ĐỀ 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20193

Khóa: K64. Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1131. Thời gian: 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.***

Câu 1. (2 *điểm*) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arctan \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{2n+1}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan \dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}$.

Câu 2. (1 *điểm*) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[3]{n+1}\,(x+1)^n}$.

Câu 3. (4 *điểm*) Giải các phương trình vi phân:

a) $(\cos 2x)y' + 2y\sin 2x = \cos^2 2x$ thoả mãn $y(0)=1$.

b) $\left[2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\right]dx - x^3\sin(xy)dy = 0$.

c) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$.

d) $x^2y'' + 3xy' + y = 3x^2$.

Câu 4. (1 *điểm*) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2$ và $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{nếu } -1 \le x \le 0, \\ 1+x, & \text{nếu } 0 < x < 1 \end{cases}$.

Câu 5. (2 *điểm*) Cho hàm số $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } 0 \le t < 3 \\ t, & \text{nếu } t \ge 3 \end{cases}$

a) Tìm phép biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$.

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải bài toán: $\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $u_n = \arctan\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{2n+1} = \arctan\dfrac{3}{(2n+1)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)} > 0,\ \forall n \geq 1.$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{(2n+1)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)} = 0$ nên:

$$u_n \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{(2n+1)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{2n\cdot 2\sqrt{n}} = \frac{3}{4n^{3/2}},$$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3}{4n^{3/2}}$ hội tụ (do $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow$ chuỗi đã cho là $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) $u_n = \tan\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}$. Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2} = 1$, nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\tan\frac{n^2+1}{n^2-n+1} = \tan 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ chuỗi đã cho phân kỳ vì **không** thoả mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

Câu 2. Điều kiện: $x \neq -1$. Đặt $u_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n+1}\,(x+1)^n},\ \forall n \geq 1,\ x \neq -1.$

$$D = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n+2}\,(x+1)^{n+1}}}{\dfrac{n}{\sqrt[3]{n+1}\,(x+1)^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}\cdot\frac{1}{|x+1|}$$

$$= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{|x+1|}.$$

+) Với $D > 1$ thì chuỗi hàm phân kỳ.

+) Với $D < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x+1|} < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -2 \end{array}\right.$ thì chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối theo tiêu chuẩn D'Lambert.

+) Với $D = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

– Xét tại $x = 0$ ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n+1}}$, phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^2} = +\infty \neq 0.$

– Xét tại $x=-2$ ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n+1}}$, chuỗi này phân kỳ vì:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^2} = +\infty \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n+1}} \neq 0.$$

Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$.

Câu 3.

a) $(\cos 2x)y' + 2y\sin 2x = \cos^2 2x \Rightarrow y' + \dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x} y = \cos 2x$, với $\cos 2x \neq 0$.

Đây là phương trình vi phân cấp 1, có $p(x) = \dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}$, $q(x) = \cos 2x$.

Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x) e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = e^{-\int \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x}\left[C + \int \cos 2x . e^{\int \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= e^{\ln|\cos 2x|}\left[C + \int \cos 2x . e^{-\ln|\cos 2x|}\mathrm{d}x\right] = |\cos 2x|\left(C + \int \cos 2x \cdot \frac{1}{|\cos 2x|}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \cos 2x \cdot \left(C + \int \cos 2x \cdot \frac{1}{\cos 2x}\mathrm{d}x\right) \text{ (vì } C \text{ là hằng số âm/dương tuỳ ý)}$$

$$= \cos 2x \cdot \left(C + \int \mathrm{d}x\right) = (C+x)\cos 2x.$$

Theo bài ra, $y(0) = 1 \Leftrightarrow (C+0)\cos 0 = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

$\Rightarrow y = (1+x)\cos 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy đây là nghiệm của phương trình ban đầu.

b) $\left[2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\right]\mathrm{d}x - x^3\sin(xy)\mathrm{d}y = 0$ **(*)**

$P(x,\ y) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)$, $Q(x,\ y) = -x^3\sin(xy)$

Ta có: $Q'_x = -3x^2\sin(xy) - x^3 y\cos(xy)$

$P'_y = -2x^2\sin(xy) - x^2\left[\sin(xy) + yx\cos(xy)\right] = -3x^2\sin(xy) - x^3 y\cos(xy)$.

$\Rightarrow P'_y = Q'_x,\ \forall(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ **(*)** là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $(x_0,\ y_0) = (0,\ 0)$, tích phân tổng quát của phương trình có dạng:

$$\int_0^x P(t,\ 0)\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,\ t)\mathrm{d}t = C \Leftrightarrow \int_0^x (2t)\mathrm{d}t + \int_0^y \left[-x^3\sin(xt)\right]\mathrm{d}t = C$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=x} + \left(x^2\cos(xt)\right)\Big|_{t=0}^{t=y} = C \Leftrightarrow x^2 + x^2\cos(xy) - x^2 = C \Leftrightarrow x^2\cos(xy) = C.$$

Vậy $x^2\cos(xy) = C$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

c) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$. Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $u = y' \Rightarrow u' = y''$.

Phương trình trở thành: $u' - u = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$.

Đây là phương trình vi phân cấp 1, có $p(x) = -1$ và $q(x) = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$.

Nghiệm tổng quát:

$$u = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = e^{\int 1\mathrm{d}x}\left[C + \int \frac{2-x}{x^3}e^x e^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= e^x\left(C + \int \frac{2-x}{x^3}e^x e^{-x}\mathrm{d}x\right) = e^x\left[C + \int\left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\right] = e^x\left(C - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$$

Thay $u = y'$ ta có $y' = e^x\left(C - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow y = \int e^x\left(C - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int e^x\left(C + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int e^x\left(C + \frac{1}{x} + \left(C + \frac{1}{x}\right)'\right)\mathrm{d}x$$

$\Leftrightarrow y = e^x\left(C + \dfrac{1}{x}\right) + D$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

d) $x^2y'' + 3xy' + y = 3x^2$. **(1)**

Đặt $t = \ln|x| \Leftrightarrow |x| = e^t \Rightarrow x^2 = |x|^2 = e^{2t}$. Ta có: $x^2y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $xy' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

Phương trình **(1)** trở thành: $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 3e^{2t} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 3e^{2t}$ **(2)**.

+) Phương trình thuần nhất tương ứng với **(2)** là $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $\overline{y} = e^{-t}\left(C_1 + C_2t\right)$.

+) Do vế phải **(2)** là $f(t) = 3e^{2t}$, với $k = 2$ **không** là nghiệm của phương trình đặc trưng

$\Rightarrow$ tìm nghiệm riêng có dạng $Y = Ae^{2t} \Rightarrow Y' = 2Ae^{2t} \Rightarrow Y'' = 4Ae^{2t}$.

Thay vào **(2)**, ta được:

$$4Ae^{2t}+2\cdot 2Ae^{2t}+Ae^{2t}=3e^{2t}\Leftrightarrow 9Ae^{2t}=3e^{2t}\Leftrightarrow 9A=3\Leftrightarrow A=\frac{1}{3}\Rightarrow Y=\frac{e^{2t}}{3}.$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của **(2)** là $y=\overline{y}+Y=e^{-t}\left(C_1+C_2t\right)+\dfrac{e^{2t}}{3}.$

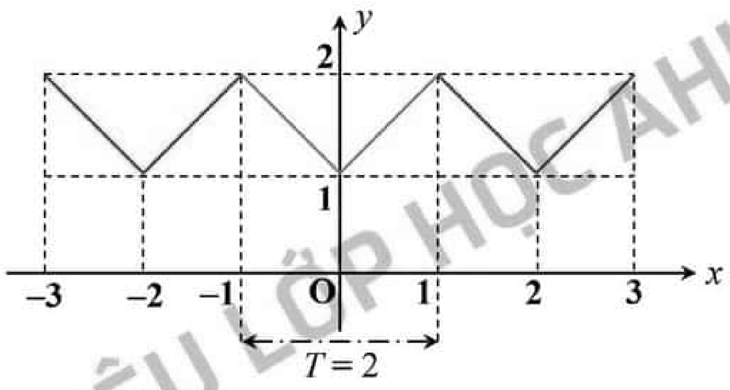
Thay $t=\ln|x|$, ta có nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$y=\overline{y}+Y=e^{-\ln|x|}\left(C_1+C_2\ln|x|\right)+\frac{x^2}{3}=\frac{1}{|x|}\left(C_1+C_2\ln|x|\right)+\frac{x^2}{3}.$$

Chú ý: Có thể làm đơn giản hoá biểu thức cuối cùng bằng cách đặt $\begin{cases}D_1=C_1\operatorname{sgn}x\\ D_2=C_2\operatorname{sgn}x\end{cases}$, ta thu

được nghiệm: $y=\dfrac{1}{x}\left(D_1+D_2\ln|x|\right)+\dfrac{x^2}{3}$.

Câu 4. Hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.



Khai triển Fourier của $f(x)$ là $f(x)=\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)\right)$.

Vì $f(x)$ là hàm chẵn, nên $b_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$$A_0=\frac{2}{T}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{T}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=2\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=3.$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x=\frac{4}{T}\int_0^1(1+x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right)$$

$$=2(1+x)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_0^1-2\int\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\mathrm{d}(1+x)=0-2\int_0^1\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\mathrm{d}x$$

$$=2\left(\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right],\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$\Rightarrow$ khai triển Fourier của $f(x)$ là $f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$.

Chú ý: Có thể làm gọn lại: $f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos((2k-1)\pi x)$.

Câu 5.

a) $f(t)=\begin{cases}0, & \text{nếu } 0\le t<3\\ t, & \text{nếu } t\ge 3\end{cases}=u(t-3).t \quad (t\ge 0)$

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s)=\mathscr{L}\{u(t-3)\cdot t\}(s)=\mathscr{L}\{u(t-3)\cdot[(t-3)+3]\}(s)=e^{-3s}\mathscr{L}\{t+3\}(s)$$

$$=e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right),\ s>0.$$

b) $y''+4y=f(t),\ y(0)=y'(0)=0$.

Đặt $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}(s)$. Với điều kiện ban đầu $y(0)=y'(0)=0$, ta tác động biến đổi Laplace vào phương trình đã cho, thu được:

$$s^2Y(s)+4Y(s)=e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right)\Leftrightarrow\left(s^2+4\right)Y(s)=e^{-3s}\frac{3s+1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=e^{-3s}\frac{3s+1}{s^2\left(s^2+4\right)}.$$

Tác động biến đổi Laplace ngược vào phương trình này, ta có:

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\frac{3s+1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}(s)=u(t-3)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}(t-3).$$

Ta có: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2}+\frac{3}{4s}-\frac{3s+1}{4\left(s^2+4\right)}\right\}(t)$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right\}(t)=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t.$$

$$\Rightarrow y(t)=u(t-3)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}(t-3)$$

$$=u(t-3)\cdot\left[\frac{1}{4}(t-3)+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos(2(t-3))-\frac{1}{8}\sin(2(t-3))\right]$$

$$=u(t-3)\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cos(2t-6)-\frac{1}{8}\sin(2t-6)\right],\ t\ge 0.$$