ĐỀ CK GIẢI TÍCH 1

BỘ ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 1

Dành cho sinh viên trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Biên soạn: Tài liệu HUST

DANH SÁCH ĐỀ THI

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 2
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 4
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1) 8
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1) 9
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1) 10
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1) 15
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2) 16
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2) 17
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2) 22
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3) 23
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3) 24
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3) 29
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20192 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 30
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20192 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 31
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 35
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 36
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1) 40
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 41
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1) 42
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1) 46
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1) 47
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1) 48
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1) 49
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1) 53

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1) 54
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2) 55
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2) 56
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2) 60
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3) 61
ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3) 62
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3) 65

(TaiLieuHust, 2022)

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(2 điểm)*. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{2x^6+3y^2}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tính gần đúng nhờ vi phân $A=\sqrt{2,02^2+3,04^2+3}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng $\cos x \ge 1-\dfrac{x^2}{2}, \forall x\ge 0$.

Câu 4 (*1 điểm*). Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình giới hạn bởi các đường $y=x^2-3x$ và $y=0$ quanh trục Oy một vòng.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tính $\int\left(\sqrt{2x-3}+\left|1-x^2\right|^{\frac{-1}{2}}\right)\mathrm{d}x$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Hàm số $f(x)=x^3+x$ có hàm ngược là $y=g(x)$. Tính $g'(2)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính $P=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{3}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$ với $z=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Không khí được bơm vào một quả bóng bay hình cầu với tốc độ $100\,\text{cm}^3/\text{s}$. Tính tốc độ tăng lên của bán kính quả bóng khi bán kính quả bóng bằng $50\,\text{cm}$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1: $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{x}}$.

Xét giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]}{x}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=1-1=0$, nên $\ln\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]\overset{x\to 0}{\sim}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)$.

$\Rightarrow K=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}(VCB)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}$ (Khai triển Maclaurin)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}x^2}{x^2}=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow$ Giới hạn đã cho bằng $L=e^K=e^{-1/2}$.

b) $f(x,y)=\frac{x^3y}{2x^6+3y^2},\ \forall(x,y)\neq 0.$

+) Chọn $M_1\left(a,a^3\right)$. Khi $a\to 0$ thì $M_1\left(a,a^3\right)\to(0,0)$.

Ta có: $f\left(M_1\right)=f\left(a,a^3\right)=\frac{a^3a^3}{2a^6+3a^6}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow f\left(M_1\right)\to\frac{1}{5}$ khi $M_1\to(0,0)$ **(1)**

+) Chọn $M_2\left(-b,b^3\right)$. Khi $b\to 0$ thì $M_2\left(-b,b^3\right)\to(0,0)$.

Ta có: $f\left(M_2\right)=f\left(-b,b^3\right)=\frac{(-b)^3b^3}{2(-b)^6+3b^6}=\frac{-1}{5}$

$\Rightarrow f\left(M_2\right)\to\frac{-1}{5}$ khi $M_2\to(0,0)$ **(2)**

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x,y)$ không cùng tiến tới một giá trị khi $(x,y)\to(0,0)\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{2x^6+3y^2}$ không tồn tại.

Câu 2. Xét hàm số $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+3}$. Ta có:

$$f_x'(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+3}},\ f_y'(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+3}}.\quad \text{Chọn } \begin{cases} x_0=2, & \Delta x=0{,}02 \\ y_0=3, & \Delta y=0{,}04 \end{cases}.$$

Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$A=\sqrt{2{,}02^2+3{,}04^2+3}=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+f_x'\left(x_0,y_0\right)\cdot\Delta x+f_y'\left(x_0,y_0\right)\cdot\Delta y$$

$$=f(2,3)+f_x'(2,3)\cdot 0{,}02+f_y'(2,3)\cdot 0{,}04=4+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02+\frac{3}{4}\cdot 0{,}04=4{,}04$$

Vậy $A\approx 4{,}04$.

Câu 3. Chứng minh: $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2},\forall x\ge 0\Leftrightarrow \cos x+\frac{x^2}{2}-1\ge 0,\forall x\ge 0$.

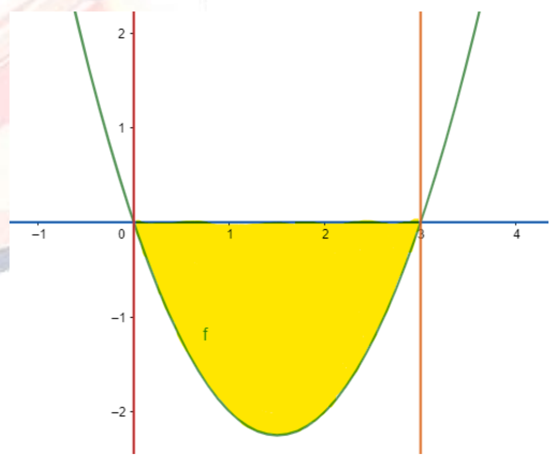
Xét $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$ trên $[0;+\infty)$. Ta có: $f'(x)=-\sin x+x,\ f''(x)=-\cos x+1\ge 0,\forall x\ge 0$

$\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=0,\forall x\ge 0$

$\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0,\forall x\ge 0$

Từ đó ta có được điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi x = 0

Câu 4. Quay miền D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-3x, y=0,\ x=0,\ x=3$ quay quanh trục Oy thì thu được vật thể có thể tích là:



$V=2\pi\int_0^3\left|x\left(x^2-3x\right)\right|dx=2\pi\int x\left(3x-x^2\right)dx$ (vì $x^2-3x\le 0,\forall x\in[0,3]$)

$$=2\pi\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=2\pi\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27\pi}{2}\text{ (đvtt)}$$

Câu 5. Điều kiện: $2x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}\Rightarrow 1-x^2<0\Rightarrow\left|1-x^2\right|=x^2-1$, do đó:

$$I=\int\left(\sqrt{2x-3}+\left|1-x^2\right|^{\frac{-1}{2}}\right)dx=\int\left(\sqrt{2x-3}+\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{2}}\right)dx$$

$$=\int\sqrt{2x-3}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-3)^3}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

Câu 6. Ta có: $f^{'}(x)=3x^2+1$. Với $y_0=2\Rightarrow x_0^3+x_0=2\Leftrightarrow x_0=1$.

Vì $y=g(x)$ là hàm ngược của $f(x)=x^3+x$ nên: $g^{'}\left(y_0\right)=\dfrac{1}{f^{'}\left(x_0\right)}=\dfrac{1}{f^{'}(1)}=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $g^{'}(2)=\dfrac{1}{4}$.

Câu 7. Điều kiện xác định P là $y\neq 0$.

Do sự đối xứng của x, y trong hàm $z(x,y)$ nên: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{12x^2-3y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^7}}$.

$$P=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{3}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{12x^2-3y^2+12y^2-3x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^7}}+\frac{3}{y}\cdot\frac{-3y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}-\frac{9}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}=0,\forall y\neq 0.$$

Câu 8. Gọi thể tích của quả bóng tại thời điểm $t(\mathrm{s})$ là $V(t)\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Theo bài ra, tốc độ bơm không khí vào quả bóng là $100\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}\Rightarrow V^{'}(t)=100\left(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}\right)$.

Tại thời điểm t_0 nào đó, $R\left(t_0\right)=50(\mathrm{cm})$.

Ta có: $V(t)=\dfrac{4}{3}\pi(R(t))^3$. Lấy đạo hàm hai vế theo t, ta có: $V^{'}(t)=4\pi(R(t))^2\cdot R^{'}(t)$

Tại $t=t_0$, ta có: $V^{'}\left(t_0\right)=4\pi\left[R\left(t_0\right)\right]^2\cdot R^{'}\left(t_0\right)\Leftrightarrow 100=4\pi\cdot(50)^2R^{'}\left(t_0\right)$

$$\Leftrightarrow R^{'}\left(t_0\right)=\frac{100}{4\pi\cdot(50)^2}=\frac{1}{100\pi}(\mathrm{cm}/\mathrm{s}).$$

$\Rightarrow$ Khi bán kính quả bóng bằng $50\mathrm{cm}$, tốc độ tăng lên của bán kính quả bóng khi bán kính là $\dfrac{1}{100\pi}(\mathrm{cm}/\mathrm{s})$.

Câu 9. $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x$.

Xét $L=\int_0^{\pi/2}(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\left(\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}+\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x-\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$.

$t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

Đổi cận: - Khi $x\to 0^+$ thì $t\to -1$; Khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$ thì $t\to 1$

$$L=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\dfrac{1-t^2}{2}}}=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{A\to(-1)^+}\int_{A}^{0}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+\lim_{B\to 1^-}\int_{0}^{B}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{A\to(-1)^+}(\sqrt{2}\arcsin t)\Big|_{A}^{0}+\lim_{B\to 1^-}(\sqrt{2}\arcsin t)\Big|_{0}^{B}$$

$$=\lim_{A\to(-1)^+}(-\sqrt{2}\arcsin A)+\lim_{B\to 1^-}(\sqrt{2}\arcsin B)=-\sqrt{2}\cdot\frac{-\pi}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{2}$$

Giờ xét $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x$, với $f(x)=\sqrt{\cot x}\ge 0$ liên tục trên $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\sqrt{\cot x}=\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\overset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\overset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{1/2}},$$

mà $\int_0^{\pi/2}\dfrac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x$ hội tụ (vì $\alpha=\dfrac{1}{2}\in(0,1)$) $\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x$ hội tụ.

Đổi biến $t=\dfrac{\pi}{2}-x \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-t$, ta có:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x=\int_{\pi/2}^{0}\sqrt{\cot\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}L=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(2 điểm)*. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^4}{4x^2+3y^8}$

Câu 2 *(1 điểm)*. Tính gần đúng nhờ vi phân $A=\sqrt{4,03^2+2,02^2+5}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng $e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}, \forall x\ge 0$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x$ và $y=0$ quanh trục Oy một vòng.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tính $\int\left(\sqrt{-4-3x}+\left|1-x^2\right|^{\frac{-1}{2}}\right)\mathrm{d}x$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Hàm số $f(x)=x^5+x$ có hàm ngược là $y=g(x)$. Tính $g'(2)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính $P=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{5}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$ với $z=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Không khí được bơm vào một quả bóng bay hình cầu với tốc độ $200\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Tính tốc độ tăng lên của bán kính quả bóng khi bán kính quả bóng bằng $60\,\mathrm{cm}$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

Cách giải tham khảo đề số 1

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(2 điểm)*. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin x}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{2y^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Phương trình $x^3+3x^2y+y^5-5=0$ xác định hàm ẩn $y=y(x)$. Tính $y'(1)$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính đạo hàm của hàm số $y=\arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right), x\neq\pm1$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tìm khai triển Maclaurin của $y=\ln(1+2x)$ đến x^3.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{e^x+1}$.

Câu 6 *(2 điểm)*. Tính các tích phân sau:

a) $\int\tan(2x)\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+3)\left(x^2-x+1\right)}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Quay đường $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=4$ quanh trục $0x$ một vòng. Tính diện tích mặt tròn xoay được sinh ra.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z=x^3+y^3-(x+y)^2$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1.

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos\pi}=-1$. (dạng vô định nên ta dùng L'Hospital)

Vậy $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin x}=-1$.

b) Đặt $f(x,y)=\dfrac{2y^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}$

+) Nếu $x=1$ và $y\to 0$ thì $f(x,y)=\dfrac{2y^2\ln 1}{0^2+y^2}=0\to 0$ khi $y\to 0$. **(1)**

+) Nếu $x\neq 1$ và $(x,y)\to(1,0)$ thì:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\x\neq 1}}\frac{2y^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\x\neq 1}}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)\cdot\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\x\neq 1}}\frac{2y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$$

Ta có: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}\overset{\text{VCB}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$0\le\left|\dfrac{2y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right|=\dfrac{2|(x-1)y|}{(x-1)^2+y^2}|y|\le\dfrac{(x-1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}|y|=|y|$, mà $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}|y|=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\x\neq 1}}\left|\dfrac{2y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right|=0$ theo nguyên lý kẹp $\Rightarrow\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\x\neq 1}}\dfrac{2y^2(x-1)}{(x\neq 1)^2+y^2}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\x\neq}}\dfrac{2y^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}=1.0=0$ **(2)**

Tù (1) và (2) $\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{2y^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}=0$

Câu 2.

+) Với $x=1$ thì $1+3y+y^5-5=0\Leftrightarrow y^5+3y=4\Leftrightarrow y=1\Rightarrow y(1)=1$.

Theo bài ra: $x^3+3x^2y(x)+[y(x)]^5-5=0$

+) Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta có: $3x^2+6xy(x)+3x^2y'(x)+5y'(x)[y(x)]^4=0$

Thay $x=1$, ta có:

$$3+6y(1)+3y'(1)+5y'(1)[y(1)]^4=0 \Leftrightarrow 3+6+3y'(1)+5y'(1)=0 \quad (\text{ do } y(1)=1) \Leftrightarrow y'(1)=\frac{-9}{8}$$

Vậy $y'(1)=\frac{-9}{8}$

Cách giải khác: Đặt $F(x,y)=x^3+3x^2y+y^5-5$.

Ta có: $y'(x)=\frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=\frac{-\left(3x^2+6xy\right)}{3x^2+5y^4}$. **(*)**

Với $x=1$ thì $1+3y+y^5-5=0 \Leftrightarrow y^5+3y=4 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow y(1)=1$.

Thay $x=1, y=1$ vào **(*)**, ta có: $y'(1)=\frac{-(3+6)}{3+5}=\frac{-9}{8}$.

Câu 3. $y'=\dfrac{\dfrac{2\left(1-x^2\right)-2x\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{2x^2+2}{\left(1-x^2\right)^2}}{\dfrac{x^4+2x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}}=\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2}{x^2+1}, \forall x\neq\pm1.$

Vậy $y'=\frac{2}{x^2+1}, \forall x\neq\pm1.$

Câu 4. Ta có khai triển Maclaurin: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$.

Khi $x\to0$ thì $2x\to0$, thay x bởi $2x$, ta có khai triển Maclaurin của y đến cấp 3 là:

$$y=\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o\left((2x)^3\right)=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

Vậy khai triển cần tìm là $y=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)$.

Câu 5.

+) Tập xác định $\mathbf{D}=\mathbb{R}$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

+) Khi $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ (Dạng vô định)

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang bên phải của đồ thị hàm số.

+) Khi $x \to -\infty$:

$a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{e^x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0 \left(\text{ vì } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \right)$ $\Rightarrow$ Khi $x \to -\infty$ không có tiệm cận ngang.

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - ax) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{e^x+1} - x \right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} \left(\text{ dạng } \frac{\infty}{\infty} \right.$

L'Hospital

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \quad \left(\text{ do } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \right)$

$\Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên bên trái của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, và có $y = 0$ là tiệm cận ngang bên phải, y là tiệm cận xiên bên trái.

Câu 6.

$$a) \int \tan(2x)\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \int \frac{-2\sin(2x)\mathrm{d}x}{\cos(2x)} = \frac{-1}{2} \int \frac{d(\cos(2x))}{\cos(2x)} = \frac{-1}{2} \ln|\cos 2x| + C$$

Vậy $\int \tan(2x)\mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \ln|\cos 2x| + C.$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\left(x^2-x+1\right)} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\left(x^2-x+1\right)}$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \left(\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{26} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{7}{26} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{\ln|x+3|}{13} - \frac{\ln\left|x^2-x+1\right|}{26} + \frac{7}{26} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \Bigg|_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{\ln|A+3|}{13} - \frac{\ln\left|A^2-A+1\right|}{26} + \frac{7}{13\sqrt{3}} \arctan \frac{2A-1}{\sqrt{3}} - \frac{\ln 3}{13} + \frac{7\pi}{78\sqrt{3}} \right)$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{26}\ln\frac{|A+1|^2}{|A^2-A+1|}+\frac{7}{13\sqrt{3}}\arctan\frac{2A-1}{\sqrt{3}}-\frac{\ln 3}{13}+\frac{7\pi}{78\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{26}\ln 1+\frac{7}{13\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\ln 3}{13}+\frac{7\pi}{78\sqrt{3}}=\frac{14\pi}{39\sqrt{3}}-\frac{\ln 3}{13}$$

Vậy tích phân suy rộng cần tính bằng $\frac{14\pi}{39\sqrt{3}}-\frac{\ln 3}{13}$.

Câu 7. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=4 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)^2=1$

Tham số hoá đường cong: $\begin{cases} x(t)=8\cos^3 t \\ y(t)=8\sin^3 t\end{cases} (0\le t\le 2\pi)$

Do tính đối xứng qua trục Ox và trục Oy, diện tích vật thể cần tính bằng 2 lần diện tích vật thể thu được, khi quay phần ứng với $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ quanh trục Ox.

Diện tícch cần tính là:

$$\sigma = 2\times 2\pi\int_0^{\pi/2}|y(t)|\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt = 4\pi\int_0^{\pi/2}\left|8\sin^3 t\right|\sqrt{\left(-24\sin t\cos^2 t\right)^2+\left(24\cos t\sin^2 t\right)^2}\,dt$$

$$=768\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=768\pi\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt$$

$$=768\pi\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,d(\cos t)=\frac{768\pi}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{768\pi}{5}\quad(\text{dvdt})$$

Vậy diện tích cần tính là $\frac{768\pi}{5}$ (dvdt).

Câu 8.

Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}^2$

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x=3x^2-2(x+y)=0 \\ z'_y=3y^2-2(x+y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2 \\ 3x^2-2x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y\\3x^2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=y\\3x^2-4x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\ x=y=\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ hàm số có 2 điểm dừng là $M_1\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ và $M_2(0,0)$.

+) Ta có: $A = z''_{xx} = 6x - 2, \quad B = z''_{xy} = -2, \quad C = z''_{yy} = 6y - 2$

$\Rightarrow \Delta = B^2 - AC = 4 - (6x-2)(6y-2).$

- Tại điểm $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, ta có $\Delta = -32 < 0$ và $A = 6 > 0$

$\Rightarrow z(x, y)$ đạt cực tiểu tại $M_1(1,1)$, $z_{\text{CT}} = z(M_1) = \frac{-64}{27}$.

- Tại điểm $M_2(0,0)$.

Xét $\Delta z = z(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = (\Delta x)^3 + (\Delta y)^3 - (\Delta x + \Delta y)^2$

Khi $\Delta x = -\Delta y \to 0$ ta có: $\Delta z = 0$, điều này chứng tỏ $z(M_2) = z(M_3)$, với

$M_3(\Delta x, -\Delta y)$ thuộc lân cận của $M_2 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại M_2

Vậy hàm số đạt cực trị duy nhất tại một điểm là $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ (cực tiểu), giá trị cực tiểu là

$z_{\text{CT}} = z(M_1) = \frac{-64}{27}$.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(2 điểm)*. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{2x^3\ln y}{x^2+(y-1)^2}$.

Câu 2 *(1điểm)*. Phương trình $x^4+4xy^3+3y^5-8=0$ xác định hàm ẩn $y=y(x)$. Tính $y'(1)$.

Câu 3 *(1điểm)*. Tính đạo hàm của hàm số $y=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right), x>1$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tìm khai triển Maclaurin của $y=\ln(1-3x)$ đến x^3.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{2e^x+1}$.

Câu 6 *(2 điểm)*. Tính các tích phân sau:

a) $\int \cot(3x)dx$.

b) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x+4)\left(x^2+x+1\right)}$

Câu 7 *(1 điểm)*. Quay đường $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=9$ quanh trục Ox một vòng. Tính diện tích mặt tròn xoay được sinh ra.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z=x^3+y^3+(x+y)^2$.

Cách giải tham khảo đề số 3

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{e^{2x}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x=t+t^3 \\ y=2t^2+3t^4 \end{cases}$. Tính $f'(x), f''(x)$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng với mọi $x>0$, ta có $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)>\dfrac{2}{2+x}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^7}\right)$.

Câu 6 *(2 điểm)*. Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x dx}{\sin x+\cos x}$.

b) $\displaystyle\int_2^3 \operatorname{arccot}\sqrt{3-x}\,dx$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\left(3x^4-2\right)}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $x^2+(y-2)^2=1$ quanh trục Ox
.

Câu 9 *(1 điểm)*. Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\arctan\sqrt{3x}, & x\ge 0 \\ ae^{3x}+b\sin x, & x<0 \end{cases}$$

Tìm a và b để hàm số $f(x)$ khả vi tại $x=0$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{e^{2x}-1}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-e^{2x}+1}{\left(e^{2x}-1\right)x}$

Dùng VCB: $\left(e^{2x}-1\right)\overset{x\to 0}{\sim}2x$ cho mẫu số, ta có:

$$L\overset{\text{VCB}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-e^{2x}+1}{2x\cdot x}\ \text{(dạng } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$\overset{L'Hospital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{2x}}{4x}\ \text{(dạng } \frac{0}{0}\text{)}\overset{L'\text{ Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4e^{2x}}{4}=\frac{-4e^{0}}{4}=-1.$$

Vậy giới hạn cần tính bằng -1.

Cách giải 2: Dùng khai triển Maclaurin:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\left(2x+\dfrac{(2x)^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right)}{2x\cdot x}\text{(Khai triển Maclaurin)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2-o\left(x^2\right)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{2x^2}=-1.$$

Câu 2.

> Ta có công thức: Với $\begin{matrix}x=x(t)\\ y=y(t)\end{matrix}$ Xác định hàm y = $f(x)$
>
> $f'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ và $f''(x)=\dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{\left[x'(t)\right]^3}$.

Áp dụng công thức trên ta có:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4t+12t^3}{1+3t^2}=4t.$$

$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{x'(t)\mathrm{d}t}(4t)=\frac{1}{x'(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t)=\frac{1}{1+3t^2}\cdot 4=\frac{4}{1+3t^2}.$$

Câu 3.

+) Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$.

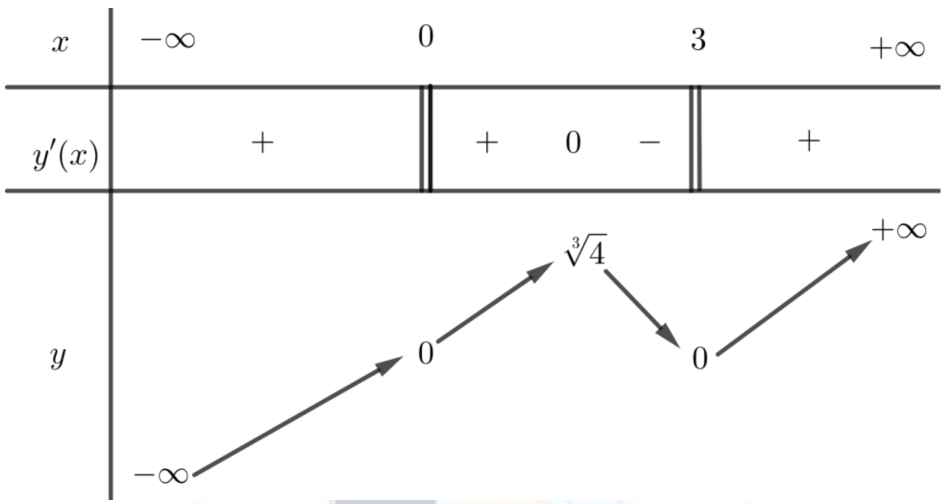
+) Sự biến thiên:

$$y' = \frac{\left(x(x-3)^2\right)'}{\sqrt[3]{\left(x(x-3)^2\right)^2}} = \frac{(x-3)^2+2(x-3)x}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}} = \frac{x-3+2x}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}, \forall x \neq 0, x \neq 3.$$

$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3+2x}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Lập bảng biến thiên:



Dựa vào bàng biến thiên, ta kết luận hàm số có 2 điểm cực trị:

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1,\ y_{CD} = y(1) = \sqrt[3]{4}$.

- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3, y_{CT} = y(3) = 0$.

Câu 4. Xét hàm số $f(x) = \ln(1+\frac{2}{x}) - \frac{2}{2+x}$ trên $(0,+\infty)$

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x} - \frac{2}{2+x} = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{2+x} \text{(do } x>0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)x-(x+2)^2+2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(2+x)^2} < 0, \forall x > 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{2+x}\right] = +\infty$$

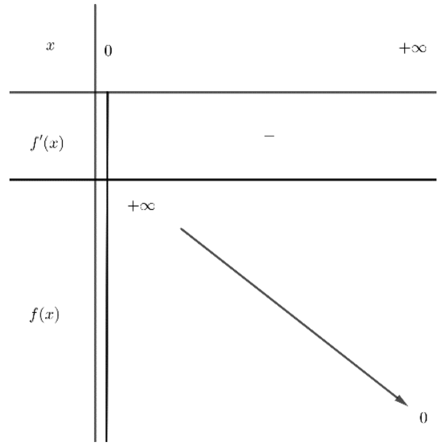
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{2+x}\right] = \ln(1+0) - 0 = 0$$

Ta có bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên, suy ra: $f(x) > 0, \forall x > 0$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{2+x} > 0, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) > \frac{2}{2+x}, \forall x > 0 \text{ (đpcm)}$$



Câu 5.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^7}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{n}\right)^6+\left(\frac{2}{n}\right)^6+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^6\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^6$$

$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, trong đó $f(x) = x^6$ hàm liên tục, khả tích trên $[0,1]$.

$$= \int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \frac{1}{7}.$$

Vậy giới hạn cần tính bằng $\frac{1}{7}$.

Câu 6.

Giải: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Đặt $t = x+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = t-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Tích phân cần tính trở thành:

$$I = \int \frac{\left[\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]^3}{\sqrt{2}\sin t}\mathrm{d}t = \int \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^3}{\sqrt{2}\sin t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^3 t - 3\sin^2 t\cos t + 3\sin t\cos^2 t - \cos^3 t}{\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left(\sin^2 t - 3\sin t\cos t + 3\cos^2 t - \frac{\cos^3 t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right) - \frac{3}{2}\sin 2t + \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t\right) - \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\left(1-\sin^2 t\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(2+\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t - \frac{\cos t}{\sin t} + \cos t\sin t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(2+\cos 2t-\sin 2t-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t-\ln|\sin t|\right)+C$$

Thay $t=x+\frac{\pi}{4}$

$$\int\frac{\sin^3 x dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{4}\left(2x+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{\cos(2x)-\sin(2x)}{8}-\frac{1}{4}\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1$$

b) Xét nguyên hàm

$$\int\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}\,dx=\int\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}\,d(x-4)=(x-4)\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}-\int(x-4)\cdot d(\operatorname{arccot}\sqrt{3-x})$$

$$=(x-4)\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}-\int(x-4)\cdot\frac{-1}{1+(\sqrt{3-x})^2}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}dx$$

$$=(x-4)\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}-\int\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}dx=(x-4)\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x}+C.$$

$$\Rightarrow\int_2^3\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}\,dx=[(x-4)\operatorname{arccot}\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x}]\Big|_2^3=\frac{-\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{2}-1\right)=1$$

Câu 7. $f(x)=\frac{1}{x\left(3x^4-2\right)}$ là hàm dương và liên tục trên $[1,+\infty)$.

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\left(3x^4-2\right)}$ là tích phân suy rộng loại 1 với điểm bất thường $+\infty$

$\frac{1}{x\left(3x^4-2\right)}\overset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x\cdot 3x^4}=\frac{1}{3x^5}$, mà $\int_1^{+\infty}\frac{1}{3x^5}dx$ hội tụ (do $\alpha=5>1$)

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\left(3x^4-2\right)}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 8. Tham số hoá đường tròn $x^2+(y-2)^2=1$:

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=2+\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi).$$

Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $x^2+(y-2)^2=1$ quanh trục Ox là:

$$\sigma=2\pi\int_0^{2\pi}|y(t)|\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}|2+\sin t|\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$

$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\mathrm{d}t \quad (\text{ vì } 2+\sin t>0) = 2\pi(2t+\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2(\text{ dvdt })$

Câu 9.

Để hàm số $f(x)$ khả vi tại $x=0$ thì điều kiện cần là $f(x)$ liên tục tại $x=0$, tức là:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\arctan\sqrt{3x}) = \lim_{x\to 0^-}\left(ae^{3x}+b\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 0 = ae^0 + b\sin 0 = 0 \Leftrightarrow a=0.$$

Với $a=0$ thì $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\arctan\sqrt{3x}, & x\ge 0,\\ b\sin x, & x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\arctan\sqrt{3x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\arctan\sqrt{3x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{3x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{b\sin x-0}{x} = b\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = b.1 = b$$

$f(x)$ khả vi tại $x=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ \sqrt{3}=b\end{cases}$

Vạy $(a,b)=(0,\sqrt{3})$.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{e^{3x}-1}\right)$.

Câu 2 *(1 điểm)* Cho hàm số $y=f(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x=3t+t^3 \\ y=5t-t^5 \end{cases}$. Tính $f'(x), f''(x)$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng với mọi $x>1$, ta có $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<\frac{2}{x-1}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6}\right)$.

Câu 6 *(2 điểm)*. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

b) $\int_1^2 \arctan\sqrt{3-x}\,dx$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\left(2x^4-1\right)}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $x^2+(y+2)^2=1$ quanh trục Ox
.

Câu 9 *(1 điểm)*. Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\sin\sqrt{3x}, & x\ge 0 \\ a2^x+b\arctan x, & x<0 \end{cases}$$

Tìm a và b để hàm số $f(x)$ khả vi tại $x=0$.

Lời giải tham khảo đề số 5

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x - x}{x-\sin x-1}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{7,988}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính hoặc xét sự phân kỳ $\int_1^{+\infty} e^{-x}x\,\mathrm{d}x$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính $\int_0^{\pi} e^{3x}\sin(2x)\mathrm{d}x$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Cho $z(x,y)=e^{xy^2}$. Tính d^2z.

Câu 6 *(1 điểm)*. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số $z=3x^2-4y^2$ trong miền đóng: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}\le 1$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, trong đó: $D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\le 0$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^3-8} \\ y=\dfrac{2t}{t^3-8}\end{cases}$

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}}\right)\sin^{18}x\,\mathrm{d}x$.

Câu 10 *(1 điểm)* Tính $z_x'(x;y)$ biết $z(x;y)=\begin{cases}\operatorname{arccot}\dfrac{y}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)

Câu 1. Vì $\cos x$ bị chặn bởi $1 \Rightarrow (\cos x - x) \overset{x\to+\infty}{\sim} (-x)$

Tương tự, vì $(-\sin x - 1)$ bị chặn bởi $2 \Rightarrow (x - \sin x - 1) \overset{x\to+\infty}{\sim} x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x - x}{x - \sin x - 1} \overset{\text{VCL}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1.$$

Vậy giới hạn cần tính bằng -1.

Câu 2. $A = \sqrt[3]{7,988} = \sqrt[3]{8 - 0,012}$

Chọn $x_0 = 8, \Delta x = -0,012$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ trên $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \forall x > 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}.$$

Áp dụng công thức tính gần đúng nhờ vi phân:

$$A = \sqrt[3]{7,988} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{12}\cdot(-0,012) = 1,999$$

Vậy $A = \sqrt[3]{7,988} \approx 1,999$.

Câu 3. $\int e^{-x} x\,dx = \int x\,d\left(-e^{-x}\right) = -e^{-x}x - \int\left(-e^{-x}\right)dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = \dfrac{-1-x}{e^x} + C$.

Ta có: $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A e^{-x}x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{-1-x}{e^x}\right|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{-1-A}{e^A} + \frac{2}{e}\right)$.

+) Xét giới hạn: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{-1-A}{e^A}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{-1}{e^A} = 0$ (do $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^A = +\infty$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x\,dx = 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \Rightarrow$ tích phân đã cho hội tụ và bằng $\dfrac{2}{e}$.

Câu 4.

$$I = \int_0^\pi e^{3x}\sin(2x)dx = \int_0^\pi \sin(2x)d\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) = \left.\left(\sin(2x)\cdot\frac{e^{3x}}{3}\right)\right|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{3x}}{3}d(\sin(2x))$$

$$=0-\frac{2}{3}\int_0^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\mathrm{d}x=\frac{-2}{9}\int_0^{\pi}\cos(2x)\mathrm{d}\left(e^{3x}\right)$$

$$=\left(\frac{-2}{9}\cos(2x)e^{3x}\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{9}\int_0^{\pi} e^{3x}\,\mathrm{d}(\cos(2x))=\frac{2-2e^{3\pi}}{9}-\frac{4}{9}\int_0^{\pi} e^{3x}\sin(2x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I=\frac{2-2e^{3\pi}}{9}-\frac{4}{9}I\Rightarrow I=\frac{2-2e^{3\pi}}{13}.$$

Vậy tích phân cần tính bằng $\dfrac{2-2e^{3\pi}}{13}$.

Câu 5.

$$z'_x=y^2e^{xy^2},\quad z'_y=2xye^{xy^2}$$

$$z''_{xx}=y^4e^{xy^2},\quad z''_{xy}=z''_{yx}=2ye^{xy^2}+2y^3xe^{xy^2},\quad z''_{yy}=2xe^{xy^2}+4x^2y^2e^{xy^2}$$

$$\mathrm{d}^2z=z''_{xx}\mathrm{d}x^2+2z''_{xy}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+z''_{yy}\mathrm{d}y^2$$

$$=y^4e^{xy^2}\,\mathrm{d}x^2+2\left(2ye^{xy^2}+2y^3xe^{xy^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(2xe^{xy^2}+4x^2y^2e^{xy^2}\right)\mathrm{d}y^2$$

Rút gọn lại, ta có: $\mathrm{d}^2z=\left[y^4\,\mathrm{d}x^2+\left(4y+4y^3x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\left(2x+4x^2y^2\right)\mathrm{d}y^2\right]e^{xy^2}$.

Câu 6. Với điều kiện $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}\le 1\Rightarrow\begin{cases}x^2\le 4\left(1-\dfrac{y^2}{3}\right)\\ y^2\le 3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\le 4\\ y^2\le 3\end{cases}$

+) Ta có: $z=3x^2-4y^2\ge 3x^2-4\cdot 3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)\ge 6x^2-12\ge 0-12=-12$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases}$

+) Ta có: $z=3x^2-4y^2\le 3\cdot 4\left(1-\dfrac{y^2}{3}\right)-4y^2=12-8y^2\le 12-0=12$

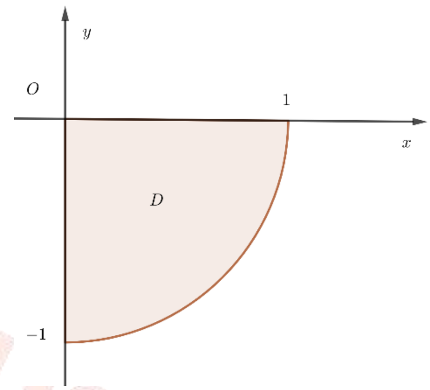
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\ y=0\end{cases}$

Kết luận: Trên miền đã cho thì:

- Giá trị nhỏ nhất của z là -12, đạt được tại $(x,y)=(0,\pm\sqrt{3})$.

- Giá trị lớn nhất của z là 12, đạt được tại $(x,y)=(\pm 2,0)$.

Câu 7. D là miền được gạch chéo như hình bên.



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$.

Miền D trở thành $E:\begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le 0 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_E \sqrt{1-r^2}\,|J|\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \frac{-1}{2}\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}\left(1-r^2\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-r^2\right)^3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Vậy tích phân cần tính bằng $\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 8.

+) Khi $t \to t_0$ (với $t_0 \ne 2$) thì $\lim\limits_{t\to t_0} x$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y$ hữu hạn

$\Rightarrow$ trường hợp này không có tiệm cận.

+) Khi $t \to 2$ thì $\lim\limits_{t\to 2} x = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{1}{t^3-8} = \infty$

Ta có: $a = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\frac{2t}{t^3-8}}{\frac{1}{t^3-8}} = \lim\limits_{t\to 2}(2t) = 4 \ne 0$

$$b = \lim_{t\to 2}(y-ax) = \lim_{t\to 2}\left(\frac{2t}{t^3-8} - \frac{4}{t^3-8}\right) = \lim_{t\to 2}\frac{2(t-2)}{(t-2)\left(t^2+2t+4\right)}$$

$$= \lim_{t\to 2}\frac{2}{t^2+2t+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ trường hợp này đồ thị hàm số có tiệm cận xiên hai phía $y = 4x + \dfrac{1}{6}$.

+) Khi $t \to \infty$ thì $\lim\limits_{t\to\infty} x = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t^3-8} = 0$ (hữu hạn) và $\lim\limits_{t\to\infty} y = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{2t}{t^3-8} = 0$ (hữu hạn) nên trường hợp này không có tiệm cận.

Vậy đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một tiệm cận, đó là tiệm cận xiên hai phía $y = 4x + \frac{1}{6}$.

Câu 9. $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}}\right) \sin^{18} x \, dx = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{18} x \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}} \sin^{18} x \, dx}_{I_2}$

+) Xét $f(x) = \sin^{18} x$, ta có: $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm chẵn

$\Rightarrow I_2 = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{18} x \, dx = 2 \cdot \frac{17!!}{18!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{17!!}{18!!}\pi$ (tích phân Wallis).

+) Xét $g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}} \sin^{18} x$. Đề cho hơi dở, vì cận $\arcsin x$ không xác định trên toàn bộ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, nên chỗ này đề bị sai.

Sửa lại một chút:

$$I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi/2} \left(1 + \frac{\arcsin \frac{x}{\pi}}{\sqrt{1+e^{|x|}}}\right) \sin^{18} x \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{18} x \, dx + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\arcsin \frac{x}{\pi}}{\sqrt{1+e^{|x|}}} \sin^{18} x \, dx}_{I_2}$$

Lúc này, đặt $g(x) = \frac{\arcsin \frac{x}{\pi}}{\sqrt{1+e^{|x|}}} \sin^{18} x$.

Ta có $g(-x) = -g(x)$ nên $g(x)$ là hàm lẻ trên $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x) dx = 0$ (tích phân hàm lẻ, cận đối xứng).

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{17!!}{18!!}$.

Câu 10.

+) $z'_x(x,y) = \frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \forall x \neq 0$.

+) Với mỗi điểm $(0,y_0)$, xét giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}}{x}$$

- Nếu $y_0=0$ thì $\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}=\operatorname{arccot}0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{y_0}{x}x$. Giới hạn này không tồn tại hữu hạn $\Rightarrow$ không tồn tại $z_x'(0,0)$.

- Nếu $y_0>0$, ta xét: $\lim_{x\to 0^-}\frac{y_0}{x}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}}{x}=-\infty$ $\Rightarrow$ không tồn tại $z_x'(0,y_0)$ (với $y_0>0$).

- Nếu $y_0<0$, ta xét: $\lim_{x\to 0^+}\frac{y_0}{x}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x}}{x}=+\infty$ $\Rightarrow$ không tồn tại $z_x'(0,y_0)$ (với $y_0<0$).

Tóm lại, $z_x'(x,y)=\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{y}{x^2+y^2},\forall x\neq 0$. Còn $z_x'(0,y)$ không tồn tại.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x - x}{x-\sin x+1}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{8,012}$.

Câu 3 *(1 điểm)* Tính hoặc xét sự phân kỳ $\int_1^{+\infty} e^x x\,\mathrm{d}x$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính $\int_0^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\mathrm{d}x$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Cho $z(x,y)=e^{x^2y}$. Tính d^2z.

Câu 6 *(1 điểm)*. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số $z=4x^2-3y^2$ trong miền đóng: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, trong đó: $D: x^2+y^2\le 1, x\le 0, y\ge 0$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8-t^3} \\ y=\dfrac{2t}{8-t^3}\end{cases}$

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}}\right)\sin^{18} x dx$.

Câu 10 *(1 điểm)*. Tính $z'_x(x;y)$ biết $z(x;y)=\begin{cases}\operatorname{arccot}\dfrac{y}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Lời giải tham khảo đề 7

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20192 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = x^2 + \arcsin x$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x} dx$.

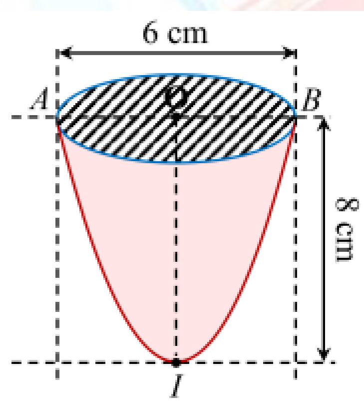
Câu 4 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin x}{\sqrt{2x^2+3y^4}}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z = (x+y)^2 + \left(x^2-1\right)^2 - 1$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng $x \arctan x \geq \ln\sqrt{1+x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}} dx$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Có một vật thể tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 6cm và chiều cao là 8cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục OI cắt vật thể theo thiết diện là một parabol. Tính thể tích $V\left(\text{cm}^3\right)$ của vật thể đã cho.



Câu 9 *(1 điểm)*. Biểu thức $z + \dfrac{1}{x} = \sqrt{y^2 - z}$ xác định hàm ẩn $z = z(x,y)$. Chứng minh rằng:

$$x^2 z'_x + \frac{z'_y}{2y} - 1 = 0.$$

Câu 10 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoả mãn:

$x^2 f^2(x) + (2x-1) f(x) = x f'(x) - 1$ với mọi $x \neq 0$ và $f(1) = 2$. Tính $\displaystyle\int_1^2 f(x) dx$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20192 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1. $y = x^2 + \arcsin x$. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} y(1) = 1 + \arcsin 1 = 1 + \dfrac{\pi}{2} \\ y(-x) = 1 + \arcsin(-1) = 1 - \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y(-1) \neq \pm y(1)$$

$\Rightarrow$ không thể có: $\left[\begin{array}{l} y(-x) = y(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ y(-x) = -y(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

$\Rightarrow y = x^2 + \arcsin x$ không là hàm chẵn, cũng không là hàm lẻ.

Câu 2. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R}$, đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

- Xét khi $x \to +\infty$, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$ khi $x \to +\infty$.

- Xét khi $x \to -\infty$, ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{-x} = -2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ khi $x \to -\infty$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Vậy đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = 2$ (về bên phải) và $y = -2$ (về bên trái).

Câu 3. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \cos(\pi \ln x) d(\ln x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi \ln x)\Big|_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{\pi}$.

Vậy tích phân cần tính bằng $\dfrac{1}{\pi}$.

Câu 4. Ta chứng minh $\dfrac{y^2}{\sqrt{2x^2+3y^4}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \forall (x,y) \neq (0,0)$. **(*)**

Thật vậy, **(*)** $\Leftrightarrow \dfrac{y^4}{2x^2+3y^4} \leq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3y^4 \leq 2x^2 + 3y^4$, luôn đúng. Vậy **(*)** đúng.

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{y^2\sin x}{\sqrt{2x^2+3y^4}}\right| = \frac{y^2}{\sqrt{2x^2+3y^4}}|\sin x| \le \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x, \text{ mà } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{y^2\sin x}{\sqrt{2x^2+3y^4}}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2\sin x}{\sqrt{2x^2+3y^4}} = 0.$$

Vậy giới hạn cần tính bằng 0.

Câu 5.

Tập xác định $\mathbf{D} = \mathbb{R}^2$

Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 2(x+y) + 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x = 0 \\ z'_y = 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x\left(x^2-1\right) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số có 3 điểm dừng là $M_1(0,0), M_2(1,-1)$ và $M_3(-1,1)$.

Ta có $A = z''_{xx} = 12x^2 - 2, B = z''_{xy} = 2, C = z''_{yy} = 2.$

Tại điểm $M_1(0,0)$, ta có $B^2 - AC = 8 > 0$, nên hàm số không đạt cực trị tại M_1.

Tại các điểm $M_2(1,-1)$ và $M_3(-1,1)$ ta có $\begin{cases} B^2 - AC = -16 < 0 \\ A = 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $M_2(1,-1), M_3(-1,1)$. Giá trị cực tiểu đều bằng $z_{CT} = z(1,-1) = z(-1,1) = -1.$

Câu 6. Xét hàm số $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = \arctan x + x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \arctan x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Bảng biến thiên có dạng:

x	$+\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) \ge 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x\arctan x \ge \ln\sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (đpcm)

Câu 7. $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx=I_1+I_2$, trong đó $I_1=\int_0^1\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx$ và $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx$.

+) Xét I_1, ta có $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}\ge 0,\forall x\in(0,1]$. Điểm bất thường $x=0$.

$\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}\overset{x\to 0}{\sim}\frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x^5}}=\frac{1}{2x^{1/2}}$, mà $\int_0^1\frac{1}{2x^{1/2}}dx$ hội tụ (vì $\alpha=\frac{1}{2}\in(0,1)$)

$\Rightarrow I_1=\int_0^1\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

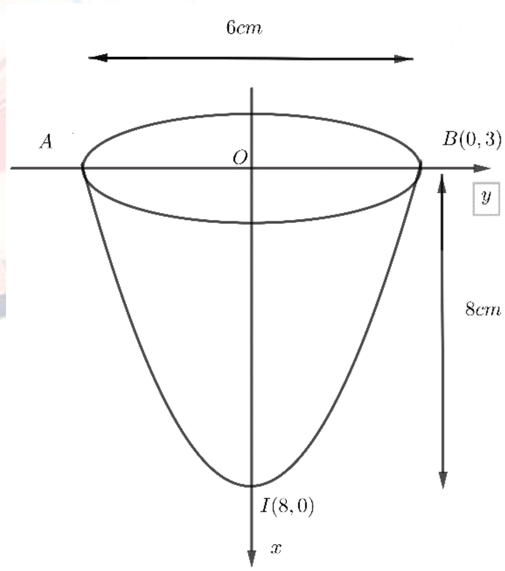
+) Xét I_2, ta có $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}\ge 0$ liên tục trên $[1,+\infty)$. Điểm bất thường $+\infty$.

Ta có: $0\le\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}\le\frac{2}{x^{5/2}}$, mà $\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^{5/2}}dx$ hội tụ (vì $\alpha=\frac{5}{2}>1$)

$\Rightarrow I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vì I_1 và I_2 hội tụ nên I hội tụ

Câu 8. Chiều dương như hình vẽ.



Phương trình parabol đi qua 3 điểm A, B, O có dạng:

$x=ay^2+b.$

Parabol qua hai điểm $B(0,3)$ và $I(8,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=9a+b\\8=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-8}{9}\\b=8\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-8}{9}y^2+8.$$

Vật thể thu được là vật thể khi miền giới hạn bởi các đường $\begin{cases}x=\frac{-8}{9}y^2+8\\x\ge 0,y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{3}{4}\sqrt{16-2x}\\0\le x\le 8\end{cases}$ quanh trục $Ox\Rightarrow$ thể tích vật thể là:

$$V=\pi\int_0^8 y^2(x)dx=\pi\int_0^8\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-2x}\right)^2dx=\pi\int_0^8\left(9-\frac{9x}{8}\right)dx=\pi\left(9x-\frac{9x^2}{16}\right)\Bigg|_0^8=36\left(\text{cm}^3\right)$$

Câu 9. Đặt $F(x,y,z)=z+\frac{1}{x}-\sqrt{y^2-z}$.

$$z_x'=\frac{-F_x'}{F_z'}=\frac{-\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{y^2-z}}},\ z_y'=\frac{-F_y'}{F_z'}=\frac{\frac{y}{\sqrt{y^2-z}}}{1+\frac{1}{2\sqrt{y^2-z}}}.$$

Ta có:

$$x^2z_x'+\frac{z_y'}{2y}+1=x^2\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{x^2}{2\sqrt{y^2-z}}}+\frac{1}{2y}\cdot\frac{\frac{y}{\sqrt{y^2-z}}}{1+\frac{1}{2\sqrt{y^2-z}}}-1=\frac{1}{1+\frac{1}{2\sqrt{y^2-z}}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{y^2-z}}}{1+\frac{1}{2\sqrt{y^2-z}}}-1=1-1=0$$

Câu 10.

$$x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1,\forall x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2=xf'(x)+f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x)+f(x)}{(xf(x)+1)^2}=1,\forall x\neq 0\Rightarrow \int\frac{xf'(x)+f(x)}{(xf(x)+1)^2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}(xf(x)+1)}{(xf(x)+1)^2}=\int\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{-1}{xf(x)+1}=x+C.$$

Theo bài ra:

$$f(1)=-2\Rightarrow\frac{-1}{-2+1}=1+C\Leftrightarrow C=0.\Rightarrow\frac{-1}{xf(x)+1}=x\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2},$$ **(TM)**

$$\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(-\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{-1}{2}-\ln 2$$

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm chu kỳ của hàm số $y=3\cos(5x)+4\sin(5x)$.

Câu 2 *(2 điểm)*. Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x}$

b) $\int \ln\left(x^2+x+2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân $\int_0^1 \dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4}{x^2+y^4}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z=x^4+y^4+2x^2-2y^2$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Tìm và phân loại điểm gián đoạn $y=\left(\arctan\dfrac{x+1}{x}\right)^{-1}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Phương trình $(x+y)z+e^{xyz}=0$ xác định hàm ẩn $z=z(x,y)$.

Tính $dz(0,1)$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[0,1], |f(x)|\le 1, \forall x\in[0,1]$.

Chứng minh rằng $\int_0^1\sqrt{1-f^2(x)}\mathrm{d}x=\sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thoả mãn điều kiện:

$f(x)=\sqrt{x+2}+x^2 f\left(x^3\right)$. Tính $I=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1. Chọn α sao cho $\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5}$, ta có:

$$f(x)=3\cos(5x)+4\sin(5x)=5\left[\frac{3}{5}\cos(5x)+\frac{4}{5}\sin(5x)\right]=5[\sin\alpha\cos(5x)+\cos\alpha\sin(5x)]=5\sin(5x+\alpha)$$

là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T=\frac{2\pi}{|5|}=\frac{2\pi}{5}$.

Chú ý: Với $k\neq 0$ thì các hàm số $\sin(kx+\alpha),\cos(kx+\alpha)$ là các hàm tuần hoàn với chu kỳ $T=\frac{2\pi}{|k|}$.

Câu 2.

a) Ta có: $\sin x\sim x$ khi $x\to 0$ và:

$$\sqrt[3]{\cos x}-1=\sqrt[3]{1+(\cos x-1)}-1\overset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{3}(\cos x-1)\overset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{3}\cdot\frac{-x^2}{2}=\frac{-x^2}{6}$$

Áp dụng: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x}\overset{\text{VCB}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{6}}{x^2}=\frac{-1}{6}$.

Vậy giới hạn cần tính bằng $\frac{-1}{6}$.

b) $\ln\left(x^2+x+2\right)\mathrm{d}x=\int\ln\left(x^2+x+2\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+2\right)-\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(\ln\left(x^2+x+2\right)\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+2\right)-\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+2\right)-2\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+2\right)-2\int\left(1-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\right)dx$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+2\right)-2\left(x-\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)+C$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+2\right)-2x+\sqrt{7}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Câu 3. $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos\frac{x}{2}}>0, \forall x\in(0,1]$. Điểm bất thường $x=0$.

Ta có: $\dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos\frac{x}{2}}\sim\dfrac{x\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{8}{x^{1/2}}$, mà $\int_0^1\dfrac{8}{x^{1/2}}$ hội tụ (vì $\alpha=\frac{1}{2}\in(0,1)$)

$\Rightarrow \int_0^1\dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos\frac{x}{2}}dx$ là tích phân hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 4. Ta đi chứng minh $\dfrac{x^4}{x^2+y^4}\le x^2, \forall(x,y)\ne(0,0)$ **(*)**

Thật vậy, **(*)** $\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{x^2+y^4}\le x^2 \Leftrightarrow x^4\le x^4+x^2y^4$, luôn đúng $\forall(x,y)\ne(0,0)$.

$\Rightarrow$ **(*)** là đúng. Vậy ta có: $0\le\dfrac{x^4}{x^2+y^4}\le x^2, \forall(x,y)\ne(0,0)$

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2=0\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4}{x^2+y^4}=0$ (theo nguyên lý kẹp).

Câu 5. Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}^2$.

+) Tìm điểm dừng: $\begin{cases}z'_x=4x^3+4x=0\\ z'_y=4y^3-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\vee y=\pm1\end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số có 3 điểm dừng là $M_1(0,0), M_2(0,1)$ và $M_3(0,-1)$.

+) Ta có: A = $z''_{xx}=12x^2+4, B=z''_{xy}=0, C=z''_{yy}=12y^2-4$.

$\Rightarrow B^2 - AC = \left(12x^2+4\right)\left(4-12y^2\right)$.

- Tại điểm $M_1(0,0)$ ta có: $B^2 - AC = 16 > 0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $M_1(0,0)$.

- Tại các điểm $M_2(0,1)$ và $M_3(0,-1)$, ta có: $\begin{cases} B^2 - AC = -32 < 0 \\ A = 4 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $M_2(0,1)$ và $M_3(0,-1)$. Giá trị cực tiểu cùng bằng $z_{CT} = z(0,1) = z(0,-1) = -1$.

Câu 6. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \arctan\dfrac{x+1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$\Rightarrow x=0$ và $x=-1$ là các điểm gián đoạn của hàm số.

- Tại điểm $x=-1$, xét giới hạn:

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{\arctan\dfrac{x+1}{x}} = +\infty \left(\text{vì } \arctan\frac{x+1}{x} \overset{x\to(-1)^+}{\sim} 0^+ \right)$$

$\Rightarrow x=-1$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

- Tại điểm $x=0$, xét các giới hạn:

$$\lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\arctan\dfrac{x+1}{x}} = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2}} \left(do\ \frac{x+1}{x} \overset{x\to0^+}{\sim} +\infty \right)$$

$$\lim_{x\to0^-} y = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\arctan\dfrac{x+1}{x}} = \frac{1}{\dfrac{-\pi}{2}} \left(do\ \frac{x+1}{x} \overset{x\to0^-}{\sim} -\infty \right)$$

$\Rightarrow x=0$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số (điểm gián đoạn bỏ được).

Câu 7. Đặt $F(x,y,z) = (x+y)z + e^{xyz}$.

Ứng với $x=0, y=1$, thay vào phương trình đã cho ta có: $(0+1)z + e^0 = 0 \Leftrightarrow z = -1$.

Gọi điểm $M(0,1,-1)$. Ta có: $F_x' = z + zye^{xyz}, F_y' = z + zxe^{xyz}$, $F_z' = x + y + xye^{xyz}$.

$$z_x'(0,1) = \frac{-F_x'(M)}{F_z'(M)} = \frac{-2}{1} = -2, \quad z_y' = (0,1) = \frac{-F_y'(M)}{F_z'(M)} = \frac{-1}{1} = -1.n$$

$\Rightarrow \mathrm{d}z(0,1) = z_x'(0,1)\mathrm{d}x + z_y'(0,1)\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y.$

Câu 8. Áp dụng bất đẳng thức tích phân:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sqrt{1-f(x)}\cdot\sqrt{1+f(x)}\mathrm{d}x\\ &\le \sqrt{\int_0^1 (1-f(x))\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 [1+f(x)]\mathrm{d}x} = \sqrt{\left(1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(1+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)}\\ &= \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $f(x)=1$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 9. $f(x)=\sqrt{x+2}+x^2f\left(x^3\right), \forall x\in[-1,1]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$$

Đặt $u=x^3\Rightarrow \mathrm{d}u=3x^2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=-1\\ x=1\Rightarrow u=1\end{cases}$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(u)\frac{\mathrm{d}u}{3}=\frac{1}{3}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$. Do đó:

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_{-1}^1\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x=\left(\sqrt{(x+2)^3}\right)\Big|_{-1}^1=13\sqrt{13}-1.$$

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm chu kỳ của hàm số $y = 4\cos(5x) + 3\sin(5x)$.

Câu 2 *(2 điểm)*. Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\tan^2 x}$

b) $\int \ln\left(x^2 - x + 2\right)\mathrm{d}x$,

Câu 3 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân $\int_0^1 \dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos\dfrac{x}{3}}\mathrm{d}x$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^4}{x^4+y^2}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Tim và phân loại điểm gián đoạn $y = \left(\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)^{-1}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Phương trình $(x+y)z - e^{xyz} = 0$ xác định hàm ẩn $z = z(x,y)$.

Tính $dz(0,1)$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[0,1],\ |f(x)|\le 1,\ \forall x\in[0,1]$.

Chứng minh rằng $\int_0^1\sqrt{1-f^2(x)}\mathrm{d}x = \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thoả mãn điều kiện:

$f(x) = \sqrt{4-x^2} + x^2 f\left(x^3\right)$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải tham khảo đề số 1

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x-\arctan x}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+1}$. Tính đạo hàm cấp cao $f^{(50)}(x)$

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^5\sqrt{\left|x^2-9\right|}\mathrm{d}x$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x+4\cos x}{4\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Chỉ số Shannon đo lường mức độ đa dạng của một hệ sinh thái, trong trường hợp có hai loài, được xác định theo công thức: $H=-x\ln x-y\ln y$, ở đó x, y là tỷ lệ các loài, thoả mãn $\begin{cases}x>0, y>0\\ x+y=1\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của H.

Câu 7 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng $\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 8 *(1 điểm)* Cho $z=f(x,y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z-xe^{\frac{z}{y}}=0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,02;0,99)$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}}\right)$.

Câu 10 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x-\arctan x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\arctan x}{x}}=\dfrac{1-0}{1-0}=1$

Giải thích:

$+\begin{cases}\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ (theo nguyên lý kẹp)

$+)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0.$

Vậy $L=1$.

Câu 2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\dfrac{1}{(x-1)^2}=(x-1)^{-2}$. Do đó:

$f^{(50)}(x)\ =(-2)(-3)(-4)\dots(-50)(-51)(x-1)^{-52}=(-1)^{50}51!\cdot\dfrac{1}{(x-1)^{52}}=\dfrac{51!}{(x-1)^{52}},\forall x\neq1$

Vậy $f^{(50)}(x)=\dfrac{51!}{(x-1)^{52}},\forall x\neq1.\quad -Q+$

Câu 3.

$I=\int_0^5\sqrt{|x^2-9|}\mathrm{d}x=\int_0^3\sqrt{3^2-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_3^5\sqrt{x^2-3^2}\,\mathrm{d}x$

$=\left(\dfrac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x}{3}\right)\Bigg|_0^3+\left(\dfrac{x\sqrt{x^2-9}}{2}-\dfrac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|\right)\Bigg|_3^5$

$=\dfrac{9\pi}{4}+10-\dfrac{9}{2}\ln3$

Câu 4. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin x+4\cos x}{4\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{24}{25}(4\sin x+3\cos x)+\frac{7}{25}(4\cos x-3\sin x)}{4\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{4\cos x-3\sin x}{4\sin x+3\cos x}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{24x}{25}+\dfrac{7}{25}\cdot\ln|4\sin x+3\cos x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{12\pi}{25}+\dfrac{7}{25}\ln\dfrac{4}{3}$

Câu 5. Ta chứng minh: $\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin^2 y}\le 1$ với $(x,y)\to(0,0)$.**(*)**

Thật vậy, **(*)** $\Leftrightarrow \sin^2 x\le \sin^2 x+\sin^2 y$, luôn đúng với $(x,y)\to(0,0)$.

Áp dụng: $0\le\left|\dfrac{\sin^3 x}{\sin^2 x+\sin^2 y}\right|=\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin^2 y}|\sin x|\le|\sin x|$, khi $(x,y)\to(0,0)$.

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|\sin x|=0\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{\sin^3 x}{\sin^2 x+\sin^2 y}\right|=0$ theo nguyên lý kẹp

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x+\sin^2 y}=0.$$

Câu 6.

Ta có: $\begin{cases}x+y=1\\ x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\ 0<x<1\end{cases}\Rightarrow H=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)=f(x)$.

Xét $f(x)$ trên $(0,1)$. Ta có: $f'(x)=-\ln x-1+\ln(1-x)+1=\ln(1-x)-\ln x$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=\ln(1-x)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

Xét dấu: $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$; $\quad f'(x)<0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \max H=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2$, đạt tại $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 7. Xét hàm số $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}$ liên tục trên $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Dùng khai triển Maclaurin với phần dư Lagrange, ta có:

$$f(x)=\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{\cos\left(c+\frac{5\pi}{2}\right)}{5!}x^5\right]-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}=\frac{\cos\left(c+\frac{5\pi}{2}\right)}{5!}x^5,\quad (c\in(0,x)),\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Đánh giá: $\dfrac{5\pi}{2}<c+\dfrac{5\pi}{2}<3\pi\Rightarrow\cos\left(c+\dfrac{5\pi}{2}\right)<0$

$$\Rightarrow f(x)<0, \forall x \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}, \forall x \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh (đẳng thức không xảy ra).

Câu 8. $F(x,y,z)=z-xe^{\frac{z}{y}}$, hàm ẩn $z=f(x,y)$ xác định bởi $F(x,y,z)=0$

$$F_x^{'}=-e^{\frac{z}{y}};\quad F_y^{'}=\frac{xz}{y^2}e^{\frac{z}{y}};\quad F_z^{'}=1-\frac{x}{y}e^{\frac{z}{y}}$$

Chọn $\begin{cases}x_0=0, \Delta x=0,02\\ y_0=1, \Delta y=-0,01\end{cases}$. Ứng với $x=0, y=1$ thì $z=0.e^{\frac{z}{1}} \Rightarrow z=0 \Rightarrow f(0;1)=0$.

$$\Rightarrow f_x^{'}(0;1)=\frac{-F_x^{'}(0;1;0)}{F_z^{'}(0;1;0)}=1;\quad f_y^{'}(0;1)=\frac{-F_y^{'}(0;1;0)}{F_z^{'}(0;1;0)}=0$$

Suy ra:

$$f(0,02;0,99)=f\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right) \approx f(0;1)+f_x^{'}(0;1)\cdot\Delta x+f_y^{'}(0;1)\cdot\Delta y=0+1.0,02+0.(-0,01)=0,02$$

Vậy $f(0,02;0,99)\approx 0,02$.

Câu 9. Xét giới hạn:

$$L=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\sqrt[n]{\frac{n\cdot(n+1)\ldots(2n-2)(2n-1)}{n^n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{0}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ trong đó $f(x)=\ln(1+x)$ liên tục, khả tích trên $[0,1]$

$$=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln 2-(x-\ln(1+x))\Big|_0^1=2\ln 2-1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}}\right)=e^L=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

Câu 10. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x}_{I_2}$

$f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}>0$ liên tục trên $(0;+\infty)$.

+) I_1 có điểm bất thường $x=0$.

Khi $x\to 0^+$ thì $f(x)\sim\dfrac{2x}{x\sqrt{x}}\sim\dfrac{2}{x^{1/2}}$, mà $\int_0^1\dfrac{2}{x^{1/2}}\mathrm{d}x$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{1}{2}\in(0;1)$)

$\Rightarrow I_1$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\beta}}=0$, với $\beta>0$ nhỏ tuỳ ý.

Chọn $\beta=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\ln(1+2x)<(2x)^{1/3}$ khi $x\to+\infty$

Khi $x\to+\infty$ thì $0<f(x)<\dfrac{(2x)^{1/3}}{x\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{x^{7/6}}$, mà $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2}}{x^{7/6}}dx$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{7}{6}>1$)

$\Rightarrow I_2$ hội tụ theo tính chất so sánh. Tóm lại, I_1,I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

Cách 2: Để xét I_2, ta có thể chọn hàm $g(x)=\dfrac{1}{x^{7/6}}$, ta có trình bày sau:

Xét $g(x)=\dfrac{1}{x^{7/6}}>0,\forall x\geq 1$. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x^{7/6}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x^{1/3}}\text{ (dạng }\frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{1+2x}}{\dfrac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^{-2/3}+2x^{1/3}}=0$$

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{7/6}}\mathrm{d}x$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{7}{6}$)

$\Rightarrow I_2=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ theo hệ quả tiêu chuẩn so sánh.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x-\operatorname{arccot} x}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$. Tính đạo hàm cấp cao $f^{(50)}(x)$

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^5\sqrt{\left|x^2-16\right|}dx$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{5\sin x+6\cos x}{6\sin x+5\cos x}\mathrm{d}x$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin^3 y}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Chỉ số Shannon đo lường mức độ đa dạng của một hệ sinh thái, trong trường hợp có hai loài, được xác định theo công thức: $H=-x\ln x-y\ln y$, ở đó x, y là tỷ lệ các loài, thoả mãn $\begin{cases}x>0, y>0\\ x+y=1\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của H.

Câu 7 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng $\sin x\le x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}, \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Cho $z=f(x,y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z-ye^{\frac{z}{x}}=0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,99;0,02)$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right)$.

Câu 10 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Lời giải chi tiết tham khảo đề số 1

Câu 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x-\operatorname{arccot} x}=1$.

Câu 2. $f^{(50)}(x)=\dfrac{51!}{(x+1)^{52}}$.

Câu 3. $\int_0^5 \sqrt{\left|x^2-16\right|}=4\pi+\dfrac{15}{2}-8\ln 2$.

Câu 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{5\sin x+6\cos x}{6\sin x+5\cos x}\mathrm{d}x=\dfrac{30\pi}{61}+\dfrac{11}{61}\ln\dfrac{6}{5}$.

Câu 6. $\max H=\ln 2$ đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. Tương tự đề 1 (dấu bằng cũng không xảy ra).

Câu 8. $f(0,99;0,02)\approx 0,02$.

Câu 9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right)=\dfrac{4}{e}$.

Câu 10. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ hội tụ.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^x$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x\operatorname{arccot} x$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,\mathrm{d}x$.

Câu 4 *(1 diểm)*. Tính tích phân $\int_0^1 \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z = 4(x-y)-x^2-y^2$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)^2, & y\neq 0,\\ 0, & y=0\end{cases}$.

a) Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại điểm $A(1,0)$.

b) Tính $f_y'(1,0)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho $0<x,y<\dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh $\tan\dfrac{x+y}{2}\le\dfrac{\tan x+\tan y}{2}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x\sin x}{1+3^x}\mathrm{d}x$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1. $L=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}}$.

Xét $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$)

$$=\lim\frac{\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}}{1}=1\Rightarrow \ L=\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^K=e$$

Vậy $L=e.$

Câu 2.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên bên phải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi=a$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-\pi x)=\lim_{x\to-\infty}x(\operatorname{arccot} x-\pi)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arccot} x-\pi}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

$\Rightarrow y=\pi x+1$ là tiệm cận xiên (bên trái) duy nhất của đồ thị hàm số.

Câu 3. $I=\int_0^{\pi/4}\tan^3 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\tan x.\left(1+\tan^2 x\right)dx-\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx$

$$=\int_0^{\pi/4}\tan x\,d(\tan x)+\int_0^{\pi/4}\frac{-\sin x}{\cos x}dx=\left(\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{1-\ln 2}{2}$$

Vậy $I=\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

Câu 4.

$$I=\int_0^1\ln\left(x^2+x+1\right)dx=\int_0^1\ln\left(x^2+x+1\right)d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+x+1\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln 3-\int_0^1\left[2-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]dx=\frac{3}{2}\ln 3-\left(2x-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\ln 3-2+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Vậy $I=\frac{3}{2}\ln 3-2+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Câu 5. $z(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$

+) Tập xác định: $\mathbf{D}=\mathbb{R}^2$.

+) $z_x'=4-2x;\quad z_y'=-4-2y$

Giải hệ $\begin{cases} z_x'=0 \\ z_y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(2,-2)$ là điểm dừng

+) Ta có: $A=z_{xx}''=-2;\quad B=z_{xy}''=0;\quad C=z_{yy}''=-2$

$\Rightarrow \begin{cases} B^2-AC=-4<0 \\ A=-2<0 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số đã cho đạt cực trị tại duy nhất 1 điểm là $M(2,-2)$, đây

là điểm cực đại, $z_{CĐ}=z(2,-2)=8$.

Câu 6.

a) Ta có $\forall y\neq 0: 0\leq |f(x,y)|=\left|y\arctan\left(\frac{x}{y}\right)^2\right|=|y|\cdot\left|\arctan\left(\frac{x}{y}\right)^2\right|\leq |y|\cdot\frac{\pi}{2}y=0,$ **(1)**

$f(x,y)=0\Rightarrow |f(x,y)|=|0|\cdot\frac{\pi}{2}$. **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** ta có: $0\leq |f(x,y)|\leq |y|\cdot\frac{\pi}{2},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, mà $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}|y|\cdot\frac{\pi}{2}=0$, nên theo nguyên lý kẹp ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}|f(x,y)|=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)=0=f(1,0)\Rightarrow f(x,y)$ liên tục tại $B(1,0)$.

b) Xét giới hạn: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\arctan\dfrac{1}{y^2}-0}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\arctan\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f_y'(1,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0}=\dfrac{\pi}{2}$

Câu 7. Xét hàm số $f(x)=\tan x$ trên $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x};\quad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, áp dụng bất đẳng thức hàm lồi:

$$f(x)+f(y)\ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\Leftrightarrow \tan x+\tan y\ge 2\tan\frac{x+y}{2},\forall x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x+\tan y}{2}\ge \tan\frac{x+y}{2},\forall x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $x=y,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Câu 8. $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+3^x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x\sin x}{1+3^x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+3^x}\mathrm{d}x$

Xét $I_1=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x\sin x}{1+3^x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{-\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$I_1=\int_{\pi/2}^{0}\frac{-t\sin(-t)}{1+3^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{1+3^{-t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+3^{-x}}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{x\sin x}{1+3^x}+\frac{x\sin x}{1+3^{-x}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{x\sin x}{1+3^x}+\frac{3^x x\sin x}{1+3^x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi/2}x\,\mathrm{d}(-\cos x)=(-x\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(-\cos x)\mathrm{d}x=1$$

Vậy $I=1$.

Câu 9. $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}=\int_0^1\frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}}_{I_2}$

$f(x)=\dfrac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}=\dfrac{\arctan x}{x\sqrt{x}+2\sin^2\dfrac{x}{2}}>0$ là hàm liên tục trên $(0,+\infty)$.

+) I_1 có điểm bất thường $x=0$.

Khi $x\to 0^+$ ta có: $(1-\cos x)\sim\dfrac{x^2}{2}$, là VCB bậc cao hơn $x\sqrt{x}$ khi $x\to 0$

$\Rightarrow$ Khi $x\to 0^+$ thì $f(x)\sim\dfrac{x}{x\sqrt{x}}\sim\dfrac{1}{x^{1/2}}$, mà $\int_0^1\dfrac{1}{x^{1/2}}dx$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$)

$\Rightarrow I_1$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Xét I_2. Với $x\geq 1$, ta có: $\begin{cases} x\sqrt{x}+(1-\cos x)\geq x\sqrt{x}>0 \\ 0<\arctan x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow 0<f(x)<\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x\sqrt{x}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x^{3/2}},\forall x\geq 1$, mà $\int_1^{+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x^{3/2}}dx$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$)

$\Rightarrow I_2$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. Vậy I_1, I_2 hội tụ

$\Rightarrow I$ hội tụ.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=x\arctan x$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x\,dx$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^1 \ln\left(x^2-x+1\right)dx$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z=4(y-x)-y^2-x^2$.

Câu 6 *(2 điểm)*. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases} x\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

a) Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại điểm $B(0,1)$.

b) Tính $f'_x(0,1)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho $0<x,y<\dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh $\cot\dfrac{x+y}{2}\leq\dfrac{\cot x+\cot y}{2}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\sin x}{1+2^x}dx$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x\,dx}{x\sqrt{x}+x-\sin x}$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)

Lời giải chi tiết tham khảo đề số 3

Câu 1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{e}$.

Câu 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}=a$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=-1$$

$\Rightarrow y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ là tiệm cận xiên bên phải.

Tương tự ta tìm được $y=\dfrac{-\pi}{2}x-1$ là tiệm cận xiên bên trái.

Câu 3. $\int_0^{\pi/4}\tan^4 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\left[\tan^2 x\cdot\left(1+\tan^2 x\right)-\left(1+\tan^2 x\right)+1\right]dx$

$$=\left(\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.$$

Câu 4. $\int_0^1\ln\left(x^2-x+1\right)dx=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}-2$

Câu 5. Hàm số đạt cực trị tại duy nhất điểm $M(-2,2)$ (cực đại), $z_{\max}=z(-2,2)=8$.

Câu 6. a) $f(x,y)$ liên tục tại $B(0,1)$.

b) $f_x'(0,1)=\dfrac{\pi}{2}$

Câu 7. Tương tự đề trên.

Câu 8. *I* = 1

Câu 9. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x\,dx}{x\sqrt{x}+x-\sin x}$ hội tụ.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm a để hàm số sau liên tục tại điểm $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{a-x}, & \text{khi } x>1\\ \arccos x, & \text{khi } 0<x\le 1\end{cases}$$

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm hàm ngược của hàm số $y=2^x-2^{-x}$

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho hai hàm f(x)= x^3 , g(x)= x^2, $-1\le x\le 3$. Tìm số $c\in(-1,3)$

sao cho $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{g(3)-g(-1)}$. Điều này có mâu thuẫn với định lý Cauchy hay không?

Giải thích?

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho hai hàm số $f(x),g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)\le g(x)$ với mọi x. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng thì $f(f(x))\le g(g(x))$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{3x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+2\sin x}{1+\sin 2x}\right)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính độ dài cung $y=\ln(\cos x), 0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tìm tiệm cận xiên của đường cong $\begin{cases}x=\dfrac{t^3}{1-t^3}\\ y=\dfrac{t^2}{1-t}\end{cases}$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2+2^2}}+\ldots+\frac{n-1}{\sqrt{4n^2+(n-1)^2}}\right)$$

Câu 10 *(1 điểm)*. Cho hàm f(x) lồi, khả tích trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1. Ta có: $f(1)=\arccos 1=0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a-1},\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\arccos x=\arccos 1=0$

+) $f(x)$ liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \sqrt[3]{a-1}=0\Leftrightarrow a=1$

Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Với $x\in\mathbb{R}$, xét phương trình $y=2^x-2^{-x}\Leftrightarrow 2^x y=\left(2^x\right)^2-1$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-y\cdot 2^x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=\dfrac{y-\sqrt{y^2+4}}{2}<\dfrac{y-|y|}{2}=0\ (L) \\ 2^x=\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}>\dfrac{y+|y|}{2}=0\ (TM) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\log_2\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}=0=f^{-1}(y)$$

$\Rightarrow$ Hàm ngược của hàm số đã cho là $f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2},x\in\mathbb{R}$.

Câu 3. Ta có: $f'(x)=3x^2, g'(x)=2x,\forall x\in(-3,1)$

Do đó: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(-3)-f(1)}{g(-3)-g(1)}\Leftrightarrow\dfrac{3c^2}{2c}=\dfrac{(-3)^3-1^3}{(-3)^2-1}\Leftrightarrow c=\dfrac{-7}{3}\in(-3,1)$.

Như vậy tồn tại hằng số c để thoả mãn đẳng thức $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(-3)-f(1)}{g(-3)-g(1)}$, điều này không mâu thuẫn với định lý Cauchy.

Thật vậy, định lý Cauchy áp dụng cho $g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$. Bài này ta có $g'(0)=0$, với $0\in(-3,1)$ thế nên bài này không thoả mãn điều kiện định lý Cauchy $\rightarrow$ bài này không nằm trong vùng áp dụng định lý Cauchy, không mâu thuẫn.

Câu 4. Vì f là hàm đơn điệu tăng, mà theo bài ra $f(x)\le g(x)$

$\Rightarrow f(f(x))\le f(g(x))$. Lại có $f(g(x))\le g(g(x))$ (vì $f(y)\le g(y)$)

$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5. $\int_0^{+\infty} \frac{3x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 2\arctan x - \ln|x+1|\right)\Bigg|_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\left(A^2+1\right) + 2\arctan A - \ln|A+1|\right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\ln\frac{\sqrt{A^2+1}}{A} + 2\arctan A\right)$$

$$= \ln 1 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Câu 6.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \ln\left(\frac{1+2\sin x}{1+\sin 2x}\right) \overset{\text{VCB}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\frac{1+2\sin x}{1+\sin 2x} - 1\right) \quad \left(\text{do } \lim_{x\to 0} \frac{1+2\sin x}{1+\sin 2x} = 1\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{2\sin x - \sin 2x}{1+\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right) - \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)}{1+\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^3 + o\left(x^3\right)}{1+\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^3}{1+\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sin 2x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Vậy L=1.

Câu 7. Ta có: $y'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Độ dài cung cần tính là:

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \left(\text{do } \cos x > 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d(\sin x)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}$$

$$= \frac{-1}{2} \ln\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) \text{ (đvđd).}$$

Vậy độ dài cung cần tính là $\ln(2+\sqrt{3})$ (đvđd).

Câu 8.

− Khi $t \to \pm\infty$ thì $\lim_{t\to\pm\infty} x = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^3}{1-t^3} = -1 \Rightarrow$ trường hợp này không có tiệm cận xiên.

- Khi $t \to t_0$, với $t_0 \neq 1$ thì $\lim\limits_{t \to t_0} x = \dfrac{t_0^3}{1-t_0^3}$ hữu hạn $\Rightarrow$ trường hợp này không có tiệm cận Xiên.

- Khi $t \to 1$ thì $x \to \pm\infty$. Ta có:

$$\lim_{t\to 1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2}{1-t} \cdot \frac{1-t^3}{t^3} = \lim_{t\to 1} \frac{1+t+t^2}{t} = 3 = a$$

$$b = \lim_{t\to 1}(y - ax) = \lim_{t\to 1}(y-3x) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2}{1-t} - \frac{3t^3}{1-t^3}\right) = \lim_{t\to 1} \frac{t^2\left(t^2+t+1\right)-3t^3}{(1-t)\left(1+t+t^2\right)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t^2(1-t)^2}{(1-t)\left(1+t+t^2\right)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2(1-t)}{1+t+t^2} = 0$$

$\Rightarrow y = 3x$ là tiệm cận xiên của đường cong đã cho.

Câu 9. Giới hạn đã cho được viết lại là:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2+k^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2+k^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2+k^2}} \left(\text{ vì với } k=0 \text{ thì } \frac{k}{\sqrt{4n^2+k^2}} = 0\right)$$

Xét giới hạn:

$$K = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2+k^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \text{ (với } f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \text{ liên tục, khả tích trên } [0,1] \text{)}$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x = \left(\sqrt{4+x^2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{5}-2$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2+k^2}} = 1\cdot(\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}-2.$$

Câu 10. Với mỗi $x \in [a,b]$, luôn tồn tại duy nhất $t \in [0,1]$ sao cho: $x = ta + (1-t)b$.

Do đó có thể đổi biến $x = ta + (1-t)b \Rightarrow \mathrm{d}x = (a-b)\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

- Khi $x = a$ thì $t = 1$.

- Khi $x=b$ thì $t=0$.

Lúc này: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{b-a}\int_1^0 f(ta+(1-t)b)\cdot(a-b)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t.$

Áp dụng tính chất hàm lồi: $f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b),\forall t\in[0,1]$.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t \le \int_0^1 [tf(a)+(1-t)f(b)]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 f(a)+\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\bigg|_0^1 f(b)=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm a để hàm số sau liên tục tại điểm $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{a+x}, & \text{khi } x>1\\ \arccos x, & \text{khi } 0<x\le 1\end{cases}$$

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm hàm ngược của hàm số $y=3^x-3^{-x}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho hàm số $f(x)=x^3, g(x)=x^2, -3\le x\le 1$. Tìm số $c\in(-3,1)$ sao cho $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(-3)-f(1)}{g(-3)-g(1)}$. Điều này có mâu thuẫn với định lý Cauchy hay không? Giải thích?

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho hai hàm số $f(x), g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)\le g(x)$ với mọi x. Chứng minh rằng nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng thì $f(f(x))\le g(g(x))$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tính tích phân $\int_0^{+\infty}\dfrac{x+3}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\ln\left(\dfrac{1-2\sin x}{1-\sin 2x}\right)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tính độ dài cung $y=\ln(\sin x),\ \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tìm tiệm cận xiên của đường cong $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{1-t}\\ y=\dfrac{3t^3}{1-t^3}\end{cases}$.

Câu 9 *(1 điểm)*. Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{n-1}{\sqrt{4n^2-(n-1)^2}}\right)$$

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho hàm f(x) lõm, khả tích trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Lời giải tham khảo đề số 5

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính $\int \frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-x+1}+\sqrt{x+1}}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi elip: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ quay quanh trục Ox.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 4x}{x^2}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số $y=\frac{x}{x^3-2x^2+x-2}$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho hàm số $z=x^3y^2+x^2y^2-3xy+2$. Tính $\mathrm{d}z(1,1)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z=xy+(\alpha-x-y)(2x+3y)$; α là tham số thực.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tính tích phân kép $\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, với $D:\begin{cases}1\le x^2+y^2\le 4\\ x\le y\le \sqrt{3}x\end{cases}$

Câu 9 *(1 điểm)*. Tồn tại hay không hàm f sao cho:

$$f(1)=-f(1),\ f(0)=0 \text{ và } f''(x)<0,\ \forall x\in(-2,2)$$

Câu 10 *(1 điểm)*. Cho hàm số: $z=x\left[\sin\left(x^2-y^2\right)+\left(x^2-y^2\right)^{2018}+100\left(x^2-y^2\right)^{2019}\right]$.

Chứng minh $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial x}=zy$.

ĐÁP ÁN ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)

Câu 1. $\int \frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$

Câu 2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}+\sqrt{x+1}} > 0, \forall x \geq 1.$

Điểm bất thường của tích phân suy rộng là $+\infty$. Ta có:

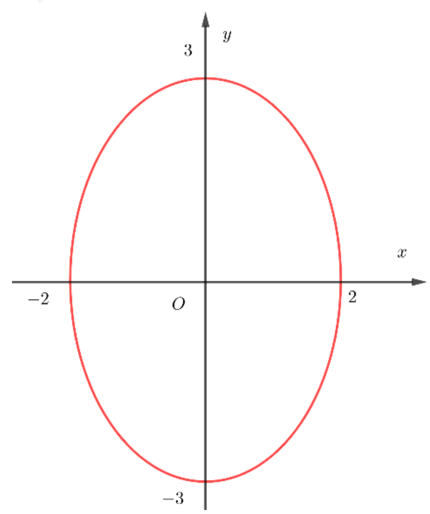
$\frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}+\sqrt{x+1}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$, mà $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ hội tụ (do $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

$\Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-x+1}+\sqrt{x+1}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 3.

Chỉ cần quay nửa trên của elip (ứng với $y \geq 0$) thì sẽ thu được vật thể đã cho. Nửa trên của elip là miền giới hạn bởi:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}, y = 0, x = -2, x = 2.$$



Quay miền này quanh trục Ox ta thu được vật thể có thể tích là:

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$
$$= 24\pi(\text{dvtt})$$

Câu 4.

$L = \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x+4\sin 4x}{2x}$ (dạng $\frac{0}{0} - L'Hospital$)

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{-\cos x+16\cos 4x}{2} = \frac{-\cos 0+16\cos 0}{2} = \frac{15}{2}.$

Vậy giới hạn cần tính bằng $\frac{15}{2}$

Câu 5. $y = \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \dfrac{x}{(x-2)\left(x^2+1\right)}$.

Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow x = 2$ là điểm gián đoạn của hàm số.

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x}{x^2+1} = +\infty \left(\text{do } \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty, \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5} > 0 \right)$$

$\Rightarrow x = 2$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

Câu 6.

$z'_x = 3x^2y^2 + 2xy^2 - 3y \qquad \Rightarrow z'_x(1,1) = 2$

$z'_y = 2x^3y + 2x^2y - 3x \qquad \Rightarrow z'_y(1,1) = 1$

$\Rightarrow \mathrm{d}z(1,1) = z'_x(1,1)\mathrm{d}x + z'_y(1,1)\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

Câu 7.

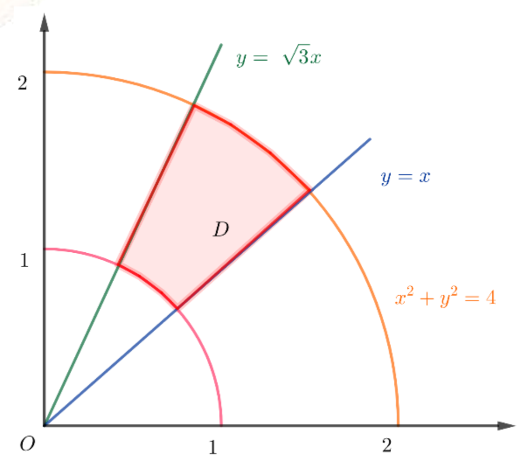
Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = -4y - 4x + 2\alpha = 0 \\ z'_y = -4x - 6y + 3\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(0, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ là điểm dừng duy nhất của hàm số.

$A = z''_{xx} = -4, \quad B = z''_{xy} = -4, \quad C = z''_{yy} = -6 \Rightarrow \begin{cases} B^2 - AC = -8 < 0 \\ A = -4 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $M\left(0, \dfrac{\alpha}{2}\right)$, giá trị cực đại $z_{\text{CĐ}} = \dfrac{3}{4}\alpha^2$.

Câu 8.



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$.

Miền D trở thành $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Tích phân cần tính là:

$$I = \iint_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}r = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 (\cos\varphi + \sin\varphi) r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{r^3}{3}\Big|_{r=1}^{r=2}\mathrm{d}\varphi=\frac{7}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{7}{3}(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/3}$$

$$=\frac{7}{6}(\sqrt{3}-1).$$

Câu 9. Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ thoả mãn đề bài.

Vì f khả vi tới cấp 2 trên (-2,2) $\Rightarrow f$ khả vi trên (-2,2), liên tục trên [-2,2].

Áp dụng định lý Lagrange cho $f(x)$ trên [0,1]:

Tồn tại $\alpha\in(0,1)$ sao cho $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)$ (vì $f(0)=0$)

Tương tự, áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[-1,0]$, khả vi trên $(-1,0)$ ta có: Tồn tại $\beta\in(-1,0)$ sao cho $f'(\beta)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=-f(-1)=f(1)$

Như vậy, tồn tại $\alpha,\beta\in(-2,2),\alpha\neq\beta$ sao cho $f'(\alpha)=f'(\beta)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $f'(x)>0,\forall x\in(-2,2)\Rightarrow$ không tồn tại hàm f thoả mãn đề bài.

Câu 10.
Đặt $u=x^2-y^2$ và $f(u)=\sin u+u^{2018}+100u^{2019}$.
Ta có: $z=xf(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(u)+xf'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f(u)+xf'(u)\cdot 2x=f(u)+2x^2f'(u)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=xf'(u)\cdot(-2y)=-2xyf'(u)$$
$$\Rightarrow x^2\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial x}=-2x^3yf'(u)+xyf(u)+2x^3yf'(u)=xf(u)\cdot y=zy.$$

$\Rightarrow$ đpcm.

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tính $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x+1}}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi elip: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ quay quanh trục Ox.

Câu 4 *(1 điểm)*. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos x}{x^2}$.

Câu 5 *(1 điểm)*. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số $y=\frac{x}{x^3+2x^2+x+2}$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho hàm số $z=x^2y^3+x^2y^2-3xy+2$. Tính $dz(1,1)$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Tìm cực trị của hàm số $z=xy+(\alpha-x-y)(2x+3y)$; α là tham số thực.

Câu 8 *(1 điểm)*. Tính tích phân kép $\iint_D (x+y)dxdy$, với $D:\begin{cases}1\le x^2+y^2\le 4\\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\end{cases}$

Câu 9 *(1 điểm)*. Tồn tại hay không hàm f sao cho:

$$f(1)=-f'(1),\ f(0)=0 \text{ và } f''(x)>0,\ \forall x\in(-2,2)$$

Câu 10 *(1 điểm)*. Cho hàm số $z=x\left[\sin\left(x^2-y^2\right)+\left(x^2-y^2\right)^{2018}+100\left(x^2-y^2\right)^{2019}\right]$.

Chứng minh $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial x}=zy$.

Lời giải tham khảo đề số 7