HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} > 0,\ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi dương.

Ta có: $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{n}}}{n} = \dfrac{1}{n^{3/2}},$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ là chuỗi dương hội tụ (vì $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 2. Điều kiện: $x \ne 1$. Đặt $Y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ thì chuỗi hàm trở thành: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n-1)} Y^n$ **(1)**.

Ta có: $a_n = \dfrac{n+1}{n(n-1)},\ \forall n \ge 2$. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa **(1)** là:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{n(n-1)}}{\dfrac{n+2}{(n+1)n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{n(n-1)}}{\dfrac{n+2}{(n+1)n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{n^2}}{\dfrac{n}{n^2}} = 1.$$

Khoảng hội tụ của **(1)** là $(-1,\ 1)$.

– Tại $Y = 1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n-1)}$, có $u_n = \dfrac{n+1}{n(n-1)} > 0,\ \forall n \ge 2$.

Ta có: $u_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, mà $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ (vì $\alpha = 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n-1)}$ là chuỗi dương phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.

– Tại $Y = 1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n-1)}(-1)^n$. Xét $v_n = \dfrac{n+1}{n(n-1)},\ \forall n \ge 2$.

+) Vì $v_n = \dfrac{n+1}{n(n-1)} > 0,\ \forall n \ge 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n v_n$ là cuhỗi đan dấu.

+) $v_n - v_{n+1} = \dfrac{n+1}{n(n-1)} - \dfrac{n+2}{(n+1)n} = \dfrac{n+3}{n(n-1)(n+1)} > 0,\ \forall n \ge 2$

$\Rightarrow v_n > v_{n+1},\ \forall n \ge 2 \Rightarrow \{v_n\}$ là dãy đơn điệu giảm khi $n \to \infty$.

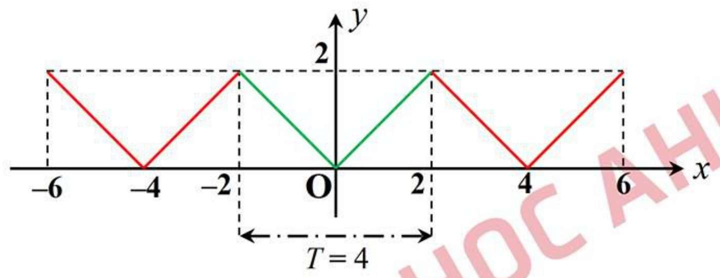
+) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n-1)}(-1)^n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Vậy chuỗi **(1)** hội tụ $\Leftrightarrow -1 \le Y < 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{2x+1}{1-x} < 1 \Leftrightarrow -2 \le x < 0$.

Vậy miền hội tụ cần tìm là $[-2;\ 0)$.

Câu 3.



Với $T = 4$, khai triển Fourier của $f(x)$ là $f(x) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{4} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{4}\right)$.

Vì $f(x)$ là hàm chẵn, nên $b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{T}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{4}{T}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^2 x\mathrm{d}\left(\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= \left.\left(\frac{-2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2 - \int_0^2 \frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = 0 + \left.\left(\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy khai triển Fourier cần tìm là $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}$.

Chú ý: Vì $\left(-1\right)^n-1=\begin{cases}0, & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ -2 & \text{nếu } n \text{ lẻ}\end{cases}$, nên các bạn có thể làm đơn giản hoá kết quả cuối cùng thành: $f\left(x\right)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-8}{\left(2k-1\right)^2\pi^2}\cos\frac{\left(2k-1\right)\pi x}{2}$.

Câu 4.

a) $xy\mathrm{d}y=\left(y^2+x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=y^2\Rightarrow \mathrm{d}u=2y\mathrm{d}y$. Phương trình trở thành: $x\frac{\mathrm{d}u}{2}=\left(u+x\right)\mathrm{d}x$ **(1)**.

Nhận xét nghiệm dưới dạng $x=C$ của phương trình là $x=0$.

Với $x\neq 0,\ \mathrm{d}x\neq 0$ ta có: **(1)** $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{x}\left(u+x\right)\Leftrightarrow u'=\frac{2}{x}u+2\Leftrightarrow u'-\frac{2}{x}u=2$.

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p\left(x\right)=\frac{-2}{x}$ và $q\left(x\right)=2$.

Nghiệm tổng quát:

$$u=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int q\left(x\right)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[C+\int 2e^{\int\frac{-2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=e^{-2\ln|x|}\left[C+\int 2e^{-2\ln|x|}\mathrm{d}x\right]=|x|^2\left(C+\int 2\cdot\frac{1}{|x|^2}\mathrm{d}x\right)=x^2\left(C+\int\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^2\left(C-\frac{2}{x}\right)=Cx^2-2x.$$

Thay $u=y^2\Rightarrow y^2=Cx^2-2x\Leftrightarrow y^2-2x-Cx^2=0$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho, cùng với một nghiệm là $x=0$.

b) $y''+9y=2\cos^2x\Leftrightarrow y''+9y=1+\cos 2x$ **(1)**

+) Phương trình thuần nhất tương ứng: $y''+9y=0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2+9=0\Leftrightarrow \lambda=0\pm 3i$.

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$\overline{y}=e^{0x}\left[C_1\cos\left(3x\right)+C_2\sin\left(3x\right)\right]=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

+) Do $f\left(x\right)=1+\cos 2x=1.e^{0.x}+e^{0.x}\cos 2x$, trong đó $k_1=0$ và $k_2=0\pm 2i$ đều **không** phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $\Rightarrow$ tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$Y=A+B\cos 2x+C\sin 2x\Rightarrow Y'=-2B\sin 2x+2C\cos 2x\Rightarrow Y''=-4B\cos 2x-4C\sin 2x$.

Thay Y, Y', Y'' vào **(1)**, ta có:

$$-4B\cos 2x-4C\sin 2x+9\left(A+B\cos 2x+C\sin 2x\right)=1+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 9A+5B\cos 2x+5C\sin 2x=1+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9A = 1 \\ 5B = 1 \\ 5C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/9 \\ B = 1/5 \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cos 2x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cos 2x.$$

c) $xy'' = y' + x$. Đặt $u = y' \Rightarrow u' = y''$. Phương trình trở thành:

$$xu' = u + x \Leftrightarrow u' = \frac{u}{x} + x \Leftrightarrow u' - \frac{1}{x}u = 1.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p(x) = \frac{-1}{x}$ và $q(x) = 1$.

Nghiệm tổng quát:

$$u = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x) e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C + \int 1.e^{\int \frac{-1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= e^{\ln|x|}\left(C + \int e^{-\ln|x|}\mathrm{d}x\right) = |x|\left(C + \int \frac{1}{|x|}\mathrm{d}x\right) = x\left(C + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$$

(vì C là hằng số âm/dương tuỳ ý)

$$= x\left(C + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = x\left(C + \ln|x|\right).$$

Thay $u = y'$ ta có $y' = x(C + x)$

$$\Leftrightarrow y = \int y'\mathrm{d}x = \int x\left(C + \ln|x|\right)\mathrm{d}x = \int \left(C + \ln|x|\right)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\left(C + \ln|x|\right) - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}\left(\ln|x|\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(C + \ln|x|\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x^2}{2}\left(C + \ln|x|\right) - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(C + \ln|x|\right) - \frac{x^2}{4} + C_2 = \left(\frac{C}{2} - \frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x| + C_2.$$

Đặt $C_1 = \frac{C}{2} - \frac{1}{4}$, ta có nghiệm tổng quát cần tìm là $y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|$.

Câu 5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{13s + 14}{(s+2)^2(s-1)}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1} - \frac{3}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2}\right\}(t)$

$$= 3e^t - 3e^{-2t} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) = 3e^t - 3e^{-2t} + 4e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t)$$

$$= 3e^t - 3e^{-2t} + 4e^{-2t}t = 3e^t + (4t - 3)e^{-2t}.$$

Câu 6. $y^{(3)}+y'=e^t$, biết rằng $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$. Đặt $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}(s)$.

Tác động biến đổi Laplace lên phương trình đã cho với điều kiện ban đầu, ta có:

$$s^3Y(s)+sY(s)=\mathscr{L}\left\{e^t\right\}(s)\Leftrightarrow\left(s^3+s\right)Y(s)=\frac{1}{s-1}\Leftrightarrow Y(s)=\frac{1}{s(s-1)\left(s^2+1\right)}.$$

Tác động biến đổi Laplace ngược lên phương trình trên, ta có:

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)\left(s^2+1\right)}\right\}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s-1}{s^2+1}\right\}(t)$$

$$=\frac{1}{2}e^t-1+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}-\frac{1}{s^2+1^2}\right\}(t)=\frac{e^t}{2}-1+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $y=\frac{e^t}{2}-1+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$.

Câu 7. $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ là 2 chuỗi dương hội tụ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=0,\ u_n>0,\ v_n>0,\ \forall n\ge 1$.

Vì $\lim_{n\to+\infty}u_n=0\Rightarrow$ tồn tại số nguyên dương N_0 sao cho $u_n<1,\ \forall n\ge N_0$.

$\Rightarrow 0<u_nv_n<1\cdot v_n=v_n,\ \forall n\ge N_0$, mà $\sum_{n=N_0}^{+\infty}v_n$ hội tụ (vì $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ hội tụ)

$\Rightarrow \sum_{n=N_0}^{+\infty}u_nv_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_nv_n$ hội tụ (đpcm).

Cách giải khác: Sử dụng tiêu chuẩn so sánh 2 ở dạng giới hạn:

$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ là 2 chuỗi dương hội tụ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}v_n=0,\ u_n>0,\ v_n>0,\ \forall n\ge 1$.

Đặt $b_n=u_nv_n>0,\ \forall n\ge 1$ và xét giới hạn $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_nv_n}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

Mà $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ là chuỗi dương hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ là chuỗi dương hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 8. $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+2)n!}$.

Xét $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$G'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=xe^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế theo x, ta có:

$$G(x)=\int xe^{x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\left(e^{x}\right)=xe^{x}-\int e^{x}\mathrm{d}x=xe^{x}-e^{x}+C,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Mặt khác, ta lại có: $G(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^{n+2}}{(n+2)n!}=0\Leftrightarrow 0.e^{0}-e^{0}+C=0\Leftrightarrow C=1.$

$\Rightarrow G(x)=xe^{x}-e^{x}+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+2)n!}=G(2)=e^{2}+1.$

ĐỀ 5

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20192

Khóa: K64. Nhóm ngành 2. Mã HP: MI1132. Thời gian: 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.***

Câu 1. (1 *điểm*) Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$.

Câu 2. (1 *điểm*) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2x+1}{1-x} \right)^n$.

Câu 3. (1 *điểm*) Cho hàm số $f(x) = |x|$ khi $-2 \le x \le 2$ và tuần hoàn chu kỳ $T = 4$. Khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

Câu 4. (3 *điểm*) Giải các phương trình vi phân:

a) $xy\mathrm{d}y = (y^2 + x)\mathrm{d}x$.

b) $y'' + 9y = 2\cos^2 x$.

c) $xy'' = y' + x$.

Câu 5. (1 *điểm*) Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{13s+14}{(s+2)^2(s-1)} \right\}(t)$.

Câu 6. (1 *điểm*) Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân $y^{(3)} + y' = e^t$, biết rằng $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Câu 7. (1 *điểm*) Cho 2 chuỗi số dương hội tụ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n . v_n)$ hội tụ.

Câu 8. (1 *điểm*) Tính tổng $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+2)n!}$.

HẾT