \dfrac{1}{u^{\beta}}$ là khả tích trên $[\ln 2\,;+\infty[$, tức là khi và chỉ khi $\beta > 1$.

Cuối cùng ta có : $f_{\alpha,\beta}$ khả tích trên $[2\,;+\infty[$ khi và chỉ khi :

$$\left|\begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{hay} \\ (\alpha = 1 \text{ và } \beta > 1) \end{array}\right.$$

Bài tập

◊ **10.1.1** Khảo sát tính khả tích của các ánh xạ (lấy giá trị trong $\mathbb{R}_+$) sau đây, với biểu thức là $f(x)$ và khoảng lấy tích phân như sau :

a) $e^{-x\,\mathrm{Arctan}\,x}$, $[0\,;+\infty[$

b) $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$, $[1\,;+\infty[$

c) $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, $[1\,;+\infty[$

d) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$, $[1\,;+\infty[$

e) $x + 1 - \sqrt{x^2+2x}$, $[1\,;+\infty[$

f) $\mathrm{Arctan}(e^{-x})$, $[0\,;+\infty[$

g) $\dfrac{1}{e^x - \cos x}$, $]0\,;1]$

h) $\dfrac{\mathrm{ch}\,x - \cos x}{x^{5/2}}$, $]0\,;1]$

i) $\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$, $[2\,;+\infty[$

j) $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln x})^{-2}$, $[2\,;+\infty[$

k) $\sqrt{-\ln x}$, $]0\,;1]$.

◊ **10.1.2** a) **Tích phân Wallis** (Xem Tập 1, 6.4.4, Thí dụ 1).

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta ký hiệu : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$.

α) Chứng minh rằng : $I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} I_n$.

β) Chứng minh rằng : $I_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

b) **Tính tích phân** $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$

α) Chứng minh rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi x thuộc $[0\ ;\ \sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

β) Bằng cách áp dụng a), suy ra rằng : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Suy ra rằng hàm số $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}$ khả tích trên $[0\ ;\ +\infty[$ và tính $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} \mathrm{d}x$

(sử dụng kết quả ở b) β)).

◊ **10.1.3** a) Cho $f : [0\ ;\ 1] \to \mathbb{R}_+$ liên tục, giảm và khả tích. Chứng tỏ rằng :

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{]0\ ;\ 1]} f.$$

b) Từ đó suy ra : α) $\lim\limits_{n\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{kn}}$ β) $\lim\limits_{n\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}$.

10.2 Các hàm số phức liên tục, khả tích

10.2.1 Đại cương

♦ **Định nghĩa 1** Cho $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục. Ta nói rằng f **khả tích trên** I khi và chỉ khi $|f|$ (vốn liên tục và ≥ 0) khả tích trên I.

Rõ ràng Định nghĩa này mở rộng Định nghĩa ở 10.1.1.

THÍ DỤ :

1) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ khả tích trên $[1\ ;\ +\infty[$, vì $|f| : x \mapsto \dfrac{|\sin x|}{x^2}$ khả tích theo định lý về hàm ưu thế $\left(|f|(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \right)$.

2) Ta khảo sát tính khả tích trên $[1\ ;\ +\infty[$ của $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Giả sử $X \in [3\ ;\ +\infty[$. Ta có :

$$\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \underset{\left[y = x - \frac{\pi}{2}\right]}{=} \int_1^X \frac{|\cos y|}{y + \frac{\pi}{2}}\, dy,$$

do đó : $$2\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}\, dx + \int_1^X \frac{|\cos y|}{y+\frac{\pi}{2}}\, dy \geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x + \frac{\pi}{2}}\, dx$$

$$\geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x+\frac{\pi}{2}}\, dx = \left[\ln\left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} = \ln\left(X + \frac{\pi}{2} \right) - \ln(1+\pi),$$

suy ra : $$\int_1^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$$

Hệ thức trên chứng tỏ $|f|$ không khả tích trên $[1\ ;\ +\infty[$, và do đó theo định nghĩa f, không khả tích trên $[1\ ;\ +\infty[$. ■

♦ **Mệnh đề 1** Cho $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g : I \to \mathbb{C}$ liên tục. Nếu f, g khả tích trên I thì $\lambda f + g$ cũng khả tích trên I.

Chứng minh :

Vì $|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$, và do $|f|$ và $|g|$ khả tích trên I, nên $|\lambda f + g|$ khả tích trên I (định lý về hàm ưu thế, 10.1.2, Mệnh đề 2), và suy ra $\lambda f + g$ khả tích trên I. ■

NHẬN XÉT :

Tập hợp các hàm số khả tích trên I và lấy giá trị trên $\mathbb{C}$ (tương ứng : trên $\mathbb{R}$) là một $\mathbb{C}$ – không gian vectơ (tương ứng : $\mathbb{R}$ – không gian vectơ) đối với các luật hợp thành thông thường.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục ; f khả tích trên I khi và chỉ khi f^+ và f^- khả tích trên I.

Ta nhắc lại rằng (xem Tập 1, 4.1.2, Định nghĩa 3) f^+ và f^- là các ánh xạ từ I vào $\mathbb{R}$ xác định như sau :

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} f^+(x) = \operatorname{Sup}(f(x), 0) \\ f^-(x) = \operatorname{Sup}(-f(x), 0) \end{cases}$$

và ta có : $\quad f = f^+ - f^-$ và $|f| = f^+ + f^-$.

Hơn nữa, do f liên tục, nên f^+ và f^- cũng liên tục (xem Tập 1, 4.3.2, Nhận xét).

Chứng minh :

1) Nếu f khả tích trên I, thì (theo định nghĩa) $|f|$ cũng khả tích ; vì $0 \le f^+ \le |f|$ và $0 \le f^- \le |f|$, nên định lý hàm ưu thế (10.1.2, Mệnh đề 2) chứng tỏ rằng f^+ và f^- cũng khả tích.

2) Ngược lại, nếu f^+ và f^- khả tích trên I, thì khi đó f cũng khả tích trên I, vì $f = f^+ - f^-$ (xem Mệnh đề 1).

♦ **Định nghĩa – Ký hiệu 2**

Cho $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục. Nếu f khả tích trên I, thì số thực

$$\int_I f^+ - \int_I f^-$$

được gọi là **tích phân của f trên I**, ký hiệu là $\int_I f$.

Rõ ràng định nghĩa này là sự mở rộng của định nghĩa ở 10.1.1. Nếu I là một đơn tử thì mọi ánh xạ $f : I \to \mathbb{R}$ đều khả tích và : $\int_I f = 0$.

♦ **Mệnh đề 3** Cho $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục ; f khả tích trên I khi và chỉ khi $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ khả tích trên I.

Chứng minh :

Trước hết ta chú ý rằng, do f liên tục, nên $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ cũng liên tục (xem Tập 1, 4.3.2, Mệnh đề 3).

1) Giả sử f khả tích trên I. Vì $|\operatorname{Re} f| \le |f|$ và $|\operatorname{Im} f| \le |f|$, nên định lý về hàm ưu thế (10.1.2, Mệnh đề 2) chứng tỏ rằng $|\operatorname{Re} f|$ và $|\operatorname{Im} f|$ cũng khả tích trên I, do đó (theo định nghĩa) $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ khả tích trên I.

2) Đảo lại, nếu Ref và Imf khả tích trên I, thì do f = Ref + Imf nên f cũng khả tích trên I (xem Mệnh đề 1).

♦ **Định nghĩa - Ký hiệu 3** Cho $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục. Nếu f khả tích trên I thì số phức $\int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$ được gọi là **tích phân của f trên I** và ký hiệu là $\int_I f$.

Rõ ràng Định nghĩa này là sự mở rộng của định nghĩa đã phát biểu trên đây.

Nếu I là một đơn tử thì mọi ánh xạ $f : I \to \mathbb{C}$ đều khả tích và $\int_I f = 0$.

♦ **Mệnh đề 4** Cho $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên I.
Với mọi dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, tăng và có hợp bằng I, ta có :

$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f.$$

Chứng minh :

• Nếu f nhận những giá trị thực thì :

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (f^+ - f^-) = \int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^- \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f^+ - \int_I f^- = \int_I f.$$

• Bây giờ, với f nhận những giá trị phức thì :

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) = \int_{J_n} \operatorname{Re} f + i \int_{J_n} \operatorname{Im} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$$
$$= \int_I f.$$

10.2.2 Các tính chất

♦ **Mệnh đề 1** **(Tính chất tuyến tính của phép tích phân)**
Cho $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g : I \to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên I. Khi đó $\lambda f + g$ khả tích trên I và :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

Chứng minh : Theo 10.2.1, Mệnh đề 1, $\lambda f + g$ khả tích trên I. Tồn tại một dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng, có hợp bằng I. Theo 10.2.1, Mệnh đề 4 :

$$\begin{cases} \int_{J_n} (\lambda f + g) \xrightarrow[n\infty]{} \int_I (\lambda f + g) \\ \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \xrightarrow[n\infty]{} \lambda \int_I f + \int_I g. \end{cases}$$

Do (xem Tập 1, 6.3, Mệnh đề 1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g$$

nên ta suy ra bằng cách qua giới hạn khi n dần tới $+\infty$:

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

Kết quả này là sự mở rộng kết quả của 10.1.2, Mệnh đề 1.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục.

1) f khả tích trên I khi và chỉ khi $\bar{f}$ khả tích trên I.

2) Nếu f khả tích trên I thì $\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.

Chứng minh :

1) (f khả tích trên I) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}f \text{ khả tích trên } I \\ \text{Im}f \text{ khả tích trên } I \end{array} \right| \Leftrightarrow$ ($\bar{f}$ khả tích trên I)

2) $\int_I \bar{f} = \int_I (\text{Re}f - \text{i}\,\text{Im}f) = \int_I \text{Re}f - \text{i}\int_I \text{Im}f = \overline{\int_I \text{Re}f + \text{i}\int_I \text{Im}f} = \overline{\int_I f}$

♦ **Mệnh đề 3** **(Tính đồng biến của tích phân)**

Giả sử $f, g : I \to \mathbb{R}$ liên tục và khả tích trên I. Nếu $f \le g$ thì

$$\int_I f \le \int_I g.$$

Chứng minh :

Giả sử f và g liên tục và khả tích trên I và $f \le g$.

Khi đó $g - f \ge 0$ và $g - f$ khả tích trên I (xem 10.2.1, Mệnh đề 1). Theo 10.1.1, Nhận xét 1, ta có : $\int_I (g - f) \ge 0$.

Khi đó theo Mệnh đề trên đây :

$$\int_I g - \int_I f = \int_I (g - f) \ge 0, \text{ do đó } \int_I f \le \int_I g.$$

♦ **Mệnh đề 4** Với mọi ánh xạ $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên $\mathbb{C}$:

$$\left| \int_I f \right| \le \int_I |f|.$$

Chứng minh :

Tồn tại một dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng và có hợp bằng I. Theo 10.2.1, Mệnh đề 4 :

$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f \text{ và } \int_{J_n} |f| \xrightarrow[n\infty]{} \int_I |f|.$$

Do (xem Tập 1, 6.3, Mệnh đề 2) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_{J_n} f \right| \leq \int_{J_n} |f|$, nên khi chuyển qua giới hạn khi n tiến tới vô cùng, ta suy ra :

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

♦ **Mệnh đề 5** Giả sử $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục và I' là một khoảng thỏa mãn $I' \subset I$. Nếu f khả tích trên I thì f cũng khả tích trên I'.

Chứng minh :

Lược đồ phép chứng minh sử dụng Mệnh đề 3, 10.1.2, như sau :

(f khả tích trên I) $\Leftrightarrow$ ($|f|$ khả tích trên I) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($|f|$ khả tích trên I') $\Leftrightarrow$ (f khả tích trên I').

♦ **Mệnh đề 6** **(Hệ thức Chasles)**

Giả sử $a \in I$, $I' =]-\infty\,; a] \cap I$, $I'' = I \cap [a\,; +\infty[$, $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục.

1) Điều kiện cần và đủ để f khả tích trên I là f khả tích trên I' và trên I''.

2) Hơn nữa, nếu f khả tích trên I thì $\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f$.

Chứng minh :

1) Suy từ Mệnh đề 5 và từ 10.1.2, Mệnh đề 4.

2) Giả sử f khả tích trên I. Tồn tại một dãy đoạn $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng và có hợp bằng I, sao cho :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \in J_n$. Khi đó thì :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} f = \int_{]-\infty\,; a] \cap J_n} f + \int_{J_n \cap [a\,; +\infty[} f\,,$$

và
$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f, \quad \int_{]-\infty\,; a] \cap J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_{I'} f, \quad \int_{J_n \cap [a\,; +\infty[} f \xrightarrow[n\infty]{} \int$$

(vì rằng $(]-\infty\,; a] \cap J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là một dãy đoạn tăng, có hợp bằng I', và tương tự đối với I''), suy ra

$$\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f. \qquad \blacksquare$$

Chẳng hạn, nếu $a < c < b$, thì điều kiện cần và đủ để f khả tích trên $]a\,;\,b[$ là f khả tích trên $]a\,;\,c]$ và trên $[c\,;\,b[$, và ta có :

$$\int_{]a\,;\,b[} f = \int_{]a\,;\,c]} f + \int_{[c\,;\,b[} f.$$

■

♦ **Mệnh đề 7** **(Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz)**

Cho $f, g : I \to \mathbb{R}$ liên tục.

Nếu f^2 và g^2 khả tích trên I, thì khi đó fg cũng khả tích trên I và :

$$\Big(\int_I fg\Big)^2 \le \Big(\int_I f^2\Big)\Big(\int_I g^2\Big).$$

Chứng minh :

1) Bằng cách khai triển $(|f| - |g|)^2 \ge 0$, ta được $0 \le |fg| \le \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$. Vì f^2 và g^2 đều khả tích trên I, nên $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ cũng khả tích trên I (định lý về hàm ưu thế, 10.1.2, Mệnh đề 2) do đó $|fg|$ khả tích trên I, và suy ra fg khả tích trên I.

2) Tồn tại một dãy đoạn $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng, có hợp bằng I. Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz đối với tích phân các hàm số liên tục (từng khúc) trên một đoạn (xem Tập 1, 6.2.5, Định lý ta có :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Big(\int_{J_n} fg\Big)^2 \le \Big(\int_{J_n} f^2\Big)\Big(\int_{J_n} g^2\Big)$$

Chuyển qua giới hạn khi n dần đến vô cùng ta được kết quả cần có.

♦ **Mệnh đề 8** **(Trường hợp có đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy – Schwarz)**

Giả sử $f, g : I \to \mathbb{R}$ liên tục, sao cho f^2 và g^2 khả tích trên I. Để có $\Big(\int_I fg\Big)^2 = \Big(\int_I f^2\Big)\Big(\int_I g^2\Big)$, điều kiện cần và đủ là (f, g) phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ sao cho $\alpha f + \beta g = 0$.

Chứng minh :

Lập luận như trong phép chứng minh ở 6.2.5, Mệnh đề 4, Tập 1.

10.2.3 Tính khả tích trên một khoảng nửa mở hay mở

♦ **Mệnh đề 1**

Giả sử $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ thỏa mãn $a < b$, $f : [a\,;\,b[\to \mathbb{C}$ liên tục. Ta ký hiệu bằng $F : [a\,;\,b[\to \mathbb{C}$ ánh xạ xác định như sau :

$$\forall X \in [a\,;\,b[, \quad F(X) = \int_a^X f.$$

Nếu f khả tích trên $[a\,;\,b[$, thì F có giới hạn hữu hạn tại b, và :

$$\int_{[a\,;\,b[} f = \lim_{X\to b} \int_a^X f.$$

Khi đó tích phân $\int_{[a\,;\,b[} f$ sẽ được ký hiệu là $\int_a^b f$ (hay : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh :

1) **Trường hợp f lấy giá trị thực**

Giả sử f khả tích trên $[a\,;\,b[$ và nhận giá trị thực. Khi đó f^+ và f^- cũng khả tích trên $[a\,;\,b[$ và :

$$\int_{[a\,;\,b[} f = \int_{[a\,;\,b[} f^+ - \int_{[a\,;\,b[} f^-$$

Theo 10.1.3, Mệnh đề 1 :

$$\int_a^X f^+ \xrightarrow[X\to b]{} \int_{[a\,;\,b[} f^+ \quad \text{và} \int_a^X f^- \xrightarrow[X\to b]{} \int_{[a\,;\,b[} f^-$$

Do : $\quad \forall X \in [a\,;\,b[,\ F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (f^+ - f^-) = \int_a^X f^+ - \int_a^X f^-,$

nên ta suy ra rằng F có giới hạn hữu hạn tại b, và :

$$\lim_{x\to b} F(x) = \int_{[a\,;\,b[} f^+ - \int_{[a\,;\,b[} f^- = \int_{[a\,;\,b[} f.$$

2) **Trường hợp f lấy giá trị phức**

Giả sử $f : [a\,;\,b[\to \mathbb{C}$ khả tích trên $[a\,;\,b[$. Khi đó $\mathrm{Re}f$ và $\mathrm{Im}f$ cũng khả tích trên $[a\,;\,b[$ và :

$$\int_{[a\,;\,b[} f = \int_{[a\,;\,b[} \mathrm{Re}f + \mathrm{i} \int_{[a\,;\,b[} \mathrm{Im}f.$$

Theo 1) (trường hợp giá trị thực) :

$$\int_a^X \mathrm{Re}f \xrightarrow[X\to b]{} \int_{[a\,;\,b[} \mathrm{Re}f \quad \text{và} \quad \int_a^X \mathrm{Im}f \xrightarrow[X\to b]{} \int_{[a\,;\,b[} \mathrm{Im}f.$$

Do : $\forall X \in [a\,;\,b[,\ F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (\mathrm{Re}f + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}f) = \int_a^X \mathrm{Re}f + \mathrm{i}\int_a^X \mathrm{Im}f,$

nên ta suy ra rằng F có giới hạn hữu hạn tại b, và :

$$\lim_{X \to b} F(X) = \int_{[a\,;\,b[} \mathrm{Re} f + i \int_{[a\,;\,b[} \mathrm{Im} f = \int_{[a\,;\,b[} f.$$

NHẬN XÉT :

1) Kết quả này mở rộng kết quả ở 10.1.3, Mệnh đề 1 (ngoại trừ những điều nói về cận trên).

2) Ta không thể bỏ giả thiết "f khả tích trên $[a\,;\,b[$". Thật vậy, có thể xảy ra trường hợp F có giới hạn hữu hạn tại b mà f không khả tích trên $[a\,;\,b[$.

Xét thí dụ : $a = 1$, $b = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

- f không khả tích trên $[1\,;\,+\infty[$ (xem 10.2.1, Thí dụ 2).
- Bằng một phép tích phân từng phần, ta có với mọi X thuộc $[1\,;\,+\infty[$:

$$F(X) = \int_1^X f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Một mặt : $-\dfrac{\cos X}{X} + \cos 1 \xrightarrow[X \to +\infty]{} \cos 1$.

Mặt khác thì $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ khả tích trên $[1\,;\,+\infty[$ (theo định lý về hàm ưu thế và thí dụ Riemann, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$), do đó theo Mệnh đề trên đây :

$$\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X \to +\infty]{} \int_{[1\,;\,+\infty[} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Ta suy ra rằng F có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$:

$$F(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \cos 1 - \int_{[1\,;\,+\infty[} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

♦ **Hệ quả** Giả sử $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b$, $f :]a\,;\,b] \to \mathbb{C}$ liên tục. Ta ký hiệu bằng $F :]a\,;\,b] \to \mathbb{C}$ ánh xạ xác định như sau :

$$\forall X \in]a\,;\,b],\ F(X) = \int_X^b f.$$

Nếu f khả tích trên $]a\,;\,b]$, thì f có giới hạn hữu hạn tại a và :

$$\int_{]a\,;\,b]} f = \lim_{X \to a} \int_X^b f.$$

Khi đó tích phân $\displaystyle\int_{]a\,;\,b]} f$ cũng được ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f$ (hay : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh :

Phương pháp chứng minh như đối với Hệ quả của Mệnh đề 1, 10.1.3,

Để tính tích phân $\int_{[a\,;\,b[} f$, trước hết ta chứng tỏ rằng f là khả tích trên $[a\,;\,b[$, sau đó ta tính $\lim_{X \to b} \int_a^X f$. Để thực hiện việc này ta sẽ áp dụng phép tính các tích phân (Tập 1, chương 6) hay phép tính các nguyên hàm (chương 9). Thông thường ta phải tích phân từng phần hay đổi biến số.

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $a < b$, $f : [a\,;\,b[\to \mathbb{C}$ liên tục và tại b có giới hạn hữu hạn l.

Khi đó f khả tích trên $[a\,;\,b[$, và nếu ký hiệu $\tilde{f} : [a\,;\,b[\to \mathbb{C}$ là thác triển liên tục của f trên $[a\,;\,b]$, xác định như sau :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [a\,;\,b[\\ l & \text{nếu } x = b \end{cases}$$

thì ta có :

$$\int_{[a\,;\,b[} f = \int_a^b \tilde{f}.$$

Chứng minh :

• Với mọi đoạn J bao hàm trong $[a\,;\,b[$, ta có :

$$\int_J |f| = \int_J |\tilde{f}| \le \int_a^b |\tilde{f}|.$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng $|f|$ khả tích trên $[a\,;\,b[$, và do đó f cũng khả tích trên $[a\,;\,b[$.

• Vì $\tilde{f}$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, nên $\tilde{f}$ bị chặn, và với mọi X thuộc $[a\,;\,b[$ ta có :

$$\left| \int_a^X f - \int_a^b \tilde{f} \right| = \left| \int_a^X \tilde{f} - \int_a^b \tilde{f} \right| = \left| \int_b^X \tilde{f} \right| \le \int_X^b |\tilde{f}| \le (b - X)\|\tilde{f}\|_\infty \xrightarrow[X \to b]{} 0,$$

suy ra : $\int_a^X f \xrightarrow[X \to b]{} \int_a^b \tilde{f}$.

Theo 10.2.3, Mệnh đề 1, ta có kết luận :

$$\int_{[a\,;\,b[} f = \int_a^b \tilde{f}.$$

THÍ DỤ :

1) Khảo sát sự tồn tại và tính $\int_{[0\,;\,+\infty[} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$.

• Ánh xạ $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ liên tục trên $[0 ; +\infty[$, ≥ 0, và $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Theo định lý về hàm tương đương và thí dụ Riemann $(2 > 1)$, ta kết luận rằng f khả tích trên $[0 ; +\infty[$.

• Bằng cách phân tích thành phân thức đơn giản, ta được với mọi X thuộc $[0 ; +\infty[$:

$$\int_0^X \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^X \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_0^X$$

$$= \ln|(X+1)| - \ln|(X+2)| + \ln 2 = \ln\left(2\frac{X+1}{X+2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2.$$

Suy ra :

$$\int_{[0 ; +\infty[} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln 2.$$

2) Khảo sát sự tồn tại và tính $\displaystyle\int_{[0 ; 1[} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

• Ánh xạ $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ liên tục trên $[0 ; 1[$, ≥ 0 và :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}\,(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Theo định lý hàm tương đương và thí dụ Riemann $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, ta kết luận được rằng f khả tích trên $[0 ; 1[$.

• Bằng phép đổi biến $\theta = \text{Arcsin} x$ (do sự hiện diện của $\sqrt{1-x^2}$ gợi ý) ta được với mọi X thuộc $[0 ; 1[$: $\displaystyle\int_0^X \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\text{Arcsin} X} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$.

Sau đó, bằng phép đổi biến $t = \tan\theta$:

$$\int_0^{\text{Arcsin} X} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_0^{\frac{X}{\sqrt{1-X^2}}} \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\text{Arctan}\, t\sqrt{2}\Big]_0^{\frac{X}{\sqrt{1-X^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Arctan}\frac{\sqrt{2}\,X}{\sqrt{1-X^2}}$$

Suy ra :

$$\int_0^X \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[X \to 1^-]{} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Cuối cùng ta được :

$$\int_{[0\,;\,1[} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3) Khảo sát sự tồn tại và tính $\displaystyle\int_{[0\,;\,+\infty[} \frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

• Ánh xạ $f : x \mapsto \dfrac{x\mathrm{Arctan}\,x}{(x^2+1)^2}$ liên tục trên $[0\,;\,+\infty[$, ≥ 0, và $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^3}$.

Theo định lý hàm tương đương và thí dụ Riemann ($3 > 1$), ta kết luận được rằng f khả tích trên $[0\,;\,+\infty[$.

• Phép đổi biến $y = \dfrac{1}{x}$ cho ta, với mọi X thuộc $[1\,;\,+\infty[$:

$$\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{X}^{\frac{1}{X}} \frac{\frac{1}{y}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{y^2}+1\right)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{y\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,y\right)}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

Suy ra :

$$\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_{\frac{1}{X}}^{X} = \frac{\pi}{4}\,\frac{X^2-1}{X^2+1}$$

Vậy : $$\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{x\,\mathrm{Arctan}x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{8}.$$

Mặt khác, do f liên tục tại 0 : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{X}} \frac{x\,\mathrm{Arctan}x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$

Ta suy ra : $\displaystyle\int_{0}^{X} \frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{8}.$

Cuối cùng : $\displaystyle\int_{[0\,;\,+\infty[} \frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$

4) Khảo sát sự tồn tại của $\displaystyle\int_{[0\,;\,+\infty[} \mathrm{e}^{zx}\,\mathrm{d}x$, với $z \in \mathbb{C}$ cố định ; tính tích phân đó nếu nó tồn tại.

• Ánh xạ $f_z : x \mapsto \mathrm{e}^{zx}$ liên tục trên $[0\,;\,+\infty[$.

Ký hiệu $\alpha = \mathrm{Re}(z)$, $\beta = \mathrm{Im}(z)$. Ta có : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $|f_z(x)| = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Vậy f_z khả tích trên $[0\,;\,+\infty[$ khi và chỉ khi $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ khả tích trên $[0\,;\,+\infty[$.

Chúng ta đã thấy là (xem 10.1.3, Thí dụ 1), $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ khả tích trên $[0\,;\,+\infty[$ khi và chỉ khi $\alpha < 0$.

Kết luận : f_z khả tích trên $[0\,;\,+\infty[$ khi và chỉ khi $\mathrm{Re}(z) < 0$.

• Giả sử $\alpha = \mathrm{Re}(z) < 0$.

Với mọi X thuộc $[0\,;+\infty[$ ta có : $\displaystyle\int_0^X e^{zx}\,dx = \left[\frac{1}{z}\,e^{zx}\right]_0^X = \frac{1}{z}\,(e^{zX}-1)$.

Vì $|e^{zX}| = e^{\alpha X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$, nên ta suy ra $\displaystyle\int_0^X e^{zx}\,dx \xrightarrow[X\to+\infty]{} -\frac{1}{z}$.

Cuối cùng ta được : $\displaystyle\int_{[0\,;+\infty[} e^{zx}\,dx = -\frac{1}{z}$.

Hơn nữa, vì $x \mapsto e^{zx}$ khả tích trên $[0\,;+\infty[$, nên các phần thực và ảo tức là $x \mapsto e^{\alpha x}\cos\beta x$ và $x \mapsto e^{\alpha x}\sin\beta x$, đều khả tích trên $[0\,;+\infty[$ và :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{[0\,;+\infty[} e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{[0\,;+\infty[} e^{zx}dx\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{-\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \\ \displaystyle\int_{[0\,;+\infty[} e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_{[0\,;+\infty[} e^{zx}\,dx\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}.$$

♦ **Mệnh đề 3**

Cho $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ thỏa mãn $a < b$, $f :]a\,;b[\to \mathbb{C}$ liên tục.

1) Các tính chất sau đây đôi một tương đương với nhau :

(i) f khả tích trên $]a\,;b[$

(ii) Tồn tại $c \in]a\,;b[$ sao cho f khả tích trên $]a\,;c]$ và trên $[c\,;b[$

(iii) Với mọi c thuộc $]a\,;b[$, f khả tích trên $]a\,;c]$ và trên $[c\,;b[$.

2) Nếu f khả tích trên $]a\,;b[$ thì khi đó với mọi c thuộc $]a\,;b[$, ánh xạ $F :]a\,;b[\to \mathbb{C}$, được xác định là $F(X) = \displaystyle\int_c^X f$, có giới hạn hữu hạn tại a và tại b, và ta có :

$$\int_{]a\,;b[} f = \lim_{X\to b} F(X) - \lim_{X\to a} F(X).$$

Khi đó tích phân $\displaystyle\int_{]a\,;b[} f$ cũng được ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f$ (hay : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$).

Chứng minh :

1) Xem 10.2.2, Mệnh đề 6.

2) Theo hệ thức Chasles (10.2.2, Mệnh đề 6) : $\displaystyle\int_{]a\,;b[} f = \int_{]a\,;c]} f + \int_{[c\,;b[} f$. Mặt khác, do f khả tích trên $]a\,;c]$ và trên $[c\,;b[$, nên theo 10.2.3, Mệnh đề 1, ta có :

$$F(X) = -\int_X^c f \xrightarrow[X\to a]{} -\int_{]a\,;c]} f \quad \text{và} \quad F(X) = \int_c^X f \xrightarrow[X\to b]{} \int_{[c\,;b[} f.$$

Kết luận : $\displaystyle\int_{]a\,;b[} f = \lim_{X\to b} F(X) - \lim_{X\to a} F(X)$.

Bài tập

◊ **10.2.1** Giả sử I, I_1, I_2 là những khoảng thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $I_1 \cup I_2 = I$, $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục. Chứng minh rằng f khả tích trên I khi và chỉ khi f khả tích trên I_1 và trên I_2.

◊ **10.2.2** Cho I_1, I_2 là hai khoảng thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $I_1 \cup I_2$ là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, và $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên $I_1 \cup I_2$. Chứng minh rằng f khả tích trên I_1, trên I_2, trên $I_1 \cap I_2$, và

$$\int_{I_1 \cup I_2} f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1 \cap I_2} f.$$

(Có thể áp dụng kết quả của bài tập 10.2.1).

◊ **10.2.3** Giả sử $T \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0 ; +\infty[\to \mathbb{C}$ liên tục và T- tuần hoàn. Chứng minh rằng f khả tích trên $[0 ; +\infty[$ khi và chỉ khi $f = 0$.

◊ **10.2.4** Cho $a \in]0 ; +\infty]$, $f :]-a ; a[\to \mathbb{C}$ liên tục.

a) Chứng tỏ rằng nếu f là hàm chẵn, thì f khả tích trên $]-a ; a[$ khi và chỉ khi f khả tích trên $[0 ; a[$, và trong trường hợp đó thì :

$$\int_{]-a\,;\,a[} f = 2 \int_{[0\,;\,a[} f.$$

b) Chứng tỏ rằng nếu f là hàm lẻ, thì f khả tích trên $]-a ; a[$ khi và chỉ khi f khả tích trên $[0 ; a[$, và trong trường hợp đó thì : $\displaystyle\int_{]-a\,;\,a[} f = 0$.

◊ **10.2.5** Cho I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Chứng tỏ rằng ánh xạ hằng $\lambda : \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \lambda \end{array}$ khả tích trên I khi và chỉ khi I bị chặn.

◊ **10.2.6** Cho I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên I, $\varphi : I \to \mathbb{C}$ liên tục và bị chặn. Chứng minh rằng φf khả tích trên I và : $\left| \displaystyle\int_I \varphi f \right| \le \|\varphi\|_\infty \displaystyle\int_I |f|$.

◊ **10.2.7** Cho $a \in \mathbb{R}$, $f : [a ; +\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục và khả tích.

Chứng tỏ rằng : $$\int_{[X\,;\,+\infty[} f \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0.$$

◊ **10.2.8** Cho $a \in \mathbb{R}$, $f : [a ; +\infty[\to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên $[a ; +\infty[$ và có giới hạn hữu hạn l tại $+\infty$.

a) Chứng minh rằng $l = 0$.

b) Chứng tỏ rằng với mọi α thuộc $[1 ; +\infty[$, ánh xạ $|f|^\alpha : \begin{array}{l} [a ; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)|^\alpha \end{array}$ khả tích trên $[a ; +\infty[$.

◊ **10.2.9** Giả sử $f : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$ giảm, liên tục và khả tích. Chứng tỏ rằng :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

◊ **10.2.10** Khảo sát sự tồn tại và tính các tích phân sau đây (chứng tỏ tính khả tích rồi tính tích phân), ở đây $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (nếu tích phân này tồn tại) chỉ $\int_{[a\,;\,b]} f$ hay $\int_{[a\,;\,b[} f$ hay $\int_{]a\,;\,b]} f$ tùy theo từng trường hợp.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,3x}\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x^2}-\frac{1}{x(1+x^2)}\right)\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}\,x}}{(x^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$.

◊ **10.2.11** Cũng câu hỏi như trong bài tập 10.2.10 :

a) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$, $(n,\,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$ (quy về tích phân Wallis, Tập 1, 6.4.4, Thí dụ 1).

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ d) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2+1)}}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

e) $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{a^2x+2x^3}{\sqrt{x^4-a^4}}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$, $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$, $a > |b|$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

◊ **10.2.12** Chứng minh rằng các ánh xạ $f : x \to -\mathrm{e}^{-x}\ln x$ và $g : x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ khả tích trên $]0\,;\,1]$ và :

$$\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

◊ **10.2.13** Xác định các giới hạn sau đây :

a) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{1} \frac{x^n \ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_0^{a} \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\lim\limits_{n\infty} \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^n\sqrt{x^2-1}}\,dx$ d) $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^n+a}\,dx$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ cố định

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ f) $\lim\limits_{a\to 0^+} \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{ax^2}\ln(1+ax^2)\,dx$.

◊ **10.2.14** Chứng minh rằng : $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}\,dx = \frac{1}{a} + O(1)$ khi a dần tới 0^+.

◊ **10.2.15*** Chứng minh rằng : $\int\limits_{0}^{1} x^{\varepsilon x}\,dx = 1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{27} + O(\varepsilon^3)$ khi ε dần tới 0^+.

◊ **10.2.16*** Cho $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích.

a) Chứng minh rằng với mọi ε thuộc $\mathbb{R}_+^*$, $f_\varepsilon : [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{-\varepsilon x} f(x)$ khả vi trên $[0\,;+\infty[$.

b)* Chứng minh rằng : $\int\limits_{[0\,;+\infty[} f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int\limits_{[0\,;+\infty[} f$.

◊ **10.2.17** Dựng các đường cong (C) có phương trình là $y = f(x)$, với $f(x)$ là :

a) $\int\limits_{1}^{x} \frac{t^2+t}{\sqrt{t^4+1}}\,dt$ b) $\int\limits_{0}^{x} e^{\operatorname{th} t}\,dt$ c) $\int\limits_{x}^{2x} e^{-t^2}\,dt$.

◊ **10.2.18** Khảo sát sự tồn tại và tính các tích phân sau đây (chứng minh tích phân tồn tại, sau đó tính tích phân ; $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ chỉ $\int\limits_{]a\,;b[} f(x)dx$ nếu như tích phân này tồn tại) :

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

c) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ d) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{-x^4+3x^2-2}}$

e) $\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right) dx$ f) $\int\limits_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$

g) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\,dx$ h) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^3}(2x - \ln(1+2x+2x^2))\,dx$.

i) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$ j) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$

m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x.$

◊ **10.2.19** Cũng câu hỏi như bài tập 10.2.18 :

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\,\mathrm{d}x$, $0 < a < b$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta + \operatorname{ch} x}$, $\theta \in\,]-\pi\,;\,\pi[$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

Chương 11

Đại cương về phương trình vi phân

Trong toàn chương này, từ "khoảng" sẽ chỉ một khoảng trong $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm. Ta sẽ dùng ký hiệu $\mathbb{K}$ để chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

11.1 Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

11.1.1 Đại cương

- **Định nghĩa 1** Giả sử I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{K}$ là những ánh xạ liên tục, J là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $J \subset I$, và $y : J \to \mathbb{K}$ là một ánh xạ. Ta nói rằng y là **một nghiệm trên J của phương trình vi phân tuyến tính cấp một**

  (e) $$\alpha y' + \beta y = \gamma$$

  khi và chỉ khi :

  $$\begin{cases} y \text{ khả vi trên } J \\ \forall x \in J,\ \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x). \end{cases}$$

  Ở đây ta sẽ ký hiệu tập các nghiệm trên J của (e) là S_J ; **giải** (e) có nghĩa là xác định tập S_J với mọi khoảng J sao cho $J \subset I$.

Trong thực tế ta thường giả thiết J mở.

- **Định nghĩa 2** Với các ký hiệu như ở Định nghĩa 1, và trong trường hợp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, các đường cong biểu diễn các nghiệm của (e) được gọi là các **đường tích phân** của (e).

NHẬN XÉT : Trong trường hợp đặc biệt khi $\alpha = 1$ và $\beta = 0$, thì việc giải (e) quy về việc tính các nguyên hàm của γ trên I. Mục đích của chúng ta trong trường hợp tổng quát là biểu diễn các nghiệm của (e) bằng các nguyên hàm, và tính các nguyên hàm này khi có thể. Có thể dự đoán rằng trường hợp đặc biệt khi $\alpha = 1$ là đáng chú ý, do đó có định nghĩa sau đây :

◆ **Định nghĩa 3** Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

(e) $\alpha y' + \beta y = \gamma$

được gọi là **chuẩn hóa** (hay : **đã giải ra y'**) khi và chỉ khi $\alpha = 1$.

Vấn đề ghép nối

Khi (e) chưa chuẩn hóa, ta quy về một phương trình chuẩn hóa bằng cách chia cho hàm α trên mọi khoảng mà hàm α không triệt tiêu. Sau đó ta "ghép nối" các nghiệm tại những điểm mà hàm α triệt tiêu (nếu có). Để đơn giản, ta giả thiết rằng $I = \mathbb{R}$, và hàm α triệt tiêu tại một và chỉ một số thực x_0. Một ánh xạ $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ là nghiệm của (e) trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}
\text{hàm thu hẹp } y_1 \text{ của } y \text{ trên }]-\infty\,;\, x_0[\text{ là nghiệm của (e) trên }]-\infty\,;\, x_0[\\
\text{hàm thu hẹp } y_2 \text{ của } y \text{ trên }]x_0\,;\, +\infty[\text{ là nghiệm của (e) trên }]x_0\,;\, +\infty[\\
y_1 \text{ có giới hạn hữu hạn } l_1 \text{ tại } x_0^-\\
y_2 \text{ có giới hạn hữu hạn } l_2 \text{ tại } x_0^+\\
l_1 = l_2\\
\dfrac{y_1(x) - l_1}{x - x_0} \text{ có giới hạn hữu hạn } l_1' \text{ khi } x \text{ dần tới } x_0^-\\
\dfrac{y_2(x) - l_2}{x - x_0} \text{ có giới hạn hữu hạn } l_2' \text{ khi } x \text{ dần tới } x_0^+\\
l_1' = l_2'\\
\alpha(x_0)l_1' + \beta(x_0)l_1 = \gamma(x_0).
\end{cases}$$

Ta sẽ xét vấn đề này trong 11.1.3, 6).

Bây giờ chúng ta chú ý đến phương trình vi phân tuyến tính cấp một chuẩn hóa

(E) $y' + ay = b$

trong đó $a, b : I \to \mathbb{K}$ là những hàm số liên tục.

Ta ký hiệu :

(E_0) $y' + ay = 0$

là **phương trình có vế phải bằng 0 liên kết với** (E) (hay đôi khi là : phương trình thuần nhất liên kết với (E)), cách gọi này có nguy cơ bị lẫn lộn với các phương trình thuần nhất mà ta sẽ nghiên cứu trong 11.3.3), khi đó phương trình (E) được gọi là **phương trình có vế thứ hai.**

11.1.2 Giải phương trình không có vế thứ hai

Ký hiệu :

| I là một khoảng trong $\mathbb{R}$
| $a : I \to \mathbb{K}$ là một ánh xạ liên tục

(E$_0$) $y' + ay = 0$, trong đó $y : I \to \mathbb{K}$ là hàm chưa biết

$S_0 = \left\{ y : I \to \mathbb{K} : \begin{cases} y \text{ khả vi trên } I \\ y' + ay = 0 \end{cases} \right\}$ là tập nghiệm của (E$_0$) trên I

- **Mệnh đề**

  S_0 là một $\mathbb{K}$ – không gian vectơ.

Chứng minh :

Ta chứng minh rằng S_0 là một $\mathbb{K}$ – không gian vectơ con của $\mathbb{K}$ – không gian vectơ $\mathbb{K}^I$ tạo nên bởi các ánh xạ từ I vào $\mathbb{K}$.

- $S_0 \neq \varnothing$ vì S_0 có chứa ánh xạ không $0 : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto 0 \end{array}$
- Giả sử $y_1, y_2 \in S_0$ và $\lambda \in \mathbb{K}$; khi đó $\lambda y_1 + y_2$ khả vi trên I và

$$(\lambda y_1 + y_2)' + a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1' + ay_1) + (y_2' + ay_2) = 0,$$

suy ra $\quad \lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

- **Định lý**

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

  Nói cách khác, S_0 là đường thẳng vectơ sinh bởi ánh xạ $\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto e^{-A(x)} \end{array}$ trong đó $A(x)$ là một nguyên hàm (bất kỳ) của a trên I.

Chứng minh :

Vì a liên tục trên I nên a có nguyên hàm trên I (xem 6.4.2, Tập 1), ta ký hiệu một nguyên hàm đó là A, chẳng hạn : $\forall x \in I, A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t$, trong đó x_0 là một điểm cố định thuộc I. Với mọi ánh xạ khả vi $y : I \to \mathbb{K}$, ta ký hiệu $z : I \to \mathbb{K}$ là ánh xạ xác định như sau :

$$\forall x \in I,\ z(x) = e^{A(x)} y(x).$$

Như vậy, với mọi x thuộc I, ta có : $\begin{cases} y(x) = e^{-A(x)} z(x) \\ y'(x) = -a(x)e^{-A(x)} z(x) + e^{-A(x)} z'(x) \end{cases}$

suy ra : $\quad y \in S_0 \quad \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{-A(x)} z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow z' = 0$

$\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, z(x) = \lambda)$.

Vậy :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

NHẬN XÉT :

1) Có thể trình bày phép chứng minh trên đây dưới dạng :

$$y' + ay = 0 \Leftrightarrow (y' + ay)e^A = 0 \Leftrightarrow (ye^A)' = 0 \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K},\ ye^A = \lambda)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda e^{-A}).$$

2) Cách tính sau đây :

$$y' + ay = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a \Leftrightarrow \ln|y| = -a + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow |y| = \lambda e^{-A} \ (\lambda \in \mathbb{R}_+)$$

$$\Leftrightarrow y = \lambda e^{-A} \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

không được chặt chẽ vì nhiều lý do :

• Phép chia cho y là không hợp lệ, vì y có thể triệt tiêu tại những điểm nào đó thuộc I (ngay cả nếu sau đó ta nhận thấy rằng mọi nghiệm không đồng nhất bằng không đều không triệt tiêu tại điểm nào cả).

• Việc chuyển từ $|y|$ sang y cần áp dụng đến định lý về các giá trị trung gian.

Như vậy, để giải (E_0) ta nên sử dụng Định lý nêu ở trên.

THÍ DỤ :

1) Giải $y' + y = 0$ (trong đó $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Ở đây ta có :

$$S_0 = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-x} \end{matrix} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Giải $y' - e^{x^2} y = 0$ (trong đó $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Ta có $$S_0 = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{E(x)} \end{matrix} \right\},$$ trong đó $E(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

Trong thí dụ này, chúng ta không thể biểu thị "trực tiếp" các nghiệm (tức là không sử dụng ký hiệu nguyên hàm).

Bài tập

◊ **11.1.1** Giải các phương trình vi phân (trong đó y lấy giá trị thực) trên mọi khoảng mở I thuộc $\mathbb{R}$:

a) $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$ b) $x^n y' - \alpha y = 0$, $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$.

◊ **11.1.2** Tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi và thỏa mãn :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1.$$

◊ **11.1.3** Tìm tất cả các ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)\,dt.$$

◊ **11.1.4** Với $k \in \mathbb{R}$ cố định, tìm tất cả các ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x tf(t)\,dt = kx\int_0^x f(t)\,dt.$$

11.1.3 Giải phương trình có vế thứ hai

Ký hiệu :

I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$

$a, b : I \to \mathbb{K}$ là hai ánh xạ liên tục

(E) : $y' + ay = b$

S là tập hợp các nghiệm của (E) trên I

(E_0) : $y' + ay = 0$

S_0 là tập hợp các nghiệm của (E_0) trên I

1) **Quan hệ giữa S và S_0**

1) $\forall y_1, y_2 \in S, y_1 - y_2 \in S_0$

vì $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0.$

2) $\forall y_1 \in S, \forall y_0 \in S_0, y_1 + y_0 \in S,$

vì $(y_1 + y_0)' + a(y_1 + y_0) = (y_1' + ay_1) + (y_0' + ay_0) = b + 0 = b.$

Hai kết quả trên đây chứng tỏ rằng nếu S không rỗng, thì S là một đường thẳng afin cùng phương với đường thẳng vectơ S_0. Thực vậy ta có, với mọi y_1 thuộc S :

$$S = \{y_1 + y_0 \ ; \ y_0 \in S_0\}.$$

Nói cách khác, **"nghiệm tổng quát"** của (E) là tổng của một **"nghiệm riêng"** của (E) với **"nghiệm tổng quát"** của (E_0).

Như vậy ta thấy là việc giải (E) quy về việc xác định ít nhất một nghiệm của (E), thường được gọi là "nghiệm riêng" ; mọi nghiệm của (E) cũng đều là một nghiệm riêng của (E).

2) **Giải phương trình (E)**

Ta ký hiệu bằng A một nguyên hàm trên I của a và $e^A : I \to \mathbb{K}$
$x \mapsto e^{A(x)}$

Với mọi ánh xạ khả vi $y : I \to \mathbb{K}$ ta có :

$$y' + ay = b \Leftrightarrow (y' + ay)e^A = be^A \Leftrightarrow (ye^A)' = be^A.$$

Vì be^A liên tục trên I, nên be^A có nguyên hàm trên I ; ta ký hiệu là B_1 một trong các nguyên hàm trên I của be^A. Khi đó ta có :

$$y' + ay = b \Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{K}, ye^A = B_1 + \lambda)$$

$$\Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{K}, y = B_1e^{-A} + \lambda e^{-A}).$$

Như thế ta được : $\{S = B_1e^{-A} + \lambda e^{-A} \ ; \ \lambda \in \mathbb{K}\}.$

Tóm lại :

♦ **Định lý**

1) Nghiệm tổng quát trên I của phương trình (E) là tổng của một nghiệm riêng của (E) và nghiệm tổng quát của (E_0).

2) Một nghiệm riêng của (E) là $B_1 e^{-A}$, trong đó :

$$\begin{cases} A \text{ là một nguyên hàm trên } I \text{ của } a \\ B_1 \text{ là một nguyên hàm trên } I \text{ của } be^A \end{cases}$$

Như vậy ta thấy rằng việc giải (E) quy về hai phép tính nguyên hàm.

3) Phương pháp giải (E) trong thực tế

Trước tiên ta giải (E_0) (xem 11.1.2, Định lý). Sau đó ta xác định một nghiệm riêng của (E) theo cách sau đây :

1) Có thể (E) nhận một nghiệm hiển nhiên. Chẳng hạn, nếu

(E) $$y' + x^2 y = x^2$$

thì một nghiệm hiển nhiên là $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1\end{array}$

2) Nếu vế thứ hai b của (E) có thể phân tích một cách đơn giản thành một tổ hợp tuyến tính của nhiều hàm số thuộc nhiều loại khác nhau $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, thì ta có thể xác định một nghiệm riêng y_k cho mỗi phương trình (E_k) $y' + ay = b_k$, khi đó thì $\sum_{k=1}^{n} y_k$ là một nghiệm riêng của (E) vì :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)' + a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (y_k' + ay_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b.$$

Tính chất này được gọi là **nguyên tắc cộng dồn các nghiệm.**

3) *Phương pháp hằng biến thiên*

Ký hiệu y_0 là một nghiệm không đồng nhất bằng không của (E_0) ta tìm một nghiệm y cho (E) dưới dạng $y = \lambda y_0$, trong đó $\lambda : I \to \mathbb{K}$ là hàm chưa biết mới (khả vi trên I). Ta có :

$$y' + ay = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda y_0' + a\lambda y_0 = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 = b \quad (\text{vì } y_0' + ay_0 = 0).$$

Ta suy ra λ' ($\lambda' = \dfrac{b}{y_0}$; ta biết là y_0 không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào), sau đó tính λ bằng một phép tính nguyên hàm, và cuối cùng được $y = \lambda y_0$.

4) THÍ DỤ :

1) (E) $y' + xy = x$, $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế thứ hai (E_0) là $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-x^2/2}\end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Một nghiệm (hiển nhiên) của (E) là $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1\end{array}$. Vậy

$$S = \left\{ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \lambda e^{-x^2/2}\end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2) (E) $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$, $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế thứ hai là $y_0 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-x}\end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Theo nguyên tắc cộng dồn các nghiệm, ta sẽ tìm một nghiệm riêng cho từng phương trình trong hai phương trình sau đây :

(E_1) $\qquad y' + y = 2e^x$

(E_2) $\qquad y' + y = 4\sin x + 3\cos x$

Đối với (E_1) thì một nghiệm hiển nhiên là $y_1 : x \mapsto e^x$.

Đối với (E_2) ta sẽ tìm một nghiệm y_2 dưới dạng :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_2(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x\ ,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Ta có : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ y_2'(x) + y_2(x) = 4\sin x + 3\cos x$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (-\beta + \alpha)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x = 4\sin x + 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{7}{2}\ ,\ \beta = -\frac{1}{2}\right).$$

Vậy một nghiệm riêng của (E_2) là $y_2 : x \mapsto \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$.

Ta suy ra một nghiệm riêng y của (E) :

$$y = y_1 + y_2 : x \mapsto e^x + \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x.$$

Cuối cùng :

$$S = \left\{ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x + \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \lambda e^{-x}\end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3) (E) $\quad y' + \dfrac{x}{x^2+1}\,y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Nghiệm tổng quát của phương trình không chứa vế thứ hai là :

$$x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{x}{x^2+1}dx} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Do không thấy một nghiệm hiển nhiên nào của (E), chúng ta áp dụng phương pháp hằng biến thiên : ta tìm một nghiệm của (E) có dạng $y = \lambda y_0$, trong đó

$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, còn $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm chưa biết (được giả thiết là khả vi). Ta có :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + \frac{x}{x^2+1}\, y(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Vậy một nghiệm riêng của (E) là $x \mapsto \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$. Cuối cùng :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

5) Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm thỏa mãn một điều kiện ban đầu

◆ **Định lý** Giả sử I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ liên tục, (E) $y' + ay = b$, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Tồn tại một và chỉ một nghiệm y của (E) trên I sao cho $y(x_0) = y_0$.

Chứng minh :

Với các ký hiệu như ở (11.1.3, 2) thì nghiệm tổng quát của (E) trên I là :

$$y = B_1 e^{-A} + \lambda e^{-A},\ \lambda \in \mathbb{K}$$

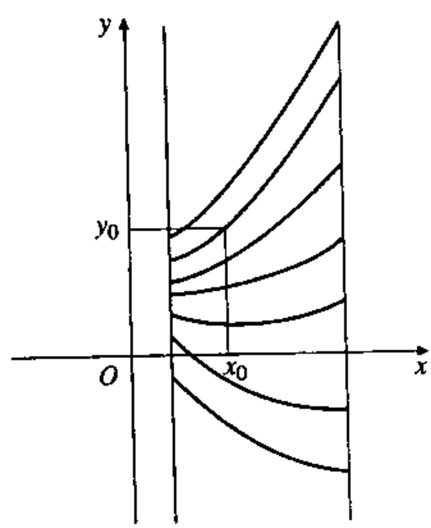
Suy ra :

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow B_1(x_0)e^{-A(x_0)} + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = y_0 e^{A(x_0)} - B_1(x_0).$$

Đẳng thức trên chứng tỏ sự tồn tại và tính duy nhất của λ, do đó sự tồn tại và tính duy nhất của y.

NHẬN XÉT : Với các ký hiệu như trên đây, với mỗi nghiệm y của (E) ta ký hiệu $C_y = \{(x, y(x))\ ;\ x \in I\}$. Họ $(C_y)_{y \in S}$ tạo nên một phân hoạch của $I \times \mathbb{K}$. Ta cũng nói rằng qua một điểm bất kỳ $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ có một và chỉ một đường tích phân (C_y).



6) Vấn đề ghép nối

Ta trở lại phương trình chưa chuẩn hóa :

(e) $$\alpha y' + \beta y = \gamma.$$

Để đơn giản, ta giả thiết rằng α triệt tiêu tại một và chỉ một điểm x_0 duy nhất thuộc I, và x_0 thuộc I.

Ta giải (e) trên mỗi khoảng $I_1 =]-\infty\ ;\ x_0[\cap I$ và $I_2 = I \cap]x_0\ ;\ +\infty[$ (vì trên các khoảng đó ta có thể chuẩn hóa (e) được) ; sau đó ta sẽ xét xem liệu có thể "ghép nối" các nghiệm trên đây tại điểm x_0 được không (xem 11.1.1, Vấn đề ghép nối).

NHẬN XÉT :

1) Tập hợp các ánh xạ $y : I - \{x_0\} \to \mathbb{K}$ khả vi trên $I - \{x_0\}$ và thỏa mãn :

$$\forall x \in I - \{x_0\},\ \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$$

là một không gian afin có số chiều là 2. Đó chính là tập các ánh xạ

$I - \{x_0\} \to \mathbb{K}$ có dạng :

$$x \mapsto \begin{cases} y_1(x) + \lambda_1 y_{0,1}(x) & \text{nếu } x \in I_1 \\ y_2(x) + \lambda_2 y_{0,2}(x) & \text{nếu } x \in I_2 \end{cases},$$ trong đó

- y_1 (tương ứng : y_2) là một nghiệm của (e) trên I_1 (tương ứng : I_2)
- $y_{0,1}$ (tương ứng : $y_{0,2}$) là một nghiệm khác không của $\alpha y' + \beta y = 0$ trên I_1 (tương ứng : I_2)
- (λ_1, λ_2) chạy qua khắp $\mathbb{K}^2$.

2) Từ nhận xét 1) trên đây ta suy ra rằng tập hợp các nghiệm của (e) trên I (vẫn với điều kiện α chỉ triệt tiêu tại x_0) có thể là :

| $\varnothing$
| một đơn tử
| một đường thẳng afin
| một mặt phẳng afin

3) Để nghiên cứu vấn đề ghép nối bằng tính khả vi tại x_0, theo thí dụ trên đây ta có thể khảo sát giới hạn của số gia, hay giới hạn của đạo hàm (khi giới hạn này tồn tại).

THÍ DỤ :

Giải phương trình vi phân :

$$2x(1 + x)y' + (1 + x)y = 1$$

trên mọi khoảng mở I trong $\mathbb{R}$ (giả thiết rằng hàm phải tìm y lấy giá trị thực). Ta sẽ giải phương trình chuẩn hóa :

(E) $$y' + \frac{1}{2x}\,y = \frac{1}{2x(x+1)},$$

sau đó xét việc ghép nối tại -1 và 0.

a) ***Giải*** (E)

Giả sử $-1 \notin I$ và $0 \notin I$.

Nghiệm tổng quát của (E_0) $y' + \dfrac{1}{2x} y = 0$ trên I là :

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda e^{-\int \frac{1}{2x}\,dx} = \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \end{aligned} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Do ta không thấy một nghiệm hiển nhiên nào của (E), nên ta sẽ áp dụng phương pháp hằng biến thiên : ta sẽ tìm một nghiệm y của (E) có dạng $y = \lambda y_0$, trong đó $\lambda : I \to \mathbb{R}$ là hàm chưa biết mới (được giả thiết là khả vi trên I), và $y_0 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

Như thế ta có :

$$(E) \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \lambda'(x) y_0(x) = \frac{1}{2x(1+x)}.$$

Ta ký hiệu $\varepsilon = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ (ε không đổi trên I).

Ta được :

$$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1+x)}\,dx = \int \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1+x)}\,dx.$$

Thực hiện phép đổi biến $u = \sqrt{\varepsilon x}$: $\lambda(x) = \displaystyle\int \frac{du}{1 + \varepsilon u^2}$.

Nếu $\varepsilon = 1$ (tức là $I \subset]0 ; +\infty[$), thì :

$$\lambda(x) = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{Arctan} u = \operatorname{Arctan} \sqrt{x}.$$

Nếu $\varepsilon = -1$ (tức là $I \subset]-\infty ; 0[$), thì

$$\lambda(x) = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right|.$$

Suy ra tập hợp nghiệm S_I của (e) trên I :

$$S_I = \left\{ x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ nếu } I \subset]0 ; +\infty[$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| + \frac{\mu}{\sqrt{-x}} \; ; \; \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ nếu } I \subset]-\infty ; 0[.$$

b) ***Ghép nối***

α) *Ghép nối tại 0*

Ở đây ta sẽ giả thiết : $0 \in I$ và $-1 \notin I$.

Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ có giới hạn hữu hạn tại 0^+ khi và chỉ khi $\lambda = 0$, và khi đó giới hạn này là 1.

Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| + \dfrac{\mu}{\sqrt{-x}}$ có giới hạn hữu hạn tại 0^- khi và chỉ khi $\mu = 0$, và khi đó thì giới hạn này bằng 1.

Suy ra có thể ghép nối liên tục được khi và chỉ khi $\lambda = \mu = 0$.

Vậy ta xét ánh xạ $y : I \to \mathbb{R}$ tại 0 xác định như sau :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

và khảo sát tính khả vi của y tại 0.

Bằng cách khai triển hữu hạn, ta được :

với $x > 0$: $\dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\dfrac{1}{3}$,

với $x < 0$: $\dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{-x}} \left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) - 2\sqrt{-x} \right)$

$$= -\frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\frac{1}{3}.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng y khả vi tại 0 và $y'(0) = -\dfrac{1}{3}$.

Cuối cùng hệ thức $2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$ được thỏa mãn với $x = 0$ vì $y(0) = 1$.

Vậy : $$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \right\}$$

(trong trường hợp này S_I là một đơn tử).

β) *Ghép nối tại – 1*

Ở đây ta giả thiết rằng : $0 \notin I$ và $-1 \in I$.

Nếu như (e) có ít nhất một nghiệm y trên I, thì bằng cách thay x bằng -1 trong (e), ta sẽ đi tới một mâu thuẫn. Vậy $S_I = \varnothing$.

γ) *Ghép nối tại – 1 và 0*

Ở đây ta giả thiết rằng : $0 \in I$ và $-1 \in I$.

Theo β) thì : $S_I = \varnothing$.

NHẬN XÉT : Trong Tập 4 (Chuỗi nguyên) ta sẽ thấy rằng nghiệm y xác định trong b), α) thuộc lớp C^∞ trên $]-1\,;1[$, vì tại 0 nó có thể khai triển thành chuỗi nguyên, với bán kính 1.

Bài tập

◊ **11.1.5** Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một sau đây (với biến số x, hàm chưa biết $y : I \to \mathbb{R}$, I là khoảng mở bất kỳ trong $\mathbb{R}$) :

a) $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2 y - (x^3 - x^2 + x + 1) = 0$

b) $y' + 2xy - e^{x - x^2} = 0$

c) $x(1 + x^2)y' - y = 0$

d) $xy' - 2y - x^4 = 0$

e) $xy' - y - (x^2 + 1) = 0$

f) $x^2y' + y - 1 = 0$

g) $(x + 1)^2(xy' - y) + 2x + 1 = 0$

h) $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$

i) $2x(1 + x^2)y' + 2x^2y - 1 = 0$

j) $x(x^2 + 1)y' + y + x = 0$

k) $(x^2 - 1)y' + xy + 3(x - x^3) = 0$

l) $2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y - 1 = 0$

m) $x(x^2 - 1)y' + 2y - x^2 = 0$

n) $xy' - y + \ln x = 0$

o) $(x - 1)y' + y - \ln|x| = 0$

p) $x^3\ln|x|y' - x^2y - (2\ln|x| + 1) = 0$

q) $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y - (3 + 2e^x) = 0$

r) $(\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}^3x)y' + 3(\mathrm{ch}^4x)y - 1 = 0$

s) $y' + (\cos x)y - \sin x \cos x = 0$

t) $(\sin x)y' - y + 1 = 0$

u) $(\sin x)y' - (\cos x)y - \sin x = 0$

v) $(\sin^3 x)y' - 2(\cos x)y = 0$.

◊ **11.1.6** Giải trên $]0 ; +\infty[$: $y' - y - \ln x = 0$. Có tồn tại nghiệm bị chặn không ?

◊ **11.1.7** Xác định nghiệm trên $]0 ; +\infty[$ của phương trình $xy' - y = x^3$ sao cho $y(1) = 0$.

◊ **11.1.8** Giải : $yy' + y^2 = \frac{1}{2} e^{-2x}$ (đặt $z = y^2$).

◊ **11.1.9** Xác định các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho hai phương trình vi phân $y' - y = 1 - x$ và $xy' - y = f(x)$ có ít nhất một nghiệm chung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

◊ **11.1.10** Tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi tại 0 và thỏa mãn :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

◊ **11.1.11** Xác định tập hợp các điểm uốn của các đường tích phân của phương trình vi phân $xy' - 3y - 2x^2 = 0$.

11.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số và vế thứ hai là hàm đa thức - mũ

11.2.1 Đại cương

Mọi ánh xạ từ I vào $\mathbb{K}$ có dạng $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$, trong đó I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{K}^n$, $(P_1, ..., P_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$, được gọi là hàm **đa thức – mũ.**

- **Định nghĩa** Giả sử I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$, $h : I \to \mathbb{K}$ là một hàm đa thức – mũ, J là một khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $J \subset I$, $y : J \to \mathbb{K}$ là một ánh xạ.

  Ta nói rằng y là **một nghiệm trên J của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số và với vế thứ hai loại đa thức-mũ**

  (e) $\qquad \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = h$

  khi và chỉ khi : $\begin{cases} y \text{ khả vi hai lần trên } J \\ \forall x \in J,\ \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = h(x). \end{cases}$

  Giải (e) là xác định tất cả các cặp (J, y), trong đó J là một khoảng trên $\mathbb{R}$ bao hàm trong I, và y là một nghiệm của (e) trên J.

Ở đây mục tiêu của chúng ta là biểu thị các nghiệm của (e) bằng các hàm số thông dụng (dưới đây chúng ta sẽ chứng tỏ rằng có thể làm được điều đó). Nếu $\alpha = 0$ thì chúng ta quay trở lại một phương trình vi phân tuyến tính cấp một (xem 11.1). Từ đây về sau ta sẽ giả thiết $\alpha \neq 0$. Như vậy ta quy về phương trình :

(E) $\qquad y'' + ay' + by = g$

(bằng cách ký hiệu $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, $g = \dfrac{h}{\alpha}$).

Ta sẽ xét phương trình **không có vế thứ hai** :

(E_0) $\qquad y'' + ay' + by = 0.$

11.2.2 Giải phương trình không có vế thứ hai

Ký hiệu :

I là một khoảng trong $\mathbb{R}$

$(a, b) \in \mathbb{K}^2$

(E_0) $y'' + ay' + by = 0$, trong đó $y : I \to \mathbb{K}$ là hàm số chưa biết, giả thiết là khả vi hai lần.

S_0 là tập hợp nghiệm trên I của (E_0).

1) Cấu trúc của S_0

- **Mệnh đề**

S_0 là một $\mathbb{K}$ – không gian vectơ.

Chứng minh :

- $S_0 \neq \varnothing$ vì 0 (ánh xạ không) thuộc S_0.
- Nếu $(y_1, y_2) \in S_0^2$ và $\lambda \in \mathbb{K}$, thì khi đó $\lambda y_1 + y_2$ khả vi hai lần trên I và :

$$(\lambda y_1 + y_2)'' + a(\lambda y_1 + y_2)' + b(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2) = 0,$$

suy ra $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

2) Cách giải **(E_0)**

Tương tự như ở 3.4.2, Tập 1 và 11.1 trên đây, chúng ta tìm những nghiệm (nếu chúng tồn tại) của (E_0) có dạng $R : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto e^{rx} \end{array}$

với $r \in \mathbb{K}$. Ta có :

$$\forall x \in I,\ (R'' + aR' + bR)(x) = (r^2 + ar + b)e^{rx}.$$

Xét phương trình $r^2 + ar + b = 0$ (với ẩn số $r \in \mathbb{K}$), gọi là **phương trình đặc trưng** của (E_0) ; ký hiệu $\Delta = a^2 - 4b$ là biệt số.

a) Tại đây ta giả thiết rằng phương trình đặc trưng có ít nhất một nghiệm số ρ ($\rho \in \mathbb{K}$). Ánh xạ $R : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto e^{\rho x} \end{array}$ khi đó là một nghiệm trên I của (E_0).

Ta thực hiện phép đổi hàm chưa biết trong (E_0) : ký hiệu $z : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto y(x)e^{-\rho x} \end{array}$ (cũng khả vi hai lần trên I). Khi đó ta có với mọi x thuộc I :

$$\begin{cases} y(x) = z(x)e^{\rho x} \\ y'(x) = \rho z(x)e^{\rho x} + z'(x)e^{\rho x} \\ y''(x) = \rho^2 z(x)e^{\rho x} + 2\rho z'(x)e^{\rho x} + z''(x)e^{\rho(x)} \end{cases}$$

suy ra $(y'' + ay' + by)(x) = (2\rho + a)z'(x)e^{\rho x} + z''(x)e^{\rho x}$, vì $\rho^2 + a\rho + b = 0$. Như thế chúng ta đã quay trở lại việc giải một phương trình vi phân tuyến tính cấp một (với hàm chưa biết là z') : $(2\rho + a)z' + z'' = 0$. Nghiệm tổng quát (theo z') là :

$$\forall x \in I,\ z'(x) = \lambda e^{-(2\rho + a)x},\ \lambda \in \mathbb{K}$$

• Nếu $2\rho + a \neq 0$, thì : $\forall x \in I,\ z(x) = -\dfrac{\lambda}{2\rho + a}e^{-(2\rho + a)x} + \lambda_2,\ \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

từ đó bằng cách ký hiệu $\lambda_1 = -\dfrac{\lambda}{2\rho + a}$ ta có được nghiệm tổng quát cho (E_0) :

$$y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{-(\rho + a)x} + \lambda_2 e^{\rho x} \end{array},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Phần tử $-(\rho + a)$ là nghiệm thứ hai của phương trình đặc trưng (vì tổng các nghiệm bằng $-a$) ; bằng cách ký hiệu hai nghiệm của phương trình đặc trưng là r_1, r_2 ($r_1 = \rho$, $r_2 = -(\rho + a)$), ta được :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \to \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} ;\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

• Nếu $2\rho + a = 0$ (tức là phương trình đặc trưng nhận ρ làm nghiệm kép), thì $\forall x \in I,\ z(x) = \lambda x + \mu,\ \mu \in \mathbb{K}$, và do đó :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-\frac{a}{2}x} \end{array} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

b) Nếu phương trình đặc trưng của (E_0) không có nghiệm trong $\mathbb{K}$ (tức là nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ và $\Delta < 0$), ta sẽ giải phương trình được phức hóa kết hợp với (E_0), tức là ta xác định tập hợp các ánh xạ $Y : I \to \mathbb{C}$, khả vi hai lần trên I, sao cho $Y'' + aY' + bY = 0$, rồi sau đó trong các ánh xạ Y đó ta chỉ giữ lại những ánh xạ nào nhận giá trị thực. Chúng ta hoàn thành các phép tính cho trường hợp này.

Ta có : $\forall x \in I,\ Y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ trong đó $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ và

$$r_1 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2},\ r_2 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \overline{r_1}.$$

$$\begin{aligned} Y(I) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \overline{\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}} = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \overline{\lambda_1} e^{r_2 x} + \overline{\lambda_2} e^{r_1 x} = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\overline{\lambda_2} - \lambda_1)e^{r_1 x} = (\lambda_2 - \overline{\lambda_1})e^{r_2 x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \overline{\lambda_2} - \lambda_1 = (\lambda_2 - \overline{\lambda_1})e^{i\sqrt{-\Delta}x} \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda_2} - \lambda_1 = \lambda_2 - \overline{\lambda_1} = 0 \end{aligned}$$

ϖ∝ $\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto e^{i\sqrt{-\Delta}x} \end{array}$ lấy ít nhất hai giá trị khác nhau.

Vậy : $Y(I) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, suy ra $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \overline{\lambda_1} e^{\overline{r_1} x} \end{array} ;\ \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$

Cuối cùng, nếu ký hiệu $\lambda_1 = u + iv$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, ta có với mọi x thuộc

$$I : \lambda_1 e^{r_1 x} + \overline{\lambda_1} e^{\overline{r_1} x} = 2e^{-\frac{a}{2}x}\left(u\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) - v\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right).$$

Cuối cùng :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right) \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ta tóm tắt lại việc khảo sát trên đây bằng định lý sau :

◆ **Định lý** Tập hợp nghiệm trên I của (E_0) là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ có số chiều bằng 2.

Xét phương trình đặc trưng $r^2 + ar + b = 0$ (ẩn số là $r \in \mathbb{K}$) và biệt số của nó $\Delta = a^2 - 4b$.

Trường hợp thứ 1 : Trên $\mathbb{K}$ phương trình đặc trưng có hai nghiệm khác nhau là r_1, r_2 (tức là $\left| \begin{array}{l} \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ và } \Delta > 0 \\ \text{hay } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ và } \Delta \neq 0 \end{array} \right.$)

Khi đó : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} ; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

Trường hợp thứ 2 : Trên $\mathbb{K}$ phương trình đặc trưng có nghiệm số kép $\left(-\frac{a}{2}\right)$ (tức là $\Delta = 0$).

Khi đó : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-\frac{a}{2}x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

Trường hợp thứ 3 : Trên $\mathbb{K}$ phương trình đặc trưng vô nghiệm (tức là $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ và $\Delta < 0$).

Khi đó : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\mathrm{Re}(\lambda_1 e^{r_1 x}) \end{array} ; \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$; ở đây r_1 là một nghiệm trên $\mathbb{C}$ của phương trình đặc trưng ; hay :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right) \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Chúng ta cần chú ý đến sự tương tự giữa các kết quả trên đây với các kết quả thu được khi khảo sát các dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số hằng (3.4.2, Tập 1).

THÍ DỤ :

1) Giải : $y'' - 5y' + 6y = 0$ $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Phương trình đặc trưng $r^2 - 5r + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là 2 và 3. Vậy :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2) Giải : $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Phương trình đặc trưng $r^2 + \omega^2 = 0$ có hai nghiệm phức (thực sự) : $i\omega$ và $-i\omega$. Vậy :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A\cos \omega x + B\sin \omega x \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3) Giải : $y'' - 4y' + 4y = 0$ ($y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Phương trình đặc trưng : $r^2 - 4r + 4 = 0$ có nghiệm số kép là 2. Vậy

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4) Giải : $y'' - 4y' + 4y = 0$ ($y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Trong bài này ta có :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Bài tập

◊ **11.2.1** Xác định tập hợp các cặp (a, b) thuộc $\mathbb{R}^2$ sao cho mọi nghiệm trên $[0 ; +\infty[$ của $y'' + ay' + by = 0$ đều bị chặn.

◊ **11.2.2** Cho $\alpha \in \mathbb{R}$; tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\alpha - x).$$

11.2.3 Giải phương trình có vế thứ hai dạng hàm đa thức – mũ

Ký hiệu :

I chỉ một khoảng thuộc $\mathbb{R}$

$(a, b) \in \mathbb{K}^2$

$g : I \to \mathbb{K}$ là một hàm đa thức – mũ

(E) $y'' + ay' + by = g$, trong đó $y : I \to \mathbb{K}$ là hàm chưa biết, được giả thiết là khả vi hai lần

S chỉ tập hợp nghiệm trên I của (E)

(E_0) phương trình vi phân không có vế thứ hai : $y'' + ay' + by = 0$ liên kết với (E)

S_0 chỉ tập hợp nghiệm trên I của (E_0).

1) Các mối liên hệ giữa S và S_0

1) $\forall y_1, y_2 \in S$, $y_1 - y_2 \in S_0$, vì :

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) =$$
$$= (y_1'' + ay_1' + by_1) - (y_2'' + ay_2' + by_2) = g - g = 0$$

2) $\forall y_1 \in S, \forall y_0 \in S_0, y_1 + y_0 \in S$, vì :

$$(y_1 + y_0)'' + a(y_1 + y_0)' + b(y_1 + y_0) =$$
$$= (y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_0'' + ay_0' + by_0) = g + 0 = g.$$

Hai tính chất trên chứng tỏ rằng nếu S không rỗng thì S là một mặt phẳng afin có cùng phương với mặt phẳng vectơ S_0. Thực vậy, với mọi y_1 thuộc S ta có :

$$S = \{y_1 + y_0 \ ; \ y_0 \in S_0\}$$

Nói cách khác, nghiệm tổng quát của (E) là tổng của một nghiệm riêng của (E) với nghiệm tổng quát của (E_0).

Như vậy ta thấy là việc giải (E) được quy về việc xác định ít nhất một nghiệm của (E), nghiệm này sẽ được coi là **"nghiệm riêng"**; thực ra mọi nghiệm của (E) đều là một nghiệm riêng của (E).

2) Nguyên tắc cộng dồn các nghiệm

Vì g là một hàm đa thức – mũ, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, ..., m_n \in \mathbb{K}$, $P_1, ..., P_n \in \mathbb{K}[X]$ sao cho :

$$\forall x \in I, \ g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x).$$

Với mỗi k thuộc $\{1, ..., n\}$ ta ký hiệu y_k là một nghiệm của phương trình :

(E_k) $\qquad \forall x \in I, \ y''(x) + ay'(x) + by(x) = e^{m_k x} P_k(x)$.

Khi đó thì $\sum_{k=1}^{n} y_k$ là một nghiệm của (E) vì với mọi x thuộc I ta có :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k\Big)''(x) + a\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k\Big)'(x) + b\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k\Big)(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (y_k''(x) + ay_k'(x) + by_k(x)) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x) = g(x).$$

3) Xác định một nghiệm của

(E_k) $\qquad \boldsymbol{\forall x \in I, \ y''(x) + ay'(x) + by(x) = e^{m_k x} P_k(x)}$

Ký hiệu $z : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto y(x)e^{-m_k x} \end{array}$; với mọi x thuộc I ta có :

$$\begin{cases} y(x) = e^{m_k x} z(x) \\ y'(x) = e^{m_k x}(m_k z(x) + z'(x)) \\ y''(x) = e^{m_k x}(m_k^2 z(x) + 2m_k z'(x) + z''(x)) \end{cases}$$

suy ra : $\quad y''(x) + ay'(x) + by(x) =$

$$= e^{m_k x}((m_k^2 + am_k + b)z(x) + (2m_k + a)z'(x) + z''(x)).$$

Như vậy y là nghiệm của (E_k) trên I khi và chỉ khi z là nghiệm trên I của

$$(F_k) \qquad (m_k^2 + am_k + b)z(x) + (2m_k + a)z'(x) + z''(x) = P_k(x).$$

• Nếu $m_k^2 + am_k + b \neq 0$, ta sẽ tìm một nghiệm z cho (F_k) dưới dạng một đa thức thuộc $\mathbb{K}[X]$ cùng bậc với P_k. Hệ phương trình có được khi đó (mà ẩn số là các hệ số của z), là một hệ tuyến tính tam giác ("hệ bậc thang") có một và chỉ một nghiệm.

• Nếu $\begin{cases} m_k^2 + am_k + b = 0 \\ 2m_k + a \neq 0 \end{cases}$, thì ta sẽ tìm một nghiệm z của (F_k) dưới dạng một đa thức thuộc $\mathbb{K}[X]$ có bậc bằng $(1 + \deg(P_k))$.

• Nếu $\begin{cases} m_k^2 + am_k + b = 0 \\ 2m_k + a = 0 \end{cases}$, ta tìm một nghiệm z của (F_k) dưới dạng một đa thức thuộc $\mathbb{K}[X]$ với bậc bằng $(2 + \deg(P_k))$.

Ta tóm tắt kết quả thu được bằng định lý sau :

♦ **Định lý** (**Tìm một nghiệm riêng cho**

(E) $\qquad y'' + ay' + by = g$, trong đó $g : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$)

Với mỗi k thuộc $\{1, ..., n\}$, tồn tại một nghiệm y_k của phương trình :

$$y'' + ay' + by = g_k$$

(trong đó $g_k : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto e^{m_k x} P_k(x)$) có dạng $y_k : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto e^{m_k x} Q_k(x)$

với Q_k là một đa thức có bậc bằng :

• $\deg(P_k)$ nếu m_k không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng

• $1 + \deg(P_k)$ nếu m_k là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

• $2 + \deg(P_k)$ nếu m_k là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

Khi đó $\sum_{k=1}^{n} y_k$ là một nghiệm của (E).

NHẬN XÉT : Khi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ và vế thứ hai của (E) thuộc loại
$g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x)\cos mx + Q(x)\sin mx$, trong đó $m \in \mathbb{R}^*$, và P, Q là những đa thức
thuộc R[X], thì tồn tại một nghiệm y của (E) có dạng
$y : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A(x)\cos mx + B(x)\sin mx$, trong đó A, B là những đa thức có bậc nhỏ
hơn hay bằng :

- Max $(\deg P, \deg Q)$ nếu im không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng ;
- $1 + \mathrm{Max}(\deg P, \deg Q)$ nếu im là nghiệm (dĩ nhiên là nghiệm đơn) của phương trình đặc trưng.

THÍ DỤ :

1) Giải : $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x \quad (y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

- Phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 4 = 0$ có nghiệm kép : 2. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không có vế thứ hai là : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Vì 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên tồn tại một nghiệm y cho (E) với dạng $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto Q(x)e^x$, trong đó Q là một đa thức bậc 2.

Ký hiệu $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, với $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ mà ta đang phải tìm, ta có với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x \\ y'(x) = ((2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma))e^x \\ y''(x) = (2\alpha + 2(2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma))e^x \end{cases}$$

Suy ra : $\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^2 + 1)e^x$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ((\alpha x^2 + \beta x + \gamma) - 2(2\alpha x + \beta) + 2\alpha)e^x = (x^2 + 1)e^x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 4\alpha = 0 \\ \gamma - 2\beta + 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 7 \end{cases}$$

Vậy : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 + 4x + 7)e^x$ là một nghiệm của (E).

Cuối cùng : $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + 4x + 7)e^x + (\lambda x + \mu)e^{2x} \end{array} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2) Giải : $y'' + y = \cos^3 x \ (y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Bằng cách tuyến tính hóa $\cos^3 x$, phương trình có dạng :

$$y'' + y = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế thứ hai là $x \mapsto A\cos x + B\sin x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Vì i là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên tồn tại một nghiệm y_1 của

$$(E_1) \qquad y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$$

với dạng $y_1 : x \mapsto (\alpha x + \beta)\cos x + (\gamma x + \delta)\sin x$, với $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathrm{R}^4$ mà ta phải xác định.

Với mọi x thuộc R ta có $\begin{cases} y_1(x) = (\alpha x + \beta)\cos x + (\gamma x + \delta)\sin x \\ y_1'(x) = (\gamma x + (\alpha + \delta))\cos x + (-\alpha x + (\gamma - \beta))\sin x \\ y_1''(x) = (-\alpha x + (2\gamma - \beta))\cos x - (\gamma x + (2\alpha + \delta))\sin x \end{cases}$

Suy ra : $\forall x \in \mathrm{R},\ y_1''(x) + y_1(x) = \dfrac{3}{4}\cos x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{R},\ 2\gamma\cos x - 2\alpha\sin x = \dfrac{3}{4}\cos x \Leftrightarrow \left(\alpha = 0\ ,\ \gamma = \dfrac{3}{8}\right).$

Như vậy một nghiệm của (E_1) là $y_1 : x \mapsto \dfrac{3}{8}x\sin x.$

• Vì 3i không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên tồn tại một nghiệm y_2 của

(E_2) $$y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x$$

có dạng $y_2 : x \mapsto u\cos 3x + v\sin 3x$, $(u, v) \in \mathrm{R}^2$ là những hệ số phải tìm.

Với mọi x thuộc R ta có :

$$\begin{cases} y_2(x) = u\cos 3x + v\sin 3x \\ y_2'(x) = 3v\cos 3x - 3u\sin 3x \\ y_2''(x) = -9u\cos 3x - 9v\sin 3x \end{cases}$$

Suy ra : $\forall x \in \mathrm{R},\ y_2''(x) + y_2(x) = \dfrac{1}{4}\cos 3x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{R},\ -8u\cos 3x - 8v\sin 3x = \dfrac{1}{4}\cos 3x$

$\Leftrightarrow \left(u = -\dfrac{1}{32}\ ,\ v = 0\right).$

Vậy một nghiệm của (E_2) là : $x \mapsto -\dfrac{1}{32}\cos 3x.$

Cuối cùng :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \\ x \mapsto \dfrac{3}{8}x\sin x - \dfrac{1}{32}\cos 3x + A\cos x + B\sin x \end{array} ;\ (A, B) \in \mathrm{R}^2 \right\}$$

Bài tập

◊ **11.2.3** Giải các phương trình vi phân sau đây, trong đó $y : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ là hàm chưa biết giả thiết là khả vi hai lần trên R (biến số : x) :

a) $y'' - 2y' + y = \mathrm{sh}x$

b) $2y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

c) $y'' + 4y' - 5y = 2e^x$

d) $y'' - 4y = 4e^{-2x}$

e) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

f) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$

g) $y'' - 4y' + 4y = e^x + (3x - 1)e^{2x} + x - 2$

h) $y'' + 4y = x\cos^2 x$

i) $y'' + 2y' + y = \sin^2 x$
j) $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x$
k) $y'' - 2y' + 2y = 2\cos x$
l) $y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x}\cos 2x$
m) $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$
n) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{ch}x\cos x$.

◊ **11.2.4** Giải các phương trình vi phân sau đây (trong đó $m \in \mathbb{R}$ cố định) :

a) $y'' - 2y' + my = \cos x$
b) $y'' + 4y = \sin mx$
c) $my'' - (1 + m^2)y' + my = xe^x$.

◊ **11.2.5** Chứng minh rằng với mọi m thuộc $]0 ; 2[$ phương trình vi phân

(E_m) $$y'' + (1 - 2m)y' - 2my = e^{2x}$$

có một nghiệm y_m và chỉ một sao cho $y_m(0) = y_m'(0) = 0$.

Chứng minh rằng : $\forall x \in \mathbb{R}, y_m(x) \xrightarrow[m \to 1]{} y_1(x)$.

◊ **11.2.6** **Phương trình vi phân Euler**

a) Giả sử $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $I \subset \mathbb{R}_+^*$ hay $I \subset \mathbb{R}_-^*$, $k : I \to$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng phương trình vi phân $x^2y'' + axy' + by = k$, q phép đổi biến $t = \ln|x|$, được quy về một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với số hằng.

b) Giải trên mọi khoảng mở I thuộc $\mathbb{R}$ các phương trình vi phân Euler sau đây (biến số hàm chưa biết $y : I \to \mathbb{R}$) :

α) $x^2y'' - 2y = x$

β) $x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$

γ) $x^2y'' + xy' + y = x\ln|x|$.

◊ **11.2.7** Giải các phương trình vi phân sau đây (hàm chưa biết $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) :

a) $y'' + y = |x| + 1$
b) $y'' + y = \mathrm{Max}(x, 0)$
c) $y'' - 4y = |x|$
d) $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$

◊ **11.2.8** Tìm tất cả các ánh xạ khả vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = xe^x$$

◊ **11.2.9** Tìm tất cả các ánh xạ khả vi hai lần $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x.$$

11.3 Thí dụ về khảo sát phương trình vi phân phi tuyến cấp một

11.3.1 Đại cương

- **Định nghĩa** Giả sử $U \subset \mathbb{R}^3$, F ; $U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ, I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. **Nghiệm trên I của phương trình vi phân**

  (e) $$F(x, y, y') = 0$$

  là mọi ánh xạ $y : I \to \mathrm{R}$ thỏa mãn :

  $$\begin{cases} y \text{ khả vi trên } I \\ \forall x \in I, (x, y(x), y'(x)) \in U \\ \forall x \in I, F(x, y(x), y'(x)) = 0 \end{cases}$$

  Giải (e) có nghĩa là xác định tất cả mọi cặp (I, y), trong đó I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và y là một nghiệm trên I của (e).

  Các đường tích phân của (e) là các đường biểu diễn các nghiệm của (e).

Như chúng ta đã thấy trong việc khảo sát các phương trình vi phân tuyến tính cấp một (11.1), thường trong (e) ta nên biểu diễn y' theo x và y. Làm như vậy trong một số trường hợp ta có thể quy việc khảo sát (e) về việc khảo sát một phương trình vi phân đã **chuẩn hóa** (hay : **đã giải theo** y') :

(E) $$y' = f(x, y)$$

trong đó $f : V \to \mathrm{R}$ và $V \subset \mathbb{R}^2$.

THÍ DỤ :

- (e) $(1 + x^2)y' - xy^2 + 1 = 0$ quy về (E) $y' - \dfrac{x}{1+x^2}\, y^2 + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$
- (e) $(1 - x^2)y' - \sin y + x = 0$ quy về (E) $y' = \dfrac{\sin y - x}{1 - x^2}$ và việc ghép nối tại -1 và 1.
- (e) $yy'^2 - \sin y' + x^2 + 1 = 0$ không thể quy được một cách đơn giản về một phương trình chuẩn hóa.

Trong Tập 4 chúng ta sẽ nghiên cứu các định lý về sự tồn tại và duy nhất của nghiệm (gọi là nghiệm "cực đại") thỏa mãn một "điều kiện ban đầu" của một phương trình vi phân cấp một chuẩn hóa. Trong §11.3 này, dành cho việc khảo sát sơ lược một số phương trình vi phân phi tuyến cấp một, chúng ta sẽ có thể chỉ xét các nghiệm y thỏa mãn những điều kiện bổ sung, xem ra không ngặt nghèo lắm, kiểu như : $\forall x \in I$, $y(x) \neq 0$ (khi ta muốn chia cho hàm y, xem 11.3.4, 2)).

Sử dụng một phép đổi hàm chưa biết

THÍ DỤ : Giải (e) $\quad yy' - \dfrac{1}{2} = 0.$

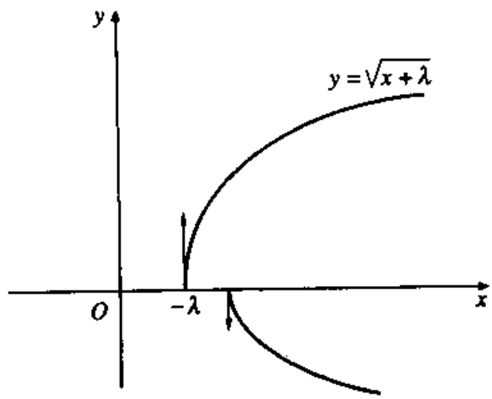
Ký hiệu $z = y^2$ thì (e) quy về $z' = 1$, tức là $z : \mathrm{I} \to \mathbf{R}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$
$x \mapsto x + \lambda$

Sau đó :

$$(\forall x \in I,\ (y(x))^2 = x + \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I,\ x + \lambda \geq 0 \\ \forall x \in I,\ \left| \begin{array}{l} y(x) = -\sqrt{x + \lambda} \\ \text{hay} \\ y(x) = \sqrt{x + \lambda} \end{array} \right. \end{cases}$$

Vì $I \subset [-\lambda\ ; +\infty[$ và $x + \lambda$ chỉ triệt tiêu tại $-\lambda$, nên định lý về các giá trị trung gian (áp dụng cho y) chứng tỏ y có dấu không đổi. Cuối cùng điều kiện cần và đủ để một cặp (I, y) gồm một khoảng I thuộc $\mathbb{R}$ và một nghiệm y của (e) trên I là tồn tại (λ, ε) thuộc $\mathbf{R} \times \{-1\ ,\ 1\}$ sao cho :

$$\begin{cases} I \subset]-\lambda\ ; +\infty[\\ \forall x \in I,\ y(x) = \varepsilon \sqrt{x + \lambda} \end{cases}$$



Đường tích phân là những cung parabol.

Chúng ta sẽ gặp những phép đổi hàm chưa biết trong :

11.3.3 (phương trình thuần nhất) $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

11.3.4 (phương trình Bernoulli) $z(x) = \dfrac{1}{(y(x))^{\alpha}}$

11.3.5 (phương trình Riccati) $z(x) = y(x) - y_0(x)$.

Sử dụng phép đổi biến

Biến mới, chẳng hạn ký hiệu là u, liên hệ với biến cũ (x) bởi công thứ $u = \varphi(x)$, trong đó hàm φ thường là một C^1 – vi phôi (giữa những khoả cần xác định). Thực ra ta đồng thời cũng đã thực hiện một phép đổi hà chưa biết ; hàm chưa biết mới, chẳng hạn được ký hiệu là z, được xác đị bởi $z(u) = y(x)$, tức là $z = y \circ \varphi^{-1}$. Phương trình (e) đối với hàm chưa biế và với biến x được quy về một phương trình (e') đối với hàm chưa biế và với biến mới ký hiệu là u. Xem, chẳng hạn, các phương trình Euler (bài tập 11.2.6).

NHẬN XÉT : Các định nghĩa và ký hiệu trong §11.3.1 này nói riêng cũng áp dụng cho các phương trình tuyến tính cấp một (xem 11.1).

Bây giờ chúng ta sẽ khảo sát, xem như thí dụ, một số loại phương trình vi phân phi tuyến cấp một.

11.3.2 Phương trình vi phân tách biến

1) Đó là phương trình (e) $a(x) + b(y)y' = 0$, trong đó a, b là những ánh xạ liên tục trên những khoảng cần phải xác định.

2) **Phương pháp giải**

Để một ánh xạ khả vi $y : I \to \mathbb{R}$ là nghiệm trên I của (e), điều kiện cần và đủ là ánh xạ : $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A(x) + B(y(x)) \end{array}$ là ánh xạ hằng, trong đó A, B ký hiệu các nguyên hàm của a và b. Như vậy ta thu được phương trình theo tọa độ Descartes của các đường tích phân : $A(x) + B(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Thông thường thì ta không thể "rút" y ra thành một hàm tường minh của biến x (xem vấn đề về hàm ẩn, 12.6.2).

3) THÍ DỤ : (e) $(1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0$

(e) $\Leftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\, y = \mathrm{Arctan}\, x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Điều kiện cần thiết là : $C \in]-\pi\ ;\ \pi[$.

Nếu $C \neq -\dfrac{\pi}{2}$ và $C \neq \dfrac{\pi}{2}$, thì ta có thể rút ra y dưới dạng

$y = \tan(\mathrm{Arctan}x + C) = \dfrac{x+\lambda}{1-\lambda x}$ (với λ chạy khắp $\mathbb{R}$).

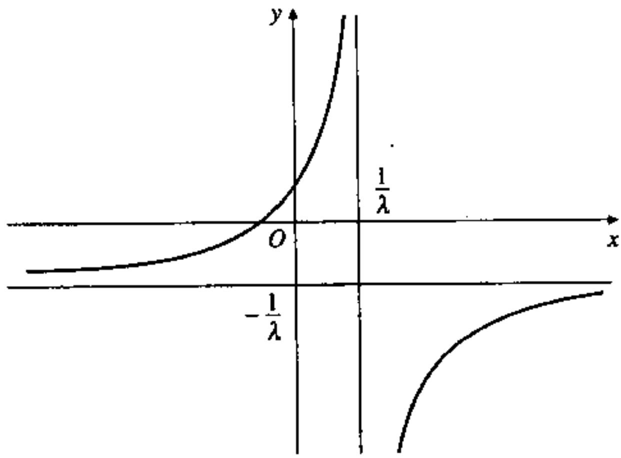
Nếu $C = \dfrac{\pi}{2}$ thì khi đó $x < 0$ và : $\mathrm{Arctan} y = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(-x) = \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{-x}$, suy ra $y = -\dfrac{1}{x}$.

Tương tự, nếu $C = -\dfrac{\pi}{2}$ thì $x > 0$ và $y = -\dfrac{1}{x}$.

Cuối cùng các cặp (I, y) gồm một khoảng I trong $\mathbb{R}$ và một nghiệm y trên I của (e) là :

- $\left(I,\ y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{1-\lambda x} \end{array}\right)$, trong đó $\lambda \in \mathbb{R}^*$ và $I \subset \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{\lambda}\right[$ hoặc $I \subset \left]\dfrac{1}{\lambda}\ ;\ +\infty\right[$.
- $\left(I,\ y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}\right)$, trong đó I tùy ý
- $\left(I,\ y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1}{x} \end{array}\right)$, trong đó $I \subset]-\infty\ ;\ 0[$ hoặc $I \subset]0\ ;\ +\infty[$.

Đường tích phân là những cung hypebol (và những bộ phận của đường thẳng có phương trình $y = x$).



Biểu diễn đồ thị của $x \mapsto \dfrac{x + \lambda}{1 - \lambda x}$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$

Bài tập

◊ **11.3.1** Giải các phương trình vi phân sau đây (biến x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) :

a) $x(1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0$ b) $xy'^2 - 4(1 - x)y^2 = 0$

c) $x(x - 1)y' - y(y - 1) = 0$ d) $x(1 + x^2)yy' - (1 + y^2) = 0$

e) $y' + e^{y - x} = 0$ f) $y' \tan x = \operatorname{cotan} y$.

11.3.3 Phương trình thuần nhất

1) Đó là những phương trình vi phân thuần nhất đối với x và y, loại :

(e) $$F(x, y, y') = 0$$

trong đó *ánh xạ* $F : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một bộ phận U của $\mathbb{R}^3$ và sao cho tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn :

$$\forall (x, y, z) \in U, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} (tx, ty, z) \in U \\ F(tx, ty, z) = t^\alpha F(x, y, z) \end{cases}$$

Trong thực tế ta thường làm xuất hiện $\dfrac{y}{x}$ trong (e) (việc này đòi hỏi phải giải riêng trên $\mathbb{R}_+^*$ và $\mathbb{R}_-^*$, rồi sau đó xét việc ghép nối tại 0).

2) **Phương pháp giải**

Ta giải (e) trên $]-\infty ; 0[$ và trên $]0 ; +\infty[$, với hàm chưa biết mới là $t : x \mapsto t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Với cách (lạm dụng) ký hiệu $t = \dfrac{y}{x}$ ta có : $y = tx$, suy ra $y' = t'x + t$.

Nếu phương trình (e) có dạng đã giải ra y' :

(E) $\quad y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (trong đó φ là một hàm cố định) thì ta có :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow t'x + t = \varphi(t) \Leftrightarrow t'x = \varphi(t) - t,$$

và phương trình (với ẩn t) này là phương trình tách biến, nếu ta có thể chia cho $\varphi(t) - t$.

Nếu t_0 là một số thực thỏa mãn $\varphi(t_0) - t_0 = 0$, thì khi đó ánh xạ $y : x \mapsto t_0 x$ là nghiệm của (E) (gọi là nghiệm **riêng**).

Với giả thiết rằng $t \mapsto \varphi(t) - t$ không triệt tiêu trên I, ta suy ra được x theo t : $\ln|x| = \displaystyle\int \frac{dt}{\varphi(t) - t}$, sau đó được y theo $y = tx$.

Như vậy ta có một biểu diễn tham số cho các đường tích phân của (E).

Trong việc khảo sát sơ bộ ở chương này về các phương trình vi phân phi tuyến cấp một, việc khảo sát các phương trình thuần nhất chưa thật chặt chẽ. Trong Tập 4 chúng ta sẽ bổ sung phần khảo sát lý thuyết thêm vào khía cạnh tính toán được đề cập trong chương này.

3) **Tính chất hình học của các đường tích phân**

Nếu y là nghiệm trên I của một phương trình vi phân thuần nhất

(E) $\quad y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, thì khi đó với mọi k thuộc $\mathbb{R}^*$, ánh xạ

$$Y_k : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{k}\, y(kx)$$ cũng là nghiệm trên I của (E) vì rằng :

$$\forall x \in I,\ Y_k'(x) = \frac{1}{k}\, k y'(kx) = \varphi\left(\frac{y(kx)}{kx}\right) = \varphi\left(\frac{Y_k(x)}{x}\right).$$

Nói cách khác, mọi đường vị tự (trong một phép vị tự tâm O) của một đường tích phân cũng là một đường tích phân ; chúng ta sẽ thừa nhận mệnh đề đảo. Như vậy, để xác định được tất cả các đường tích phân dường như là chỉ cần xác định một đường trong số đó.

4) THÍ DỤ : (E) $\quad y' = e^{\frac{y}{x}}$, $y :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$.

Ký hiệu $t = \dfrac{y}{x}$, ta được $y = tx$, $y' = t'x + t$, và do đó :

$$(E) \Leftrightarrow t'x + t = e^t \Leftrightarrow t'x = e^t - t.$$

Ánh xạ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^t - t$ không triệt tiêu tại điểm nào cả (hãy khảo sát sát sự biến thiên của h ; ta sẽ được cụ thể hơn : $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) \geq 1$).

Vậy : $\quad (E) \Leftrightarrow \dfrac{t'}{e^t - t} = \dfrac{1}{x}$.

Ta ký hiệu $G : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ (không thể biểu thị tường minh hàm G bằng các

$$t \mapsto \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u - u}$$

hàm thông thường) ; G thuộc lớp C^1 trên R và :

$$\forall t \in \mathrm{R},\ G'(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t - t} > 0.$$

t	$-\infty$	$+\infty$
$G'(t)$	+	
$G(t)$	$-\infty$ ↗	l

Với mọi t thuộc $]-\infty\ ;\ -1]$:

$$G(t) = -\int_t^0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u - u} \underset{v=-u}{=} -\int_0^{-t} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{e}^{-v} + v} \le -\int_0^{-t} \frac{\mathrm{d}v}{1 + v}$$

$$= -\ln(1 - t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty\ ,$$

suy ra $\quad G(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$.

Mặt khác, vì $u \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^u - u}$ khả tích trên $[0\ ;\ +\infty[$, nên với ký hiệu

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u - \mathrm{d}u}\ ,$$

ta có $G(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} l$.

Ta có : (E) $\Leftrightarrow \exists C \in \mathrm{R},\ \forall t \in \mathrm{R},\ \ln x = G(t) + C.$

Ta suy ra một biểu diễn tham số của các đường tích phân :

$$\begin{cases} x = \lambda \mathrm{e}^{G(t)} \\ y = \lambda t \mathrm{e}^{G(t)} \end{cases},\ t \in \mathrm{R},\ \lambda \in \mathrm{R}_+^* \ \text{ cố định.}$$

Do G là một song ánh từ R đến $]-\infty\ ;\ l[$, nên ta có thể biểu diễn y theo x :

$y = xG^{-1}\left(\ln \dfrac{x}{\lambda}\right)$, với x chạy khắp trên một khoảng I bao hàm trong $]0\ ;\ \lambda \mathrm{e}^l[$.

Ta chú ý rằng thí dụ này tương đối dễ khảo sát vì biểu thức $\varphi(t) - t$ (ở đây là $\mathrm{e}^t - t$) mà ta muốn chia cho thì không triệt tiêu tại điểm nào cả.

Bài tập

◊ **11.3.2** Giải các phương trình vi phân sau đây (biến x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) :

a) $(y - x)y' + y = 0$

b) $yy'^2 - 2xy' + y = 0$

c) $xy'(2y - x) - y^2 = 0$

d) $x^2y' - (x^2 + xy + y^2) = 0$

e) $(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$

f) $y' = \dfrac{x}{y} + 1 + \dfrac{y}{x}$.

Trong các dạng phương trình vi phân sau đây (§11.3.4 đến 11.3.8) chúng ta chỉ giới hạn ở một sự khảo sát không thật chặt chẽ (phương pháp giải hình thức) do có tiềm ẩn những khó khăn lý thuyết đáng kể.

11.3.4 Phương trình Bernoulli

1) Đó là các phương trình dạng : (e) $\quad Ay' + By + Cy^{\alpha} = 0$, trong đó α là một số thực đã cho ($\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$), và A, B, C là những hàm số liên tục.

2) **Phương pháp giải**

Ta thực hiện phép đổi hàm chưa biết $z = y^{1-\alpha}$. Chia (e) cho y^{α}, và chú ý là $z' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$, ta thấy là (e) quy về $\dfrac{1}{1-\alpha}Az' + Bz + C = 0$, vốn là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một theo z. Giải phương trình này (xem 11.1), ta suy ra giá trị của $z(x)$, từ đó có được $y(x)$.

NHẬN XÉT :

Đối với trường hợp $\alpha = 2$ chẳng hạn, ta sẽ đặt $z = \dfrac{1}{y}$, việc này đòi hỏi rằng y không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào của I. Như vậy ta sẽ chỉ thu được những nghiệm không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào thuộc I ; có thể sự khảo sát của chúng ta sẽ bỏ sót những nghiệm khác. Chúng ta sẽ nghiên cứu vấn đề này trong Tập 4.

3) THÍ DỤ : (e) $\quad xy' + y - xy^3 = 0$

Ký hiệu $z = \dfrac{1}{y^2}$, suy ra $z' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. Do đó :

$$\text{(e)} \Leftrightarrow xz' - 2z + 2x = 0.$$

Với giả thiết $I \subset \mathbb{R}_-^*$ hay $I \subset \mathbb{R}_+^*$, ta quy về một phương trình tuyến tính cấp một chuẩn hóa :

$$\text{(E)} \qquad z' - \frac{2}{x}z + 2 = 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế thứ hai :

$$z' - \frac{2}{x}z = 0 \text{ là } x \mapsto \lambda x^2.$$

Một nghiệm riêng của (E) là $x \mapsto 2x$.

Vậy nghiệm tổng quát của (E) là $z : x \mapsto 2x + \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta suy ra nghiệm tổng quát trên I của (e) (bằng cách áp dụng định lý về các giá trị trung gian) là :

$$y : x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x + \lambda x^2}}, \ (\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}.$$

Ta chú ý rằng miền xác định của y phụ thuộc vào λ.

Bài tập

◊ **11.3.3** Giải các phương trình vi phân sau đây (với biến số x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) :

a) $y'\sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$

b) $y' + 2y - (x + 1)\sqrt{y} = 0$

c) $y' - \frac{4}{x} y - x\sqrt{y} = 0$

d) $y' - y - x^2y^2 = 0$

e) $2xy' + y + 3x^2y^2 = 0$

f) $x^2y' - xy + y^2 = 0$

g) $xy' - y - y^3 = 0$

h) $2xy' + y - 2x^2y^{-3} = 0$

i) $y' - \frac{y}{x} + x^2y^4 = 0$

11.3.5 Phương trình Riccati

1) Đó là phương trình : (e) $Ay' + By + Cy^2 + D = 0$

trong đó A, B, C, D là những hàm liên tục. Khi $D = 0$ thì đây là một trường hợp đặc biệt của phương trình Bernoulli (11.3.4).

2) **Phương pháp giải**

Giả thiết đã biết một nghiệm y_0 của (e), và ký hiệu $Y = y - y_0$. Khi đó y là nghiệm của (e) khi và chỉ khi

$$A(y_0 + Y)' + B(y_0 + Y) + C(y_0 + Y)^2 + D = 0,$$

tức là : $$AY' + (B + 2Cy_0)Y + CY^2 = 0,$$

vốn là một phương trình Bernoulli (xem 11.3.4). Vậy ta sẽ đặt $z = \frac{1}{Y}$ để quy về một phương trình tuyến tính đối với z.

3) THÍ DỤ : (E) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$.

Một nghiệm hiển nhiên (trên R) của (E) là $x \mapsto -1$. Ta ký hiệu $Y = y + 1$, suy ra $y = -1 + Y$. Khi đó phương trình (E) quy về $Y' + Y + Y^2 = 0$, và nếu đặt $z = \frac{1}{Y}$ thì là :

$$-z' + z + 1 = 0.$$

Nghiệm tổng quát theo z là $z : x \mapsto -1 + \lambda e^x$, suy ra nghiệm tổng quát của (E) là :

$y : x \mapsto -1 + \dfrac{1}{-1 + \lambda e^x} = -\dfrac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (và $y : x \mapsto -2$).

NHẬN XÉT :

Ta cũng có thể xét thí dụ này như một phương trình khuyết x (xem 11.3.6).

Bài tập

◊ **11.3.4** Giải các phương trình vi phân sau đây (biến số x, hàm chưa biết y nhận giá trị thực) :

a) $2x^2y' + x^2y^2 + 1 = 0$

b) $(x^2 + 1)y' - y^2 + 1 = 0$

c) $x^2y' - xy + x^2y^2 + 1 = 0$ d) $(1 + x^3)y' + x^2y + 2xy^2 + 1 = 0$

e) $2xy' - y^2 + 1 = 0$ f) $(1 - x^3)y' + x^2y - y^2 + 2x = 0$

g) $y' - 3y\tan x + y^2 + \tan^2 x - 1 = 0$.

◊ **11.3.5** Giả sử y_k $(1 \leq k \leq 4)$ là bốn nghiệm của phương trình Riccati :

(e) $$Ay' + By + Cy^2 + D = 0$$

trong đó A, B, C, D liên tục trên một khoảng I.

Chứng minh rằng "nói chung" tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$y_4 = y_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{y_2 - y_1} + \lambda\left(\dfrac{1}{y_3 - y_1} - \dfrac{1}{y_2 - y_1}\right)}.$$

11.3.6 Phương trình khuyết x

1) Đó là phương trình dạng (e) $F(y, y') = 0$, trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm đã cho, xác định trên một bộ phận U thuộc $\mathbb{R}^2$.

2) **Phương pháp giải**

Ta sẽ biểu thị đường cong có phương trình $F(u, v) = 0$ dưới dạng tham số $\begin{cases} u = \varphi(t) \\ v = \psi(t) \end{cases}$, với t chạy khắp trên một bộ phận nào đó của $\mathbb{R}$. Khi đó nếu y là nghiệm của (e) thì :

$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$, suy ra (nếu các phép toán hợp lệ) : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}$

Ta suy ra : $\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$, và các hệ thức trên cho ta một cách biểu diễn tham số của các đường tích phân.

3) **Tính chất hình học của các đường tích phân**

Nếu $y : I \to \mathbb{R}$ là một nghiệm trên I của (e), thì khi đó với mọi C thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ tịnh tiến của y là $y_C : x \mapsto y(x + C)$ là nghiệm của (e) trên khoảng $I_C = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x + C \in I\}$, vì rằng :

$$\forall x \in I_C,\ F(y_C(x), y_C'(x)) = F(y(x + C), y'(x + C)) = 0.$$

Vậy các đường tích phân chỉ sai khác nhau một phép tịnh tiến theo một vectơ song song với $(x'x)$.

4) THÍ DỤ : (e) $(y + y')^2 + (y - y')^3 = 0$.

Ta ký hiệu $t = \sqrt[3]{y + y'}$, suy ra $t^3 = y + y'$, sau đó nếu y là nghiệm của (e) thì : $(y - y')^3 = -(y + y')^2 = -t^6$, vậy $y - y' = -t^2$.

Hệ phương trình $\begin{cases} y + y' = t^3 \\ y - y' = -t^2 \end{cases}$ cho ta $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(t^3 - t^2) \\ y' = \frac{1}{2}(t^3 + t^2) \end{cases}$. Vậy ta có :

$\frac{1}{2}(t^3 + t^2) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(3t^2 - 2t)\frac{dt}{dx}$, do đó $\frac{dx}{dt} = \frac{3t-2}{t(1+t)}$,

và $x(t) = \int \frac{3t-2}{t(t+1)}\,dt = \int\left(-\frac{2}{t} + \frac{5}{t+1}\right)dt = -2\ln|t| + 5\ln|t+1| + C$, $C \in \mathbb{R}$

Ta suy ra một biểu diễn tham số của các đường tích phân là :

$$\begin{cases} x(t) = -2\ln|t| + 5\ln|t+1| + C \\ y(t) = \frac{1}{2}(t^3 - t^2) \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$

Bài tập

◊ **11.3.6** Giải các phương trình vi phân sau đây (biến số x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) :

a) $y' = -y(y-1)(y-2)$ b) $(y' + y)^3 = y' + 3y$

c) $(y' - y)^2 = y(y' + y)^2$ d) $y = y'^2\tan y'$ e) $y^2 + y'^2 = 1$.

11.3.7 Phương trình khuyết y

1) Đó là phương trình dạng : (e) $F(x, y') = 0$, trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên một bộ phận U thuộc $\mathbb{R}^2$.

2) **Phương pháp giải**

Đôi khi từ (e) ta có thể biểu thị tường minh y' theo x được, sau đó tính nguyên hàm để thu được y. Nếu không thì ta sẽ biểu diễn tham số đường cong có phương trình $F(u, v) = 0$ dưới dạng $\begin{cases} u = \varphi(t) \\ v = \psi(t) \end{cases}$, với t chạy khắp trên một bộ phận của $\mathbb{R}$. Khi đó, nếu y là nghiệm của (e), thì ta sẽ có $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$, suy ra $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \psi(t)\varphi'(t)$ (nếu các phép toán hợp lệ).

Ta suy ra :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \end{cases}, C \in \mathbb{R}.$$

Đây chính là một biểu diễn tham số của các đường tích phân.

Ta chú ý rằng bằng cách hoán vị các vai trò của x và của y (tức là xem x như hàm của y), thì một phương trình khuyết y quy về một phương trình khuyết x (xem 11.3.6).

3) **Tính chất hình học của các đường tích phân**

Cũng như trong 11.3.6, 3), ở đây ta thấy là các đường tích phân sai khác nhau một phép tịnh tiến theo một vectơ song song với trục tung.

4) THÍ DỤ (e) $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$

Ta biểu diễn tham số đường cong có phương trình $u^3 + v^3 - 3uv = 0$ bằng cách đặt $t = \dfrac{v}{u}$: $u = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $v = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Vậy $\quad x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y' = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, suy ra $\dfrac{3t^2}{1+t^3} = y' = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$,

do đó $\quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2}{1+t^3}\,\dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \dfrac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}$, sau đó :

$$y = \int \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt \underset{s=1+t^3}{=} 3\int \frac{3-2s}{s^3}\,ds = 3\left(-\frac{3}{2s^2} + \frac{2}{s}\right) + C$$

$$= \frac{3(4t^3+1)}{2(1+t^3)^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Như vậy ta thu được một biểu diễn tham số của các đường tích phân :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3(4t^3+1)}{2(1+t^3)^2} + C \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

◊ **11.3.7** Giải các phương trình vi phân sau đây (biến số x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) :

a) $xy' - y'^2 - 1 = 0$ b) $xy' - \sqrt{1 + y'^2} = 0$ c) $x = e^{y'} + y'$.

11.3.8 Phương trình Lagrange và phương trình Clairaut

1) Mọi phương trình vi phân

(e) $\quad y = A(y')x + B(y')$

trong đó A, $B : X \to \mathbb{R}$ là những ánh xạ lớp C^1 trên một bộ phận X của $\mathbb{R}$, gọi là **phương trình Lagrange**.

Trường hợp đặc biệt khi $A = 1$:

(e) $\quad y = xy' + B(y')$ được gọi là **phương trình Clairaut**.

2) **Phương pháp giải**

Ta ký hiệu $t = y'$, suy ra $y = A(t)x + B(t)$; sau đó bằng cách lấy đạo hàm theo t :

$$tx'(t) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = A'(t)x(t) + A(t)x'(t) + B'(t),$$

đây chính là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một (hàm chưa biết x, biến t).

Từ đó ta suy ra $x(t)$ theo t, rồi $y(t) = A(t)x(t) + B(t)$.

3) THÍ DỤ : (e) $\qquad xy' + y + y'^2 = 0.$

Ta đặt $t = y'$, do đó $y = -xy' - y'^2 = -xt - t^2$, rồi có $\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt}t - x - 2t$. Mặt khác $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = t\frac{dx}{dt}$, do đó có : $2tx'(t) + x(t) + 2t = 0$, đây chính là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế thứ hai (trên một khoảng không chứa điểm 0) là $t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Một nghiệm riêng của phương trình có vế thứ hai là $t \mapsto -\frac{2}{3}t$. Nghiệm tổng quát của phương trình có vế thứ hai là $x : t \mapsto -\frac{2}{3}t + \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ta suy ra một biểu diễn tham số của các đường tích phân (tham số được ký hiệu là t) là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}} \\ y = -xt - t^2 = -\dfrac{1}{3}t^2 - \dfrac{\lambda t}{\sqrt{|t|}} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

◊ **11.3.8** Giải các phương trình vi phân sau đây (biến số x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) :

a) $xy' + y - y'^2 = 0$ $\qquad$ b) $y = xy' + y' - y'\ln|y'|$ $\qquad$ c) $y = xy'^2 + y'^3$.

Chương 12

Khái niệm về hàm số hai biến số thực

12.1 Không gian $\mathbb{R}^2$, dãy trong $\mathbb{R}^2$

12.1.1 Không gian $\mathbb{R}^2$

- **Định nghĩa 1** **Chuẩn trên** $\mathbb{R}^2$ là một ánh xạ $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho :

  1) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$

  2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

  3) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, N(x + y) \le N(x) + N(y)$.

NHẬN XÉT : Nếu N là một chuẩn trên $\mathbb{R}^2$ thì : $\forall x \in \mathbb{R}^2, N(x) \ge 0$.

Thực vậy : $\begin{cases} N(0) = N(x + (-x)) \le N(x) + N(-x) = 2N(x) \\ N(0) = N(0 \,.\, 0) = 0 \,.\, N(0) = 0 \end{cases}$ ■

Thường ta ký hiệu một chuẩn trên $\mathbb{R}^2$ là : $\|.\| : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$.

- **Mệnh đề 1** **(Bất đẳng thức tam giác ngược)**

  Nếu $\|.\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^2$ thì :

  $$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \|x - y\| \ge \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$$

Chứng minh :

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \le \|x - y\| + \|y\|, \text{ suy ra } \|x - y\| \ge \|x\| - \|y\|.$$

Bằng cách hoán vị x và y :

$$\|x - y\| = \|y - x\| \ge \|y\| - \|x\| = -(\|x\| - \|y\|).$$

Cuối cùng ta được :

$$\|x - y\| = \mathrm{Max}(\|x\| - \|y\|, -(\|x\| - \|y\|)) = \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|.$$ ■

- **Ký hiệu - Mệnh đề 2** **(ba chuẩn thông dụng trên $\mathbb{R}^2$)**

  Với mọi $x = (x_1, x_2)$ thuộc $\mathbb{R}^2$, ta ký hiệu :

  $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \ \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \ \ \|x\|_\infty = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|).$$

  Các ánh xạ $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ là những chuẩn trên $\mathbb{R}^2$, gọi là các **chuẩn thông dụng trên** $\mathbb{R}^2$; $\|.\|_2$ được gọi là **chuẩn Euclide thông thường trên** $\mathbb{R}^2$.

Chứng minh :

Ký hiệu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ là những phần tử bất kỳ của $\mathbb{R}^2$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có :

1) • $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda| (|x_1| + |x_2|) = |\lambda| \|x\|_1$

• $\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

2) • $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $\|\lambda x\|_2 = ((\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2)^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2(x_1^2 + x_2^2))^{\frac{1}{2}} = |\lambda|(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2$

• $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \Leftrightarrow (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq$

$$\leq ((x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} + (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}})^2$$

$$\Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 \leq ((x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x_1y_1x_2y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \Leftrightarrow (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$$

(ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz trong $\mathbb{R}^2$, xem Tập 1, 1.2.2).

3) • $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \text{Max}\,(|x_1|, |x_2|) = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $\|\lambda x\|_\infty = \text{Max}\,(|\lambda x_1|, |\lambda x_2|) = |\lambda|\,\text{Max}\,(|x_1|, |x_2|) = |\lambda| \|x\|_\infty$

• $\|x + y\|_\infty = \text{Max}\,(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leq \text{Max}\,(|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|)$

$$\leq \text{Max}\,(|x_1|, |x_2|) + \text{Max}\,(|y_1|, |y_2|) = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

NHẬN XÉT : Các chuẩn $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ là các trường hợp đặc biệt của **chuẩn Hölder** $\|.\|_p$, $p \in [1 ; +\infty[$ (xem Tập 1, 5.4.3, 2)) ; ký hiệu $\|.\|_\infty$ là do :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$$

(xem Tập 1, bài tập 3.1.7, a) ; tại đây đã chứng minh kết quả này cho trường hợp $p \in \mathbf{N}^*$; việc khảo sát cũng tương tự khi $p \in]1 ; +\infty[$).

◆ **Định nghĩa 2** Giả sử $\|.\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

a) **Hình cầu mở tâm *a* bán kính *r*** là tập hợp $B(a ; r)$ xác định bởi :

$$B(a ; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\}.$$

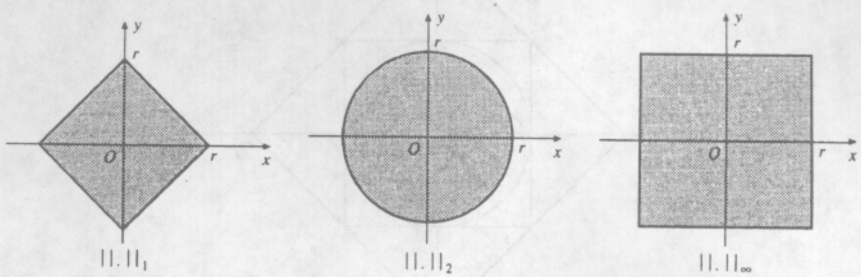
b) **Hình cầu đóng tâm *a* bán kính *r*** là tập hợp $B'(a ; r)$ xác định bởi :

$$B'(a ; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq r\}.$$

c) **Mặt cầu tâm *a* bán kính *r*** là tập hợp $S(a ; r)$ xác định bởi :

$$S(a ; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x - a\| = r\}$$

Biểu diễn hình học (trên mặt phẳng Euclide) của các hình cầu đóng tâm $O(0\ ;\ 0)$ bán kính r, đối với ba chuẩn thông dụng :



♦ **Định nghĩa 3** Giả sử N, N' là hai chuẩn trên $\mathbf{R}^2$; ta nói rằng N **tương đương** với N' khi và chỉ khi

$$\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in \mathbf{R}^2,\ \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x).$$

Ta ký hiệu $N \sim N'$ để chỉ : N tương đương với N'.

♦ **Mệnh đề 3** Quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp các chuẩn trên $\mathbf{R}^2$.

Chứng minh :

1) **Tính phản xạ** : hiển nhiên

2) **Tính đối xứng** : nếu $N \sim N'$, tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho $\alpha N \le N' \le \beta N$, suy ra $\frac{1}{\beta} N' \le N \le \frac{1}{\alpha} N'$, và do đó $N' \sim N$.

3) **Tính bắc cầu :** Nếu $N \sim N'$ và $N' \sim N''$, thì tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ sao cho : $\begin{cases} \alpha N \le N' \le \beta N \\ \gamma N' \le N'' \le \delta N' \end{cases}$, do đó $\alpha\gamma N \le \gamma N' \le N'' \le \delta N' \le \delta\beta N$, tức là: $N \sim N''$.

♦ **Mệnh đề 4**

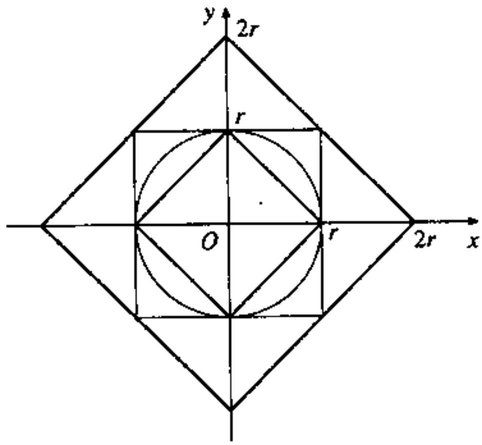
Ba chuẩn thông dụng trên $\mathbf{R}^2$ là tương đương.

Chứng minh :

Với mọi x thuộc $\mathbf{R}^2$ ta có : $\begin{cases} \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le 2\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{2}\|x\|_\infty \end{cases}$

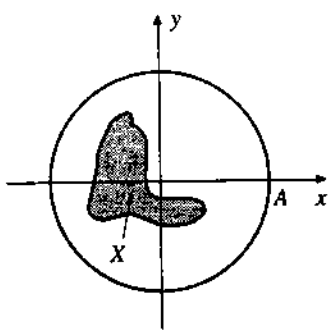
Các bất đẳng thức trên đây được thể hiện đồ thị bằng các quan hệ bao hàm giữa các hình cầu (chẳng hạn hình cầu mở) đối với ba chuẩn thông dụng :

$$B_{\|.\|_1}(0\ ;\ r) \subset B_{\|.\|_2}(0\ ;\ r) \subset B_{\|.\|_\infty}(0\ ;\ r) \subset B_{\|.\|_1}(0\ ;\ 2r)$$



NHẬN XÉT : Trong Tập 3 (chương 1) chúng ta sẽ chứng minh rằng trong một không gian vectơ hữu hạn chiều thì tất cả mọi chuẩn đều tương đương.

- **Định nghĩa 4** Một bộ phận X của $\mathbb{R}^2$ được gọi là giới nội khi và chỉ khi : $\exists A \in \mathrm{R}_+, \forall x \in X, \|x\|_2 \leq A$.



NHẬN XÉT :

Do $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ là tương đương, nên một bộ phận X của R^2 là giới nội khi và chỉ khi :

$$\exists B \in \mathrm{R}_+, \forall x \in X, \quad \|x\|_1 \leq B$$

hoặc

$$\exists C \in \mathrm{R}_+, \forall x \in X, \quad \|x\|_\infty \leq C$$

Như vậy một bộ phận X của R^2 là giới nội khi và chỉ khi ta có thể bao hàm nó trong một hình cầu (tâm O) đối với một chuẩn bất kỳ trong ba chuẩn thông dụng.

12.1.2 Tập con mở, tập con đóng

♦ **Định nghĩa 1** Một tập con Ω của $\mathbf{R}^2$ được gọi là **mở** khi và chỉ khi :

$$\forall x \in \Omega, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B_{\|.\|_\infty}(x\ ;\ r) \subset \Omega.$$

Ta cũng nói Ω là một **tập mở** trên $\mathbf{R}^2$.

NHẬN XÉT :

1) Trong Định nghĩa trên, r phụ thuộc vào x, và có thể kí hiệu là r_x.

2) Vì $\|.\|_\infty$ và $\|.\|_2$ tương đương, nên trong Định nghĩa trên đây ta có thể thay $\|.\|_\infty$ bằng $\|.\|_2$ (việc này sẽ làm thay đổi r).

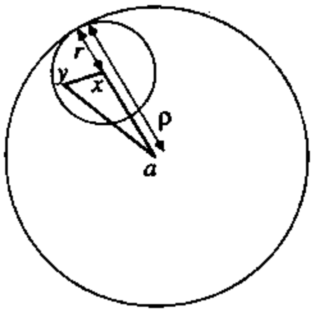
THÍ DỤ :

$]-1\ ;\ 1[\ \times\ ]-2\ ;\ 3[$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$.

$]-1\ ;\ 1]^2$ không phải là tập mở trên $\mathbf{R}^2$.

♦ **Mệnh đề 1**
Mọi hình cầu mở trong $\mathbf{R}^2$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$.

Chứng minh :



Ta sẽ dùng một trong các chuẩn thông dụng ký hiệu là $\|.\|$.

Giả sử $(a, \rho) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, và $x \in B(a\ ;\ \rho)$.

Ký hiệu $r = \rho - \|x - a\|$, r là một số thực > 0.

Với mọi y thuộc $B(x\ ;\ r)$:

$$\|y - a\| \le \|y - x\| + \|x - a\| <$$
$$< r + \|x - a\| = \rho$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng :
$B(x\ ;\ r) \subset B(a\ ;\ \rho)$, và do đó $B(a\ ;\ \rho)$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$.

♦ **Định nghĩa 2** Một tập con F của $\mathbf{R}^2$ được gọi là **đóng** khi và chỉ khi $C_{\mathbf{R}^2}(F)$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$. Ta cũng nói rằng F là một **tập đóng** (trên $\mathbf{R}^2$).

THÍ DỤ :

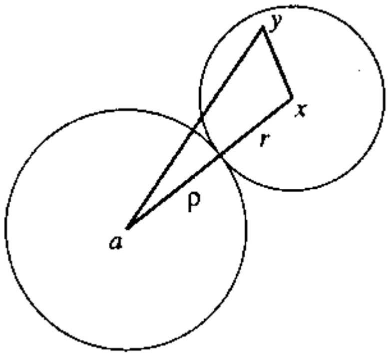
$[0\ ;\ +\infty[\ \times\ [1\ ;\ +\infty[$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$

$\{(0, 0)\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$

$]0\ ;\ 1]^2$ không phải là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$.

♦ **Mệnh đề 2**
Mọi hình cầu đóng trong $\mathbf{R}^2$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$.

Chứng minh :



Ta sẽ sử dụng một trong các chuẩn thông dụng, được ký hiệu là $\|.\|$.

Giả sử $(a, \rho) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ và $x \in C_{\mathbb{R}^2}(B'(a\ ;\ \rho))$. Ta ký hiệu

$$r = \|x - a\| - \rho,$$

r là một số thực > 0. Với mọi y thuộc $B(x\ ;\ r)$: $\|y - a\| \geq \big|\, \|y - x\| - \|x - a\| \,\big| = \|x - a\| - \|y - x\| > \|x - a\| - r = \rho$.

Hệ thức trên chứng tỏ rằng

$$B(x\ ;\ r) \subset C_{\mathbb{R}^2}(B'(a\ ;\ \rho)).$$

Vậy $C_{\mathbb{R}^2}(B'(a\ ;\ \rho))$ là một tập mở, suy ra $B'(a\ ;\ \rho)$ là một tập đóng trên $\mathbb{R}^2$.

12.1.3 Dãy trong $\mathbb{R}^2$

- **Định nghĩa 1** Giả sử $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{R}^2$.

  1) Cho $l \in \mathbb{R}^2$, ta nói rằng $(u_n)_{n \in N}$ **hội tụ đến** l khi và chỉ khi :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow \|u_n - l\|_\infty \leq \varepsilon).$$

  2) Ta nói rằng $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **hội tụ** khi và chỉ khi tồn tại $l \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến l.

  3) Ta nói rằng $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **phân kỳ** khi và chỉ khi nó không hội tụ.

- **Mệnh đề 1 ("Tính duy nhất của giới hạn nếu tồn tại giới hạn")**
  Nếu một dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong $\mathbb{R}^2$ hội tụ đến l_1 và hội tụ đến l_2 thì $l_1 = l_2$.

Chứng minh :

Giống như trong Tập 1, 3.1.1, Mệnh đề 1. ■

Nếu $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến l thì ta nói rằng l là **giới hạn của** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, và ký hiệu $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$, hay $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

- **Định nghĩa 2** Giả sử $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$; ta nói rằng x **dính với** A (hoặc : x là một **điểm dính với** A) khi và chỉ khi tồn tại một dãy các phần tử thuộc A hội tụ đến x.

- **Mệnh đề 2**
  Một tập con F của $\mathbb{R}^2$ là đóng khi và chỉ khi mọi điểm dính với F đều thuộc F.

Chứng minh :

1) Giả sử F đóng, và x là một điểm dính với F ; tồn tại một dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ các phần tử thuộc F sao cho : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} x$. Ta lập luận phản chứng : giả sử $x \notin F$.

Khi đó $x \in C_{\mathbb{R}^2}(F)$, khi đó vì $C_{\mathbb{R}^2}(F)$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$ nên tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho : $B(x\ ;\ r) \subset C_{\mathbb{R}^2}(F)$. Vì $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến x, nên đặc biệt phải tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho : $\|u_n - x\| < r$. Khi đó ta có $u_n \in B(x\ ;\ r)$, tức là $u_n \notin F$, vô lý ! Mâu thuẫn này chứng tỏ : $x \in F$.

2) Đảo lại, giả sử mọi điểm dính với F đều thuộc F. Ta lập luận phản chứng : giả sử F không đóng, tức là $C_{\mathbb{R}^2}(F)$ không mở.

Vậy phải tồn tại $x \in C_{\mathbb{R}^2}(F)$ sao cho : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x\ ;\ r) \not\subset C_{\mathbb{R}^2}(F)$.

Đặc biệt : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $B\left(x\ ;\ \dfrac{1}{n}\right) \cap F = \varnothing$.

Vậy tồn tại một dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ các phần tử thuộc F sao cho :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in B\left(x\ ;\ \frac{1}{n}\right).$$

Do $(\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in F)$ và vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} x$, nên x dính với F.

Theo giả thiết thì $x \in F$, vô lý.

Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng F đóng.

◆ **Mệnh đề 3** Giả sử $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{R}^2$ và $l \in \mathbb{R}^2$.
Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, ký hiệu $(x_n, y_n) = u_n$, và $(\alpha, \beta) = l$.

Khi đó $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta \end{cases}$

Chứng minh :

Vì với mọi n thuộc $\mathbf{N}$ ta có : $\|u_n - l\| = |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$, nên :

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \Leftrightarrow \mathrm{Max}(|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x_n - \alpha| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ |y_n - \beta| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases} \Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta \end{cases}$$

THÍ DỤ :

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right) \xrightarrow[n\infty]{} (0,\ 1), \text{ vì } \frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0 \text{ và } \frac{n^2-1}{n^2+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1.$$

◆ **Định lý (Định lý Bolzano–Weierstrass)**
Từ mọi dãy bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ có thể trích ra một dãy hội tụ.

Chứng minh : (không thuộc chương trình)

Giả sử $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy bị chặn trên $\mathbb{R}^2$; với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $(x_n, y_n) = u_n$.

Các dãy số thực $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là bị chặn, vì :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} |x_n| \le \operatorname{Max}(|x_n|, |y_n|) = \|u_n\|_\infty \\ |y_n| \le \operatorname{Max}(|x_n|, |y_n|) = \|u_n\|_\infty \end{cases}.$$

Theo định lý Bolzano–Weierstrass trên $\mathbb{R}$ (3.3, Định lý), tồn tại một hàm trích $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trên $\mathbb{R}$ đến một số thực ký hiệu là α. Tương tự, vì $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn, tồn tại một hàm trích $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho $(y_{\sigma(\tau(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trên $\mathbb{R}$ đến một số thực ký hiệu là β.

Khi đó, bằng cách ký hiệu $\rho = \sigma \circ \tau$ (cũng là một hàm trích), ta có $x_{\rho(n)} \xrightarrow[n\infty]{} \alpha$, vì $(x_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ được trích từ $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy hội tụ đến α, và $y_{\rho(n)} \xrightarrow[n\infty]{} \beta$. Vậy :

$$u_{\rho(n)} = (x_{\rho(n)}, y_{\rho(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} (\alpha, \beta).$$

12.2 Giới hạn, tính liên tục

12.2.1 Giới hạn

Chúng ta đã nghiên cứu các giới hạn và tính liên tục đối với các hàm một biến số thực, xem Tập 1, 4.2 và 4.3 ; bây giờ ta khảo sát các vấn đề tương tự đối với các hàm hai biến số thực.

- **Định nghĩa** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^2)$, a là một điểm dính với X, $f : X \to \mathbf{R}$.
  1) Cho $l \in \mathbf{R}$. Ta nói f **có giới hạn** l **tại** a khi và chỉ khi :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (\|x - a\|_\infty \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$.
  2) Ta nói rằng f **có giới hạn** $+\infty$ **tại** a khi và chỉ khi :
  $\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (\|x - a\|_\infty \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A)$.
  3) Ta nói rằng f **có giới hạn** $-\infty$ **tại** a khi và chỉ khi $-f$ có giới hạn $+\infty$ tại a.

  Khi f có giới hạn l tại a ($l \in \mathbf{R}$), ta nói rằng f **có giới hạn hữu hạn tại** a.

- **Mệnh đề** **("Tính duy nhất của giới hạn nếu tồn tại")**
  Nếu f có giới hạn l và l' tại a, thì $l = l'$.

Chứng minh :

Giống như ở Tập 1, 4.2.1, Mệnh đề 1. ■

Nếu f có giới hạn l tại a, ta nói rằng l là giới hạn của f tại a, và ký hiệu : $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, hay $l = \lim\limits_{a} f$, hay $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, hay $f \xrightarrow[a]{} l$.

Các tính chất ta đã biết trong Tập 1, 4.2.2 và 4.2.3, vẫn đúng đối với các ánh xạ từ X ($\subset \mathbf{R}^2$) vào $\mathbf{R}$. Chẳng hạn (xem 4.2.2, Mệnh đề 3, Tập 1), ta có "định lý kẹp" sau đây :

$$\text{Nếu } \left\{\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ h(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ \forall x \in X, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array}\right. , \text{ thì } g \text{ có giới hạn } l \text{ tại } a.$$

Kết quả này thường hay được sử dụng trong trường hợp $f = 0$, $l = 0$.

12.2.2 Tính liên tục

- **Định nghĩa 1** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^2)$, $f : X \to \mathbf{R}$, $a \in X$. Ta nói rằng f **liên tục tại** a khi và chỉ khi :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (\|x - a\|_\infty \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$.

Ta có Mệnh đề hiển nhiên sau :

- **Mệnh đề 1** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. Điều kiện cần và đủ để f liên tục tại a là f có giới hạn $f(a)$ tại a.

- **Mệnh đề 2 (Đặc trưng của tính liên tục)**
  Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. Điều kiện cần và đủ để f liên tục tại a là : với mọi dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ các phần tử thuộc X hội tụ đến a, ta có $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$.

Chứng minh :

Như ở Tập 1, 4.3.1, 1) Mệnh đề 3.

- **Định nghĩa 2** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f **liên tục trên** X khi và chỉ khi f liên tục tại mọi điểm của X.
  Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ liên tục từ X đến $\mathbb{R}$ là $C(X, \mathbb{R})$.

- **Mệnh đề 3**
  Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f, $g : X \to \mathbb{R}$.
  1) Nếu f liên tục trên X thì $|f| : \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{array}$ liên tục trên X
  2) Nếu f và g liên tục trên X thì $f + g$ liên tục trên X
  3) Nếu f liên tục trên X thì λf liên tục trên X
  4) Nếu f và g liên tục trên X thì fg liên tục trên X
  5) Nếu f và g liên tục trên X, và nếu $(\forall x \in X, g(x) \neq 0)$, thì $\frac{f}{g}$ liên tục trên X.

Chứng minh :

Tương tự như trong Tập 1, 4.3.2, 2), Mệnh đề 1.
Do $C(X, \mathrm{R}) \neq \varnothing$, và bằng cách áp dụng các tính chất 2), 3), 4) trên đây, ta thấy rằng $C(X, \mathrm{R})$ là một đại số con của của R^X đối với các luật hợp thành thông thường, tức là :

$$\begin{cases} 1 \in C(X, \mathrm{R}) \text{ (trong đó } 1 : \begin{array}{l} X \to \mathrm{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}) \\ C(X, \mathrm{R}) \text{ là một R – không gian vectơ con đối với phép cộng} \\ \text{và luật hợp thành ngoài} \\ C(X, \mathrm{R}) \text{ kín đối với phép nhân} \end{cases}$$

■

Ta mở rộng dễ dàng các khái niệm về giới hạn và liên tục đã học cho trường hợp một ánh xạ $f : X \to \mathrm{R}^2$ (trong đó $X \in \mathfrak{P}(\mathrm{R}^2)$). Chẳng hạn, theo định nghĩa thì $f : X \to \mathrm{R}^2$ liên tục tại a ($a \in X$) khi và chỉ khi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (\|x - a\|_\infty \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_\infty \leq \varepsilon).$$

Để khảo sát một ánh xạ $f : X \to \mathrm{R}^2$, thường ta quy về các ánh xạ thành phần theo tọa độ của f, tức là các ánh xạ $f_1 : X \to \mathrm{R}$, $f_2 : X \to \mathrm{R}$ xác định như sau : $\forall x \in X, f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Thí dụ, rõ ràng là f liên tục tại a ($a \in X$) khi và chỉ khi f_1 và f_2 liên tục tại a.

• **Mệnh đề 4** Giả sử $X, Y \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^2), f : X \to \mathbf{R}^2, g: Y \to \mathbf{R}$ sao cho $f(X) \subset Y$; ta thường ký hiệu một cách lạm dụng là $g \circ f : X \to \mathbf{R}$
$$x \mapsto g(f(x))$$
Nếu f liên tục trên X và nếu g liên tục trên Y, thì $g \circ f$ liên tục trên X.

Chứng minh :

Như ở Tập 1, 4.3.2, 2), Mệnh đề 2. ■

Chúng ta sẽ thừa nhận Mệnh đề dưới đây, vì trong tập này không thể đề cập phép chứng minh do chương trình chính thức chỉ giới hạn việc nghiên cứu tính liên tục của hàm lấy giá trị thực trên một khoảng. Trong Tập 3 độc giả sẽ thấy một kết quả tổng quát hơn, và được chứng minh.

• **Mệnh đề 5** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^2), f : X \to \mathbf{R}$. Nếu X đóng, bị chặn và không rỗng, và nếu f liên tục, thì khi đó f bị chặn và đạt được các cận. ■

• **Mệnh đề 6** Giả sử $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ liên tục và $\alpha \in \mathbf{R}$. Khi đó :
1) $\{x \in \mathbf{R}^2 ; f(x) \geq \alpha\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$.
2) $\{x \in \mathbf{R}^2 ; f(x) = \alpha\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$
3) $\{x \in \mathbf{R}^2 ; f(x) > \alpha\}$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$.

Chứng minh :

1) Chúng ta sẽ chứng minh rằng $F = \{x \in \mathbf{R}^2 : f(x) \geq \alpha\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$ bằng cách sử dụng cách đặc trưng các tập đóng trên $\mathbf{R}^2$ bởi các dãy (xem 12.1.3, Mệnh đề 2).

Giả sử x là một điểm dính với F ; tồn tại một dãy $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ các phần tử thuộc F sao cho : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$. Vì f liên tục (tại x) nên :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(x).$$

Do $(\forall n \in \mathbf{N}, f(x_n) \geq \alpha)$, nên định lý tiến qua giới hạn trong các bất đẳng thức về các dãy số thực cho phép ta suy ra rằng $f(x) \geq \alpha$, tức là : $x \in F$.
Vậy F là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$.

2) Phương pháp chứng minh như ở 1).

3) Theo 1) (áp dụng vào $-f$ và $-\alpha$) thì $\{x \in \mathbf{R}^2 : (-f)(x) \geq -\alpha\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$, do đó $\{x \in \mathbf{R}^2 ; f(x) > \alpha\} = C_{\mathbf{R}^2}(\{x \in \mathbf{R}^2 ; -f(x) \geq -\alpha\})$ là một tập mở trên $\mathbf{R}^2$.

THÍ DỤ :

1) $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$.

2) $\left\{\left(t, \frac{1}{t}\right) ; t \in \mathrm{R}^*\right\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; x_1 x_2 = 1\}$ là một tập đóng trên $\mathbf{R}^2$.

3) $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_2 > \dfrac{1}{x_1^2+1}\right\}$ là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$.

Bài tập

◊ **12.2.1 Thí dụ về phương trình hàm**

Tìm tất cả các ánh xạ f trong mỗi trường hợp sau đây :

a) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y + z) = f(x + y, z) \end{cases}$

c) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(x, y) + f(z, t) = f(x, z) + f(y, t) \end{cases}$

d) $\begin{cases} f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R} \\ \forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, f(x^2, y)f(y^2, z)f(z^2, x) = (xyz)^3. \end{cases}$

◊ **12.2.2** Khảo sát tính liên tục của $f : (\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \text{ nếu } x^2 + y^2 \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x^2 + y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

◊ **12.2.3*** Khảo sát tính liên tục của $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \dfrac{1}{q_1 + q_2}$ nếu $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, $x = \dfrac{p_1}{q_1}$, $y = \dfrac{p_2}{q_2}$, $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$, $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, UCLN$(p_1, q_1) =$ UCLN$(p_2, q_2) = 1$, và $f(x, y) = 0$ nếu trái lại.

◊ **12.2.4** Cho $f, g : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ bị chặn, và $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x, y) = \sup_{t \in [0;1]} (xf(t), yg(t)).$$

Chứng minh rằng M liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

12.2.3 Tính liên tục theo từng biến

♦ **Định nghĩa – Ký hiệu** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \to \mathbb{R}$.

1) Với mọi $\beta \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $f(., \beta)$ là ánh xạ $x \mapsto f(x, \beta)$, xác định trên tập hợp các số thực x sao cho $(x, \beta) \in X$.

2) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $f(\alpha, .)$ là ánh xạ $y \mapsto f(\alpha, y)$, xác định trên tập hợp các số thực y sao cho $(\alpha, y) \in X$.

Các ánh xạ $f(., \beta)$ và $f(\alpha, .)$ được gọi là những **ánh xạ** (hay **hàm**) **bộ phận**.

THÍ DỤ :

Nếu $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x + 3y \end{array}$, thì $f(4, .) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto 8 + 3y \end{array}$

Nói cách khác : $f(., \beta)$ thu được bằng cách cố định biến thứ 2 bằng β.
$f(\alpha, .)$ thu được bằng cách cố định biến thứ 1 bằng α.

NHẬN XÉT :

Đối với $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thì việc cho hai ánh xạ bộ phận $f(., 0)$ và $f(0, .)$ chính là việc cho hàm thu hẹp của f trên hai đường thẳng vuông góc $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Nói chung từ $f(., 0)$ và $f(0, .)$ ta không thể "tái lập lại' f.

♦ **Mệnh đề** Giả sử I, J là hai khoảng trong $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$, $a = (\alpha, \beta) \in I \times J$. Nếu f liên tục tại a, thì các hàm bộ phận của f tại a (tức là $f(., \beta) : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, \beta) \end{array}$ và $f(\alpha, .) : \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(\alpha, y) \end{array}$) liên tục theo thứ tự tại α và β.

Chứng minh :
Ánh xạ bộ phận $f(., \beta)$ là hợp của các ánh xạ liên tục :
$I \to I \times J \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto (x, \beta) \mapsto f(x, \beta)$.
Cũng vậy đối với $f(\alpha, .)$.

NHẬN XÉT :

Trong hai thí dụ dưới đây ta sẽ thấy là đảo của Mệnh đề trên là sai ; đối với hai thí dụ đó thì việc khảo sát về giới hạn tự nhiên hơn là việc khảo sát sự liên tục.

THÍ DỤ :

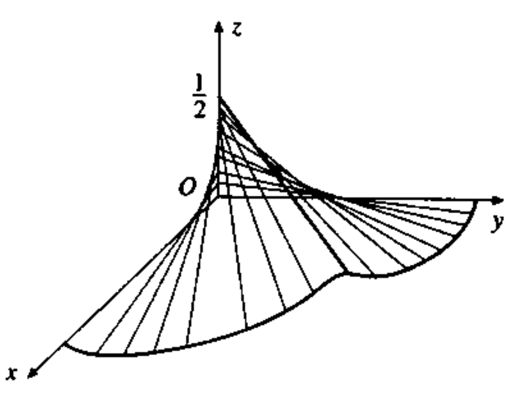
1) Cho $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \end{array}$

Các ánh xạ bộ phận tại (0, 0) là :

$f(., 0) : \begin{array}{l} \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ và $f(0, .) : \begin{array}{l} \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto 0 \end{array}$

có giới hạn 0 tại 0.

Tuy nhiên f không có giới hạn tại (0, 0) ; thật vậy các ánh xạ $\begin{array}{l} \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, 0) = 0 \end{array}$ và $\begin{array}{l} \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, x) = \dfrac{1}{2} \end{array}$ có những giới hạn khác nhau tại 0. Nếu f có giới hạn l tại (0, 0), thì khi đó qua phép hợp ánh xạ, hai hàm số trên cũng phải có giới hạn l tại 0.



Mặt (S) biểu diễn f, được xác định là $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y)\}$, chứa hai đường thẳng có phương trình $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = x \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, bỏ đi điểm $(0, 0)$; trên hình lược đồ ta thấy, khi ta tiến gần đến điểm $(0, 0)$ dọc theo đường thẳng $y = 0$ thì điểm (x, y, z) dần đến điểm $(0, 0, 0)$, trong khi đó nếu ta tiến dần đến $(0, 0)$ dọc theo đường thẳng $y = x$ thì điểm (x, y, z) lại tiến đến điểm $\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) Giả sử $f : \mathbb{R}^2 - B_2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x + y}$, trong đó $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

Các hàm bộ phận $f(., 0)$ và $f(0, .)$ có giới hạn 0 tại 0, nhưng với mọi x thuộc $\mathbb{R} - \{0\}$:

$$f(x, -x + x^2) = \frac{x(-x + x^2)}{x^2} = -1 + x \xrightarrow[x \to 0]{} -1 .$$

Kết quả trên chứng tỏ f không có giới hạn tại $(0, 0)$.

Ta chú ý rằng trong hai thí dụ trên chúng ta đã chứng tỏ rằng f không có giới hạn tại $(0, 0)$, bằng cách chỉ ra hai hàm số $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (ta cũng nói : hai *đường đi*) sao cho $f \circ \varphi$ và $f \circ \psi$ có những giới hạn khác nhau tại 0.

Bài tập

◊ **12.2.5** Khảo sát sự tồn tại của giới hạn tại $(0, 0)$, và tính giới hạn đó nếu nó tồn tại, của các hàm f sau đây, với biểu thức $f(x, y)$ như sau :

a) $\dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ b) $\dfrac{x^5y^3}{x^6 + y^4}$ c) $\dfrac{1 + x + y}{x^2 - y^2}$

d) $\dfrac{xy^6}{x^6 + y^8}$ e) $\dfrac{((x-1)^2 + y^2)\ln((x-1)^2 + y^2)}{|x| + |y|}$

f) $\dfrac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}$ g) $\dfrac{\sin^4 x + (1 - \cos y)^2}{4x^4 + y^4}$ h) $\dfrac{\sin x - y}{x - \sin y}$

i) $\dfrac{\sin^3 x}{\operatorname{ch} x - \cos y}$ j) $\dfrac{\operatorname{ch}(xy) - \cos(xy)}{x^2y^2}$ k) $\dfrac{xy}{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y}$

l) $\dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{|x| + |y|}$.

◊ **12.2.6** Hàm số $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x}$ có giới hạn tại $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ không ? Nếu có thì giới hạn đó là gì ?

◊ **12.2.7** Xác định miền liên tục của các ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sau đây :

a) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{nếu } xy \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } xy = 0 \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} x^4 & \text{nếu } y > x^2 \\ y^2 & \text{nếu } y \le x^2 \end{cases}$

12.3 Các đạo hàm riêng cấp một

12.3.1 Định nghĩa

1) Đạo hàm riêng cấp một tại một điểm

- **Định nghĩa 1** **(đạo hàm theo hướng)**

  Cho U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Ta nói rằng f có **đạo hàm cấp một tại** a **theo hướng vectơ** v khi và chỉ khi ánh xạ $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$ khả vi tại 0. Trong trường hợp này thì số thực $\varphi_v'(0)$, tức là

  $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a))$, được gọi là **đạo hàm cấp một theo hướng** v **của** f **tại** a, và ký hiệu là $D_v f(a)$.

- **Định nghĩa 2** Cho U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ, $a \in U$. Ta nói rằng f **khả vi tại** a **theo biến thứ nhất** (tương ứng : **biến thứ hai**) khi và chỉ khi f có đạo hàm cấp một theo hướng vectơ (1, 0) (tương ứng : (0, 1)) tại a. Trong trường hợp này thì đạo hàm cấp một của f tại a theo hướng vectơ (1, 0) (tương ứng : (0, 1)), được gọi là **đạo hàm riêng của** f **tại** a **theo biến thứ nhất** (tương ứng : **biến thứ hai**). Các đạo hàm riêng cấp một đó được ký hiệu theo thứ tự là $D_1 f(a)$, $D_2 f(a)$.

Vậy nếu như chúng tồn tại thì :

$$D_1 f(a) = (f(., \beta))'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta)),$$

trong đó $(\alpha, \beta) = a$.

Ký hiệu : Thông thường người ta xác định f bằng cách cho ảnh của một phần tử của U, chẳng hạn $f : U \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Nếu tại a, f có đạo hàm riêng cấp một theo biến thứ nhất, thì ta sẽ ký hiệu đạo hàm riêng đó theo một trong các hình thức sau đây :

$$D_1 f(a), \ \frac{\partial f}{\partial x}(a), \ f_x'(a).$$

Đối với biến thứ hai cũng tương tự : $D_2 f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $f_y'(a)$.

NHẬN XÉT : Đạo hàm riêng cấp một tại a (nếu tồn tại) của f đối với biến thứ nhất là đạo hàm của một hàm số một biến số thực :

$$D_1 f(a) = (f(., \beta))'(\alpha) \text{ trong đó } (\alpha, \beta) = a.$$

Vậy các tính chất thu được khi ta khảo sát phép tính đạo hàm các hàm số một biến số thực (xem 5.1.2, Tập 1) đều áp dụng được trong trường hợp này. Chẳng hạn, nếu f, g có đạo hàm riêng cấp một tại a theo biến thứ nhất thì $f + g$ cũng vậy, và

$$D_1(f+g)(a) = D_1f(a) + D_1g(a)$$

2) Ánh xạ đạo hàm riêng cấp một

- **Định nghĩa** Cho U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$. Hai hàm số : $D_1f : a \mapsto D_1f(a)$, $D_2f : a \mapsto D_2f(a)$, xác định trên những bộ phận của U, được gọi là các **ánh xạ đạo hàm riêng cấp một**.

THÍ DỤ :

Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + xy$ có những đạo hàm riêng cấp một đối với các biến thứ nhất và thứ hai tại mọi điểm $\in \mathbb{R}^2$, và :

$$D_1f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2x + y \qquad D_2f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$$

Trong thực hành ta tính được $D_1f(x, y)$ bằng cách lấy đạo hàm theo biến x trong khi "coi như" y là hằng số.

12.3.2 Ánh xạ thuộc lớp C^1 trên một tập mở trong $\mathbb{R}^2$

1) Đại cương

- **Định nghĩa 1** Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f **thuộc lớp C^1 trên U** khi và chỉ khi ánh xạ $x \mapsto D_vf(x)$ xác định và liên tục trên U, với mọi v thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- **Định lý ("Định lý cơ bản")**

  Cho U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$.

  Nếu các đạo hàm riêng cấp một của f tồn tại và liên tục trên U, thì

  1) Với mọi $a = (\alpha, \beta)$ thuộc U, ký hiệu $U_0 = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + h, \beta + k) \in U\}$, tồn tại một ánh xạ $\varepsilon : U_0 \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall (h, k) \in U_0, f(\alpha + h, \beta + k) = f(a) + \left(h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \right) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) \\ \varepsilon(h, k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0. \end{cases}$$

  Ta nói rằng f có **khai triển hữu hạn tới cấp 1** tại a.

  2) f thuộc lớp C^1 trên U, và với mọi a thuộc U và mọi $v = (v_1, v_2)$ thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ta có :

$$D_vf(a) = D_1f(a)v_1 + D_2f(a)v_2$$

Ở đây $\|.\|$ chỉ một chuẩn bất kỳ trong ba chuẩn thông dụng trên $\mathbb{R}^2$.

Chứng minh : (có thể bỏ qua khi đọc lần đầu tiên)

1) Giả sử $a = (\alpha, \beta) \in U$, $U_0 = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + h, \beta + k) \in U$. Ký hiệu $\varepsilon : U_0 \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định như sau :

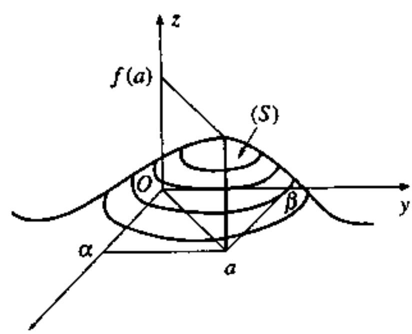
$$\varepsilon(h, k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|(h,k)\|}\left(f(\alpha+h, \beta+k) - \left(f(a) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\right) & \text{nếu } (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

Mục tiêu của chúng ta là chứng tỏ rằng ε liên tục tại $(0, 0)$.

Giả sử $(h, k) \in U_0 - \{(0, 0)\}$.

Chúng ta sẽ "đi" từ điểm $a = (\alpha, \beta)$ đến điểm $(\alpha + h, \beta + k)$ qua trung gian là điểm $(\alpha + h, \beta)$:

$f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha, \beta) =$
$= (f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha + h, \beta)) +$
$+ (f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha + \beta))$.



Ta chú ý rằng điểm $(\alpha + h, \beta)$ vẫn thuộc U với $\|(h, k)\|$ đủ nhỏ, vì do U là một tập mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a ; r) \subset U$.

Bằng cách áp dụng định lý số gia hữu hạn (Tập 1, 5.2.2, Định lý), vào $f(\alpha + h, .)$ và $f(., \beta)$, ta suy ra rằng tồn tại θ_1, θ_2 thuộc $[0, 1]$ sao cho :

$$\begin{cases} f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha, \beta) = k(f(\alpha+h, .))'(\beta+\theta_2 k) = k\dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha+h, \beta+\theta_2 k) \\ f(\alpha+h, \beta) - f(\alpha, \beta) = h(f(., \beta))'(\alpha+\theta_1 h) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1 h, \beta) \end{cases}$$

Suy ra :

$$\varepsilon(h, k) = \frac{h}{\|(h,k)\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1 h, \beta) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta)\right) + \frac{k}{\|(h,k)\|}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha+h, \beta+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta)\right).$$

Một mặt ta có : $\left|\dfrac{h}{\|(h,k)\|}\right| \leq 1$ và $\left|\dfrac{k}{\|(h,k)\|}\right| \leq 1$.

Mặt khác thì do $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên U (do đó liên tục tại a), và vì θ_1 và θ_2 đều thuộc $[0 ; 1]$ (θ_1, θ_2 phụ thuộc h, k), nên ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha + \theta_1 h, \beta) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, \beta + \theta_2 k) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 \end{cases}$$

Ta suy ra : $\varepsilon(h, k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$.

2) Giả sử $a \in U$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Theo 1) tồn tại một ánh xạ ε_1 xác định trong lân cận của 0, sao cho với $|t|$ đủ nhỏ thì :

$$\begin{cases} f(a+tv) = f(a) + tv_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + tv_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + |t|\varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_1(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $t \neq 0$ và $|t|$ đủ nhỏ :

$$\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{|t|}{t}\varepsilon_1(t)$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a),$$

chứng tỏ rằng f có đạo hàm theo hướng vectơ v và rằng :

$$D_v f(a) = D_1 f(a) v_1 + D_2 f(a) v_2$$

Với $v = (v_1, v_2)$ cố định thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, do $D_1 f$ và $D_2 f$ liên tục trên U, nên qua một phép tổ hợp tuyến tính $D_v f$ cũng liên tục trên U, tức là f thuộc lớp C^1 trên U.

Ta có thể dùng ký pháp o tương tự như ký pháp đã sử dụng đối với các hàm số một biến số thực :

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|(h, k)\|).$$

◆ **Hệ quả**

Nếu f thuộc lớp C^1 trên U, thì f liên tục trên U.

Chứng minh :

Theo Định lý trên :

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(a) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

$$\xrightarrow[(h,k) \to (0,0)]{} f(a)$$

NHẬN XÉT :

Mệnh đề đảo của Hệ quả trên dĩ nhiên là sai ; chẳng hạn,

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x|$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nhưng không thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$, vì f không có đạo hàm riêng cấp 1 tại $(0, 0)$ đối với biến thứ nhất (ta cũng nói rằng : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ không tồn tại).

◆ **Định nghĩa 2** Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U. **Gradient** của f, ký hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}} f$, là ánh xạ

$$\overrightarrow{\text{grad}} f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

◆ **Mệnh đề** Giả sử U là một tập mở thuộc $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Khi đó ta có :

$$D_v f(a) = (\overrightarrow{\text{grad}} f(a)) \,.\, v$$

(trong đó . chỉ tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^2$).

Chứng minh :

Ký hiệu : $a = (\alpha, \beta)$, $v = (v_1, v_2)$, theo Định lý cơ bản ta có :

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_2 = (\overrightarrow{\text{grad}} f(a)) \,.\, v.$$

- **Định nghĩa 3** Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U. Với mọi a thuộc U, ánh xạ tuyến tính
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (h, k) &\mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{aligned}$$
được gọi là **ánh xạ tuyến tính tiếp xúc với f tại a**, hay **vi phân của f tại a**, và được ký hiệu $\mathrm{d}_a f$ (hay $\mathrm{d}f(a)$).

Vậy, nếu f thuộc lớp C^1 trong lân cận của a thì ta có :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ (d_a f)(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

• Mọi ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ đều thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$, và với ký hiệu $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto ux + vy \end{aligned}$ trong đó $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto u \end{aligned} \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto v \end{aligned}$$

và do đó : $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $(\mathrm{d}_a f)(h, k) = hu + kv = f(h, k)$.

Vậy : $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}_a f = f$.

Khi f tuyến tính, do $\mathrm{d}_a f$ không phụ thuộc a, nên ta cũng ký hiệu (theo cách lạm dụng) $\mathrm{d}f$ thay vì $\mathrm{d}_a f$.

• Đặc biệt chúng ta hãy xét hai phép chiếu chính tắc :

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

cả hai đều là ánh xạ tuyến tính. Do một thói quen (đáng tiếc) là lẫn lộn một hàm với ảnh qua hàm đó của một phần tử "chạy" nên chúng ta có thể có khuynh hướng viết x (tương ứng : y) thay vì p_1 (tương ứng : p_2). Khi đó : $\begin{aligned} \mathrm{d}x : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (h, k) &\mapsto h \end{aligned}$; tiếp tục một cách lôgic theo cách lạm dụng ký hiệu này chúng ta có thể viết $\mathrm{d}x = h$.

• Bây giờ giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ (không nhất thiết tuyến tính) thuộc lớp C^1 trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$. Với mọi a thuộc U ta đã định nghĩa vi phân của f tại a : $\begin{aligned} \mathrm{d}_a f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (h, k) &\mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a). \end{aligned}$

Với các ký hiệu vừa xét trên đây thì :

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)p_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)p_2$$

hoặc cũng còn là :

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy.$$

Thường người ta hay bỏ qua việc chỉ ra điểm a, và do đó đi tới công thức tiện lợi sau

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

2) **Các tính chất đại số**

◆ **Mệnh đề** Giả sử $f, g : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U. Khi đó $f + g$ và fg thuộc lớp C^1 trên U ; đặc biệt, với mọi λ thuộc $\mathbb{R}$, λf thuộc lớp C^1 trên U. Nếu thêm vào đó ($\forall a \in U, g(a) \neq 0$) thì $\frac{f}{g}$ thuộc lớp C^1 trên U.

Chứng minh :

Vì các phép chứng minh đều tương tự nên để làm thí dụ ta sẽ chứng minh Mệnh đề cho trường hợp tổng.

Vì f và g thuộc lớp C^1 trên U, nên $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial g}{\partial x}$ xác định trên U ; vậy $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}$ xác định trên U và $\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$ (xem 12.3.1, 1). Vì $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial g}{\partial x}$ liên tục trên U nên $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}$ cũng vậy.

Tương tự đối với biến kia. Suy ra $f + g$ thuộc lớp C^1 trên U. Với các giả thiết trong mệnh đề trên đây ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\,(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f + \overrightarrow{\text{grad}}\,g \\ \overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda f) = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}\,f \\ \overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}f \end{cases}$$

3) **Phép hợp**

◆ **Mệnh đề** Giả sử I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ, thỏa mãn :

$$\forall t \in I,\ (u(t), v(t)) \in U.$$

Ta ký hiệu : $g : I \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(u(t), v(t))$$

Nếu $\begin{cases} u,\ v \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I \\ f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \end{cases}$, thì g thuộc lớp C^1 trên I và :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t),\ v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t),\ v(t))v'(t).$$

Chứng minh :

Giả sử $t \in I$; ký hiệu $I_0 = \{h \in \mathbb{R} : t + h \in I\}$.

Vì u, v thuộc lớp C^1 trên I, nên u, v có khai triển hữu hạn tới bậc 1 tại điểm t (xem 8.3.2, Hệ quả) :

$$\forall h \in I_0,\ \begin{cases} u(t+h) = u(t) + hu'(t) + o(h) \\ v(t+h) = v(t) + hv'(t) + o(h) \end{cases}$$

Khi đó, theo 12.3.2, 1) Định lý, ta có với mọi h thuộc I_0 và ký hiệu $a(t) = (u(t),\ v(t))$:

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f(u(t) + h(u'(t) + o(1)),\ v(t) + h(v'(t) + o(1))) \\ &= f(a(t)) + h(u'(t) + o(1))\frac{\partial f}{\partial x}(a(t)) + h(v'(t) + o(1))\frac{\partial f}{\partial y}(a(t)) \\ &\quad + \left|\left|(h(u'(t) + o(1)),\ h(v'(t) + o(1)))\right|\right| o(1) \\ &= g(t) + hu'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a(t)) + hv'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a(t)) + o(h). \end{aligned}$$

Ước lượng trên chứng tỏ rằng g có khai triển hữu hạn tới bậc 1 tại điểm t, do đó khả vi tại t (xem 8.3.1, Mệnh đề 3) và :

$$g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a(t)).$$

Cuối cùng, từ biểu thức của $g'(t)$ ta thấy g' liên tục (là tổng, tích, hợp của những ánh xạ liên tục). ∎

Trong Tập 4 chúng ta sẽ thấy trường hợp "tổng quát" của phép hợp nhiều hàm nhiều biến, trong đó chúng ta sẽ sử dụng các khái niệm vi phân và ma trận Jacobi.

THÍ DỤ :

Nếu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$, thì ánh xạ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(e^t + 1,\ t^2 - 3t)$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và với mọi t thuộc $\mathbb{R}$:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^t + t,\ t^3 - 3t)(e^t + 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(e^t + t,\ t^2 - 3t)(2t - 3).$$

Trong Tập 4 chúng ta sẽ thấy :

- Bất đẳng thức về số gia hữu hạn đối với hàm nhiều biến và các ứng dụng,
- Các thí dụ giải phương trình đạo hàm riêng cấp một,
- Việc nghiên cứu các C^1 – vi phôi và vấn đề đổi biến.

Bài tập

◊ **12.3.1** Đối với các ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sau đây, hãy khảo sát tính liên tục của f, sự tồn tại và tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp một của f :

a) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2 \ln (x^2 + y^2) & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^2 + (y - x)^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4} - e^{y^4}}{(x^2 + y^2)^2} & \text{nếu } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{nếu } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$

h) $f(x, y) = x^2|y|$ i) $f(x, y) = |x - y|$ j) $f(x, y) = |x^2 - y^2|$.

◊ **12.3.2** Khảo sát và đơn giản hàm f từ $\mathbb{R}^2$ đến $\mathbb{R}$ xác định bởi :

$$f(x, y) = \operatorname{Arccos} \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}.$$

◊ **12.3.3** Cho $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_0^y (x - t)\varphi(t)\,dt.$$

Hãy chứng minh f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ và tính các đạo hàm riêng cấp một của f.

◊ **12.3.4** Giả sử I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục, $f : I^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi : $\forall (x, y) \in I^2, f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \varphi$.

Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên I^2 và tính các đạo hàm riêng cấp một của f.

◊ **12.3.5*** Cho $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^2 và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} & \text{nếu } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{nếu } x = y \end{cases}$$

Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

12.4 Các đạo hàm riêng cấp cao

12.4.1 Đại cương

- **Định nghĩa** Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$
1) Cho $(i, j) \in \{1, 2\}^2$.
Ta nói rằng f **có đạo hàm riêng cấp hai tại** a **đối với các biến thứ** i **và** j **theo thứ tự đó** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \text{ tồn tại trong một lân cận của } a \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a) \text{ tồn tại} \end{cases}$$

Trong trường hợp đó thì số thực $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$ được ký hiệu là $(D_{ij}f)(a)$, hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, hay $f''_{x_i x_j}(a)$, và gọi là **đạo hàm riêng cấp hai của** f **đối với các biến thứ** i, j.

Tổng quát, cho $k \in \mathbb{N}^*$ và $(i_1, ..., i_k) \in \{1, 2\}^k$.

2) Ta nói rằng f có **đạo hàm riêng cấp** k **tại** a **đối với các biến thứ** $i_1, ..., i_k$ **theo thứ tự đó** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \bullet\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right), ..., \dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}}\left(\cdots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right) \text{ tồn tại trong} \\ \text{một lân cận của } a. \\ \bullet\ \dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\cdots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)(a) \text{ tồn tại.} \end{cases}$$

Trong trường hợp này số thực $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\cdots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)(a)$ được ký hiệu là $D_{i_1, ..., i_k}f(a)$, hay $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a)$, hay $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(a)$, và gọi là **đạo hàm riêng cấp** k **của** f **tại** a **đối với các biến thứ** $i_1, ..., i_k$.

Như vậy đây là một định nghĩa truy hồi, tương tự như định nghĩa các đạo hàm cấp liên tiếp của hàm một biến số thực (5.1.4, Tập 1).

3) Ánh xạ $a \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a)$ (xác định trên một bộ phận của U) được gọi là **ánh xạ đạo hàm riêng cấp** k **của** f **đối với các biến thứ** $i_1, ..., i_k$, và ký hiệu là $D_{i_1, ..., i_k}f$, hay $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$, hay $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$

NHẬN XÉT : Thứ tự viết các phép lấy đạo hàm liên tiếp không phải bao giờ cũng như thứ tự được ký hiệu trên đây. Độc giả có thể gặp ở những sách khác cách ký hiệu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ thay vì $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$, $f''_{x_j x_i}$ thay vì $f''_{x_i x_j}$.

Dưới đây, theo định lý Schwarz (12.4.3), ta sẽ thấy là sự khác nhau trong quy ước viết không gây ra sự lộn xộn nào trong thực tiễn.

12.4.2 Ánh xạ thuộc lớp C^k trên một tập mở trong $\mathbb{R}^2$

- **Định nghĩa** Cho U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$.

  1) Giả sử $k \in \mathbb{N}^*$; ta nói rằng f **thuộc lớp** C^k **trên** U khi và chỉ khi f có đạo hàm riêng liên tiếp đến cấp k, kể cả cấp k, theo mọi thứ tự về các biến, và các đạo hàm riêng liên tiếp đó liên tục trên U.

  2) Ta nói rằng f **thuộc lớp** C^∞ **trên** U khi và chỉ khi f có các đạo hàm riêng liên tiếp đến cấp tùy ý, theo mọi thứ tự về các biến, và các đạo hàm riêng liên tiếp đó liên tục trên U.

Rõ ràng là f thuộc lớp C^∞ trên U khi và chỉ khi f thuộc lớp C^k trên U với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$.

- **Mệnh đề 1** Cho $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^k trên U. Khi đó $f + g$ và fg thuộc lớp C^k trên U; đặc biệt, với mọi λ thuộc $\mathbb{R}$, λf thuộc lớp C^k trên U. Nếu ngoài ra $(\forall a \in U,\ g(a) \neq 0)$ thì $\dfrac{f}{g}$ thuộc lớp C^k trên U.

Chứng minh :

Chứng minh truy hồi theo k (với $k \in \mathbb{N}^*$) bằng cách áp dụng Mệnh đề trong 12.3.2, 2)). Ta xét trường hợp tích như một thí dụ.

Tính chất này đúng với $k = 1$ (xem 12.3.2, 2), Mệnh đề). Giả thiết tính chất đó đúng với một $k \in \mathbb{N}^*$, và giả sử $f, g : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{k+1} trên U. Khi đó fg thuộc lớp C^1 trên U, và $\dfrac{\partial}{\partial x}(fg) = \dfrac{\partial f}{\partial x}g + f\dfrac{\partial g}{\partial x}$ (đối với biến kia cũng tương tự).

Vì $\dfrac{\partial f}{\partial x}, g, f, \dfrac{\partial g}{\partial x}$ thuộc lớp C^k trên U, nên giả thiết truy hồi và việc khảo sát trường hợp tổng chứng tỏ rằng $\dfrac{\partial (fg)}{\partial x}$ thuộc lớp C^k trên U ; cuối cùng thì fg thuộc lớp C^{k+1} trên U.

Ta suy ra dễ dàng kết quả đối với trường hợp $k = +\infty$.

- **Mệnh đề 2** Cho $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ, U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $\varphi(I) \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ; ta ký hiệu (theo một cách lạm dụng) $f \circ \varphi : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(\varphi(t)) \end{array}$. Nếu φ thuộc lớp C^k trên I và f thuộc lớp C^k trên U, thì $f \circ \varphi$ thuộc lớp C^k trên I.

Chứng minh :
Chứng minh truy hồi theo k ($k \in \mathbb{N}^*$).
Trường hợp $k = 1$ đã khảo sát ở 12.3.2, 3)). Giả thiết tính chất này đúng đối với một k thuộc $\mathbb{N}^*$, và giả thiết φ và f thuộc lớp C^{k+1}.
Khi đó $f \circ \varphi$ thuộc lớp C^1, và bằng cách ký hiệu $(u(t), v(t)) = \varphi(t)$, ta có (xem 12.3.2, 3)) :

$$(f \circ \varphi)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi\right) u' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi\right) v'.$$

Vì $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, φ, u', v' thuộc lớp C^k, nên giả thiết truy hồi và mệnh đề trước chứng tỏ rằng $(f \circ \varphi)'$ thuộc lớp C^k, tức là $f \circ \varphi$ thuộc lớp C^{k+1}.
Trường hợp $k = +\infty$ suy ra dễ dàng từ kết quả đối với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

12.4.3 Hoán vị các phép đạo hàm

♦ **Định lý (Định lý Schwarz)**
Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ f''_{xy} \text{ và } f''_{yx} \text{ tồn tại trên } U \\ f''_{xy} \text{ và } f''_{yx} \text{ liên tục tại } a \end{array}\right.$, thì $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$.

Chứng minh : (không thuộc chương trình)
Ta ký hiệu $(\alpha, \beta) = a$.

• $f''_{yx}(a) = (f'_y)'_x(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f'_y(\alpha + h, \beta) - f'_y(\alpha, \beta))$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \lim_{k \to 0} \left(\frac{1}{k}(f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha + h, \beta)) - \frac{1}{k}(f(\alpha, \beta + k) - f(\alpha, \beta)) \right),$$

nên chúng ta sẽ xét ánh xạ :

$$\delta : (h, k) \mapsto \frac{1}{hk}(f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta + k) + f(\alpha, \beta)),$$

Ánh xạ này xác định trên $V = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 : hk \neq 0 \text{ và } (\alpha + h, \beta + k) \in U\}$.

• Ánh xạ $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\forall t \in [0 ; 1], \quad \varphi(t) = f(\alpha + th, \beta + k) - f(\alpha + th, \beta)$$

thuộc lớp C^1 trên $[0 ; 1]$; theo định lý số gia hữu hạn (5.2.2, Tập 1), tồn tại $\theta_1 \in [0 ; 1]$ sao cho :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1) = h(f'_x(\alpha + \theta_1 h, \beta + k) - f'_x(\alpha + \theta_1 h, \beta)).$$

Sau đó xét ánh xạ $\psi : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$\forall u \in [0 ; 1], \psi(u) = f'_x(\alpha + \theta_1 h, \beta + uk)$$

liên tục trên $[0 ; 1]$ và khả vi trên $]0 ; 1[$ (vì f'_x liên tục trên U và $(f'_x)'_y$ tồn tại trên U) ; theo định lý số gia hữu hạn, tồn tại $\theta_2 \in [0 ; 1]$ sao cho :

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta_2) = k(f'_x)'_y(\alpha + \theta_1 h, \beta + \theta_2 k).$$

Vậy : $hk\delta(h, k) = \varphi(1) - \varphi(0) = h(\psi(1) - \psi(0)) = hkf''_{xy}(\alpha + \theta_1 h, \beta + \theta_2 k)$.

Ta thu được kết quả tương tự bằng cách hoán vị vai trò của x và y.

• Vì f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại a, ta suy ra : $\delta(h, k) \xrightarrow[\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}]{} f''_{xy}(a)$

và $\delta(h, k) \xrightarrow[\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}]{} f''_{yx}(a)$.

Vì (0, 0) dính với V, từ tính duy nhất của giới hạn ta suy ra :

$$f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a).$$

• **Hệ quả 1** Nếu f thuộc lớp C^2 trên một tập mở U trong $\mathbb{R}^2$, thì :

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

• **Hệ quả 2** Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^k trên V. Với mọi $l \in \{2, ..., k\}$, mọi $(i_1, ..., i_l)$ thuộc $\{1, 2\}^l$, và mọi hoán vị σ của $\{1, ..., l\}$, ta có :

$$f^{(l)}_{x_{i_1}\dots x_{i_l}} = f^{(l)}_{x_{i_{\sigma(1)}}\dots x_{i_{\sigma(l)}}}$$

Chứng minh :

Ta thu được kết quả trên bằng cách áp dụng liên tiếp Định lý Schwarz.

Nói cách khác, nếu f thuộc lớp C^k thì trong việc tính các đạo hàm riêng cấp liên tiếp cho tới cấp k, thứ tự các phép lấy đạo hàm không quan trọng. Thông thường người ta nhóm các chỉ số 1, sau đó các chỉ số 2. Chẳng hạn nếu f thuộc lớp C^7 :

$$f^{(7)}_{x_2x_2x_2x_1x_2x_1x_1} = f^{(7)}_{x_1^3x_2^4}.$$

Trong Tập 4 chúng ta sẽ thấy :

• Định lý Taylor – Young đối với các hàm số nhiều biến số thực lớp C^2,

• Việc khảo sát các C^k – vi phôi,

• Các thí dụ về phương trình đạo hàm riêng cấp hai.

Bài tập

◊ **12.4.1** *Đếm các đạo hàm cấp k có sử dụng định lý Schwarz và không sử dụng định lý đó.*

Cho $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$

a) Có bao nhiêu bộ k tạo thành bởi các phần tử của $\{1, ..., n\}$?

b) Có bao nhiêu bộ n $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ thuộc $\mathbb{N}^n$ sao cho $\alpha_1 + ... + \alpha_n = k$?

◊ **12.4.2** Giả sử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Hãy chứng minh :

a) f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$

b) f có những đạo hàm riêng cấp hai theo hai biến $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ trên $\mathbb{R}^2$ và :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0).$$

12.5 Cực trị của các hàm số hai biến số thực

Tại đây $\mathbb{R}^2$ được trang bị một trong ba chuẩn thông dụng.

12.5.1 Định nghĩa

- **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in X, f : X \to \mathbb{R}$.

  1) Ta nói rằng f có một **cực đại địa phương tại** a khi và chỉ khi :
  $$\exists r > 0,\ \forall x \in X \cap B(a\ ;\ r), f(x) \le f(a)$$
  2) Ta nói rằng f có một **cực tiểu địa phương tại** a khi và chỉ khi :
  $$\exists r > 0,\ \forall x \in X \cap B(a\ ;\ r), f(x) \ge f(a)$$
  3) Ta nói rằng f có một **cực đại chặt địa phương tại** a khi và chỉ khi :
  $$\exists r > 0,\ \forall x \in (X \cap B(a\ ;\ r)) - \{a\}, f(x) < f(a).$$
  4) Ta nói rằng f có một **cực tiểu chặt địa phương tại** a khi và chỉ khi :
  $$\exists r > 0,\ \forall x \in (X \cap B(a\ ;\ r)) - \{a\}, f(x) > f(a).$$
  5) Ta nói rằng f có một **cực trị địa phương tại** a khi và chỉ khi f có cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương tại a.

  6) Ta nói rằng f có một **cực trị chặt địa phương tại** a khi và chỉ khi f có cực đại chặt địa phương hay cực tiểu chặt địa phương tại a.

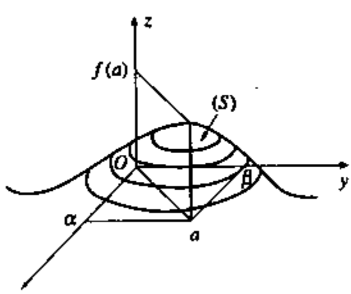
So sánh với các định nghĩa ở 5.3.2, Tập 1, ta thấy : ở Tập 1 thì tập nguồn là một tập con của R, còn ở đây là một tập con của $\mathbb{R}^2$.

Trong một số tài liệu khác ta cũng gặp tính từ "tương đối" thay cho "địa phương".

THÍ DỤ :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x| + |y|$ có một cực tiểu chặt địa phương tại (0, 0)

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x|$ có cực tiểu địa phương tại (0, 0), nhưng không có cực tiểu chặt địa phương tại (0, 0).



Ý nghĩa hình học

Đối với một hàm số $f : X \to \mathbb{R}$, thì sự tồn tại một cực đại địa phương (chẳng hạn) tại $a = (\alpha, \beta)$ có nghĩa là trong lân cận của a, mặt (S) có phương trình $z = f(x, y)$ nằm dưới mặt phẳng có phương trình $z = f(\alpha, \beta)$.

NHẬN XÉT : Khi thay f bằng $-f$ thì hai việc khảo sát một cực tiểu địa phương hay một cực đại địa phương, việc này quy về việc kia.

12.5.2 Khảo sát bằng đạo hàm cấp một

♦ **Định lý** Giả sử $U \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in U, f : U \to \mathbb{R}$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} U \text{ là một tập mở trên } \mathbb{R}^2 \\ f \text{ có cực trị địa phương tại } a \\ \text{các đạo hàm riêng cấp một tại } a \text{ tồn tại} \end{array}\right|$, thì khi đó

$f_x'(a) = f_y'(a) = 0$.

Chứng minh :

Ta ký hiệu $(\alpha, \beta) = a$.

Ánh xạ bộ phận $f(., \beta)$ xác định trong lân cận của α, có cực trị địa phương tại α, và khả vi tại α. Theo 5.3.2, Tập 1, Định lý) ta suy ra $(f(., \beta))'(\alpha) = 0$, tức là $f_x'(a) = 0$. Tương tự với biến kia.

NHẬN XÉT :

1) Không được bỏ sót bất kỳ điều kiện nào trong ba điều kiện nêu trong giả thiết. Định lý trên đây sẽ bị sai nếu U không phải là tập mở, hoặc nếu một trong các đạo hàm riêng cấp một của f tại a không tồn tại. Chẳng hạn :

• $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ có một cực đại địa phương tại (1, 1), và tồn tại các đạo hàm riêng cấp một tại (1, 1) ; tuy nhiên $f_x'(1, 1) = 2 \neq 0$, $f_y'(1, 1) = 2 \neq 0$.

Thực vậy (xem 12.3), chúng ta chỉ định nghĩa các đạo hàm riêng cấp 1 tại a của một hàm số f trong trường hợp f được xác định ít nhất trên một tập mở chứa a.

• $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x| + |y|$ có một cực tiểu địa phương tại (0, 0), và không tồn tại các đạo hàm riêng cấp một của f tại (0, 0).

2) Định lý trên đây chỉ nêu lên một điều kiện cần. Nếu U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$ và nếu các đạo hàm riêng của f tại a tồn tại và bằng 0, thì ta cũng không thể suy ra rằng f có cực trị địa phương tại a. Chẳng hạn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ và $f_x'(0, 0) = f_y'(0, 0) = 0$; tuy nhiên f không có cực trị địa phương tại (0, 0), vì :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, 0) > f(0, 0) \\ \forall y \in \mathbb{R}^*, f(0, y) < f(0, 0). \end{cases}$$

♦ **Định nghĩa** Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $a \in U, f : U \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng a là một **điểm dừng đối với** f (hay : **của** f) khi và chỉ khi các đạo hàm riêng cấp một của f tại a tồn tại và bằng không.

Định lý trên chỉ ra rằng, nếu f có các đạo hàm riêng cấp một trên U, thì khi đó các điểm cực trị địa phương của f thuộc số các điểm dừng của f. Trong thực tế, ta sẽ giải hệ hai phương trình hai ẩn số (x, y) : $\begin{cases} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0 \end{cases}$

Trong Tập 4 chúng ta sẽ khảo sát sâu hơn vấn đề này bằng cách dùng các đạo hàm riêng cấp hai, cho phép thu được một điều kiện đủ để một hàm số có cực trị địa phương.

12.5.3 Cực trị toàn cục

- **Định nghĩa** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in X, f : X \to \mathbb{R}$.
  1) Ta nói rằng f **có cực đại toàn cục tại** a khi và chỉ khi :
  $$\forall x \in X, f(x) \le f(a).$$
  2) Ta nói rằng f **có cực tiểu toàn cục tại** a khi và chỉ khi :
  $$\forall x \in X, f(x) \ge f(a).$$
  3) Ta nói rằng f **có cực trị toàn cục tại** a khi và chỉ khi f có cực đại toàn cục hay cực tiểu toàn cục tại a.

THÍ DỤ :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ có cực tiểu toàn cục tại $(0, 0)$.

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ không có cực trị toàn cục ; thực vậy f không bị chặn trên cũng không bị chặn dưới, vì $f(x, x) = x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ và $f(x, -x) = -x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

NHẬN XÉT : Nếu f có cực đại (tương ứng : cực tiểu) toàn cục tại a, thì tại a f có cực đại (tương ứng : cực tiểu) địa phương. Mệnh đề đảo sai ; chẳng hạn $f : \mathbb{R} \to \mathrm{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^4 - y^4$ có cực tiểu địa phương tại $(0, 0)$, vì với mọi (x, y) thuộc $[-1 ; 1]^2$, $f(x, y) = x^2(1 - x^2) + y^2(1 - y^2) \ge 0 = f(0, 0)$, nhưng không có cực tiểu toàn cục (vì $f(x, 0) = x^2 - x^4 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$) .

Bài tập

◊ **12.5.1** Xác định các cực trị địa phương và toàn cục của các ánh xạ f với tập nguồn và ảnh $f(x, y)$ của (x, y) được cho sau đây :

a) R^2, $x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$ b) R^2, $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$

c) R^2, $(x + y)^2 + x^4 + y^4$ d) R^2, $2x^4 - 3x^2y + y^2$ e) R^2, $x^2y + \ln(1 + y^2)$.

◊ **12.5.2** Xác định các cực trị toàn cục của $f : X \to \mathrm{R}$ xác định như sau :

$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$, trong đó $X = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3\}$

◊ **12.5.3** Cho $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $(x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$; chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên R^2, có một điểm dừng và chỉ một, tại đó f có cực tiểu địa phương, nhưng f không có cực tiểu toàn cục.

(Xem : Tạp chí Mathématiques Spéciales, năm thứ 101, số 8, trang 443).

12.6 Hàm ẩn

12.6.1 Bài toán hàm ẩn

1) Xác định vấn đề

Giả sử E, F, G là ba tập hợp, γ là một phần tử xác định thuộc G, $f : E \times F \to G$ là một ánh xạ. Bài toán hàm ẩn là vấn đề "mô tả", với mỗi x thuộc E, tập hợp $\{y \in F : f(x, y) = \gamma\}$. Như vậy đó là việc giải một phương trình một ẩn (y) và chứa một tham số (x). Nếu với mỗi x thuộc E mà phương trình $f(x, y) = \gamma$ (có ẩn số $y \in F$) có một và chỉ một nghiệm, thì ta nói rằng hệ thức $f(x, y) = \gamma$ **xác định (không tường minh)** y **theo** x: tồn tại một ánh xạ $\varphi : E \to F$, duy nhất, sao cho : $\forall x \in E, f(x, \varphi(x)) = \gamma$; φ gọi là một **hàm ẩn**.

Trong lần khảo sát sơ bộ này chúng ta xét trường hợp khi E là một tập con của $\mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $\gamma = 0$, f thỏa mãn một số giả thiết sẽ xác định.

Trong tập 4 chúng ta sẽ nghiên cứu trường hợp E, F, G là ba $\mathbb{R}$ – không gian vectơ với số chiều hữu hạn.

2) **Một thí dụ đơn giản**

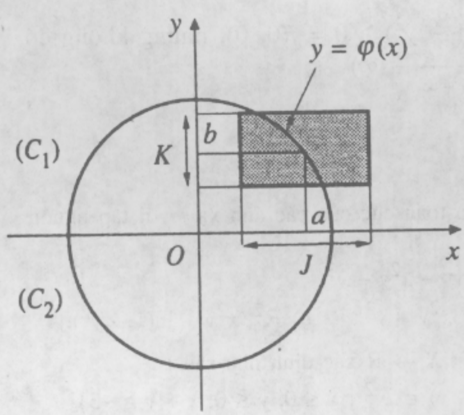
Xét $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.

Với mỗi x thuộc $\mathbb{R}$ ta ký hiệu $\phi(x) = \{y \in \mathbb{R} : f(x, y) = 0\}$. Ta có ngay :

$$\phi(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{nếu } |x| > 1 \\ \{0\} & \text{nếu } |x| = 1 \\ \{-\sqrt{1-x^2}\,,\ \sqrt{1-x^2}\} & \text{nếu } |x| < 1 \end{cases}$$

Đường cong $(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; f(x, y) = 0\}$ (đường tròn tâm O và bán kính 1) có thể tách thành hai "đoạn" (nửa đường tròn) :

$$(C_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; f(x, y) = 0 \text{ và } y \geq 0\}$$
$$(C_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; f(x, y) = 0 \text{ và } y \leq 0\}$$



Đường cong (C) không phải là đồ thị biểu diễn một hàm số một biến số thực. Nhưng, với mọi (a, b) thuộc (C) sao cho $b \neq 0$, tồn tại hai khoảng mở J, K, có tâm theo thứ tự là a, b, sao cho $(C) \cap (J \times K)$ là đường biểu diễn của một hàm số, đó là hàm số $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ (tương ứng $x \mapsto -\sqrt{1 - x^2}$) nếu $b > 0$ (tương ứng : $b < 0$).

Ở đây chúng ta đã có thể biểu thị tường minh $\varphi : x \mapsto y$ trong một lân cận.

Trong §12.6.2 chúng ta sẽ làm rõ các điều kiện đủ sao cho trong lân cận một điểm (a, b) thỏa mãn $f(a, b) = 0$, thì hệ thức $f(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn y của đối số x.

12.6.2 Trường hợp hai biến thực liên hệ với nhau bằng một hệ thức

◆ **Định lý** **(Định lý hàm ẩn)**

Giả sử U là một tập mở trong R^2, $A = (a, b) \in U, f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ.

Ta giả thiết : $\begin{cases} f(A) = 0 \\ f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0 \end{cases}$

Khi đó tồn tại hai khoảng mở J, K có tâm theo thứ tự là a và b sao cho $J \times K \subset U$ và thỏa mãn điều kiện sau đây : tồn tại một và chỉ một ánh xạ $\varphi : J \to K$, thuộc lớp C^1, sao cho :

$$\forall (x, y) \in J \times K, (f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)).$$

Chứng minh : (không thuộc chương trình)

Ta giả thiết chẳng hạn $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) > 0$ (trường hợp $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) < 0$ được quy về trường hợp này bằng cách xét $-f$ thay cho f).

• **Xác định** J, K, φ

Vì $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên U, và do $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) > 0$, nên tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{R}_+^*)^2$ sao cho với ký hiệu $V = [a - \alpha\ ;\ a + \alpha] \times [b - \beta\ ;\ b + \beta]$ ta có :

$$\begin{cases} V \subset U \\ \forall (x, y) \in V, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0 \end{cases}$$

Với mọi x_0 thuộc $[a - \alpha\ ;\ a + \alpha]$, ánh xạ bộ phận $f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)$ thuộc lớp C^1 trên $[b - \beta\ ;\ b + \beta]$ và :

$$\forall y \in [b - \beta\ ;\ b + \beta], (f(x_o, .))'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y) > 0\ ;$$

Vậy ánh xạ $f(x_0, .)$ này tăng nghiêm ngặt trên $[b - \beta\ ;\ b + \beta]$.

Đặc biệt, $f(a, .)$ tăng nghiêm ngặt trên $[b - \beta\ ;\ b + \beta]$; vì $f(a, b) = 0$ và $b \in\ ]b - \beta\ ;\ b + \beta[$ nên suy ra : $f(a, b - \beta) < 0$ và $f(a, b + \beta) > 0$.

Do $f(., b - \beta)$ và $f(., b + \beta)$ liên tục trên U, nên ta suy ra rằng tồn tại $\alpha_1 \in \mathrm{R}_+^*$ sao cho :

$$\begin{cases} [a - \alpha_1\ ;\ a + \alpha_1] \times [b - \beta\ ;\ b + \beta] \subset U \\ \forall x \in [a - \alpha_1\ ;\ a + \alpha_1], \begin{cases} f(x, b - \beta) < 0 \\ f(x, b + \beta) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ký hiệu $\alpha' = \mathrm{Min}(\alpha, \alpha_1)$ (> 0) và giả sử $x_0 \in [a - \alpha'\ ;\ a + \alpha']$. Khi đó ta có bảng biến thiên của $f(x_0, .)$ trên $[b - \beta\ ;\ b + \beta]$:

y	$b - \beta$	y_o	$b + \beta$
$f(x_o, .)$	< 0	0	> 0

Tính liên tục của $f(x_0, .)$ trên khoảng $[b - \beta ; b + \beta]$, và tính đơn điệu nghiêm ngặt của $f(x_0, .)$ trên $[b - \beta ; b + \beta]$ theo thứ tự chứng tỏ sự tồn tại và tính duy nhất của y_0 thuộc $[b - \beta ; b + \beta]$ sao cho $f(x_0, y_0) = 0$.

Bằng cách ký hiệu $J =]a - \alpha' ; a + \alpha'[$ và $K =]b - \beta ; b + \beta[$, ta đã có $J \times K \subset U$ và $\forall x_0 \in J, \exists ! y_0 \in K, f(x_0, y_0) = 0$.

Ta ký hiệu $\varphi : J \to K$ là ánh xạ cho ứng với mỗi x_0 thuộc J với phần tử y_0 duy nhất thuộc K sao cho $f(x_0, y_0) = 0$.

- **Tính liên tục của φ**

Giả sử $x_0 \in [a - \alpha' ; a + \alpha']$ và $y_0 = \varphi(x_0)$. Ta có thể thực hiện việc khảo sát trên đây đối với (x_0, y_0) thay vì (a, b) : tồn tại $(\alpha'_{x_o}, \beta'_{x_o}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho :

$$\begin{cases} [x_0 - \alpha'_{x_0} ; x_0 + \alpha'_{x_0}] \times [y_0 - \beta_{x_0} ; y_0 + \beta_{x_0}] \subset U \\ \text{Với mọi } x \text{ thuộc } [x_o - \alpha'_{x_0} ; x_o + \alpha'_{x_0}], \text{ ánh xạ } f(x, .) \text{ tăng nghiêm ngặt} \\ \text{trên } [y_o - \beta x_o ; y_o + \beta_{x_0}] \text{ và chuyển từ một giá trị} < 0 \text{ sang một giá trị} > 0. \end{cases}$$

Cho $\varepsilon \in]0 ; \beta_{x_o}]$; vậy ta có $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ và $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$. Vì $f(., y_0 - \varepsilon)$ và $f(., y_0 + \varepsilon)$ liên tục trên $[x_o - \alpha'_{x_o} ; x_o + \alpha'_{x_o}]$, nên tồn tại $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho :

$$\forall x \in [x_0 - \eta ; x_0 + \eta], \begin{cases} f(x, y_o - \varepsilon) < 0 \\ f(x, y_o + \varepsilon) > 0 \end{cases}$$

Theo định nghĩa của $\varphi(x)$ khi đó ta có : $y_0 - \varepsilon < \varphi(x) < y_0 + \varepsilon$, tức là $|\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$. Như vậy ta đã chứng tỏ rằng : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in J$, $(|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon)$, nghĩa là : φ liên tục trên J.

- **φ thuộc lớp C^1 trên J**

Cho $x_0 \in J$ và $h \in \mathbb{R}$ sao cho $x_0 + h \in J$. Bằng cách áp dụng định lý số gia hữu hạn (Tập 1, 5.2.2), ta thấy rằng tồn tại θ_1 thuộc $[0 ; 1]$ và c nằm giữa $\varphi(x_0)$ và $\varphi(x_0 + h)$ sao cho :

$$f(x_0 + h, \varphi(x_0)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = h(f(., \varphi(x_0)))'(x_0 + \theta_1 h) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_o + \theta_1 h, \varphi(x_o))$$

và $f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0 + h, \varphi(x_0)) = (\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0))f(x_0 + h, .)'(c)$

$$= (\varphi(x_o + h) - \varphi(x_o)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_o + h, c).$$

Như ta đã thấy ở phần đầu của phép chứng minh :

$$\begin{cases} J \times K \subset U \\ \forall (x, y) \in J \times K, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0 \end{cases}$$

Vì ngoài ra ta còn có $f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) = 0$ và $f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$, nên ta suy ra :

$$\frac{\varphi(x_o + h) - \varphi(x_o)}{h} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o + \theta_1 h, \varphi(x_o))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o + h, c)}$$

Cuối cùng vì $\theta_1 \in [0 ; 1]$ và c nằm giữa $\varphi(x_0)$ và $\varphi(x_0 + h)$, vì φ liên tục tại x_0, vì $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại $(x_0, \varphi(x_0))$, và vì $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, \varphi(x_o)) \neq 0$, nên ta suy ra :

$$\frac{\varphi(x_o+h)-\varphi(x_o)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o,\ \varphi(x_o))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o,\ \varphi(x_o))}$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng φ khả vi tại x_o và : $\varphi'(x_o) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o,\ \varphi(x_o))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o,\ \varphi(x_o))}$.

Vì φ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục, nên công thức trên cũng chứng tỏ rằng φ' liên tục, tức là φ thuộc lớp C^1 trên J.

NHẬN XÉT :

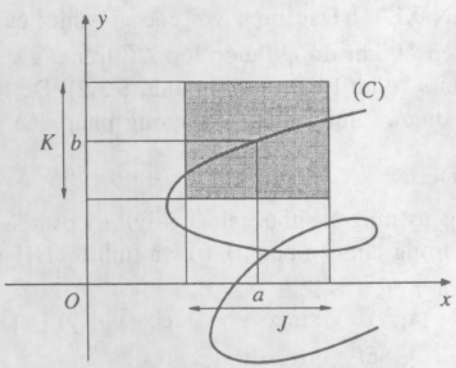
1) Biết rằng φ thuộc lớp C^1, có thể tìm lại công thức của $\varphi'(x)$ bằng cách đạo hàm (theo x) trong hệ thức $f(x, \varphi(x)) = 0$, ta được :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))\,1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

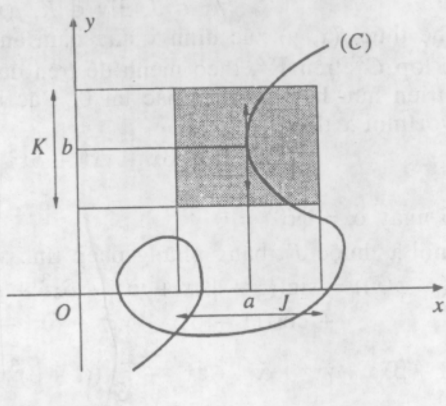
2) Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$ và $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$ thì ta có thể hoán vị các vai trò của x và y trong định lý trên đây.

Ý nghĩa hình học

1) Với các giả thiết trong định lý hàm ẩn, giao của đường cong $(C) = \{(x, y) \in U\ ;\ f(x, y) = 0\}$ và $J' \times K$ là đường biểu diễn của một hàm φ thuộc lớp C^1.



2) Trong định lý hàm ẩn ta hãy thay $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0$ bằng $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$ và $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$ (các giả thiết khác giữ nguyên). Bằng cách hoán vị các vai trò của x và y, ta thấy rằng đường cong (C) có tiếp tuyến song song với $(y'y)$ tại $A(a, b)$.



Vậy, nếu một đường cong (C) với phương trình $f(x, y) = 0$, trong đó f thuộc lớp C^1 trong lân cận một điểm $A(a, b)$ thuộc $\mathbb{R}^2$ và nếu $f(A) = 0$ và $\Bigg(\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$

hoặc $\frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0\Big)$, thì khi đó (C) có tiếp tuyến tại A với phương trình Descartes là:

$$(x-a)\,\frac{\partial f}{\partial x}(A) + (y-b)\,\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

♦ **Mệnh đề** Với các giả thiết và các ký hiệu trong định lý hàm ẩn, nếu f thuộc lớp C^k trên U ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), thì φ thuộc lớp C^k trên J'.

Chứng minh :

Quy nạp theo k ($k \in \mathbb{N}^*$).

Tính chất đó đúng với $k = 1$ (định lý hàm ẩn).

Giả thiết nó đúng với một k thuộc $\mathbb{N}^*$ và (với các giả thiết của định lý hàm ẩn) giả thiết f thuộc lớp C^{k+1} trên U. Theo giả thiết quy nạp, φ thuộc lớp C^k trên J'. Vì

$$\forall x \in J',\ \varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ \varphi(x))}$$

và vì φ, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ đều thuộc lớp C^k, nên ta suy ra (bằng phép hợp và phép chia hàm số) rằng φ' thuộc lớp C^k trên J', tức là φ thuộc lớp C^{k+1} trên J'.

Trường hợp $k = +\infty$ suy ra dễ dàng từ kết quả trên.

NHẬN XÉT : Đặc biệt, với các giả thiết của định lý hàm ẩn và nếu f thuộc lớp C^∞ trên U, khi đó φ thuộc lớp C^∞ trên J', suy ra φ có khai triển hữu hạn tới mọi bậc tại a (định lý Taylor–Young, 8.3.2). Để tính khai triển hữu hạn của φ, phương pháp thường dùng nhất là phương pháp "hệ số bất định".

THÍ DỤ :

Chứng tỏ rằng hệ thức $\sin(x+y) + \cos(x-y) - 1 = 0$ xác định y như hàm ẩn của x trong lân cận của $(0, 0)$, và tính $\mathrm{KTHH}_4(0)$ của hàm ẩn $\varphi : x \to y$ nhận được.

Ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2$,
$(x, y) \to \sin(x+y) + \cos(x-y) - 1$

$f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$.

Theo định lý hàm ẩn, tồn tại hai khoảng mở J, K có tâm tại O sao cho :

$$\forall x \in J,\ \exists! y \in K,\ f(x, y) = 0.$$

Vậy hệ thức $f(x, y)$ xác định y như hàm ẩn của x trong lân cận của $(0, 0)$. Vì f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^2$, theo mệnh đề trên đây, φ thuộc lớp C^∞ trên J' ; vậy φ có khai triển hữu hạn tới mọi bậc tại 0. Đặc biệt, tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5$ sao cho với mọi x thuộc J'

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

Ta có ngay $\alpha = \varphi(0) = 0$.

Với mọi x thuộc J', bằng những phép tính về khai triển hữu hạn, ta có :

$$\begin{aligned} 0 = f(x, \varphi(x)) &= \sin((1+\beta)x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + o(x^4)) \\ &\quad + \cos((1-\beta)x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \varepsilon x^4 + o(x^4)) - 1 \\ &= (1+\beta)\,x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 - \frac{1}{6}\,((1+\beta)^3 x^3 + 3(1+\beta)^2 \gamma x^4) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\left((1-\beta)^2x^2-2\gamma(1-\beta)x^3+(\gamma^2-2(1-\beta)\delta)x^4\right)+\frac{1}{24}(1-\beta)^4x^4+o(x^4),$$

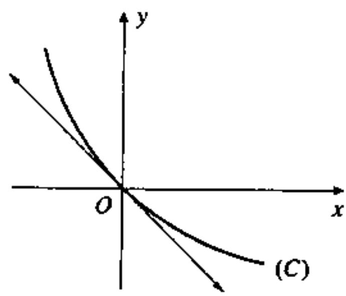
từ đó do tính duy nhất của $KTHH_4(0)$ của hàm hằng không, ta suy ra :

$$\begin{cases} 1+\beta=0 \\ \gamma-\frac{1}{2}(1-\beta)^2=0 \\ \delta-\frac{1}{6}(1+\beta)^3+\gamma(1-\beta)=0 \\ \varepsilon-\frac{1}{2}(1+\beta)^2\gamma-\frac{1}{2}(\gamma^2-2(1-\beta)\delta)+\frac{1}{24}(1-\beta)^4=0 \end{cases}$$

Ta suy ra giá trị các hệ số theo "bậc thang" : $\beta=-1$, $\gamma=2$, $\delta=-4$, $\varepsilon=\frac{28}{3}$.

Cuối cùng ta có : $\varphi(x)=-x+2x^2-4x^3+\frac{28}{3}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$.

NHẬN XÉT : Nói chung, khi đã có một khai triển hữu hạn của φ tại a sẽ cho phép mô tả dáng điệu trong lân cận của (a, b) của đường cong (C) có phương trình $f(x, y) = 0$. Trong thí dụ trên, (C) đi qua O, tiếp tuyến tại O với (C) chính là đường phân giác thứ hai, và (C) hướng phía lõm (trong lân cận của O) về phía các y dương.



Dáng điệu của (C) trong lân cận của $(0, 0)$

Bài tập

◊ **12.6.1** Chứng minh rằng hệ thức nêu ra dưới đây xác định y như hàm ẩn của x trong lân cận của cặp (a, b) ghi bên, và tính khai triển hữu hạn đến bậc n ghi sau đó, trong lân cận của a, của hàm số ẩn $\varphi : x \mapsto y$:

a) $x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$, $(0, 1)$, 3 b) $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + y = 0$, $(0, 0)$, 5

c) $xy^4 - x^3 + y = 0$, $(0, 0)$, 17 d) $y\ln x + x\ln y - \ln 2 = 0$, $(1, 2)$, 2

e) $xe^y + ye^x - 1 = 0$, $(0, 1)$, 3 f) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, $(1, 0)$, 3

g) $\text{Arctan}(xy) - e^{x+y} + 1 = 0$, $(0, 0)$, 3.

◊ **12.6.2** Cho các biến thực x và y, liên hệ với nhau qua hệ thức $e^{x-y} = 1 + x + y$, "dẫn" tới 0 ; chứng minh rằng khi đó $\frac{y}{x^2}$ có giới hạn hữu hạn ; tính giới hạn đó.

◊ **12.6.3** Chứng minh rằng hàm ẩn $\varphi : x \to y$, xác định bởi $-x + 2y + e^x - e^y = 0$ trong lân cận của $(0, 0)$, có một cực đại địa phương chặt tại 0.

◊ **12.6.4** Chứng minh rằng hệ thức sau đây xác định y như hàm ẩn của x trên $\mathbb{R}$, và ánh xạ $\varphi : x \mapsto y$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$:

a) $y^3 + x^2y - e^x = 0$

b) $e^{x+y} - x + y = 0$

c) $x^2 - x + y + \sin y = 0$.

12.7 Dạng vi phân

Có thể mở rộng dễ dàng việc khảo sát trên đây đối với các hàm số hai biến số thực cho các hàm số ba biến số thực. Trong việc khảo sát về các dạng vi phân và Giải tích vectơ, ta sẽ giả thiết việc mở rộng đó đã được thực hiện.

12.7.1 Định nghĩa

- **Các định nghĩa**

1) Trường hợp hai biến số thực
Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$. **Dạng vi phân trên** U là mọi ánh xạ $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ sao cho tồn tại hai ánh xạ $P, Q : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U thỏa mãn :
$$\forall (x, y) \in U, \omega(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

2) Trường hợp ba biến số thực
Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^3$. **Dạng vi phân trên** U là mọi ánh xạ $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ sao cho tồn tại ba ánh xạ $P, Q, R : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U thỏa mãn :
$$\forall (x, y, z) \in U, \omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

Ta nhắc lại rằng (12.3.2, 2)) (chẳng hạn đối với trường hợp hai biến số thực) $\mathrm{d}x$ chỉ ánh xạ tuyến tính $\mathrm{d}x : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (\ln k) \mapsto h \end{array}$; $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ chỉ tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ đến $\mathbb{R}$.

12.7.2 Dạng vi phân đúng

- **Định nghĩa**

Cho U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$ và ω là một dạng vi phân trên U. Ta nói rằng ω là **dạng vi phân đúng trên** U (hoặc : ω **có nguyên hàm trên** U) khi và chỉ khi tồn tại $F : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U sao cho :
$$\forall (x, y) \in U, \mathrm{d}_{(x, y)}F = \omega(x, y)$$
Một ánh xạ F như vậy, nếu tồn tại, được gọi là **một nguyên hàm của** ω **trên** U.
Đối với trường hợp ba biến số định nghĩa tương tự.

Với các hàm thành phần P, Q của ω :
$$\forall (x, y) \in U, \omega(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$
thì hệ thức $\mathrm{d}_{(x, y)}F = \omega(x, y)$ tương đương với
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \end{cases}$$
Trong các trường hợp đơn giản ta có thể thấy ngay một dạng vi phân hiển nhiên là dạng vi phân đúng.

THÍ DỤ :

- $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$
- $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(xy)$
- $\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right)$

Để tính nguyên hàm của một dạng vi phân đúng, xem 12.7.4, 1) dưới đây. Giả sử ω có một nguyên hàm F trên U. Các hệ thức trên đây chứng tỏ rằng $\frac{\partial F}{\partial x}$ và $\frac{\partial F}{\partial y}$ thuộc lớp C^1, tức là F thuộc lớp C^2 trên U.

Theo định lý Schwarz (12.4.3, trang 194), ta suy ra :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

hệ thức này sẽ dẫn đến việc khảo sát trong §12.7.3 sau đây.

NHẬN XÉT : Trong Tập 4 ta sẽ thấy là, nếu ω là dạng vi phân đúng trên một tập mở "liên thông", thì khi đó mọi nguyên hàm của ω chỉ sai khác nhau bởi những hằng.

12.7.3 Dạng vi phân đóng

◆ **Định nghĩa 1**

1) Trường hợp hai biến số thực

Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$ và ω là một dạng vi phân trên U, xác định bởi

$$\forall (x, y) \in U,\ \omega(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

Ta nói rằng ω **đóng trên** U khi và chỉ khi : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Trường hợp ba biến số thực

Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^3$ và ω là một dạng vi phân trên U xác định bởi :

$$\forall (x, y, z) \in U,\ \omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

Ta nói rằng ω **đóng trên** U khi và chỉ khi :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Từ kết quả ở cuối 12.7.2, bằng cách áp dụng định lý Schwarz, ta có thể phát biểu :

◆ **Định lý 1**

Mọi dạng vi phân đúng đều đóng.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$ (hay $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$).

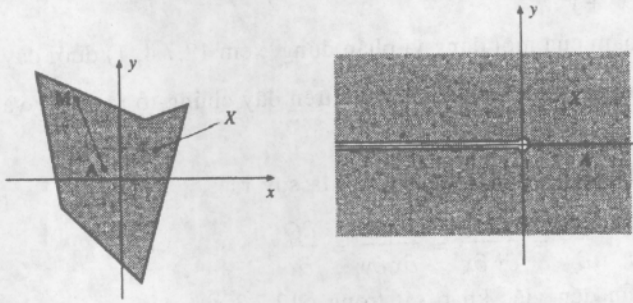
1) Giả sử $A \in X$; ta nói rằng X là **hình sao đối với** A khi và chỉ khi :

$$\forall M \in X, [AM] \subset X,$$

trong đó $[AM]$ chỉ đoạn nối A với M, tức là :

$$[AM] = \{P \in \mathbb{R}^3 : \exists\lambda \in [0\,;\,1], \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AM}\}.$$

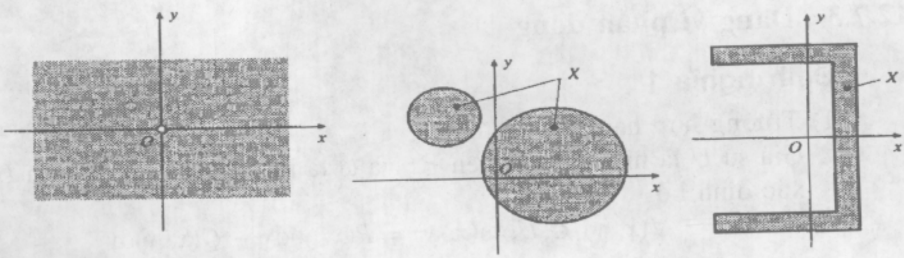
2) Ta nói rằng X là **hình sao** khi và chỉ khi tồn tại $A \in X$ sao cho X là hình sao đối với A.



$X = \mathbf{R}^2 - (\mathbb{R} - x\{0\})$

X là hình sao đối với A $\qquad$ X là hình sao đối với $A(1, 0)$

Thí dụ về các tập con hình sao của $\mathbf{R}^2$



$X = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Thí dụ về các tập con của $\mathbf{R}^2$ không phải là hình sao

Một tập con X của $\mathbb{R}^3$ (hoặc của $\mathbb{R}^2$) được gọi là **lồi** khi và chỉ khi :

$$\forall(M, N) \in X^2, [MN] \subset X.$$

Rõ ràng một tập con X lồi khi và chỉ khi nó là hình sao đối với mọi điểm của nó. Đặc biệt, mọi tập con lồi (không rỗng) đều là hình sao. Nhưng mệnh đề đảo sai (xem hai lược đồ đầu tiên).

◆ **Định lý 2 (Định lý Poincaré)**

Giả sử U là một tập mở hình sao trên $\mathbb{R}^3$ (hay $\mathbb{R}^2$) và ω là một dạng vi phân trên U. Điều kiện cần và đủ để ω là một dạng vi phân đúng trên U là ω đóng trên U.

Chứng minh :

Trong Định lý 1, ta đã chứng minh điều kiện cần. Ở đây chúng ta sẽ thừa nhận mệnh đề đảo (đóng trên tập mở hình sao $\Rightarrow$ dạng vi phân đúng); mệnh đề này sẽ được chứng minh trong Tập 4 bằng cách áp dụng định lý về đạo hàm dưới dấu tích phân.

12.7.4 Lược đồ khảo sát một dạng vi phân, các thí dụ

Cho ω là một dạng vi phân trên một tập mở U của R^3 (hay của R^2), thông thường ω được cho tường minh bằng các hệ tử :

$\forall(x, y, z) \in U$, $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$.

1) Nếu ω đóng trên U và nếu U là hình sao, thì định lý Poincaré chứng tỏ rằng ω có nguyên hàm. Vậy chúng ta đi đến vấn đề tìm các ánh xạ $F : U \to \mathrm{R}$ thuộc lớp C^1 trên U sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = R & (3) \end{cases}$$

Vấn đề ở đây là giải một "hệ tuyến tính những phương trình đạo hàm riêng, cấp một, với hệ số hằng". Trên thực tế người ta "tích phân" chẳng hạn (1) đối với x, và do đó thu được (nếu như x biến thiên trên một khoảng) :

$$F(x, y, z) = \int P(x, y, z)\mathrm{d}x + G(y, z)$$

trong đó G là một ánh xạ tùy ý thuộc lớp C^1 trên

$$\{(y, z) \in \mathrm{R}^2 : \exists x \in \mathrm{R}, (x, y, z) \in U\}.$$

Thường thì ta có thể tính được (trên thực tế) các tích phân $\int P(x, y, z)\mathrm{d}x$.

Thế vào (2) ta sẽ quy về một phương trình $\dfrac{\partial G}{\partial y} = S$, trong đó S là một hàm số (của hai biến số : y, z) mà ta sẽ tính. Ta "tích phân" đẳng thức này theo y, và do đó thu được (nếu như y biến thiên trên một khoảng) :

$G(y, z) = \int S(y, z)\mathrm{d}y + H(z)$, trong đó H là một ánh xạ thuộc lớp C^1.

Cuối cùng thế vào (3) ta sẽ quy về việc giải $H' = T$, trong đó T đã biết (hàm một biến z), từ đó suy ra H, rồi F.

THÍ DỤ : Khảo sát dạng vi phân ω xác định trên R^2 bởi :

$$\omega(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\mathrm{d}y.$$

Gọi các hệ tử của ω là P, Q, ta có :

$$\forall(x, y) \in \mathrm{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 3(x^2 + y^2) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Vậy ω đóng trên R^2.

Do R^2 là một tập mở hình sao, ta suy ra (theo định lý Poincaré) rằng ω là dạng vi phân đúng trên R^2. Bằng một phép tính sơ cấp ta sẽ chứng tỏ rằng ω có nguyên hàm trên R^2 và sẽ xác định được các nguyên hàm đó, do đó thật ra cũng không cần phải áp dụng định lý Poincaré cho thí dụ này.

Giả sử $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1; F là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}^2$ của ω khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2x + y^3 (1) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 2y (2) \end{cases}$$

Hệ thức (1) tương đương với sự tồn tại của một ánh xạ $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = \int (3x^2y + 2x + y^3) dx + G(y) = x^3y + x^2 + y^3x + G(y).$$

Thế vào (2) :

$$(2) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + 3y^2x + G'(y) = x^3 + 3xy^2 - 2y \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, G'(y) = -2y$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, G(y) = -y^2 + C.$$

Cuối cùng, ω là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^2$ và các nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^2$ là các ánh xạ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^3y + y^3x + x^2 - y^2 + C$$

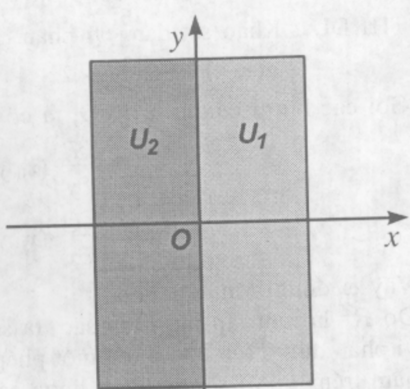
2) Nếu ω đóng trên U và nếu U không là hình sao, thì có thể là ω không phải là dạng vi phân đúng trên U. Trên thực tế ta sẽ phủ U bằng hợp của một số hữu hạn những tập mở hình sao (nếu có thể) ; hoặc là ta sẽ xác định một số hữu hạn các tập mở hình sao mà hợp chính là U bớt đi một "đường cong đơn" (thường là một đường thẳng hay nửa đường thẳng), sau đó ta sẽ cố gắng ghép nối các nguyên hàm dọc theo đường cong này.

Dưới đây (13.1.4) ta sẽ thấy rằng nếu như ω là dạng vi phân đúng trên U, và nếu Γ là một đường đi kín (hoặc : một "vòng") từng khúc thuộc lớp C^1 và bao hàm trong U, thì $\int_\Gamma \omega = 0$ (tích phân đường); bằng cách chuyển sang mệnh đề phản đảo kết quả này sẽ cho phép ta chứng minh rằng một số dạng vi phân, tuy đóng, nhưng không phải là dạng vi phân đúng.

THÍ DỤ :

Khảo sát dạng vi phân ω xác định trên $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ bởi :

$$\forall (x, y) \in U, \omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$



• Ký hiệu các hệ tử của ω là P, Q, ta có :

$$\forall (x, y) \in U, \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

vậy ω đóng trên U.

• Ta không thể áp dụng định lý Poincaré vì U không là hình sao. Ký hiệu $U_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ và $U_2 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$; vì ω đóng trên U, nên rõ ràng ω đóng trên U_1 và U_2 (thực ra đó là các thu hẹp của ω trên U_1 và U_2).

Vì U_1 và U_2 đều là hình sao (vì lồi) nên ω là dạng vi phân đúng trên U_1 và trên U_2 (định lý Poincaré).

Bây giờ ta sẽ xác định tường minh các nguyên hàm của ω trên U_1 và trên U_2.

• Một ánh xạ $F_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U_1, là một nguyên hàm của ω trên U_1 khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in U_1, \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} & (1) \\ \forall (x, y) \in U_1, \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

Hệ thức (1) tương đương với sự tồn tại của một ánh xạ $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in U_1, F_1(x, y) = \int -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + G_1(y) = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} + G_1(y).$$

Ở đây ta lưu ý đến lợi ích của việc bớt đi khỏi U đường thẳng $(y'y)$ đã cho phép ta chia cho x. Đem thế vào (2) :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in U_1, \frac{x}{x^2+y^2} + G_1'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, G_1'(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, G_1(y) = C_1. \end{aligned}$$

Như thế các nguyên hàm của ω trên U_1 là các ánh xạ

$F_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Tương tự, các nguyên hàm của ω trên U_2 là những ánh xạ $F_2 : U_2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$

• Nếu ω có một nguyên hàm F trên U, thì khi đó các thu hẹp của F trên U_1 và trên U_2 theo thứ tự là các nguyên hàm của ω trên U_1 và U_2. Bây giờ chúng ta xem xét vấn đề làm thế nào để "ghép nối" F_1 và F_2 dọc theo $(y'y) - \{O\}$ để thu được một ánh xạ thuộc lớp C^1 trên U.

Giả sử $y_0 \in \mathbb{R}$.

1) Nếu $y_0 > 0$ thì : $F_1(x, y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ (x,y)\in U_1}]{} \dfrac{\pi}{2} + C_1$ và

$$F_2(x, y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ (x,y)\in U_2}]{} -\frac{\pi}{2} + C_2,$$

từ đó suy ra rằng phải có :

$$\frac{\pi}{2} + C_1 = -\frac{\pi}{2} + C_2.$$

2) Nếu $y_0 < 0$ thì : $F_1(x, y) \underset{\substack{(x, y) \to (0, y_0) \\ (x, y) \in U_1}}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi}{2} + C_1$, và

$$F_2(x, y) \underset{\substack{(x, y) \to (0, y_0) \\ (x, y) \in U_2}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + C_2,$$

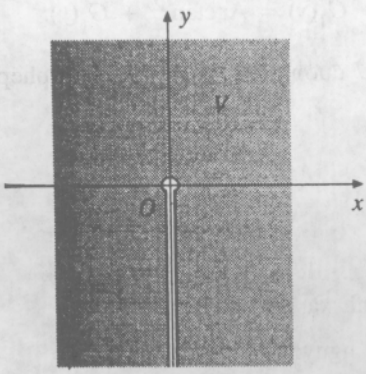
từ đó suy ra rằng phải có :

$$-\frac{\pi}{2} + C_1 = \frac{\pi}{2} + C_2.$$

Nhưng hai điều kiện thu được trên đây đối với C_1 và C_2 không tương thích ; nói cách khác, ta không thể "ghép nối" liên tục F_1 và F_2 dọc theo $(y'y) - \{O\}$.

Cuối cùng thì : ω không phải là dạng vi phân đúng trên U.

Ý nghĩa hình học



Khi ghép nối F_1 và F_2 dọc theo nửa đường thẳng mở Oy, chẳng hạn ta thu được ánh xạ

$F : V \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } x = 0 \\ \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

trong đó $V = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}_-)$

Theo sự khảo sát trên, F thuộc lớp C^1 trên $U_1 \cup U_2$ và :

$\forall (x, y) \in U_1 \cup U_2$, $d_{(x, y)}F = \omega(x, y)$. Nhưng ta cũng có (xem 7.9.3, Mệnh đề) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ F(x, y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{x}{y}.$$

Kết quả trên chứng tỏ F thuộc lớp C_1 trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ và (qua một phép tính đơn giản) ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $d_{(x, y)} F = \omega(x, y)$.

Vì ba *tập mở* U_1, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, U_2 phủ U, nên ta suy ra dễ dàng rằng F thuộc lớp C^1 trên $V = U_1 \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cup U_2$ và là một nguyên hàm của ω trên V.

Vậy ω là một dạng vi phân đúng trên V.

Ánh xạ F không có giới hạn tại mọi điểm thuộc $\{0\} \times \mathbb{R}_-$. Chính xác hơn :

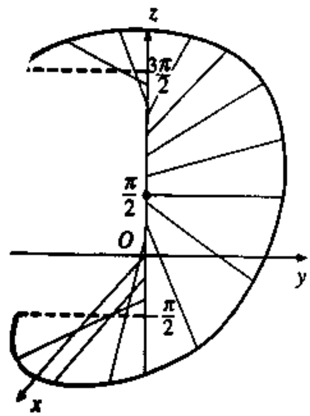
- F không có giới hạn tại $(0, 0)$.
- Với mọi y_o thuộc $\mathbb{R}_-^*$, F có giới hạn "bên trái" và giới hạn "bên phải" điểm $(0, y_o)$ và các giới hạn đó khác nhau (sai khác nhau đúng 2π).

Mặt

$$(S) = \{(x, y, z) \in V \times \mathbb{R} \ ; \ z = F(x, y)\}$$

là hợp của những nửa đường thẳng mở xuất phát từ một điểm trên $(z'z)$, nằm ngang, và quay "đều đặn" quanh $(z'z)$,

(S) là một mặt "hình chong chóng" và ta không thể dán hai "môi" của (S) lại với nhau.



3) Nếu ω không đóng trên U, ta sẽ tìm một **nhân tử tích phân cho** ω, tức là một ánh xạ φ không phải là ánh xạ hằng không (và nếu có thể, không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào), thuộc lớp C^1 và sao cho dạng vi phân $\omega_1 : (x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z)\omega(x, y, z)$ đóng trên U, hoặc đóng trên một tập mở U_1 bao hàm trong U và sai khác "ít" so với U. Việc xác định φ quy về việc giải một hệ phương trình đạo hàm riêng cấp một, là một vấn đề không xét tới trong Tập 2 này. Do đó đề bài sẽ đưa ra một chỉ dẫn về φ cho phép quy bài toán về việc giải một phương trình vi phân (thường gặp nhất là : phương trình vi phân tuyến tính cấp một không có vế thứ hai). Khi đó dạng vi phân "mới" ω_1 sẽ đóng trên U (hoặc U_1) và ta trở lại 1) hay 2).

THÍ DỤ :

Khảo sát dạng vi phân ω xác định trên R^2 bởi :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{R}^2,\ \omega(x, y) = 2y^2 dx + 3xy dy,$$

bằng cách tìm một nhân tử tích phân chỉ phụ thuộc xy.

• ω được xác định trên tập mở R^2 ; ký hiệu các hệ tử của ω là P, Q, ta có :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 4y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3y \end{cases} \qquad \text{vậy } \omega \text{ không đóng trên } \mathrm{R}^2.$$

• Ta tìm một nhân tử tích phân cho ω, tức là một ánh xạ $\varphi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ thuộc lớp C^1 trên R^2, sao cho dạng vi phân ω_1 xác định bởi :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{R}^2,\ \omega_1(x, y) = \varphi(x, y)\omega(x, y)$$

đóng trên R^2.

Đề bài chỉ dẫn là nên tìm φ sao cho $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc xy, tức là ta phải tìm một ánh xạ $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ thuộc lớp C^1 trên R sao cho ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{R}^2 &\to \mathrm{R} \\ (x, y) &\mapsto f(xy) \end{aligned} \qquad \text{là một nhân tử tích phân cho } \omega.$$

Ta chú ý rằng φ là một hàm *hai* biến số thực, nhưng f là hàm của một biến số thực *duy nhất*.

Ký hiệu P_1, Q_1 là các hệ tử của ω_1 : $\forall (x, y) \in \mathrm{R}^2, \begin{cases} P_1(x, y) = 2y^2 f(xy) \\ \ldots \end{cases}$

Ta có :

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4yf(xy) + 2y^2xf'(xy) = 3yf(xy) + 3xy^2f'(xy)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy^2f'(xy) = yf(xy)$$

$$\Leftrightarrow \forall (t) \in \mathbb{R},\ tf'(t) = f(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall (t) \in \mathbb{R},\ f(t) = t.$$

Trong thực tế người ta chỉ xác định một nhân tử tích phân duy nhất : trong thí dụ của chúng ta thì $\varphi : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x, y) \mapsto xy\end{array}$ là một nhân tử tích phân cho ω.

• Dạng vi phân ω_1 xác định trên $\mathbb{R}^2$ bởi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \omega_1(x, y) = xy\omega(x, y) = 2xy^3\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y$$

đóng trên $\mathbb{R}^2$; vì $\mathbb{R}^2$ là tập mở hình sao, nên ω_1 là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^2$. Một phép tính đơn giản cho ta các nguyên hàm của ω_1 trên $\mathbb{R}^2$: đó là các ánh xạ

$$\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x, y) \mapsto x^2y^3 + C\end{array},\ C \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

◊ **12.7.1** Khảo sát các dạng vi phân hai biến sau đây : ω là dạng vi phân đóng ? đúng ? Nếu có, hãy tính các nguyên hàm của ω; nếu ω không đóng, hãy tìm một nhân tử tích phân $\varphi : (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ sao cho $\omega_1 : (x, y) \mapsto \varphi(x, y)\omega(x, y)$ là đóng ; ω_1 có dạng vi phân đúng không ? Nếu có, hãy tính các nguyên hàm của ω_1 :

a) $\dfrac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{e^y}{1 + x^2}\,\mathrm{d}y$

b) $\left(y + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$

c) $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$

d) $y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc x

e) $y\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y$, $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc y

f) $(y^2 - x^2 - 2xy)\mathrm{d}x - (y^2 - x^2 + 2xy)\mathrm{d}y$, $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc $x^2 + y^2$

g) $\dfrac{2x^2 + xy - 2y^2}{y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{3x^2 + 2xy}{y}\,\mathrm{d}y$, $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc $\dfrac{y}{x}$

h) $(1 + e^{-y})\mathrm{d}x + (x - 2)\mathrm{d}y$, $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc y

i) $\dfrac{xy - 1}{x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1 + \ln x}{y}\,\mathrm{d}y$, $\varphi(x, y)$ chỉ phụ thuộc y.

◊ **12.7.2** Tìm tất cả các cặp (f, g) những ánh xạ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, sao cho dạng vi phân ω xác định trên $\mathbb{R}^2$ bởi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \omega(x, y) = e^x(f(y)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y)$$

là dạng vi phân đúng, rồi xác định các nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^2$.

◊ **12.7.3** Tìm điều kiện cần và đủ đối với $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho dạng vi phân ω cho bởi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \omega(x, y) = xy^p \mathrm{d}x + x^q y \mathrm{d}y$$

là dạng vi phân đúng, rồi trong trường hợp đó hãy xác định các nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^2$.

◊ **12.7.4** Cũng câu hỏi như trong bài tập 12.7.1 với ba biến số :

a) $\dfrac{a}{z}\,\mathrm{d}x - \dfrac{b}{z}\,\mathrm{d}y + \dfrac{by - ax}{z^2}\,\mathrm{d}z$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

b) $\dfrac{1}{(cz - ax)^2}\,((ay - bz)\mathrm{d}x + (cz - ax)\mathrm{d}y + (bx - cy)\mathrm{d}z)$, $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$

c) $2yz\mathrm{d}x - 2xz\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$, $\varphi(x, y, z)$ chỉ phụ thuộc $x + y$

d) $\dfrac{1}{yz}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{zx}\,\mathrm{d}y + \dfrac{1}{xy}\,\mathrm{d}z$, $\varphi(x, y, z)$ chỉ phụ thuộc xyz.

◊ **12.7.5** Tìm điều kiện cần và đủ đối với $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ để dạng vi phân ω cho bởi :

$$\omega(x, y, z) = \frac{1}{(y + z)^2}\,((y + z)\mathrm{d}x + b(z - x)\mathrm{d}y + c(x + y)\mathrm{d}z)$$

là đóng. Tính các nguyên hàm của ω trong trường hợp này.

◊ **12.7.6** Tìm một ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1, sao cho dạng vi phân ω cho bởi $\omega(x, y, z) = (yz + x^2y^3)\mathrm{d}x + (xz + x^3y^2)\mathrm{d}y + f(x, y)\mathrm{d}z$ là đóng, rồi tính các nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^2$ trong trường hợp đó.

12.7.5 Ứng dụng vào một số phương trình vi phân cấp một

Giả sử U là một tập mở trên $\mathbb{R}^2$, $P, Q : U \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ thuộc lớp C^1, ω là dạng vi phân xác định trên U bởi :

$\forall (x, y) \in U, \ \omega(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$

Giả thiết rằng ω là dạng vi phân đúng trên U, nghĩa là tồn tại một ánh xạ $F : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U sao cho :

$$\forall (x, y) \in U, \ \mathrm{d}_{(x, y)} F = \omega(x, y)$$

Xét phương trình vi phân (nói chung phi tuyến) cấp một :

(e) $\qquad P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$

trong đó x là biến (thực) và y là hàm chưa biết (lấy giá trị thực).

Cho I là một khoảng mở thuộc $\mathbb{R}$ và $y : I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ lớp C^1 trên I, sao cho : $\forall x \in I, \ (x, y(x)) \in U$.

Với mọi x thuộc I ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x, y(x))) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) \,.\, 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) \\ &= P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x). \end{aligned}$$

Vậy, để y là nghiệm trên I của (e), điều kiện cần và đủ là ánh xạ $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x, y(x)) \end{array}$ là ánh xạ hằng. Như thế ta thu được phương trình tọa độ Descartes của các đường tích phân của (e) là : $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Vấn đề còn lại là xét xem, tùy theo từng thí dụ, liệu ta có thể "rút" được y thành hàm tường minh hay hàm ẩn của x (xem 12.6.2).

THÍ DỤ :

Giải phương trình vi phân

(e) $$(1 + xy')e^y + (y + y')e^x = 0$$

Xét dạng vi phân ω xác định trên $\mathbb{R}^2$ bởi :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \omega(x, y) = (\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)e^y + (y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)e^x =$$
$$= (e^y + ye^x)\mathrm{d}x + (xe^y + e^x)\mathrm{d}y,$$

mà ta thu được bằng cách thay y' bởi $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ và "khử" mẫu số $\mathrm{d}x$ từ vế thứ nhất của (e).

Ký hiệu P, Q là các hệ tử của ω, ta có $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = e^y + e^x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = e^y + e^x \end{cases}$

Điều này chứng tỏ ω đóng trên $\mathbb{R}^2$.

Vì $\mathbb{R}^2$ là một tập mở hình sao, nên định lý Poincaré cho phép ta suy ra rằng ω là dạng vi phân đúng. Nhưng mặt khác thì một phép tính sơ cấp chứng tỏ là ω có nguyên hàm, một trong các nguyên hàm đó là : $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto xe^y + ye^x$$

Vậy phương trình tọa độ Descartes của các đường tích phân của (e) là : $xe^y + ye^x = C$, $C \in \mathbb{R}$. Trong thí dụ này ta không thể biểu thị tường minh y theo x.

Bài tập

◊ **12.7.7** Giải các phương trình vi phân sau (chỉ cần tìm phương trình tọa độ Descartes của các đường tích phân) :

a) $(e^x - e^{2x})y' + (e^x - 2e^{2x})y - 1 = 0$

b) $(e^y \operatorname{sh} x + 1)y' + (e^y \operatorname{ch} x - 1) = 0$

c) $\dfrac{xy-1}{x} + \dfrac{1+\ln x}{y}\, y' = 0$ (áp dụng bài tập 12.7.1, i))

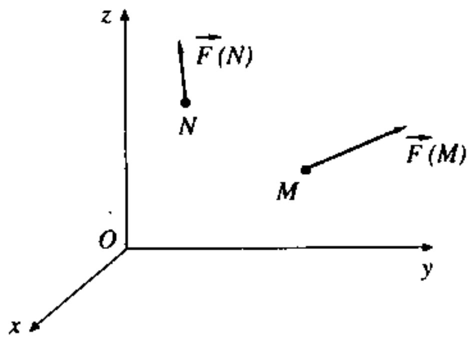
d) $xy'\ln|x| + (\ln|x| - 1)y + y^2 = 0$, y không lấy giá trị 0.

12.8 Giải tích vectơ

12.8.1 Các định nghĩa

Theo thói quen thông thường, mọi ánh xạ từ một tập mở U trên $\mathbb{R}^3$ (hoặc trên $\mathbb{R}^2$) vào $\mathbb{R}$ là **trường vô hướng**, và mọi ánh xạ từ một tập mở U trên $\mathbb{R}^3$ (tương ứng : $\mathbb{R}^2$) vào $\mathbb{R}^3$ (tương ứng : $\mathbb{R}^2$) là **trường vectơ**.

Đối với một trường vectơ thì các phần tử của tập nguồn được coi là những điểm, và các phần tử của tập đích là những vectơ. Một trường vectơ $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^3$ có thể biểu diễn đồ thị bằng cách "gắn" mỗi điểm M của U với một cặp điểm có gốc tại M và đại diện vectơ $\overrightarrow{F}(M)$.



- **Định nghĩa**

1) • Giả sử f là một trường vô hướng thuộc lớp C^1 trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$. **Gradient** của f là trường vectơ $\overrightarrow{\text{grad}} f$ xác định trên U bởi :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

(trong 12.3.2, 1)) đã đưa ra định nghĩa này).

• Giả sử f là một trường vô hướng thuộc lớp C^2 trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$. **Laplacien** của f là trường vô hướng Δf xác định trên U bởi :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

2) Giả sử $\overrightarrow{F}$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} : U &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))' \end{aligned}$$

trong đó $P, Q, R : U \to \mathbb{R}$ là ba trường vô hướng thuộc lớp C^1 trên U.

• **Phân kỳ** của $\overrightarrow{F}$ là trường vô hướng $\text{div}\, \overrightarrow{F}$ xác định trên U bởi :

$$\text{div}\, \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

• **Quay** của $\overrightarrow{F}$ là trường vectơ $\overrightarrow{\text{curl}}\, \overrightarrow{F}$ (hay $\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{F}$), xác định trên U bởi :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

12.8.2 Công thức giải tích vectơ

Ta chứng minh dễ dàng các công thức sau đây.

Giả sử U là một tập mở thuộc $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f, $g : U \to \mathbb{R}$ là những trường vô hướng thuộc lớp C^1, $\vec{F}$, $\vec{G} : U \to \mathbb{R}^3$ là những trường vectơ thuộc lớp C^1. Ta có các công thức sau :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f + \lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f + \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g$

  $\text{div}\,(\vec{F} + \lambda\vec{G}) = \text{div}\,\vec{F} + \lambda\,\text{div}\,\vec{G}$

  $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{F} \times \lambda\vec{G}) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} + \lambda\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}$

(ta nói rằng $\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$ là những toán tử tuyến tính)

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$

  $\text{div}(f\vec{F}) = f\,\text{div}\vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f\,.\,\vec{F}$

  $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{F}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \wedge \vec{F}$

- $\text{div}\,(\vec{F} \wedge \vec{G}) = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F})\,.\,\vec{G} - \vec{F}\,.\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G})$.

Nếu hơn nữa các trường đang xét thuộc lớp C^2 thì ta có :

- $\Delta(f + \lambda g) = \Delta f + \lambda\Delta g$
- $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\overrightarrow{\text{grad}}\,f\,.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\Delta f$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0}$

  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}) = 0$

  $\overrightarrow{\text{rot}}(f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g) = (\overrightarrow{\text{grad}}\,f) \wedge (\overrightarrow{\text{grad}}\,g)$.

12.8.3 Trường thế vô hướng

- **Định nghĩa** Giả sử U là một tập mở thuộc $\mathbb{R}^3$ và $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên U. Ta nói rằng $\vec{F}$ **xuất phát từ một trường thế vô hướng** (hay : $\vec{F}$ nhận một trường thế vô hướng) khi và chỉ khi tồn tại một trường vô hướng $f : U \to \mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 trên U sao cho $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$; nếu một trường vô hướng f như thế tồn tại, thì nó được gọi là **trường thế vô hướng** của $\vec{F}$.

- **Định lý** Giả sử U là một tập mở thuộc $\mathbb{R}^3$, $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên U.

  1) Nếu $\vec{F}$ nhận một trường thế vô hướng, thì $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$.

  2) Đảo lại, nếu $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$ và nếu U là hình sao, thì $\vec{F}$ nhận một trường vô hướng.

Chứng minh :

Ký hiệu $(P, Q, R) = \overrightarrow{F}$; $\overrightarrow{F}$ nhận một trường thế vô hướng khi và chỉ khi tồn tại $f : U \to \mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 trên U sao cho : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = R$.

Ký hiệu ω là dạng vi phân xác định trên U bởi :

$$\forall (x, y, z) \in U,\ \omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z\,,$$

khi đó điều kiện trên tương đương với : ω có nguyên hàm trên U là f. Như vậy định lý phải chứng minh suy từ định lý ở 12.7.3, và định lý Poincaré (12.7.3).

Bài tập

◊ **12.8.1 Tính Laplacien (hai biến số) trong tọa độ cực**

Giả sử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$; $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cho bởi :

$$\forall (\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2,\ F(\theta, \rho) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Tính $\Delta f(x, y)$ theo θ, ρ, F và các đạo hàm riêng của F.

◊ **12.8.2** Giả sử I, J là hai khoảng mở không rỗng thuộc $\mathbb{R}$. Tìm tất cả các cặp (u, v) những ánh xạ $u : I \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 theo thứ tự trên I và J, sao cho với ký hiệu $f : \begin{array}{l} I \times J \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto u(x)v(y) \end{array}$ thì f là *hàm điều hòa trên* $I \times J$, nghĩa là : $\Delta f = 0$.

◊ **12.8.3**

a) Chứng minh rằng trường vectơ $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 - (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(-\frac{2xz^3}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2yz^3}{(x^2+y^2)^2}, 1 + \frac{3z^2}{x^2+y^2}\right)$$

xuất phát từ một trường vô hướng, và tính trường này.

b) Cũng câu hỏi trên với $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy).$$

Chương 13

Bổ sung về phép tính tích phân (nghiên cứu sơ bộ)

Mục tiêu của chương này là nắm được các kỹ thuật tính toán có hiệu quả để giải các bài toán bắt nguồn từ Vật lý.

Việc khảo sát được tiến hành :

• hoặc trên (một) mặt phẳng Euclide định hướng ε_2, có thể được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O; \vec{i}, \vec{j})$, với các trục là $(x'x)$ và $(y'y)$

• hoặc trên (một) không gian Euclide định hướng ε_3 số chiều là 3 có thể được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, với các trục là $(x'x)$, $(y'y)$, $(z'z)$.

Thường người ta hay đồng nhất ε_2 với $\mathbb{R}^2$ bằng cách trang bị cho $\mathbb{R}^2$ tích vô hướng thông thường và cơ sở chính tắc, cũng như đồng nhất ε_3 với $\mathbb{R}^3$.

13.1 Tích phân đường

13.1.1 Cung định hướng, đường định hướng

Ở đây chúng ta khảo sát trường hợp $\mathbb{R}^3$; việc khảo sát cho trường hợp $\mathbb{R}^2$ cũng tương tự, bằng cách thay tọa độ thứ ba bằng 0.

◆ **Định nghĩa 1** **Cung định hướng thuộc lớp C^1 từng khúc** là mọi ánh xạ $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ trong đó I là một khoảng đóng giới nội thuộc $\mathbb{R}$ và $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ là những ánh xạ thuộc lớp C^1 từng khúc.

Ở đây ta sẽ gọi cung định hướng thuộc lớp C^1 từng khúc một cách vắn tắt là : **cung định hướng**.

◆ **Định nghĩa 2** Ta nói rằng một cung định hướng $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ **tương đương với** một cung định hướng $\psi : J \to \mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi tồn tại một ánh xạ $\theta : I \to J$ sao cho :

$$\begin{cases} \varphi = \psi \circ \theta \\ \theta \text{ thuộc lớp } C^2 \text{ từng khúc trên } I \\ \theta \text{ tăng} \\ \theta \text{ là song ánh} \\ \theta^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ từng khúc trên } J \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\theta} & J \\ & \varphi \searrow \quad \swarrow \Psi & \\ & \mathbb{R}^3 & \end{array}$$

NHẬN XÉT : Với các giả thiết trên đây, nếu ký hiệu $[a; b] = I$, $[\alpha, \beta] = J$, thì ta có :

$$\begin{cases} \theta(a) = \alpha,\ \theta(b) = \beta \\ \forall t \in [a; b] - E,\ \theta'(t) > 0 \end{cases}$$

(trong đó E chỉ tập hợp các điểm thuộc $[a ; b]$ tại đó θ' không xác định).

◆ **Mệnh đề** Quan hệ "tương đương với" là một quan hệ tương đương trên tập hợp các cung định hướng thuộc R^3.

Chứng minh:

1) **Tính phản xạ**: lấy $\theta = \mathrm{Id}_I$.

2) **Tính đối xứng** : nếu φ tương đương với Ψ qua θ, thì Ψ tương đương với φ qua θ^{-1}.

3) **Tính bắc cầu**: nếu φ tương đương với Ψ qua θ_1 và Ψ tương đương với χ (trong đó $\chi : K \to \mathrm{R}^3$) qua θ_2, thì φ sẽ tương đương với χ qua $\theta_2 \circ \theta_1$ vì :

$$\begin{cases} \varphi = \Psi \circ \theta_1 = (\chi \circ \theta_2) \circ \theta_1 = \chi \circ (\theta_2 \circ \theta_1) \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ từng khúc trên } I. \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ tăng} \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ là song ánh} \\ (\theta_2 \circ \theta_1)^{-1}\ (= \theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-1}) \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ từng khúc trên } K. \end{cases}$$

◆ **Định nghĩa 3** **Đường cong định hướng thuộc lớp C^1 từng khúc** là mọi lớp tương đương của một cung định hướng thuộc lớp C^1 từng khúc.

Ở đây, ta sẽ gọi một đường cong định hướng thuộc lớp C^1 từng khúc một cách vắn tắt là : đường định hướng.

Giả sử (C) là lớp tương đương của một cung định hướng

$$\varphi : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

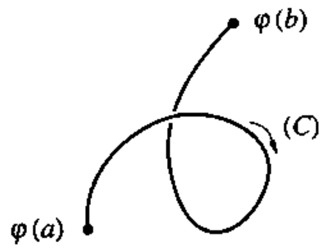
• Ta nói rằng (C) có **biểu diễn tham số** : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in I$.

φ là một **biểu diễn tham số** của (C).

• Thường ta hay lẫn lộn đường định hướng (C) với tập hợp các điểm M có tọa độ $(x(t), y(t), z(t))$ khi t chạy khắp I (tập hợp này không phụ thuộc biểu diễn tham số được chọn). Thậm chí người ta còn viết :

$$(C) = \{(x, y, z) \in \mathcal{E}_3 \ ; \ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \ t \in I \\ z = z(t) \end{cases}\}.$$

• $\varphi(a)$ và $\varphi(b)$ (vốn không phụ thuộc cách chọn φ) được gọi theo thứ tự **gốc** và **mút** của φ, hay của (C) ; ta cũng nói rằng $\varphi(a)$ và $\varphi(b)$ là các đầu mút của φ, hay của (C).



• Vì đối với mọi khoảng đóng, bị chặn $[a; b]$ và $[\alpha; \beta]$ (sao cho $a < b$ và $\alpha < \beta$) đều tồn tại một C^1 – vi phôi (xem 5.3.1, Tập 1) từ khoảng này đến khoảng kia (chẳng hạn : $t \mapsto \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}(t-a) + \alpha$), nên trong thực tế ta có thể chọn miền biến thiên I của tham số t sao cho có thể mô tả được đường (C).

13.1.2 Định nghĩa tích phân đường

Giả sử : U là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$

$$\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$
$$(x, y, z) \mapsto P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

là một dạng vi phân, trong đó $P, Q, R : U \mapsto \mathbb{R}$ là những ánh xạ thuộc lớp C^1 trên U.

$J = [\alpha; \beta]$ $(\alpha \le \beta)$

$\Psi : J \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ là một cung định hướng thỏa mãn

$\Psi(J) \subset U$.

Xét tích phân :

$$E_\Psi = \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t))\, \mathrm{d}t,$$

trong đó biểu thức dưới dấu tích phân thu được từ ω bằng cách thay x, y, z bằng biểu thức theo t.

Giả sử $I = [a; b]$ là một khoảng đóng giới nội thuộc R, $(a \leq b)$

$\theta : I \to J$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 từng khúc trên I, song ánh, tăng, sao cho θ^{-1} thuộc lớp C^1 từng khúc trên J

$\varphi = \Psi \circ \theta$, $X = x \circ \theta$, $Y = y \circ \theta$, $Z = z \circ \theta$.

Ta thực hiện phép đổi biến $t = \theta(u)$, trong tích phân E_Ψ (ta phân tích $[a; b]$ thành những đoạn liên tiếp, tương ứng với những điểm gián đoạn (nếu có) của x', y', z'):

$$\begin{aligned} E_\Psi = \int_a^b & (P(x(\theta(u)),\ y(\theta(u)), z(\theta(u)))\, x'(\theta(u)) \\ & + Q(x(\theta(u)), y(\theta(u)), z(\theta(u)))y'(\theta(u)) \\ & + R\ (x(\theta(u)), y(\theta(u)), z(\theta(u)))\, z'(\theta(u)))\, \theta'(u)\mathrm{d}u \\ = \int_a^b & (P(X(u), Y(u), Z(u))\, X'(u) + Q(X(u), Y(u), Z(u))\, Y'(u) \\ & + R(X(u), Y(u), Z(u))\, Z'(u))\, \mathrm{d}u = E_\varphi, \end{aligned}$$

tức là E_Ψ không phụ thuộc Ψ, mà chỉ phụ thuộc lớp tương đương của Ψ.

Ta có bảng tóm tắt kết quả khảo sát như sau :

• **Mệnh đề – Định nghĩa**

Giả sử : U là một tập mở thuộc R^3

ω là một dạng vi phân trên U :

$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$, trong đó $P, Q, R : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U là một biểu diễn tham số của (C).

(C) là một đường định hướng thuộc $\mathbb{R}^3$.

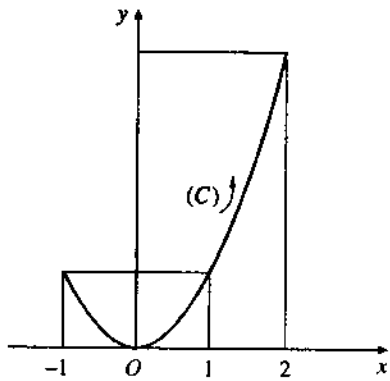
$\varphi : [a; b] \to \mathrm{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ là một biểu diễn tham số của (C)

Tích phân: $\int_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\mathrm{d}t$

không phụ thuộc việc chọn φ (biểu diễn (C)), được gọi là **tích phân đường của** ω **dọc theo** (C), và được ký hiệu là $\int\limits_{(C)} \omega$.

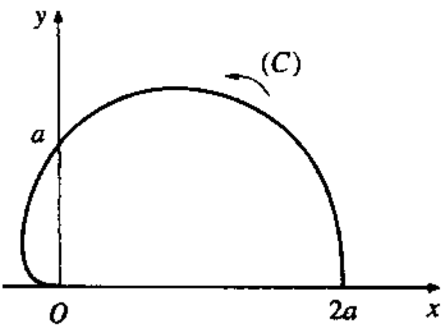
THÍ DỤ:

1) Tính $\int\limits_{(C)} \omega$, trong đó $\omega = xy\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$ và (C) là cung parabol với phương trình $y = x^2$, x biến thiên từ -1 đến 2.



$$\int\limits_{(C)} \omega = \int_{-1}^{2} (x^3 + (x + x^2)2x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{4} x^4 \right]_{-1}^{2} = \frac{69}{4}.$$



2) Tính $\int\limits_{(C)} \omega$, trong đó $\omega = -xy^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$, và (C) là nửa đường hình tim có phương trình cực là $\rho = a(1 + \cos\theta)$, ($a > 0$, cố định), θ biến thiên từ 0 đến π.

(C) có biểu diễn tham số :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = a(1 + \cos\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = a(1 + \cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

suy ra : $$\int\limits_{(C)} \omega = \int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2\cos\theta\sin\theta(-a(1 + \cos\theta)\sin\theta\,(-a(\sin\theta + \sin 2\theta)) + a(1 + \cos\theta)\cos\theta\,(a(\cos\theta + \cos 2\theta)))\mathrm{d}\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^3\cos\theta\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^4 \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\underset{t = \cos\theta}{=} a^4 \int_{-1}^{1} (1 + t)^4 t\mathrm{d}t \underset{u = 1+t}{=} a^4 \int_0^{2} u^4(u - 1)\mathrm{d}u = a^4\left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{15} a^4.$$

13.1.3 Các tính chất đại số của tích phân đường

1) Tuyến tính

◆ **Mệnh đề** Giả sử $\lambda \in \mathbf{R}$, ω_1, ω_2 là những dạng vi phân xác định trên một tập mở U trong $\mathbf{R}^3$, (C) là một đường định hướng bao hàm trong U;

ta có :

$$\int_{(C)} (\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda \int_{(C)} \omega_1 + \int_{(C)} \omega_2.$$

Chứng minh:

Chỉ cần trở lại định nghĩa (xem 13.1.2).

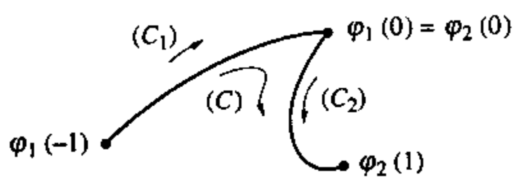
2) **Hệ thức Chasles**

Giả sử (C_1), (C_2) là hai đường định hướng sao cho điểm mút của (C_1) là điểm đầu của (C_2). Cho $\varphi_1 : [-1; 0] \to \mathbb{R}^3$ (tương ứng $\varphi_2 : [0; 1] \to \mathbb{R}^3$) là một biểu diễn tham số của (C_1) (tương ứng : (C_2)).

Ánh xạ $\varphi : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 từng khúc,

$$t \mapsto \begin{cases} \varphi_1(t) \text{ nếu } t \in [-1; 0] \\ \varphi_2(t) \text{ nếu } t \in]0 ; 1] \end{cases}$$

do đó xác định một đường định hướng (C).



Ta chú ý rằng (C) không phụ thuộc các biểu diễn tham số φ_1 và φ_2 của (C_1) và (C_2), vì nếu như $\Psi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^3$ và $\Psi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^3$ cũng là những biểu diễn tham số của (C_1) và (C_2), thì phải tồn tại θ_1: $[-1; 0] \to J_1$ và θ_2: $[0; 1] \to J_2$ sao cho :

$$\begin{cases} \theta_1 \text{ và } \theta_2 \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ từng khúc} \\ \theta_1 \text{ và } \theta_2 \text{ tăng} \\ \theta_1 \text{ và } \theta_2 \text{ là những song ánh} \\ \theta_1^{-1} \text{ và } \theta_2^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ từng khúc} \end{cases}$$

và ta thấy ngay rằng : $\theta : [-1; 1] \to J_1 \cup J_2$ thuộc lớp C^1

$$t \mapsto \begin{cases} \theta_1(t) \text{ nếu } t \in [-1; 0] \\ \theta_2(t) \text{ nếu } t \in]0; 1] \end{cases}$$

từng khúc, tăng, là song ánh và sao cho θ^{-1} thuộc lớp C^1 từng khúc (chú ý là mút của J_1 là đầu của J_2).

Đường định hướng (C) như vậy chỉ phụ thuộc (C_1) và (C_2). Đường đó được tạo thành "liên tiếp" bởi (C_1) và (C_2); thường người ta ký hiệu (lạm dụng) là $(C_1) \cup (C_2)$, hay $(C_1) + (C_2)$.

◆ **Mệnh đề 1** **(Hệ thức Chasles đối với tích phân đường)**

Giả sử ω là một dạng vi phân xác định trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$, và (C_1), (C_2) là hai đường định hướng bao hàm trong U sao cho mút của (C_1) là đầu của (C_2). Ta có :

$$\int_{(C_1)\cup(C_2)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega .$$

Chứng minh:

Với các ký hiệu trên đây và $(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = \varphi_1(t)$, $(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = \varphi_2(t)$, $(x(t), y(t), z(t)) = \varphi(t)$, ta có :

$$\int_{(C_1)\cup(C_2)} \omega = \int_{-1}^{1} (P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t))\, \mathrm{d}t$$

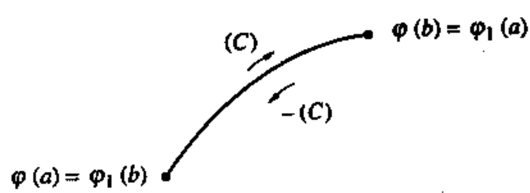
$$= \int_{-1}^{0} P(x_1(t), y_1(t), z_1(t))x_1'(t) + Q(x_1(t), y_1(t), z_1(t))y_1'(t) + R(x_1(t), y_1(t), z_1(t))z_1'(t)\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{0}^{1} P(x_2(t), y_2(t), z_2(t))x_2'(t) + Q(x_2(t), y_2(t), z_2(t))y_2'(t) + R(x_2(t), y_2(t), z_2(t))z_2'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega .$$ ■

Giả sử (C) là một đường định hướng, có biểu diễn tham số φ: $[a; b] \to \mathbb{R}^3$; xét ánh xạ φ_1: $\begin{array}{l}[a; b] \to \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \varphi(a+b-t)\end{array}$. Nếu $\Psi : [\alpha; \beta] \to \mathbb{R}^3$ tương đương với φ thì ta dễ thấy rằng $\Psi_1 : \begin{array}{l}[\alpha; \beta] \to \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \Psi(\alpha+\beta-u)\end{array}$ tương đương với φ_1. Điều đó chứng tỏ rằng lớp tương đương của φ_1 chỉ phụ thuộc (C) mà không phụ thuộc biểu diễn tham số được lựa chọn cho (C). Ta ký hiệu đường định hướng có biểu diễn tham số φ_1 là $-(C)$.

Ta thu được $-(C)$ bằng cách xét (C) theo "hướng ngược lại".



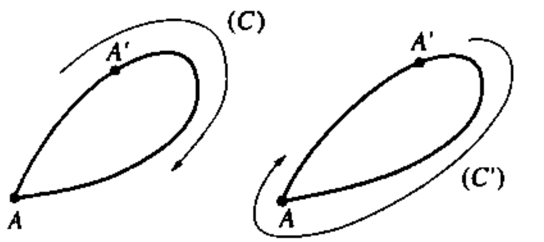
Phép đổi biến $u = a + b - t$ trong tích phân xác định $\int_{(C)} \omega$ cho phép ta suy ra kết quả sau đây :

- **Mệnh đề 2** Giả sử ω là một dạng vi phân xác định trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$ và (C) là một đường định hướng bao hàm trong U; ta có $\int_{(-C)} \omega = -\int_{(C)} \omega$.

Một đường định hướng (C) mà điểm gốc và điểm mút trùng nhau được gọi là một **khuyên**.

- **Mệnh đề 3** Nếu ω là một dạng vi phân xác định trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$ và (C) là một khuyên bao hàm trong U, thì $\int_{(C)} \omega$ không phụ thuộc điểm gốc của khuyên.

Chứng minh:



Ký hiệu A là điểm đầu của khuyên (C); gọi A' là một điểm bất kỳ của (C), và ký hiệu (C') là khuyên có điểm đầu tại A' và trùng với (C). Gọi (C_1) là đường định hướng từ A đến A' trên (C), và (C_2) là đường định hướng từ A' đến A, sao cho :
$(C) = (C_1) \cup (C_2)$ và
$(C') = (C_2) \cup (C_1)$. Ta có :

$$\int_{(C)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega = \int_{(C_2)} \omega + \int_{(C_1)} \omega = \int_{(C')} \omega .$$

Bài tập

◊ **13.1.1** Tính các tích phân đường $\int_{(C)} \omega$ trong các thí dụ sau đây :

a) $\omega = x^2 dy + y^2 dx$

(C) là nửa đường elip $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$ vạch theo chiều nghịch.

b) $\omega = y\sin x dx + x\cos y dy$

(C) là đoạn thẳng OA từ $O(0, 0)$ đến $A(1, 1)$.

c) $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2} dy$

(C) là đường biên của hình vuông $ABCD$, trong đó $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$, $D(1, -1)$

d) $\omega = x^2 dy + y^2 dx$

(C) là đường elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, vạch một lần theo chiều thuận.

e) $\omega = xy^2\mathrm{d}y - yx^2\mathrm{d}x$

(C) là đường tròn $x^2+y^2-2y=0$, vạch một lần theo chiều thuận.

f) $\omega = y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$

(C) là đường biên của miền xác định bởi $\begin{cases} x^2+y^2-2x \le 0 \\ x^2+y^2-2y \le 0 \end{cases}$, vạch một lần theo chiều thuận.

g) $\omega = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$

(C) có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = a\cos t\sqrt{\cos 2t} \\ y = a\sin t\sqrt{\cos 2t} \end{cases}$, t biến thiên từ $-\frac{\pi}{4}$ đến $\frac{\pi}{4}$ ($a > 0$ cho trước).

h) $\omega = y\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$

(C) : $x = \cos t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, t biến thiên từ 0 đến 2π.

i) $\omega = \dfrac{1}{x^2+y^2}\Big((y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z\Big)$

(C) : $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ht$, t biến thiên từ 0 đến 2π, $(r, h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ cho trước.

j) $\omega = y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$

(C) là đường tròn $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ vạch một lần theo chiều dương xác định bởi vectơ pháp $\vec{u}(1, 1, 0)$.

k) $\omega = x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x$

(C) : $x = \cos t + 1$, $y = \cos t - 1$, $z = \sin t$, t biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$.

13.1.4 Tích phân đường và dạng vi phân đúng

♦ **Định lý**

Giả sử :

U là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$
ω là một dạng vi phân trên U
$(A, B) \in U^2$
(C) là một đường định hướng bao hàm trong U có điểm gốc A và điểm mút B.
Nếu ω là dạng vi phân đúng trên U, thì khi ký hiệu f là một nguyên hàm của ω trên U ta có :

$$\int_{(C)} \omega = f(B) - f(A).$$

Chứng minh:

Ký hiệu $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ là một biểu diễn tham số của (C) và P, Q, R là các hệ tử của ω. Giả thiết x, y, z thuộc lớp C^1. Với mọi t thuộc $[a; b]$ ta có :

$$P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(f(x(t),\ y(t),\ z(t))).$$

Suy ra : $\int_{(C)} \omega = \Big[f(x(t), y(t), z(t)) \Big]_a^b = f(B) - f(A).$

Ta có thể sửa đổi dễ dàng cách khảo sát trên đây để thích hợp với trường hợp x, y, z thuộc lớp C^1 từng khúc. ■

Vậy, nếu ω là dạng vi phân đúng trên U và nếu $(C) \subset U$, thì $\int_{(C)} \omega$ chỉ phụ thuộc các đầu mút của (C) chứ không phụ thuộc "toàn bộ" (C). Đặc biệt khi đó ta có thể tính $\int_{(C)} \omega$ bằng cách thay (C) bằng một đường định hướng khác có cùng đầu mút với (C).

THÍ DỤ :

1) Tính $\int_{(C)} \omega$, trong đó $\omega = (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ và (C) là nửa đường hình tim có phương trình cực $\rho = (1 + \cos\theta)$, θ biến thiên từ 0 đến π.

Kí hiệu $P : (x, y) \mapsto x+y$, $Q: (x, y) \mapsto x-y$, ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, suy ra ω đóng trên tập mở $\mathbf{R}^2$. Do $\mathbf{R}^2$ còn là hình sao, nên định lý Poincaré chứng tỏ rằng ω là dạng vi phân đúng trên $\mathbf{R}^2$; nhưng ở đây chúng ta sẽ chỉ tính một nguyên hàm f của ω trên $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y & (1) \\ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y & (2) \end{cases}$$

Hệ thức (1) tương đương với sự tồn tại của $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + g(y).$$

Thế vào (2) : $\forall y \in \mathbf{R}$, $g'(y) = -y$. Vậy $f : \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} \end{array}$ là một nguyên hàm của ω trên $\mathbf{R}^2$ (điều này thì ta có thể nhận ra ngay từ biểu thức của ω).

Theo định lý trên đây, vì (C) có điểm gốc $A(2, 0)$ và điểm mút $B(0, 0)$, nên ta có : $\int_{(C)} \omega = f(B) - f(A) = -2.$

2) Tính $\int_{(C)} \omega$ trong đó

$$\omega = \frac{(y-z)(yz-x^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}\,\mathrm{d}x + \frac{(z-x)(zx-y^2)}{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}\,\mathrm{d}y + \frac{(x-y)(xy-z^2)}{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}\,\mathrm{d}z$$

(tổng của ba số hạng thu được bằng hoán vị vòng tròn)

và (C) : $x = \cos^2 t$, $y = 2\cos^4 t$, $z = 1 + \frac{t}{\pi}$, t biến thiên từ $-\frac{\pi}{4}$ đến $\frac{\pi}{4}$.

Tính toán đơn giản cho ta ngay :

$$\forall(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

và hai hệ thức tương tự do hoán vị vòng tròn.

Vậy ω đóng trên tập mở $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ (chứa (C)); do $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ có hình sao, nên từ định lý Poincaré ta suy ra rằng ω là dạng vi phân đúng trên $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$.

Trong thí dụ này ta cũng có thể tính một nguyên hàm của ω trên $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, nhưng sẽ khá vất vả. Tốt hơn là ta thay (C) bằng đoạn thẳng AB, biểu diễn tham số bởi : $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = u$, với u biến thiên từ $\frac{3}{4}$ đến $\frac{5}{4}$. Ta thu được

$$\int_{(C)} \omega = \int_{AB} \omega = \int_{3/4}^{5/4} 0\,dz = 0.$$

> **Hệ quả** Giả sử ω là một dạng vi phân xác định trên một tập mở U thuộc $\mathbb{R}^3$ và (C) là một khuyên bao hàm trong U. Nếu ω là dạng vi phân đúng trên U thì $\int_{(C)} \omega = 0$.

Chứng minh:

Gọi A là điểm gốc của (C) (A cũng trùng với điểm mút) và f là một nguyên hàm của ω trên U, ta có : $\int_{(C)} \omega = f(A) - f(A) = 0$.

Có thể áp dụng bổ đề trên, dưới dạng mệnh đề phản, để chứng minh rằng trong một số trường hợp thì một dạng vi phân (tuy đóng) nhưng không phải là dạng vi phân đúng.

THÍ DỤ :

Chứng minh rằng dạng vi phân ω, xác định trên $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ bởi

$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$ là đóng nhưng không đúng.

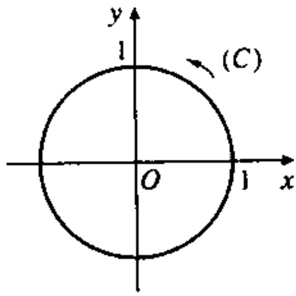
Gọi P, Q là các hệ tử của ω, ta có :

$$\forall(x, y) \in U, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

suy ra ω đóng trên U.

Giả sử (C) là đường tròn tâm O, bán kính 1 được vẽ một lần theo chiều thuận (đây là một khuyên); một biểu diễn tham số của (C) là :

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi].$$



Vì $\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} \left((-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta \right) d\theta = 2\pi \neq 0$, vậy ω không phải là dạng vi phân đúng trên U.

Bài tập

◊ **13.1.2** Tính các tích phân đường $\int_{(C)} \omega$ trong các thí dụ sau :

a) $\omega = (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$

(C) là đoạn khuyên của đường cong có phương trình $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, vạch một lần theo chiều thuận.

b) $\omega = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$

(C) là đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, vạch một lần theo chiều dương xác định bởi vectơ pháp $\vec{u}(1, 1, 1)$.

c) $\omega = 2xy^2z dx + 2x^2yz dy + (x^2y^2 - 2z)dz$

(C) : $x = \cos t$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$, $z = \frac{1}{2}\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$

d) $\omega = y dx + x dy$

(C) là cung parabol $y = x^2$ từ $O(0, 0)$ đến $A(2, 4)$

e) $\omega = \dfrac{-2xy dx + (x^2 - y^2)dy}{x^2 + y^2}$

(C) là cung phần tư đường tròn $x^2 + y^2 - y = 0$, từ $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ đến $B(0, 1)$

f) $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$

(C) là nửa đường tròn đường kính AB, từ $A(1, 2)$ đến $B(3, 4)$, nằm phía trên AB.

g) $\omega = (x^2 + y)dx + (2x + y^2)dy$

(C) là hình vuông $ABCD$, trong đó $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$, $D(1, 2)$, vạch một lần theo chiều thuận.

h) $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$

(C) là tam giác OAB, trong đó $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, được vạch một lần theo chiều thuận.

i) $\omega = 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$

(C) là tam giác ABC, trong đó $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$, được vạch một lần theo chiều thuận.

j) $\omega = (e^x \cos y + xy^2)dx - (e^x \sin y + x^2y)dy$

(C) là cung đường lemniscat có phương trình cực $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, θ biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

13.1.5 Lưu thông của một trường vectơ dọc theo một đường định hướng

♦ **Định nghĩa**

Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$

(C) là một đường định hướng bao hàm trong U

$$\begin{aligned}\vec{F} : U &\to \mathbb{R}^3\\ (x, y, z) &\mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))\end{aligned}$$ là một trường

vectơ thuộc lớp C^1.

Lưu thông của trường vectơ $\vec{F}$ dọc theo (C) là tích phân $\int_{(C)} \omega$, trong đó ω là dạng vi phân xác định trên U bởi :

$\forall(x, y, z) \in U, \omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

NHẬN XÉT: Mọi tích phân đường $\int_{(C)} \omega$ có thể được coi như là lưu thông của trường vectơ $(x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ (trong đó P, Q, R là những hệ tử của ω) dọc theo (C).

Ký hiệu (một cách lạm dụng) $d\vec{M} = (dx, dy, dz)$ và theo tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, thì lưu thông của $\vec{F}$ dọc theo (C) là :

$$\int_{(C)} \vec{F}(M) \,.\, d\vec{M}$$

Ta đã thấy (12.8.3) rằng $\vec{F}$ xuất phát từ một trường thế vô hướng khi và chỉ khi ω là dạng vi phân đúng. Vậy từ 13.1.4, Định lý, ta suy ra kết quả sau đây :

♦ **Mệnh đề** Giả sử $\vec{F}$ là một trường vectơ xác định trên một tập mở U trong $\mathbb{R}^3$ và (C) là một đường định hướng bao hàm trong U, có điểm gốc A và điểm mút B.

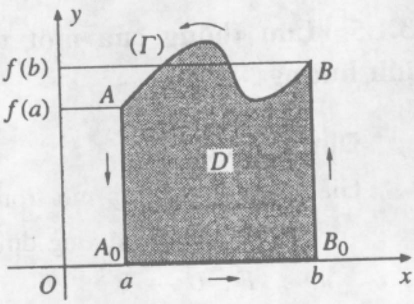
Nếu $\vec{F}$ xuất phát từ một trường thế vô hướng f thì lưu thông của $\vec{F}$ dọc theo (C) bằng $f(B) - f(A)$.

13.1.6 Tính các diện tích phẳng

Bây giờ chúng ta khảo sát trên mặt phẳng Euclide định hướng $\mathbb{R}^2$ được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Chúng tôi giả định độc giả đã biết các khái niệm thông thường của Hình học liên quan đến các đường, tọa độ cực, diện tích một "miền" phẳng (xem thêm 13.2.3, Mệnh đề 1).

1) Giả sử $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \leq b, f : [a; b] \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 trên $[a; b]$. Ta đã biết (6.2.3, Tập 1) rằng diện tích (đại số) $\mathcal{A}(D)$ của miền D giới hạn bởi $(x'x)$, các đường thẳng có phương trình $x = a$, $x = b$ và đường cong (Γ) biểu diễn đồ thị của f, bằng



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ký hiệu bằng $A_0(a, 0)$, $B_0(b, 0)$, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ và (C) là đường định hướng tạo nên bằng cách nối liên tiếp các đoạn thẳng AA_0, A_0B_0, B_0B và $-(\Gamma)$. Như vậy D được giới hạn bởi (C), và (C) định hướng theo chiều thuận. Do :

$$\begin{cases} \text{trên đoạn thẳng } A_0B_0 : -y\,\mathrm{d}x = 0 & (\text{vì } y = 0) \\ \text{trên các đoạn thẳng } AA_0 \text{ và } B_0B : -y\,\mathrm{d}x = 0 & (\text{vì } x \text{ là hằng}) \end{cases}$$

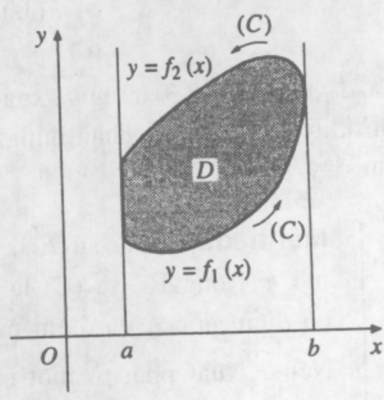
nên ta có : $\displaystyle\int_{(C)} -y\mathrm{d}x = \int_{-(\Gamma)} -y\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Suy ra : $\displaystyle\mathcal{A}(D) = -\int_{(C)} y\,\mathrm{d}x.$

2) Xét bộ phận D của mặt phẳng sao cho tồn tại $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, và hai ánh xạ $f_1, f_2 : [a ; b] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 thoả mãn :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; a \leq x \leq b$$

và $\quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$.



Diện tích đại số của D là hiệu giữa hai diện tích miền đã tính trong 1):

$$\mathcal{A}(D) = -\int_{(C_2')} y\mathrm{d}x + \int_{(C_1')} y\mathrm{d}x = \int_{(C)} -y\mathrm{d}x,$$

trong đó (C_1'), (C_2') xây dựng từ

f_1, f_2 như trong 1), và (C) là biên của D (thường hay được ký hiệu là ∂D), vạch một lần theo chiều thuận.

3) Theo cách khảo sát tương tự như trong 1) và 2), ta chứng tỏ được rằng nếu (C) là biên của miền D của mặt phẳng, định hướng theo chiều thuận thì $\mathcal{A}(D) = \int\limits_{(C)} x\mathrm{d}y$.

4) Vì $\mathcal{A}(D) = -\int\limits_{(C)} y\mathrm{d}x = \int\limits_{(C)} x\mathrm{d}y$, ta cũng suy ra :

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{(C)} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).$$

Kết luận:

♦ **Định lý** Giả sử D là một miền trên mặt phẳng, giới hạn bởi một đường cong (C) đóng và định hướng theo chiều thuận. Diện tích đại số $\mathcal{A}(D)$ của D tính theo công thức :

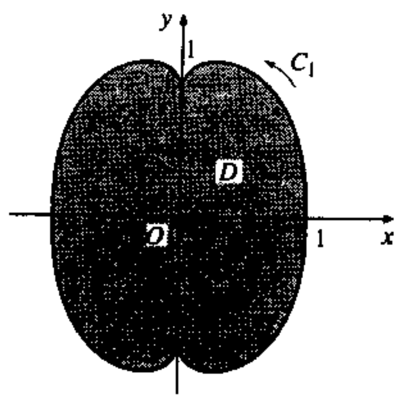
$$\mathcal{A}(D) = -\int\limits_{(C)} y\mathrm{d}x = \int\limits_{(C)} x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{(C)} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).$$

THÍ DỤ:

Tính diện tích miền mặt phẳng giới hạn bởi đường (C) có biểu diễn tham số

$$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos t(1 + \sin^2 t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ta bắt đầu bằng việc vẽ xấp xỉ (C) (xem Tập 7, Hình học)



Do đối xứng ta có :

$$\mathcal{A}(D) = 4\,\frac{1}{2}\int\limits_{(C_1)} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

trong đó (C_1) là bộ phận của (C) tương ứng với sự biến thiên của t từ $\frac{\pi}{2}$ đến 0.

Trên (C_1) ta có :

$$\begin{aligned} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x &= (\sin^3 t\,(-\sin t(1 + \sin^2 t) + 2\sin t\cos^2 t) - \cos t(1 + \sin^2 t)3\sin^2 t\cos t)\mathrm{d}t \\ &= (-3\sin^2 t + \sin^4 t)\mathrm{d}t = \left(-3\,\frac{1 - \cos 2t}{2} + \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2\right)\mathrm{d}t \\ &= (-\frac{5}{4} + \cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t)\mathrm{d}t = \left(-\frac{9}{8} + \cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

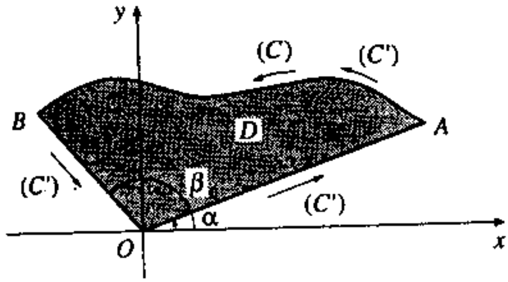
Suy ra

$$\mathcal{A}(D) = -2\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{9}{8} + \cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right)\mathrm{d}t = \frac{9\pi}{8} \approx 3{,}534.$$ ■

Bây giờ ta xét trường hợp (C) được xác định bằng toạ độ cực :

$$\rho = \rho(\theta), \text{ với } \theta \text{ biến thiên trên một khoảng } [\alpha; \beta]\ (\alpha < \beta).$$

Xét đường đóng (C') tạo nên bằng cách nối liên tiếp (C) và hai đoạn thẳng nối O với các đầu mút A, B của (C). Theo định lý trên :



$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C')}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).$$

Nhưng ở đây biểu diễn tham số của (C) là :

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \ \theta \in [\alpha; \beta].$$

Vì $xdy - ydx = \rho\cos\theta(d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta d\theta) - \rho\sin\theta(d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta d\theta) = \rho^2 d\theta$,

ta có : $$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C')}\rho^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{(C)}\rho^2\mathrm{d}\theta$$

vì ρ không đổi trên các đoạn thẳng BO và OA. Vậy :

♦ Mệnh đề

Giả sử (C) là một đường định hướng, xác định trong hệ tọa độ cực bởi $\rho = \rho(\theta)$, với điểm gốc A và điểm mút B. Diện tích của hình quạt D giới hạn bởi (C), OA, OB bằng :

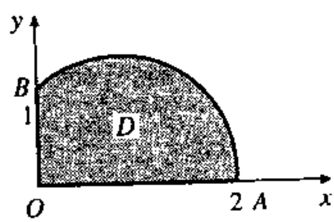
$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C)}\rho^2\mathrm{d}\theta.$$

Đặc biệt, nếu (C) đóng thì diện tích miền D giới hạn bởi (C) được cho bằng công thức :

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C)}\rho^2\,\mathrm{d}\theta.$$

THÍ DỤ:

1) Diện tích hình quạt giới hạn bởi hai nửa trục Ox, Oy và đường hình tim có phương trình cực $\rho = 1 + \cos\theta$.



$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\rho^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{3\pi}{8} + 1 \approx 2{,}178.$$

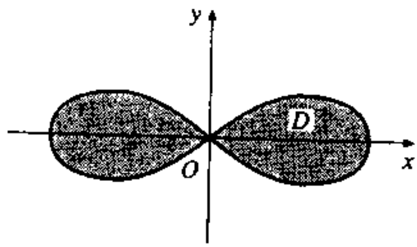
2) Diện tích miền nằm trong đường lemniscat có phương trình cực

$$\rho = \sqrt{\cos2\theta}.$$

Do đối xứng :

$$\mathcal{A}(D) = 4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1.$$



Bài tập

◊ **13.1.3** Tính các diện tích sau đây (có thể phải xét đến những tích phân suy rộng):

a) diện tích của $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in [0; 1], |x + yt + t^2| \leq 1\}$

b) diện tích của vòng khuyên của đường : $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$

c) diện tích giới hạn bởi đường : $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t\,(1 + \sin t) \end{cases}$

d) diện tích của vòng khuyên đường strôphôit : $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

e) diện tích của vòng khuyên của : $\rho = \sqrt{\sin^3\theta}$

f) diện tích giới hạn bởi $\rho = \dfrac{1}{2 + \cos 4\theta}$

g) diện tích giới hạn bởi $\rho = \cos^3\theta - \sin^3\theta$

h) diện tích của vòng khuyên của : $\rho = \dfrac{\cos\theta}{1 - \cos\theta}$

i) diện tích của vòng khuyên của : $\rho = 1 + \tan\dfrac{\theta}{2}$.

j) diện tích giới hạn bởi hai vòng khuyên của đường ốc sên Pascal $\rho = 2\cos\theta - 1$.

13.2 Tích phân kép

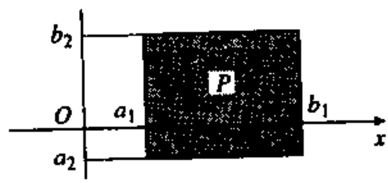
Theo đúng chương trình và nhằm mục đích tinh giản, chúng tôi không trình bày các phép chứng minh trong §13.2 này, vốn chủ yếu dành cho các ứng dụng trong Vật lý học. Trong hầu hết các trường hợp thì độc giả có thể thực hiện các phép chứng minh một cách dễ dàng; tuy nhiên phép chứng minh định lý Fubini (13.2.4) và định lý đổi biến số (13.2.5) khá tế nhị. Chúng ta có thể tìm thấy một sự khảo sát đầy đủ và sâu sắc trong cuốn *Giáo trình Toán* (Cours de mathématiques) của J.–M. Arnaudiès và H. Fraysse (Tập 3, trang 267 đến 370).

13.2.1 Tập con của $\mathbb{R}^2$ cầu phương được

1) **Miếng lát**

- **Định nghĩa 1** **Miếng lát đóng giới nội** (của $\mathbb{R}^2$) là mọi bộ phận P của $\mathbb{R}^2$ sao cho tồn tại $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ thoả mãn :

$$\begin{cases} a_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq b_2 \\ P = [a_1\,;\, b_1] \times [a_2\,;\, b_2] \end{cases}$$



Tổng quát hơn, **miếng lát** trong $\mathbb{R}^2$ là mọi tích Descartes $I \times J$ trong đó I, J là những khoảng trong $\mathbb{R}$.

Do việc khảo sát trường hợp $a_1 = b_1$ hay $a_2 = b_2$ là hiển nhiên, nên ta sẽ giả thiết $a_1 < b_1$ và $a_2 < b_2$, nếu không nói gì trái lại. Việc cho một miếng lát đóng giới nội P xác định duy nhất các số thực a_1, b_1, a_2, b_2.

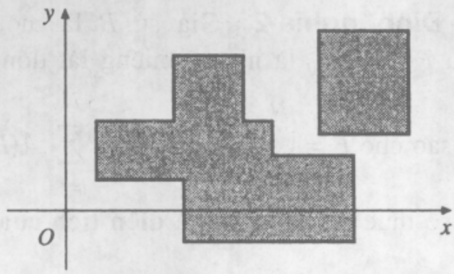
- **Định nghĩa 2** Giả sử $P\ [a_1\,;\, b_1] \times [a_2\,;\, b_2]$ là một miếng lát đóng giới nội.

  1) **Diện tích của** P là số thực, ký hiệu là $\mathcal{A}(D)$, được xác định như sau : $\mathcal{A}(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

  2) **Miền trong của** P, ký hiệu là $\overset{\circ}{P}$, là tập con $]a_1;\, b_1[\ \times\ ]a_2;\, b_2[$ trong $\mathbb{R}^2$.

2) **Bộ phận lát được**

- **Định nghĩa 1** **Bộ phận lát được** (của $\mathbb{R}^2$) là mọi hợp của một số hữu hạn những miếng lát đóng giới nội của $\mathbb{R}^2$.



Thí dụ về bộ phận lát được của $\mathbf{R}^2$

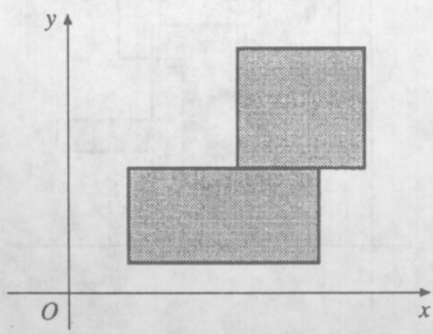
NHẬN XÉT.

1) $\varnothing$ lát được.

2) Mọi miếng lát đóng giới nội là một bộ phận lát được.

3) Mọi bộ phận lát được đều đóng giới nội trong $\mathbb{R}^2$.

♦ **Định nghĩa 2** Hai miếng lát đóng giới nội trong $\mathbb{R}^2$ được gọi là **tựa rời nhau** khi và chỉ khi phần trong của chúng rời nhau.



Thí dụ về hai miếng lát tựa rời nhau

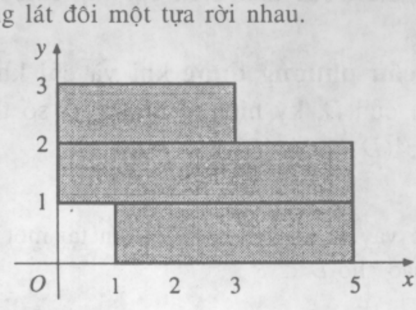
♦ **Mệnh đề 1** Mọi bộ phận có thể lát là hợp của một số hữu hạn những miếng lát đóng giới nội tựa rời nhau.

THÍ DỤ :

Bộ phận $B([0; 3] \times [1; 3]) \cup ([1; 5] \times [0; 2])$ lát được (theo định nghĩa) và có thể phân tích (chẳng hạn) thành

$$B = ([1; 5] \times [0; 1]) \cup ([0; 5] \times [1; 2]) \cup ([0; 3] \times [2; 3]),$$

trong đó có ba miếng lát đôi một tựa rời nhau.

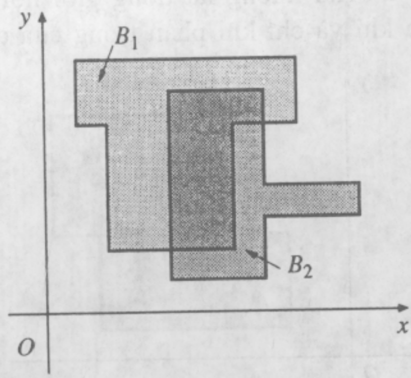


♦ **Mệnh đề – Định nghĩa 2** Giả sử B là một tập con lát được của $\mathbb{R}^2$; nếu $P_1, ..., P_N$ là những miếng lát đóng giới nội, đôi một tựa rời nhau sao cho $B = \bigcup_{i=1}^{N} P_i$, số thực $\sum_{i=1}^{N} \mathcal{A}(P_i)$ không phụ thuộc $(P_1, ..., P_N)$; số thực đó được gọi là **diện tích của** B và được ký hiệu là $\mathcal{A}(B)$.

NHẬN XÉT : Khái niệm diện tích của một tập con lát được của mặt phẳng mở rộng khái niệm diện tích của một miếng lát đóng giới nội (xem 13.2.1, 1)).

♦ **Mệnh đề 3** Giả sử B_1, B_2 là hai tập con lát được của $\mathbb{R}^2$.

1) $B_1 \cup B_2$ và $B_1 \cap B_2$ lát được và $\mathcal{A}(B_1 \cup B_2) + \mathcal{A}(B_1 \cap B_2) =$ $= \mathcal{A}(B_1) + \mathcal{A}(B_2)$.



2) Nếu $B_1 \subset B_2$, thì $B_2 - \overset{\circ}{B_1}$ lát được và $\mathcal{A}(B_2 - \overset{\circ}{B_1}) = \mathcal{A}(B_2) - \mathcal{A}(B_1)$.

3) Tập con cầu phương được

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử D là một tập con giới nội của $\mathbb{R}^2$. Ta ký hiệu :

- $\mathcal{A}^-(D)$ là cận trên của diện tích các tập con lát được của $\mathbb{R}^2$ bao hàm trong D.
- $\mathcal{A}^+(D)$ là cận dưới của diện tích các tập con lát được của $\mathbb{R}^2$ có chứa D.

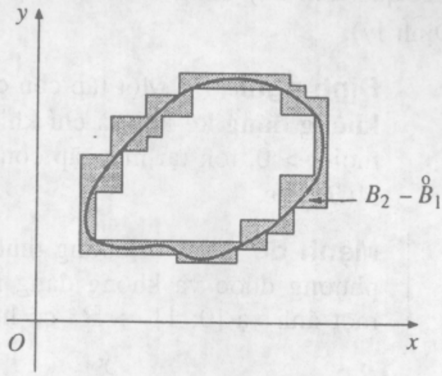
Ta nói rằng D **cầu phương được** khi và chỉ khi $\mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D)$; khi đó **diện tích** của D, ký hiệu là $\mathcal{A}(D)$, là số thực :

$$\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D).$$

NHẬN XÉT :

1) • $\mathcal{A}^+(D)$ tồn tại; thực vậy vì D giới nội nên tồn tại một miếng lát đóng giới nội (do đó lát được) P sao cho $D \subset P$.

• $\mathcal{A}^-(D)$ tồn tại vì $\varnothing$ là một tập con lát được của $\mathbb{R}^2$ bao hàm trong D, và tập hợp các diện tích của các tập con lát được của $\mathbb{R}^2$ và bao hàm trong D bị chặn trên bởi diện tích $\mathcal{A}(P)$ của một miếng lát chứa D.



2) Để một tập con D của $\mathbb{R}^2$ cầu phương được, điều kiện cần và đủ là, với mọi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tồn tại hai bộ phận lát được B_1, B_2 của $\mathbb{R}^2$ sao cho :

$$\begin{cases} B_1 \subset D \subset B_2 \\ \mathcal{A}(B_2 - B_1) < \varepsilon \end{cases}$$

3) Tồn tại những tập con giới nội của $\mathbb{R}^2$ không cầu phương được :

$D = [0; 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ chẳng hạn, trong đó $\mathcal{A}^-(D) = 0$ và $\mathcal{A}^+(D) = 1$.

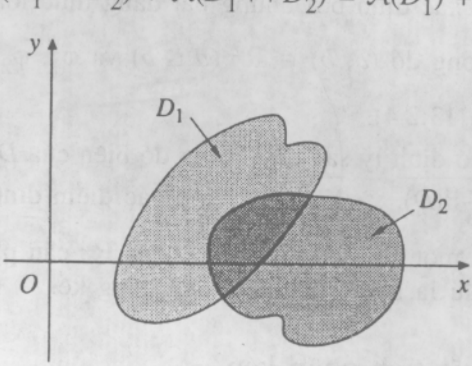
♦ **Mệnh đề 1** Nếu D là một tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$, thì $\overline{D}$ (tập hợp các điểm dính của D) và $\overset{o}{D}$ (phần trong của D trong $\mathbb{R}^2$) cầu phương được và :

$$\mathcal{A}(\overline{D}) = \mathcal{A}(\overset{o}{D}) = \mathcal{A}(D).$$

(Phần trong $\overset{o}{D}$ của D được định nghĩa như sau : $C_{\mathbb{R}^2}(\overset{o}{D})$ là tập hợp các điểm dính của $C_{\mathbb{R}^2}(D)$).

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử D_1, D_2 là hai tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$. Khi đó $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$, $D_1 - D_2$ cầu phương được và

$$\mathcal{A}(D_1 \cup D_2) + \mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2).$$



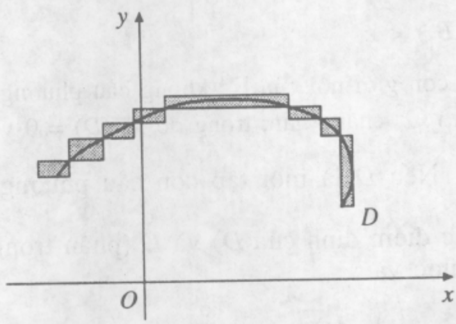
♦ **Mệnh đề 3** Nếu D là một tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$ và θ là một phép đẳng cự afin trên $\mathbb{R}^2$, thì $\theta(D)$ cầu phương được và $\mathcal{A}(\theta(D)) = \mathcal{A}(D)$.

Nói cách khác, diện tích bất biến qua phép đẳng cự.

Kết quả trên đây cũng là một hệ quả của định lý đổi biến số (13.2.5), 2), Định lý).

♦ **Định nghĩa 2** Một tập con cầu phương được D của $\mathbb{R}^2$ được gọi là **không đáng kể** khi và chỉ khi $\mathcal{A}(D) = 0$, tức là khi và chỉ khi : với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập con lát được B của $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subset B$ và $\mathcal{A}(B) < \varepsilon$.

♦ **Mệnh đề 4** Mọi đường thuộc $\mathbb{R}^2$, thuộc lớp C^1 từng khúc, là cầu phương được và không đáng kể (vì một đường như thế là ảnh của một ánh xạ $[0; 1] \to \mathbb{R}^2$ có hai toạ độ thuộc lớp C^1 từng khúc).



NHẬN XÉT : Tồn tại những "đường" thuộc $\mathbb{R}^2$, liên tục (nhưng không thuộc lớp C^1 từng khúc) lấp kín $[0 ; 1]^2$ (**đường cong Péano**); một đường như thế cầu phương được, nhưng điều khá kỳ lạ là diện tích của nó lại bằng 1.

♦ **Mệnh đề 5** Mọi tập con giới nội của $\mathbb{R}^2$, giới hạn bởi một đường thuộc lớp C^1 từng khúc, đều cầu phương được.

Trường hợp hay gặp nhất (đối với việc tính các tích phân kép) là trường hợp D được xác định bởi những bất đẳng thức loại như :

$\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$, trong đó $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a \le b)$ và $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \to \mathbb{R}$ là những ánh xạ (xem 13.2.4).

Tổng quát hơn, ta có định lý sau đây, trong đó biên của D được định nghĩa là : $\partial(D) = \overline{D} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^2}(D)}$, và $\overline{X}$ chỉ tập hợp các điểm dính của X.

♦ **Định lý** Để một tập con giới nội D của $\mathbb{R}^2$ cầu phương được, điều kiện cần và đủ là biên $\partial(D)$ là không đáng kể.

13.2.2 Định nghĩa tích phân kép

1) **Tích phân ánh xạ bậc thang trên một miếng lát đóng giới nội**

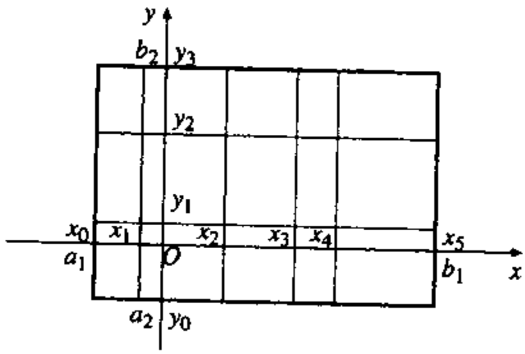
♦ **Định nghĩa 1** Giả sử $P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ là một miếng lát đóng giới nội trong $\mathbb{R}^2$. **Phân hoạch** của P là mọi họ hữu hạn σ những điểm thuộc P sao cho tồn tại một phân hoạch $(x_i)_{0 \le i \le p}$ của $[a_1; b_1]$ và một phân hoạch $(y_j)_{0 \le j \le q}$ của $[a_2;b_2]$ thỏa mãn $\sigma = ((x_i, y_j))_{\substack{0 \le i \le p \\ 0 \le j \le q}}$.

Ta nhắc lại (xem 6.1.1, Tập 1) rằng một phân hoạch của $[a_1; b_1]$ là một họ $(x_i)_{0 \le i \le p}$ những phần tử thuộc $[a_1; b_1]$ sao cho :

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b_1.$$

Tế bào của phân hoạch σ của P là những miếng lát đóng giới nội :

$$[x_i ; x_{i+1}] \times [y_j ; y_{j+1}],\ (i, j) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, q-1\}.$$



Ta ký hiệu tập hợp các phân hoạch của P là $\mathcal{S}$.

♦ **Định nghĩa 2** Giả sử P là một miếng lát đóng giới nội của R^2.

1) Giả sử $e : P \to \mathrm{R}$ là một ánh xạ giới nội ; ta nói e là **ánh xạ bậc thang** trên P khi và chỉ khi tồn tại $\sigma \in \mathcal{S}$ sao cho e là hằng trên phần trong của mỗi tế bào của σ, tức là tồn tại một phân hoạch $((a_i, b_j))_{\substack{0 \le i \le p \\ 0 \le j \le q}}$ của P và một họ những số thực $(\lambda_{i,j})_{\substack{0 \le i \le p-1 \\ 0 \le j \le q-1}}$ sao cho :

$\forall (i, j) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, q-1\}$, $\forall (x, y) \in]x_i ; x_{i+1}[\times]y_j, y_{j+1}[$, $e(x,y) = \lambda_{i,j}$.

2) Giả sử $e : P \to \mathrm{R}$ là một ánh xạ bậc thang và $\sigma \in \mathcal{S}$; ta nói rằng σ **tương thích** với e khi và chỉ khi e là hằng trên phần trong của mỗi tế bào của σ.

♦ **Mệnh đề – Định nghĩa 3** Giả sử P là một miếng lát đóng giới nội thuộc R^2, $e : P \to \mathrm{R}$ là một ánh xạ bậc thang trên P, $\sigma = ((x_i, y_j))_{\substack{0 \le i \le p \\ 0 \le j \le q}}$ là một phân hoạch của P tương thích với e, $\lambda_{i,j}$ *là giá trị của* e trên $]x_i ; x_{i+1}[\times]y_j ; y_{j+1}[$.

Số thực $\sum_{\substack{0 \le i \le p-1 \\ 0 \le j \le q-1}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)\lambda_{i,j}$ không phụ thuộc việc chọn phân hoạch σ tương thích với e; số thực đó được gọi là **tích phân của e trên P**, và ký hiệu $\iint\limits_P e$ hay $\iint\limits_P e(x, y)\,dx\,dy$.

Ta chú ý là $(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ là diện tích của miếng lát $[x_i; x_{i+1}]\times[y_j; y_{j+1}]$.

2) Trường hợp ánh xạ xác định trên một miếng lát đóng giới nội

- **Định nghĩa 1** Giả sử P là một miếng lát đóng giới nội trong $\mathbb{R}^2$, $f : P \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ giới nội.

  Ta nói rằng f **khả tích trên** P khi và chỉ khi tồn tại hai dãy ánh xạ bậc thang $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trên P sao cho :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |f - e_n| \le \varphi_n \\ \iint\limits_P \varphi_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases}$$

Mọi cặp $\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ trên P thoả mãn điều kiện trên được gọi là **liên kết với** f.

- **Mệnh đề – Định nghĩa 2** Giả sử P là một miếng lát đóng giới nội của $\mathbb{R}^2$, $f : P \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ khả tích trên P. Với mọi cặp $\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ liên kết với f, dãy $\left(\iint\limits_P e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $\mathbb{R}$, và giới hạn của dãy này không phụ thuộc việc chọn cặp $\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ liên kết với f. Giới hạn đó được gọi là **tích phân (kép) của f trên** P, và ký hiệu là $\iint\limits_P f$, hay $\iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy$.

3) Trường hợp ánh xạ xác định trên một tập con cầu phương được

Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}^2$, cầu phương được, $f : D \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ giới nội.

- **Mệnh đề** Với mọi miếng lát đóng giới nội P bao hàm D, ta ký hiệu : $f_P : P \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in D \\ 0 & \text{nếu } x \notin D \end{cases}$$

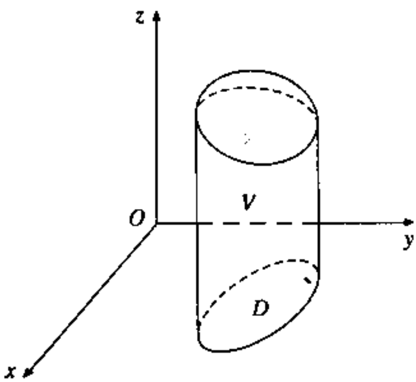
  Nếu tồn tại một miếng lát đóng giới nội P bao hàm D sao cho f_P khả tích trên P, thì với mọi miếng lát đóng giới nội Q bao hàm D, f_Q khả tích trên Q và $\iint\limits_P f_P = \iint\limits_Q f_Q$.

- **Định nghĩa 3** Ta nói rằng f **khả tích trên** D khi và chỉ khi tồn tại một miếng lát đóng giới nội P bao hàm D sao cho f_P khả tích trên P, và khi đó số thực ký hiệu là $\iint\limits_D f$ xác định bởi :

$$\iint\limits_D f = \int\limits_P f_P$$

được gọi là **tích phân (kép) của** f **trên** D.

- **Định lý** Mọi ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$ giới nội và liên tục trên một tập con D cầu phương được của $\mathbb{R}^2$ đều khả tích trên D.



Định lý này bảo đảm sự tồn tại của hầu hết các tích phân kép mà độc giả sẽ phải khảo sát trong phạm vi chương trình.

Giả sử $f \geq 0$, $\iint\limits_D f$ là thể tích của bộ phận E sau đây của $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \leq z \leq f(x, y) \end{cases}\right\}.$$

13.2.3 Các tính chất đơn giản của tích phân kép

- **Mệnh đề 1** Nếu D cầu phương được thì $\iint\limits_D 1 = \mathcal{A}(D)$.

- **Mệnh đề 2** Giả sử D là một tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$ và $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ giới nội ; điều kiện cần và đủ để $\iint\limits_D f$ tồn tại là $\iint\limits_{\overline{D}} f$ tồn tại hoặc $\iint\limits_{\overset{\circ}{D}} f$ tồn tại, và khi đó ta có :

$$\iint\limits_{\overline{D}} f = \iint\limits_{\overset{\circ}{D}} f = \iint\limits_D f.$$

Mệnh đề 2 chứng tỏ rằng trong thực tế ta có thể quy về trường hợp D đóng hay mở.

- **Mệnh đề 3** (**"Tính chất tuyến tính của tích phân kép"**)
  Nếu $\lambda \in \mathbb{R}$ và nếu $f, g : D \to \mathbb{R}$ khả tích trên tập con cầu phương được D, thì $\lambda f + g$ cũng khả tích trên D và :

$$\iint\limits_D (\lambda f + g) = \lambda \iint\limits_D f + \iint\limits_D g.$$

◆ **Mệnh đề 4** Giả sử D_1 và D_2 là hai tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$, $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ sao cho $f\big|_{D_1}$ và $f\big|_{D_2}$ khả tích theo thứ tự trên D_1 và D_2. Khi đó f khả tích trên $D_1 \cup D_2$ và :

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f = \iint\limits_{D_1} f + \iint\limits_{D_2} f - \iint\limits_{D_1 \cap D_2} f$$

Ta thường hay áp dụng Mệnh đề 4 trong trường hợp $\mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = 0$ (trong trường hợp này thì ta có $\iint\limits_{D_1 \cap D_2} f = 0$).

◆ **Mệnh đề 5** Giả sử D_1, D_2 là hai tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$ sao cho $D_1 \subset D_2$, và $f : D_2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ khả tích trên D_2 ; khi đó $f\big|_{D_1}$ khả tích trên D_1.

◆ **Mệnh đề 6** **("Tính không âm và tính đồng biến của tích phân kép")**

Giả sử D, D_1, D_2 là những tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$.

1) Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ khả tích trên D và nếu $f \geq 0$, thì $\iint\limits_{D} f \geq 0$.

2) Nếu f, g: $D \to \mathbb{R}$ khả tích trên D và nếu $f \leq g$, thì $\iint\limits_{D} f \leq \iint\limits_{D} g$.

3) Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ khả tích trên D thì

$$\mathcal{A}(D)\mathrm{Inf}(f) \leq \iint\limits_{D} f \leq \mathcal{A}(D)\mathrm{Sup}(f).$$

4) Nếu $D_1 \subset D_2$, $f : D_2 \to \mathbb{R}$ khả tích trên D_2 và $f \geq 0$, thì

$$\iint\limits_{D_1} f \leq \iint\limits_{D_2} f$$

5) Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ khả tích trên D, thì $|f|$ cũng khả tích trên D và :

$$\left|\iint\limits_{D} f\right| \leq \iint\limits_{D} |f|.$$

◆ **Mệnh đề 7** **("Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đối với tích phân kép")**

Nếu f, g : $D \to \mathbb{R}$ khả tích trên một tập con cầu phương được D, thì fg, f^2, g^2 cũng khả tích trên D và :

$$\left(\iint\limits_{D} fg\right)^2 \leq \left(\iint\limits_{D} f^2\right)\left(\iint\limits_{D} g^2\right).$$

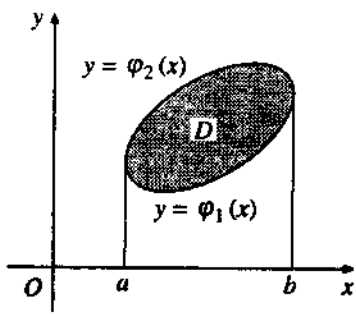
13.2.4 Định lý Fubini

♦ **Định lý** **(Định lý Fubini)**

Giả sử
- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$
- $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc và thỏa mãn $\varphi_1 \le \varphi_2$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b$ và $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$
- $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục

Khi đó
- D cầu phương được
- f khả tích trên D
- $$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Trong Tập 3 (tích phân phụ thuộc tham số) ta sẽ trở lại việc khảo sát các hàm số loại $x \mapsto \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$



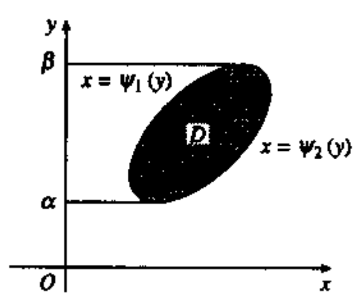
NHẬN XÉT :

1) Mọi tập con D của $\mathbb{R}^2$ lồi, đóng và giới nội đều thuộc dạng trên đây.

2) Định lý Fubini chứng tỏ rằng một tích phân kép (trên một miền thuộc lớp đã chỉ ra) được quy về hai tích phân đơn lồng nhau.

3) Bằng cách hoán vị vai trò của các tọa độ, ta thấy nếu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \le y \le \beta$ và $\Psi_1(y) \le x \le \Psi_2(y)\}$, (trong đó $\Psi_1, \Psi_2 : [\alpha ; \beta] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc và thỏa mãn $\Psi_1 \le \Psi_2$), thì D cầu phương được, f khả tích trên D và :

$$\iint_D f = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$



Khả năng hoán vị các tọa độ nhờ định lý Fubini cho phép thu được một số bất đẳng thức có chứa những tích phân đơn giản.

◆ **Hệ quả 1** (Một trường hợp đặc biệt của định lý Fubini)

Giả sử • $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ thỏa mãn $a \le b$ và $c \le d$

• $D = [a; b] \times [c; d]$

• $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục.

Khi đó f khả tích trên D và :

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

◆ **Hệ quả 2** (Một trường hợp đặc biệt của Hệ quả 1)

Giả sử • $(a, b, b, d) \in \mathbb{R}^4$ thỏa mãn $a \le b$ và $c \le d$

• $D = [a; b] \times [c; d]$

• $u : [a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục

• $v : [c; d] \to \mathbb{R}$ liên tục.

Khi đó ánh xạ $f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto u(x)v(y) \end{array}$ (đôi khi được ký hiệu $u \otimes v$)

khả tích trên D và :

$$\iint_D (u(x)v(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b u(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_c^d v(y)\mathrm{d}y \right).$$

Trường hợp vừa xét :

$$\begin{cases} \text{"miền tích phân" là một miếng lát} \\ \text{và} \\ \text{hàm phải tích phân là "tích của một hàm đối với } x \text{ và một hàm} \\ \text{đối với } y\text{"} \end{cases}$$

rất hay gặp trong thực tế; ta quy về trường hợp này chẳng hạn bằng cách chuyển qua tọa độ cực trong một số trường hợp (xem 13.2.5, 2).

THÍ DỤ :

Tính $I = \iint_D f$, trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$

và $f(x, y) = x^2 + y^2$.

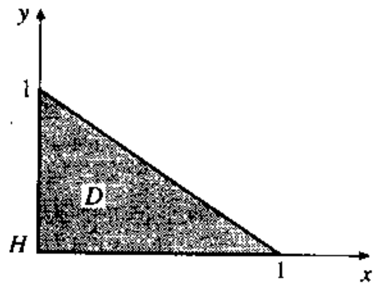
Theo định lý Fubini :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$



Bài tập

◊ **13.2.1** Tính các tích phân kép $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ trong các thí dụ sau, trong đó nêu lên các điều kiện xác định D, tiếp theo là $f(x, y)$:

a) $\begin{cases} [0\,;\,\pi]^2 \\ (x+y)\sin x \sin y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1 \\ xy(x+y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1 \\ \ln(1+x+y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy+\ x+y \leq 1 \\ xy \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 1,\ y \geq 1,\ x+y \leq 4 \\ \dfrac{1}{(x+y)^4} \end{cases}$

f) $\begin{cases} y \geq 0,\ x-y+1 \geq 0,\ x+2y-4 \leq 0 \\ x \end{cases}$

g) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y \leq 1 \\ \ln(1+x^2+y) \end{cases}$

h) $\begin{cases} y \geq x^2,\ x \geq y^2 \\ xy \end{cases}$

◊ **13.2.2** Tính

$$\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

◊ **13.2.3** Ta ký hiệu tập các ánh xạ liên tục từ $\mathbb{R}_+$ đến R là E. Với mọi f thuộc E và mọi λ thuộc R, ta ký hiệu g_λ: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_\lambda(x) = \int_0^x e^{\lambda(t-x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Chứng minh : $g_\lambda \in E$.

Như thế ta đã định nghĩa một ánh xạ $T_\lambda : \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto g_\lambda \end{array}$

b) Chứng minh rằng :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ T_\mu - T_\lambda = (\lambda - \mu)\, T_\lambda \circ T_\mu.$$

13.2.5 Đổi biến số trong tích phân kép

1) C^1– vi phôi

Ở đây chúng ta sử dụng các ánh xạ từ R^2 đến R^2; trong Tập 4 vấn đề sẽ được khảo sát lại và tổng quát hóa.

♦ **Định nghĩa** Giả sử U, V là hai tập mở của R^2: $\Phi : U \to V$ là một ánh xạ, P, $Q : U \to \mathrm{R}$ là những ánh xạ xác định như sau :

$$\forall (x, y) \in U,\ \Phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

1) Ta nói rằng Φ **thuộc lớp C^1 trên U** khi và chỉ khi P, Q thuộc lớp C^1 trên U. Khi đó, với mọi (x, y) thuộc U, **ma trận Jacobi** của Φ tại (x, y) là ma trận vuông cấp 2, ký hiệu là $J_\Phi(x, y)$ xác định bởi :

$$J_\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

và **jacobien** (hay : **định thức Jacobi**) của Φ tại (x, y) là định thức của $J_\Phi(x, y)$, tức là : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y)\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)$.

2) Ta nói Φ là một **C^1– vi phôi** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Phi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ \Phi \text{ là song ánh} \\ \Phi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } V \end{cases}$$

Trong Tập 4 ta sẽ thấy là nếu $\Phi : U \to V$ và $\Psi : V \to W$ thuộc lớp C^1, thì $\Psi \circ \Phi$ thuộc lớp C^1 và :

$$\forall (x, y) \in U,\ J_{\Psi \circ \Phi}(x, y) = J_\Psi(\Phi(x, y)) \,.\, J_\Phi(x, y).$$

Đặc biệt, nếu Φ là một C^1– vi phôi thì với mọi (x, y) thuộc U, ma trận $J_\Phi(x, y)$ khả đảo và : $J_{\Phi^{-1}}\left(\Phi(x, y)\right) = \left(J_\Phi(x, y)\right)^{-1}$.

2) Phép đổi biến trong tích phân kép

♦ **Định lý** Cho U, V là hai tập mở thuộc R^2, $\Phi : U \to V$ là một C^1– vi phôi, Δ là một tập con cầu phương được của R^2 bao hàm trong U, $f : \Phi(\Delta) \to \mathrm{R}$ là một ánh xạ liên tục. Khi đó :

- $\Phi(\Delta)$ cầu phương được.
- $\displaystyle\iint_{\Phi(\Delta)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(\Phi(u, v)) \left|\det\left(J_\Phi(u, v)\right)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

Những trường hợp thường hay gặp nhất trong thực tế là các trường hợp sau đây :

a) Phép đổi biến afin

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}, \text{ trong đó } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ ad - bc \neq 0.$$

Ở đây thì $\det\left(J_\Phi(u, v)\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; vậy ta sẽ thay $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bằng $|ad - bc|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Đặc biệt đôi khi ta có thể sử dụng một phép đối xứng đồng thời với D và với f để giảm bớt các phép tính khi phải tính $\iint\limits_D f$.

THÍ DỤ :

Tính $I = \iint\limits_D f$, trong đó $D = [-1\ ;\ 1]^2$ và $f : (x, y) \mapsto x$.

Miền tích phân D đối xứng đối với $(y'y)$ và :

$$\forall (x, y) \in D,\ f(-x, y) = -f(x, y).$$

Điều đó gợi ý chúng ta áp dụng phép đổi biến xác định bởi : $x = -X$, $y = Y$.

Ta được : $I = \iint\limits_D (-X)\,|-1|\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = -I$, suy ra $I = 0$.

b) Phép chuyển qua tọa độ cực

Với các ký hiệu thông thường : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, và ký hiệu $\Phi : (\theta, \rho) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, ta suy ra :

$$\det\left(J_\Phi(\theta, \rho)\right) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\rho.$$

Ta sẽ thừa nhận (do các giả thiết của định lý trên đây không được thỏa mãn tất cả) rằng, để tính $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mà lại muốn chuyển sang tọa độ cực, ta sẽ thay :

- D bằng miền (θ, ρ) tương ứng (nên vẽ một hình vẽ)
- $f(x, y)$ bằng $f(\cos\theta, \rho\sin\theta)$
- $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bằng $|\rho|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$.

Thông thường thì ρ dương hay bằng không.

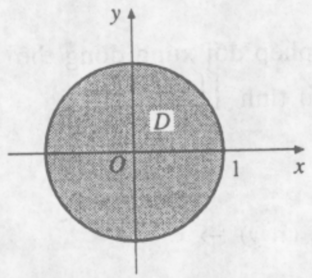
THÍ DỤ :

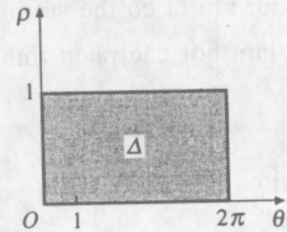
1) Tính $I = \iint\limits_D f$, trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ và $f : (x, y) \mapsto x^2y^2$.

Ký hiệu $\Delta = [0; 2\pi] \times [0; 1]$ rồi chuyển qua tọa độ cực, ta có :

$$I = \iint_{\Delta} (\rho\cos\theta)^2 (\rho\sin\theta)^2 \rho d\theta d\rho = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^5 d\rho\right)$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{48}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{\pi}{24}.$$

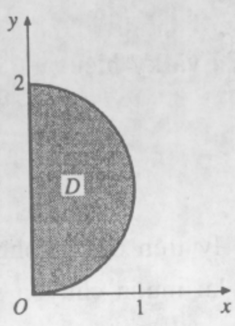


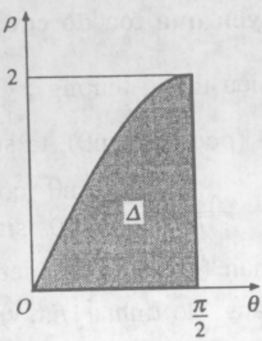


2) Tính $I = \iint_D f$, trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$,

$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Với $\rho > 0 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho\sin\theta \leq 0 \Leftrightarrow \rho \leq 2\sin\theta$.





Vậy với ký hiệu $\Delta = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta\}$ ta suy ra :

$$I = \iint_{\Delta} \rho^3 d\theta d\rho = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\sin\theta} \rho^3 d\rho\right)d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Bài tập

◊ **13.2.4** Tính các tích phân kép $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ trong các thí dụ sau đây, trong đó nêu ra các điều kiện để xác định D, tiếp theo là $f(x, y)$:

a) $\begin{cases} x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ \dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^4 + y^4 + x^2 - y^2 \leq 1 \\ 2x(x^2 + y^2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \\ |x - y| \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ xy\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \text{ cho trước} \\ x^2 + y^2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \text{ cho trước} \\ x^3 + y^3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 y \end{cases}$

i) $\begin{cases} x \geq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

k) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 - y^2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^2 + y^2 - Rx \leq 0,\ R \in \mathbb{R}_+^* \text{ cho trước} \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$

m) $\begin{cases} y \geq 0,\ 0 \leq x \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y \end{cases}$

n) $\begin{cases} |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \end{cases}$

o) $\begin{cases} y \geq 0,\ x^2 + y^2 - x \leq 0, x^2 + y^2 - y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 \leq 2xy \\ \sqrt{xy} \end{cases}$

q) $\begin{cases} |\rho| \leq \sqrt{\cos\theta} \text{ (trong tọa độ cực)} \\ x^2 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \\ (x+y)^2 e^{x^2 - y^2} \end{cases}$

s) $\begin{cases} 0 \leq x + y \leq 4,\ x \leq y,\ xy \geq 1 \\ (x^2 - y^2)\cos(xy) \end{cases}$

t) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 \leq 1 \\ x^2 y^2 \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3} \end{cases}$

u) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1 \\ xy \end{cases}$

v) $\begin{cases} y^2 - 2px \leq 0,\ x^2 - 2py \leq 0,\ p \in \mathbb{R}_+^* \text{ cho trước} \\ \exp \dfrac{x^3 + y^3}{xy} \end{cases}$

(áp dụng phép đổi biến $x = u^2 v,\ y = uv^2$).

w) $\begin{cases} a \leq xy \leq b,\ y \geq x \geq 0,\ y^2 - x^2 \leq 1,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ cho trước sao cho } 0 < a < b \\ (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) \end{cases}$

(áp dụng phép đổi biến $u = xy,\ v = y^2 - x^2$).

◊ **13.2.5** Giả sử D là phần của nửa mặt phẳng $y > 0$ giới hạn bởi bốn đường parabol :
$P_1 : y^2 + 4x + 4$, $P_2 : y^2 + 2x + 1$, $P_3 : y^2 = 9 - 6x$,
$P_4 : y^2 = 4 - 4x$,
và $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Tính $I = \iint\limits_D f$ bằng cách áp dụng phép đổi biến xác định như sau :

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,\ u > 0,\ v > 0.$$

◊ **13.2.6** Cho A, a, b, c là những số thực thỏa mãn $A > 0$, $a > 0$, $b^2 - ac < 0$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax^2 + 2bxy + cy^2 \le A\}$, $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \exp(-(ax^2 + 2bxy + cy^2)). \text{ Tính } I = \iint\limits_D f.$$

◊ **13.2.7** Giả sử $a \in \mathbb{R}_+$, $f : [-a; a] \to \mathbb{R}$ liên tục và chẵn, $D = [0; a]^2$. Chứng minh rằng :

$$\iint\limits_D f(x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^a (a - t)f(t)\mathrm{d}t.$$

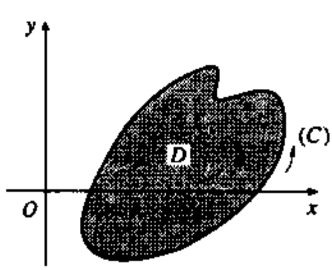
◊ **13.2.8*** Cho $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ sao cho $a > b$, (E) là đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ là các tiêu điểm của (E) ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$), D là miền đóng giới nội giới hạn bởi (E). Tính $\iint\limits_D (MF + MF')\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (trong đó $M(x, y)$ là điểm chạy) bằng cách chia D thành những hình elip có cùng tiêu điểm với (E).

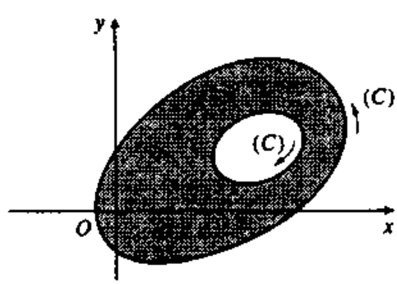
13.2.6 Công thức Green– Riemann

♦ **Định lý (Công thức Green-Riemann)**

Giả sử
- D là một tập compac "đơn" thuộc $\mathbb{R}^2$, giới hạn bởi một đường đóng (C) thuộc lớp C^1 từng khúc, định hướng theo chiều thuận.
- U là một tập mở của $\mathbb{R}^2$ bao hàm D
- P, Q: $U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U.

Khi đó : $$\int\limits_{(C)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$





NHẬN XÉT :

1) Nếu ω đóng và U là hình sao thì ta lại tìm được kết quả : $\int_{(C)} \omega = 0$ (xem 13.1.4).

2) Nếu ($P = -y$, $Q = 0$) hay ($P = 0$, $Q = x$), ta lại có công thức cho một diện tích phẳng qua một tích phân đường (13.1.6) hay một tích phân kép (13.2.3, Mệnh đề 1).

Bài tập

◊ **13.2.9** Giả sử D là một tập con đóng giới nội của $\mathbb{R}^2$, giới hạn bởi một đường (C) đóng, thuộc lớp C^1 và định hướng theo chiều thuận, $u, v : D \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ thuộc lớp C^1. Chứng minh rằng :

$$\iint_D u(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{(C)} u(x, y)\, v(x, y))\mathrm{d}x - \iint_D \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\, v(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(công thức này giống với công thức tích phân từng phần, 6.4.4, Tập 1).

13.3 Tích phân bội ba

Việc khảo sát các tích phân bội ba cũng giống như với các tích phân kép. Chúng ta sẽ nêu ra ở đây một cách ngắn gọn các kết quả.

13.3.1 Tập con của $\mathbb{R}^3$ cầu phương được

Việc khảo sát này cũng tương tự như việc khảo sát các tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^2$ (13.2.1), có thêm một tọa độ thứ 3, thường ký hiệu là z. Các thuật ngữ cũng vẫn giữ nguyên, ngoại trừ : **thể tích** $\mathcal{V}(D)$ thay cho diện tích $\mathcal{A}(D)$

13.2.2 Định nghĩa tích phân bội ba

Ta lặp lại định nghĩa tích phân kép (13.2.2) chỉ thay $(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ bằng $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$.

Không có cách minh họa hình học "cụ thể" cho $\iiint\limits_D f$.

13.3.3 Các tính chất đơn giản của tích phân bội ba

Cũng giống như ở 13.2.3, với những giả thiết tương tự (về tính cầu phương được và tính khả tích), ta có :

1) $\iiint\limits_D 1 = \mathcal{V}(D)$.

2) $\iiint\limits_{\overline{D}} f$ tồn tại khi và chỉ khi $\iiint\limits_D f$ tồn tại, và khi đó :

$$\iiint\limits_{\overline{D}} f = \iiint\limits_D f.$$

3) $\iiint\limits_D (\lambda f + g) = \lambda \iiint\limits_D f + \iiint\limits_D g.$

4) Nếu $f\big|_{D_1}$ và $f\big|_{D_2}$ khả tích theo thứ tự trên D_1 và D_2, thì f khả tích trên $D_1 \cup D_2$ và :

$$\iiint\limits_{D_1 \cup D_2} f = \iiint\limits_{D_1} f + \iiint\limits_{D_2} f - \iiint\limits_{D_1 \cap D_2} f.$$

5) Nếu f khả tích trên D_2 và $D_1 \subset D_2$, thì $f\big|_{D_1}$ khả tích trên D_1.

6) $f \geq 0 \Rightarrow \iiint\limits_D f \geq 0$.

7) $f \leq g \Rightarrow \iiint\limits_D f \leq \iiint\limits_D g$.

8) $\mathbf{V}(D)\mathrm{Inf}(f) \leq \iiint\limits_D f \leq \mathbf{V}(D)\,\mathrm{Sup}(f)$.

9) $(f \geq 0$ và $D_1 \subset D_2) \Rightarrow \iiint\limits_{D_1} f \leq \iiint\limits_{D_2} f$.

10) $\left|\iiint\limits_D f\right| \leq \iiint\limits_D |f|$.

11) $\left(\iiint\limits_D fg\right)^2 \leq \left(\iiint\limits_D f^2\right)\left(\iiint\limits_D g^2\right)$.

13.3.4 Định lý Fubini

◆ **Định lý** **(Định lý Fubini)**

Giả sử
- $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ với $a \leq b$
- $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc và thoả mãn $\varphi_1 \leq \varphi_2$
- $D_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
- $g_1, g_2 : D_0 \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc và thoả mãn $g_1 \leq g_2$
- $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \end{cases} \right\}$
- $f : D \to \mathbf{R}$ liên tục.

Khi đó
- D cầu phương được
- f khả tích trên D
- $\displaystyle\iiint\limits_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

THÍ DỤ:

Tính $I = \iiint\limits_D f$, trong đó : $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ z \leq y,\ x^2 + y \leq 1\}$

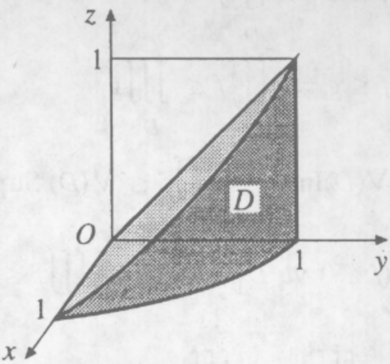
và $f(x, y, z) = xyz$.

$$I = \int_0^1\left(\int_0^{1-x^2}\left(\int_0^{y} xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x^2}\frac{1}{2}\,xy^3\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\frac{1}{2}\,x\,\frac{(1-x^2)^4}{4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{16}\,\frac{(1-x^2)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{80}\,.$$



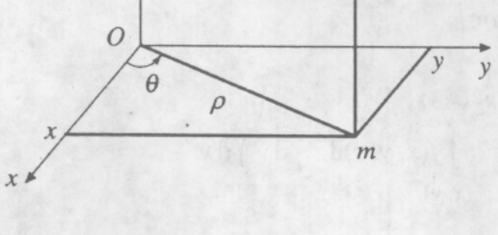
13.3.5 Phép đổi biến trong tích phân bội ba

♦ **Định lý** Giả sử U, V là hai tập mở trong $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to V$ là một C^1– vi phôi, Δ là một tập con cầu phương được của $\mathbb{R}^3$ bao hàm trong U, $f : \Phi(\Delta) \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục. Khi đó :

- $\Phi(\Delta)$ cầu phương được
- $\displaystyle\iiint_{\Phi(\Delta)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(\Phi(u, v, w))\,\left|\det(J_\Phi(u, v, w))\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$

1) Phép chuyển qua tọa độ trụ

Một điểm $M(x, y, z)$ thuộc $\mathbb{R}^3$ được quy về một **hệ tọa độ trụ** (θ, ρ, z), trong đó (θ, ρ) là một hệ tọa độ cực của hình chiếu vuông góc m của điểm M trên mặt phẳng xOy. Vậy ta có các công thức đổi biến số :



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Chúng ta công nhận rằng các kết luận của định lý trên đây vẫn đúng cho trường hợp này, tuy rằng không phải là đã có mọi giả thiết. Ở đây thì :

$$\det\left(J_\Phi(\theta, \rho, z)\right) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \rho\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Ta cần ghi nhớ rằng :

> Trong một tích phân bội ba, để chuyển qua tọa độ trụ, cần thay $dxdydz$ bằng $|\rho| d\theta d\rho dz$.

THÍ DỤ:

Tính $I = \iiint\limits_D f$, trong đó $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le z^2\}$,

$f(x, y, z) = |x^2 - y^2|$. Chuyển qua tọa độ trụ :

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1,\ \rho^2 \le z,\ \rho \ge 0\}$$

và với ký hiệu $\Delta = \{(\theta, \rho, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le \rho \le \sqrt{z}\}$,

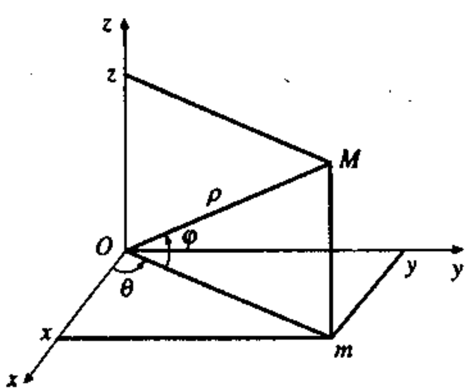
ta suy ra :

$$I = \iiint\limits_\Delta \left| \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right| |\rho|\, d\theta d\rho dz$$

$$= \Big(\int_0^{2\pi} \left| \cos^2\theta - \sin^2\theta \right| d\theta\Big) \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho\Big) dz = \Big(\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta\Big)\Big(\int_0^1 \frac{z^2}{4} dz\Big)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} |\cos u| du = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos u\, du = \frac{1}{3}.$$

2) Chuyển qua tọa độ cầu



Một điểm $M(x, y, z)$ thuộc $\mathbf{R}^3$ được quy về một **hệ tọa độ cầu** (θ, ρ, φ) trong đó $\rho = OM$ và θ là góc cực của hình chiếu vuông góc m của điểm M trên mặt phẳng xOy, và φ là góc giữa mặt phẳng xOy (định hướng theo chiều thuận) và $\overrightarrow{OM}$. Theo thông lệ ta đặt điều kiện : $\theta \in [0; 2\pi]$ (hoặc $\theta \in [-\pi; \pi]$) và $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Như thế ta có các công thức đổi biến : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$

Ta sẽ thừa nhận rằng kết luận của định lý trên đây vẫn đúng cho trường hợp này, tuy rằng không phải là đã có đủ mọi giả thiết.

Ở đây thì :

$$\det\Big(J_\Phi(\theta, \rho, \varphi)\Big) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$= -\rho^2(\sin^2\theta\cos^3\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi + \cos^2\theta\cos^3\varphi) =$

$= -\rho^2(\sin^2\theta\cos\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi) = -\rho^2\cos\varphi.$

Ta cần ghi nhớ :

> Trong một tích phân bội ba, để chuyển qua tọa độ cầu, ta thay thế $dxdydz$ bằng $\rho^2|\cos\varphi|d\theta d\rho d\varphi$.

THÍ DỤ :

Tính : $I = \iiint\limits_D f$, trong đó $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ và $f(x, y, z) =$ $= x^2 + y^2 + z^2$. Chuyển qua tọa độ cầu và ký hiệu $\Delta = [0 ; 2\pi] \times [0; 1] \times \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có :

$$I = \iiint\limits_{\Delta} \rho^2\rho^2|\cos\varphi| d\theta d\rho d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi\right) = \frac{4\pi}{5}.$$

Bài tập

◊ **13.3.1** Tính các tích phân bội ba $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ trong các thí dụ sau đây, ở đó đã cho các điều kiện xác định D, tiếp theo là $f(x, y, z)$:

a) $\begin{cases} [0 ; 1]^3 \\ x^2ye^{xyz} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1 \\ z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1 \\ z^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z^2, \ 0 \leq z \leq 1 \\ x^2z \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ R \in \mathbb{R}_+^* \text{ cố định} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}, \ a \in \mathbb{R}_+^* \text{ cố định, } a > R \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - y \leq 0, \ 0 \leq z \leq 1 \\ \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ R \in \mathbb{R}_+^* \text{ cố định} \\ (x + y + z)^2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 1 \le \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 4,\ (a, b, c) \in \left(\mathrm{R}_+^*\right)^3 \text{ cố định} \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ (a, b, c) \in \left(\mathrm{R}_+^*\right)^3 \text{ cố định} \\ xyz \end{cases}$

k) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + z^2 \le 1 \\ (3x + 2y + z)^2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ \dfrac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)} \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0 \\ z \end{cases}$

Trong các thí dụ o), p), áp dụng phép đổi biến xác định bởi :

$$x + y + z = u,\ y + z = uv,\ z = uvw.$$

o) $\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1 \\ xyz \end{cases}$

p) $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1 \\ \dfrac{1}{(1 + y + z)^2} \end{cases}$

q) $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0,\ ax + by + cz \le d,\ (a, b, c, d) \in \left(\mathrm{R}_+^*\right)^4 \text{ cố định} \\ \sqrt{xyz} \end{cases}$

◊ **13.3.2** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ $(a < b)$, $D = [a; b]^2$, $E = [a; b]^3$, $f_1, f_2, f_3 : D \to \mathbf{R}$ liên tục. Ta ký hiệu $I = \iiint\limits_E |f_1(x, y) f_2(x, z) f_3(y, z)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, và với mỗi i thuộc $\{1, 2, 3\}$,

$$J_i = \iint\limits_D |f_i(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Chứng minh : $I^2 \le J_1 J_2 J_3$.

13.4 Khối lượng, tâm quán tính, mômen quán tính

13.4.1 Hệ vật chất

- **Định nghĩa 1**

  1) **Dây** là mọi cặp (C, σ) trong đó C là một đường thuộc lớp C^1 từng khúc và $\sigma : C \to \mathbf{R}_+$ là một ánh xạ liên tục; σ được gọi là **mật độ (tuyến tính)** của dây (C, σ).

  2) **Tấm phẳng** là mọi cặp (D, σ) trong đó D là một tập con cầu phương được của $\mathbf{R}^2$ và $\sigma : D \to \mathbf{R}_+$ là một ánh xạ liên tục; σ được gọi là **mật độ (mặt)** của tấm (D, σ).

  3) **Khối rắn** là mọi cặp (S, σ) trong đó S là một tập con cầu phương được của $\mathbf{R}^3$ và $\sigma : S \to \mathbf{R}_+$ là một ánh xạ liên tục; σ được gọi là **mật độ (khối)** của khối rắn (D, σ).

Ở đây "đường thuộc lớp C^1 từng khúc" chỉ ảnh của một cung

$$\begin{array}{ccc}[0; 1] & \to & \mathrm{R}^3 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t))\end{array}$$ trong đó x, y, z thuộc lớp C^1 từng khúc.

Trong Tập 4 chúng ta sẽ xét việc nghiên cứu các tấm ghềnh, đòi hỏi phải sử dụng các tích phân mặt.

- **Định nghĩa 2** **Hệ vật chất** là các dây, tấm phẳng, khối rắn. Khi σ là hằng thì ta nói rằng hệ vật chất (E, σ) là **đồng chất**.

13.4.2 Khối lượng của một hệ vật chất

Nếu C là một đường thuộc lớp C^1 từng khúc, tức là ảnh của một cung $t \to (x(t), y(t), z(t))$, thì ta sẽ ký hiệu hoành độ cong trên C là s, được tính từ một gốc tọa độ cong theo chiều của C, bởi công thức :

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$ (Xem Tập 7, Hình học).

- **Các định nghĩa**

  1) **Khối lượng** của một dây (C, σ) là số thực μ xác định bởi :
  $\mu = \int_C \sigma(M)\mathrm{d}s$, trong đó M vạch nên C.

  2) **Khối lượng** của một tấm phẳng (D, σ) thuộc $\mathbf{R}^2$ là số thực μ xác định bởi : $\mu = \iint_D \sigma(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, trong đó $M(x, y)$ vạch nên D.

  3) **Khối lượng** của một thể rắn (S, σ) là số thực μ xác định bởi :
  $\mu = \iiint_S \sigma(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, trong đó $M(x, y, z)$ vạch nên S.

THÍ DỤ :

1) Tính khối lượng của dây (C, σ), trong đó C có biểu diễn tham số là :

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{t^3}{3} \\ y = t^2 \\ z = t + \dfrac{t^3}{3} \end{cases}, \quad t \in [0; 1] \text{ và } \sigma(x, y, z) = t^2.$$

Ở đây ta có : $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2 = (1 - t^2)^2 + (2t)^2 + (1 + t^2)^2 =$
$= 2(1 + t^2)^2$, do đó nếu định hướng C theo chiều tăng của t thì suy ra
$ds = \sqrt{2}\,(1 + t^2)dt$. Vậy khối lượng μ của dây (C, σ) cho bởi :

$$\mu = \int_0^1 t^2\sqrt{2}(1 + t^2)dt = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

2) Tính khối lượng của một tấm phẳng hình vuông (D, σ), có mật độ xác định tại mọi điểm M của D bởi $\sigma(M) = kOM$, trong đó O là tâm của D ($k \in \mathbb{R}_+^*$, không đổi).

Vì hình vuông D và mật độ σ đối xứng đối với các đường trung bình và các đường chéo của D, nên khối lượng μ của (D, σ) bằng $8\mu_1$, trong đó μ_1 là khối lượng của tam giác D_1 trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x)$ với mật độ σ (ký hiệu cạnh hình vuông D là $2a$) :

$$\mu_1 = \iint_{D_1} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực : ký hiệu $\Delta_1 = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \text{ và } 0 \le \rho \le \dfrac{a}{\cos\theta}\}$.

Theo định lý đổi biến trong tích phân kép (13.2.5) :

$$\mu_1 = \iint_{\Delta_1} k\rho\rho d\theta d\rho = k\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho\right)d\theta$$

$$= \frac{k}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{a^3}{\cos^3\theta}\, d\theta\ ;$$

sau khi thực hiện mọi tính toán ta suy ra $\mu = \dfrac{4ka^3}{3}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$.

3) Tính khối lượng μ của một hình cầu S tâm O, bán kính R, với mật độ σ xác định tại mọi điểm M của S bởi : $\sigma(M) = \left(1 + \dfrac{OM}{R}\right)^{1/2}$.

Chuyển qua tọa độ cầu : $\mu = \iiint_\Delta \sqrt{1 + \dfrac{\rho}{R}}\, \rho^2 \cos\varphi d\theta d\rho d\varphi$, trong đó :

$$\Delta = \{(\theta, \rho, \varphi) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \le \theta \le 2\pi\ ; 0 \le \rho \le R\ ; -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Suy ra : $\mu = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \sqrt{1+\frac{\rho}{R}}\,\rho^2 d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi\right)$.

Để tính tích phân thứ hai ta áp dụng phép đổi biến $u = \sqrt{1+\frac{\rho}{R}}$:

$$\int_0^R \sqrt{1+\frac{\rho}{R}}\,\rho^2 d\rho = \int_1^{\sqrt{2}} 2R^3u^2(u^2-1)^2 du.$$

Cuối cùng ta có : $\mu = \frac{16(11\sqrt{2}-4)}{105}\pi R^3$.

NHẬN XÉT : Khối lượng của một hệ vật chất đồng chất bằng :

$l(C)\sigma$ nếu là một dây (C, σ)

$\mathcal{A}(D)\sigma$ nếu là một tấm phẳng (D, σ)

$\mathcal{V}(S)\sigma$ nếu là một khối rắn (S, σ).

Bài tập

◊ **13.4.1** Tính khối lượng μ của các sợi dây (C, σ) sau đây ($a > 0$, $R > 0$ không đổi) :

a) $\begin{cases} C = [0\,;\,a] \\ \sigma(M) = \dfrac{OM^2}{a^2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} C \text{ là nửa đường tròn tâm } O, \text{ bán kính } R, \text{ nằm trên nửa mặt phẳng } y \geq 0 \\ \sigma(M) = \dfrac{y}{R} \end{cases}$

◊ **13.4.2** Tính khối lượng μ của các tấm phẳng (D, σ) sau đây của $\mathbf{R}^2$ ($R > 0$ không đổi) :

a) $\begin{cases} D \text{ là đĩa tròn tâm } O, \text{ bán kính } R \\ \sigma(M) = \dfrac{OM^2}{R^2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} D \text{ là đĩa tròn tâm } O, \text{ bán kính } R \\ \sigma(M) = \dfrac{y+R}{R} \ (y \text{ là tung độ của } M) \end{cases}$

◊ **13.4.3** Tính khối lượng các khối rắn (S, σ) sau đây ($a, b, c, d, D, h, k, R, \lambda$ thuộc $\mathbf{R}_+^*$, không đổi) :

a) $\begin{cases} S \text{ là hình cầu tâm } O, \text{ bán kính } R. \\ \sigma(M) = D + \dfrac{OM}{R}(d-D) \end{cases}$

b) $\begin{cases} S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\} \\ \sigma(M) = \left(1+\dfrac{Om^2}{R^2}\right)^{1/2}, m \text{ là hình chiếu vuông góc của } M \text{ trên } xOy. \end{cases}$

c) $\begin{cases} S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\} \\ \sigma(M) = \lambda OM^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, z^2 \leq k^2(x^2 + y^2)\} \\ \sigma \text{ không đổi.} \end{cases}$

13.4.3 Tâm quán tính của một hệ vật chất

Các hệ vật chất được xét trong §13.4.3 này giả thiết khối lượng $\neq 0$.

♦ **Các định nghĩa**

1) **Tâm quán tính** của một dây (C, σ) là điểm G thuộc $\mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(C, \sigma)} \int_C \sigma(M)\, \overrightarrow{OM}\, \mathrm{d}s,$$

trong đó M vạch nên C, s là hoành độ cong của M trên C, và $\mu(C, \sigma)$ là khối lượng của (C, σ).

2) **Tâm quán tính** của một tấm phẳng (D, σ) thuộc $\mathbf{R}^2$ là điểm G thuộc $\mathbf{R}^2$ xác định bởi :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(D, \sigma)} \iint_D \sigma(M)\, \overrightarrow{OM}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

trong đó $M(x, y)$ vạch nên D và $\mu(D, \sigma)$ là khối lượng của tấm phẳng (D, σ).

3) **Tâm quán tính** của một khối rắn (S, σ) là điểm G thuộc $\mathbf{R}^3$ xác định bởi :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(S, \sigma)} \iiint_S \sigma(M)\, \overrightarrow{OM}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

trong đó $M(x, y, z)$ vạch nên S và $\mu(S, \sigma)$ là khối lượng của (S, σ).

NHẬN XÉT :

1) Các tích phân trên đây có hàm dưới dấu tích phân là những hàm lấy giá trị trong R^2 hay R^3, vượt quá khuôn khổ các §§13.1, 13.2, 13.3; trong thực tế ta sẽ quy về các hàm lấy giá trị thực bằng cách chuyển sang các tọa độ.

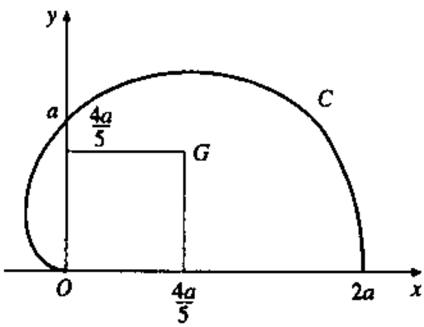
2) Các định nghĩa trên đây là sự mở rộng cho một số tập hợp vô hạn khái niệm *tâm tỷ cự* của một hệ hữu hạn điểm có trọng số (xem Tập 7, Hình học).

Trong trường hợp một hệ vật chất đồng chất thì tâm quán tính cũng được gọi là **trọng tâm**. Thường ta có thể áp dụng được những phép **đối xứng vật chất**, tức là những phép đối xứng đồng thời đối với vật thể hình học xác định hệ vật chất và đối với mật độ. Chẳng hạn, nếu như hệ vật chất đối xứng đối với một đường thẳng thì tâm quán tính nằm trên đường thẳng đó.

THÍ DỤ :

1) Xác định tâm quán tính G của một sợi dây đồng chất (C, σ) tạo bởi một nửa đường hình tim có phương trình cực là :

$$\rho = a(1 + \cos\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi \ (a > 0 \text{ không đổi}).$$



Hoành độ cong biểu thị trong tọa độ cực như sau :

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2\\ &= (a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2)(\mathrm{d}\theta)^2\\ &= 2a^2(1+\cos\theta)(\mathrm{d}\theta)^2\\ &= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}(\mathrm{d}\theta)^2.\end{aligned}$$

Định hướng (C) theo chiều θ tăng, ta được : $\mathrm{d}s = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta.$

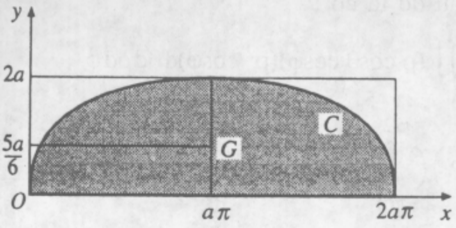
Khối lượng μ của (C, σ) cho bởi : $\mu = \displaystyle\int_C \sigma \mathrm{d}s = 2a\sigma\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 4a\sigma.$

Bây giờ ta tính các tọa độ x_G, y_G :

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{\mu}\int_C \sigma x\mathrm{d}s = \frac{1}{4a}\int_0^\pi (a(1+\cos\theta)\cos\theta)\left(2a\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{a}{2}\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\\ &= 2a\int_0^1 (1-u^2)(1-2u^2)\mathrm{d}u = \frac{4a}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{1}{\mu}\int_C \sigma y\mathrm{d}s = \frac{1}{4a}\int_0^\pi (a(1+\cos\theta)\sin\theta)\left(2a\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{a}{2}\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\\ &= 2a\int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^1 2v^4\mathrm{d}v = \frac{4a}{5}.\end{aligned}$$

2) Xác định tâm quán tính G của tấm phẳng đồng chất (D, σ) thuộc $\mathbf{R}^2$ giới hạn bởi $x'x$ và vòm cyclôit xác định bởi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$ (a không đổi).



Do tính đối xứng vật chất :

$$x_G = \pi a.$$

Ta tính khối lượng μ của (D, σ), bằng công thức Green–Riemann (xem 13.2.6) :

$$\mu = \iint_D \sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sigma \int_C y\mathrm{d}x = -\sigma \left(\int_0^{2\pi a} 0\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{0} (a(1-\cos t))^2 \mathrm{d}t \right)$$

$$= \sigma a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2} \right) \mathrm{d}t = 3\pi\sigma a^2.$$

Vậy : $\mu y_G = \iint_D \sigma y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sigma \int_C \frac{y^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2}\int_0^{2\pi} (a(1-\cos t))^3 \mathrm{d}t$

$$= \frac{\sigma a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\mathrm{d}t$$

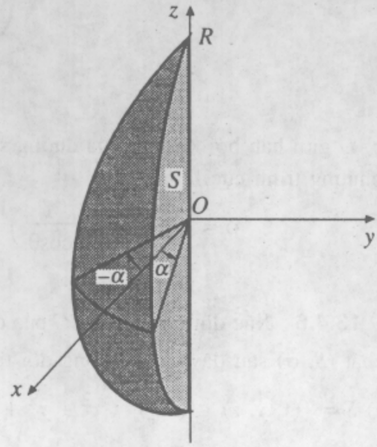
$$= \sigma a^3 \int_0^{\pi} (1 + 3\cos^2 t)\mathrm{d}t = \sigma a^3 \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) \right) \mathrm{d}t = \frac{5}{2}\pi\sigma a^3,$$

suy ra $y_G = \dfrac{5a}{6}$.

3) Xác định tâm quán tính G của khối rắn đồng chất (S, σ), trong đó S là hình quạt cầu của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ ($R > 0$ không đổi) xác định trong hệ tọa độ cầu bởi : $-\alpha \le \theta \le \alpha$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le R$, trong đó $\alpha \in \,]0; \pi]$ cho trước.

Chúng ta chuyển sang tọa độ cầu. Ký hiệu :

$$\Delta = \left\{ (\theta,\ \rho,\ \varphi) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ -\alpha \le \theta \le \alpha,\ 0 \le \rho \le R,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$



Khối lượng μ của (S, σ) cho bởi :

$$\mu = \iiint_S \sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \iiint_\Delta \rho^2 \cos\varphi \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= \sigma \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right)$$

$$= \frac{4\alpha R^3}{3}\sigma.$$

Do đối xứng vật chất : $y_G = z_G = 0$. Sau đó ta có ;

$$\mu x_G = \iiint_S \sigma x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \iiint_\Delta (\rho\cos\theta\cos\varphi)(\rho^2\cos\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= \sigma\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{\pi R^4\sin\alpha}{4}\sigma,$$

suy ra $\quad x_G = \dfrac{3\pi}{16}R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}.$

Trong Tập 4 chúng ta sẽ xét đến các *định lý Guldin* về các khối tròn xoay.

Bài tập

◊ **13.4.4** Xác định trọng tâm G của các sợi dây đồng chất (C, σ) sau đây (a, h, r không đổi thuộc $\mathbb{R}_+^*$) :

a) C là hợp của phần tư đường tròn tâm O, các đầu mút là A, B, và hai đoạn thẳng OA và OB.

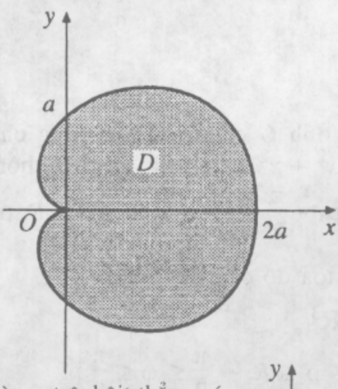
b) C là cung đường cyclôit $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

c) C là đoạn đường đinh ốc có bước không đổi $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ht$, $t \in [0; a]$.

◊ **13.4.5** Xác định trọng tâm G của các tấm phẳng đồng chất (D, σ) sau đây ($a > 0$ không đổi) :

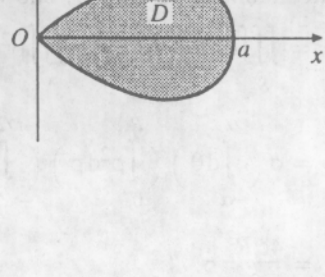
a) $D = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ;\ x^{2/3} + y^{2/3} \le a^{2/3}\right\}$.

b) D giới hạn bởi đường hình tim có phương trình cực $\rho = a(1 + \cos\theta)$.



c) D giới hạn bởi khuyên của đường strôphôit thẳng có phương trình cực là

$$\rho = a\left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)$$



◊ **13.4.6** Xác định trọng tâm G của các khối rắn đồng chất (S, σ) sau đây (h, p không đổi thuộc $\mathbb{R}_+^*$) :

a) $S = \{(x, y, z) \in (\mathbf{R}_+)^3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ;\ x^2 + y^2 \le 2pz,\ 0 \le z \le h\}$.

13.4.4 Mômen quán tính của một hệ vật chất

- **Định nghĩa 1** Cho H là một điểm hoặc một đường thẳng hoặc một mặt phẳng thuộc $\mathbf{R}^3$; với mọi M thuộc $\mathbf{R}^3$, ký hiệu $d(M, H)$ là khoảng cách từ M đến H.

  1) **Mômen quán tính** của một dây (C, σ) **đối với** H là số thực I_H định nghĩa là :

  $$I_H = \int_C \sigma(M)(d(M,H))^2 \mathrm{d}s,$$

  trong đó M vạch nên C và s là hoành độ cong của M trên C.

  2) **Mômen quán tính** của một khối rắn (S, σ) **đối với** H là số thực I_H được định nghĩa là :

  $$I_H = \iiint_S \sigma(M)\,(\mathrm{d}(M,H))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

  trong đó $M(x, y, z)$ vạch nên S.

- **Định nghĩa 2** Cho H là một điểm hay một đường thẳng thuộc $\mathbf{R}^2$; với mọi điểm M thuộc $\mathbf{R}^2$, ta ký hiệu $\mathrm{d}(M, H)$ là khoảng cách từ M tới H. **Mômen quán tính** của một tấm phẳng (D, σ) thuộc $\mathbf{R}^2$ **đối với** H là số thực I_H được định nghĩa là :

  $$I_H = \iint_D \sigma(M)(\mathrm{d}(M,H)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

  trong đó $M(x, y)$ vạch nên D.

Trong Tập 4 chúng ta sẽ xét đến các mômen quán tính của một tấm phẳng thuộc $\mathbf{R}^3$.

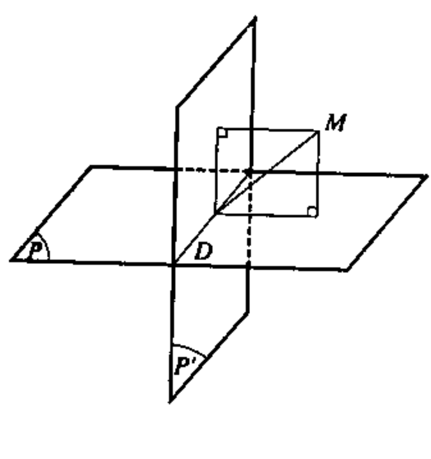
Giả sử (E, σ) là một hệ vật chất.

1) Cho P, P' là hai mặt phẳng vuông góc, $D = P \cap P'$.

Vì ta có với mọi M thuộc $\mathbf{R}^3$:

$(\mathrm{d}(M, D))^2 = (d(M, P))^2 + (d(M, P'))^2$

nên suy ra : $\quad I_D = I_P + I_{P'}$.



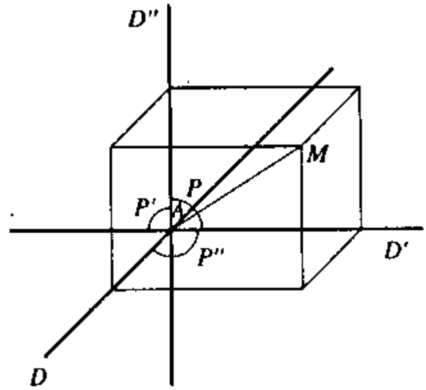
Mômen quán tính của một hệ vật chất (E, σ) đối với một đường thẳng D bằng tổng các mômen quán tính của (E, σ) đối với hai mặt phẳng chứa D và vuông góc với nhau.

2) Cho P, P', P'' là ba mặt phẳng đôi một vuông góc và cắt nhau tại một điểm A.

Vì ta có với mọi điểm M thuộc $\mathbf{R}^3$:

$$(\mathrm{d}(M, A))^2 = (\mathrm{d}(M, P))^2 + (\mathrm{d}(M, P'))^2 + (\mathrm{d}(M, P''))^2,$$

nên suy ra : $I_A = I_P + I_{P'} + I_{P''}$.



Mômen quán tính của một hệ vật chất (E, σ) đối với một điểm A bằng tổng các mômen quán tính của (E, σ) đối với ba mặt phẳng đi qua A và đôi một vuông góc với nhau.

3) Giả sử $A \in \mathbf{R}^3$, D, D', D'' là ba đường thẳng đi qua A và đôi một vuông góc với nhau. Ký hiệu P (tương ứng: P', P'') là mặt phẳng chứa D' và D'' (tương ứng : D và D''; D và D'), theo 1) và 2) ta có :

$$I_D = I_{P'} + I_{P''},\ I_{D'} = I_P + I_{P''},\ I_{D''} = I_P + I_{P'},\ I_A = I_P + I_{P'} + I_{P''}.$$

suy ra $$2I_A = I_D + I_{D'} + I_{D''}$$

Mômen quán tính của một hệ vật chất (E, σ) đối với một điểm A bằng một nửa tổng các mômen quán tính của (E, σ) đối với ba đường thẳng đi qua A và đôi một vuông góc với nhau.

THÍ DỤ:

1) Tính mômen quán tính đối với O của sợi dây (C, σ), trong đó :

$$C = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t,\ t \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2} \right], \text{ và } \sigma(M) = \operatorname{sh} t. \\ z = \operatorname{ch} t \end{cases}$$

Ta có : $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sh}^2 t)(\mathrm{d}t)^2 = \operatorname{ch}^2 t(\mathrm{d}t)^2$, do đó nếu định hướng C theo chiều t tăng thì ta có : $\mathrm{d}s = \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$. Suy ra mômen quán tính phải tìm là :

$$I_O = \int_C \sigma(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh} t(1 + \operatorname{ch}^2 t)\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} (1 + u^2)u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{ch}^4\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}.$$

2) Tính các mômen quán tính đối với $x'x$, $y'y$, O của tấm phẳng đồng chất (mật độ σ không đổi) D tạo nên bởi một đĩa tròn tâm O bán kính R ($R > 0$ không đổi). Chuyển qua tọa độ cực, và ký hiệu $\Delta = \{(\theta, \rho) \in \mathbf{R}^2 ; -\pi \le \theta \le \pi, 0 \le \rho \le \mathbf{R}\}$, ta có :

- $I_{x'x} = \iint_D \sigma y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \iint_\Delta \rho^3 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \sigma\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \right)\left(\int_0^R \rho^3\mathrm{d}\rho \right)$

  $= \dfrac{\pi}{4} R^4 \sigma,$

- $I_{y'y} = I_{x'x}$ vì lý do đối xứng vật chất.

• $I_O = I_{x'x} + I_{y'y} = \dfrac{\pi}{2} R^4\sigma.$

3) Tính các mômen quán tính đối với các mặt phẳng tọa độ và đối với các trục tọa độ của khối rắn đồng chất (S, σ), trong đó S là elipxôit đặc xác định bởi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \ (a, b, c \in \mathbb{R}_+^* \text{ không đổi}).$$

Để tính các tích phân bội ba xác định các mômen đó, ta chuyển qua tọa độ elipxôit xác định bởi : $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad \theta \in [-\pi; \pi],\ \rho \in [0; 1],\quad \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = c\rho\sin\varphi \end{cases}$

Phép đổi biến này có thể xem như là hợp của phép chuyển qua tọa độ cầu và phép đổi biến afin xác định bởi : $x = aX,\ y = bY,\ z = cZ$.

Ký hiệu $\Delta = [-\pi; \pi] \times [0; 1] \times \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được :

• $I_{xOy} = \iiint\limits_S \sigma z^2 dxdydz = \sigma \iiint\limits_\Delta (c^2\rho^2\sin^2\varphi)(abc\rho^2\cos\varphi)d\theta d\rho d\varphi$

$$= \sigma abc^3\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi\right) = \frac{4\pi}{15}\sigma abc^3.$$

Ta cũng có : $I_{xOz} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma ab^3c$, $I_{yOz} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma a^3bc$, do các lý do đối xứng và hoán vị các chữ.

• $I_{Oz} = I_{xOz} + I_{yOz} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc(a^2 + b^2)$.

$I_{Ox} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc(b^2 + c^2)$, $I_{Oy} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc(a^2 + c^2)$.

• **Định lý (Công thức Huygens)**

Giả sử (E, σ) là một hệ vật chất

G là tâm quán tính của (E, σ)

H là một điểm hay một đường thẳng hay một mặt phẳng

H_G song song với H và đi qua G

d là khoảng cách từ H đến H_G

μ là khối lượng của (E, σ)

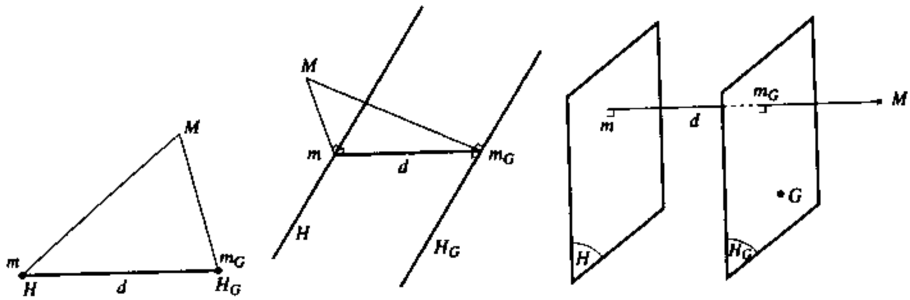
I_H (tương ứng: I_{H_G}) là mômen quán tính của (E, σ) đối với H (tương ứng : H_G).

Ta có : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2$.

Chứng minh:

Chúng ta sẽ khảo sát trường hợp một khối rắn (S, σ), vì hai trường hợp kia (dây, tấm phẳng) cũng tương tự.

Với mọi M thuộc S ta ký hiệu m (tương ứng : m_G) là hình chiếu vuông góc của M trên H (tương ứng : H_G). Ta có :



$$(\mathrm{d}(M, H))^2 = \overrightarrow{Mm}^2 = \left(\overrightarrow{Mm_G} + \overrightarrow{m_Gm}\right)^2 = \overrightarrow{Mm_G}^2 + 2\,\overrightarrow{Mm_G}\cdot\overrightarrow{m_Gm} + \overrightarrow{m_Gm}^2$$

$$= (\mathrm{d}(M, H_G))^2 + 2\,\overrightarrow{Mm_G}\cdot\overrightarrow{m_Gm} + d^2.$$

Suy ra : $$I_H = I_{H_G} + \iiint_S \sigma(M) 2\overrightarrow{Mm_G}\cdot\overrightarrow{m_Gm}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + d^2\iiint_S \sigma(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= I_{H_G} + 2\left(\iiint_S \sigma(M)\,\overrightarrow{mM_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d} + \mu d^2,$$

nếu $\vec{d}$ ký hiệu vectơ vuông góc với H và sao cho H_G là ảnh của H qua phép tịnh tiến theo $\vec{d}$.

Ta lại có : $$\left(\iiint_S \sigma(M)\,\overrightarrow{Mm_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d} = \left(\iiint_S \sigma(M)\,\overrightarrow{Gm_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d} - \left(\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d}$$

Một mặt thì $\iiint_S \sigma(M) Gm_G\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ song song với H_G, do đó vuông góc với $\vec{d}$.

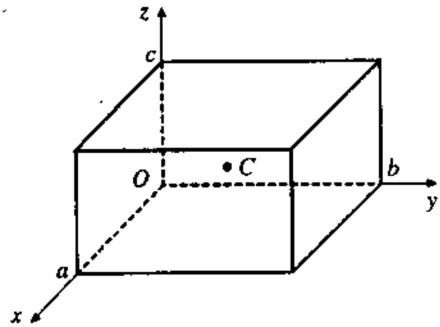
Mặt khác, theo định nghĩa G :

$$\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{OM}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(\iiint_S \sigma(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\overrightarrow{OG} = \vec{0}.$$

Cuối cùng ta có : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2$.

THÍ DỤ :

Tính các mômen quán tính của một hình hộp chữ nhật với các cạnh là a, b, c đối với : một mặt, một cạnh, một đỉnh, tâm.



1) $I_{xOy} = \iiint\limits_S \sigma z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$= \sigma\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^c z^2\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{3}\sigma abc^3.$

Tương tự đối với các mặt kia : $I_{xOz} = \frac{1}{3}\sigma ab^3c$, $I_{yOz} = \frac{1}{3}\sigma a^3bc$.

2) $I_{Ox} = I_{xOy} + I_{xOz} = \frac{1}{3}\sigma abc(b^2 + c^2)$.

Kết quả tương tự đối với các cạnh khác.

3) $I_O = I_{xOy} + I_{yOz} + I_{xOz} = \frac{1}{3}\ \sigma abc\,(a^2 + b^2 + c^2)$.

Kết quả tương tự đối với các đỉnh khác.

4) Áp dụng định lý Huygens và ký hiệu C là tâm, ta có :

$$I_O = I_C + \mu d^2$$

$\mu = \sigma abc$, $d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, suy ra $I_C = \frac{1}{12}\sigma abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

Bài tập

◊ **13.4.7** Tính mômen quán tính của sợi dây đồng chất (C, σ), trong đó C có biểu diễn tham số $(x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4b\cos\frac{t}{2},\ t \in [0\ ;\ 2\pi])$ đối với xOy ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$, không đổi).

◊ **13.4.8** Tính mômen quán tính của tấm phẳng đồng chất (D, σ) đối với H trong các thí dụ sau đây ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$, không đổi) :

a) $\begin{cases} D \text{ là một tam giác đều cạnh } a \\ H \text{ là một đỉnh của } D \end{cases}$

b) $\begin{cases} D \text{ là một hình chữ nhật với các cạnh } 2a,\ 2b \\ H \text{ là một đường chéo của } D \end{cases}$

c) $\begin{cases} D \text{ là một tam giác vuông với các cạnh } a,\ b \\ H \text{ là đỉnh góc vuông của } D \end{cases}$

d) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 - 2x \leq 0, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\} \\ H = x'x \end{cases}$

◊ **13.4.9** Tính mômen quán tính của khối rắn (S, σ) đối với H trong các thí dụ sau đây $(a, b, h, R \in \mathbb{R}_+^*$, không đổi) :

a) $\begin{cases} S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq h \right\} \\ H = zz' \end{cases}$

b) $\begin{cases} S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \} \\ H \text{ là mặt phẳng có phương trình } y = R. \end{cases}$

Phần thứ hai

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập

Chỉ dẫn và trả lời
Các bài tập chương 7

7.1.1 $\ln\dfrac{a+b}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{4}\right)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 16ab.$

7.1.2 • Có đẳng thức khi $x \in]-1\,;0]$.

• Với $x \in]0\,;1[$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \Leftrightarrow \ln(1+x) + \ln(1-x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 \leq 1.$$

7.2.1 Giả sử f thích hợp, sao cho $f \neq 0$.

• Giả thiết tồn tại $x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó ta có : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$, mâu thuẫn. Mâu thuẫn đó chứng tỏ : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$, rồi : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$.

• Vậy ta có thể xét $g : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ x \mapsto \ln(f(x))\end{array}$; g liên tục trên $\mathbf{R}$ và :

$\forall x \in \mathbf{R}, g(x + y) = \ln(f(x)f(y)) = g(x) + g(y)$. Theo bài tập 4.3.3, Tập 1, khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \lambda x$, suy ra : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = e^{\lambda x} = (e^{\lambda})^x$.

Phần đảo chứng minh dễ dàng.

◊ **Trả lời** : $\{0\} \cup \left\{\begin{array}{l}\mathrm{R} \to \mathrm{R}\\ x \mapsto e^{\lambda x}\end{array} ; \lambda \in \mathrm{R}\right\}$

7.3.1 Với ký hiệu $y = \ln x$ và $\alpha = \ln a$:

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{\alpha} - \frac{y}{2\alpha} + \frac{y}{4\alpha} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \alpha \Leftrightarrow x = a.$$

◊ **Trả lời :** $\{a\}$.

7.3.2 ◊ **Trả lời :** $c + b > 0, c + b \neq 1, c - b > 0, c - b \neq 1, (a = 1$ hay $c^2 = a^2 + b^2)$.

7.3.3 Giả sử f thích hợp ; xét $g : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ t \mapsto f(e^t)\end{array}$

Ánh xạ g liên tục trên R và :

$$\forall (t, u) \in \mathrm{R}^2, g(t + u) = f(e^{t+u}) = f(e^t e^u) = f(e^t) + f(e^u) = g(t) + g(u).$$

Theo bài tập 4.3.3, Tập 1, tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho $\forall t \in \mathrm{R}, g(t) = \lambda t$, suy ra :

$$\forall (x) \in]0\,;+\infty[, \mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(\ln x) = \lambda \ln x.$$

Phần đảo chứng minh dễ dàng.

◊ **Trả lời :** $\left\{\begin{array}{l}]0\,;+\infty[\to \mathbf{R}\\ x \mapsto \lambda\ln x\end{array}\right\}; \lambda \in \mathbf{R}$ hoặc $\left\{\begin{array}{l}]0\,;+\infty[\to \mathbf{R}\\ x \mapsto \log_a x\end{array} ; a \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\right\} \cup \{0\}.$

7.3.4 a) Phương trình quy về : $(5 \,.\, 3^x - 3 \,.\, 5^x)(3 \,.\, 3^x - 5 \,.\, 5^x) = 0$.

◊ **Trả lời :** $\{-1\,,\,1\}$

Khảo sát sự biến thiên của $f : x \to x\ln x$.

◊ **Trả lời :** b) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

7.3.5 a) ◊ **Trả lời :** $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$.

b) Suy ra : $((x+y)^2 - 4)\ln x \ln y = 0$.

◊ **Trả lời :** $\{(1, 1)\}$.

c) ◊ **Trả lời :** $\left\{\left(\frac{\ln 5 + 3\ln 2}{7\ln 2}, \frac{4\ln 5 - 9\ln 2}{14\ln 2}\right)\right\}$.

7.3.6 $a = b^b = (a^a)^{a^a} = a^{a^{a+1}}$, suy ra $a^{a+1} = 1$ hay $\ln a = 0$, và cuối cùng là $a = 1$, $b = 1$.

7.3.7 Trước hết xét trường hợp $z = 0$, $x = 0$.

Khi $z > 0$ và $x > 0$, suy ra $z = y^2$, sau đó $y^2 = 2x + 1$, và cuối cùng giải $3y^2 + 2y - 33 = 0$.

◊ **Trả lời :** $\{(0, 15, 1), (4, 3, 9)\}$.

7.3.8 Giả sử f thích hợp sao cho $f \neq 0$.

• Giả thiết tồn tại $x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó : $\forall x \in \mathbf{R}$, $(f(x))^2 = f(x_0)f(2x - x_0) = 0$, mâu thuẫn. Mâu thuẫn đó chứng tỏ : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$.

Vì f liên tục trên khoảng $\mathbf{R}$, nên từ định lý các giá trị trung gian ta có thể suy ra : $f > 0$ hay $f < 0$. Nếu f thích hợp thì $-f$ cũng vậy ; do đó ta có thể giới hạn trong trường hợp $f > 0$.

• Ánh xạ $g : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \ln(f(x))\end{array}$ liên tục và : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$.

• Ánh xạ $h : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto g(x) - g(0)\end{array}$ liên tục, $h(0) = 0$ và :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(h(x) + h(y)).$$

Đặc biệt : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}h(x)$. Suy ra : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$h(x+y) = 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) = h(x) + h(y).$$

Theo bài tập 4.3.3, Tập 1, tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \lambda x$.

Ký hiệu $\mu = g(0)$, ta có : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = e^{g(x)} = e^{\lambda x + \mu}$.

Phản đảo chứng minh dễ dàng.

◊ **Trả lời :** $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ae^{\lambda x}\end{array} ; (a, \lambda) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

7.3.9 Ký hiệu $f : \begin{array}{l}]0\,;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto 2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}}\end{array}$

Ta có ngay : $\lim\limits_{0^+} f = 1$, $f(1) = 1$, và : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Bây giờ ta chứng minh rằng : $\forall x \in]0\,;1]$, $f(x) \leq 1$.

Ánh xạ f khả vi trên $]0\,;\,1]$ và : $\forall x \in\,]0\,;\,1],\, f'(x) = -\ln 2\,.\,2^{-x} + \dfrac{\ln 2}{x^2}\,.\,2^{-\frac{1}{x}}$.

Giả thiết f đạt cực đại tại một điểm c thuộc $]0\,;\,1[$; khi đó ta sẽ có $f'(c) = 0$, nghĩa là $c^2 2^{-c} = 2^{-\frac{1}{c}}$, suy ra $f(c) = 2^{-c} + 2^{-\frac{1}{c}} = (1 + c^2)2^{-c}$.

Khảo sát sự biến thiên của $g : \begin{array}{l} [0\,;\,1] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto (1 + x^2)2^{-x} \end{array}$ để suy ra : $\forall x \in\,]0\,;\,1[,\, g(x) < 1$.

Nói riêng, $f(c) < 1$. Mâu thuẫn.

◊ **Trả lời :** 1.

7.4.1 Sử dụng tính lõm của $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ trên R_+^*.

7.4.2 $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$

Chứng minh rằng $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ giảm trên $[e^2\,;\,+\infty[$. Ngoài ra, kiểm tra bằng tính toán rằng :

$$f(7) \approx 0{,}735485 > f(8) \approx 0{,}735194.$$

7.4.3 a) Đặt $t = \sqrt{x-4}$ rồi quy về $|t-2| + |t-3| = 1$.

◊ **Trả lời :** $[8\,;\,13]$.

b) $x \mapsto \sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{x-13}$ tăng nghiêm ngặt trên **R**, vì $\sqrt[3]{\ }$ tăng nghiêm ngặt.

◊ **Trả lời :** $\{14\}$.

7.4.4 Áp dụng công thức Taylor với phần dư dạng tích phân (xem 6.4.5, Định lý, Tập 1) cho hàm $f : t \mapsto (1+t)^{\frac{1}{4}}$ tới bậc 2 trên $[0\,;\,x]$, ta được :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Và
$$f'''(t) = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)(1+t)^{-\frac{11}{4}} \geq 0.$$

7.4.5 Giả sử $f :]0\,;\,+\infty[\, \to \mathbf{R}$ thích hợp, sao cho $f \neq 0$.

Ánh xạ $g : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ t \mapsto f(e^t) \end{array}$ liên tục và :

$$\forall (t, u) \in \mathbf{R}^2,\, g(t+u) = f(e^t e^u) = f(e^t)f(e^u) = g(t)g(u).$$

Theo bài tập 7.2.1, tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho : $\forall t \in \mathbf{R},\, g(t) = e^{\lambda t}$.

Suy ra : $\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[,\, f(x) = g(\ln x) = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$.

Phần đảo chứng minh dễ dàng.

◊ **Trả lời :** $\{0\} \cup \left\{ \begin{array}{c}]0\,;\,+\infty[\, \to \mathbf{R},\ \lambda \in \mathbf{R} \\ x \mapsto x^\lambda \end{array} \right\}$.

7.6.1 Chú ý rằng : $\forall t \in \mathbf{R}$, $2\text{ch}t - 1 = \dfrac{2\text{ch}(2t)+1}{2\text{ch}t+1}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2ch(2^{n+1}x)+1}{2chx+1}$.

7.6.2 $\text{th}((k+1)x) - \text{th}(kx) = \dfrac{\text{sh}((k+1)x)\text{ch}(kx) - \text{sh}(kx)\text{ch}((k+1)x)}{\text{ch}((k+1)x)\text{ch}(kx)} = \dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}(kx)\text{ch}((k+1)x)}$

suy ra, nếu $\text{sh}x \neq 0$ thì :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\text{ch}(kx)\text{ch}((k+1)x)} = \frac{1}{\text{sh}\,x}\sum_{k=0}^{n}(\text{th}((k+1)x) - \text{th}(kx)).$$

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} \dfrac{\text{th}((n+1)x)}{\text{sh}\,x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ n+1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

7.6.3 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_a(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{x\text{ch}a + x\text{sh}a} + e^{x\text{ch}a - x\text{sh}a}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{xe^{a}} + e^{xe^{-a}}\right)$, suy ra, với mọi $(n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$:

$$f_a^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left((e^{a})^n e^{xe^{a}} + (e^{-a})^n e^{xe^{-a}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x\text{ch}a + x\text{sh}a + na} + e^{x\text{ch}a - x\text{sh}a - na}\right).$$

◊ **Trả lời :** $f_a^{(n)}(x) = e^{x\text{ch}a}\,\text{ch}(x\text{sh}a + na)$.

7.6.4 ◊ **Trả lời :** $\ln(\cos a - \sin a + \sqrt{4 - \sin 2a})$.

7.6.5 Ký hiệu $X = e^x$, $Y = e^y$:

$$\begin{cases} \text{ch}x + \text{ch}y = \dfrac{35}{12} \\ \text{sh}x + \text{sh}y = \dfrac{25}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{60}{12} = 5 \\ e^{-x} + e^{-y} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 5 \\ \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = \dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (X = 2, Y = 3)$, sai khác về thứ tự.

◊ **Trả lời :** $\{(\ln 2, \ln 3), (\ln 3, \ln 2)\}$.

7.7.1 a) ◊ **Trả lời :** $\forall x \in]-1\,;1[$, $\text{ch}(2\text{Argth}\,x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

b) ◊ **Trả lời :** $\forall x \in]-1\,;1[$, $\text{th}(3\text{Argth}\,x) = \dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$.

c) Ký hiệu $\varphi = \text{Argch}x$, ta có : $\begin{cases} \varphi \in [0\,; +\infty[\\ \text{sh}^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{\text{ch}\varphi - 1}{2} = \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$

◊ **Trả lời :** $\forall x \in [1\,; +\infty[$, $\text{sh}\left(\dfrac{1}{2}\text{Argch}\,x\right) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$.

d) Đặt $\varphi = \text{Argsh}x$.

◊ **Trả lời :** $\forall x \in \mathbf{R}$, $\text{Argth}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Argsh}\,x$.

e) Phương pháp thứ 1

Ký hiệu $f : x \mapsto \operatorname{Argth}\dfrac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}$, chứng minh f khả vi trên $\mathbf{R}$ và :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{8(1-\operatorname{th}^2 x)}{(3+\operatorname{th}x)^2-(1+3\operatorname{th}x)^2} = 1.$$

Suy ra : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x + f(0)$, và $f(0) = \operatorname{Argth}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Phương pháp thứ 2

$$\operatorname{Argth}\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x} = \operatorname{Argth}\frac{\frac{1}{3}+\operatorname{th}x}{1+\frac{1}{3}\operatorname{th}x} = \operatorname{Argth}\left(\operatorname{th}\left(\left(\operatorname{Argth}\frac{1}{3}\right)+x\right)\right),$$ xem bài tập 7.7.3, c).

◊ **Trả lời :** $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\ln 2$.

7.7.2 a) Với mọi x thuộc $[1\ ;\ 2]$:

$\operatorname{Argch}x = \operatorname{Argsh}(2-x) \Leftrightarrow \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}x) = \operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(2-x)) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 2-x.$

◊ **Trả lời :** $\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

b) Trước hết chứng minh : $\begin{cases} 4x^3-3x \geq 1 \\ 2x^2-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Ký hiệu $\varphi = \operatorname{Argch}x$, ta có : $4x^3-3x = 4\operatorname{ch}^3\varphi - 3\operatorname{ch}\varphi = \operatorname{ch}3\varphi$ và $2x^2-1 = \operatorname{ch}2\varphi$, suy ra :
$\operatorname{Argch}(4x^3-3x) - \operatorname{Argch}(2x^2-1) = 1 \Leftrightarrow 3\varphi - 2\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 1.$

◊ **Trả lời :** $\{\operatorname{ch}1\}$.

7.7.3 ◊ **Trả lời :**

a) $\operatorname{Argsh}(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2})$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

b) $\operatorname{Argch}(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1})$, $(x, y) \in [1\ ;+\infty[^2$.

c) $\operatorname{Argth}\dfrac{x+y}{1+xy}$, $(x, y) \in\ ]-1\ ;\ 1[^2$.

d) $\begin{cases} \operatorname{Arg\,coth}\dfrac{1+xy}{x+y} & \text{nếu } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x+y = 0 \end{cases}$, $(x, y) \in (]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty[)^2$.

7.7.4 ◊ **Trả lời :**

g \ f	Argsh	Argch	Argth	Argcoth
sh	x	$\sqrt{x^2-1}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x\sqrt{x^2-1}}$
ch	$\sqrt{1+x^2}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$
coth	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{x}$	x

Ta tính chẳng hạn sh(Argth$x$), $x \in]-1\ ;\ 1[$: ký hiệu φ = Argth$x$, ta có : x = th$y$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi} = 1 - \mathrm{th}^2\varphi = 1 - x^2$, suy ra ch$\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, sau đó sh$\varphi$ = chφth$\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7.7.5 • Giả sử $(x, y) \in [1\ ;\ +\infty[^2$, ký hiệu a = Argch$x$, b = Argch$y$. Ta có :

$$x * y = \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} + xy = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \mathrm{ch}(a+b),$$

do đó $x * y \in [1\ ;\ +\infty[$.

• Phép tính trên đây chứng tỏ ch : $[0\ ;\ +\infty[\to [1\ ;\ +\infty[$ là một phép đồng phôi song ánh từ $([0\ ;\ +\infty[, +)$ đến $([1\ ;\ +\infty[, *)$. Nhưng $([0\ ;\ +\infty[, +)$ không phải là một nhóm, vì các phần tử thuộc $]0\ ;\ +\infty[$ không có phần tử đối.

◊ **Trả lời :** $([1\ ;\ +\infty[, *)$ không phải là một nhóm.

7.7.6 ◊ **Trả lời :** $*$ là một hợp thành trong của $]-1\ ;\ 1[$ và $(]-1\ ;\ 1[, *)$ đẳng cấu đối với $(\mathbf{R}, +)$, qua ánh xạ th : $\mathbf{R} \to\ ]-1\ ;\ 1[$; vậy $(]-1\ ;\ 1[, *)$ là một nhóm giao hoán.

7.7.7 Ánh xạ $g : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ x \mapsto \mathrm{Argth}(f(x))\end{array}$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và :

$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(x+y) = \mathrm{Argth}(f(x+y)) = \mathrm{Argth}\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \mathrm{Argth}(f(x)) + \mathrm{Argth}(f(y)) =$

$= g(x) + g(y)$, xem bài tập 7.7.3, c).

Theo bài tập 4.3.3, Tập 1, khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \lambda x$.

Suy ra : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \mathrm{th}(\lambda x)$.

Phần đảo chứng minh dễ dàng.

◊ **Trả lời :** $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{R} \to\ ]-1\ ;\ 1[\ ;\ \lambda \in \mathrm{R}\\ x \mapsto \mathrm{th}(\lambda x)\end{array}\right\}$

7.7.8 Lập bảng biến thiên của $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, xác định bởi :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f_a(x) = \mathrm{sh}\,x - 2x - a$; ta ký hiệu $x_0 = \mathrm{Arg}ch\,2 \approx 1{,}317$.

x	$-\infty$		$-x_0$		x_0		$+\infty$
$f_a'(x)$		+	0	−	0	+	
$f_a(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

$$\left\{\begin{array}{l} f_a(-x_0) > 0 \\ f_a(x_0) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{sh}x_0 - 2x_0 < a < -\mathrm{sh}x_0 + 2x_0.$$

◊ **Trả lời :** $|a| < 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$.

7.8.1 a) $\sin x + \sin((2n-1)x) + \sin(nx) = 2\sin(nx)\cos((n-1)x) + \sin(nx) =$

$$= \sin(nx)(2\cos((n-1)x) + 1).$$

Biến đổi mẫu thức theo cách tương tự.

Biểu thức xác định khi và chỉ khi : $\cos(nx) \neq 0$ và $\cos((n-1)x) \neq -\dfrac{1}{2}$.

◊ **Trả lời :** $\tan(nx)$.

Trong các thí dụ b) đến g) và i), phân tích số hạng tổng quát của tổng (hay của tích) thành hiệu (hay thương) để có thể giản ước ; ta nói rằng đó là những tổng (hay tích) có thể rút gọn được.

b) Chú ý rằng $\tan x = \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x}$, do đó với mọi k thuộc $\{0, ..., n\}$:

$$2^k \tan(2^k x) = \frac{2^k}{\tan(2^k x)} - \frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1}x)}$$

◊ **Trả lời** : $\frac{1}{\tan x} - \frac{2^{n+1}}{\tan(2^{n+1}x)}$.

c) $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$.

◊ **Trả lời** : $\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ nếu $x \notin \pi\mathbf{Z}$; nếu $x \in \pi\mathbf{Z}$, tồn tại $(m_1, n_1) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ duy nhất sao cho $x = 2^{m_1}(2n_1 + 1)\pi$, và tích phải tìm bằng : $\begin{cases} 1 & \text{nếu } m_1 \geq n + 1 \\ -1 & \text{nếu } m_1 = n \\ 0 & \text{nếu } m_1 < n \end{cases}$

d) $1 + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} \tan 2x = \frac{\tan 2x}{\tan x}$.

◊ **Trả lời** : $\frac{\tan(2^n x)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$, ngoại trừ các trường hợp đặc biệt.

e) $\tan x = \tan(((k + 1) - k)x) = \frac{\tan(k+1)x - \tan kx}{1 + \tan kx \tan(k+1)x}$, suy ra :

$$\tan kx \tan(k+1)x = \frac{\tan(k+1)x - \tan kx}{\tan x} - 1.$$

◊ **Trả lời** : $\frac{\tan(n+1)x}{\tan x} - (n + 1)$, ngoại trừ các trường hợp đặc biệt.

f) $\cos \frac{x}{2^k} + \cos \frac{y}{2^k} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2^k} - \cos^2 \frac{y}{2^k}}{\cos \frac{x}{2^k} - \cos \frac{y}{2^k}} = \frac{\cos \frac{x}{2^{k-1}} - \cos \frac{y}{2^{k-1}}}{2\left(\cos \frac{x}{2^k} - \cos \frac{y}{2^k}\right)}$.

◊ **Trả lời** : $\frac{\cos 2x - \cos 2y}{2^{n+1}\left(\cos \frac{x}{2^n} - \cos \frac{y}{2^n}\right)}$, ngoại trừ các trường hợp đặc biệt.

g) $\sin kx \sin(k + 1)x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos(2k + 1)x)$.

◊ **Trả lời** : $\begin{cases} \frac{n+1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x} & \text{nếu } x \notin \pi Z \\ 0 & \text{nếu } x \in \pi Z \end{cases}$

h) ◊ **Trả lời :** $\begin{cases} 1 + \operatorname{cotan} x \cos^n x \sin nx & \text{nếu } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{nếu } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$

i) $$\frac{(-1)^k}{3^k}\cos^3(3^k x) = \frac{(-1)^k}{3^k}\,\frac{\cos(3^{k+1}x) + 3\cos(3^k x)}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^k\cos(3^{k+1}x)}{3^k} - \frac{(-1)^{k-1}\cos(3^k x)}{3^{k-1}}\right).$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{1}{4\,.\,3^n}\left((-1)^n\cos(3^{n+1}x) + 3^{n+1}\cos x\right).$

7.8.2 Quy nạp theo n.

Với $n = 1$ thì tính chất cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu tính chất đúng với một số nguyên n, thì khi đó :

$$\sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1, 1\}^{n+1}} \cos\left(\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k\right)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \left(\cos\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right) + a_{n+1}\right) + \cos\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right) - a_{n+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} 2\cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right)\cos a_{n+1}$$

$$= 2\left(2^n \prod_{k=1}^{n} \cos a_k\right)\cos a_{n+1} = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\cos a_k \ .$$

7.8.3 Quy nạp theo n.

- $|\sin 2x| = 2|\sin x||\cos x|$, $2|\sin x|$, vì $|\sin x| > 0$ và $|\cos x| < 1$.
- $|\sin(n+1)x| \leq |\sin nx||\cos x| + |\sin x||\cos nx| \leq |\sin nx| + |\sin x| < (n+1)|\sin x|$.

7.8.4 Ký hiệu : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ và $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \qquad\qquad x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\sin kx$$

Nếu $f > 0$ thì g tăng nghiêm ngặt trên $\mathbf{R}$; nhưng $g(0) = g(\pi) = 0$, mâu thuẫn.

◊ **Trả lời :** không.

7.8.5 Chứng minh bằng phản chứng. Nếu tồn tại $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) \geq 3$, thì khi đó $\cos(x^2) = 1$, $\cos(y^2) = 1$, $\cos(xy) = -1$. Vậy phải tồn tại $(m, n, p) \in \mathbf{Z}^3$ sao cho :

$$x^2 = 2m\pi,\ y^2 = 2n\pi,\ xy = (2p+1)\pi.$$

Khi đó thì $\dfrac{x^2y^2}{\pi^2} = 4mn = (2p+1)^2$, mâu thuẫn về tính chẵn, lẻ.

7.8.6 Ta có thể giả thiết $x > 0$ và $y > 0$. Bằng phép đổi biến $t = \ln x$, $u = \ln y$ ta quy bất đẳng thức cần chứng minh về :

$$\forall(t,\ u) \in \left]-\infty\ ;\ \ln\frac{\pi}{2}\right]^2,\ f\left(\frac{t+u}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\ (f(t) + f(u))$$

trong đó $f :]-\infty\ ;\ \ln\frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$

$$t \mapsto \ln(\sin(e^t))$$

Chứng minh f lõm (tính f'').

7.8.7 a) $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} - 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3}\right).$$

◊ **Trả lời :** $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right].$

b) $\sin x + \sin 2x < \sin 3x \Leftrightarrow \sin 2x < \sin 3x - \sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x < 2\sin x\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos 2x - \cos x) > 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\sin x\sin\frac{3x}{2} < 0.$$

Chú ý rằng chu kỳ là 2π.

◊ **Trả lời :** $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ 2\pi + 2k\pi\right[\right).$

7.8.8 Ký hiệu $y = f(x)$.

- $e^y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \dfrac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}}$, suy ra $\tan\frac{x}{2} = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} = \operatorname{th}\frac{y}{2}$.

- $\operatorname{th} y = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{y}{2}}{1 + \operatorname{th}^2\frac{y}{2}} = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \sin x.$

- $\operatorname{ch} y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 y}} = \dfrac{1}{|\cos x|} = \dfrac{1}{\cos x}.$

7.8.9 $(z + xy)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)$, $(x + yz)^2 = (1 - y^2)(1 - z^2)$,
$(y + zx)^2 = (1 - z^2)(1 - x^2)$.

- Trường hợp $|x| < 1$

Khi đó ta có $1 - y^2 \geq 0$, $1 - z^2 \geq 0$, vậy $|y| \leq 1$ và $|z| \leq 1$. Ta có thể nhận xét rằng trong trường hợp này thì tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \cos(\alpha + \beta)$ hoặc $z = -\cos(\alpha - \beta)$.

- Trường hợp $|x| > 1$

Khi đó ta có $|y| \geq 1$, $|z| \geq 1$. Tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ và $(\varepsilon, \eta) \in \{-1, 1\}^2$ sao cho $x = \varepsilon\operatorname{ch}\alpha$, $y = \eta\operatorname{ch}\beta$, $z = -\varepsilon\eta\operatorname{ch}(\alpha + \beta)$ hoặc $z = -\varepsilon\eta\operatorname{ch}(\alpha - \beta)$.

- Các trường hợp $x = 1$, $x = -1$ khảo sát dễ dàng.

7.9.1 Ta có thể giả thiết $a \neq 0$; ánh xạ f_a khả vi trên $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{a}\right\}$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{a}\right\},\ f_a'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vậy tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{a}\right[,\ f_a(x) = \text{Arctan}x + \lambda \\ \forall x \in \left]\frac{1}{a}\ ;\ +\infty\right[,\ f_a(x) = \text{Arctan}x + \mu \end{cases}$

Chuyển qua giới hạn tại $-\infty$ hay $+\infty$, ta suy ra : $\lambda = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{a}$, $\mu = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{a}$.

Nếu $a > 0$: $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{a}\right[,\ f_a(x) = \text{Arctan}x + \text{Arctan}a \\ \forall x \in \left]\frac{1}{a}\ ;\ +\infty\right[,\ f_a(x) = \text{Arctan}x + \text{Arctan}a - \pi \end{cases}$

Nếu $a < 0$: $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{a}\right[,\ f_a(x) = \text{Arctan}x + \text{Arctan}a + \pi \\ \forall x \in \left]\frac{1}{a}\ ;\ +\infty\right[,\ f_a(x) = \text{Arctan}x + \text{Arctan}a. \end{cases}$

7.9.2 Đối với các thí dụ e), f), g), ta có thể áp dụng một phép đổi biến số (do đề bài gợi nên) hoặc khảo sát đạo hàm của hàm số đó. Cũng nên so sánh với các thí dụ trong bài tập 7.7.1.

a) ◊ **Trả lời :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2\text{Arctan}\,x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

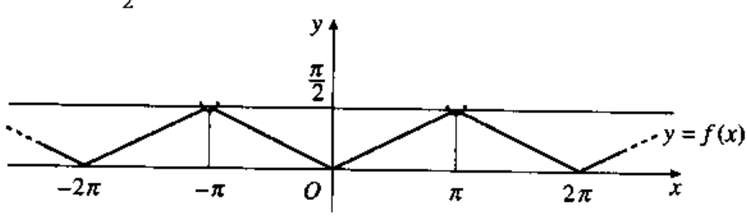
b) ◊ **Trả lời :** $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\tan(3\text{Arctan}\,x) = \dfrac{3x - x^3}{1-3x^2}$.

c) ◊ **Trả lời :** $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$, $\sin\left(\frac{1}{2}\text{Arcsin}\,x\right) = (\text{sgn}x)\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

d) Miền xác định của $f = \mathbb{R} - (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, f chẵn và 2π – tuần hoàn. Với mọi x thuộc $[0\ ;\ \pi[$:

$$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = \text{Arctan}\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \text{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2},\ \text{vì}\ \frac{x}{2} \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

◊ **Trả lời :** $f(x) = \frac{x}{2}$ nếu $x \in [0\ ;\ \pi[$, f chẵn và 2π – tuần hoàn.



e) Phương pháp thứ nhất

Miền xác định của $f = \mathbf{R}$, f chẵn, và với ký hiệu $\theta = \text{Arctan}x$ ta có :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) = \text{Arccos}(|\cos\theta|) = \text{Arccos}(\cos\theta) = \theta,$$

vì $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Phương pháp thứ hai

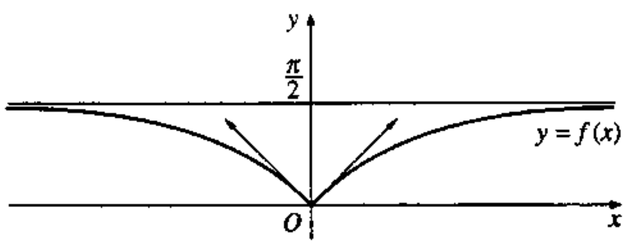
Miền xác định của $f = \mathbf{R}$, f chẵn, liên tục trên $\mathbf{R}$, khả vi trên $\mathbf{R}^*$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}2x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vậy tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = \text{Arctan}x + \lambda$.

Xét giá trị tại 0, ta suy ra $\lambda = 0$.

◊ **Trả lời** : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = |\text{Arctan}x|$.



f) Miền xác định của $f =]-1\ ;\ 1[$ và f lẻ. Với $x \in [0\ ;\ 1[$ và ký hiệu $\theta = \text{Arcsin}x$,

ta có : $\text{Arctan}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arctan}(\tan\theta) = \theta$, vì $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$,

và $\quad 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.

Nếu $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ (tức là $x \in \left[0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$), thì

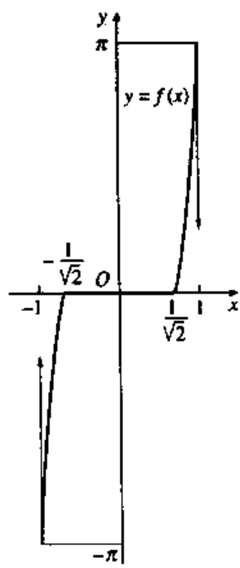
$\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\theta$.

Nếu $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ (tức là $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 1\right[$), thì

$\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) = \pi - 2\theta$.

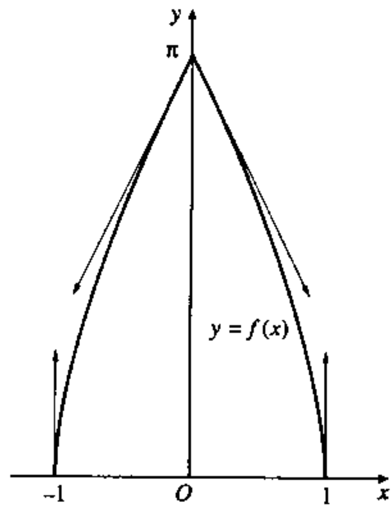
◊ **Trả lời** : Miền xác định của $f =]-1\ ;\ 1[$ và

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 4\text{Arcsin}x - \pi & \text{nếu } \frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 1 \end{cases}$$



g) ◊ **Trả lời :** Miền xác định của $f = [-1\ ;\ 1]$

và $f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{Arccos}\,x & \text{nếu } x \in [0\ ;\ 1] \\ 2\pi - 2\mathrm{Arccos}\,x & \text{nếu } x \in [-1\ ;\ 0] \end{cases}$



7.9.3 a) Áp dụng hàm cos đối với hai vế của đẳng thức, chú ý rằng hai vế đó đều thuộc $[0\ ;\ \pi]$.

◊ **Trả lời :** $\left\{\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}\right\}$.

b) $\mathrm{Arcsin}(\tan x) = x \Rightarrow \tan x = \sin x \Leftrightarrow$

$\sin x\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{hay} \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbf{Z}$

◊ **Trả lời :** $\{0\}$.

c) Trước hết $x \in [-1\ ;\ 1]$. Ký hiệu $\theta = \mathrm{Arccos}x$, ta có :

$2\mathrm{Arccos}x = \mathrm{Arccos}(|2x^2-1|) \Leftrightarrow \mathrm{Arccos}(|\cos 2\theta|) = 2\theta$.

θ	0 … $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … $\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$ … π
$\lvert\cos 2\theta\rvert$	$\cos 2\theta$	$-\cos 2\theta$	$-\cos 2\theta$	$\cos 2\theta$
$\mathrm{Arccos}(\lvert\cos 2\theta\rvert)$	2θ	$\pi - 2\theta$	$2\theta - \pi$	$2\pi - 2\theta$
Phương trình	$2\theta = 2\theta$	$\pi - 2\theta = 2\theta$	$2\theta - \pi = 2\theta$	$2\pi - 2\theta = 2\theta$

Vậy : $\mathrm{Arccos}(|\cos 2\theta|) = 2\theta \Leftrightarrow \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

◊ **Trả lời :** $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 1\right]$.

d) Trước hết : $x \in [0\ ;\ 1]$; sau đó áp dụng hàm sin.

◊ **Trả lời :** $\{0, 1\}$.

e) Chứng tỏ rằng hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \mathrm{Arctan}x + 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

khả vi trên $\mathbf{R}$ và : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 0$.

Suy ra : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

◊ **Trả lời : R**

f) ◊ **Trả lời :** $\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}\right\}$.

7.9.4 a) **Phương pháp thứ nhất**

Các ánh xạ $f : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x)\end{array}$ và $g : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)\end{array}$ thuộc lớp C^1

theo thứ tự trên $\mathbf{R}$ và $\mathbf{R}^*$, và :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{sh}^2 x}\,\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x},$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}}}\,\frac{-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{\mathrm{sgn}\,x}{\mathrm{ch}\,x}.$$

Ngoài ra : $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} g = \frac{\pi}{2}$.

Vậy : $\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) = g(x)$.

Cuối cùng f lẻ và g chẵn.

Phương pháp thứ hai

Ta có thể giả thiết $x \in \mathbf{R}_+$. Khi đó : $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x) \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ và $\cos(\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x)) =$

$= \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x}} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$; vậy $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$.

b) Giải theo cách tương tự như ở a).

7.9.5 Ký hiệu $\alpha = \mathrm{Arcsin}x$, $\beta = \mathrm{Arcsin}y$, thì hệ đã cho quy về :

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}$$

◊ **Trả lời :** $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

7.9.6

g \ f	Arcsin	Arccos	Arctan
sin	x	$\sqrt{1 - x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
cos	$\sqrt{1 - x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
tan	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	x

Chẳng hạn ta tính $\tan(\mathrm{Arccos}x)$, với $x \in [-1 ; 1] - \{0\}$.

Ký hiệu $\theta = \mathrm{Arccos}x$, ta có : $\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2}$, suy ra $|\tan\theta| = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|}$.

Ngoài ta $\tan\theta$ và $\cos\theta$ cùng dấu, vì $\theta \in [0 ; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Vậy : $\tan(\mathrm{Arccos}\,x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

7.9.7 Khảo sát sự biến thiên của $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \mathrm{Arctan}\,x - \frac{x}{1 + x^2}$$

7.9.8 Ký hiệu $\alpha = \text{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$ và $\beta = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$, ta có

$$(\alpha,\beta) \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[^2 \text{ và } \tan\alpha = \frac{\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}}{\sqrt{1-\dfrac{x-a}{b-a}}} = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} = \tan\beta.$$

◊ **Trả lời :** $a < x < b \Rightarrow \text{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.

7.9.9 Ánh xạ sin : $\mathbf{R} \to [-1\ ;\ 1]$ là một phép đồng phôi toàn ánh từ nhóm $(\mathbf{R}, +)$ vào $([-1\ ;\ 1], *)$. Vậy $([-1\ ;\ 1], *)$ là một nhóm đẳng cấu với nhóm thương $\mathbb{R}/\text{Ker(sin)}$, tức là $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

C.7.1 1) a) • $\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(-x) = \displaystyle\int_0^{-x}\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{x}\frac{-du}{1+u^2} = -\varphi(x).$

• φ thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}$, và : $\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0.$

• $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \varphi''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \leq 0.$

b) • Với mọi x thuộc $[1\ ;\ +\infty[$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x\frac{dt}{1+t^2}$ và $\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{1+t^2} \leq \int_1^x\frac{dt}{t^2} =$

$= 1 - \dfrac{1}{x} \leq 1.$

• Vì φ tăng và bị chặn trên $[1\ ;\ +\infty[$, nên φ có giới hạn hữu hạn L tại $+\infty$; hơn nữa : $L \geq \varphi(1) > 0$.

c) Ánh xạ $\mathbf{R} \xrightarrow[x \mapsto \varphi(x)]{} \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ liên tục, tăng chặt và $\lim\limits_{-\infty}\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{+\infty}\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Vì φ khả vi trên $\mathbf{R}$ và vì $(\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) > 0)$, nên ánh xạ tan khả vi trên $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ và :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan' x = \frac{1}{\varphi'(\tan x)} = 1 + \tan^2 x.$$

3) a) $|\tan x| \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} +\infty$, vậy $\cos x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} 0 = \cos\dfrac{\pi}{2}.$

b) Tương tự như a).

4) • cos khả vi trên $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ và :

$$\forall x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos' x = -\frac{1}{2}(1+\tan^2 x)^{-\frac{3}{2}}2\tan x(1+\tan^2 x) = -\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = -\sin x.$$

Tương tự với $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.

Vậy cos liên tục trên $[0\ ;\ \pi]$, khả vi trên $[0\ ;\ \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, và $\cos' x = -\sin x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} -1$

theo định lý giới hạn của đạo hàm (xem 5.2.2, Hệ quả, Tập 1) cos khả vi tại $\frac{\pi}{2}$ và $\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Kết quả trên chứng tỏ rằng thu hẹp của cos trên $[0\ ;\ \pi]$ thuộc lớp C^1 ; do $\cos'(0) = \cos'(\pi) = 0$, và cos chẵn, 2π – tuần hoàn, nên ta suy ra rằng cos thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}$ và $\cos' = -\sin$.

• Lập luận tương tự để chứng minh rằng sin thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}$ và $\sin' = \cos$.

C.7.2 A. 1) Thực hiện phép tích phân từng phần hai lần :

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n+1}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left([(x^2 - t^2)^{n+1}\sin t]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x}(n+1)(x^2 - t^2)^n(-2t)\sin t\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{n!}\int_{-x}^{x}(t(x^2 - t^2)^n)\sin t\,dt$$

$$= \frac{2}{n!}\left([t(x^2 - t^2)^n(-\cos t)]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x}((x^2 - t^2)^n - 2nt^2(x^2 - t^2)^{n-1})(-\cos t)\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{n!}\left(\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^n\cos t\,dt - 2n\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n-1}t^2\cos t\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{n!}\left(\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^n\cos t\,dt + 2n\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n-1}((x^2 - t^2) - x^2)\cos t\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{n!}\left((2n+1)\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^n\cos t\,dt - 2nx^2\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n-1}\cos t\,dt\right)$$

$$= 2(2n+1)I_n(x) - 4x^2 I_{n-1}(x).$$

2) Quy nạp theo n (theo hai bước).

• $n = 0$: $I_0(x) = 2\sin x$, $C_0 = 0$, $S_0 = 2$.

• $n = 1$: $I_1(x) = \int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)\cos t\,dt = [(x^2 - t^2)\sin t]_{-x}^{x} + \int_{-x}^{x}2t\sin t\,dt$

$$= 2\,[\sin t - t\cos t]_{-x}^{x} = -4x\cos x + 4\sin x,\ C_1 = -4X,\ S_1 = 4.$$

Giả thiết tính chất này đúng cho $n - 1$ và n (với $n \in \mathbf{N}^*$ cố định). Khi đó theo 1) ta có :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $I_{n+1}(x) = 2(2n+1)(C_n(x)\cos x + S_n(x)\sin x) - 4x^2(C_{n-1}(x)\cos x + S_{n-1}(x)\sin x)$

$$= C_{n+1}(x)\cos x + S_{n+1}(x)\sin x,$$

trong đó $C_{n+1} = 2(2n+1)C_n - 4X^2C_{n-1}$, $S_{n+1} = 2(2n+1)S_n - 4X^2S_{n-1}$, cả hai đúng là những đa thức với hệ số thuộc $\mathbf{Z}$, có bậc $\leq n + 1$.

B. 1) a) $qb^nC_n\left(\frac{a}{b}\right) + pb^nS_n\left(\frac{a}{b}\right) = qb^n\left(C_n(r) + \frac{p}{q}S_n(r)\right) =$

$$= \frac{qb^n}{\cos r}\,(C_n(r)\cos r + \sin r S_n(r)) = \frac{I_n(r)}{\cos r}\,qb^n.$$

b) Vì với mọi n thuộc $\mathbf{N}$, C_n và S_n là những đa thức với hệ số thuộc $\mathbf{Z}$, có bậc $\leq n$, ta có :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ qb^nC_n\left(\frac{a}{b}\right) + pb^nS_n\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbf{Z}.$$

Mặt khác : $\forall n \in \mathbf{N},\ |I_n(r)| \leq \frac{1}{n!}\int_{-r}^{r}(r^2 - t^2)^n\,dt \leq \frac{2rr^{2n}}{n!}$,

và do đó : $\forall n \in \mathbf{N},\ \left|\frac{I_n(r)}{\cos r}\,qb^n\right| \leq \frac{2rr^{2n}qb^n}{n!\cos r}$. Vì $n!$ trội hơn hàm mũ (xem 3.1.4, 5), Tập 1), nên ta suy ra : $\frac{I_n(r)}{\cos r}\,qb^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Như vậy (xem bài tập 3.1.1, Tập 1), $\left(\frac{I_n(r)}{\cos r}\,qb^n\right)_{n \in \mathrm{N}}$ là hằng, với giá trị bằng 0.

2) Nếu $r \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, ánh xạ $t \mapsto (r^2 - t^2)^n\cos t$ liên tục, ≥ 0, và $\neq 0$.

3) a) • $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{r}(r^2 - t^2)^n\cos t\,dt\right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{r}(r^2 - t^2)^n|\cos t|\,dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{r}(r^2 - t^2)^n dt$

$$\leq \left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n.$$

• $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r^2 - t^2)^n\cos t\,dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{3}}(r^2 - t^2)^n\cos t\,dt \geq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(r^2 - t^2)^n\,dt \geq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(r^2 - rt)^n\,dt$

$$= \frac{r^n}{2}\left[-\frac{(r-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{r^n}{2(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right).$$

b) Theo a), với mọi n thuộc $\mathbf{N}^*$ ta có :

$$n!I_n(r) = 2\int_0^{r}(r^2 - t^2)\cos t\,dt \geq \frac{r^n}{4(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right) - \left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n,$$

và do đó $\qquad (n+1)!I_n(r)r^{-(2n+1)} \geq \alpha_n,$

trong đó $$\alpha_n = 1 - \left(\frac{r - \frac{\pi}{3}}{r}\right)^{n+1} - \frac{2(n+1)\left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n}{r^{2n+1}}.$$

Do $\alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$, ta suy ra rằng tồn tại $n_1 \in \mathbf{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_1 \Rightarrow \alpha_n > 0 \Rightarrow I_n(r) > 0).$$

Nhưng điều này mâu thuẫn với B 1) b).

Cuối cùng : $\tan r \notin \mathbf{Q}$

C.7.3 1) Nếu $\alpha \in \mathbf{Q}$, thì α làm triệt tiêu đa thức $X - \alpha$ thuộc $\mathbf{Q}[X]$.

2) $(\alpha^n)_{n \in \mathbf{N}}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại $N \in \mathbf{N}$ và $(\lambda_0, ..., \lambda_N) \in \mathbf{Q}^{N+1}$ sao cho : $\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda_k \alpha^k = 0$ và $(\lambda_0, ..., \lambda_N) \neq (0, ..., 0)$.

Điều đó có nghĩa là tồn tại $P \in \mathbf{Q}[X]$ sao cho : $P(\alpha) = 0$ và $P \neq 0$.

3) Cho $(\alpha, \beta) \in A^2$. Do $\alpha \in A$, tồn tại $P \in \mathbf{Q}[X] - \{0\}$ sao cho $P(\alpha) = 0$. Tách riêng số hạng bậc cao nhất, và chia cho hệ số của số hạng đó, ta suy ra rằng tồn tại $m \in \mathbf{N}$ ($m = \deg(P)$) sao cho $\alpha^m \in E_{\alpha, m}$, trong đó $E_{\alpha, m}$ chỉ $\mathbf{Q}$ – không gian vectơ con của $\mathbf{R}$ sinh bởi $\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{m-1}\}$.

Bằng quy nạp theo k, ta suy ra : $\forall k \in \mathbf{N}\ (k \geq m \Rightarrow \alpha^k \in E_{\alpha, m})$.

Như đã nói trên ($\forall k \in \{0, ..., m-1\}, \alpha^k \in E_{\alpha, m}$), ta kết luận : $\forall k \in \mathbf{N}, \alpha^k \in E_{\alpha, m}$.

Tương tự : $\forall l \in \mathbf{N}, \beta^l \in E_{\beta, n}$.

Như vậy rõ ràng là : $\forall (k, l) \in \mathbf{N}^2, \alpha^k\beta^l \in F$, trong đó F chỉ $\mathbf{Q}$ – không gian vectơ con của $\mathbf{R}$ sinh bởi các $\alpha^i\beta^j$ khi (i, j) vạch nên $\{0, ..., m-1\} \times \{0, ..., n-1\}$.
Như thế các $(\alpha\beta)^i$ ($i \in \mathbf{N}$) đều thuộc F, vốn có số chiều hữu hạn ($\dim(F) \leq mn$) ; vậy $((\alpha\beta)^i)_{i \in \mathbf{N}}$ phụ thuộc tuyến tính, tức là $\alpha\beta \in A$.

4) Giả sử $\alpha \in A - \{0\}$; tồn tại $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_0, ..., a_n) \in \mathbf{Q}^{n+1}$ sao cho : $a_n \neq 0$ và $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\alpha^k = 0$.

Ký hiệu $Q = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$, ta có : $Q \in \mathbf{Q}[X] - \{0\}$ và

$Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\alpha^k = 0$. Nói cách khác, để có đa thức nhận $\frac{1}{\alpha}$ làm nghiệm thì ta phải đảo ngược thứ tự các hệ số của đa thức nhận α làm nghiệm.

5) a) $\gamma = \beta\frac{1}{\alpha} \in A$, theo 3) và 4). Như vậy tồn tại $P \in \mathbf{Q}[X] - \{0\}$ sao cho $P(\gamma) = 0$.

Ký hiệu $Q = P(X - 1)$, ta có : $Q \in \mathbf{Q}[X] - \{0\}$ và $Q(1 + \gamma) = P(\gamma) = 0$, điều này chứng tỏ rằng : $1 + \gamma \in A$.

b) $\alpha + \beta = \alpha(1 + \gamma) \in A$, xem 3) và 5), a).

6) Theo định nghĩa, A là tập hợp các không điểm (trong $\mathbf{R}$) của các đa thức với hệ số thuộc $\mathbf{Q}$ và khác đa thức không : $A = \bigcup\limits_{P \in \mathbf{Q}[X] - \{0\}} P^{-1}(\{0\})$. Đối với mỗi P thuộc $\mathbf{Q}[X] - \{0\}$

thì $P^{-1}(\{0\})$ là một tập hợp hữu hạn (và $\mathrm{Card}(P^{-1}(\{0\})) \le \deg(P)$).

Mặt khác $\mathbf{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Q}_n[X]$, trong đó $\mathbf{Q}_n[X]$ chỉ tập hợp các đa thức bậc $\le n$ và có hệ số hữu tỷ.

Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, ánh xạ $\mathbf{Q}^{n+1} \to \mathbf{Q}_n[X]$ là song ánh và $\mathbf{Q}^{n+1}$ đếm được, suy ra $\mathbf{Q}_n[X]$

$$(a_0, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

cũng đếm được.

Như vậy $\mathbf{Q}[X]$ được xem như hợp của một họ đếm được những tập hợp đếm được, do đó cũng đếm được, còn A xem như hợp của một họ đếm được các tập hợp hữu hạn, nên đếm được.

C.7.4 1) a) Tích phân từng phần :

$$I_P(t) = [-e^{t-u}P(u)]_0^t + \int_0^t e^{t-u}P'(u)\,du = (e^t P(0) - P(t)) + I_{P'}(t),$$

rồi lặp lại.

b) • Nếu $t \ge 0$: $|I_P(t)| \le \int_0^t e^{t-u}\tilde{P}(|u|)du \le \int_0^t e^{t-u}\tilde{P}(|t|)du \le te^t\tilde{P}(|t|)$.

• Nếu $t \le 0$: $|I_P(t)| = \left| \int_t^0 e^{t-u}P(u)du \right| \le \int_t^0 e^{t-u}\tilde{P}(|u|)du \le (-t)\tilde{P}(|t|) \le (-t)e^{-t}\tilde{P}(|t|)$.

2) Theo 1) a) :

$$J = \sum_{k=0}^{n} a_k\Big(e^k \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(k)\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{m} a_k e^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0)\Big) - \Big(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(j)}(k)\Big) \text{ và } \sum_{k=0}^{n} a_k e^k = 0.$$

3) a) • $\boldsymbol{j \le p-1}$ **và** $\boldsymbol{k \ge 1}$.

Khi đó $(X-k)^{p-j}$ chia hết $P^{(j)}$, suy ra $P^{(j)}(k) = 0$.

• $\boldsymbol{j \ge p}$ **và** $\boldsymbol{k \ge 1}$.

P có dạng : $P = A(X-k)^p$, trong đó $A \in \mathbf{Z}[X]$; theo công thức Leibniz :

$$P^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} C_j^i A^{(j-i)}((X-k)^p)^{(i)}$$

suy ra $P^{(j)}(k) = C_j^p A^{(j-p)}(k)p!$, và do đó $p!$ chia hết $P^{(j)}(k)$.

• $\boldsymbol{j \le p-2}$ **và** $\boldsymbol{k = 0}$.

Khi đó X^{p-1-j} chia hết $P^{(j)}$, suy ra $P^{(j)}(k) = 0$.

• **$j \geq p$ và $k = 0$.**

P có dạng : $P = B^p X^{p-1}$, trong đó $B \in \mathbf{Z}[X]$. Ta có :

$$P^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} C_j^i (B^p)^{(j-i)} (X^{p-1})^{(i)}, \text{ từ đó suy ra :}$$

$$P^{(j)}(0) = C_j^{p-1} (B^p)^{(j-p+1)}(0)(p-1)! = C_j^{p-1} p! (B^{p-1} B')^{(j-p)}(0).$$

Kết quả này chứng tỏ $p!$ chia hết $P^{(j)}(k)$.

• **$i = p - 1$ và $k = 0$.**

Ký hiệu như trên $B = \prod_{k=1}^{n} (X - k)$, ta có :

$$P^{(p-1)}(0) = (B^p)(0)(p-1)! = ((-1)^n n!)^p (p-1)!$$

Vì $1 \leq n < p$ và p là số nguyên tố, nên p không chia hết $(-1)^n n!$. Ta suy ra rằng $(p-1)!$ chia hết $P^{(p-1)}(0)$, và rằng $p!$ không chia hết $P^{(p-1)}(0)$.

b) Theo a), $p!$ chia hết mọi số hạng $a_k P^{(j)}(k)$ của J, có thể ngoại trừ $a_0 P^{(p-1)}(0)$.

Do $p > n$ và $p > |a_0|$, nên $(p-1)!$ chia hết số hạng $a_o P^{(p-1)}(0)$ này, nhưng $p!$ không chia hết số hạng đó. Vậy $(p-1)! \vdots J$ và $p! \not\vdots J$.

Suy ra J là một bội khác không của $(p-1)!$, do đó $|J| \geq (p-1)!$.

4) • $\tilde{P} = X^{p-1} \prod_{j=1}^{n} (X + j)^p$, suy ra

$$\tilde{P}(k) = k^{p-1} \prod_{j=1}^{n} (k + j)^p \leq (2n)^{p-1+np} = (2n)^m.$$

• Theo 1) b) và 4) trên đây :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, |I_p(k)| \leq k e^k \tilde{P}(k) \leq n e^n (2n)^m,$$

suy ra : $$|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| |I_p(k)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right) n e^n (2n)^m \leq C^p,$$

trong đó $$C = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right) n e^n (2n)^{n+1}.$$

5) Chúng ta đã chứng minh rằng tồn tại một số nguyên N ($N = \text{Max}(n, |a_0|)$) và một phần tử C thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho với mọi số nguyên tố p thỏa mãn $p > N$ ta có : $(p-1)! \leq C^p$, hay cũng là : $\dfrac{C^p}{(p-1)!} \geq 1$. Do tập các số nguyên tố là vô hạn, chuyển qua giới hạn khi p dần tới $+\infty$, ta được một sự kiện mâu thuẫn với tính trội của giai thừa so với hàm mũ.

Kết luận : e là số siêu việt.

Chỉ dẫn và trả lời

Các bài tập chương 8

8.1.1 Với $w_n = \sqrt{u_n v_n}$, ta có $\frac{u_n}{w_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và $\frac{w_n}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

8.1.2 Với x đủ lớn ta có : $\begin{cases} \ln\ln f(x) = (\ln x)^2 + \ln\ln\ln\ln x \\ \ln\ln g(x) = (\ln\ln x)(\ln x) + \ln\ln\ln x \end{cases}$

suy ra $\ln\ln g(x) = o(\ln\ln f(x))$, sau đó $\ln g(x) = o(\ln f(x))$, và cuối cùng là : $g(x) = o(f(x))$.

◊ **Trả lời :** $g = \underset{+\infty}{o}(f)$.

8.2.1 ◊ **Trả lời :** $u_n = \frac{1}{n}$ và $v_n = \frac{1}{n + (-1)^n}$.

8.2.2 Với mọi k thuộc $\mathbf{N}^*$: $kx - 1 < \mathrm{E}(kx) \le kx$, từ đó bằng cách lấy tổng (với k chạy từ 1 đến n) :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{n(n+1)}{2}x - n < \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx) \le \frac{n(n+1)}{2}x.$$

◊ **Trả lời :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx) \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^2 x}{2}$.

8.2.3 Vì $k^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}\ln k} \xrightarrow[k\infty]{} 1$, nên định lý Césaro chứng tỏ rằng $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

◊ **Trả lời :** $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \underset{n\infty}{\sim} n$.

8.2.4 Áp dụng kết quả của 8.2.2, Khảo sát phép cộng, 2) (trường hợp hàm > 0) để có thể khẳng định rằng :

$$(e^{(f(x))^2} - 1) + (e^{(g(x))^2} - 1) \sim (f(x))^2 + (g(x))^2 \sim (\varphi(x))^2 + (\psi(x))^2 \sim (e^{(\varphi(x))^2} - 1) + (e^{(\psi(x))^2} - 1).$$

8.2.5 a) $x\operatorname{sh}\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \ne 1$,

$$\ln\left(x\operatorname{sh}\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

◊ **Trả lời :** 1.

b) $\ln(\cos 3x) \underset{x \to 0}{\sim} \cos 3x - 1 \sim -\dfrac{9}{2}x^2$, $\sin^2 2x \underset{x \to 0}{\sim} 4x^2$.

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{9}{8}$.

c) $\log_x a - \log_a x = \dfrac{(\ln a - \ln x)(\ln a + \ln x)}{\ln a \ln x} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{2\ln a}{(\ln a)^2}(\ln a - \ln x) = -\dfrac{2}{\ln a} \ln \dfrac{x}{a}$

$$\sim -\frac{2}{\ln a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) = -\frac{2}{a\ln a}(x - a)$$

và $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a = 2\operatorname{sh}\dfrac{x - a}{2} \operatorname{ch}\dfrac{x + a}{2} \underset{x \to a}{\sim} (x - a)\operatorname{ch} a$.

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{2}{a\ln a \operatorname{ch} a}$.

d) ◊ **Trả lời :** -1.

e) $\operatorname{sh}\sqrt{x^2 + x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{1}{2}e^x e^{\sqrt{x^2+x}-x} = \dfrac{1}{2}e^x e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}} \sim \dfrac{1}{2}e^x e^{\frac{1}{2}}$, vì

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Tương tự : $\operatorname{sh}\sqrt{x^2 - x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^x e^{-\frac{1}{2}}$.

◊ **Trả lời :** $\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}$.

f) Qua phép đổi biến $h = x - 1$:

$x^x - x = x(x^{x-1} - 1) \underset{x \to 1}{\sim} e^{(x-1)\ln x} - 1 = e^{h\ln(1+h)} - 1 \underset{h \to 0}{\sim} h\ln(1 + h) \sim h^2$

và $\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1}) \underset{x \to 1}{\sim} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{h(2 + h)} \sim \sqrt{2h}$.

◊ **Trả lời :** 0.

g) Qua phép đổi biến $h = x - 1$:

$e^{x^2+x} - e^{2x} = e^{2+3h+h^2} - e^{2+2h} = e^{2+2h}(e^{h+h^2} - 1) \underset{h \to 0}{\sim} e^2(h + h^2) \sim e^2 h$, và

$\cos\dfrac{\pi x}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi h}{2}\right) = -\sin\dfrac{\pi h}{2} \sim -\dfrac{\pi h}{2}$.

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{2e^2}{\pi}$.

h) ◊ **Trả lời :** $e^{\frac{2}{\pi}}$.

i) $\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x \sin x}}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x \sin x}\ln(\cos x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}(\cos x - 1) \sim \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

◊ **Trả lời** : $e^{-\frac{1}{2}}$.

j) ◊ **Trả lời** : e^3.

k) ◊ **Trả lời** : e^2.

l) $x\ln x\ln\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right) = -x\ln x\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = -x\ln x\ln\left(\dfrac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$

$$= -x\ln x\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln x\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \sim -x\ln x\frac{1}{x\ln x} = -1.$$

◊ **Trả lời** : e^{-1}.

m) Ký hiệu $f(x) = (\tan 2x)^{\sin 4x}$, và áp dụng phép đổi biến $h = x - \dfrac{\pi}{4}$:

$$\ln f(x) = \sin 4x\ln(\tan 2x) = -\sin 4h\ln(-\operatorname{cotan} 2h) \underset{h\to 0^-}{\sim} -4h\ln\left(-\frac{1}{2h}\right) \sim 4h\ln(-h) \xrightarrow[h\to 0^-]{} 0.$$

◊ **Trả lời** : 1.

n) $x^{x^{1/x}} - x = xg(x)$, trong đó $g(x) = e^{(x^{1/x}-1)\ln x} - 1$.

Và $(x^{\frac{1}{x}} - 1)\ln x = (e^{\frac{1}{x}\ln x} - 1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln x)^2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, suy ra

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (x^{\frac{1}{x}} - 1)\ln x \sim \frac{(\ln x)^2}{x}, \text{ rồi } x^{x^{1/x}} - x \sim (\ln x)^2.$$

◊ **Trả lời** : $+\infty$.

o) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$, vì $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} 0 \neq 1$, suy ra :

$$\ln(\ln((1+x))^{\ln(1+x^2)}) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^2\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

◊ **Trả lời** : 1.

p) $(\sin x)^{\operatorname{sh} x} - 1 = e^{\operatorname{sh} x\ln(\sin x)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \operatorname{sh} x\ln(\sin x) \sim x\ln x$.

◊ **Trả lời** : 1.

8.2.6 Trước tiên $n\ln a_n = \ln a_n^n \xrightarrow[n\infty]{} \ln a$, suy ra $\ln a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$, và cũng tương tự $b_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$. Từ đó ta có $pa_n + qb_n \xrightarrow[n\infty]{} p+q = 1$, rồi $n\ln(pa_n+qb_n) \underset{n\infty}{\sim} n((pa_n+qb_n)-1)$

$= n(p(a_n-1) + q(b_n-1))$. Nhưng $n(a_n-1) \sim n\ln a_n = \ln a_n^n \xrightarrow[n\infty]{} \ln a$, nên

$$n(p(a_n-1) + q(b_n-1)) \xrightarrow[n\infty]{} p\ln a + q\ln b.$$

◊ **Trả lời :** $(pa_n + qb_n)^n \xrightarrow[n\infty]{} a^p b^q$.

8.2.7 Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta ký hiệu $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \mathrm{d}x$.

• Bằng một phép tích phân từng phần ta có :

$$I_n = [(1+x)(\ln(1+x))^n]_0^1 - \int_0^1 n(\ln(1+x))^{n-1}\,\mathrm{d}x = 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}.$$

• $0 \le I_n \le \int_0^1 \frac{2}{1+x}(\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 2\frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$, suy ra $I_n = o((\ln 2)^n)$.

Vậy ta có : $nI_{n-1} = 2(\ln 2)^n - I_n \underset{n\infty}{\sim} 2(\ln 2)^n$.

8.2.8 Ký hiệu $x_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$, ta có : $x_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{1}{1-u_n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Định lý Césaro (C.3.1, Tập 1) cho phép suy ra :

$$\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \xrightarrow[n\infty]{} 1.$$

Nhưng $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1}\right)$, vậy $\frac{1}{nu_{n+1}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, $u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$, $u_n \sim \frac{1}{n}$.

8.2.9 • $(u_n)_{n\ge 1}$ tăng vì $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} > 0$, và phân kỳ vì rằng nếu như $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbb{R}$, thì $l = l + \frac{1}{l^2}$, mâu thuẫn. Kết quả đó chứng tỏ $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

• Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta ký hiệu $v_n = u_n^3$; ta có $v_{n+1} - v_n = \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^3 - u_n^3 =$

$$= 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6} \underset{n\infty}{\sim} 3.$$

Theo định lý Césaro (C3.1, Tập 1) ta suy ra $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 3$, rồi $v_n \underset{n\infty}{\sim} 3n$.

◊ **Trả lời :** $u_n \underset{n\infty}{\sim} 3^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}$.

8.3.1 a) ◊ **Trả lời :** $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}x^2 + o(x^3)$.

b) Tuyến tính hóa : $\operatorname{ch}2x \operatorname{sh}3x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}5x + \operatorname{sh}x)$.

◊ **Trả lời** : $3x + \frac{21}{2}x^3 + \frac{521}{40}x^5 + o(x^5)$.

c) Tuyến tính hóa : $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

◊ **Trả lời** : $\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k(3^{2k}+3)}{4((2k)!)} x^{2k} + o(x^n)$.

d) ◊ **Trả lời** : $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - o(x^4)$.

e) ◊ **Trả lời** : $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o(x^3)$.

f) $\operatorname{ch}x - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, $\operatorname{sh}x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$, vậy $((\operatorname{ch}x - \cos x)(\operatorname{sh}x - \sin x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{10}}{9}$.
Kết luận bằng việc xét tính chẵn, lẻ.

◊ **Trả lời** : $\frac{1}{9}x^{10} + o(x^{11})$.

g) ◊ **Trả lời** : $-2x^2 - x^3 + o(x^3)$.

h) ◊ **Trả lời** : $x^2 - x^3 + o(x^3)$.

i) ◊ **Trả lời** : $\ln 2 + \frac{a+b}{2}x + \frac{(a-b)^2}{8}x^2 + o(x^2)$.

j) $$\tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) = \tan\left(\operatorname{Arctan}x - \frac{x^9}{9} + o(x^9)\right) = \frac{x - \tan\left(\frac{x^9}{9} + o(x^9)\right)}{1 + x\tan\left(\frac{x^9}{9} + o(x^9)\right)}$$

$$= \frac{x - \frac{x^9}{9} + o(x^9)}{1 + o(x^9)} = x - \frac{x^9}{9} + o(x^9).$$

◊ **Trả lời** : $x - \frac{x^9}{9} + o(x^9)$.

k) $$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3), \text{ suy ra :}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} =$$

$$= \mathrm{e}\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3)\right)$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + o(x^3)\right).$$

◊ **Trả lời :** $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)$.

l) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ khi x dần tới 0.

◊ **Trả lời :** $e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)$.

m) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \text{Arctan}(e^x)$ thuộc lớp C^1 và : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

Tính $\text{KTHH}_2(0)$ của f', rồi tính nguyên hàm (xem 8.3.3, Mệnh đề).

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$.

n) ◊ **Trả lời :** $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}\right) + o(x^2)$.

o) $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)} =$

$$= \frac{|x|}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)} = \frac{x}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right).$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{8\sqrt{2}}x^3 + o(x^3)$.

p) ◊ **Trả lời :** $e^{-1}\left(1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)\right)$.

q) ◊ **Trả lời :** $1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

r) ◊ **Trả lời :** $e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{139}{1152}x^4 + o(x^4)\right)$.

s) ◊ **Trả lời :** $1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$.

t) ◊ **Trả lời :** $-\frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{251}{2880}x^4 + o(x^4)$.

u) • $\tan^3 x \underset{x \to 0}{\sim} x^3$, nên ta sẽ khai triển $(\cos x)^{x^2} - 1$ tới bậc 5, tức là tới bậc 4 do $x \mapsto (\cos x)^{x^2} - 1$ chẵn.

• $(\cos x)^{x^2} - 1 = e^{x^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)} - 1 = e^{-\frac{x^4}{2} + o(x^5)} - 1 = -\frac{x^4}{2} + o(x^5)$.

• $\tan^3 x((\cos x)^{x^2} - 1) = (x^3 + o(x^4))\left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)$.

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{x^7}{2}+o(x^8)$.

v) Ký hiệu $f(x)=\dfrac{\operatorname{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}$, ta có $f=\dfrac{1}{2}(u^2)'$, trong đó $u(x)=\operatorname{Arcsin}x$. Vậy :

$$u(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5),\ (u(x))^2=x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{8}{45}x^6+o(x^6),$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{8.6}{45}x^5+o(x^5)\right)\text{ (xem 8.3.3, Hệ quả).}$$

◊ **Trả lời :** $x+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{8}{15}x^5+o(x^5)$.

w) ◊ **Trả lời :** $e^{-\frac{1}{2}}\left(1-\dfrac{x^2}{60}\right)+o(x^2)$.

x) ◊ **Trả lời :** $\ln 3+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)$.

y) ◊ **Trả lời :** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{19x^9}{162}+\dfrac{101x^{11}}{990}+o(x^{11})$.

z) Ánh xạ $f:x\mapsto\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ thuộc lớp C^1 trên R (xem 6.4.1, Hệ quả, Tập 1) :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^8+x^4+1}}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^{12}+x^6+1}}.$$

Suy ra $\text{KTHH}_{12}(0)$ của f', rồi $\text{KTHH}_{13}(0)$ của f bằng cách tính nguyên hàm (xem 8.3.3).

◊ **Trả lời :** $x^2-x^3-\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^9}{6}-\dfrac{x^{10}}{40}+o(x^{13})$.

a') Sử dụng phép đổi biến $h=x-\dfrac{\pi}{3}$, tính $\text{KTHH}_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ của f', rồi tính nguyên hàm.

◊ **Trả lời :** $f(x)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{4}h-\dfrac{3\sqrt{3}}{16}h^2+\dfrac{3}{16}h^3+o(h^3),\ h=x-\dfrac{\pi}{3}$.

b') Trước hết thực hiện phép đổi biến $h=x-2\pi$.

◊ **Trả lời :** $f(x)=-1+\dfrac{2}{9}h^2+o(h^2),\ h=x-2\pi$.

c') Qua phép đổi biến $t=\dfrac{1}{x}$: $f(x)=\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}=\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+t}{1+3t}}$.

Ánh xạ $g:t\mapsto\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+t}{1+3t}}$ thuộc lớp C^1 trong lân cận của 0; tính $\text{KTHH}_2(0)$ của g' rồi tính nguyên hàm để có khai triển hữu hạn của g.

◊ **Trả lời :** $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{25}{12x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

8.3.2 Ánh xạ f thuộc lớp C^1 trên R và : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} > 0$; ngoài ra : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Kết quả đó chứng tỏ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là song ánh. Vì f còn thuộc lớp C^∞, nên ta suy ra f^{-1} cũng thuộc lớp C^∞ (xem 5.3.1, Định lý 4, Tập 1), vậy có KTHH$_5$(0).

Mặt khác, do f lẻ, nên f^{-1} cũng lẻ. Vậy tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sao cho :

$$f^{-1}(y) = \alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \underset{y \to 0}{o}(y^5).$$

Thay vào hệ thức $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, ta được :

$$\begin{aligned} x &= \alpha x e^{x^2} + \beta(xe^{x^2})^3 + \gamma(xe^{x^2})^5 + o(x^5) \\ &= \alpha x\left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) + \beta x^3(1 + 3x^2) + \gamma x^5 + o(x^5) \\ &= \alpha x + (\alpha + \beta)x^3 + \left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta + \gamma\right)x^5 + o(x^5) \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do tính duy nhất của phần chính quy của KTHH$_5$(0) của ánh xạ $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, ta suy ra :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \dfrac{\alpha}{2} + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}, \text{ do đó : } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Ta chú ý rằng hệ phương trình thu được (với ẩn số $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$) là một hệ tuyến tính dễ giải hơn so với phương trình đại số mà ta sẽ phải giải nếu sử dụng tới $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

◊ **Trả lời :** $f^{-1}(y) = y - y^3 + \dfrac{5}{2}y^5 + o(y^5)$.

8.3.3 Để cho ngắn gọn, ký hiệu $y = f(x)$, ta lần lượt được :

$y' = \tan(x + y)$

$y'' = (1 + \tan^2(x + y))(1 + y') = (1 + y'^2)(1 + y') = 1 + y' + y'^2 + y'^3,$

$y''' = y''(1 + 2y' + 3y'^2)$

$y^{(4)} = y'''(1 + 2y' + 3y'^2) + y''^2(2 + 6y')$.

Tính các giá trị tại 0 : $f'(0) = 1, f''(0) = 4, f'''(0) = 24, f^{(4)}(0) = 272$.

Cuối cùng áp dụng định lý Taylor–Young (8.3.2).

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{4} + x + 2x^2 + 4x^3 + \dfrac{34}{3}x^4 + o(x^4)$.

8.3.4 ◊ **Trả lời :** a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) -2 d) $\frac{1}{6}$ e) 2 f) -48 g) -12

h) -1 i) $\frac{1}{8}$ j) $-\frac{1}{2}$ k) 1 l) $\frac{1}{12}$ m) $\frac{1}{6}$ n) $\frac{a-b}{2}$ o) $\frac{a(a+1)}{2b}$

p) 1 q) $-\frac{e}{2}$ r) $e^{\frac{1}{3}}$ s) 1 t) 1 u) e^{-1}

v) $\begin{cases} 0 & \text{nếu } (a < 1 \text{ và } b \geq 1) \\ 1 & \text{nếu } (0 < b < 1 \text{ hay } (a = 1 \text{ và } b \geq 1)) \\ +\infty & \text{nếu } (a > 1 \text{ và } b \geq 1) \end{cases}$ w) $e^{-\frac{1}{6}}$ x) $(2^4 \cdot 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}$

y) $\exp\left(\dfrac{9^3\ln 9 + 10^3\ln 10 - 12^3\ln 12}{4^2\ln 4 + 7^2\ln 7 - 8^2\ln 8}\right)$ z) 1 a') $\dfrac{1}{4}$ b') 1 c') 1.

8.3.5 ◊ **Trả lời :**

a) $\dfrac{1}{60}x^5$ b) $\dfrac{1}{180}x^5$ c) $\dfrac{3}{8}x^5$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}x$ e) $\dfrac{1}{30}x^7$

f) $-\dfrac{1}{30}x^7$ g) $-\dfrac{1}{360}x^7$ h) $\dfrac{1}{6}x^3$ i) $\dfrac{1}{2016}x^8$.

8.3.6 a) $e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx} = (1 - a + b)x + \left(\dfrac{1}{2} + ab - b^2\right)x^2 + o(x^2)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ \dfrac{1}{2} + ab - b^2 = 0 \end{cases}$

◊ **Trả lời :** $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$.

b) ◊ **Trả lời :** $a = \dfrac{3}{16}$, $b = \dfrac{5}{16}$.

8.3.7 Giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước ; vì $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$, nên tồn tại $\eta \in]0 ; 1[$ sao cho :

$$\forall x \in]0 ; \eta], \left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right| \leq \varepsilon.$$

Ký hiệu $N = E\left(\dfrac{1}{\eta} + 1\right)$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có :

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \eta \Rightarrow (\forall k \in \{1, ..., n\}, \frac{1}{n+k} \leq \eta)$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{1, ..., n\}, \left| f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} f'(0) \right| \leq \frac{1}{n+k}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| u_n - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right) f'(0) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} f'(0) \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)\varepsilon$$

$$\leq \frac{n}{n+1}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Mặt khác thì $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2$, theo kết quả khảo sát các tổng Riemann (xem 6.2.7, Hệ quả, Tập 1).

◊ **Trả lời :** $f'(0)\ln 2$.

8.4.1 ◊ **Trả lời :**

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) e d) $-\infty$ e) 1.

8.4.2 ◊ **Trả lời :** $x - \ln 2 - e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} + o(e^{-4x})$.

8.4.3. Ánh xạ $\varphi :]0\,;1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{Arccos}(1-t^2)$ khả vi trên $]0\,;1]$ và :

$$\forall t \in \,]0\,;1],\ \varphi'(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-(1-t^2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}}.$$

Do $\varphi'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \sqrt{2}$ và vì φ liên tục tại 0, nên định lý "giới hạn của đạo hàm" (5.2.2, Hệ quả, Tập 1) cho phép ta suy ra rằng φ thuộc lớp C^1 trên $[0\,;1]$ và $\forall t \in [0\,;1]$, $\varphi'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}}$. Biểu thức của φ' chứng tỏ φ' thuộc lớp C^∞ trên $[0\,;1]$, vậy có KTHH(0^+) tới mọi bậc. Kết quả là φ cũng có KTHH(0^+) tới mọi bậc, tính được bằng cách tích phân khai triển hữu hạn của φ'. Ta có :

$$\forall t \in [0\,;1],\ \varphi'(t) = \sqrt{2}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k\right) + o(t^{2n})$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^{2k}k!}t^{2k}\right) + o(t^{2n})$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^2}t^{2k}\right) + o(t^{2n})$$

Vì ngoài ra $\varphi(0) = 0$, nên ta suy ra :

$$\forall t \in [0\,;1],\ \varphi(t) = \sqrt{2}\left(t + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^2(2k+1)}t^{2k+1}\right) + o(t^{2n+1}).$$

◊ **Trả lời :** $\sqrt{2}\left(\sqrt{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^2(2k+1)}x^k\sqrt{x}\right) + o\left(x^{n+\frac{1}{2}}\right)$.

8.4.4 ◊ **Trả lời :** $(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\left(\frac{x}{2}-\frac{\ln 2}{2}\right)e^x}$.

8.4.5 a) Ánh xạ $f : x \mapsto \tan x - x$ khả vi trên mỗi khoảng $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,;\, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$ và có đạo hàm $x \mapsto f'(x) = \tan^2 x \geq 0$. Suy ra bảng biến thiên của f :

x	$\dots$	$n\pi - \frac{\pi}{2}$		$n\pi + \frac{\pi}{2}$	$\dots$
$f'(x)$		‖	+	‖	
$f(x)$		‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	

Do định lý giá trị trung gian và do f đơn điệu chặt trên $\left]n\pi - \frac{\pi}{2} \,;\, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, nên tồn tại một và chỉ một phần tử x_n thuộc khoảng đó sao cho $f(x_n) = 0$. Vì $f(n\pi) = -n\pi < 0$, nên suy ra $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

b) 1) Vì $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, nên ta có ngay $\frac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, tức là $x_n \underset{n\infty}{\sim} n\pi$, cũng có nghĩa là $x_n = n\pi + o(n)$.

2) Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$, xét : $\alpha_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n$. Vì $\alpha_n \in \left]0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$, nên ta có :

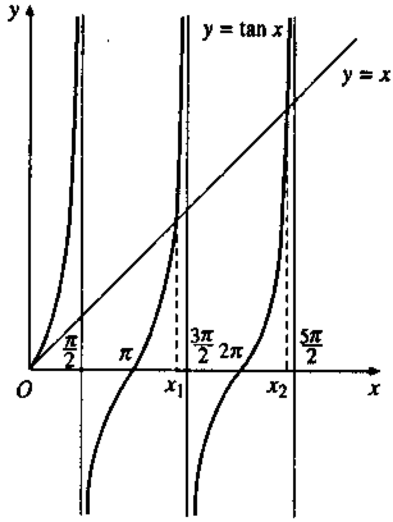
$$\alpha_n = \operatorname{Arctan}(\tan\alpha_n) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{cotan} x_n) = \frac{1}{x_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}.$$

Như vậy ta được : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) Xét $\beta_n = x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}\right)$: ta đã có $\beta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, suy ra $\beta_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, do đó :

$$\beta_n \underset{n\infty}{\sim} \tan\beta_n = -\frac{1}{\tan\left(x_n + \frac{1}{n\pi}\right)} = -\frac{1 - x_n \tan\frac{1}{n\pi}}{x_n + \tan\frac{1}{n\pi}}$$

$$= -\frac{1 - \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)\right)\left(\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n\pi + o(n)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi n^2}.$$



◊ **Trả lời** : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

8.4.6 ◊ **Trả lời** : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{\pi - 2}{2\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

8.4.7 1) $0 \leq 1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\,dx \leq \int_0^1 x^n dx \leq \frac{1}{n+1}$, suy ra $I_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

2) Bằng phép tích phân từng phần ta được :

$$1 - I_n = \left[\frac{x}{n}\ln(1 + x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n}\ln(1 + x^n)dx,$$

và
$$0 \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

◊ **Trả lời** : $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

8.4.8 Chứng tỏ rằng tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho : $\forall t \in [0\,;1]$, $|e^t - 1 - t| \leq Mt^2$.

Mặt khác : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0\,;1]$, $0 \leq \frac{1}{n}\ln(1 + x^2) \leq \frac{x^2}{n} \leq 1$.

Do đó ta suy ra, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^1 (1 + x^2)^{\frac{1}{n}}dx - \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{n}\ln(1 + x^2)\right)dx\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left| e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1 + x^2)\right| dx$$

$$\leq M\int_0^1 \left(\frac{1}{n}\ln(1 + x^2)\right)^2 dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Cuối cùng tính $\int_0^1 \ln(1 + x^2)\,dx$ bằng cách tích phân từng phần.

◊ **Trả lời** : $a = 1$, $b = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$.

8.4.9 1) $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

2) Mặt khác ta chứng tỏ rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, chẳng hạn bằng nhận xét rằng $\frac{1}{i+1} \leq \int_i^{i+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{i}$, từ đó lấy tổng sẽ có $\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} \leq \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, ta suy ra $\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^{n}\frac{1}{x}\,dx$.

Trong việc khảo sát các chuỗi (Tập 3) chúng ta sẽ gặp lại việc so sánh các tổng con của các chuỗi và các tích phân bộ phận của những tích phân suy rộng (của một hàm số đơn điệu).

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{n}\ln n$.

8.4.10 a) Khảo sát sự biến thiên của $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_n(x) = x^n - x - n$.

b) Chú ý : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, x_n > 1$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $f_n(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n - (1+\varepsilon) - n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, và vì f tăng trên $[1 ; +\infty[$, nên tồn tại N thuộc $\mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow f_n(1+\varepsilon) > 0 \Rightarrow x_n \leq 1+\varepsilon).$$

Ta suy ra : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

c) Ký hiệu $y_n = x_n - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$; vậy ta có $y_n \xrightarrow[n\infty]{} < 0$. Chứng tỏ rằng :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n\ln(1+y_n) = \ln(n+1+y_n).$$

Nhưng $n\ln(1+y_n) \underset{n\infty}{\sim} ny_n$, và $\ln(n+1+y_n) \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, suy ra $y_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

◊ **Trả lời :** $x_n - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

8.4.11 a) Khảo sát sự biến thiên của f_n.

b) • Chú ý rằng $n = x_n + \ln x_n \leq 2x_n$, vậy $x_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, rồi $n = x_n + \ln x_n \sim x_n$.

• Vậy ta xét $y_n = x_n - n$; ta có ngay $y_n = o(n)$. Khi đó : $y_n = -\ln(n+y_n) \underset{n\infty}{\sim} -\ln n$.

• Ký hiệu $z_n = x_n - n + \ln n$; ta có ngay $z_n = o(\ln n)$. Ta lại có :

$$z_n = -\ln\left(\frac{n - \ln n + z_n}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n - z_n}{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

◊ **Trả lời :** $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

8.4.12 Vì mọi số nguyên m thuộc $\{1, ..., n\}$ đều là ước của $m, 2m, 3m, ...$ nên :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(k) = n + \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right) + ... + \mathrm{E}\left(\frac{n}{n}\right).$$

Suy ra : $n\mathrm{H}_n - n \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(k) \leq n\mathrm{H}_n$, trong đó $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Sử dụng hệ thức $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$ thu được bằng cách so sánh H_n, $\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

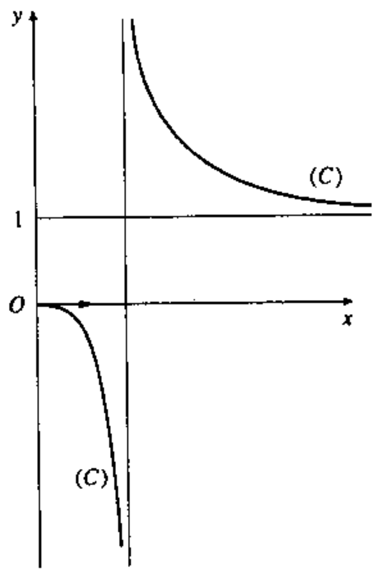
8.5.1 a) Miền xác định của $f =]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, và có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = 0$; f khả vi trên miền xác định và : với mọi x thuộc miền xác định,

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)(\ln x)^2}$, trong đó $g(x) = x\ln x - (x+1)\ln(x+1)$.

Ánh xạ g khả vi trên $]0\ ;\ +\infty[$ và : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \ln x - \ln(x+1) < 0$. Vậy g giảm nghiêm ngặt ; do ta còn có $\lim\limits_{0^+} g = 0$, nên : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) < 0$.

Suy ra bảng biến thiên của f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \ \|\ +\infty$	$\searrow$	1



(C) nhận các đường thẳng có phương trình $x = 1$, $y = 1$ làm tiệm cận. Cuối cùng ta có :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}\,\frac{1}{\ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \quad .$$

b) Miền xác định $f =]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$; f khả vi trên miền xác định và : Với mọi x thuộc miền xác định, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(\ln(1+x))^2}$,

trong đó $g(x) = -\dfrac{x^2}{1+x} + \ln(1+x)^2$. Ánh xạ g khả vi trên $]-1;\ +\infty[$ và: $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{h(x)}{1+x},$$

trong đó $\quad h(x) = -\dfrac{2x + x^2}{1+x} + 2\ln(1+x)$.

Ánh xạ h khả vi trên $]-1\ ;\ +\infty[$ và : $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = -\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$.

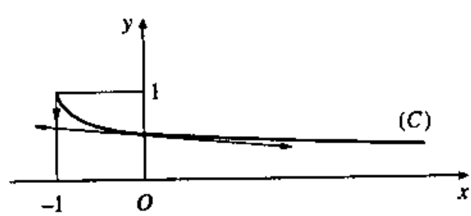
Suy ra sự biến thiên của h, sau đó của g, và cuối cùng là sự biến thiên của f.

- Khảo sát hàm số tại 0

Bằng KTHH(0), chứng tỏ rằng $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{2}$, sau đó $\dfrac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} -\dfrac{1}{12}$. Vậy ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = \dfrac{1}{2}$, và tại điểm có tọa độ $\left(0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$, (C) có tiếp tuyến với độ dốc $-\dfrac{1}{12}$.

- $f'(x) \xrightarrow[x \to -1^+]{} -\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



c) Miền xác định của $f = \mathbb{R}^*$; f khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

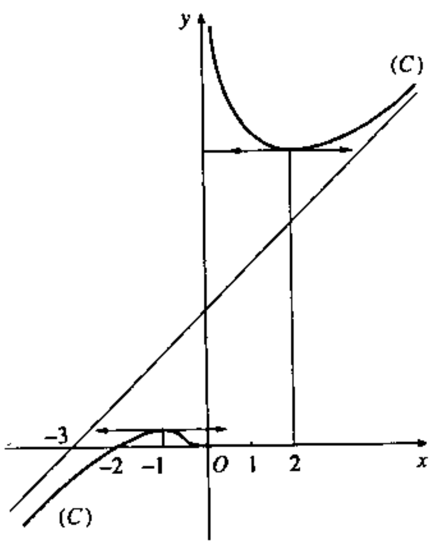
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$4\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

Khảo sát hàm số tại 0^- : $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ và $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$.

Khảo sát hàm số tại $\pm\infty$:

$f(x) = (x + 2)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, suy ra (C) nhận đường thẳng (D) có phương trình $y = x + 3$ làm tiệm cận, và khi x dần đến $+\infty$ (tương ứng : $-\infty$) thì (C) nằm trên (tương ứng : nằm dưới) (D).

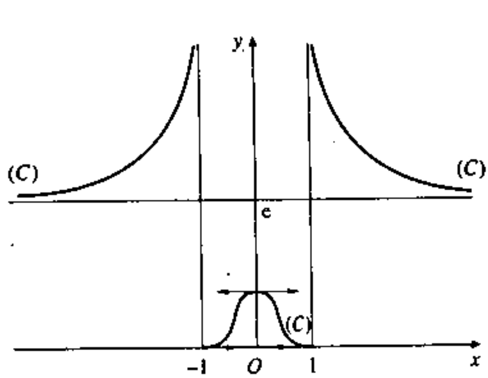
Điểm uốn : f'' triệt tiêu và đổi dấu tại $-\frac{2}{5}$.



d) Miền xác định của $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ và f chẵn ; f khả vi trên $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ và :

$$\forall x \in [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[,\ f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}\, e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}} \le 0.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0 ‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e



e) Miền xác định của $f = \mathbb{R}^*$;

f khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\, g(x), \text{ trong đó } g(x) = -\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right) + \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}.$$

Ánh xạ g khả vi trên $\mathbb{R}$ và : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

Từ đó suy ra sự biến thiên của g, và vì $g(0) = 0$, suy ra được dấu của $g(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	e

Khảo sát hàm số tại $-\infty$:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right) \sim \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0, \quad \text{vậy } f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1.$$

Khảo sát hàm số tại 0 :

Bằng KTHH(0), chứng tỏ rằng : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{8}\, x + o(x)$.

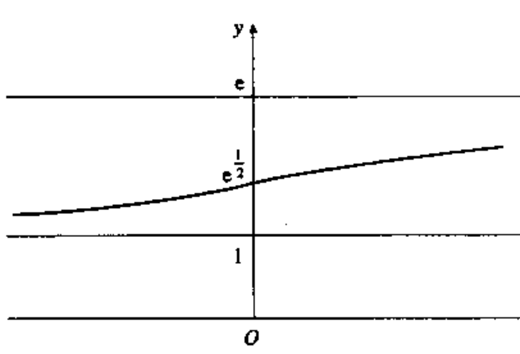
Vậy ta có thể thác triển liên tục $f(x)$ tại 0 bằng cách đặt $f(0) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, và khi đó f khả vi tại 0

và $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{8}$.

Khảo sát hàm số tại $+\infty$:

$\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right) \sim \dfrac{1}{x}\ln(\mathrm{e}^x) = 1$,

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}$ (xem 8.2.2, Mệnh đề 3, về phép hợp các hàm tương đương bằng lôgarit).

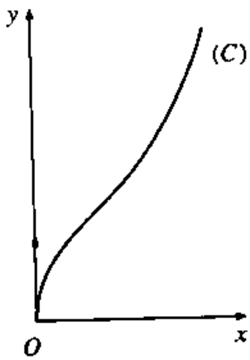


f) Miền xác định của $f = \mathrm{R}_+$; f khả vi trên R_+ và :

$$\forall x \in \mathrm{R}_+,\ f'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x^2+x}} + (x + \sqrt{x})\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,e^{\sqrt{x^2+x}} > 0.$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$
- $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$



g) • Miền xác định của $f = \mathrm{R} - \left(\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

• f : 2π – tuần hoàn và với mọi x thuộc miền xác định, $f(\pi - x) = f(x)$; do vậy ta sẽ khảo sát f trên $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• f khả vi trên miền xác định và với mọi x thuộc miền xác định :

$$f'(x) = f(x)\,\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,g(\sin x),$$ *trong đó* $g :]-1\ ;\ 1] \to \mathrm{R}$ xác định bởi :

$$\forall t \in]-1\ ;\ 1],\ g(t) = -\ln(1 + t) + \frac{t}{1 + t}.$$

Khảo sát sự biến thiên của g.

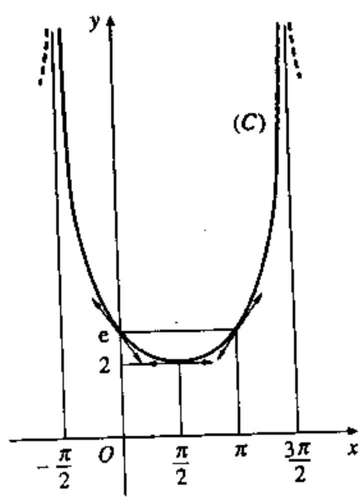
x	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e $\Vert$ e	$\searrow$	2

Khảo sát hàm số tại 0 :

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}\ln(1 + \sin x)}$$

$$= e^{1 - \frac{1}{2}x + o(x)} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + o(x)\ ;$$

vậy ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = \mathrm{e}$; khi đó f khả vi tại 0 và $f'(0) = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.



h) • Miền xác định $f = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[- \{2n\pi\} \right)$

• f : 2π – tuần hoàn và chẵn

• f khả vi trên $\left]0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ và : $\forall x \in \left]0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x) = -f(x)\dfrac{\cot\mathrm{an}x}{\sin^2 x}g(x)$, trong đó

$$g : \left]0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2\ln\cos x + \sin^2 x$$

Khảo sát sự biến thiên của g.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1 ‖

Khảo sát hàm số tại 0^+ :

$$\ln f(x) = \cot\mathrm{an}^2 x \ln\cos x = \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{(x + o(x^2))^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = -\frac{1}{2} + o(x), \text{ suy ra :}$$

$f(x) = e^{-\frac{1}{2} + o(x)} = e^{-\frac{1}{2}}(1 + o(x)) = e^{-\frac{1}{2}} + o(x)$. Vậy ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = e^{-\frac{1}{2}}$; khi đó f khả vi tại 0 và $f'(0) = 0$.

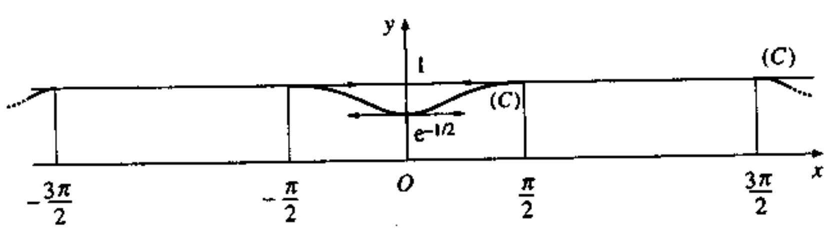
Khảo sát hàm số tại $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$:

Bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$, ta có :

$$\ln f(x) = \tan^2 t \ln \sin t \underset{t \to 0}{\sim} t^2 \ln t = o(t),$$

suy ra $f(x) = e^{o(t)} = 1 + o(t)$. Vậy ta có thể thác triển liên tục f tại $\frac{\pi}{2}$ bằng cách đặt

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; khi đó f khả vi tại $\frac{\pi}{2}$ và $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.



i) Miền xác định của $f = \mathbb{R}^*$; f khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\, g(x)$, trong đó

$$g(x) = -\ln(1 - x + x^2) + \frac{x(2x-1)}{1-x+x^2}.$$

Khảo sát sự biến thiên của $g(x)$ $\left(g'(x) = \dfrac{-x(2x^2-2x-1)}{(1-x+x^2)^2} \right)$.

Suy ra rằng g triệt tiêu đúng tại 0 và tại hai số thực khác, ký hiệu là α, β : $\alpha \approx -0{,}604$, $b \approx 3{,}301$; $f(\alpha) \approx 0{,}328$, $f(\beta) \approx 1{,}919$.

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘		↗	‖	↗		↘	1

Khảo sát hàm số tại $\pm\infty$:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(1 - x + x^2) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0, \quad \text{suy ra } f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1.$$

Khảo sát hàm số tại 0 :

$\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(1 - x + x^2) = -1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$, suy ra $f(x) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{2e}x + o(x)$. Vậy ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = \dfrac{1}{e}$; khi đó f khả vi tại 0 và $f'(0) = \dfrac{1}{2e}$.

j) Miền xác định của $f = \mathbb{R}_+^*$; f khả vi trên $\mathbb{R}_+^*$ và : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = f(x)((1 - 2x)\ln x + (1 - x)).$$

Khảo sát sự biến thiên của $g : \left]0 ; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]\tfrac{1}{2} ; +\infty\right[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

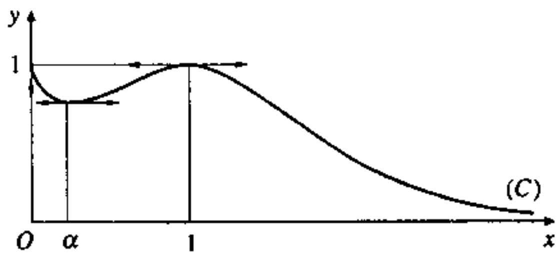
Suy ra rằng g triệt tiêu tại hai số thực α ($\alpha \approx 0{,}236$) và 1 ; $f(\alpha) \approx 0{,}771$.

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Khảo sát hàm số tại 0^+ :

$$\ln f(x) = (x - x^2)\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0, \quad \text{suy ra } f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1.$$

Và $$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(e^{(x - x^2)\ln x} - 1\right) \underset{x \to 0^+}{\sim} (1 - x)\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty.$$



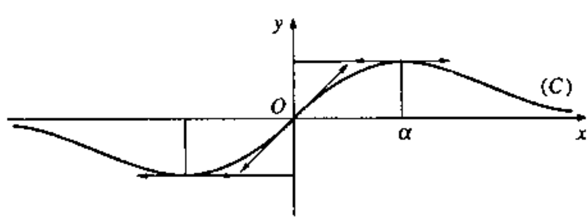
k) f lẻ, khả vi trên $\mathbb{R}$, và : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\left(\dfrac{1}{2x} - \operatorname{Arctan} x\right)$.

Ánh xạ h : $\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2x} - \operatorname{Arctan} x \end{aligned}$ khả vi và :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{1+x^2} < 0.$$

Suy ra h triệt tiêu và đổi dấu tại một số thực α, $\alpha \approx 0{,}765$; $f(\alpha) \approx 0{,}412$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0



l) Miền xác định của $f = [-1\ ;\ 1]$, f liên tục trên $[-1\ ;\ 1]$, khả vi trên $]-1\ ;\ 1[$, và chẵn. Ta có :

$$\forall x \in\ ]0\ ;\ 1[,\ f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, g(x),$$

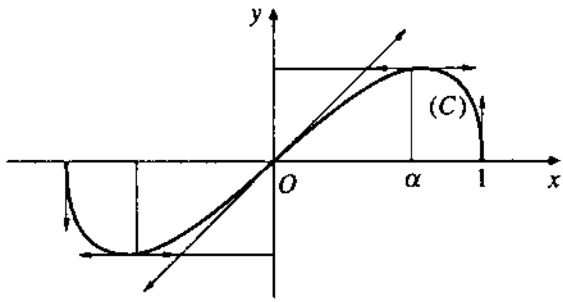
trong đó $g :]0\ ;\ 1[\to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \operatorname{Arctan} x - \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$$

Ánh xạ g khả vi trên $]0\ ;\ 1[$ và : $\forall x \in\ ]0\ ;\ 1[,\ g'(x) = \dfrac{1+5x^2}{x^2(1+x^2)^2} > 0.$

Suy ra sự biến thiên của g. Tồn tại $\alpha \in\ ]0\ ;\ 1[$ duy nhất, tại đó g triệt tiêu và đổi dấu ; $\alpha \approx 0{,}664$ và $f(\alpha) \approx 0{,}438$.

x	0		α		1
$g'(x)$			+		
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\pi/4$
$f'(x)$	1	+	0	−	
$f(x)$	0	↗		↘	0



m) Miền xác định của $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ và f là π – tuần hoàn.

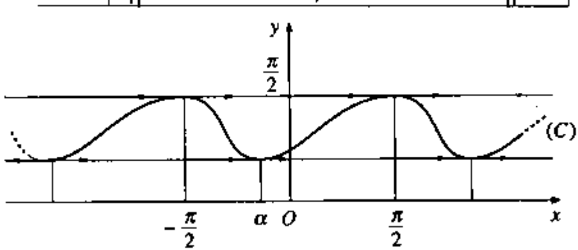
Ta có : $f(x) \xrightarrow[x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+]{} \frac{\pi}{2}$ và $f(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} \frac{\pi}{2}$; vậy ta thác triển liên tục f tại $\frac{\pi}{2} + n\pi$ bằng cách đặt $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ánh xạ f khả vi trên $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ và $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = \frac{(1 + 2\tan x)(1 + \tan^2 x)}{1 + (1 + \tan x + \tan^2 x)^2}$$

Từ đó ta suy ra sự biến thiên của f ; ta ký hiệu $\alpha = \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}437$, $f(\alpha) = \operatorname{Arctan}\frac{3}{4} \approx 0{,}644$.

x	$-\pi/2$		α		$\pi/2$
$f'(x)$	‖	−	0	+	‖
$f(x)$	‖ $\pi/2$	↘		↗	$\pi/2$ ‖



Chỉ dẫn và trả lời

Các bài tập chương 9

9.2.1 a) **Trả lời :** $\frac{1}{2}(\text{Arcsin}x)^2 + C$, C hằng trên $]-1; 1[$.

b) ◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C$, C hằng trên R.

c) Phép đổi biến $u = \sqrt{1 + e^{2x}}$ quy bài tập về $\int \frac{du}{u^2 - 1}$; hay còn có thể đặt $v = e^{-x}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} + C$, C hằng trên R (hay cũng là : $-$ Argsh $(e^{-x}) + C$).

d) Phép đổi biến $u = \sqrt{\cos x}$ quy bài tập về $2\int(u^4 - 1)du$.

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}\ (\cos^2 x - 5) + C(x)$,

C hằng trên mỗi khoảng $\left]-\frac{\pi}{2} + 2n\pi ; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

e) Phép đổi biến $u = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}$ quy bài tập về $12\int u^3(u^3 - 1)du$.

◊ **Trả lời :** $\frac{3}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3}(4\sqrt[4]{x} - 3) + C$, C hằng trên $]0; +\infty[$.

f) Phép đổi biến $u = x - \frac{1}{x}$ quy bài tập về $\varepsilon\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$, $\varepsilon = \text{sgn}(x)$.

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} \ln(x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}) - \ln x + C_1 & \text{nếu } x < 0 \\ -\ln(x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}) + \ln x + C_2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

9.2.2 Phép đổi biến $u = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$ quy bài tập về $4\int_1^{\sqrt{2}}(u^2 - 1)du$.

◊ **Trả lời :** $\frac{4}{3}(2 - \sqrt{2})$.

9.3.1 ◊ **Trả lời :**

a) $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}\right)e^{3x} + C$, C hằng trên R.

b) $(-x^2 + x - 1)\cos x + (2x - 1)\sin x + C$, C hằng trên R.

c) $(x^3 + 6x - 1)\text{sh}x - (3x^2 + 6)\text{ch}x + C$, C hằng trên R.

d) $\left(\frac{x^2}{2}\cos x + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)\sin x\right)e^x + C$, C hằng trên R.

e) $\frac{1}{8}(2x^2+1)\text{sh}2x - \frac{1}{4}x\text{ch}2x - \frac{x^3}{6} + C$, C hằng trên R.

f) $x\text{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$, C hằng trên $]-1;\ 1[$.

g) $x\text{Arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$, C hằng trên $]-1;\ 1[$.

h) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$, C hằng trên R.

i) $x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1} + C$, C hằng trên $]1;\ +\infty[$.

j) $\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha x^\alpha}{x^\alpha+1}\ln x - \ln(x^\alpha+1)\right) + C$, C hằng trên $]0;\ +\infty[$.

k) $\frac{x^3}{3}\ln(x^6-1) - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3-1}\right| + C(x)$, C hằng trên $]-\infty;\ -1[$ và trên $]1;\ +\infty[$.

l) $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\ \text{Arctan}x + C$, C hằng trên R.

m) $x\text{Arctan}\frac{x+1}{x-2} + \frac{3}{4}\ln(2x^2-2x+5) + \frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C(x)$, C hằng trên $]-\infty;\ 2[$ và trên $]2;\ +\infty[$.

n) $x\tan x + \ln|\cos x| + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n \in \mathbf{Z}$.

o) $\sin x\ln(1+\cos x) + x - \sin x + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $]-\pi+2n\pi;\ \pi+2n\pi[$, $n \in \mathbf{Z}$.

p) $\frac{1}{(\ln3)^2}(\sqrt{2x+1}\ln3 - 1)3^{\sqrt{2x+1}} + C$, C hằng trên $\left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

9.3.2 a) Đặt $\theta = \text{Arcsin}x$, rồi áp dụng phương pháp hệ số bất định.

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

b) Đặt $\theta = \text{Arccos}(1-2x)$: $\int_0^1 (x-x^2)^{3/2}\text{Arccos}(1-2x)\text{d}x = \frac{1}{16}\int_0^\pi \theta\sin^4\theta\text{d}\theta$.

Tuyến tính hóa $\sin^4\theta$, rồi tính nguyên hàm từng phần.

◊ **Trả lời:** $\frac{3\pi^2}{256}$.

c) ◊ **Trả lời:** $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\ln2$.

d) ◊ **Trả lời:** $e^{-\pi}$.

e) Bằng phép đổi biến $u = \ln x$: $\int_1^2 (\ln x)^2\text{d}x = \int_0^{\ln2} u^2e^u\text{d}u$.

◊ **Trả lời:** $2((\ln2) - 1)^2$.

9.5.1 a) Đặt $u = x^2$, rồi phân tích thành các phân thức đơn giản.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{4(1+x^2)^2} + \dfrac{1}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|x| + C(x)$, C hằng trên $]-\infty; 0[$ và trên $]0; +\infty[$.

b) ◊ **Trả lời:** $\dfrac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2 + 2x + 2) + 2\mathrm{Arctan}(x + 1) + C$, C hằng trên R.

c) Đặt $u = x + 2$, rồi phân tích thành các phân thức đơn giản.

◊ **Trả lời:** $4\mathrm{Arctan}(x + 2) + \dfrac{6x+17}{2(x^2+4x+5)} + C$, C hằng trên R.

d) $\dfrac{1}{5}((X + 1)^5 - X^5 - 1) = X(X^3 + 2X^2 + 2X + 1) = X(X+1)(X^2+X+1)$.

Một phép phân tích thành phân thức đơn giản cho ta :

$$\frac{1}{(X+1)^5 - X^5 - 1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X^2+X+1} .$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{5}\Big(\ln|x| - \ln|x+1| - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)\Big) + C(x)$, C hằng trên mỗi một trong ba khoảng $]-\infty; -1[$, $]-1 ; 0[$; $]0 ; +\infty[$.

e) Một phép phân tích thành phân thức đơn giản cho ta :

$$\frac{1}{(X^2+X+1)^2+1} = \frac{1}{(X^2+1)(X^2+2X+2)} = \frac{1}{5}\Big(\frac{-2X+1}{X^2+1} + \frac{2X+3}{X^2+2X+2}\Big) .$$

◊ **Trả lời :**

$\dfrac{1}{5}(-\ln(x^2+1) + \mathrm{Arctan}x + \ln(x^2+2x+2) + \mathrm{Arctan}(x+1)) + C$, C hằng trên R.

9.5.2 a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} \underset{u=e^x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int\Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\Big)\mathrm{d}u.$

◊ **Trả lời:** $x - \ln(e^x + 1) + C$, C hằng trên R.

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{e^x-1}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt[3]{e^x-1}}{=} 3\int \frac{u^3}{u^3+1}\mathrm{d}u = 3\int\Big(1 - \frac{1}{(u+1)(u^2-u+1)}\Big)\mathrm{d}u,$

và phân tích thành phân thức đơn giản.

◊ **Trả lời:** $3\sqrt[3]{e^x-1} - \ln(1 + \sqrt[3]{e^x-1}) - \dfrac{1}{2}\ln\Big(\Big(\sqrt[3]{e^x-1}\Big)^2 - \sqrt[3]{e^x-1} + 1\Big)$

$$+ \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\sqrt[3]{e^x-1} - 1}{\sqrt{3}}\right) + C, \ C \text{ hằng trên R.}$$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \underset{u=\sqrt[3]{1+x^2}}{=} \frac{3}{2}\int \frac{u}{u^3-1}\mathrm{d}u$, rồi phân tích thành phân thức đơn giản.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{1+x^2} - 1) - \dfrac{1}{4}\ln\Big(\Big(\sqrt[3]{1+x^2}\Big)^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1\Big)$

$+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C(x)$, C hằng trên $]-\infty;0[$ và trên $]0;+\infty[$.

d) Tính nguyên hàm từng phần, rồi đặt $u=\sqrt{x}$.

◊ **Trả lời :** $2\sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{2x}}{x+1-\sqrt{2x}}-\sqrt{2}\,(\mathrm{Arc}\tan(\sqrt{2x}+1)$

$+\,\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2x}-1))+C$, C hằng trên $]0;+\infty[$.

e) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{2-\mathrm{e}^{-x}}}{=} \int\left(1+\frac{1}{(2-u^2)^2}\right)\mathrm{d}u.$

Tính $J_1(u)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}$ trực tiếp, rồi bằng phương pháp tích phân từng phần, để suy ra $J_2(u)$ (xem cách tính $I_n(t)$, 9.5, 3), 2)).

◊ **Trả lời :** $\left(1+\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x\right)\sqrt{2-\mathrm{e}^{-x}}+\dfrac{\sqrt{2}}{16}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\mathrm{e}^{-x}}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\mathrm{e}^{-x}}}+C$, C hằng trên $]-\ln 2;+\infty[$.

9.5.3 ◊ **Trả lời :** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4}$.

9.5.4 Xác định dạng phân tích thành phân thức đơn giản :

$$\frac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^3(\mathrm{X}-1)^2}=\frac{b}{\mathrm{X}^3}+\frac{a+2b}{\mathrm{X}^2}+\frac{2a+3b}{\mathrm{X}}+\frac{a+b}{(\mathrm{X}-1)^2}-\frac{2a+3b}{\mathrm{X}-1}.$$

◊ **Trả lời :** $2a+3b=0$.

9.5.5 Trong dạng phân tích thành phân thức đơn giản của $\dfrac{\mathrm{X}^3+a}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)^2}$, hệ số của $\dfrac{1}{\mathrm{X}}$ là a; vậy cần có $a=0$. Nhưng hãy tính $\displaystyle\int\frac{x^3}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$, và chứng minh rằng khi đó ta thu được một hàm số không phải là phân thức hữu tỉ.

◊ **Trả lời :** Không có a nào thích hợp.

9.6.1 a) Tuyến tính hóa : $\sin^4x=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{3}{8}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C$, C hằng trên $\mathbb{R}$;

hoặc là : $\dfrac{3}{8}x-\dfrac{5}{8}\sin x\cos x+\dfrac{1}{4}\sin x\cos^3x+C$.

b) Tuyến tính hóa : $\sin x\sin 3x=\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$...

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{1}{8}\cos 2x-\dfrac{1}{16}\cos 4x+\dfrac{1}{24}\cos 6x+C$, C hằng trên $\mathbb{R}$.

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$;

đặt $u = x - \frac{\pi}{4}$, để quy về $\sqrt{2}\int \frac{\cos u}{\cos^2 u(1 + 2\sin^2 u)}du$; rồi đặt $v = \sin u$.

◊ **Trả lời :** $\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + \frac{2}{3}\operatorname{Arctan}(\sin x - \cos x) + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng của $\mathbb{R}$ mà trên đó $\sin x + \cos x$ không triệt tiêu.

d) Đặt $u = \cos x$.

◊ **Trả lời :** $\ln(1 + \cos x) - \ln|\cos x| + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng thuộc $\mathbb{R} - \left(\{\pi + 2n\pi \; ; \; n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + m\pi \; ; \; m \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

e) Đặt $u = \sin x$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $\left]n\frac{\pi}{2} \; ; \; (n+1)\frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) Đặt $u = \tan x$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{1}{2}\cot\text{an}^2 x - \ln|\sin x| + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $]n\pi \; ; \; (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

g) Tích phân từng phần : $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx = \sin^4 x.\tan x - \int 4\sin^3 x\cos x\tan x dx$.

Sử dụng bài tập 9.6.1, a).

◊ **Trả lời :** $\frac{\sin^5 x}{\cos x} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\sin x\cos x - \sin x\cos^3 x + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi \; ; \; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

9.6.2 a) Đặt $u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, rồi đặt $v = \sin u$.

◊ **Trả lời :** $-\ln\left|\frac{1 + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right) + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng thuộc $\mathbb{R} - \left(\{n\pi \; ; \; n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2m\pi \; ; \; m \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

b) Đặt $u = \sqrt{\cos 2x}$.

◊ **Trả lời :** $-\operatorname{Arctan}\sqrt{\cos 2x} + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $\left]-\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

c) Đặt $u = \tan\frac{x}{2}$, rồi đặt $v = \sqrt{1 - u^2}$.

◊ **Trả lời :**

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{1-\tan^2\frac{x}{2}}}\right| + C_1 \text{ nếu } x \in \left]2n\pi\,;\,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[,\ n \in \mathbb{Z}. \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{1-\tan^2\frac{x}{2}}}\right| + C_2 \text{ nếu } x \in \left]2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\,;\,2n\pi\right[,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

9.6.3 a) $\cos^4 x + \sin^4 x + \dfrac{1}{4} = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(1-\cos 4x).$$

Đặt $u = \tan 2x$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

b) Đặt $\theta = \mathrm{Arccos}x$, sau đó đặt $\varphi = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}$.

◊ **Trả lời :** $4\sqrt{2} - \pi - 2$.

9.6.4 a) Phương pháp giống như ở bài tập 9.6.1, g).

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{\mathrm{ch}^5 x}{\mathrm{sh}x} + \dfrac{3}{2}x + \mathrm{sh}2x + \dfrac{1}{8}\mathrm{sh}4x + C(x)$, C hằng trên $]-\infty\,;\,0[$ và trên $]0\,;\,+\infty[$.

b) Đặt $u = \mathrm{th}2x$.

◊ **Trả lời :** $8\coth 2x - \dfrac{8}{3}\coth^3 2x + C(x)$, C hằng trên $]-\infty\,;\,0[$ và trên $]0\,;\,+\infty[$.

c) Bằng cách tính nguyên hàm từng phần, tìm một hệ thức truy hồi giữa $I_n(x)$ và $I_{n+2}(x)$, trong đó $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^n x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{1}{4}\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^4 x} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x} + \dfrac{3}{8}\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x) + C$, C hằng trên $\mathbb{R}$.

d) Đặt $u = \mathrm{ch}x$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{2}}\right) + C$, C hằng trên $\mathbb{R}$.

e) Đặt $u = \mathrm{th}x$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\text{th}x}{\sqrt{2}-\text{th}x}\right)+C$, C hằng trên R.

f) Đặt $u = \text{sh}x$.

◊ **Trả lời :** $2\text{sh}^2x - 4\text{sh}x + 5\ln|1 + \text{sh}x| + C(x)$, C hằng trên $]-\infty\,;\alpha[$ và trên $]\alpha\,;+\infty[$, trong đó $\alpha = \ln(\sqrt{2}-1)$.

g) Đặt $u = \text{sh}x$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\text{sh}x}+\text{Arctan}\,(\text{sh}x)\right)+C(x)$, C hằng trên $]-\infty\,;0[$ và trên $]0\,;+\infty[$.

h) $\int \text{th}^3x\,dx = -\int \text{th}x(1-\text{th}^2x)dx + \int \text{th}x\,dx$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{1}{2}\text{th}^2x + \ln\text{ch}x + C$, C hằng trên R.

9.6.5 $A(x) + B(x) = \int e^{(n+1)x}\,\text{sh}^{n-1}x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}(e^{2x}-1)\right)^{n-1}e^{2x}dx =$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}(e^{2x}-1)\right)^n + C_1 = \frac{1}{n}e^{nx}\,\text{sh}^nx + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Tương tự $A(x) - B(x) = \frac{1}{n}e^{-nx}\,\text{sh}^nx + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Suy ra A và B, rồi theo cách tương tự tính C và D.

◊ **Trả lời :**

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{n}\,\text{ch}nx\,\text{sh}^nx + C_1 \\ B(x) &= \frac{1}{n}\,\text{sh}nx\,\text{sh}^nx + C_2 \\ C(x) &= \frac{1}{n}\,\text{ch}nx\,\text{ch}^nx + C_3 \\ D(x) &= \frac{1}{n}\,\text{sh}nx\,\text{ch}^nx + C_4 \end{aligned} \qquad (C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4.$$

9.6.6 $I(x) = \int \frac{2\,\text{ch}x}{\text{sh}^{n-1}x}dx$, đặt $u = \text{sh}x$. ◊ **Trả lời :** $\begin{cases} I(x) = -\dfrac{2}{(n-2)\text{sh}^{n-2}x} + C_1 \\ J(x) = -\dfrac{2}{(n-2)\text{ch}^{n-2}x} + C_2 \end{cases}$

C_1 hằng trên $]-\infty\,;0[$ và trên $]0\,;+\infty[$; C_2 hằng trên R.

9.6.7 Đặt $u = e^{\alpha x}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1+e^{\alpha x}} - \ln(1+e^{\alpha x}) + \alpha x\right)+C$, C hằng trên R.

9.6.8 a) Sử dụng một biểu thức liên hợp.

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{3}((x+1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{x}) + C$, C hằng trên $[0 ; +\infty[$.

b) Đặt $u = \sqrt{x-1}$.

◊ **Trả lời :** $\ln(x + \sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+2\sqrt{x-1}}{\sqrt{3}}\right) + C$, C hằng trên $[1 ; +\infty[$.

c) Đặt $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

◊ **Trả lời :** $-(1-x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$, C hằng trên $]-1 ; 1]$.

d) Đặt $u = x^2$, rồi đặt $v = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{x^4+1}) - \frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + C(x)$, C hằng trên $]-\infty ; 0[$ và hằng trên $]0 ; +\infty[$.

e) Đặt $t = \sqrt{x+2}$, sau đó $u = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$. Như thế ta được :

$$\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\,dx = \int \frac{2+\operatorname{sh}u}{1+\operatorname{ch}u}\, 2\operatorname{ch}u\operatorname{sh}u\,du$$
$$= 2\int \frac{(2+\operatorname{sh}u)(\operatorname{ch}u-1)}{\operatorname{sh}u}\operatorname{ch}u\,du = 4J(u) + 2K(u),$$

trong đó $J(u) = \int \frac{\operatorname{ch}u(\operatorname{ch}u-1)}{\operatorname{sh}u}\,du$ (đặt $v = \operatorname{ch}u$) và $K(u) = \int(\operatorname{ch}^2u - \operatorname{ch}u)\,du$ (hãy tuyến tính hóa).

◊ **Trả lời :** $4\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - 4\ln(1+\sqrt{x+2}) + \ln(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}) + C$, C hằng trên $]-1 ; +\infty[$.

f) Đặt $u = \sqrt{1-x^3}$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{2}{3}\operatorname{Arctan}(\sqrt{1-x^3}) + C$, C hằng trên $]1 ; \sqrt[3]{2}[$ và hằng trên $]\sqrt[3]{2} ; +\infty[$.

9.6.9 a) Đặt $u = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

◊ **Trả lời :** $\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\operatorname{Arctan}\alpha$, trong đó $\alpha = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$.

b) Đặt $u = \sqrt{x-1}$.

◊ **Trả lời :** $\ln\frac{3+\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

9.6.10 a) Đặt $\theta = \operatorname{Arcsin}x$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$, C hằng trên $]-1 ; 1[$.

b) Thực hiện phép đổi biến số $y = \frac{1}{x+2}$:

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-5x+4}} = -\varepsilon \int \frac{dy}{\sqrt{18y^2-9y+1}}$$

trong đó $\varepsilon = \mathrm{sgn}(y)$. Sau đó đặt $t = 12y - 3$:

$$I(x) = -\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\frac{\varepsilon\,\varepsilon_1\sqrt{2}}{6}\ln(\varepsilon_1 t + \sqrt{t^2-1}),$$

trong đó $\varepsilon_1 = \mathrm{sgn}(t)$.

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\ln\dfrac{3(x-2)-2\sqrt{2}\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2} + C_1 & \text{nếu } x < -2 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\ln\dfrac{3(2-x)+2\sqrt{2}\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2} + C_2 & \text{nếu } -2 < x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}\ln\dfrac{3(x-2)+2\sqrt{2}\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2} + C_3 & \text{nếu } 4 < x \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$

c) Đặt $t = \dfrac{x-2}{2}$, sau đó đặt $\theta = \mathrm{Arcsin}t$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{1}{4}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} + C$, C hằng trên $]0 ; 4[$.

d) Đặt $\varphi = \ln(|x| + \sqrt{x^2-1})$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}\ln(\varepsilon x + \sqrt{x^2-1}) + C(x)$, $\varepsilon = \mathrm{sgn}(x)$, C hằng trên $]-\infty; -1]$ và hằng trên $[1 ; +\infty[$.

e) Đặt $y = \dfrac{1}{x}$, sau đó đặt $u = \sqrt{y^2+1}$.

◊ **Trả lời :** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln|x| + C(x)$, C hằng trên $]-\infty ; 0[$ và hằng trên $]0 ; +\infty[$.

f) Đặt $\varphi = \ln(\varepsilon x + \sqrt{x^2-1})$, trong đó $\varepsilon = \mathrm{sgn}(x)$, sau khi sử dụng một biểu thức liên hợp.

◊ **Trả lời :**

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\ln(x^2+1) - \ln(-x+\sqrt{x^2-1}) + \sqrt{2}\ln(-x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}) + C_1 & \text{nếu } x < -1 \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\ln(x^2+1) + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{2}\ln(x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}) + C_2 & \text{nếu } x > 1 \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

g) Đặt $y = \dfrac{1}{x-1}$.

◊ **Trả lời :** $-2\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}} + C$, C hằng trên $]1 ; 2[$.

h) Đặt $t = 2x - 3$, rồi đặt $\varphi = \ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1})$, $\varepsilon = \mathrm{sgn}(t)$.

◊ **Trả lời :**

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2}-\frac{5}{2}\ln(3-2x+2\sqrt{x^2-3x+2}+C_1 \text{ nếu } x<1 \\ \sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{2}\ln(2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}+C_2 \text{ nếu } x>2 \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Đặt $u = x - 2$, rồi đặt $v = \sqrt{u^2-1}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}\text{Arctan}\sqrt{x^2-4x+3} + \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{2(x-2)^2} + C(x)$, C hằng trên $]-\infty\,;\,1[$ và hằng trên $]3;\,+\infty[$.

j) Đặt $u = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$.

◊ **Trả lời :** $\text{Arcsin}\,\frac{2x-(a+b)}{b-a} + C$, C hằng trên $]a,\,b[$.

k) $I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2\sqrt{x^2+2x+2}} \underset{y=\frac{1}{x-2}}{=} -\varepsilon \int \frac{y}{\sqrt{10y^2+6y+1}}\,\mathrm{d}y$, trong đó $\varepsilon = \text{sgn}(y)$.

Sau đó đặt $t = 10y + 3$, rồi đặt $\varphi = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{10(x-2)} + \varepsilon\frac{3\sqrt{10}}{100}\ln\frac{3x+4+\varepsilon\sqrt{10}\sqrt{x^2+2x+2}}{x-2} + C(x)$, $\varepsilon = \text{sgn}(x-2)$, C hằng trên $]-\infty\,;\,2[$ và hằng trên $]2\,;\,+\infty[$.

9.6.11 a) Liên tiếp đặt $u = x^\alpha$, $v = \frac{1}{u}$.

◊ **Trả lời :** $-\frac{1}{\alpha}\ln\frac{2+x^\alpha+2\sqrt{1+x^\alpha+x^{2\alpha}}}{\sqrt{3}\,x^\alpha} + C$, C hằng trên $]0\,;\,+\infty[$.

b) Đặt $t = \tan x$, $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$.

◊ **Trả lời :** $\ln(\tan x + \sqrt{2+\tan^2 x}) + \text{Arctan}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}\right) + C(x)$, C hằng trên mỗi khoảng $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

c) Đặt liên tiếp $y = e^x + 1$, $z = \frac{1}{y-1}$, $u = \frac{3z-1}{2}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(3 - e^x + \sqrt{3}\,\sqrt{4-(e^x+1)^2}\right) + C$, C hằng trên $]-\infty\,;\,0[$.

d) Đặt $\theta = \text{Arcsin}x$.

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} -2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} + C & \text{nếu } x \in\,]-1\,;\,0] \\ 2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} + C & \text{nếu } x \in [0\,;\,1[\end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$.

e) Đặt $y = x + \dfrac{1}{x}$.

◊ **Trả lời :** $\ln(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}) - \ln|x| + C(x)$, C hằng trên $]-\infty\ ;\ 0[$ và hằng trên $]0\ ;\ +\infty[$.

9.6.12

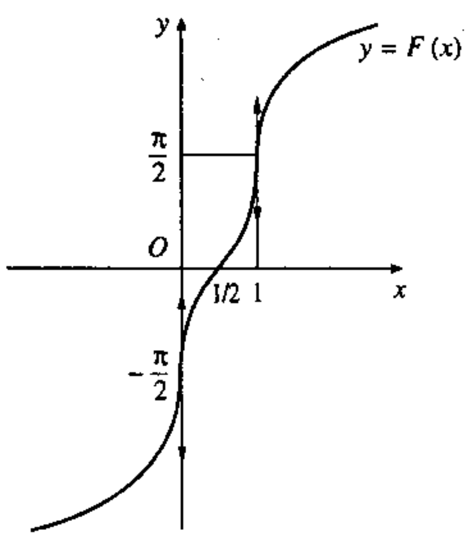
a) ◊ **Trả lời :**

$$\left\{\begin{array}{ll} -\ln(1 - 2x + 2\sqrt{x^2 - x}) + C_1 & \text{nếu } x < 0 \\ \operatorname{Arcsin}(2x - 1) + C_2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ \ln(2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}) + C_3 & \text{nếu } x > 1 \end{array}\right| ,\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

b) Ký hiệu I_1, I_2, I_3 là các nguyên hàm trên đây theo thứ tự trên $]-\infty\ ;\ 0[$, $]0\ ;\ 1[$, $]1\ ;\ +\infty[$, ta có :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} I_1(x) = C_1,\ \lim\limits_{x \to 0^+} I_2(x) = -\dfrac{\pi}{2} + C_2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} I_2(x) = \dfrac{\pi}{2} + C_2,\ \lim\limits_{x \to 1^+} I_3(x) = C_3 \end{array}\right| ,\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Vậy ta chỉ có thể ghép nối liên tục tại 0 và tại 1 khi và chỉ khi : $C_1 = -\dfrac{\pi}{2} + C_2$ và $C_3 = \dfrac{\pi}{2} + C_2$. Ngoài ra $I_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = C_2$.



◊ **Trả lời :** $F(x) = \begin{cases} -\ln(1 - 2x + 2\sqrt{x^2 - x}) - \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } x \leq 0 \\ \text{Arcsin}\,(2x - 1) & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}) + \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } 1 \leq x \end{cases}$

9.6.13 Để thu được một đẳng thức không tầm thường có chứa tích phân cần tính (thí dụ b) và c)), thường người ta có thể thử áp dụng một phép đổi biến làm hoán vị (hay giữ nguyên) các cận tích phân.

a) Đặt $u = \tan\dfrac{x}{2}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{a}{\sin a}$.

b) Bằng phép đổi biến $u = \pi - x$, và kí hiệu I là tích phân cần tính, để thu được :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

◊ **Trả lời :** π.

c) Bằng cách đặt $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, ta được $I = \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\ln(1 + \sqrt{2})$.

d) Đặt $t = \tan x$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{1}{2}\text{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\text{Arcsin}(\sqrt{2} - 1)$.

e) Ký hiệu $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\, dx$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \sin nx\, dx$, $A_n = I_n + iJ_n$. Với $n \geq 1$ ta có :

$$A_n = \int_0^{\pi} (\cos x\, e^{ix})^n\, dx = \int_0^{\pi} \Big(\frac{1}{2}(e^{2ix} + 1)\Big)^{n-1} \frac{1}{2} e^{2ix}\, dx + \int_0^{\pi} \Big(\frac{1}{2}(e^{2ix} + 1)\Big)^{n-1} \frac{1}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} A_{n-1}.$$

Suy ra : $A_n = \dfrac{1}{2^n} A_0 = \dfrac{\pi}{2^n}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{2^n}$.

9.6.14 • $\begin{cases} f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên }]0\,;+\infty[\\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + x^3)^{-1/2}(2x + 3x^2) > 0. \\ \lim\limits_{0^+} f = 0\ ,\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \end{cases}$

• $I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x + f^{-1}(x)} \underset{y = f^{-1}(x)}{=} \int \frac{f'(y)}{f(y) + y}\mathrm{d}y = \ln(f(y) + y) - J(y)$, trong đó

$J(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y) + y}$. Để tính $J(y)$, đặt $z = \sqrt{1 + y}$.

◊ **Trả lời :** $\ln(x + f^{-1}(x)) + \frac{1}{\sqrt{1 + f^{-1}(x)} + 1} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1 + f^{-1}(x)} - 1}{\sqrt{1 + f^{-1}(x)} + 1}\right) + C$,

C hằng trên $]0\,;\,+\infty[$.

9.6.15 Ký hiệu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ F(a) = \int_0^{\sin^2 a} \mathrm{Arcsin}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\cos^2 a} \mathrm{Arccos}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

• F khả vi trên $\mathbb{R}$ và : $\forall a \in \mathbb{R},\ F'(a) = 2(\mathrm{Arcsin}\,|\sin a| - \mathrm{Arccos}\,|\cos a|)\sin a\cos a$.

Đặc biệt : $\forall a \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right],\ F'(a) = 0$.

• F : π– tuần hoàn và $\forall a \in \mathbb{R},\ F(\pi - a) = F(a)$.

• $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}\sqrt{x} + \mathrm{Arccos}\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

9.6.16 Ký hiệu $f : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các ánh xạ xác định bởi :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}u}, \end{cases}$$

vốn thuộc lớp C^1 và thỏa mãn :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos x} > 0 \\ \forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}y} > 0, \end{cases}$$

do đó tăng nghiêm ngặt.

Bằng một phép tính nguyên hàm chẳng hạn, chứng tỏ rằng :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)$$

và từ đó suy ra :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\ \mathrm{ch}(f(x)) = \frac{1}{\cos x} = f'(x).$$

Ta có :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, (gof)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{f'(x)}{\mathrm{ch}(f(x))} = 1.$$

Vì $(gof)(0) = g(0) = 0$, ta suy ra : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $(gof)(x) = x$.

• Nếu $y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = f(x)$, thì $x = (gof)(x) = g(y) = \int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}u}$.

• Nếu $x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}u} = g(y)$, thì $g(f(x)) = x = g(y)$, do đó vì f là song ánh (vì tăng nghiêm ngặt), $y = f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$.

Chỉ dẫn và trả lời
Các bài tập chương 10

10.1.1 Trước tiên kiểm tra tính liên tục của f trên một khoảng thích hợp.

a) $(\forall x \in [1\,;+\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq e^{-\frac{\pi}{4}x})$ và $x \mapsto e^{-\frac{\pi}{4}x}$ khả tích trên $[1\,;+\infty[$.

◊ **Trả lời :** f khả tích trên $]0\,;+\infty[$.

b) $0 \leq f(x) = \dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{\sqrt{\ln(x+1)}+\sqrt{\ln x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x(\ln x)^{1/2}}$ và thí dụ Bertrand.

◊ **Trả lời :** f không khả tích trên $[1\,;+\infty[$.

c) Áp dụng 8.2.3, 3) : $0 \leq \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{x-1}{x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$, và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời :** f không khả tích trên $[1\,;+\infty[$.

d) $0 \leq \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^{3/2}}$ và quy tắc $x^{\alpha}f(x)$ (với $\alpha = \dfrac{4}{3}$ chẳng hạn), hay thí dụ Bertrand.

◊ **Trả lời :** f khả tích trên $[1\,;+\infty[$.

e) $0 \leq f(x) = \dfrac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời :** f không khả tích trên $[1\,;+\infty[$.

f) $0 \leq \operatorname{Arctan}(e^{-x}) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$ và $x \mapsto e^{-x}$ khả tích trên $[0\,;+\infty[$.

◊ **Trả lời :** f khả tích trên $[0\,;+\infty[$.

g) $0 \leq \dfrac{1}{e^x-\cos x} = \dfrac{1}{(1+x+o(x))-(1-o(x))} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời :** f không khả tích trên $]0\,;1]$.

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^{5/2}}\left(\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$ và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời :** f khả tích trên $]0\,;1]$.

i) $f \geq 0$ và $x^2 f(x) = e^{2\ln x + (\ln x)^2 - x\ln(\ln x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

◊ **Trả lời :** f khả tích trên $[2\,;+\infty[$.

j) $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \left(\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2}\right)^{-2} = 4e^{-2\sqrt{\ln x}}$, và do đó $xf(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 4e^{\ln x - 2\sqrt{\ln x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

◊ **Trả lời :** f không khả tích trên $[2\ ;\ +\infty[$.

k) $x^{1/2}\sqrt{-\ln x} = \sqrt{-x\ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$

◊ **Trả lời :** f khả tích trên $]0\ ;\ 1]$.

10.1.2 a) α) Chúng ta đã biết (Tập 1, 6.4.4, Thí dụ 1)):

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1},\ \text{do đó } I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} I_{n-1}.$$

Mặt khác : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right],\ \sin^{n+1} x \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x$, do đó :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}.$$

Suy ra : $I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} I_n$.

β) Ta đã biết (Tập 1, 6.4.4, Thí dụ 1)) rằng, với mọi p thuộc $\mathbf{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ và } I_{2p+1} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!},$$

do đó
$$I_{2p} I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p\infty}{\sim} \frac{\pi}{4p}.$$

Do $I_{2p+1} \sim I_{2p}$ và $I_{2p} \geq 0$, ta suy ra $I_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, từ đó $I_{2p+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2p+1)}}$.

Cuối cùng ta có : $I_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

b) α) Khảo sát sự biến thiên của $f_1, f_2 : [0\ ;\ \sqrt{n}] \mapsto \mathbf{R}$ xác định bởi :

$$f_1(x) = -x^2 - n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \text{ và } f_2(x) = -x^2 + n\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right).$$

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức quen biết $e^t \geq 1 + t$ cho $t = -\dfrac{x^2}{n}$, rồi cho $t = \dfrac{x^2}{n}$.

β) Theo b) α) : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ A_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \leq B_n$,

trong đó :
$$A_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \text{ và } B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

Trong A_n phép đổi biến $\varphi = \operatorname{Arccos}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ cho $A_n = \sqrt{n}\, I_{2n+1}$, suy ra $A_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Trong B_n phép đổi biến $\theta = \text{Arctan}\frac{x}{\sqrt{n}}$ cho $B_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta$.

Nhưng : $0 \le \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n-1)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(I_{2n-2})$, suy ra

$$\int_0^{\pi/4}(\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta = I_{2n-2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta \underset{n\infty}{\sim} I_{2n-2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

Kết quả trên chứng tỏ : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Mặt khác, do ($\forall x \in [1\,;+\infty[,\ 0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$) và $x \mapsto e^{-x}$ khả tích trên $[\,1\,;+\infty\,[$, nên $x \mapsto e^{-x^2}$ cũng khả tích trên $[1\,;+\infty[$, và do đó suy ra rằng $x \mapsto e^{-x^2}$ khả tích trên $[0\,;+\infty[$.

Cuối cùng : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) • Ánh xạ $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}$ liên tục, ≥ 0, và $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, suy ra f khả tích trên $]0\,;+\infty[$.

• Phép tính nguyên hàm trên $]0\,;+\infty[$ bằng cách tích phân từng phần hai lần cho ta :

$$\int \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{e^{-x^2}}{x}\,\frac{x}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{x}\,\frac{1}{2x^2+1} - \int \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{x}\,\frac{1}{2x^2+1} + \left(\frac{e^{-x^2}}{x} + 2\int e^{-x^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} + 2\int e^{-x^2}dx,$$

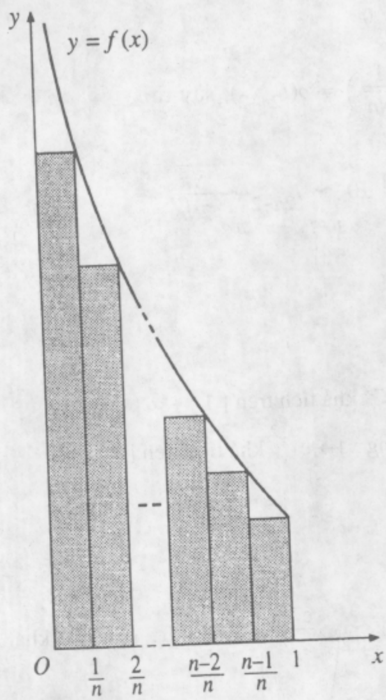
suy ra, với mọi X thuộc $]0\,;+\infty[$:

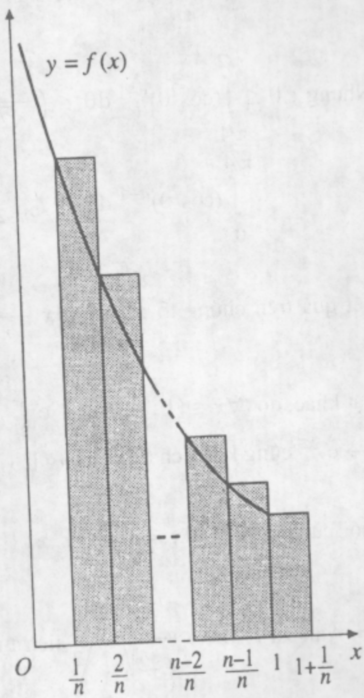
$$\int_0^X f(x)\,dx = \frac{2Xe^{-X^2}}{2X^2+1} + 2\int_0^X e^{-x^2}\,dx,$$

và do đó : $\displaystyle\int_0^X f(x)\,dx \xrightarrow[X\to+\infty]{} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

◊ **Trả lời :** $\sqrt{\pi}$.

10.1.3 a)





Cho $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$; ký hiệu $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

• $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $\displaystyle\int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} f \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, do đó cộng dồn lại ta có :

$$\int_{1/n}^{1} f \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{f(1)}{n},$$

và tức là : $\displaystyle S_n \ge \frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^{1} f.$

• $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f \ge \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (với $k = 1$ thì là một tích phân suy rộng), do đó

$\displaystyle\int_{0}^{1} f \ge S_n$. Vậy : $\forall n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$, $\displaystyle\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^{1} f \le S_n \le \int_{0}^{1} f$.

Ta kết luận được rằng : $S_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f$.

b) α) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, trong đó $f :]0 \,;\, 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Áp dụng a).

◊ **Trả lời** : 2.

β) $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(kn)}{(n+k)\ln n} = \alpha_n + \beta_n$.

trong đó $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\frac{k}{n}}{(n+k)\ln n}$ và $\beta_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\ln n}{(n+k)\ln n}$.

• $f :]0 \,;\, 1] \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = \frac{-\ln x}{1+x}$ liên tục, ≥ 0, giảm, và khả tích vì

$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$.

Áp dụng a) để suy ra : $\alpha_n \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$, và do đó $\alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $\beta_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 2\ln 2$.

Ta kết luận : $\alpha_n + \beta_n \xrightarrow[n\infty]{} 2\ln 2$.

◊ **Trả lời** : 4.

10.2.1 ⇒ : Nếu f khả tích trên I, thì f khả tích trên I_1 và trên I_2 (xem 10.2..2, Mệnh đề 5).

⇐ : Giả sử f khả tích trên I_1 và trên I_2 .

Chứng tỏ rằng tồn tại $a \in I$ sao cho : $]-\infty \,;\, a] \cap I \subset I_1$ và $I \cap [a \,;\, +\infty[\subset I_2$.

Theo 10.2.2, Mệnh đề 5, vì f khả tích trên I_1 và trên I_2, nên f khả tích trên $]-\infty \,;\, a] \cap I$ và trên $I \cap [a \,;\, +\infty[$. Sau đó có (theo 10.2.2, Mệnh đề 6) : f khả tích trên I.

10.2.2 Theo 10.2.2, Mệnh đề 5, f khả tích trên các khoảng I_1, I_2, $I_1 \cap I_2$ (có thể xảy ra là $I_1 \cap I_2$ rỗng hoặc là một đơn tử). Do việc xét trường hợp ($I_1 \subset I_2$ hoặc $I_2 \subset I_1$) dễ dàng, nên ta có thể giả thiết $I_1 \not\subset I_2$ và $I_2 \not\subset I_1$. Ký hiệu $U = I_1 - (I_1 \cap I_2)$, $V = I_2 - (I_1 \cap I_2)$ thì U và V là những khoảng, và f khả tích trên U và trên V. Ngoài ra, theo hệ thức Chasles :

$$\int_{I_1} f = \int_U f + \int_{I_1 \cap I_2} f, \quad \int_{I_2} f = \int_V f + \int_{I_1 \cap I_2} f, \quad \int_{I_1 \cup I_2} f = \int_U f + \int_{I_2} f = \int_V f + \int_{I_1} f,$$

suy ra : $\displaystyle\int_{I_1 \cup I_2} f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1 \cap I_2} f.$

10.2.3 Rõ ràng, nếu $f = 0$ thì f khả tích trên $[0 ; +\infty[$.

Ngược lại, giả sử f khả tích trên $[0 ; +\infty[$.

Vì $|f|$ khả tích trên $[0 ; +\infty[$, và $|f| \geq 0$, ta có ;

$$\forall X \in [0 ; +\infty[, \int_0^X |f| \leq \int_{[0 ; +\infty[} |f| \quad .$$

Đặc biệt : $\forall n \in \mathbf{N}, \displaystyle\int_0^{nT} |f| \leq \int_{[0 ; +\infty[} |f|$

Nhưng : $\forall n \in \mathbf{N}, \displaystyle\int_0^{nT} |f| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} |f| = n \int_0^T |f|.$

Suy ra : $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq \displaystyle\int_0^T |f| \leq \frac{1}{n} \int_{[0; +\infty[} |f|,$

và do đó qua giới hạn khi n tiến tới vô cùng : $\displaystyle\int_0^T |f| = 0.$

Vì f liên tục, suy ra rằng $(\forall x \in [0 ; T], f(x) = 0)$, rồi do f là $T-$ tuần hoàn ta suy ra : $f = 0$.

10.2.4 a) • Nếu f khả tích trên $[-a ; a[$ thì f khả tích trên $]0; a[$ (xem 10.2.2, Mệnh đề 5).

• Ngược lại, giả thiết f khả tích trên $]0 ; a[$. Với mọi đoạn J bao hàm trong $]-a ; 0]$ với ký hiệu $\check{J}$ $\{-x ; x \in J\}$, ta có :

$$\int_J |f| = \int_{\check{J}} |f| \leq \int_{[0; a[} |f|$$

và suy ra f khả tích trên $]-a ; 0]$.

Kết quả là f khả tích trên $]-a ; a[$.

Hơn nữa, hiển nhiên là khi J chạy trên khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong $]-a ; 0]$, thì $\check{J}$ chạy trên khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong $[0 ; a[$, và $\displaystyle\int_J f = \int_{\check{J}} f$, suy ra $\displaystyle\int_{]-a; 0]} f = \int_{[0; a[} f,$

sau đó:
$$\int_{]-a;\,a[} f = \int_{]-a;\,0]} f + \int_{[0;\,a[} f = 2\int_{[0;\,a[} f$$

b) Phương pháp tương tự.

10.2.5 Cho J là một đoạn bao hàm trong I. Ta có : $\int_J |\lambda| = |\lambda|\mu(J)$, trong đó $\mu(J)$ chỉ *độ dài* của J, tức là $\mu(J) = b-a$ nếu như $J = [a;\, b]$.

Để họ $(|\lambda|\,\mu(J))_J$, trong đó J chạy khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong I, bị chặn, điều kiện cần và đủ là I giới nội (vì $|\lambda| > 0$).

10.2.6 Ta có : $\forall x \in I,\ |(\varphi f)(x)| = |\varphi(x)|\,|f(x)| \le \|\varphi\|_\infty\,|f(x)|$.

Do f khả tích trên I nên $|f|$ cũng khả tích trên I (theo định nghĩa), suy ra $\|\varphi\|_\infty|f|$ cũng vậy. Theo định lí về hàm ưu thế, φf khả tích. Ngoài ra, với mọi đoạn J bao hàm trong I : $\int_J |\varphi f| \le \|\varphi\|_\infty \int_J |f|$, từ đó bằng cách tiến qua giới hạn khi J chạy khắp trên tập hợp các đoạn bao hàm trong I :
$$\int_I |\varphi f| \le \|\varphi\|_\infty \int_I |f|.$$

10.2.7 Do f khả tích trên $[a\,;\,+\infty[$, f khả tích trên $[X\,;\,+\infty[$ với mọi X thuộc $[a\,;\,+\infty[$, và :
$$\int_{[X;\,+\infty[} f = \int_{[a;\,+\infty[} f - \int_{[a;\,X]} f \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0,$$
vì
$$\int_{[a;\,X]} f \xrightarrow[X\to+\infty]{} \int_{[a\,;\,+\infty[} f \qquad \text{(xem 10.2.3, Mệnh đề 1).}$$

10.2.8 a) Lập luận phản chứng

Giả sử $l \ne 0$.Khi đó $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} l$ do vậy $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |l|$. Vì $x \mapsto |l|$ không khả tích trên $[a\,;\,+\infty[$, nên định lí hàm tương đương chứng tỏ rằng $|f|$ không khả tích, và do đó theo định nghĩa f không khả tích trên $[a;\,+\infty[$, mâu thuẫn.

b) Cho $\alpha \in [1;\,+\infty[$; ánh xạ $|f|^\alpha$ liên tục trên $[a;\,+\infty[$. Vì $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (xem a)), nên tồn tại $b \in [a;\,+\infty[$ sao cho : $\forall x \in [b;\,+\infty[,\ |f(x)| \le 1$.

Khi đó : $\forall x \in [b;\,+\infty[,\ |f(x)|^\alpha = |f(x)|^{\alpha-1}\,|f(x)| \le |f(x)|$.

Định lí hàm ưu thế chứng tỏ rằng $|f|^\alpha$ khả tích trên $[b;\,+\infty[$, do đó khả tích trên $[a;\,+\infty[$.

10.2.9 Do f giảm, tại $+\infty$ f có giới hạn hữu hạn l hay giới hạn $-\infty$.

- Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ thì $l = 0$ (xem bài tập 10.2.8, a))
- Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, thì với x đủ lớn, $-f(x) \ge 1$, và suy ra (theo mệnh đề phản của định lí *hàm ưu thế*), $-f$ không khả tích, f cũng vậy, mâu thuẫn.

10.2.10 a) • $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{x^3}{x^8+1}$, liên tục, ≥ 0 và

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^5}$, suy ra (thí dụ Riemann) rằng f khả tích trên $[0; +\infty[$.

• Đổi biến số $u = x^4$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{8}$.

b) • $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$ liên tục, ≥ 0 và $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$, do đó (thí dụ Riemann) f khả tích trên $[0; +\infty[$.

• Đổi biến số $u = \sqrt{x}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{2}$.

c) • $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, liên tục, ≥ 0, và

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, do đó (thí dụ Riemann) f khả tích trên $[0; +\infty[$.

• Đổi biến số $y = \dfrac{1}{x+1}$, sau đó $t = \dfrac{2y-1}{\sqrt{3}}$.

◊ **Trả lời :** ln3.

d) • $f : [0; 1[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, liên tục, ≥ 0, và

$f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(1-x)^{1/2}}$, do đó (thí dụ Riemann) f khả tích trên $[0; 1[$.

• Đổi biến số : $\theta = \operatorname{Arcsin}x$, sau đó $u = \cos\theta$ ($= \sqrt{1-x^2}$).

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2}{3}$.

e) • $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}$, liên tục, ≥ 0, và

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x^2}$, do đó (thí dụ Riemann) f khả tích trên $[1; +\infty[$.

• Đổi biến số $y = \dfrac{1}{x}$, sau đó $z = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \left(= \dfrac{1}{x\sqrt{2}}\right)$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{4}$.

f) • $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$, liên tục, ≥ 0, và

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^{3/2}}$, do đó (thí dụ Riemann) f khả tích trên $[1; +\infty[$.

• Bằng cách sử dụng một biểu thức liên hợp, ta có với mọi X thuộc $[1; +\infty[$:

$\displaystyle\int_1^X \frac{dx}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = A(X) - B(X)$, trong đó $A(X) = \displaystyle\int_1^X \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ (đặt $u = \sqrt{x+1}$) và

$$B(X) = \int_1^X \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{X} - 1).$$

Từ đó ta có, với mọi X thuộc $[1; +\infty[$:

$$\int_1^X \frac{dx}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 2(\sqrt{X+1} - \sqrt{X}) - 2\sqrt{2} - \ln \frac{\sqrt{X+1}+1}{\sqrt{X+1}-1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 2.$$

Tiến qua giới hạn khi X dần đến $+\infty$.

◊ **Trả lời :** $2\ln(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2} + 2$.

g) • $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{\text{ch}x}{\text{ch}3x}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-2x}$, vậy f khả tích trên $[0; +\infty[$.

• $\text{ch}3x = 4\text{ch}^3x - 3\text{ch}x$; và đặt $u = \text{th}x$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

h) • $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \text{Arcsin}\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}$, liên tục, ≥ 0, và trong lân cận của $+\infty$ thì $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6x^3}$, do đó f khả tích trên $[1; +\infty[$.

• Bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được, với mọi X thuộc $[1; +\infty[$:

$$\int_1^X \left(\text{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \left[x\left(\text{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\right]_1^X - \int_1^X x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= X\,\text{Arcsin}\frac{1}{X} - \frac{\pi}{2} + \ln(X + \sqrt{X^2-1}\,) - \ln X.$$

Và : $X\text{Arcsin}\dfrac{1}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 1$, $\quad \ln(X + \sqrt{X^2-1}) - \ln X = \ln\dfrac{X+\sqrt{X^2-1}}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \ln 2$.

◊ **Trả lời :** $1 - \dfrac{\pi}{2} + \ln 2$.

i) • $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{\text{Arctan}x}{x^2} - \dfrac{1}{x(1+x^2)}$, liên tục, và

$$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2x^2} + \frac{1}{x(1+x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^2},$$ do đó f khả tích trên $[1; +\infty[$.

• Với mọi X thuộc $[1; +\infty[$:

$$\int_1^X \left(\frac{\text{Arctan}x}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right)dx = -\left[\frac{\text{Arctan}x}{x}\right]_1^X.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{4}$.

j) • $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \frac{e^{\text{Arctan}x}}{(x^2+1)^{3/2}}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \leq \frac{e^{\pi/2}}{x^3}$, do đó f khả tích trên $[1; +\infty[$ rồi trên $[0; +\infty[$.

• Đặt $\theta = \text{Arctan}x$, để sau đó quy về $\int_0^{\pi/2} e^{\theta} \cos^{\theta} d\theta$; đến đây áp dụng 9.3.3).

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$.

k) • $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, do đó khả tích trên $[0; 1]$.

• Sử dụng một biểu thức liên hợp. Sau đó, với mọi ε thuộc $]0; 1]$, bằng phép tích phân từng phần, tính được :

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2})\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\varepsilon\right).$$

Cho ε dần đến 0.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}\right)$.

10.2.1 a) • Nếu $a > 1$, thì $f_{a,n} : x \mapsto \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}$ không liên tục trên $]0; a[$, nên không khả tích trên $]0; a[$ (theo nghĩa trong giáo trình này).

• Nếu $a = 1$, $f_{1,n} : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ không khả tích trên $[0; 1[$ (thí dụ Riemann).

• Giả thiết $a < 1$. Khi đó $f_{a,n} : x \mapsto \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}$ liên tục trên đoạn $[0; a]$ (hoặc $[a; 0]$, nếu $a < 0$), do đó khả tích trên đoạn đó.

Ký hiệu $I_n(a) = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}} dx$, bằng cách tích phân từng phần chứng tỏ rằng :

$$I_n(a) = -\frac{a^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_{n-1}(a).$$

Từ đó suy ra : $\quad (n+1) I_n(a) = -\sum_{k=1}^{n} a^k + I_0(a).$

b) • $f : [-1;\ 1[\ \mapsto \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = x^n\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, liên tục, ≥ 0 trên $[0;\ 1[$, và $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{(1-x)^{1/2}}$, vậy f khả tích trên $[-1;\ 1[$.

• Bằng phép đổi biến $\theta = \text{Arccos}x$, được $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = J_n + J_{n+1}$, trong đó $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\cos^n\theta\,d\theta$. Phân biệt các trường hợp n chẵn, n lẻ, và chú ý rằng với mọi p thuộc $\mathbb{N}$, $J_{2p+1} = 0$.

◊ **Trả lời** : $x \mapsto x^n\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ khả tích trên $[-1;\ 1[$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ và :

$$\int_{-1}^{1} x^n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(2p)\,!}{(2^p\,p\,!)^2}\pi & \text{nếu } n = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\[2ex] \dfrac{(2p+2)\,!}{(2^{p+1}\,(p+1)\,!)^2}\pi & \text{nếu } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

c) • $f : [0;\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$, liên tục, ≥ 0 và $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$, suy ra f khả tích trên $[0;\ +\infty[$.

• Đặt $\varphi = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, sau đó $t = \text{th}\varphi\left(= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

◊ **Trả lời** : $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$ khả tích trên $[0;\ +\infty[$ với mọi a thuộc $\mathbb{R}_+^*$, và

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\text{Arccos}a}{a\sqrt{1-a^2}} & \text{nếu } 0 < a < 1 \\[2ex] 1 & \text{nếu } a = 1 \\[1ex] \dfrac{\ln(a+\sqrt{a^2-1})}{a\sqrt{a^2-1}} & \text{nếu } 1 < a. \end{cases}$$

d) • $f : [0;\ a[\ \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2+1)}}$, liên tục, ≥ 0 và

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{a}{\sqrt{2a}\,\sqrt{a^2+1}\,(a-x)^{1/2}},$$ do đó f khả tích trên $[0;\ a[$.

• Đặt $u = x^2$, rồi đặt $t = \dfrac{2}{a^2+1}\left(u - \dfrac{a^2-1}{2}\right)$.

◊ **Trả lời** : $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2+1)}}$ khả vi trên $[0;\ a[$ với mọi $a \in \mathbb{R}_+^*$ và :

$$\int_0^{a}\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2+1)}}\,dx = \text{Arctan}a.$$

e) • $f :]a; 2a] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{a^2x + 2x^3}{\sqrt{x^4 - a^4}}$, liên tục, ≥ 0 và

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} \frac{3a^3}{\sqrt{4a^3}\,(x-a)^{1/2}},$$ do đó f khả tích trên $]a\,;\,2a]$.

• Đặt $u = \dfrac{x^2}{a^2}$.

◊ **Trả lời** : $x \mapsto \dfrac{a^2x + 2x^3}{\sqrt{x^4 - a^4}}$ khả tích trên $]a\,;\,2a]$ với mọi $a \in \mathbb{R}_+^*$ và

$$\int_a^{2a} \frac{ax^2 + 2x^3}{\sqrt{x^4 - a^4}}\,dx = \left(\frac{1}{2}\ln(4 + \sqrt{15}) + \sqrt{15}\right)a^2.$$

f) • Vì $a > |b|$ nên ánh xạ $f : [0; \pi] \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{1}{a + b\cos x}$ liên tục trên $[0; \pi]$, do đó khả tích trên $[0; \pi]$.

• Với mọi X thuộc $[0\,;\,\pi[$, phép đổi biến số $t = \tan\dfrac{x}{2}$ cho ta :

$$\int_0^X \frac{dx}{a + b\cos x} = \int_0^{\tan\frac{X}{2}} \frac{2}{(a+b) + (a-b)t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\tan\frac{X}{2}\right).$$

Suy ra : $$\int_0^X \frac{dx}{a + b\cos x} \xrightarrow[X \to \pi^-]{} \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

◊ **Trả lời** : $x \mapsto \dfrac{1}{a + b\cos x}$ khả tích trên $[0; \pi]$ (nếu $a > |b|$) và :

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

g) • $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = e^{-x^{1/n}}$, liên tục, ≥ 0, và

$$x^2 f(x) \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 0,$$ do đó f khả tích trên $[0\,;\,\infty[$.

• Đặt $u = x^{1/n}$ và thực hiện phép tích phần từng phần.

◊ **Trả lời** : $x \mapsto e^{-x^{1/n}}$ khả tích trên $[0; +\infty[$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, và :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{1/n}}\,dx = n\,!.$$

10.2.12 • Các ánh xạ f và g liên tục, ≥ 0, và

$$x^{1/2}f(x) = -e^{-x}x^{1/2}\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0, \quad g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1,$$

suy ra f và g khả tích trên $]0; 1]$.

• Với $\varepsilon \in]0;1]$, ta tiến hành tích phân từng phần :

$$\int_\varepsilon^1 -e^{-x}\ln x\,dx = \left[e^{-x}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx =$$

$$= -e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx - \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} =$$

$$= (1-e^{-\varepsilon})\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$$

$$\text{Vì : }\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\varepsilon^1 e^{-x}\ln x\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx \\ (1-e^{-\varepsilon})\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \varepsilon\ln\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0 \\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \end{cases}$$

nên kết luận được :

$$\int_0^1 -e^{-x}\ln x\,dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx.$$

10.2.13 a) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ánh xạ $\varphi_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n\ln x}{1+x} \text{ nếu } x \in]0;1] \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, do đó khả tích trên $[0;1]$.

Và với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\ln x}{1+x}\,dx\right| = \int_0^1 x^{n-1}\,|\varphi_1(x)|\,dx \le \|\varphi_1\|_\infty \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{n}.$$

◊ **Trả lời** : 0.

b) • Với $a > 0$ ánh xạ $f_a : [0;a[\to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_a(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{a^2-x^2}}$ liên tục, ≥ 0, và

$$f_a(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2a}\,(a-x)^{1/2}},$$ do đó (thí dụ Riemann) f_a khả tích trên $[0;a[$.

• Phép đổi biến số $\theta = \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$ cho :

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+a^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Sau đó :

$$\left| \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta - \int_0^{\pi/2} d\theta \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{1 + a^2\sin^2\theta} - 1) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2\sin^2\theta}{\sqrt{1 + a^2\sin^2\theta} + 1}\, d\theta \le \int_0^{\pi/2} \frac{a^2}{2}\, d\theta = \frac{\pi a^2}{4},$$

suy ra : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta \xrightarrow[a \to 0]{} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{2}$.

c) • Với $n \in \mathbb{N}^*$, ánh xạ $f_n : [2; +\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n\sqrt{x^2 - 1}}$ liên tục, ≥ 0, và $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$, do đó f khả tích trên $[2; +\infty[$.

• Giả sử $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{1}{x^n\sqrt{3}}$ khả tích trên $[2; +\infty[$ và :

$$\forall x \in [2; +\infty[,\ 0 \le \frac{1}{x^n\sqrt{x^2 - 1}} \le \frac{1}{x^n\sqrt{3}},$$

suy ra :

$$0 \le \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}} \le \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^n\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(n-1)2^{n-1}}.$$

◊ **Trả lời :** 0.

d) • Với $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ và $a \in \mathbb{R}_+^*$, ánh xạ $f_{n,a} : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_{n,a}(x) = \dfrac{1}{x^n + a}$ liên tục, ≥ 0, và $f_{n,a}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$, do đó f khả tích trên $[0; +\infty[$.

• Với mọi $a > 0$, phép đổi biến số $u = \dfrac{x}{a^{1/n}}$ cho ta :

$$0 \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + a} = a^{\frac{1}{n} - 1} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^n + 1} \le a^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^n + 1} \text{ (vì } n \ge 2).$$

◊ **Trả lời :** 0.

e) $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(t) = e^{-t^2}$ liên tục, ≥ 0 và $t^2 f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, do đó f khả tích trên $[0; +\infty[$.

• Với mọi $x > 0$:

$$0 < e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \int_x^{+\infty} e^{x^2 - t^2}\, dt \underset{[u = t - x]}{=} \int_0^{+\infty} e^{-2xu - u^2}\, du \le \int_0^{+\infty} e^{-2xu}\, du = \frac{1}{2x}.$$

◊ **Trả lời :** 0.

f) Với mọi $a > 0$, ánh xạ $f_a :]0; 1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_a(x) = \dfrac{1}{ax^2}\ln(1 + ax^2)$ liên tục, ≥ 0,

và $f_a(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, do đó f_a khả tích trên $]0; 1]$.

• *Phương pháp thứ 1*

Chứng tỏ rằng tồn tại $(\alpha, C) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ sao cho : $\forall u \in [0; \alpha]$, $|\ln(1 + u) - u| \leq Cu^2$.

Suy ra, với mọi a thuộc $[0; \alpha]$:

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln(1 + ax^2)}{ax^2}\,dx - 1\right| = \left|\int_0^1 \frac{1}{ax^2}\left(\ln(1 + ax^2) - ax^2\right)dx\right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{ax^2}\left|\ln(1 + ax^2) - ax^2\right|dx \leq \int_0^1 Cax^2dx = \frac{Ca}{3}$$

Ta kết luận :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + ax^2)}{ax^2}\,dx \underset{a \to 0^+}{\longrightarrow} 1\,.$$

• *Phương pháp thứ 2*

Phép đổi biến số $u = \sqrt{a}\,x$ cho ta :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + ax^2)}{ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} \frac{\ln(1 + u^2)}{u^2}\,du.$$

Do ánh xạ $\varphi : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$, xác định bởi $\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + u^2)}{u^2} & \text{nếu } u \in]0 ; 1] \\ 1 & \text{nếu } u = 0 \end{cases}$

liên tục, nên φ có nguyên hàm trên $[0; 1]$, và một trong các nguyên hàm đó là $\phi : [0; 1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\forall v \in [0; 1],\ \phi(v) = \int_0^v \varphi(u)\,du.$$

Khi đó : $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} \frac{\ln(1 + u^2)}{u^2}\,du = \dfrac{\phi(\sqrt{a}) - \phi(0)}{\sqrt{a}} \underset{a \to 0^+}{\longrightarrow} \phi'(0) = \varphi(0) = 1.$

◊ **Trả lời :** 1.

10.2.14 • Với mọi $a > 0$, ánh xạ $f_a : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$. xác định bởi $f_a(x) = \dfrac{x^{-a}}{1 + x}$ liên tục,

≥ 0, và $f_a(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{-a-1}$, do đó f_a khả tích trên $[1; +\infty[$.

• Với mọi $a > 0$:

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}\,dx - \int_1^{+\infty} x^{-a-1}\,dx \right| = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-a-1}}{1+x}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = \left[\ln\frac{x}{x+1} \right]_1^{+\infty} =$$

$$= \ln 2, \text{ và } \int_1^{+\infty} x^{-a-1}\,dx = \frac{1}{a} \xrightarrow[a \to 0^+]{} +\infty \ .$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}\,dx = \frac{1}{a} + \underset{a \to 0^+}{O}(1)$$

10.2.15 1) Chứng minh rằng tồn tại $(\alpha, C) \in \,]0; 1] \times \mathbb{R}_+$ sao cho :

$$\forall t \in [-\alpha\,;\,\alpha],\ \left| e^t - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) \right| \le C|t|^3.$$

2) Ánh xạ $\varphi : [0; 1] \to \mathbb{R}$, xác định bởi $\varphi(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$, liên tục trên đoạn $[0; 1]$, do đó bị chặn, tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho : $\forall x \in [0; 1], |\varphi(x)| \le M$.

3) Ký hiệu $\beta = \dfrac{\alpha}{M+1}$, thì ta được : $\forall \varepsilon \in \,]0; \beta[, \forall x \in \,]0; 1], |\varepsilon x\ln x| \le \varepsilon M \le \alpha$, suy ra :

$$\forall \varepsilon \in \,]0; \beta[, \forall x \in \,]0; 1], \left| e^{\varepsilon x\ln x} - \left(1 + \varepsilon x\ln x + \frac{(\varepsilon x\ln x)^2}{2}\right) \right| \le C|\varepsilon x\ln x|^3$$

và do đó (các hàm số đang xét đều khả tích do có thể thác triển liên tục tại 0) :

$$\left| \int_0^1 x^{\varepsilon x}\,dx - \int_0^1 \left(1 + \varepsilon x\ln x + \frac{(\varepsilon x\ln x)^2}{2}\right) dx \right| \le \int_0^1 C|\varepsilon x\ln x|^3\,dx = C\varepsilon^3 \int_0^1 |\varphi(x)|^3\,dx = \underset{\varepsilon \to 0^+}{O}(\varepsilon^3).$$

4) Tính $\displaystyle\int_0^1 \left(1 + \varepsilon x\ln x + \frac{(\varepsilon x\ln x)^2}{2}\right) dx$ bằng cách tính $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx$ bằng phép tích phân từng phần, với $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

10.2.16 a) Cho $\varepsilon > 0$. Ánh xạ f_ε liên tục trên $[0; +\infty[$ và :

$$\forall x \in [0; +\infty[, |f_\varepsilon(x)| = e^{-\varepsilon x} |f(x)| \le |f(x)|,$$

do đó (định lý hàm ưu thế), f_ε khả tích trên $[0; +\infty[$.

b) Giả sử $\varepsilon > 0$, $X \ge 0$. Ta có :

• $$\left| \int_0^X f_\varepsilon - \int_0^X f \right| = \left| \int_0^X (1 - e^{-\varepsilon x}) f(x)\,dx \right| \le \int_0^X (1 - e^{\varepsilon x}) |f(x)|\,dx$$

$$\le (1 - e^{\varepsilon X}) \int_0^X |f(x)|\,dx \le (1 - e^{-\varepsilon X}) \int_{[0; +\infty[} |f|.$$

• $$\left| \int_{[X;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[X;+\infty[} f \right| = \left| \int_{[X;+\infty[} (f_\varepsilon - f) \right| \le \int_{[X;+\infty[} (|f_\varepsilon| + |f|) \le 2 \int_{[X;+\infty[} |f| .$$

Suy ra :

$$\left| \int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[0;+\infty[} f \right| \le \left| \int_0^X f_\varepsilon - \int_0^X f \right| + \left| \int_{[X;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[X;+\infty[} f \right|$$
$$\le (1 - e^{-\varepsilon X}) \int_{[0;+\infty[} |f| + 2 \int_{[X;+\infty[} |f| .$$

Ta chọn $X = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Như vậy với mọi $\varepsilon > 0$ ta có :

$$\left| \int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[0;+\infty[} f \right| \le (1 - e^{-\sqrt{\varepsilon}}) \int_{[0;+\infty[} |f| + 2 \int_{\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};+\infty\right[} |f|$$

Một mặt thì : $1 - e^{-\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$.

Mặt khác, do f khả tích trên $[0; +\infty[$ và vì $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} +\infty$ nên : $\int_{\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};+\infty\right[} |f| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$

(xem thêm bài tập 10.2.7).

Suy ra : $$\left| \int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[0;+\infty[} f \right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$$

và vì vậy $$\int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_{[0;+\infty[} f .$$

10.2.17 a) • Miền xác định $f = \mathbb{R}$.

• f thuộc lớp C^1 trên R và : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^4 + 1}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(-1) \approx -0{,}567$ $\qquad$ $f(0) \approx -0{,}724$

• *Khảo sát hàm số tại* $+\infty$:

Do $\frac{t^2 + t}{\sqrt{t^4 + 1}} = 1 + \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, nên chúng ta dự đoán rằng $f(x)$ sẽ biến thiên tương tự như $\int_1^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) dt$. Ta có :

$$f(x) - \int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right) dt = \int_1^x \left(\frac{t^2+t}{\sqrt{t^4+1}} - \frac{t+1}{t}\right) dt =$$

$$= -\int_1^x \frac{t+1}{t(t^2+\sqrt{t^4+1})\sqrt{t^4+1}}\, dt.$$

Do $t \mapsto \dfrac{-(t+1)}{t(t^2+\sqrt{t^4+1})\sqrt{t^4+1}}$ khả tích trên $[1;+\infty[$, nên với ký hiệu

$l = \displaystyle\int_{[1;+\infty[} \frac{-(t+1)}{t(t^2+\sqrt{t^4+1})\sqrt{t^4+1}}\, dt$, ta có :

$f(x) = \displaystyle\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right) dt + l + o(1) = (x-1) + \ln x + l + o(1)$, và suy ra $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

và $f(x) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Các kết quả trên chứng tỏ rằng (C) có một nhánh vô tận parabôlic theo hướng tiệm cận phương trình $y = x$ (khi x dần tới $+\infty$).

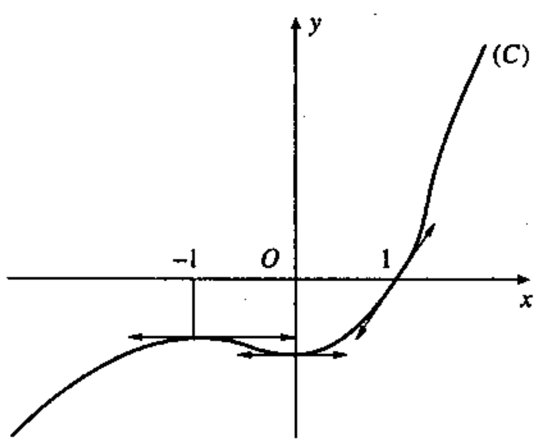
• *Khảo sát hàm số tại $-\infty$:*

Theo cách tương tự ta thu được :

$$f(x) = x + \ln(-x) - \int_{-1}^{1} \frac{t^2+t}{\sqrt{t^4+1}}\, dt + 1 + l' + o(1),$$

trong đó :

$$l' = \int_{]-\infty;-1]} \frac{t+1}{t\sqrt{t^4+1}\,(t^2+\sqrt{t^4+1})}\, dt.$$



Vậy (C) có một nhánh vô tận parabôlic theo hướng tiệm cận phương trình là $y = x$ (khi x dần tới $-\infty$).

b) • Miền xác định $f = \mathbb{R}$.

• f thuộc lớp C^1 trên R và : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{\text{th}x} > 0$.

• *Khảo sát hàm số tại $-\infty$:*

$$f(x) - \int_0^x e^{-1}\,dt = \int_0^x e^{-1}\left(e^{1+\text{th}t} - 1\right)dt.$$

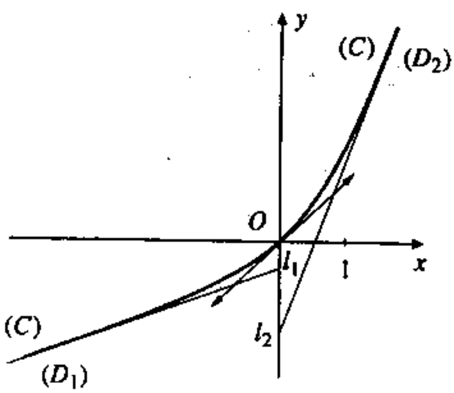
Do $e^{-1}\left(e^{1+\text{th}t} - 1\right) \underset{t \to -\infty}{\sim} e^{-1}(1 + \text{th}t) = e^{-1}\dfrac{2e^t}{e^t + e^{-t}} \sim 2e^{2t-1}$ (> 0), nên ánh xạ

$t \mapsto e^{-1}(e^{1+\text{th}t} - 1)$ khả tích trên $]-\infty\,;0]$; ký hiệu $l_1 = -\displaystyle\int_{]-\infty\,;\,0]} e^{-1}(e^{1+\text{th}t} - 1)dt$ $(l_1 \approx -0{,}347)$.

Khi đó ta có $f(x) = \dfrac{x}{e} + l_1 + o(1)$, suy ra (C) có tiệm cận là đường thẳng (D_1) phương trình là $y = \dfrac{x}{e} + l_1$.

• *Khảo sát hàm số tại $+\infty$:*

Theo cách tương tự ta chứng tỏ rằng (C) có tiệm cận là đường thẳng (D_2) với phương trình $y = ex + l_2$, trong đó $l_2 = \displaystyle\int_{[0\,;\,+\infty[} e(e^{\text{th}t - 1} - 1)\,dt$ $(l_2 \approx -1{,}462)$.



c) • Miền xác định của $f = \mathbb{R}$.

• f lẻ (đổi biến $u = -t$)

• f thuộc lớp C^1 (và thậm chí C^∞) trên R và :

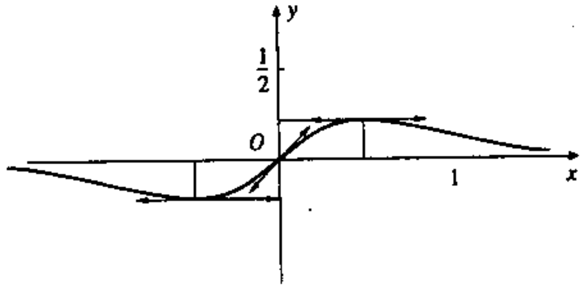
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1)$.

$$f\left(\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}\right) \cong 0{,}286$$

x	0		$\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

• *Khảo sát hàm số tại $+\infty$:*

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, vì $t \mapsto e^{-t^2}$ khả tích trên $[0\,;+\infty[$.



10.2.18 a) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$, liên tục, ≥ 0,

và : $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, do đó khả vi trên $\mathbb{R}$ (thí dụ Riemann).

• Tích phân từng phần $\left(u' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2},\ v = -\dfrac{x}{2} \right)$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{2}$.

b) • Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-3/2}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{|x|^3}$, do đó khả tích trên $\mathbb{R}$ (thí dụ Riemann).

• Đặt $u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, sau đó đặt $\varphi = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$ (tức là $u = \operatorname{sh}\varphi$).

◊ **Trả lời :** $\dfrac{8}{3}$.

c) • Ánh xạ $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$, liên tục, có dấu không thay đổi trong lân cận của 1 và của $+\infty$, và $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{2}\,(x-1)^{1/2}}$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, do đó khả tích trên $]1; +\infty[$ (thí dụ Riemann).

• Đặt $u = \sqrt{x^2-1}$.

◊ **Trả lời :** 0.

d) • Ánh xạ $f :]1; \sqrt{2}[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{-x^4+3x^2-2}}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(x-1)^{1/2}}$, $f(x) \underset{x \to \sqrt{2}}{\sim} \dfrac{1}{2^{5/4}(\sqrt{2}-x)^{1/2}}$, do đó f khả tích trên $]1; \sqrt{2}[$ (thí dụ Riemann).

• Đặt $y = \dfrac{1}{x^2}$, sau đó đặt $u = 4y - 3$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

e) • Ánh xạ $f :]0; 1[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{x}$, liên tục, ≥ 0,

và $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(1-x)^{1/2}}$, suy ra f khả tích trên $]0; 1[$.

• Đặt $\theta = \text{Arcsin}x$, sau đó đặt $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$ (hay : $y = \dfrac{1}{x}$).

◊ **Trả lời :** ln2.

f) • Ánh xạ $f :]0; 1[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^{-2/3}$, $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} (1-x)^{-1/3}$, suy ra f khả tích trên $]0; 1[$ (thí dụ Riemann).

• Đặt $u = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/3}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

g) Tương tự như f).

◊ **Trả lời :** $\pi\sqrt{2}$.

h) • Ánh xạ $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x^3}(2x - \ln(1 + 2x + 2x^2))$, liên tục, (bằng cách sử dụng các khai triển hữu hạn tại 0) $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{4}{3}$, và $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{x^2} > 0$, suy ra f khả tích trên $]0; +\infty[$.

• Tính $\int \dfrac{1}{x^3} \ln(1 + 2x + 2x^2)\,dx$, bằng phương pháp tích phân từng phần ($u' = \dfrac{1}{x^3}$, $v = \ln(1 + 2x + 2x^2)$).

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{2}$.

i) • Ánh xạ $f :]-1; 1[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, liên tục.

Trong lân cận của -1 : $f(x) \underset{x \to -1}{\sim} -\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{2}\,(1+x)^{1/2}}$, do đó $(1+x)^{3/4} f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} 0$.

Trong lân cận của 1 : $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{\sqrt{2}\,(1-x)^{1/2}}$, do đó $(1-x)^{3/4} f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$.

Ta kết luận : f khả tích trên $]-1; 1[$.

• Đặt $\theta = \text{Arccos}x$, sau đó tích phân từng phần ($u' = \cos^3\theta$, $v = \ln(\tan\frac{\theta}{2})$).

◊ **Trả lời :** $\frac{5\pi}{3}$.

j) • Ánh xạ $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$, liên tục, $x^{1/2}f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $x^{3/2}f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, suy ra (quy tắc $x^{\alpha} f(x)$ tại 0 và $+\infty$) f khả tích trên $]0; +\infty[$.

• Với mọi X thuộc $[1; +\infty[$ ta có :

$$\int_{1/X}^{X} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\left[y=\frac{1}{x}\right]}{=} \int_{X}^{1/X} \frac{-\ln y}{1+\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= -\int_{1/X}^{X} \frac{\ln y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y, \text{ suy ra : } \int_{1/X}^{X} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Cho X dần tới $+\infty$, ta sẽ thu được kết luận.

◊ **Trả lời** : 0.

k) • Ánh xạ $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$, liên tục, $x^{1/2}f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, do đó (các quy tắc $x^{\alpha}f(x)$ tại 0 và $+\infty$) f khả tích trên $]0; +\infty[$.

• Bằng một phép tích phân từng phần ta có ;

$$\int \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\frac{\ln x}{1+x^2} - \int x\,\frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\ln x}{1+x^2} - \text{Arctan}x + 2\int \frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\ln x}{1+x^2} - \text{Arctan}x + 2\int \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

suy ra : $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Sử dụng kết quả của j).

◊ **Trả lời :** $-\frac{\pi}{4}$.

l) • Ánh xạ $f : \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan x}}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$, $f(x) \xrightarrow[x\to\pi/2]{} 0$, do đó f khả tích trên $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

• Đặt $u = \sqrt{\tan x}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

m) • Ánh xạ $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}x}{x\sqrt{x}}$, liên tục, ≥ 0, và $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^{3/2}}$, do đó f khả tích trên $]0; +\infty[$ (thí dụ Riemann).

• Tích phân từng phần ($u' = x^{-3/2}$, $v = \operatorname{Arctan}x$).

◊ **Trả lời :** $\pi\sqrt{2}$.

n) • Ánh xạ $f : \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = \cos x\ln(\tan x)$, liên tục, và $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x \leq 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to\pi/2]{} 0$, do đó f khả tích trên $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

• Tích phân từng phần ($u' = \cos x$, $v = \ln(\tan x)$).

◊ **Trả lời :** $-\ln 2$.

10.2.19 Trước hết chứng minh tính khả tích.

a) Đặt $u = x^2$ để quy về một tích phân Abel.

◊ **Trả lời :** $x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ khả tích trên $]a; b[$, với mọi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 < a < b$ và :

$$\int_a^b \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\,dx = \frac{\pi}{4}(a^2+b^2).$$

b) Với $|\cos\theta| < 1$, đặt $u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

◊ **Trả lời :** $x \mapsto \dfrac{1}{\cos\theta + \operatorname{ch}x}$ khả tích trên $[0; +\infty[$ khi và chỉ khi $\theta \in]-\pi; \pi[$, và lúc đó :

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta + \operatorname{ch}x} = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\sin\theta} & \text{nếu } \theta \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } \theta = 0 \end{cases}.$$

c) Đặt $u = \dfrac{1}{x}$ rồi tích phân từng phần.

◊ **Trả lời :** $x \mapsto \dfrac{e^{1/x}}{x^n}$ khả tích trên $]-\infty; 0]$ khi và chỉ khi $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ và lúc đó :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^n}\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-2}\,(n-2)!.$$

Chỉ dẫn và trả lời

Các bài tập chương 11

11.1.1 a) ◊ **Trả lời :** $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{\lambda}{(x^2+1)^2};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Nghiệm tổng quát của phương trình chuẩn tắc $y' - \dfrac{\alpha y}{x^n} = 0$, trên mọi khoảng thuộc R mà không chứa điểm 0 là :

$$\left|\begin{array}{ll} x \mapsto \lambda e^{\frac{-\alpha}{(n-1)x^{n-1}}} & \text{nếu } n \geq 2 \\ x \mapsto \lambda |x|^{\alpha} & \text{nếu } n = 1 \end{array}\right. \quad \text{trong đó } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hãy khảo sát sự ghép nối tại điểm 0.

◊ **Trả lời :**

- Nếu $n \geq 2$,

$$\left|\begin{array}{ll} S_I = \left\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{\alpha}{(n-1)x^{n-1}}};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{nếu } 0 \notin I \\ S_I = \varnothing & \text{nếu } 0 \in I \end{array}\right.$$

- Nếu $n = 1$,

$$\left|\begin{array}{ll} S_I = \left\{x \mapsto \lambda |x|^{\alpha};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{nếu } 0 \notin I \\ S_I = \varnothing & \text{nếu } 0 < \alpha < 1 \text{ và } 0 \in I \\ S_I = \{x \mapsto \lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{nếu } \alpha = 1 \text{ và } 0 \in I \\ S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda |x|^{\alpha} & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \mu x^{\alpha} & \text{nếu } x > 0 \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{nếu } \alpha > 1 \text{ và } 0 \in I \end{array}\right.$$

11.1.2 Nếu f thích hợp, với ký hiệu $g : x \mapsto f(x)f(-x)$, hãy chứng tỏ rằng g khả vi và $g' = 0$. Khi đó sẽ tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = C$.

Chứng minh $C \neq 0$ và : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{C} f(x)$, từ đó suy ra rằng tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{x/C}.$$

Khảo sát mệnh đề đảo.

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}^* \\ \quad x \mapsto \lambda e^{x/\lambda^2} \end{array} \right\}$.

11.1.3 Với ký hiệu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$, hãy thành lập một phương trình vi phân tuyến tính cấp một với hàm chưa biết F. Suy ra giá trị của $F(x)$ với $x < 0$ và với $x > 0$, rồi ghép nối tại 0.

◊ **Trả lời :**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \begin{cases} \lambda\sqrt{-x} & \text{nếu } x \le 0 \\ \mu\sqrt{x} & \text{nếu } x > 0 \end{cases} & \end{array} \right\}$$

11.1.4. Ký hiệu $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x f$ và $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x F$,

rồi bằng một phép tích phân từng phần, quy về : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-k)xG'(x) - G(x) = 0$. Suy ra G, F, f. Sau đó nghiên cứu mệnh đề đảo.

◊ **Trả lời :**

$$\left| \begin{array}{ll} \{0\} & \text{nếu } k < \frac{1}{2} \text{ hay } k \ge 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \lambda|x|^{\frac{2k-1}{1-k}} \end{array} \right\} & \text{nếu } \frac{1}{2} \le k < 1 \end{array} \right.$$

11.1.5 a) Có thể chuẩn hóa phương trình trên R.

Tìm một nghiệm riêng dưới dạng một đa thức có bậc ≤ 1.

◊ **Trả lời :** $S_I = \{x \mapsto x + \lambda(x^2+1)e^{-x} ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) ◊ **Trả lời :** $S_I = \{x \mapsto e^{x-x^2} + \lambda e^{-x^2} ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

c) Giải phương trình đã chuẩn hóa khi $0 \notin I$, sau đó ghép nối tại 0.

◊ **Trả lời :** $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{\lambda x}{\sqrt{x^2+1}} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

d) ◊ **Trả lời :**

$S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{x^4}{2} + \lambda x^2 ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $0 \notin I$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4}{2} + \lambda x^2 & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{x^4}{2} + \mu x^2 & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{nếu } 0 \in I$$

e) ◊ **Trả lời :** $S_I = \{x \mapsto x^2 - 1 + \lambda x \ ; \ \lambda \in \mathrm{R}\}$.

f) ◊ **Trả lời :** $S_I = \{x \mapsto 1 + \lambda e^{1/x} \ ; \ \lambda \in \mathrm{R}\}$ nếu $0 \notin I$

$S_I = \{x \mapsto 1\}$ nếu $0 \in I$.

g) Giải phương trình đã chuẩn hóa trên mọi khoảng mở I không chứa cả -1 và 0, rồi xét việc ghép nối tại -1 và tại 0.

◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{1}{x+1} + \lambda x;\ \lambda \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } -1 \notin I$$

$$S_I = \varnothing \quad \text{nếu } -1 \in I.$$

h) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{1 + \lambda(x^2+1)}{x} \ ; \ \lambda \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I$$

$$S_I = \{x \mapsto -x\} \quad \text{nếu } 0 \in I$$

i) Để xét việc ghép nối tại 0, cần chú ý rằng nếu thay x bằng 0 trong phương trình thì sẽ nảy sinh một mâu thuẫn.

◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\lambda - \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right) ; \ \lambda \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I.$$

$$S_I = \varnothing \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

j) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{1}{x} + \lambda\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \ ; \ \lambda \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I.$$

$$S_I = \left\{x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}\right\} \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

k) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{x \mapsto x^2 - 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{|x^2-1|}} \ ; \ \lambda \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } -1 \notin I \text{ và } 1 \notin I$$

$$S_I = \{x \mapsto x^2 - 1\} \quad \text{nếu } -1 \in I \text{ hay } 1 \in I.$$

l) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{\lambda + \ln|2x - 1 + 2\sqrt{x^2-x}|}{2\sqrt{x^2-x}} \ ; \ \lambda \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } I \subset \,]-\infty; 0[\text{ hay } I \subset \,]1; +\infty[.$$

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{\mu + \operatorname{Arcsin}(2x-1)}{2\sqrt{x - x^2}} \ ; \ \mu \in \mathrm{R}\right\} \quad \text{nếu } I \subset \,]0 ; 1[$$

$$S_I = \varnothing \quad \text{nếu } 0 \in I \text{ hay } 1 \in I.$$

m) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{ x \mapsto \frac{x^2(\lambda + \ln|x|)}{x^2 - 1} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{nếu } -1 \notin I,\ 0 \notin I,\ 1 \notin I$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln|x|}{x^2 - 1} & \text{nếu } |x| \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } |x| = 1 \end{cases} \right\} \quad \text{nếu } -1 \in I \text{ hay } 1 \in I$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 (\lambda + \ln|x|)}{x^2 - 1} & \text{nếu } x < 0 \\ \dfrac{x^2 (\mu + \ln x)}{x^2 - 1} & \text{nếu } x > 0 \end{cases} \; ; \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ nếu } 0 \in I,\ -1 \notin I,\ 1 \notin I.$$

n) ◊ **Trả lời :** $S_I = \{ x \mapsto 1 + \ln x + \lambda x \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \}$.

o) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + x(\ln|x| - 1)}{x - 1} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I \text{ và } 1 \notin I$$

$$S_I = \varnothing \quad \text{nếu } 0 \in I$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 + x(\ln x - 1)}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1 \end{cases} \right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I \text{ và } 1 \in I.$$

p) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \lambda \ln|x| \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I$$

$$S_I = \varnothing \quad \text{nếu } 0 \in I$$

q) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{ x \mapsto \frac{xe^x + 2e^{2x} + 3 + \lambda e^x}{(x - 1)^2} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{nếu } 0 \notin I$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{xe^x + 2e^{2x} + 3 - 5e^x}{(e^x - 1)^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{5}{2} & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

r) ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\mathrm{sh}^3 x} + \frac{\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x) - \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x}}{2\mathrm{sh}^3 x}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{nếu } 0 \notin I$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x) - \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x}}{2\mathrm{sh}^3 x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \right\} \qquad \text{nếu } 0 \in I.$$

s) ◊ **Trả lời :** $S_I = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-\sin x} + \sin x - 1\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

t) ◊ **Trả lời :**

$S_I = \left\{ x \mapsto 1 + \lambda \tan\dfrac{x}{2}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ nếu tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $I \subset]-\pi + 2n\pi; \pi + 2n\pi[$

$S_I = \{ x \mapsto 1 \}$ nếu tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $\pi + 2n\pi \in I$.

u) ◊ **Trả lời :**

$S_I = \left\{ x \mapsto \sin x \left(\lambda + \ln\left| \tan\dfrac{x}{2} \right| \right)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ nếu tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $I \subset]n\pi; (n+1)\pi[$

$S_I = \varnothing$ nếu tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $n\pi \in I$.

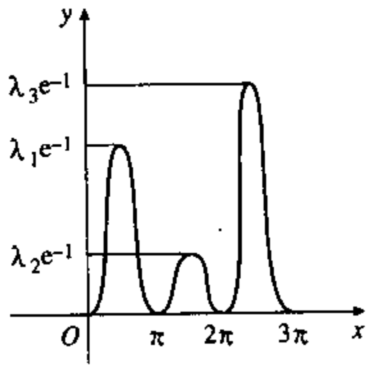
v) Nghiệm tổng quát trên một khoảng I không chứa một điểm $n\pi$ nào ($n \in \mathbb{Z}$) là $y : x \mapsto \lambda e^{-1/\sin^2 x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ghép nối tại $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) :

Do $e^{-1/\sin^2 x} \xrightarrow[x \to n\pi]{} 0$ và $\dfrac{1}{x - n\pi} e^{-1/\sin^2 x} \xrightarrow[x \to n\pi]{} 0$, nên hai hàm số trên được ghép nối tại $n\pi$ theo tính khả vi.

Chẳng hạn, với $I =]0; 3\pi[$:

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 e^{-1/\sin^2 x} & \text{nếu } x \in]0\,;\,\pi[\\ \lambda_2 e^{-1/\sin^2 x} & \text{nếu } x \in]\pi\,;\,2\pi[\\ \lambda_3 e^{-1/\sin^2 x} & \text{nếu } x \in]2\pi\,;\,3\pi[\\ 0 & \text{nếu } x = \pi \text{ hay } 2\pi \end{cases} ,\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$



S_{R} là một R – không gian vectơ "vô hạn chiều".

◊ **Trả lời :**

$$S_{\mathrm{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda_n e^{-1/\sin^2 x} & \text{nếu } x \in\,]n\pi\,;\,(n+1)\pi[\,, \\ 0 & \text{nếu } x = n\pi \end{cases} n \in \mathrm{Z},\ \lambda_n \in \mathrm{R} \right\}$$

11.1.6 Ta được $y : x \mapsto e^x\left(\lambda + \int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right)$, $\lambda \in \mathrm{R}$.

Nếu y bị chặn, thì do $t \mapsto e^{-t}\ln t$ liên tục và khả tích trên $[1; +\infty[$, ta ắt phải có $\lambda = -\int_1^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$, và qua phép tích phân từng phần (hợp lệ) suy ra :

$$y(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = -e^x\left(\left[-e^{-t}\ln t\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) = -\ln x - e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Vì với mọi $x \geq 1$ thì : $0 \leq \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-x}$, ta suy ra : $y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$, và do đó y không bị chặn.

◊ **Trả lời :** • $S_{]0\,;\,+\infty[} = \left\{ x \mapsto e^x\left(\lambda + \int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right)\,;\ \lambda \in \mathrm{R}\right\}$.

• Trong lân cận của $+\infty$ không có nghiệm nào bị chặn.

11.1.7 Nghiệm tổng quát là $y : x \mapsto \frac{x^3}{2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathrm{R}$. Xác định λ sao cho $y(1) = 0$.

◊ **Trả lời :** $y : x \mapsto \frac{x^3 - x}{2}$.

11.1.8 ◊ **Trả lời :**

$$S_I = \left\{ x \mapsto \varepsilon \sqrt{x+\lambda}\, e^{-x};\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ sao cho } I \subset]-\lambda; +\infty[,\ \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}.$$

11.1.9 Giải phương trình thứ nhất rồi suy ra $f(x)$ của phương trình thứ hai.

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \lambda(x-1)e^x \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$

11.1.10 **Phương pháp thứ 1**

1) Giả sử f thích hợp. Trước hết chứng tỏ $f(0) = 0$. Sau đó, với mọi (x, h) thuộc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + f(x)\, \frac{e^h - 1}{h},$$

chứng tỏ f khả vi trên R và : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x f'(0) + f(x)$.

Bằng cách giải một phương trình vi phân tuyến tính cấp một, suy ra rằng tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$.

2) Xét mệnh đề đảo bằng cách thay f bằng biểu thức tìm được ở 1) trong phương trình hàm của đề bài.

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha x e^x \end{array} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$

Phương pháp thứ 2

$e^{-(x+y)} f(x+y) = e^{-x} f(x) + e^{-y} f(y)$ và sử dụng bài tập 5.3.4. a), Tập 1.

11.1.11 Giải phương trình trong đề bài, ta được :

$$S_I = \left\{ x \mapsto -2x^2 + \lambda x^3;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{nếu } 0 \notin I.$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} -2x^2 + \lambda x^3 & \text{nếu } x < 0 \\ -2x^2 + \mu x^3 & \text{nếu } x > 0 \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

Ký hiệu $y_\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x^2 + \lambda x^3 \end{array}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$, chứng tỏ rằng y_λ'' triệt tiêu và đổi dấu tại $2/3\lambda$.

Từ hệ quả này ta suy ra được một biểu diễn tham số của quỹ tích các điểm uốn : $x = \dfrac{2}{3\lambda}$, $y = -\dfrac{16}{27\lambda^2}$.

◊ **Trả lời :** Đường cong phương trình $y = -\dfrac{4}{3}x^2$, trừ điểm O.

11.2.1 ◊ **Trả lời :** $(\mathbb{R}_+)^2 - \{(0; 0)\}$.

11.2.2 1) Giả sử f thích hợp; khi đó f khả vi hai lần trên R và :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(\alpha - x) = -f(\alpha - (\alpha - x)) = -f(x).$$

Suy ra f có dạng $x \mapsto A\cos x + B\sin x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2) Xét phần đảo.

◊ **Trả lời :** $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & ; \lambda \in \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + x\right) & \end{array}\right\}.$

11.2.3 ◊ **Trả lời :**

a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{4}e^{-x} + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

b) $y(x) = (x+2)e^{-x} + e^{-x/2}\left(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2.$

c) $y(x) = \frac{1}{3}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-5x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

d) $y(x) = -xe^{-2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

e) $y(x) = x^3e^x + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

f) $y(x) = -\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)e^x + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

g) $y(x) = e^x + \frac{1}{2}(x^3 - x^2)e^{2x} + \frac{1}{4}(x-1) + (\lambda x + \mu)e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

h) $y(x) = \frac{x}{8} + \frac{x\cos 2x}{32} + \frac{x^2\sin 2x}{16} + A\cos 2x + B\sin 2x, (A, B) \in \mathbb{R}^2.$

i) $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x + (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

j) $y(x) = -\frac{1}{8}\sin 2x + (\lambda x + \mu)e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

k) $y(x) = \frac{2}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x + e^x(A\cos x + B\sin x), (A, B) \in \mathbb{R}^2.$

l) $y(x) = \frac{1}{8}e^{-x}(x\cos 2x + 2x^2\sin 2x) + e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x), (A, B) \in \mathbb{R}^2.$

m) $y(x) = -e^x\sin x + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

n) $y(x) = \frac{1}{16}e^x(\sin x + \cos x) + \frac{1}{4}xe^{-x}\sin x + e^{-x}(A\cos x + B\sin x), (A, B) \in \mathbb{R}^2.$

11.2.4 ◊ **Trả lời :**

a) • Nếu $m < 1$, $S_I = \left\{ x \mapsto \frac{-2\sin x + (m-1)\cos x}{(m-1)^2 + 4} + \lambda e^{(1-\sqrt{1-m})x} + \mu e^{(1+\sqrt{1-m})x} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• Nếu $m = 1$, $S_I = \left\{ x \mapsto -\frac{\sin x}{2} + (\lambda x + \mu)e^x ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

• Nếu $m > 1$, $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{-2\sin x + (m-1)\cos x}{(m-1)^2+4} + e^x\left(A\cos(\sqrt{m-1}\,x) + B\sin(\sqrt{m-1}\,x)\right);\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

b) • Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -2$, $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{\sin mx}{4-m^2} + A\cos 2x + B\sin 2x\ ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Nếu $m = 2$, $S_I = \left\{x \mapsto -\dfrac{1}{4}x\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x\ ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Nếu $m = -2$, $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{4}x\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x\ ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

c) • Nếu $m \neq -1, 0, 1$, $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{(-x+1)e^x}{(m-1)^2} + \lambda e^{mx} + \mu e^{x/m}\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Nếu $m = 0$, $S_I = \left\{x \mapsto (-x+1)e^x + \lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Nếu $m = 1$, $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{x^3}{6}e^x + (\lambda x + \mu)e^x\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Nếu $m = -1$, $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{1-x}{4}e^x + (\lambda x + \mu)e^{-x}\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

11.2.5 Tính nghiệm tổng quát (E_m) trên $\mathbb{R}$, chia thành các trường hợp $m \in]0, 1[\cup]1; 2[$, $m = 1$. Ta được :

$$\begin{cases} y_m(x) = \dfrac{e^{-x}}{3(2m+1)} + \dfrac{e^{2mx}}{2(m-1)(2m+1)} + \dfrac{e^{2x}}{6(1-m)} & \text{nếu } m \neq 1 \\ y_1(x) = \dfrac{1}{3}xe^{2x} + \dfrac{1}{9}e^{-x} - \dfrac{1}{9}e^{2x} \end{cases}$$

Dùng các khai triển hữu hạn (đặt $h = m-1$) để suy ra : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_m(x) \xrightarrow[m \to 1]{} y_1(x)$

11.2.6 Ký hiệu $z(t) = y(x)$, ta có $\begin{cases} y(x) = z(t) \\ y'(x) = z'(t)\,.\,\dfrac{dt}{dx} = z'(t)\dfrac{1}{x} \\ y''(x) = z''(t)\dfrac{1}{x^2} - z'(t)\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

từ đó suy ra :

$$x^2y'' + axy' + by = k$$
$$\Leftrightarrow z'' + (a-1)z' + bz = k(\varepsilon e^t) \text{ (với } \varepsilon = \operatorname{sgn} x).$$

b) ◊ **Trả lời :**

α) $S_I = \left\{x \mapsto -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\lambda}{x} + \mu x^2\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $0 \notin I$.

$S_I = \left\{x \mapsto -\dfrac{x}{2} + \mu(x^2)\ ;\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $0 \in I$.

β) $S_I = \left\{ x \mapsto 1 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{x}(\lambda \ln|x| + \mu)\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ nếu $0 \notin I$.

$S_I = \left\{ x \mapsto 1 + \frac{1}{9}x^2 \right\}$ nếu $0 \notin I$.

γ) $S_I = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x(\ln|x| - 1) + A\cos(\ln|x|) + B\sin(\ln|x|)\ ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ nếu $0 \notin I$.

$S_I = \varnothing$ nếu $0 \in I$.

11.2.7. Giải phương trình trong đề bài trên mỗi khoảng mà trong đó có thể biến đổi giá trị tuyệt đối, rồi ghép nối lại.

◊ **Trả lời :**

a) $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} -x + 1 + A\cos x + B\sin x & \text{nếu } x \le 0 \\ x + 1 + A\cos x + (B-2)\sin x & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases} ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

b) $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} A\cos x + B\sin x & \text{nếu } x \le 0 \\ x + A\cos x + (B-1)\sin x & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases} ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

c) $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{4} + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} & \text{nếu } x \le 0 \\ -\frac{x}{4} + \left(\lambda + \frac{1}{8}\right)e^{2x} + \left(\mu - \frac{1}{8}\right)e^{-2x} & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

d) $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} + (\lambda x + \mu)e^{x} & \text{nếu } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2 e^{x} + \left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x + \left(\mu + \frac{1}{4}\right)\right)e^{x} & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

11.2.8 1) Giả sử f thích hợp; f khả vi hai lần trên R, và với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = (x+1)e^x + f'(-x) = (x+1)e^x + (-xe^{-x} - f(x)).$$

f là nghiệm trên R của : $y'' + y = (x+1)e^x - xe^{-x}$. Suy ra tồn tại $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + A\cos x + B\sin x.$$

2) Xét phần đảo.

◊ **Trả lời :** $\left\{ x \mapsto \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + A(\cos x - \sin x)\ ;\ A \in \mathbb{R} \right\}$.

11.2.9 Phương pháp thứ 1.

Giả sử f thích hợp, ký hiệu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$

Ánh xạ g khả vi hai lần trên R và :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = f''(x) + f(-x) = f''(x) + g(x) \\ -x = f''(-x) + f(x) = g''(x) + f(x) \end{cases}$$

Với ký hiệu $u = f + g$, $v = f - g$, thì u và v khả vi hai lần trên R, và

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} u''(x) + u(x) = 0 \\ v''(x) - v(x) = 2x \end{cases}.$$

Suy ra tồn tại $(A, B, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ sao cho

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} u(x) = A\cos x + B\sin x \\ v(x) = -2x + \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x' \end{cases}$$

do đó :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x)) = -x + \frac{1}{2}(A\cos x + B\sin x + \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x).$$

Cuối cùng, xét phần đảo.

Phương pháp thứ 2.

Giả sử f thích hợp; f khả vi vô hạn lần trên R và :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} f'(x) = x - f(-x) \\ f^{(3)}(x) = 1 + f'(-x) \\ f^{(4)}(x) = -f'(-x) = -(-x - f(x)) = x + f(x) \end{cases}$$

Vậy f là nghiệm trên R của : $y^{(4)} - y = x$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp bốn với hệ số hằng số có thể giải được theo cách tương tự như đối với phương trình cấp hai. Phương trình đặc trưng $r^4 - 1 = 0$ có nghiệm số (trong C) là -1, 1, i, $-i$, vậy f có dạng :

$$f : x \mapsto -x + \lambda e^x + \mu e^{-x} + A\cos x + B\sin x,\ (\lambda, \mu, A, B) \in \mathbb{R}^4.$$

Cuối cùng xét phần đảo.

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x + a\cos x + b \operatorname{sh} x \end{array} ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

Nhắc lại rằng, trong việc nghiên cứu sơ bộ các phương trình vi phân phi tuyến ở đây, cách trình bày không thật chặt chẽ (chia cho y, ký pháp $\frac{dy}{dx}$, v.v...).

11.3.1 ◊ **Trả lời :** Phương trình Descartes của các đường tích phân là :

a) $\operatorname{Arctan} y = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\ln|y| = -2\varepsilon \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{x(1-x)} \right) + \lambda$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$ và $I \subset]0; 1[$.

c) $y = \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)x + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $y^2 = \frac{(\lambda - 1)x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) $y = -\ln(\lambda - e^{-x})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

f) $\sin x \cos y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11.3.2 ◊ **Trả lời :** Một biểu diễn tham số (tham số được ký hiệu là t), hay phương trình Descartes của đường tích phân là :

a) $x = \frac{\lambda}{t} e^{-1/t}$, $y = \lambda e^{-1/t}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

b) $x = \frac{y^2 + 4\lambda^2}{4\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

c) $x = \frac{\lambda}{t^2 - t}$, $y = \frac{\lambda}{t-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

d) $y = x \tan\left(\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

e) $x^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

f) $x = \frac{\lambda e^t}{t+1}$, $y = \frac{\lambda t e^t}{t+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

11.3.3 ◊ **Trả lời :**

a) $y = (x + 4\sqrt{x} + 4 + \lambda e^{\sqrt{x}})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y = \left(\frac{x}{2} + \lambda e^{-x}\right)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $y = \left(\frac{x^2}{2}(\ln|x| + \lambda)\right)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $y = (-x^2 + 2x - 2 + \lambda e^{-x})^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) $y = (x^2 + \lambda\sqrt{|x|})^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) $y = \frac{x}{\lambda + \ln|x|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

g) $y = \varepsilon \frac{x}{\sqrt{\lambda - x^2}}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+^*$.

h) $y = \varepsilon\left(x^2 + \frac{\lambda}{x^2}\right)^{1/4}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$.

i) $y = \left(\sqrt[3]{\frac{\lambda}{x^3} + \frac{x^3}{2}}\right)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11.3.4 ◊ **Trả lời :**

a) $y = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\frac{\ln|x|}{2} + \lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \lambda e^{-2\operatorname{Arctan} x}\right)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $y = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln|x| + \lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $y = \frac{1 - \lambda x}{\lambda + x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) $y = \frac{\lambda + x}{\lambda - x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) $y = \frac{1 - \lambda x^2}{\lambda - x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) $y = \tan x + \left(\cos x\left(\lambda + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\right)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11.3.5 Với mỗi $k \in \{1, 2, 3\}$, ta ký hiệu $z_k = y_k - y_1$. Dựa trên sự kiện y_1 và y_k là nghiệm của (e), chứng minh : $Az'_k + (B + 2Cy_1)z_k + Cz_k^2 = 0$.

Ký hiệu $u_k = \frac{1}{z_k}$; khi đó : $-Au'_k + (B + 2Cy_1)u_k + C = 0$.

Cuối cùng ký hiệu $U = u_3 - u_2$ và $V = u_4 - u_2$; các hàm số U, V thỏa mãn phương trình tuyến tính cấp một không có vế thứ hai :

$$-Au' + (B + 2Cy_1)u = 0.$$

Nếu A không triệt tiêu trên I, thì ta suy ra (xem 11.1.2) rằng U, V phụ thuộc tuyến tính, tức là (trừ trường hợp đặc biệt $U = 0$) tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $V = \lambda U$. Suy ra hệ thức phải chứng minh.

11.3.6 ◊ **Trả lời :** Sau đây là một biểu diễn tham số (với tham số ký hiệu là t), hoặc phương trình Descartes của các đường tích phân :

a) $x = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|y - 1| - \frac{1}{2}\ln|y - 2| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}\ln|t(t^2 - 3)^4| + C \\ y = \frac{t^3 - t}{2} \end{cases}$; $C \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x = 2\ln|1 - t^2| + C \\ y = \left(\frac{1 - t}{1 + t}\right)^2 \end{cases}$; $C \in \mathbb{R}$.

d) $\begin{cases} x = \ln|\cos t| + t\tan t + C \\ y = t^2 \tan t \end{cases}$; $C \in \mathbb{R}$.

e) $y = \sin(x + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, và cả $y = 1$, $y = -1$.

11.3.7 ◊ **Trả lời :** Sau đây là một biểu diễn tham số (với tham số ký hiệu là t) của các đường tích phân :

a) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{t^2}{2} - \ln|t| + C \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t} \\ y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}+1}{\sqrt{1+t^2}-1} + C \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = (t-1)e^t + \dfrac{t^2}{2} + C \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$.

11.3.8 ◊ **Trả lời :** Sau đây là một biểu diễn tham số (với tham số t) hay phương trình Descartes của các đường tích phân :

a) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}} \\ y = t^2 - 2t - \dfrac{\lambda t}{\sqrt{|t|}} \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y = \lambda + \varepsilon e^x$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x = -t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda}{(1-t)^2} \\ y = -\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{\lambda t^2}{(1-t)^2} \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Chi dẫn và trả lời các bài tập chương 12

12.2.1 a) Giả sử f thích hợp, thay z bằng 0 ta có :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(y, 0) - f(0, x).$$

Vậy tồn tại $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \varphi(y) + \psi(x)$.

Thay trở lại, ta có : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ((\varphi(x) + \psi(x)) + (\varphi(y) + \psi(y)) + (\varphi(z) + \psi(z)) = 0$, suy ra : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = -\varphi(x)$.

2) Đảo lại, hãy kiểm chứng rằng với mọi φ thuộc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \varphi(y) - \varphi(x) \end{array}$

thích hợp

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \varphi(y) - \varphi(x) \end{array} ; \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$.

b) Lập luận tương tự như ở a).

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \varphi(x + y) \end{array} ; \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$.

c) 1) Giả thiết f thích hợp ; khi đó : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0)$. Vậy tồn tại $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Thế vào giả thiết : $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(y) - \varphi(y) = \psi(z) - \varphi(z)$. Vậy tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \varphi(x) + C$.

Thay φ bởi $\varphi + \frac{C}{2}$, ta được $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \varphi(y) + \varphi(y)$.

2) Kiểm chứng phần đảo.

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \varphi(x) + \varphi(y) \end{array} ; \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$.

d) 1) Giả thiết f thích hợp ; thay x bằng $\sqrt{x}$ và z bằng 1, ta được :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x, y) f(y^2, 1) f(1, \sqrt{x}) = (\sqrt{x}\, y)^3.$$

Hệ thức này chứng tỏ : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x, y) \neq 0$,

và : $$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x, y) = \frac{x^{3/2}}{f(1, \sqrt{x})} \frac{y^3}{f(y, 1)}.$$

Vậy tồn tại $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sao cho : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$.

Thay trở lại, ta có : $\forall (x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, $(\varphi(x^2)\psi(x))\,(\varphi(y^2)\psi(y))\,(\varphi(z^2)\psi(z)) = (xyz)^3$. Với $x = y = z = 1$, ta suy ra $\varphi(1)\psi(1) = 1$; sau đó, với $y = z = 1$ thì : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \frac{x^3}{\varphi(x^2)}$.

Suy ra : $\forall(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x, y) = \varphi(x)\dfrac{y^3}{\varphi(y^2)}$.

2) Hãy kiểm chứng phần đảo.

Sau đây là những thí dụ về nghiệm : $\begin{array}{l}\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto \mathbb{R},\\ (x, y) \mapsto y^3\end{array}$ $\quad \begin{array}{l}\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto \mathbb{R}\\ (x, y) \mapsto xy.\end{array}$

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{l}\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{\varphi(x)y^3}{\varphi(y^2)}\end{array} ; \varphi \in \left(\mathbb{R}^*\right)^{\mathbb{R}_+^*} \right\}$

12.2.2 • Ký hiệu $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}$; rõ ràng ta có $\mathbb{Q}^2 \subset E$, vậy E trù mật trong $\mathbb{R}^2$.

Ký hiệu $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{Q}$ và $\dfrac{y}{\sqrt[3]{2}} \in \mathbb{Q}^*\} = \mathbb{Q} \times (\sqrt[3]{2}\,\mathbb{Q}^*)$. Hãy chứng tỏ rằng F trù mật trên $\mathbb{R}^2$ và $F \subset C_{\mathbb{R}^2}(E)$ (hãy sử dụng $\sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$).

• $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho f liên tục tại (x_0, y_0). Do E và F trù mật trên $\mathbb{R}^2$ và vì

$$f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (x, y) \in E}]{} x_0 y_0 \quad \text{và} \quad f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (x, y) \in F}]{} 0$$

ta suy ra $x_0 y_0 = 0$.

• Đảo lại, vì với mọi x_0 thuộc $\mathbb{R}$, $f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, 0) \\ (x, y) \in E}]{} 0$

$$\text{và } f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, 0) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 - E}]{} 0$$

nên f liên tục tại $(x_0, 0)$; tương tự với $(0; y_0)$.

◊ **Trả lời :** Tập hợp các điểm thuộc $\mathbb{R}^2$ tại đó f liên tục là $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

12.2.3 1) Giả sử $(x_0, y_0) \in (\mathbb{Q}_+)^2$. Vì $(\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2$ trù mật trong $(\mathbb{R}_+)^2$ và vì $f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2}]{} 0 \neq f(x_0, y_0)$, ta suy ra f không liên tục tại (x_0, y_0).

2) Giả sử $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2$ (khi đó ta có chẳng hạn $x_0 \notin \mathbb{Q}_+$). Lập luận như khi giải bài tập 4.3.1, b) Tập 1, chứng tỏ rằng $f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (x, y) \in (\mathbb{Q}_+)^2}]{} 0$.

◊ **Trả lời :** Tập hợp các điểm thuộc $\left(\mathbb{R}_+\right)^2$ tại đó f liên tục là $(\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2$.

12.2.4 Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

Với mọi t thuộc $[0; 1]$, ta có :

$$(xf(t) + yg(t)) - (x'f(t) + y'g(t)) = (x - x')f(t) + (y - y')g(t) \leq$$
$$\leq |x - x'| \, \|f\|_\infty + |y - y'| \, \|g\|_\infty,$$

suy ra : $\quad xf(t) + yg(t) \leq x'f(t) + y'g(t) + |x - x'| \, \|f\|_\infty + |y - y'| \, \|g\|_\infty.$

Chuyển qua các cận trên khi t vạch nên $[0; 1]$, ta được :

$$M(x, y) \leq M(x', y') + |x - x'| \, \|f\|_\infty + |y - y'| \, \|g\|_\infty.$$

Hoán vị các vai trò của (x, y) và (x', y'), ta kết luận rằng :

$$|M(x - y) - M(x', y')| \leq |x - x'| \, \|f\|_\infty + |y - y'| \, \|g\|_\infty .$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng M liên tục trên $\mathbb{R}^2$ (và thậm chí còn là Lipschitz từ $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ vào $(\mathbb{R}, |.|)$).

12.2.5 a) Chú ý rằng : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, |f(x, y)| \leq |y|$.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0,\ 0)]{} 0$.

b) **Phương pháp thứ 1.**

- $|x| \leq |y| \neq 0 \Rightarrow |f(x, y)| \leq \dfrac{y^8}{y^4} = y^4$.

- $|y| \leq |x| \neq 0 \Rightarrow |f(x, y)| \leq \dfrac{x^8}{x^6} = x^2$.

Suy ra : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, |f(x, y)| \leq \mathrm{Max}(y^4, x^2) \leq y^2 + x^2 \xrightarrow[(x,\ y) \to (0,0)]{} 0$.

Phương pháp thứ 2.

Ký hiệu $X = x^3$, $Y = y^2$, do đó $|f(x, y)| = \dfrac{X^{5/3}\, Y^{3/2}}{X^2 + Y^2}$; sau đó chúng ta chuyển sang tọa độ cực

$(X = \rho\cos\theta,\ Y = \rho\sin\theta,\ \rho > 0)$:

$$|f(x, y)| = \rho^{5/3 + 3/2 - 2} |\cos\theta|^{5/3}\ |\sin\theta|^{3/2} \leq \rho^{7/6} \xrightarrow[(x,\ y) \to (0,\ 0)]{} 0 .$$

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0,\ 0)]{} 0$.

c) $f(x, 0) = \dfrac{1 + x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ và $f(0, y) = \dfrac{1 + y}{-y^2} \xrightarrow[y \to 0]{} -\infty$.

◊ **Trả lời :** Tại $(0, 0)$ f không có giới hạn.

d) $f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ và $f(t^4, t^3) = \dfrac{1}{2t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty$.

◊ **Trả lời :** Tại $(0, 0)$ f không có giới hạn.

e) $f(x, 0) = \dfrac{2(x-1)^2 \ln(|1-x|)}{|x|} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{-2x}{|x|}$.

◊ **Trả lời :** f không có giới hạn tại $(0, 0)$.

f) Vì $(\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \le |t|)$, nên ta có : $|f(x, y)| \le \sqrt{x^4 + y^4} \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0$.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0, 0)]{} 0$.

g) • Vì $\sin^4 x \underset{x \to 0}{\sim} x^4$ và $(1 - \cos y)^2 \underset{y \to 0}{\sim} \dfrac{y^4}{4}$, nên ta có thể dự đoán rằng $f \xrightarrow[(0, 0)]{} \dfrac{1}{4}$.

• $\left| f(x, y) - \dfrac{1}{4} \right| \le \dfrac{|\sin^4 x - x^4|}{4x^4 + y^4} + \dfrac{\left| (1 - \cos y)^2 - \frac{1}{4} y^4 \right|}{4x^4 + y^4}$.

Vì $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$, ta có $\dfrac{\sin^4 x - x^4}{x^4} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, và do đo

$$\frac{|\sin^4 x - x^4|}{4x^4 + y^4} \le \frac{1}{4} \left| \frac{\sin^4 x - x^4}{x^4} \right| \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0.$$

Khảo sát tương tự đối với số hạng kia.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0, 0)]{} \dfrac{1}{4}$.

h) $f(x, 0) = \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ và $f(x, x) = -1 \xrightarrow[x \to 0]{} -1$.

◊ **Trả lời :** Tại $(0, 0)$ f không có giới hạn.

i) • Do $\operatorname{ch} x - \cos y = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} x = \cos y = 1 \Leftrightarrow (x = 0$ và $y \in 2\pi\mathbb{Z})$, nên f xác định ít nhất trên $V =]-1; 1[^2 - \{(0, 0)\}$.

• Hãy chứng tỏ rằng với mọi số thực t ta có : $|\sin t| \le |t|$, $\operatorname{ch} t \ge 1 + \dfrac{t^2}{2}$, $\cos t \le 1 - \dfrac{t^2}{2}$. Suy ra : $\forall (x, y) \in V$, $|f(x, y)| \le \dfrac{2|x|^3}{x^2 + y^2} \le 2|x| \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0$.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0, 0)]{} 0$.

j) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{ch}(xy) - 1}{(xy)^2} + \dfrac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}$.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0, 0)]{} 1$.

k) $f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ và $f(x, -x + x^2) = \dfrac{-x^2 + x^3}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x - x^2)} = \dfrac{-x^2 + x^3}{2 \operatorname{sh} \dfrac{x^2}{2} \operatorname{ch}\left(x - \dfrac{x^2}{2} \right)} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$.

◊ **Trả lời :** Tại (0, 0) f không có giới hạn.

l) Chứng tỏ rằng trong lân cận của 0 thì : $|\operatorname{sh} t| \le 2|t|$.

Khi đó ta có : $f(x, y) \le \dfrac{4|xy|}{|x| + |y|} \le 4(|x| + |y|) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[(0,\ 0)]{} 0$.

12.2.6 • Do $\cos^2 x + y^2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ y\sin x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$, nên f được xác định ít nhất trên

$$V = \left(\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right[\ \times\ ]-1;\ 1[\right) - \{(0,\ 0)\}.$$

• $\forall (x, y) \in V$, $|f(x, y)| = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + y^2\sin^2 x}\,|\cos x| \le |\cos x| \xrightarrow[(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)]{} 0$.

◊ **Trả lời :** $f \xrightarrow[\left(\frac{\pi}{2},0\right)]{} 0$.

12.2.7 a) Cho $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$; ta phân biệt các trường hợp :

1) $x_o y_o \ne 0$

Tồn tại tập mở V thuộc $\mathbb{R}^2$, chứa (x_o, y_o) và sao cho : $\forall (x, y) \in V$, $xy \ne 0$.

Theo các định lý tổng quát (tích, hợp các hàm liên tục), f liên tục tại (x_o, y_o).

2) $x_o \ne 0$ và $y_o = 0$ (hay tương tự như thế $x_o = 0$ và $y_o \ne 0$). Vì ánh xạ bộ phận :

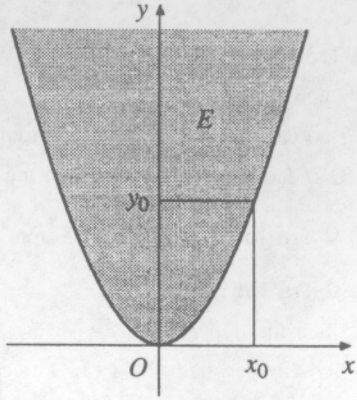
$$f(x_o, .) : y \mapsto \begin{cases} (x_o^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x_o y} & \text{nếu } y \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } y = 0 \end{cases}$$

không có giới hạn tại 0, nên f không có giới hạn tại $(x_o, 0)$.

3) $x_o = y_o = 0$. Ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x, y)| \le x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0, 0)$.

◊ **Trả lời :** $(\mathbb{R}^*)^2 \cup \{(0, 0)\}$.

b) Ta ký hiệu $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > x^2\}$. Cho $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$; ta phân biệt các trường hợp :



1) $y_o > x_o^2$

E là một tập mở có chứa (x_o, y_o) và $\forall (x, y) \in E$, $f(x, y) = x^4$, do đó f liên tục tại (x_o, y_o).

2) $y_o < x_o^2$

Tương tự như 1).

3) $y_o = x_o^2$

Do $f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ y > x^2}]{} x_o^4$,

$f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ y \le x^2}]{} y_o^2$

và vì $x_o^4 = y_o^2$, ta kết luận rằng f liên tục tại (x_0, y_0).

◊ **Trả lời :** $\mathbb{R}^2$.

12.3.1 a) Trước hết ta nhận xét rằng f đối xứng, nghĩa là :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y, x) = f(x, y).$$

1) **Tính liên tục**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (tổng, tích, hợp các hàm liên tục).
- $|f(x, y)| \le x^2 + y^2 \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0$.

2) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**

- Trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, f có các đạo hàm riêng cấp 1, và với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = x \sin \dfrac{1}{|x|} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \ne 0}]{} 0$, suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ tồn tại và bằng 0.

3) **Tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

- Các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin \dfrac{1}{|x|} - \dfrac{x}{|x|} \cos \dfrac{1}{|x|}$, biểu thức này không có giới hạn khi x dần đến 0 ;

suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ không liên tục tại $(0, 0)$.

◊ **Trả lời :**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- f có các đạo hàm riêng cấp 1 trên $\mathbb{R}^2$.
- Các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ và không liên tục tại $(0, 0)$.

b) ◊ **Trả lời :** f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

c) ◊ **Trả lời :**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- f có các đạo hàm riêng cấp 1 trên $\mathbb{R}^2$.

• Các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ và không liên tục tại (0, 0).

d) f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

1) **Tính liên tục**

$$|f(x, y)| \le x^4 \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0 = f(0, 0).$$

2) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**

• $\left|\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}\right| = \dfrac{|x^3|}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ tồn tại và bằng 0.

• $\dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \xrightarrow[y \to 0]{} 0$, suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ tồn tại và bằng 0.

3) **Tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

Với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{6x^5(x^2 + (y-x)^2) - x^6(2x - 2(y-x))}{(x^2 + (y-x)^2)^2}$.

Ta ký hiệu $v = \text{Max}(|x|, |y|)$. Về giá trị tuyệt đối thì tử số trên đây bị chặn trên bởi $36v^7$.

$$\begin{cases} \text{Nếu } |x| \ge |y|, \text{ thì } x^2 + (y-x)^2 \ge x^2 = v^2 \\ \text{Nếu } |x| \le |y|, \text{ thì } x^2 + (y-x)^2 = 2x^2 - 2xy + y^2 = 2\left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{2} \ge \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{v^2}{2}. \end{cases}$$

Suy ra : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \le 144v^3 \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0$.

◊ **Trả lời :** f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

e) ◊ **Trả lời :**

• f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

• Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ = Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

• Các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{0, 0)\}$.

f) ◊ **Trả lời :**

• f liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0\}$, nhưng không liên tục tại (0, 0).

• Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ = Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

• Các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

g) ◊ **Trả lời :**

• f chỉ liên tục tại (0, 0).

• Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) \cup \{(0, 0)\}$, Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = ((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}) \cup \{(0, 0)\}$.

h) ◊ **Trả lời :**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2$, Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0, 0)\}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0, 0)\}$.

i) ◊ **Trả lời :**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ = Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 - B_1$, trong đó $B_1 = \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}\}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 - B_1$.

j) ◊ **Trả lời :**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ = Miền xác định$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$, và không liên tục tại mọi điểm thuộc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 0$ và $(x, y) \neq (0, 0)\}$.

12.3.2 • Chứng tỏ rằng

$\left|\dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}\right| \leq 1$, và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y = 0$. Suy ra f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2 - B_2$, trong đó $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.

• Một phép tính đơn giản cho thấy : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - B_2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\varepsilon}{1 + x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\varepsilon}{1 + y^2} \end{cases}$,

trong đó $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x + y)$. Suy ra tồn tại $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y + C_1 & \text{nếu } x + y > 0 \\ -\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y + C_2 & \text{nếu } x + y < 0 \end{cases}$$

Sử dụng tính liên tục của f trên B_2, và giá trị của hàm đó trên B_2, chứng tỏ rằng $C_1 = C_2 = 0$.

◊ **Trả lời** : $f(x, y) = \varepsilon(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y)$, trong đó $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x + y)$.

12.3.3 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x \displaystyle\int_0^y \varphi(t)\,dt - \int_0^y t\varphi(t)\,dt$.

◊ **Trả lời :** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \displaystyle\int_0^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - y)\,\varphi(y) \end{cases}$

12.3.4 ◊ **Trả lời :** $\forall (x, y) \in I^2, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\varphi(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y). \end{cases}$

12.3.5 Đầu tiên thấy f thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2 - B_1$, trong đó B_1 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$. Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**

$\dfrac{f(x_o + h\,,\, x_o) - f(x_o, x_o)}{h} = \dfrac{\varphi(x_o + h) - \varphi(x_o) - h\varphi'(x_o)}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{1}{2}\varphi''(x_o)$, theo định lí Taylor–Young. Kết quả này chứng tỏ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ tồn tại và bằng $\dfrac{1}{2}\varphi''(x_o)$; tương tự đối với $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$ (f đối xứng).

2) **Tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

Với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$ ta có : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-\varphi'(x)(y - x) + \varphi(y) - \varphi(x)}{(y - x)^2}, & \text{nếu } x \neq y \\ \dfrac{1}{2}\varphi''(x) & \text{nếu } x = y. \end{cases}$

Áp dụng công thức Tay lor với phần dư tích phân, ta có : nếu $x \neq y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(y - x)^2} \int_x^y (y - t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

hãy chứng tỏ rằng biểu thức đó dẫn tới $\dfrac{1}{2}\varphi''(x_o)$ khi (x, y) dẫn tới (x_0, y_0).

12.4.1 a) ◊ **Trả lời :** n^k.

b) Với mọi (n, k) thuộc $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, ký hiệu $\Gamma_{n,k} = \mathrm{Card}\{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\ ;\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = k\}$.

• Trước hết chứng tỏ rằng : $\Gamma_{1,k} = 1$, $\Gamma_{2,k} = k + 1$, $\Gamma_{3,k} = \dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2}$, từ đó ta có thể dự đoán rằng $\Gamma_{n,k} = C_{n+k-1}^{n-1}$.

• Cho $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Tập hợp các $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ thuộc $\mathbb{N}^{n+1}$ sao cho

$\alpha_1 + ... + \alpha_{n+1} = k$ là hợp rời của tập hợp E_1 các $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$ thuộc $\mathbb{N}^{n+1}$ sao cho :

$\begin{cases}\alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = k\end{cases}$, và tập hợp E_2 các $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$ thuộc $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ sao cho

$\begin{cases}\alpha_{n+1} \geq 1 \\ \alpha_1 + ... + \alpha_n + (\alpha_{n+1} - 1) = k-1\end{cases}$

Vì Card($E_1 = \Gamma_{n,k}$ và Card(E_2) $= \Gamma_{n+1,k-1}$, ta suy ra : $\Gamma_{n+1,k} = \Gamma_{n,k} + \Gamma_{n+1,k-1}$.

• Sau đó, bằng quy nạp trên $n+k$, chứng tỏ rằng $\Gamma_{n,k} = C_{n+k-1}^{n-1} \left(= C_{n+k-1}^{k}\right)$.

◊ **Trả lời :** C_{n+k-1}^{n-1}.

12.4.2 a) • f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

• $f(., 0) = 0$, vậy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ tồn tại và bằng 0 ; tương tự, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ tồn tại và bằng 0.

• $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ suy ra, với kí hiệu $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2\rho \xrightarrow[(x, y) \to (0, 0)]{} 0 .$$

Kết quả này chứng tỏ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ tồn tại và $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ liên tục tại (0, 0).

• $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, và do đó $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục tại (0, 0).

b) • $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tồn tại trên $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

• $\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 1 \xrightarrow[y \to 0]{} 1$, vậy $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0)$ tồn tại và bằng 1.

• $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, vậy $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0)$ tồn tại và bằng 0.

12.5.1 a) • f thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2$.

• Điểm dừng duy nhất của f là $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, và với ký hiệu $h = x - \dfrac{1}{3}$, $k = y - \dfrac{1}{3}$, ta có :

$$f(x, y) - f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = h^2 + k^2 + (h+k)^2 \geq 0.$$

◊ **Trả lời :** f có một và chỉ một điểm cực trị địa phương, tại $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$; đó là một điểm cực tiểu và $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$. Đó cũng là điểm cực tiểu toàn cục, và f không có điểm cực đại toàn cục.

b) • f thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2$.

• Điểm dừng duy nhất là (0, 0), và $f(x, 0) - f(0, 0) = x^3 \begin{cases} > 0 \text{ nếu } x > 0 \\ < 0 \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$

◊ **Trả lời :** f không có cực trị địa phương, cũng không có cực trị toàn cục.

c) • f thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2$.

• Điểm dừng duy nhất là (0, 0), và $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) - f(0, 0) \geq 0$.

◊ **Trả lời :** f có một và chỉ một điểm cực trị, tại (0, 0); đó là một điểm cực tiểu và $f(0, 0) = 0$. Đó là một điểm cực tiểu toàn cục và f không có cực đại toàn cục.

d) • f thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2$.

• Điểm dừng duy nhất là (0, 0). Ta có : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x, 0) = x^4 \\ f\left(x, \dfrac{3}{2}x^2\right) = -\dfrac{1}{2}x^4. \end{cases}$

◊ **Trả lời :** f không có cực trị địa phương cũng như cực trị toàn cục.

e) • f thuộc lớp C^1 trên tập mở $\mathbb{R}^2$.

• Điểm dừng duy nhất là (0, 0). Vì $\begin{cases} f(x, -x^3) = -x^5 + \ln(1 + x^6) \underset{x \to 0}{\sim} -x^5 \\ f(0, y) = \ln(1 + y^2) \underset{y \to 0}{\sim} y^2 \end{cases}$ nên f không có cực trị địa phương tại (0, 0).

• $f(0, y) = \ln(1 + y^2) \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$, vậy f không bị chặn trên.

• $f(1, y) = y + \ln(1 + y^2) \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty$, vậy f không bị chặn dưới.

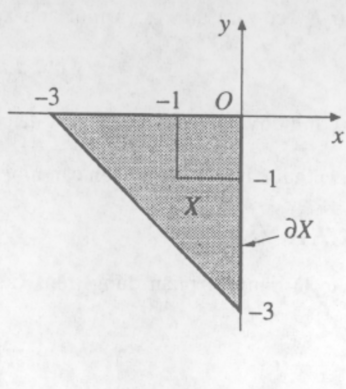
◊ **Trả lời :** f không có cực trị địa phương cũng như cực trị toàn cục.

12.5.2 • Khảo sát các điểm cực trị địa phương của f trên miền trong của X, tức là :

$\overset{o}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, y < 0, x + y > -3\}$, vốn là một tập hợp mở trên $\mathbb{R}^2$.

Ta thu được một và chỉ một điểm dừng $(-1, -1)$, tại đây f có cực tiểu địa phương.

Sau đó xét các hạn chế của f trên mỗi đoạn trong ba đoạn thẳng tao nên "đường biên" ∂X của X.



◊ **Trả lời :**

$$\begin{cases} \operatorname{Inf} f = -1 \text{ và } f^{-1}(\{-1\}) = \{(-1, -1)\} \\ \operatorname{Sup} f = 6 \text{ và } f^{-1}(\{6\}) = \{(-3, 0), (0, -3)\}. \end{cases}$$

12.5.3 • f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ và có một điểm dừng duy nhất : (0, 0).

Ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1 ; +\infty[$, $f(x, y) - f(0, 0) = x^2(1 + y)^3 + y^4 \geq 0$, suy ra tại (0, 0) f có một cực tiểu địa phương.

• $f(x, x) = x^2(1 + x)^3 + x^4 \underset{x \to -\infty}{\sim} x^5 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, vậy f không có cực tiểu toàn cục.

12.6.1. ◊ **Trả lời :**

a) $1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)$

b) $-x^2 - x^3 - x^4 - 2x^5 + o(x^5)$

c) $x^3 - x^{13} + o(x^{17})$

d) $2 - 2(2 + \ln 2)(x - 1) + (18 + 10\ln 2 + (\ln 2)^2)(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$

e) $1 - (e + 1)x + \left(e^2 + 2e + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{3}{2}e^3 + 4e^2 + \frac{5}{2}e + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$

f) $(x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$

g) $-x - x^2 - x^3 + o(x^3)$.

12.6.2 Chứng tỏ rằng có thể áp dụng định lí hàm ẩn, và $\varphi : x \mapsto y$ có KTHH$_2$(0) : $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$.

◊ **Trả lời :** $\frac{y}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

12.6.3 Phương pháp giống như ở bài tập 12.6.2 : $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

12.6.4 • Đối với mỗi x thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ $f(x, .) : y \mapsto f(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, tăng nghiêm ngặt, có giới hạn $-\infty$ tại $-\infty$, $+\infty$ tại $+\infty$. Vậy :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, f(x, y) = 0.$$

Tồn tại một ánh xạ duy nhất $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

• Cho $x_0 \in \mathbb{R}$; định lí hàm ẩn áp dụng tại $(x_0, \varphi(x_0))$, chứng tỏ rằng tồn tại một khoảng mở I_{x_o} có tâm tại x_0, và một ánh xạ $\varphi_{x_o} : I_{x_o} \to \mathbb{R}$, thuộc lớp C^∞ sao cho :

$$\forall x \in I_{x_o}, f(x, \varphi_{x_o}(x)) = 0.$$

Do tính duy nhất của $\varphi(x)$ (với x đã cho), ta thấy rằng φ_{x_o} chính là thu hẹp của φ trên I_{x_o}.

Vì φ thuộc lớp C^∞ trong lân cận mọi x_0 thuộc $\mathbb{R}$, nên φ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

12.7.1 ◊ **Trả lời :**

a) ω là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^2$ và các nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^2$ là các ánh xạ

$$(x, y) \mapsto \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) ω là dạng vi phân đúng trên $U = (\mathbb{R}^*)^2$ và các nguyên hàm của ω trên U là các ánh xạ $(x, y) \mapsto xy + \ln|x| + \ln|y| + \lambda_i$, nếu $(x, y) \in U_i$, trong đó $U_1, ..., U_4$ là bốn góc phần tư, và $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

c) ω là dạng vi phân đúng trên $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ và các nguyên hàm của ω trên U là các ánh xạ $(x, y) \mapsto \frac{y}{2}\ln(x^2 + y^2) - y + x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x} + \lambda_i$, nếu $(x; y) \in U_i$, trong đó U_1, U_2 là hai nửa mặt phẳng, và $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

d) • ω không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một nhân tử tích phân là $(x, y) \mapsto e^x$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^2$ và các nguyên hàm của ω_1 trên $\mathbb{R}^2$ là các ánh xạ

$$(x, y) \mapsto e^x y + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

e) • ω không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một nhân tử tích phân trên $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ là $(x, y) \mapsto \frac{1}{y^2}$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên U và các nguyên hàm của ω_1 trên U là các ánh xạ $(x, y) \mapsto \frac{x}{y} + y + \lambda_i$ nếu (x, y) thuộc U_i, $U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$, $U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

f) • ω không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một nhân tử tích phân trên $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ là $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-2}$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên U và các nguyên hàm của ω_1 trên U là các ánh xạ

$$(x, y) \mapsto \frac{x + y}{x^2 + y^2} + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

g) • ω không đóng trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

• Một nhân tử tích phân trên $U = (\mathbb{R}^*)^2$ là $(x, y) \mapsto \frac{y}{x} e^{y/x}$; ta được :

$$\omega_1(x, y) = \frac{2x^2 + xy - 2y^2}{x} e^{y/x}\,dx + (3x + 2y)e^{y/x}\,dy,$$

xác định trên $V = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên V và các nguyên hàm của ω_1 trên V là các ánh xạ : $(x, y) \mapsto (2xy + x^2)e^{y/x} + \lambda_i$ nếu $(x, y) \in U_i$, $U_1 = \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}$, $U_2 = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

h) • ω không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một nhân tử tích phân là $(x, y) \mapsto e^y$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^2$ và các nguyên hàm của ω_1 trên $\mathbb{R}^2$ là các ánh xạ

$$(x, y) \mapsto xe^y - 2e^y + x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) • ω không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một nhân tử tích phân trên $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ là $(x, y) \mapsto \frac{1}{y}$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên U và các nguyên hàm của ω_1 trên U là các ánh xạ $(x, y) \mapsto x - \dfrac{1+\ln x}{y} + \lambda_i$ nếu $(x, y) \in U_i$, $U_1 = \mathbb{R} \times R^*_-$, $U_2 = \mathbb{R} \times R^*_+$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

12.7.2 ◊ **Trả lời :** Các cặp (f, g) thích hợp là các cặp (f, f') trong đó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên R; nguyên hàm là các ánh xạ
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto e^x f(y) + \lambda \\ \lambda &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

12.7.3 ◊ **Trả lời :** $(p, q) = (2, 2)$; nguyên hàm là các ánh xạ
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2} x^2y^2 + \lambda \\ \lambda &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

12.7.4 ◊ **Trả lời :**

a) ω là dạng vi phân đúng trên $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ và các nguyên hàm của ω trên U là các ánh xạ
$$(x, y, z) \mapsto \frac{ax-by}{z} + \lambda_i \text{ nếu } (x, y, z) \in U_i,$$
$U_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_-$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_+$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

b) ω là dạng vi phân đúng trên tập mở $U = \mathbb{R}^3 - P$, trong đó P là mặt phẳng có phương trình $cz - ax = 0$, và các nguyên hàm của ω trên U là các ánh xạ :
$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{a}\,\frac{ay-bz}{cz-ax} + \lambda_i \quad \text{nếu } (x, y, z) \in U_i,$$
U_1, U_2 là hai nửa không gian giới hạn bởi P, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

c) • ω không đóng trên $\mathbb{R}^3$.

• Một nhân tử tích phân trên $U = \mathbb{R}^3 - P$, trong đó P là mặt phẳng có phương trình $x + y = 0$, là $(x, y, z) \mapsto \dfrac{1}{(x+y)^2}$.

• ω_1 là dạng vi phân đúng trên U và các nguyên hàm của ω_1 trên U là các ánh xạ $(x, y, z) \mapsto \dfrac{(x^2-y^2)z}{(x+y)^2} + \lambda_i$, nếu $(x, y, z) \in U_i$, U_1, U_2 là các nửa không gian giới hạn bởi P, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

d) • ω không đóng trên $(\mathbb{R}^*)^3$.

• Một nhân tử tích phân là $(x, y, z) \mapsto xyz$ (hiển nhiên).

• $\omega_1 : (x, y, z) \mapsto xdx + ydy + zdz$ xác định trên $\mathbb{R}^2$, là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^3$, và các nguyên hàm của ω_1 trên $\mathbb{R}^3$ là các ánh xạ
$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

12.7.5 ◊ **Trả lời :** ω đóng (trên $U = \mathbb{R}^3 - P$, trong đó P là mặt phẳng có phương trình $y + z = 0$) khi và chỉ khi : $b = 1$ và $c = -1$. Trong trường hợp này thì các nguyên hàm của ω trên U là các ánh xạ $(x, y, z) \mapsto \dfrac{x-z}{y+z} + \lambda_i$; nếu $(x, y, z) \in U_i$, trong đó U_1 và U_2 là các nửa không gian giới hạn bởi P, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

12.7.6 ◊ **Trả lời :** ω đóng trên $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto xy + C$, $C \in \mathbb{R}$

Trong trường hợp đó thì các nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^3$ là các ánh xạ

$$(x, y, z) \mapsto xyz + \frac{1}{3}x^3y^3 + Cz + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

12.7.7 ◊ **Trả lời :**

a) $y(e^x - e^{2x}) - x = C, \ C \in \mathbb{R}$. Ta cũng có thể xem phương trình trong đề bài như là một phương trình tuyến tính, và có được một phép giải thật chặt chẽ.

b) $e^y \operatorname{sh} x + y - x = C, \ C \in \mathbb{R}$

c) $x - \dfrac{1 + \ln x}{y} = C, \ C \in \mathbb{R}$.

d) $\dfrac{y + \ln|x|}{xy} = C, \ C \in \mathbb{R}$.

12.8.1

• $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta d\theta \\ dy = d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}dx + \dfrac{\cos\theta}{\rho}dy \\ d\rho = \cos\theta dx + \sin\theta dy \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}, \ \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho} \\[2mm] \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta, \ \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta. \end{cases}$$

• $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} + \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} + \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} \end{cases}$

• $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(-\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - \sin\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial\rho}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\rho}\right)$$
$$+ \left(\frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\right).\cos\theta;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \cos\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial\rho}\right)\cdot\frac{\cos\theta}{\rho}$$
$$+ \left(-\frac{\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\right).\sin\theta.$$

◊ **Trả lời :** $\Delta f = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\rho}$.

12.8.2 $\Delta f = 0 \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I \times J,\ u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0)$. Nếu (u, v) thích hợp và $v \neq 0$, thì tồn tại $y_0 \in J$ sao cho $v(y_o) \neq 0$ và :

$$\forall x \in I,\ u''(x) + \frac{v''(y_o)}{v(y_o)}\ u(x) = 0.$$

Suy ra tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall x \in I,\ u''(x) + Cu(x) = 0$.

Khi đó $\Delta f = 0 \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I \times J,\ (u(x)(v''(y) - Cv(y)) = 0)$

$\Leftrightarrow \forall y \in J,\ v''(y) - Cv(y) = 0$, nếu giả thiết $u \neq 0$.

◊ **Trả lời :** $\{(x, y) \mapsto (\lambda_1 x + \mu_1)(\lambda_2 y + \mu_2);\ (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4\}$

$\cup \{(x, y) \mapsto (A_1 \cos\omega x + B_1 \sin\omega x)(A_2 \operatorname{ch}\omega y + B_2 \operatorname{sh}\omega y);\ (A_1, B_1, A_2, B_2) \in \mathbb{R}^4,\ \omega \in \mathbb{R}_+^*\}$

$\cup \{(x, y) \mapsto (A_1 \operatorname{ch}\omega x + B_1 \operatorname{sh}\omega x)(A_2 \cos\omega y + B_2 \sin\omega y);\ (A_1, B_1, A_2, B_2) \in \mathbb{R}^4,\ \omega \in \mathbb{R}_+^*\}$.

12.8.3 ◊ **Trả lời :** $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$, trong đó f xác định bởi :

a) $f(x, y, z) = \dfrac{z^3}{x^2 + y^2} + z + C,\ C \in \mathbb{R}$.

b) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 13

13.1.1 a) (C) có biểu diễn tham số là : $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, t biến thiên từ π đến 0. Suy ra :

$$\int_{(C)} \omega = \int_0^{\pi} (4\cos^3 t + 2\sin^3 t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(-(\cos 3t + 3\cos t) + \frac{1}{2}(3\sin t - \sin 3t)\right)\mathrm{d}t\,..$$

◊ **Trả lời :** $\frac{8}{3}$

b) (C) có biểu diễn tham số là : $y = x$, x biến thiên từ 0 đến 1. Suy ra :

$$\int_{(C)} \omega = \int_0^1 x(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \Big[x(-\cos x + \sin x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (-\cos x + \sin x)\mathrm{d}x.$$

◊ **Trả lời :** $2\sin 1 - 1$.

c) $$\int_{(C)} \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega + \int_{DA} \omega$$

$$= \int_1^{-1} \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_1^{-1} \frac{-1+y}{1+y^2}\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{1+y}{1+y^2}\mathrm{d}y = 4\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

◊ **Trả lời :** 2π.

d) (C) có biểu diễn tham số là $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, t biến thiên từ 0 đến 2π. Suy ra :

$$\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} (12\cos^3 t - 18\sin^3 t)\mathrm{d}t$$

◊ **Trả lời :** 0.

e) Đường tròn (C) có biểu diễn tham số là $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, t biến thiên từ 0 đến 2π. Suy ra

$$\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} \left((1+\sin t)^2\cos^2 t + (1+\sin t)\sin t\cos^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (1+\sin t)(1+2\sin t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

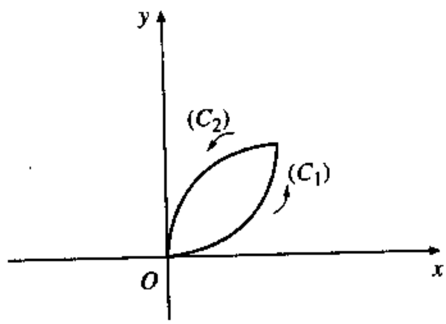
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t - \Big[\cos^3 t\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t$$

◊ **Trả lời :** $\frac{3\pi}{2}$.

$(C_1) : x = \cos t,\ y = 1 + \sin t$, t từ $-\dfrac{\pi}{2}$ đến 0.

$(C_2) : x = 1 + \cos u,\ y = \sin u$, u từ $\dfrac{\pi}{2}$ đến π.



$$\int_{(C)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \Big(-(1+\sin t)\sin t + 2\cos^2 t \Big) \mathrm{d}t$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} \Big(-\sin^2 u + 2(1+\cos u)\cos u \Big) \mathrm{d}u.$$

◊ **Trả lời** : $\dfrac{\pi}{2} - 1$.

g) Chú ý rằng : $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = y^2 \mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}\right) = (a^2\sin^2 t\cos 2t)\left(-\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t = -a^2\cos 2t\mathrm{d}t$, suy ra :

$$\int_{(C)} \omega = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} -a^2 \sin t\cos t\cos 2t\,\mathrm{d}t = -\frac{a^2}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 4t\,\mathrm{d}t.$$

◊ **Trả lời** : 0.

h) $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} (-\cos t\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{2}\sin 2t + 1\Big)\mathrm{d}t.$

◊ **Trả lời** : 2π.

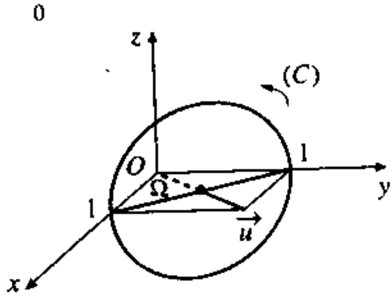
i) $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \Big(-(r\sin t + ht)r\sin t + (ht + r\cos t)r\cos t + h^2 t \Big)\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} \Big(r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + hrt(\cos t - \sin t) + h^2 t\Big)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t\,\mathrm{d}t - hr\left(\Big[t(\sin t + \cos t) \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t)\mathrm{d}t \right) + 2\pi h^2 \right).$$

◊ **Trả lời** : $2\pi\ \dfrac{h(h+r)}{r^2}$.

j) (C) là một đường tròn tâm $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.



Ký hiệu $X = x - \dfrac{1}{2}$, $Y = y - \dfrac{1}{2}$, $Z = z$, (C) có phương trình :

$$\begin{cases} Y = -X \\ 4X^2 + 2Z^2 = 1 \end{cases};$$

ta suy ra biểu diễn tham số của (C) :

$X = \dfrac{1}{2}\cos t$, $Y = -\dfrac{1}{2}\cos t$, $Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t$, và do vậy $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos t$, $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos t$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t$, t biến thiên từ 2π đến 0 (theo chiều trên (C) xác định trong đề bài).

Suy ra : $\int\limits_{(C)} \omega = -\int\limits_0^{2\pi} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \frac{1}{2} \sin t + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right) \frac{1}{2} \sin t \right) \mathrm{d}t =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \sin t \cos t \right) \mathrm{d}t.$$

◊ **Trả lời** : $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

k) $\int\limits_{(C)} \omega = \int\limits_0^{\pi/2} \left(-(\cos t + 1)^2 \sin t + (\cos t - 1)^2 \cos t - \sin^3 t \right) \mathrm{d}t$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} (2 + 2\cos t)\sin t \,\mathrm{d}t + \int\limits_0^{\pi/2} (\cos t - 2\cos^2 t + \cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$= \left[2\cos t + \cos^2 t + \sin t \right]_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t + \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/2} (\cos 3t + 3\cos t)\mathrm{d}t.$$

◊ **Trả lời** : $-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

13.1.2 a) ω là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^2$, và một nguyên hàm của ω là F : $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}(x^3 + y^3 - 3xy)$; khi đó chú ý rằng (C) nghiệm đúng $F(x, y) = 0$.

◊ **Trả lời** : 0.

b) ω có dạng vi phân đúng ($\omega = \mathrm{d}(xy + xz + yz)$) và (C) đóng.

◊ **Trả lời** : 0.

c) Kiểm chứng rằng ω đóng trên $\mathbb{R}^3$. Do $\mathbb{R}^3$ có hình sao, nên theo định lí Poincaré(12.7.3, Định lí 2), ω là dạng vi phân đúng trên $\mathbb{R}^3$, mặt khác thì $\omega = \mathrm{d}(x^2y^2z - z^2)$. Và (C) đóng.

◊ **Trả lời** : 0.

d) $\omega = \mathrm{d}f$, trong đó $f : (x, y) \mapsto xy$, suy ra $\int\limits_{(C)} \omega = f(A) - f(0)$.

◊ **Trả lời** : 8.

e) Thay $x^2 + y^2$ bằng y :

$$\int\limits_{(C)} \omega = \int\limits_{(C)} \frac{-2xy\mathrm{d}x + (y - 2y^2)}{y} \mathrm{d}y = \int\limits_{(C)} (-2x\mathrm{d}x + (1 - 2y)\mathrm{d}y).$$

Vậy với ký hiệu $F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y - x^2 - y^2 \end{array}$, ta sẽ có : $\int\limits_{(C)} \omega = \left[F(x, y) \right]_A^B$.

Chú ý rằng ở đây ω không phải là một dạng vi phân đúng, nhưng tồn tại một dạng vi phân đúng ω_0 trùng với ω trên (C) ($\omega_0 = \mathrm{d}(y - x^2 - y^2)$).

◊ **Trả lời** : 0.

f) $\omega = \mathrm{d}F$, trong đó $F : (x, y) \mapsto xy^3 - 3x^2y^2$.

◊ **Trả lời :** -236.

g) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, trong đó $\omega_1 = (x^2 + y)\mathrm{d}x + (x + y^2)\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}(x^3+y^3)+xy\right)$,

và $\omega_2 = x\mathrm{d}y$.

Do (C) đóng :

$$\int_{(C)}\omega_1 = 0, \text{ và do đó : } \int_{(C)}\omega = \int_{(C)}\omega_2 = \int_{AB}\omega_2 + \int_{BC}\omega_2 + \int_{CD}\omega_2 + \int_{DA}\omega_2 = \Big[\,2y\,\Big]_1^2 + \Big[\,y\,\Big]_2^1.$$

◊ **Trả lời :** 1.

h) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, trong đó $\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}(x^3-y^3)\right)$, và $\omega_2 = y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$.

Do (C) đóng : $\displaystyle\int_{(C)}\omega_1 = 0$, và do đó $\displaystyle\int_{(C)}\omega = \int_{(C)}\omega_2 = \int_1^0\left((1-x^2)^2 - x^2\right)\mathrm{d}x.$

◊ **Trả lời :** 0.

i) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, trong đó $\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3\right)$, và $\omega_2 = 2y^2\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y$, do đó

$$\int_{(C)}\omega = \int_{(C)}\omega_2 = \int_1^2 5x^2\mathrm{d}x + \int_2^1\left(2(4-x)^2 - (x^2+2x(4-x))\right)\mathrm{d}x + \int_3^1(1+2y)\,\mathrm{d}y.$$

◊ **Trả lời :** $-\frac{4}{3}$.

j) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, trong đó $\omega_1 = \mathrm{d}F$, $F : (x, y) \mapsto e^x\cos y$ và $\omega_2 = xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$.

- $\displaystyle\int_{(C)}\omega_1 = F(0, 0) - F(1, 0) = 1 - e.$

- Trên (C) : $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = y^2\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = (\rho^2\sin^2\theta)\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$, suy ra

$$\int_{(C)}\omega_2 = \int_0^{\pi/4}(\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta)(\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta)(-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\theta\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \Big[\frac{1}{12}\cos^3 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{12}.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{11}{12} - e$.

13.1.3 Với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, khảo sát sự biến thiên của ánh xạ $[0; 1] \to \mathbb{R}$

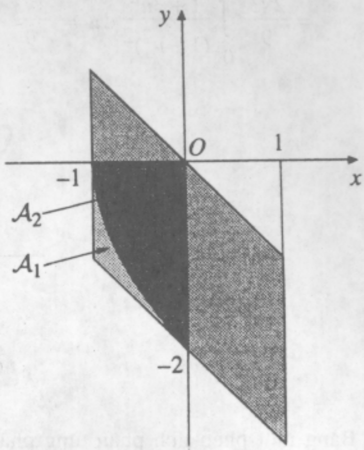
$$t \mapsto |x + yt + t^2|.$$

Suy ra rằng D bị giới hạn bởi các đường thẳng có phương trình là :

$x + y = 0$, $x + y = -2$, $x = -1$, $x = 1$, và đường parabol có phương trình $x = -1 + \frac{y^2}{4}$

Ta có : $\mathcal{A}(D) = 4 - \mathcal{A}_1$, rồi $\mathcal{A}_1 = 2 - \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2}$ (xem hình lược đồ). Cuối cùng :

$\mathcal{A}_2 = -\int_{-2}^{0}\left(-1 + \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{4}{3}$. Trong trường hợp này ta có thể không sử dụng tích phân đường.



◊ **Trả lời :** $\frac{23}{6}$.

b) $\mathcal{A} = \int_{(C)} x\,dy =$

$$= \int_{-1}^{0}(t^2 + t^3)(2t + 3t^2 - 8t^3 - 10t^4)\,dt.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{84}$.

c) Vẽ đường cong giới hạn D.

$$\mathcal{A}(D) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,(1 + \sin t)\,2\cos t\sin t\,dt = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + \sin t)\sin t\cos^2 t\,dt$$

$$= \left[-\frac{4}{3}\cos^3 t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{2}$.

d) $$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{(C)}\rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\left(4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi/4}(1 - \cos 2\theta)\,d\theta + \left[\tan\theta\right]_0^{\pi/4}.$$

◊ **Trả lời :** $2 - \frac{\pi}{2}$.

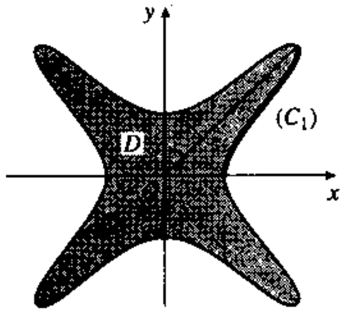
e) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{(C)}\rho^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta$; hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{3}$.

f) $$\mathcal{A} = 8\,\frac{1}{2}\int_{(C_1)}\rho^2\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2 + \cos 4\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{(2 + \cos\varphi)^2}\,d\varphi = \int_0^{+\infty}\frac{2(1 + t^2)}{(3 + t^2)^2}\,dt$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\int_0^{+\infty}\frac{1+3u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \frac{2\sqrt{3}}{9}\,(3I_1 - 2I_2), \text{ trong đó } I_n = \int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$



Bằng một phép tích phân từng phần, chứng tỏ rằng $I_2 = \frac{1}{2}I_1$.

◊ **Trả lời :** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \approx 1{,}209$.

g) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{(C)}\rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta - \sin^3\theta)^2\,d\theta$; khai triển rồi tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $\frac{5\pi}{16}$.

h) $\mathcal{A} = 2\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 d\theta = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1-t^2}{2t^2}\right)^2\frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{(1-t^2)^2}{t^4(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^4} - \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^2+1}\right)dt.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{3\pi - 8}{6}$.

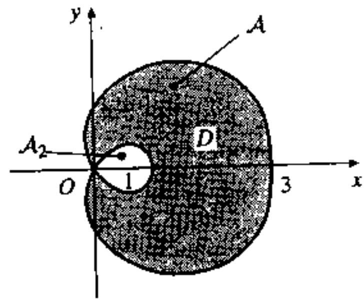
i) Vẽ đường cong.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}(1+t)^2\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \Big[\, t + \ln(1+t^2)\,\Big]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}.$$

◊ **Trả lời :** $2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}-1)$.

j) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$, trong đó

$$\mathcal{A}_1 = \int_{\pi/3}^{\pi}\rho^2\,d\theta \text{ và } \mathcal{A}_2 = \int_0^{\pi/3}\rho^2\,d\theta.$$



• $\mathcal{A}_1 = \int_{\pi/3}^{\pi}(2\cos\theta - 1)^2\,d\theta$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} (3 - 4\cos\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

• Tương tự : $\mathcal{A}_2 = \pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

◊ **Trả lời** : $\pi + 3\sqrt{3} \approx 8{,}338$.

13.2.1 a) $I = \iint\limits_D x\sin x \sin y\, dx dy + \iint\limits_D y\sin x \sin y\, dx dy$

$$= 2\left(\int_0^{\pi} x\sin x\, dx\right)\left(\int_0^{\pi} \sin x\, dx\right).$$

◊ **Trả lời** : 4π.

b) $I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} xy(x+y)dy \Big) dx = \int_0^1 x\Big[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\Big(\frac{x(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3}\Big) dx$

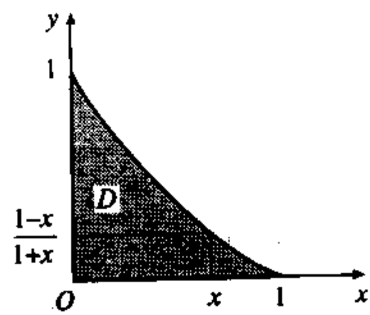
◊ **Trả lời** : $\dfrac{1}{30}$.

c) $I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \ln(1+x+y)\, dy \Big) dx$; áp dụng các phép tích phân từng phần.

◊ **Trả lời** : $\dfrac{1}{4}$.

d) $I = \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy dy \Big) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x \Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^2 dx$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)(t-2)^2}{t^2} dt.$$

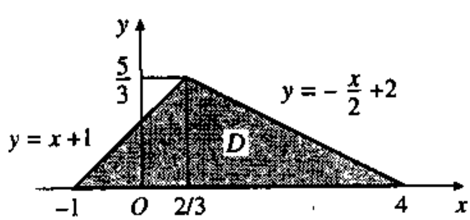


◊ **Trả lời** : $4\ln 2 - \dfrac{11}{4}$.

e) $I = \int_1^3 \Big(\int_1^{4-x} \frac{dy}{(x+y)^4} \Big) dx = \int_1^3 \Big[-\frac{1}{3}(x+y)^{-3} \Big]_1^{4-x} dx = \frac{1}{3} \int_1^3 \Big(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{4^3} \Big) dx.$

◊ **Trả lời** : $\dfrac{1}{48}$.

f) $I = \int_{-1}^{2/3} \Big(\int_0^{x+1} dy \Big) x dx + \int_{2/3}^{4} \Big(\int_0^{-\frac{x}{2}+2} dy \Big) x dx$



$$= \int_{-1}^{2/3} x(x+1)\mathrm{d}x + \int_{2/3}^{4} x\left(-\frac{x}{2}+2\right)\mathrm{d}x.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{275}{54}$.

g) $I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \ln(1+x^2+y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x;$

trong trường hợp này hãy áp dụng các phép tích phân từng phần.

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{8}{9} - \frac{\pi}{3}$.

h) $I = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x(x-x^4)\mathrm{d}x.$

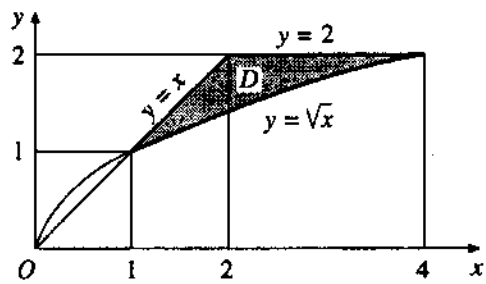
◊ **Trả lời :** $\frac{1}{12}$.

13.2.2 Ký hiệu biểu thức cần tính là I :

$I = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (xem lược đồ).

$= \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ (định lí Fubini)

$= \int_1^2 \left[-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y} \right]_y^{y^2} \mathrm{d}y$



$= -\int_1^2 \frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\,\mathrm{d}y = -\frac{8}{\pi^3}\int_{\pi/2}^{\pi} z\cos z\,\mathrm{d}z$, rồi tích phân từng phần.

◊ **Trả lời :** $\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$.

13.2.3 a) Chú ý rằng : $\forall x \in \mathrm{R}_+, g_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\mathrm{d}t$, và suy ra g_λ thuộc lớp C^1 trên R_+.

b) Ta có thể giả thiết $\lambda \neq \mu$. Với mọi f thuộc E và mọi x thuộc R_+, ta có :

$$\left((T_\lambda \circ T_\mu)(f)\right)(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(t-x)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\mu(u-t)} f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$$

$= \iint\limits_D \mathrm{e}^{\lambda(t-x)+\mu(u-t)} f(u)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$, trong đó $D = \{(t, u) \in \mathrm{R}^2;\ 0 \le t \le x,\ 0 \le u \le t\}$.

Áp dụng định lý Fubini :

$$\Big((T_\lambda \circ T_\mu)(f)\Big)(x) = \int_0^x \Big(\int_u^x e^{\lambda(t-x)+\mu(u-t)}\, f(u)\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^x e^{\mu u - \lambda x} \Big(\int_u^x e^{(\lambda-\mu)t}\,\mathrm{d}t\Big) f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu} \int_0^x e^{\mu u - \lambda x} \Big(e^{(\lambda-\mu)x} - e^{(\lambda-\mu)u}\Big) f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu} \int_0^x \Big(e^{\mu(u-x)} - e^{\lambda(u-x)}\Big) f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu} \Big((T_\mu(f))(x) - (T_\lambda(f))(x)\Big).$$

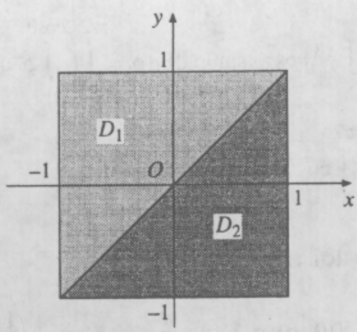
13.2.4 a) D đối xứng với $(x'x)$ và : $\forall(x, y) \in D, f(x, -y) = -f(x, y)$.

◊ **Trả lời :** 0.

b) D đối xứng đối với $(y'y)$ và : $\forall(x, y) \in D, f(-x, y) = -f(x, y)$.

◊ **Trả lời :** 0.

c) $I = \iint\limits_{D_1} f + \iint\limits_{D_2} f$ (xem lược đồ) và



$\iint\limits_{D_2} f = \iint\limits_{D_1} f$ bằng phép đổi biến.

$(x, y) \mapsto (y, x)$.

Vậy $I = 2 \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(\int_x^1 (y-x)\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - 2x + x^2)\mathrm{d}x.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{8}{3}$.

Trong các thí dụ từ d) đến q), chuyển sang tọa độ cực hay eliptic ($x = a\rho\cos\theta$; $y = b\rho\sin\theta$).

d) Với $\Delta = \Big[0\,;\,\frac{\pi}{4}\Big] \times [0; 1]$:

$$I = \iint\limits_{\Delta} \rho^3 \cos\theta \sin\theta\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \Big(\int_0^{\pi/4} \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^1 \rho^4\,\mathrm{d}\rho\Big).$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{20}$.

e) $\Delta = \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \times [1\,;\,2]$, $I = \iint_{\Delta} \cos\theta \sin\theta\, \rho d\theta\, d\rho = \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho d\rho\right)$.

◊ **Trả lời :** $\frac{3}{4}$.

f) $\Delta = [0;\,2\pi] \times [0;\,1]$, $I = \iint_{\Delta} ((a\rho\cos\theta)^2 + (b\rho\sin\theta)^2)\, ab\rho d\theta d\rho$

$$= ab\left(\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right).$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

g) $I = ab\left(\int_0^{\pi/2} (a^3\cos^3\theta + b^3\sin^3\theta)\, d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4\, d\rho\right)$; hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{15}\, ab(a^3 + b^3)$.

h) $\Delta = \{(\theta;\,\rho) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$,

$$I = \iint_{\Delta} \rho^3 \cos^2\theta \sin\theta\rho\, d\theta d\rho = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^4 d\rho\right) \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^7\theta \sin\theta\, d\theta.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{4}{5}$.

i) $\Delta = \{(\theta,\,\rho) \in \mathbb{R}^2;\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\cos\theta} \le \rho \le 2\cos\theta\}$,

$$I = \iint_{\Delta} \frac{1}{\rho^3} d\theta\, d\rho = 2\int_0^{\pi/4}\left(\int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta} \frac{1}{\rho^3} d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{4\cos^2\theta}\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\theta)\, d\theta - \frac{1}{4}\Big[\tan\theta\Big]_0^{\pi/4}.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{8}$.

j) $\Delta = \{(\theta,\,\rho) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6},\ 2\sin\theta \le \rho \le 1\}$,

$$I = \int_0^{\pi/6} \Big(\int_{2\sin\theta}^{1} \rho^2 d\rho \Big) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/6} (1 - 8\sin^3\theta) d\theta;$$ hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{18} - \frac{16}{9} + \sqrt{3}$.

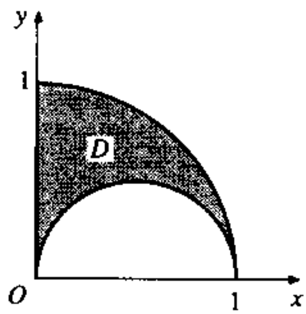
k) $$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\theta \right) (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta;$$ hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** π.

l) $$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - \rho^2}\, \rho d\rho \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^3 - (R^2\sin^2\theta)^{3/2})\, d\theta$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin^3\theta|) d\theta = \frac{2R^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3\theta) d\theta.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{3\pi - 4}{9} R^3$.



m) $$I = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_{\cos\theta}^{1} \rho^2 d\rho \Big) (\cos\theta + \sin\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\theta)(\cos\theta + \sin\theta) d\theta.$$

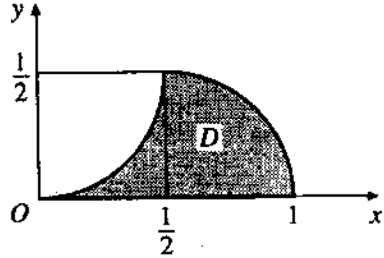
◊ **Trả lời :** $\frac{7}{12} - \frac{\pi}{16}$.

n) Bằng các phép đổi biến $(x, y) \mapsto (-x, y)$ và $(x, y) \mapsto (x, -y)$, ta có :
$I = 4 \iint_{D_1} f$, trong đó $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Sau đó thì : $$I = 4 \int_0^{\pi/2} \Big(\int_{\cos\theta}^{1} \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} d\rho \Big) d\theta = \int_0^{\pi/2} \Big(-1 + \frac{2}{1 + \cos^2\theta} \Big) d\theta$$

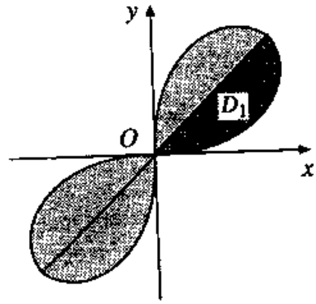
$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2 + t^2)(1 + t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{2}{2 + t^2} - \frac{1}{1 + t^2} \Big) dt.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2} - 1)$.



o) $$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (\cos^4\theta - \sin^4\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta = \Big[\frac{\sin 2\theta}{8} \Big]_0^{\pi/4}$$



◊ **Trả lời :** $\frac{1}{8}$.

p) $I = 4 \iint_{D_1} f$ (xem lược đồ)

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} \sqrt{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}\, \rho d\rho \right) d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} (\sqrt{\sin 2\theta})^3 \sqrt{\cos\theta \sin\theta}\, d\theta = \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta\, d\theta.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

q) $I = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{\cos\theta}} \rho^3\, d\rho \right) \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta.$

◊ **Trả lời :** $\frac{3\pi}{16}$.

r) Áp dụng phép đổi biến số $u = x + y$, $v = x - y$:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} \frac{1}{2} u^2 e^{uv}\, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(ue^{u^2} - ue^{-u^2} \right) du = \frac{1}{4} \left[e^{u^2} + e^{-u^2} \right]_0^1 .$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{4}(e + e^{-1} - 2) \left(= \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \right)$.

s) Áp dụng phép đổi biến số $u = x + y$, $v = x - y$:

$$I = \int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{u^2-4}}^{0} \frac{1}{2} uv \cos \frac{u^2 - v^2}{4}\, dv \right) du = - \int_2^4 u \left[\sin \frac{u^2 - v^2}{4} \right]_{-\sqrt{u^2-u}}^{0} du$$

$$= - \int_2^4 u \left(\sin \frac{u^2}{4} - \sin 1 \right) du.$$

◊ **Trả lời :** $2\cos 4 - 2\cos 1 + 6\sin 1$.

t) Áp dụng phép đổi biến số $X = x^{3/2}$, $Y = y^{3/2}$ ($\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ X \geq 0,\ Y \geq 0,$ $X^2 + Y^2 \leq 1\}$), sau đó chuyển sang tọa độ cực ($\Delta_1 = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1\}$:

$$I = \iint_\Delta X^{4/3}\ Y^{4/3} \sqrt[3]{1 - (X^2 + Y^2)}\ \frac{4}{9} X^{-1/3} Y^{-1/3}\, dX dY$$

$$= \frac{4}{9} \iint_{\Delta_1} \rho^2 \cos\theta \sin\theta\ \sqrt[3]{1 - \rho^2}\ \rho d\theta\, d\rho$$

$$= \frac{4}{9} \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^1 \sqrt[3]{1 - \rho^2}\ \rho^3 d\rho \right).$$

Để tính tích phân cuối cung, đặt $u = \sqrt[3]{1-\rho^2}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{28}$.

u) Áp dụng phép đổi biến số $x = \rho\cos^3\theta$, $y = \rho\sin^3\theta$,

$$(\Delta = \{(\theta,\ \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 1\}) :$$

$$I = \iint_\Delta \rho^2\cos^3\theta\sin^3\theta\,(3\rho\sin^2\theta\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = 3\Big(\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin^5\theta\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\Big)$$

$$= \frac{3}{128}\int_0^{\pi/2}\sin^5 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{256}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{80}$.

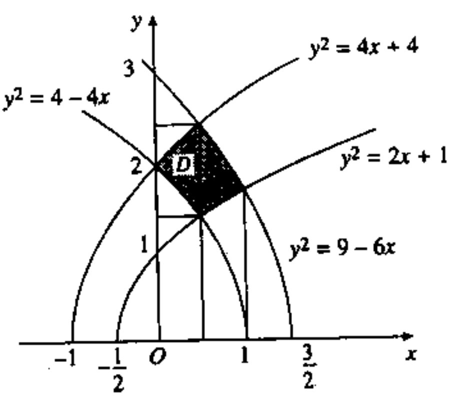
v) $\Delta = \{(u,\ v) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \le u \le \big(2p\big)^{1/3},\ 0 \le v \le \big(2p\big)^{1/3}\}$,

$$I = \iint_\Delta \Big(\exp\frac{u^6v^3+u^3v^6}{u^3v^3}\Big)(3u^2v^2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 3\iint_\Delta e^{u^3}e^{v^3}u^2v^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\Big(\int_0^{(2p)^{1/3}}e^{u^3}3u^2\mathrm{d}u\Big)^2.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{3}(e^{2p}-1)^2$.

w) $\Delta = [a;\ b] \times [0;\ 1]$, $I = \iint_\Delta v\sqrt{4u^2+v^2}\ \frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\Big(\int_a^b\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_0^1 v\mathrm{d}v\Big)$.

◊ **Trả lời :** $\frac{b-a}{4}$.



13.2.5 Ta được :

$$\begin{cases} y^2 \le 4x+4 \\ y^2 \ge 2x+1 \\ y^2 \le 9-6x \\ y^2 \ge 4-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 \le 1 \\ v^2 \ge \frac{1}{2} \\ u^2 \le \frac{3}{2} \\ u^2 \ge 1 \end{cases}$$

do đó, với ký hiệu $\Delta = \Big[\,1\ ;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big] \times \Big[\,\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 1\,\Big]$;

$$I = \iint_\Delta \frac{2uv}{\sqrt{(u^2-v^2)^2+(2uv)^2}}\ 4(u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8\iint_\Delta uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8\Big(\int_1^{\sqrt{3/2}}u\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_{1/\sqrt{2}}^{1}v\mathrm{d}v\Big).$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{2}$.

13.2.6 Ta có : $ax^2 + 2bxy + cy^2 \le A \Leftrightarrow \left(\dfrac{ax+by}{\sqrt{aA}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{aA}}\,y\right)^2 \le 1.$

Thực hiện phép đổi biến số $X = \dfrac{ax+by}{\sqrt{aA}}$, $Y = \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{aA}}\,y$, rồi chuyển qua tọa độ cực.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}(1 - e^{-A})$.

13.2.7 Do tính đối xứng của D (đối với đường phân giác thứ 1) và tính chẵn của f, nếu kí hiệu $D_1 = \{(x, y) \in [0; a]^2 ; x \ge y\}$ thì ta có :

$$-\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Sau đó thực hiện phép đổi biến số $X = x$, $Y = x-y$ (trong đó D_1 bất biến) :

$$\iint_{D_1} f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(Y)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y = \int_0^a\Big(\int_Y^a \mathrm{d}X\Big)f(Y)\mathrm{d}Y = \int_0^a (a-Y)(f(Y)\mathrm{d}y.$$

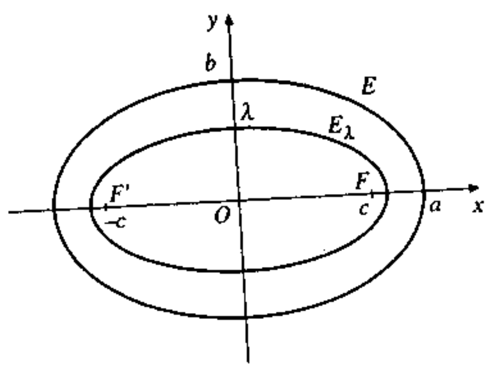
13.2.8 Với mỗi λ thuộc $[0; b]$, một biểu diễn tham số của đường elip E_λ, với các tiêu điểm là F, F' và nửa trục nhỏ λ là :

$$\begin{cases} x = \sqrt{c^2+\lambda^2}\cos\varphi \\ y = \lambda\sin\varphi \end{cases},\ \varphi \in [0; 2\pi].$$

Với mọi điểm M thuộc E_λ, ta có

$$MF + MF' = 2\sqrt{c^2+\lambda^2}.$$

Ánh xạ $(\lambda, \varphi) \mapsto (x, y)$ xác định trên dãy xác định một phép đổi biến, với định thức Jacobi là :



$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{\sqrt{c^2+\lambda^2}}\cos\varphi & -\sqrt{c^2+\lambda^2}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{c^2+\lambda^2}}\cos^2\varphi + \sqrt{c^2+\lambda^2}\sin^2\varphi.$$

Suy ra :

$$I = \iint_{[0\,;\,b]\times[0;\,2\pi]} 2\sqrt{c^2+\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{c^2+\lambda^2}}\cos^2\varphi + \sqrt{c^2+\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\lambda$$

$$= 2\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^b \lambda^2\mathrm{d}\lambda\right) + 2\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^b (c^2+\lambda^2)\,\mathrm{d}\lambda\right).$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2\pi}{3}b(2b^2 + 3c^2)$.

13.2.9 Với ký hiệu $P = uv$ và theo công thức Green–Riemann :

$$-\int_{(C)} P\mathrm{d}x = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \Big(\frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

13.3.1 a) $I = \int_0^1 \Big(\int_0^1\Big(\int_0^1 x^2 y e^{xyz}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_0^1\Big(\int_0^1 x(e^{xy}-1)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 (e^x - x - 1)\mathrm{d}x.$$

◊ **Trả lời :** $e - \frac{5}{2}$.

b) $I = \int_0^1 z\Big(\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z$, trong đó $D(z) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1 - \sqrt{z}\}$.

Ta có :

$$\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{(1-\sqrt{z})^2}\left(\int_0^{(1-\sqrt{z}-\sqrt{x})^2} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{(1-\sqrt{z})^2}(1-\sqrt{z}-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(1-\sqrt{z})^4.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{840}$.

Trong các thí dụ từ c) đến f), chuyển sang tọa độ trụ.

c) ◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{3}$.

d) ◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{24}$.

e) $I = \Big(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\Big)\int_{-R}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}\right)\mathrm{d}z = 2\pi\int_{-R}^{R}\Big[\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}\Big]_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z =$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-2az+a^2} - a + z\right)\mathrm{d}z.$$

Áp dụng phép đổi biến $u = \sqrt{R^2-2az+a^2}$.

◊ **Trả lời :** $\frac{4\pi R^3}{3a}$.

f) $I = \left(\int_0^1 \mathrm{d}z\right)\left(\iint_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$, trong đó $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-y \le 0\}$.

Cuối cùng làm như ở bài tập 13.2.4 n).

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\pi$.

Trong các thí dụ từ g) đến n), chuyển sang tọa độ cầu, hay "elipxôit".

g) $$I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi\right).$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{8\pi}{15}$.

h) $I = J + 2K$, trong đó $J = \iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $K = \iiint\limits_D (xy+xz+yz)\,dx\,dy\,dz$.

- Để tính J, chuyển sang tọa độ cầu :

$$J = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\right) = \frac{4}{5}\pi R^5.$$

- Với K, các phép đổi biến $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$, $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ cho ta :

$$K = \iiint\limits_D (-xy - xz + yz)\,dx\,dy\,dz,$$

$$K = \iiint\limits_D (-xy + xz - yz)\,dx\,dy\,dz,$$

$$K = \iiint\limits_D (xy - xz - yz)\,dx\,dy\,dz.$$

Cộng lại thì suy ra $4K = 0$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{4}{5}\pi R^5$.

i) Trong hệ tọa độ elipxôit :

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad \left(\theta \in [0; 2\pi],\ \rho \in [1; 2],\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right), \\ z = c\rho\sin\varphi \end{cases}$$

giá trị tuyệt đối của định thức Jacobi bằng $abc\rho^2\cos\varphi$, do đó :

$$I = \iiint\limits_{[0;2\pi]\times[1;2]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} \rho^2(a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)abc\rho^2\cos\varphi\, d\theta\, d\rho\, d\varphi$$

$$= abc\ a^2\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi\right) + b^2\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi\right) +$$

$$+ \left(2\pi c^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_1^2 \rho^4\, d\rho\right).$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{124}{15}\pi\, abc\,(a^2+b^2+c^2)$.

j) ◊ **Trả lời** : $\frac{1}{48}(abc)^2$.

k) Xem h).

◊ **Trả lời** : $\frac{2\pi}{15}$.

l) ◊ **Trả lời** : $\frac{16\pi(11\sqrt{2}-4)}{105}$.

m) ◊ **Trả lời** : $\frac{1}{3}2\pi(10-3\pi)$.

n) $\begin{cases} x^2+y^2 \le z^2 \\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ \rho^2\cos^2\varphi \le \rho^2\sin^2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$, suy ra :

$$I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right).$$

◊ **Trả lời** : $\frac{\pi}{8}$.

o) Do $x = u - uv$, $y = uv - uvw$, $z = uvw$, nên định thức Jacobi bằng

$$\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2v.$$

Ta thay miền D bằng $\Delta = [0;1]^3$, do đó :

$$I = \iiint_\Delta (u(1-v))(uv(1-w))(uvw)u^2v\,du\,dv\,dw =$$

$$= \left(\int_0^1 u^5 du\right)\left(\int_0^1 v^3(1-v)dv\right)\left(\int_0^1 w(1-w)\,dw\right).$$

◊ **Trả lời** : $\frac{1}{720}$.

p) $I = \iiint_\Delta \frac{u^2v}{(1+uv)^2}\,du\,dv\,dw = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{u^2v}{(1+uv)^2}\,dv\right)du =$

$$= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\frac{u}{1+uv} - \frac{u}{(1+uv)^2}\right)dv\right)du = \int_0^1\left(\ln(1+u) + \frac{1}{1+u} - 1\right)du.$$

◊ **Trả lời** : $3\ln 2 - 2$.

q) Áp dụng phép đổi biến afin $X = \frac{ax}{d}$, $Y = \frac{by}{d}$, $z = \frac{cz}{d}$, sau đó là phép đổi biến ở o).

◊ **Trả lời** : $\frac{4\pi}{945}\left(\frac{d^3}{abc}\right)^{3/2}$.

13.3.2 Ký hiệu $\varphi_1(x, y) = \int_a^b |f_2(x, z) f_3(y, z)| \mathrm{d}z$; áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz được :

$$I^2 = \left(\iint_D \varphi_1(x, y) f_1(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^2 \le K_1 J_1,$$

trong đó $K_1 = \iint_D (\varphi_1(x, y))^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Sau đó lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schawarz :

$$\left(\varphi_1(x, y) \right)^2 \le \left(\int_a^b (f_2(x, z))^2 \mathrm{d}z \right)\left(\int_a^b (f_3(y, z))^2 \mathrm{d}z \right), \text{ suy ra :}$$

$$K_1 \le \iint_D \left(\int_a^b (f_2(x, z))^2 \mathrm{d}z \right) \left(\int_a^b (f_3(y, z))^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\int_a^b \left(\int_a^b (f_2(x, z))^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b \left(\int_a^b (f_3(y, z))^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) = J_2 J_3.$$

13.4.1 a) $\mu = \int_C \sigma \mathrm{d}s = \int_0^a \frac{x^2}{a^2} \mathrm{d}x$.

◊ **Trả lời** : $\frac{a}{3}$.

b) $\mu = \int_C \sigma \,\mathrm{d}s = \int_0^\pi \frac{R\sin\theta}{R} R\mathrm{d}\theta$.

◊ **Trả lời** : $2R$.

13.4.2 a) $\mu = \iint_D \sigma \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0;\, 2\pi] \times [0;\, R]} \frac{\rho^2}{R^2} \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \frac{1}{R^2} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right)\left(\int_0^R \rho^3 \mathrm{d}\rho \right)$.

◊ **Trả lời** : $\frac{\pi R^2}{2}$.

b) $\mu = \iint_D \sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0;\, 2\pi] \times [0;\, R]} \frac{\rho\sin\theta + R}{R} \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho =$

$$= \frac{1}{R} \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \right)\left(\int_0^R \rho^2 \mathrm{d}\rho \right) + \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^R \rho \mathrm{d}\rho \right).$$

◊ **Trả lời :** πR^2.

13.4.3 a) Chuyển sang tọa độ cầu ($\Delta = [0;\, 2\pi] \times [0;\, R] \times \left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right]$) :

$$\mu = \iiint\limits_S \left(D + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}(d-D)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_\Delta \left(D + \frac{\rho}{R}(d-D)\right)\rho^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \left(D + \frac{\rho}{R}(d-D)\right)\rho^2\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{3}\pi R^3(3d+D)$.

b) Chuyển sang tọa độ trụ ($\Delta = [0;\, 2\pi] \times [0;\, R] \times [0;\, h]$):

$$\mu = \iiint\limits_\Delta \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{1/2}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = 2\pi h\int_0^R \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{1/2}\rho\mathrm{d}\rho.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi R^2 h$.

c) ◊ **Trả lời :** $\frac{4\pi}{5}\lambda abc(a^2+b^2+c^2)$.

d) Chuyển sang tọa độ trụ ($\Delta = \{(\theta, \rho, z) \in \mathbb{R}^3;\, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le \rho \le 2a\cos\theta,$
$-k\rho \le z \le k\rho$) :

$$\mu = \sigma\iiint\limits_\Delta \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = \sigma\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\theta}\left(\int_{-k\rho}^{k\rho}\rho\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \sigma\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\theta} 2k\rho^2\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{16k\sigma a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

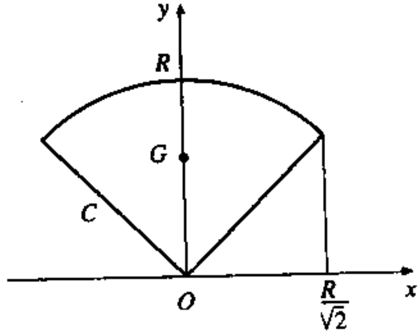
◊ **Trả lời :** $\frac{64}{9}k\sigma a^3$.

13.4.4

a) • $\mu = \left(R + R + \frac{\pi R}{2}\right)\sigma = \frac{4+\pi}{2}R\sigma$

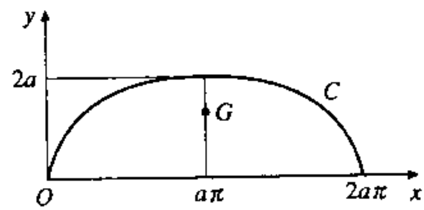
• $x_G = 0$ và $y_G = \frac{\sigma}{\mu}\int y\mathrm{d}s$

$$= \frac{\sigma}{\mu}\left(\int_{OA} y\mathrm{d}s + \int_{AB} y\mathrm{d}s + \int_{BO} y\mathrm{d}s\right)$$



$$= \frac{\sigma}{\mu}\left(2\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} y\sqrt{2}\,\mathrm{d}y + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} R\sin t\, R\,\mathrm{d}t\right).$$

◊ **Trả lời :** $x_G = 0,\ y_G = \dfrac{3R\sqrt{2}}{4+\pi}$.



b) • Do đối xứng có $x_G = a\pi$.

• $\mu = \int_C \sigma\mathrm{d}s$ và $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 =$

$= 2a^2(1-\cos t)(\mathrm{d}t)^2$, suy ra $\mathrm{d}s = 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

$$\mu = \sigma\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8a\sigma.$$

• $\dfrac{\mu}{\sigma}y_G = \displaystyle\int_C y\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$

◊ **Trả lời :** $x_G = \pi a;\ y_G = \dfrac{4}{3}a.$

c) • $\mu = \displaystyle\int_C \sigma\mathrm{d}s = \int_0^a \sigma\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}t = \sigma a\sqrt{r^2+h^2}.$

• $\dfrac{\mu}{\sigma}x_G = \displaystyle\int_C x\mathrm{d}s = \int_0^a r\cos t\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}t = r\sqrt{r^2+h^2}\sin a.$

• $\dfrac{\mu}{\sigma}y_G = \displaystyle\int_C y\mathrm{d}s = \int_0^a r\sin t\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}t = r\sqrt{r^2+h^2}\,(1-\cos a).$

• $\dfrac{\mu}{\sigma}z_G = \displaystyle\int_C z\mathrm{d}s = \int_0^a ht\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}h\sqrt{r^2+h^2}\,a^2.$

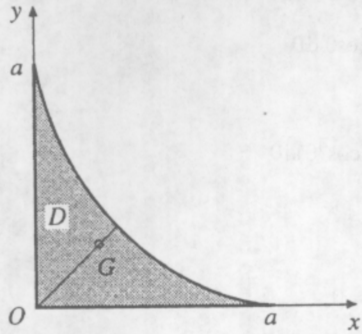
◊ **Trả lời :** $x_G = r\dfrac{\sin a}{a},\ y_G = r\dfrac{1-\cos a}{a},\ z_G = \dfrac{ha}{2}.$

13.4.5 a) D giới hạn bởi $x'x$, $y'y$ và phần tư đường astrôit C có biểu diễn tham số là :

$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Sử dụng định lý Green–Riemann:

• $\mu = \displaystyle\iint_D \sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma\int_C x\mathrm{d}y = \sigma\int_0^{\pi/2} a\cos^3 t + 3a\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = 3a^2\sigma A$, trong đó

$$A = \int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$



Phép đổi biến $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ cho ta $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 u \cos^2 u \,\mathrm{d}u$, suy ra :

$$2A = \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{16}, \text{ và do đó } \mu = \frac{3a^2\sigma\pi}{32}.$$

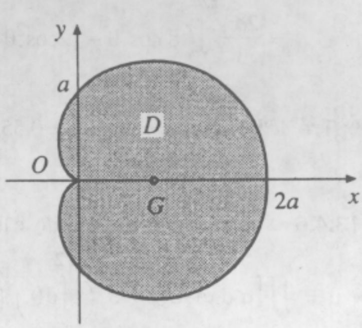
- $x_G = y_G$ do đối xứng.

- $\dfrac{\mu}{\sigma} x_G = \displaystyle\iint_D x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_C \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^6 t \, 3a \sin^2 t \cos t \,\mathrm{d}t$

$$= \frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^7 t \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{3a^3}{2}\int_0^1 (1-u^2)^3 u^2 \mathrm{d}u.$$

◊ **Trả lời :** $x_G = y_G = \dfrac{256}{315\pi} a \approx 0{,}259a.$

b) Do đối xứng và chuyển sang tọa độ cực :



- $\mu = \sigma \displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\sigma \int_0^{\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho \mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$

$$= a^2 \sigma \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi a^2 \sigma.$$

- $y_G = 0.$

- $\dfrac{\mu}{\sigma} x_G = \displaystyle\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^2 \mathrm{d}\rho\right)\cos\theta \,\mathrm{d}\theta$

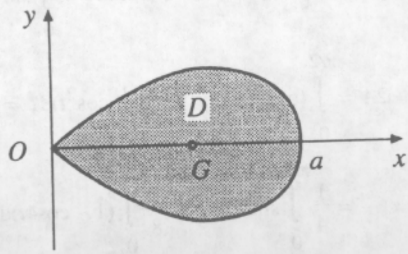
$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^3 \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\pi} (3\cos^2\theta + \cos^4\theta) d\theta$$

và hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $x_G = \frac{5}{6} a$, $y_G = 0$.

c) Chuyển sang tọa độ cực.



- $\mu = 2\sigma \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{a(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta})} \rho d\rho \right) d\theta$

$$= a^2\sigma \int_0^{\pi/4} \left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta} \right)^2 d\theta$$

$$= a^2\sigma \int_0^{\pi/4} \left(2(1+\cos 2\theta) - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta} \right) d\theta$$

$$= \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) a^2\sigma.$$

- $y_G = 0$.

- $\frac{\mu}{\sigma} x_G = 2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{a(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta})} \rho^2 d\rho \right) \cos\theta d\theta = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\pi/4} \left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta} \right)^3 \cos\theta d\theta$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \left(8\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 6 - \frac{1}{\cos^2\theta} \right) d\theta,$$ và hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $x_G = \frac{3\pi - 8}{3(4-\pi)} a \approx 0{,}553a$, $y_G = 0$.

13.4.6 a) Chuyển sang tọa độ cầu.

- $\mu = \iiint_S \sigma \, dx dy dz = \sigma \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \right) = \frac{\pi}{6} \sigma.$

- $x_G = y_G = z_G$ do đối xứng.

- $\frac{\mu}{\sigma} x_G = \iiint_S x \, dx dy dz = \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi \right) = \frac{\pi}{16}.$

◊ **Trả lời :** $x_G = y_G = z_G = \frac{3}{8}$.

b) Chuyển sang tọa độ trụ.

• $\mu = \sigma\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^h\left(\int_0^{\sqrt{2pz}} \rho d\rho\right)dz\right) = 2\pi\sigma\int_0^h pz dz = \pi\sigma p h^2$.

• $x_G = y_G = 0$ do đối xứng.

• $\frac{\mu}{\sigma} z_G = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^h\left(\int_0^{\sqrt{2pz}} \rho d\rho\right) z dz\right) = 2\pi\int_0^h pz^2 dz = \frac{2}{3}\pi p h^3$.

◊ **Trả lời :** $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{2}{3}h$.

13.4.7 Ta có : $(ds)^2 = \left(a^2(2-2\cos t) + 4b^2\sin^2\frac{t}{2}\right)(dt)^2 = 4c^2\sin^2\frac{t}{2}(dt)^2$ trong đó ta ký hiệu $\sqrt{a^2+b^2} = c$.

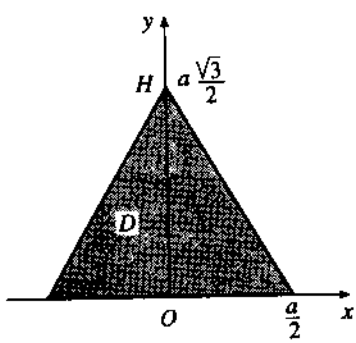
Suy ra : $I_{xOy} = \int_C \sigma z^2 ds = \sigma\int_0^{2\pi} 16b^2\cos^2\frac{t}{2}\, 2c\sin\frac{t}{2}\, dt = 32\, b^2 c\,\sigma\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\, dt$.

◊ **Trả lời :** $\frac{128}{3} b^2\sqrt{a^2+b^2}\,\sigma$.

13.4.8 a) $I_H = \sigma\iint_D\left(x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)dxdy$

$$= 2\sigma\int_0^{a/2}\left(\int_0^{\sqrt{3}(\frac{a}{2}-x)}\left(x^2 + \left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)dy\right)dx$$

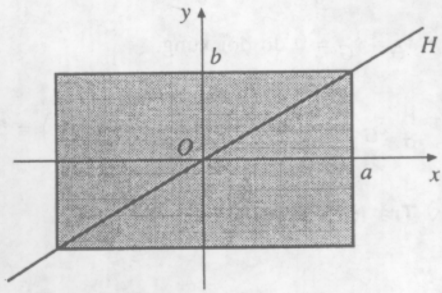
$$= 2\sigma\int_0^{a/2}\left(\sqrt{3}\left(\frac{a}{2}-x\right)^3 - \frac{3a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)^2 + \left(x^2+\frac{3a^2}{4}\right)\sqrt{3}\left(\frac{a}{2}-x\right)\right)dx$$



$$= 2\sigma \int_0^{a/2} \left(\sqrt{3}u^3 - \frac{3a\sqrt{3}}{2} u^2 + \left(\left(\frac{a}{2} - u \right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right) \sqrt{3}u \right) du$$

$$= 2\sigma \int_0^{a/2} \left(2\sqrt{3}\, u^3 - \frac{5a\sqrt{3}}{2} u^2 + a^2 \sqrt{3}\, u \right) du.$$

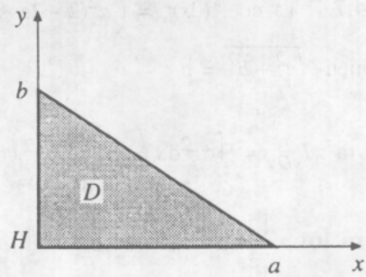
◊ **Trả lời :** $\frac{5\sqrt{3}}{48} a^4\sigma.$



b) $I_H = \iint\limits_D \sigma \, \frac{(bx - ay)^2}{a^2 + b^2} \, dx dy$

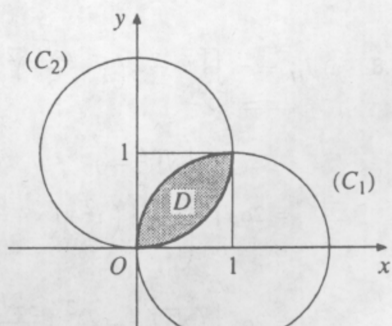
$$= \frac{\sigma}{a^2 + b^2} \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b}^{b} (bx - ay)^2 \, dy \right) dx..$$

◊ **Trả lời :** $\frac{8}{3} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \sigma.$



c) $I_O = \sigma \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (x^2 + y^2) dy \right) dx.$

◊ **Trả lời :** $\frac{1}{12} ab\,(a^2 + b^2)\,\sigma.$



d) Chuyển sang tọa độ cực :

$\Delta_1 = \{(\theta; \rho) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \rho \le 2\sin\theta\}$

$\Delta_2 = \{(\theta; \rho) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$

$$I_{x'x} = \iint\limits_D \sigma\, y^2 \, dx dy = \sigma \iint\limits_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \rho^3 \sin^2\theta \, d\theta d\rho$$

$$= \sigma \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\sin\theta} \rho^3 d\rho \right) \sin^2\theta \, d\theta + \sigma \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \, d\rho \right) \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= 4\sigma \left(\int_0^{\pi/4} \sin^6\theta \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\theta \sin^2\theta \, d\theta \right)$$

$$= 4\sigma \left(\int_0^{\pi/4} \sin^6\theta \, d\theta + \int_0^{\pi/4} \sin^4\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \right)$$

$$= 4\sigma \int_0^{\pi/4} \sin^4\theta \, d\theta,$$ và hãy tuyến tính hóa.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{3\pi - 8}{8}\sigma$.

13.4.9 a) Chuyển sang tọa độ "nửa – trục" : $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, \ y = b\rho\sin\theta, \ z = z \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le z \le h \end{cases}$

ta được :

$$I_{z'z} = \iiint_S \sigma(x^2 + y^2) dx dy dz = \sigma \iiint_\Delta \rho^2 (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) ab\rho d\theta d\rho dz$$

$$= \sigma abh \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta + b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \right).$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{\pi}{4} hab(a^2 + b^2)\sigma$.

b) Áp dụng định lí Huygens : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2$; trong đó $\mu = \sigma\pi R^2 h$, $d = R$, $G \in (z'z)$.

Do đối xứng vật chất :

$$I_{H_G} = I_{yOz} = \sigma \iiint_S x^2 dx dy dz = \sigma \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^h dz \right).$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{5\pi}{4} R^4 h\sigma$.

Bảng tra ký hiệu dùng trong tập 1 và 2

TẬP 1

TẬP 2

Bảng thuật ngữ các tập 1 và 2

A

B

C

D

Đ

H

K

J

L

M

N

P

Q

R

S

T

(*) Một thể giao hoán còn gọi là một *trường* (Chú thích người dịch)

Ư

V

W

X

Y

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập :
NGÔ ÁNH TUYẾT
Sửa bản in :
LÊ MINH TÂM
Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI)

GIÁO TRÌNH TOÁN TẬP 2 (GIẢI TÍCH 2)

In 1500 bản, khổ 16 x 24. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN ANH VIỆT**
Giấy phép xuất bản: 194 2006/CXB/2 - 323/GD
In xong và nộp lưu chiểu Quý II năm 2006.

Jean-Marie Monier

GIẢI TÍCH 2

Giáo trình và 600 bài tập có lời giải

Giáo trình Toán - Tập 2

Mục tiêu của bộ giáo trình Toán này là cung cấp cho sinh viên những năm đầu của các trường đại học khoa học và kỹ thuật một tài liệu học tập, tra cứu thông dụng và có hiệu quả. Với nhiều bài tập có lời giải, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh của lý thuyết, cuốn sách còn nhằm giúp cho người học rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.

8 934980 64017

Tập 1 đề cập việc nghiên cứu số thực và số phức, dãy số và các hàm số một bi
số thực (tính liên tục, đạo hàm và tích phân), ứng dụng với phần đầu của m
Giải tích năm thứ nhất.

Tập 2 đề cập việc khảo sát các hàm số thông dụng, việc so sánh cục bộ các hàm số, nguy
hàm, các hàm khả tích, phương trình vi phân, các hàm số hai biến và bổ sung về phép tí
tích phân, ứng với phần của hai môn Giải tích năm thứ nhất.

Giá : 42.50