

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: **MAT2502**

Số tín chỉ: 4

Đề số:

Dành cho sinh viên khoá: **K66** Ngành học: **CLC Máy tính và khoa học thông tin, Khoa học Dữ Liệu**
Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. a. Định nghĩa chuỗi lũy thừa. Tính bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 1}.$$

b. Tính tổng của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}, \quad -1 < x < 1.$$

c. Khai triển hàm $f(x) = 2|x| + 1$ thành chuỗi Fourier trên $[-\pi, \pi]$.

Câu 2. a. Nêu định nghĩa giới hạn lặp của hàm 2 biến số? Phát biểu định lý về mối quan hệ giữa giới hạn lặp và giới hạn kép? Tìm các giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, trong đó

$$f(x, y) = \frac{\cos(5x) - \cos(5y)}{2x^2 + y^2}.$$

b. Định nghĩa đạo hàm theo hướng. Tính đạo hàm của hàm số $f(x, y) = x^5 y^3$ tại $(-1, 2)$ theo hướng của vectơ $v(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Câu 3. a. Tính đạo hàm riêng cấp cao sau $\frac{\partial^{17} f(x, y)}{\partial x^{10} \partial y^7}$ trong đó $f(x, y) = e^{2x} y^8$.

b. Khai triển Taylor hàm số f tại điểm $(1, -2)$, trong đó

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y.$$

c. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = xy(9 - 3x - y), \quad x, y > 0.$$

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu nào.

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT2402

Số tín chỉ: 5

Đề số: 01

Dành cho sinh viên khoá: K63

Ngành học: Máy tính và khoa học thông tin

Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Tính tổng của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{với } -1 < x < 1.$$

Câu 2. Khai triển hàm số $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ thành chuỗi Fourier, trong đó

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\pi < x < 0, \\ -x & \text{nếu } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Câu 3. a. Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường cong sau

$$(x + y + 1)^2 + (2x - y)^2 = 9.$$

b. Định nghĩa tích phân đường loại 1. Tính tích phân đường loại 1 sau

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

c. Trình bày bài toán dẫn đến tích phân đường loại 2 về việc tính công của trường lực. Tính tích phân đường loại 2 sau

$$I = \int_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$$

với L là cung của parabol $y^2 = 4 - x$ từ điểm $A(0, -2)$ đến điểm $B(0, 2)$.

Câu 4. a. Tính tích phân mặt loại 1 sau

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) ds$$

với S là mặt biên của vật thể $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$.

b. Phát biểu công thức Ostrogradski (Định lý Divergence). Áp dụng công thức Ostrogradski để tính tích phân mặt loại 2 sau

$$I = \iiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu nào.

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT2402

Số tín chỉ: 5

Đề số: 1

Dành cho sinh viên khoá: K60

Ngành học: Máy tính và Khoa học máy tính

Thời gian làm bài 100 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (1.5 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau với α là tham số thực.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}.$$

Câu 2. (2.0 điểm) Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n}.$$

Câu 3. (1.5 điểm) Xét sự hội tụ đều của dãy hàm $f_n(x) = \frac{nx}{1+x+n}$ trên $[0, 1]$.

Câu 4. (2.0 điểm) Xác định miền tồn tại và khảo sát tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{x} e^{-\sqrt{\frac{n}{x}}}.$$

Câu 5. (2.0 điểm)

a) Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

b) Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^{\frac{n}{5}}}$.

Câu 6. (2.0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{nếu } 0 < x < \pi. \end{cases}$

a) Hãy khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

b) Chuỗi Fourier đó có hội tụ đến hàm f trên toàn bộ khoảng $(-\pi, \pi)$ không? Tại sao?.

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT2402

Số tín chỉ: 5

Đề số: 2

Dành cho sinh viên khoá: K60

Ngành học: MT - KHTT

Thời gian làm bài: 100 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (1 điểm) Theo tham số $\alpha > 0$, xét sự hội tụ của chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Câu 2. (2 điểm) Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ và hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) \ln(3 + 1/n)}{n + 2}.$$

Câu 3. (2 điểm) Kiểm tra sự hội tụ đều của dãy hàm

$$f_n(x) = \frac{3nx}{n^2 + \sqrt{x} + 1}$$

1. Trên $[0, 1]$,

2. Trên $(1, +\infty)$.

Câu 4. (2 điểm) Khảo sát tính liên tục của tổng của chuỗi hàm trên miền hội tụ của nó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n + x^2}.$$

Câu 5. (2 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$ thành chuỗi lũy thừa. Áp dụng tính

chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n(2n+1)}.$

Câu 6. (2 điểm) Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{nếu } -2 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{nếu } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT2402

Số tín chỉ: 5

Lần: 2

Dành cho sinh viên khoá: K60

Ngành học: MT - KHTT

Thời gian làm bài: 100 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (1.5 điểm) Theo tham số $\alpha > 0$, khảo sát sự hội tụ của chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{n+3}{n+1} \right)^{\alpha}.$$

Câu 2. (2 điểm) Chứng minh chuỗi số bán hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+2} + \frac{n}{7^n} \right).$$

Câu 3. (2 điểm) Kiểm tra sự hội tụ đều của dãy hàm

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2 + 1}$$

1. Trên $[0, 1]$,

2. Trên $(1, +\infty)$.

Câu 4. (2 điểm) Chứng minh chuỗi hàm hội tụ đều

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 + n)x - \sin(n^2 - n)x}{n + x^2}.$$

Câu 5. (2 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = 3^{-x^2}$ thành chuỗi lũy thừa. Áp dụng tính tổng

chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln 3)^n}{3^n n!}.$

Câu 6. (2.5 điểm) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

a) Vẽ đồ thị thác triển lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 4 của hàm số trên đoạn $[-4, 4]$.

b) Khai triển chuỗi Fourier sine của hàm số trên đoạn $[-2, 2]$.

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT1292

Số tín chỉ: 5

Đề số: 2

Dành cho sinh viên khoá: K60TN Hoá-Sinh Ngành học: Hoá học - Sinh học

Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Khảo sát sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau theo tham số α

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n^\alpha}, \alpha \geq 0.$$

Câu 2. Xét sự hội tụ điểm và hội tụ đều của dãy hàm và chuỗi hàm trong miền chỉ ra tương ứng.

a) $f_n(x) = \frac{\sin \sqrt{nx}}{\sqrt{n+x^2}}, D = [0, +\infty),$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n+x^4}, D = \mathbb{R}.$

Câu 3. Xét tính khả vi tại điểm $(0,0)$ của hàm số sau đây

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Câu 4. Tìm cực trị địa phương trong \mathbb{R}^2 của hàm số sau đây

$$f(x,y) = 3x^4 + 6y^4 - 2(x+2y)^2.$$

Câu 5. Tính $\oint_{C^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, trong đó C^+ là đường cong cho bởi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2=1, z+x=1\}$ lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục oz .

Câu 6. Tính $\iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, trong đó S^+ là phía ngoài mặt cong $z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq z \leq 1$.

—Hết—

Chú ý: Đề thi gồm 1 trang. Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT1292

Số tín chỉ: 5

Đề số: 1

Dành cho sinh viên khoá: K60TN Hoá-Sinh Ngành học: Hoá học - Sinh học

Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Khảo sát sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau theo tham số α

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}, \alpha \geq 0.$$

Câu 2. Xét sự hội tụ điểm và hội tụ đều của dãy hàm và chuỗi hàm trong miền chỉ ra tương ứng.

$$\text{a) } f_n(x) = \frac{\cos \sqrt{nx}}{\sqrt{n+x^2}}, D = [0, +\infty),$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n+x^4}, D = \mathbb{R}.$$

Câu 3. Xét tính khả vi tại điểm $(0,0)$ của hàm số sau đây

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Câu 4. Tìm cực trị địa phương trong \mathbb{R}^2 của hàm số sau đây

$$f(x,y) = 3x^4 + 6y^4 - 2(x+2y)^2.$$

Câu 5. Tính $\oint_{C^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, trong đó C^+ là đường cong cho bởi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2=1, z+x=1\}$ lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục oz .

Câu 6. Tính $\int\int_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, trong đó S^+ là phía ngoài mặt cong $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$.

—Hết—

Chú ý: Đề thi gồm 1 trang. Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

Môn thi: Giải tích 2

Mã môn học: MAT1292

Số tín chỉ: 5

Đề số: 2

Dành cho sinh viên khoá: K61TN Hoá-Sinh Ngành học: Hoá học - Sinh học
Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Tính tích phân

$$\oint_{25x^2+49y^2=1225} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Câu 2. Tính tích phân bội sau

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} |y - x^2| dx dy.$$

Câu 3. Xét tính khả vi tại điểm $(0,0)$ của hàm số sau đây

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Câu 4. Tìm cực trị địa phương của hàm sau đây

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Câu 5. Tính $\oint_{C^+} (y - z + 2)dx + (z - x + 2)dy + (x - y + 2)dz$, trong đó C^+ là đường cong cho bởi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1, z + x = 1\}$ lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục oz .

Câu 6. Tính $\iint_{S^+} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, trong đó S^+ là phía ngoài mặt cong $z = 4 - x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 4$.

—Hết—

Chú ý: Đề thi gồm 1 trang. Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.