ĐỀ 7

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20192

Khóa: K64. Nhóm ngành 3. Mã HP: MI1133. Thời gian: 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.***

Câu 1. (1 *điểm*) Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}}$.

Câu 2. (1 *điểm*) Tìm tập hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5}(x-1)^n$.

Câu 3. (3 *điểm*) Giải các phương trình vi phân:

a) $xy' + y = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$ **b)** $y'' - 6y' + 9y = 1 - e^{2x}.$

c) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$

Câu 4. (1 *điểm*) Khai triển hàm $y = \ln\frac{1-x}{1+x}$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5. (1 *điểm*) Tính $\mathcal{L}\left\{t\sin(kt)\right\}(s)$.

Câu 6. (1 *điểm*) Dùng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân:

$$x^{(3)} + x'' - 6x' = 0, \text{ biết rằng } x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 2.$$

Câu 7. (1 *điểm*) Giải phương trình vi phân: $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$

Câu 8. (1 *điểm*) Tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

—————— **HẾT** ——————

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}} > 0,\ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi dương.

Ta có: $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ (vì $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$)

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 2. Đặt $u_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+5}(x-1)^{3n},\ \forall n \ge 1,\ x \in \mathbb{R}$.

– Với $x = -1$ thì ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+5} 0^n = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$, hội tụ.

– Với $x \ne -1$ ta xét:

$$D = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+2}{(n+1)^2+5}(x-1)^{3(n+1)} \cdot \frac{n^2+5}{(n+1)(x-1)^{3n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{n^2}{n} |x-1|^3 = |x-1|^3$$

+) Nếu $D > 1$ thì chuỗi hàm phân kỳ.

+) Nếu $D < 1 \Leftrightarrow |x-1|^3 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$, thì chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối theo tiêu chuẩn D'Alambert.

+) Nếu $x = 0$, ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+5}(-1)^n$ là chuỗi đan dấu vì $b_n = \dfrac{n+1}{n^2+5} > 0,\ \forall n \ge 1$.

Ta có: $b_n - b_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+5} - \dfrac{n+2}{(n+1)^2+5} = \dfrac{n^2+3n-4}{(n^2+5)(n^2+2n+6)} \le 0,\ \forall n \ge 1$

$\Rightarrow \{b_n\}$ là dãy đơn điệu giảm khi $n \to +\infty$, mà $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+5} = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+5}(-1)^n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

+) Nếu $x = 2$ thì ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+5}$, là chuỗi dương

$u_n = \dfrac{n+1}{n^2+5} \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, mà $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ (vì $\alpha = 1$) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+5}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy miền hội tụ cần tìm là $[0;\ 2)$.

Câu 3.

a) $xy' + y = x\sin x \Leftrightarrow y' + \dfrac{y}{x} = \sin x.$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p(x) = \dfrac{1}{x}$ và $q(x) = \sin x$.

Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C + \int \sin x.e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= e^{-\ln|x|}\left(C + \int \sin x.e^{\ln|x|}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{|x|}\left(C + \int \sin x.|x|\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{x}\left(C + \int x\sin x\mathrm{d}x\right)$$

(vì C là hằng số âm/dương tuỳ ý)

$$= \frac{1}{x}\left[C - \int x\mathrm{d}(\cos x)\right] = \frac{1}{x}\left[C - x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{x}(C - x\cos x + \sin x).$$

Vậy $y = \dfrac{1}{x}(C - x\cos x + \sin x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

b) $y'' - 6y' + 9y = 1 - e^{2x}$.

+) Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\overline{y} = (C_1 + C_2x)e^{3x}$.

+) Do $f(x) = 1 - e^{2x} = 1.e^{0x} - e^{2x}$, trong đó $\lambda = 0$ và $\lambda = 2$ **không** là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng tìm dưới dạng:

$$y^* = A + Be^{2x} \Rightarrow y^{*\prime} = 2Be^{2x} \Rightarrow y^{*\prime\prime} = 4Be^{2x}$$

Thay vào **(1)**: $4Be^{2x} - 6\cdot 2Be^{2x} + 9\left(A + Be^{2x}\right) = 1 - e^{2x} \Leftrightarrow 9A + Be^{2x} = 1 - e^{2x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{9} \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{9} - e^{2x}.$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y = \overline{y} + y^* = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \dfrac{1}{9} - e^{2x}$.

c) $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x} \Leftrightarrow y'' = \dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}$ **(1)**

Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $u = \dfrac{y'}{x} \Rightarrow y' = ux \Rightarrow y'' = u'x + u$. Phương trình **(1)** trở thành:

$$u'x + u = u\ln u \Leftrightarrow u'x = u(\ln u - 1) \ \textbf{(2)}$$

+) Xét $u = 0 \Rightarrow u' = 0$, thoả mãn **(2)** $\Rightarrow u = 0$ là nghiệm của **(2)**.

$\Rightarrow \dfrac{y'}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = C$ là nghiệm của **(1)**.

+) Xét $u = 1 \Rightarrow u' = 0$ là nghiệm của **(2)**.

$\Rightarrow \dfrac{y'}{x} = 1 \Leftrightarrow y' = x \Leftrightarrow y = \int x\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + C$ là nghiệm của **(1)**.

+) Xét $\begin{cases} u \neq 0 \\ u \neq 1 \end{cases}$. Ta có: **(2)** $\Leftrightarrow \dfrac{u'}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Leftrightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C| \quad (C \neq 0)$

$\Leftrightarrow |\ln u - 1| = |Cx| \Leftrightarrow \ln u - 1 = Cx$ (vì C là hằng số âm/dương tuỳ ý)

$\Leftrightarrow u = e^{Cx+1} \Leftrightarrow \dfrac{y'}{x} = e^{Cx+1} \Leftrightarrow y' = xe^{Cx+1}$

$\Leftrightarrow y = \int xe^{Cx+1}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\left(\dfrac{e^{Cx+1}}{C}\right) = \dfrac{x.e^{Cx+1}}{C} - \int \dfrac{e^{Cx+1}}{C}\mathrm{d}x = \dfrac{x.e^{Cx+1}}{C} - \dfrac{e^{Cx+1}}{C^2} + D$

Kết hợp 3 trường hợp, kết luận: $y = \dfrac{x.e^{Cx+1}}{C} - \dfrac{e^{Cx+1}}{C^2} + D \ (C \neq 0,\ D \in \mathbb{R})$ là nghiệm tổng quát, cùng các nghiệm riêng $y = C \quad (C \in \mathbb{R})$ và $y = \dfrac{x^2}{2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$.

Câu 4. Điều kiện: $-1 < x < 1$.

$$y = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n},\ \forall|x|<1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1-(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}x^n,\ \forall|x|<1.$$

Vì $(-1)^n - 1 = 0$ với n chẵn, và $(-1)^n - 1 = -2$ với n lẻ, rút gọn lại ta có:

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-2}{2n+1}x^{2n+1},\ \forall|x|<1.$$

Câu 5. $\mathcal{L}\{t\sin(kt)\}(s)=\dfrac{-\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s)\right)=\dfrac{-\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{k}{s^2+k^2}\right),\ s>0$

$$=-\frac{-2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}=\frac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2},\ s>0.$$

Vậy $\mathcal{L}\{t\sin(kt)\}(s)=\dfrac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2},\ s>0.$

Câu 6. $x^{(3)}+x''-6x'=0$, biết rằng $x(0)=0,\ x'(0)=x''(0)=2.$

Đặt $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

$$\mathcal{L}\left\{x^{(3)}(t)\right\}(s)=s^3X(s)-s^2x(0)-s.x'(0)-x''(0)=s^3X(s)-2s-2$$

$$\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\}(s)=s^2X(s)-s.x(0)-x'(0)=s^2X(s)-2$$

$$\mathcal{L}\left\{x'(t)\right\}(s)=sX(s)-x(0)=sX(s)$$

Tác động biến đổi Laplace lên phương trình đã cho với điều kiện ban đầu, ta có:

$$s^3X(s)-2s-2+\left[s^2X(s)-2\right]-6sX(s)=0\Leftrightarrow\left(s^3+s^2-6s\right)X(s)=2s+4$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{2s+4}{s^3+s^2-6s}=\frac{2s+4}{s(s+3)(s-2)}=\frac{4}{5(s-2)}-\frac{2}{3s}-\frac{2}{15(s+3)}$$

Tác động biến đổi Laplace ngược lên phương trình trên, ta có:

$$x(t)=\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t)-\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t)-\frac{2}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t)$$

$\Leftrightarrow x(t)=\dfrac{4}{5}e^{2t}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{15}e^{-3t}$ là nghiệm cần tìm.

Câu 7. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0.$

Dễ thấy $y_1=e^x$ là một nghiệm của phương trình.

Thật vậy, với $y_1=e^x\Rightarrow(y_1)'=e^x\Rightarrow(y_1)''=e^x$, thay vào phương trình thấy thoả mãn.

$$xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0\Leftrightarrow y''+\left(-2-\frac{1}{x}\right)y'+\left(1+\frac{1}{x}\right)y=0.$$

Ta có $p(x)=-2-\dfrac{1}{x}$. Áp dụng công thức Liouville:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x = e^x \int \frac{e^{\int\left(2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}}{e^{2x}}\mathrm{d}x = e^x \int \frac{e^{2x+\ln|x|}}{e^{2x}}\mathrm{d}x = e^x \int e^{\ln|x|}\mathrm{d}x$$

$$= e^x \int |x|\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sign}(x)\cdot \int x\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sign}(x).\frac{x^2}{2}$$

(chú ý: $\operatorname{sign}(x)$ là hàm dấu của *x*, đại khái ta có $|x| = x.\operatorname{sign}(x)$)

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^x \operatorname{sign}(x)\cdot\frac{x^2}{2}.$$

Đặt $C_2 \operatorname{sign}(x).\frac{1}{2} = C_3$, ta có nghiệm tổng quát là $y = C_1 e^x + C_3 e^x x^2$.

<u>*Chú ý:*</u> Hàm dấu của *x* là $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x > 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \\ -1, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Nói chung, nó cũng chỉ là hằng số mang dấu âm/dương/bằng 0 nên có thể đặt $C_2.\operatorname{sign}(x).\frac{1}{2} = C_3$.

Câu 8. Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. Ta có: $a_n = n^2$, ta có bán kính hội tụ:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2} = 1.$$

$\Rightarrow$ khoảng hội tụ $(-1;\ 1)$. Chuỗi hàm $S(x)$ **không** hội tụ tại các điểm $x = \pm 1$.

Xét $S(x)$ với $x \in (-1;\ 1)$.

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = xG(x),\ |x| < 1$ **(1)**, trong đó:

$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1},\ |x| < 1$. Lấy tích phân hai vế này theo *x*, ta có:

$$\int G(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int n^2 x^{n-1}\mathrm{d}x\right) = C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = C_1 + xH(x),\ |x| < 1 \quad \mathbf{(2)}.$$

Trong đó: $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ |x| < 1$. Lấy tích phân hai vế này theo *x*, ta có:

$$\int H(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int nx^{n-1}\mathrm{d}x\right) = C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = C_2 + \frac{1}{1-x} - 1.$$

Lấy đạo hàm hai vế này theo *x*, ta có: $H(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2},\ |x| < 1.$

Thay $H(x)$ vào **(2)** ta có: $\int G(x)\mathrm{d}x = C_1 + \dfrac{x}{(x-1)^2},\ |x| < 1.$

Đạo hàm hai vế này theo *x*, ta có: $G(x) = \dfrac{1\cdot(x-1)^2 - x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{x+1}{(1-x)^3},\ |x| < 1.$

Thay vào **(1)**, ta có $S(x) = \dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3},\ |x| < 1.$