Y. Y. LIASKÔ, A. C. BÔIATRUC, IA. G. GAI, G. P. GÔLÔVAC

GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

CÁC VÍ DỤ VÀ CÁC BÀI TOÁN

PHẦN I (TẬP II)

Người dịch:

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN, ĐOÀN VĂN BẢN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP

Hà Nội — 1979

И.И. ЛЯШКО, А.К. БОЯРЧУК, Я.Г. ГАЙ, Г.П. ГОЛОВАЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ
И ЗАДАЧАХ

2 РЯДЫ, ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ,
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ

Издательское объединение
«ВИЩА ШКОЛА»
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Киев — 1977

CHƯƠNG I

CHUỖI

§1. CHUỖI SỐ. DẤU HIỆU HỘI TỤ CỦA CHUỖI CÓ DẤU KHÔNG ĐỔI

1. Khái niệm chung. Ta gọi *chuỗi số* là biểu thức

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1)$$

và các số a_n được gọi là các số hạng của chuỗi số đó.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn của dãy tổng riêng S_n của chuỗi (1) : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, trong đó $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, thì chuỗi (1) được gọi là *hội tụ*. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại thì chuỗi (1) được gọi là *phân kỳ*.

Nếu $a_n \geqslant 0$ thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi dương* ; nếu $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi dương thực sự*.

2. Phần dư của chuỗi số sau số hạng thứ n. Chuỗi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

được gọi là *phần dư thứ n của chuỗi* (1) hay là phần dư sau số hạng thứ n và được ký hiệu là r_n. Nếu chuỗi (1) hội tụ thì phần dư $r_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi (1) hội tụ hay phân kỳ đồng thời với phần dư của nó và vì vậy khi nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi ta thường thay nó bằng phần dư thứ n.

3. Điều kiện cần về sự hội tụ của chuỗi. Để chuỗi (1) hội tụ, điều kiện cần là thỏa mãn đẳng thức

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (3)$$

4. Tiêu chuẩn Cosi. Điều kiện cần và đủ để chuỗi (1) hội tụ là $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ sao cho $\forall n > N$ và với mọi số tự nhiên p bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn:

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

5. Chuỗi điều hòa tổng quát. Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{4}$$

được gọi là *chuỗi điều hòa tổng quát*. Chuỗi (4) hội tụ khi $p > 1$ và phân kỳ khi $p \leqslant 1$. Nếu $p = 1$ thì chuỗi này được gọi là *chuỗi điều hòa*.

6. Chuỗi trội. Nếu $a_n \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, $a_n \geqslant 0$ thì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{5}$$

được gọi là *chuỗi trội* của chuỗi (1). Từ sự hội tụ của chuỗi trội (5) suy ra sự hội tụ của chuỗi (1) và từ sự phân kỳ của chuỗi (1) suy ra sự phân kỳ của chuỗi trội bất kỳ của nó.

7. Dấu hiệu so sánh chung. Nếu chuỗi (1) là chuỗi dương và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là dương thực sự và tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$, trong đó $c = \text{const}$, $c \neq 0$ thì từ sự hội tụ của chuỗi với các số hạng b_n suy ra sự hội tụ của chuỗi (1), và từ sự phân kỳ của chuỗi (1) suy ra sự phân kỳ của chuỗi với các số hạng b_n. Đặc biệt nếu $a_n \sim b_n$ khi $n \to \infty$ thì các chuỗi với các số hạng a_n và b_n đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

8 Dấu hiệu so sánh với lũy thừa. Nếu khi $n \to \infty$

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

thì với $p > 1$ chuỗi (1) hội tụ, với $p \leqslant 1$ chuỗi (1) phân kỳ (dấu hiệu này được suy từ dấu hiệu so sánh chung của chuỗi).

9. Dấu hiệu Đalambe. Nếu (1) là chuỗi dương thực sự và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

thì với $L < 1$ chuỗi đó hội tụ, và với $L > 1$ thì nó phân kỳ. Với $L = 1$ thì sự hội tụ của (1) chưa xác định được, bởi vì có những chuỗi hội tụ hoặc những chuỗi phân kỳ mà $L = 1$.

10. Dấu hiệu Côsi. Nếu (1) là chuỗi dương và

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

thì với $q < 1$ chuỗi đó hội tụ, và nếu $q > 1$ thì nó phân kỳ. Với $q = 1$ thì sự hội tụ của chuỗi chưa xác định được.

11. Dấu hiệu Raabe. Nếu (1) là chuỗi dương thực sự và

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$$

thì với $p > 1$ nó hội tụ và với $p < 1$ nó phân kỳ. Với $p = 1$, sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi (1) chưa xác định được.

12. Dấu hiệu Gaoxơ. Nếu (1) là chuỗi dương thực sự và

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

trong đó $\varepsilon > 0$, $|\theta_n| < c$ thì với $\lambda > 1$ chuỗi (1) hội tụ và với $\lambda < 1$ chuỗi (1) phân kỳ. Nếu $\lambda = 1$ thì chuỗi hội tụ khi $\mu > 1$ và phân kỳ khi $\mu \leqslant 1$. Chú ý rằng dấu hiệu Gaoxơ tổng hợp dấu hiệu Đalambe và Raabe.

13. Dấu hiệu tích phân Côsi. Nếu hàm $f(x) \geqslant 0$ khi $x \geqslant 0$ và không tăng thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ hay phân kỳ đồng thời với tích phân suy rộng

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Chứng minh trực tiếp sự hội tụ của các chuỗi sau đây và tìm tổng của chúng:

1. $$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$$

Giải. Ta cần chứng minh rằng dãy tổng riêng S_n của chuỗi này hội tụ:

$$S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Muốn vậy, bằng phép biến đổi hiển nhiên ta đưa S_n về dạng:

$$S_n = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Bây giờ dễ thấy rằng dãy S_n hội tụ, tức là chuỗi số đã cho hội tụ (theo định nghĩa). Tổng của chuỗi là

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

2. a) $q\sin\alpha + q^2\sin2\alpha + \ldots + q^n\sin n\alpha + \ldots$

b) $q\cos\alpha + q^2\cos2\alpha + \ldots + q^n\cos n\alpha + \ldots$ ($|q| < 1$).

Giải. Giả sử u_n và v_n là các dãy tổng riêng tương ứng của b) và a) u và v là tổng của chúng. Khi đó dùng công thức Ơle $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ($i = \sqrt{-1}$) ta có thể viết : $u_n + iv_n = qe^{i\alpha} + q^2e^{2i\alpha} + \ldots + q^ne^{in\alpha} = \dfrac{qe^{i\alpha} - q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}$. Chú ý đến điều kiện $|q| < 1$ ta có : $|qe^{i}| < 1$; từ đó suy ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} (q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}) = 0.$$

Khi đó từ công thức trên ta tìm thấy

$$u + iv = \lim_{n\to\infty} (u_n + iv_n) = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} =$$

$$= q\left(\frac{\cos\alpha - q}{1 - 2q\cos\alpha + q^2} + i\,\frac{\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}\right).$$

Vì vậy $u = q\,\dfrac{\cos\alpha - q}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}$, $v = \dfrac{q\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}$.

Chú thích. Nếu $z_n = x_n + iy_n$ là dãy số phức và $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ thì theo định nghĩa ta đặt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x + iy$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Giải. Ta thấy

$$S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) +$$
$$+ \ldots + (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) +$$
$$+ (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} =$$
$$= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Do đó $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$.

4. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

Giải. Giả sử $x \neq k\pi$ (k nguyên) và chuỗi hội tụ. Khi đó phải thỏa mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ:

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0 \; (x \neq k\pi). \tag{1}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)x = 0$ hay $\lim (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$. Chú ý đến (1), từ hệ thức trên ta thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0 (x \neq k\pi). \tag{2}$$

Các đẳng thức (1) và (2) tương đương với đẳng thức

$$\lim_{n\to\infty} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) = 0$$

điều đó mâu thuẫn với công thức đã biết $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Nguồn gốc của mâu thuẫn đó chính là công thức (1). Do đó nếu $x \neq k\pi$ thì chuỗi đã cho phân kỳ. Sự hội tụ của chuỗi khi $x = k\pi$ (k nguyên) là hiển nhiên và trong trường hợp đó tổng của chuỗi bằng không.

5. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum A_n$, trong đó $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \ldots$), nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho mà không thay đổi thứ tự trước sau của chúng, cũng hội tụ và cũng có tổng như vậy.

Chứng minh. Từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suy ra sự tồn tại giới hạn của dãy con bất kỳ của dãy tổng riêng của chuỗi, và giới hạn đó bằng tổng S của chuỗi. Ta có thể chọn dãy con đó dưới dạng

$$a_1 = S_{p_1}, \; a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} = S_{p_2}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + \ldots + a_{p_3-1} = S_{p_3}, \ldots$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_{n+1}} - 1 = S_{p_{n+1}}$$

Khi đó theo đầu bài $\lim S_{p_n} = S$. Nhưng vì dãy tổng riêng của chuỗi thứ hai $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ bằng $S_{p_{n+1}}$ nên $\lim (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ cũng bằng S, đó là điều phải chứng minh.

Điều khẳng định ngược lại không đúng vì từ sự hội tụ của dãy con không suy ra được sự hội tụ của dãy chính. Ta có thể lấy ví dụ. Giả sử $a_n = (-1)^{n+1}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ hiển nhiên là phân kỳ, mặc dù chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-1)$, chẳng hạn, nhận được từ chuỗi trên bằng cách nhóm các số hạng của nó thành từng cặp, là hội tụ.

6. Chứng minh rằng nếu các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là dương và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đó hội tụ, thì chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Chứng minh. Giả sử p_k là dãy con tùy ý của các số tự nhiên; S_n và S_{p_k} tương ứng là dãy tổng riêng của chuỗi thứ nhất và chuỗi thứ hai. Khi đó do các số hạng a_n dương nên ta có các bất đẳng thức:

$$S_1 \leqslant S_n \leqslant S_{p_1} \text{ với mọi } n \ (1 \leqslant n \leqslant p_1)$$

$$S_{p_1} \leqslant S_n \leqslant S_{p_2} \text{ với mọi } n \ (p_1 \leqslant n \leqslant p_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{p_k} \leqslant S_n \leqslant S_{p_{k+1}} \text{ với mọi } n \ (p_k \leqslant n \leqslant p_{k+1}).$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức sau cùng khi $k \to \infty$ và chú ý rằng chuỗi thứ hai hội tụ, ta nhận được:

$$\lim_{k\to\infty} S_{p_k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{p_{k+1}} = S.$$

Không dùng các dấu hiệu hội tụ ở mục 3 — 13, xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

7. $$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Giải. Hiển nhiên dãy tổng riêng của chuỗi đã cho là dãy tăng. Ta sẽ chứng minh rằng nó không bị chặn. Muốn vậy ta chỉ cần xét một dãy con S_{2^n} của nó ($n = 1, 2, \dots$):

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{3}\ ;\ S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

$$\dots\ ;\ S_{2^n} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

Do các ước lượng:

$$1 + \frac{1}{3} > 1,\ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

$$> \dots \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} > \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

ta có bất đẳng thức

$$S_{2^n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right) > 1 + \frac{n - 1}{4}.$$

Từ đó suy ra rằng dãy con S_{2^n} không bị chặn, nghĩa là dãy S_n cũng không bị chặn. Như vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$

Giải. Xét chuỗi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{1}{6\sqrt{7}} + \frac{1}{7\sqrt{8}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{8\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{15\sqrt{16}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n + 1}} + \dots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2^{n+1} - 1)\sqrt{2^{n+1}}}\right) + \dots \qquad (1)$$

nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho.

Chú ý rằng

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}<\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{7\sqrt{8}}<\frac{1}{4\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{7\sqrt{7}}<\frac{4}{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

. . . .

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{(2^n)^{\frac{3}{2}}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n}.$$

Bởi vậy đối với dãy tổng riêng của chuỗi (1) ta có ước lượng

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\dots+\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Từ đó, lưu ý tính đơn điệu của S_n, ta kết luận rằng chuỗi (1) hội tụ. Khi đó trên cơ sở ví dụ 6 chuỗi đã cho cũng hội tụ.

9. $\frac{1}{\sqrt{1.3}}+\frac{1}{\sqrt{3.5}}+\frac{1}{\sqrt{5.7}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\dots$

Giải. Do ước lượng $S_n=\frac{1}{\sqrt{1.3}}+\frac{1}{\sqrt{3.5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>$ $>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\dots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln(n+1)$, ta có chuỗi đã cho phân kỳ.

10. Cho hai chuỗi phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ với các số hạng không âm. Có thể nói gì về sự hội tụ của các chuỗi

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n, b_n)$ và b) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n, b_n)$?

Giải. a) Nếu $a_n \leqslant b_n$ với mọi n thì $\min(a_n, b_n) = a_n$. Do đó theo đầu bài chuỗi a) phân kỳ. Nếu như các chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$, chẳng hạn, phân kỳ, còn các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}, \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \tag{1}$$

hội tụ (điều này có thể xảy ra, đặc biệt trong trường hợp $a_{2n+1}, b_{2n} \to +\infty$ đơn điệu tăng, còn a_{2n} và b_{2n+1} tiến tới không khá nhanh, nhưng vẫn dương), thì bắt đầu từ một chỉ số n_o nào đó ta sẽ có: $\min(a_n, b_n) = c_n$ $(n \geqslant n_o)$, trong đó c_n là dãy được thành lập từ những số hạng luân phiên của các dãy a_{2n} và b_{2n+1} $(n \geqslant n_o)$. Ví dụ, dãy đó có thể dưới dạng:

$$c_n = \{a_{2n_o}, b_{2n_o+1}, a_{2n_o+2}, b_{2n_o+3} \cdots\} \ (n \geqslant n_o)$$

Trong trường hợp này dãy tổng riêng của chuỗi Σc_n là tổng của các dãy tổng riêng của các chuỗi hội tụ (1), do đó nó hội tụ.

Như vậy chuỗi $\Sigma \min(a_n, b_n)$ có thể hội tụ và cũng có thể phân kỳ.

b) Vì $\max(a_n, b_n) \geqslant a_n \geqslant 0$ nên $S_n' \geqslant S_n \to +\infty$ (theo giả thiết) khi $n \to \infty$ (ở đây S_n', S_n tương ứng là các dãy tổng riêng của các chuỗi b) và Σa_n). Do đó trong trường hợp này chuỗi b) luôn luôn phân kỳ.

11. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ cũng hội tụ.

Chứng minh. Hiển nhiên rằng dãy tổng riêng c_n của chuỗi thứ hai đơn điệu và không giảm. Ngoài ra do $a_n \geqslant 0$ và chuỗi thứ nhất hội tụ nên ta có bất đẳng thức:

$$c_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a^2 < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = S_n^2 \leqslant \text{const}.$$

Bởi vậy, dựa vào định lý về dãy đơn điệu và giới nội, suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, tức là chuỗi thứ hai hội tụ theo định nghĩa.

Chú ý rằng điều khẳng định ngược lại không đúng. Thật vậy giả sử $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ hội tụ (theo dấu hiệu so sánh với chuỗi điều hòa tổng quát) mặc dù chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ phân kỳ (xem bài 7)

12. Chứng minh rằng nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ hội tụ thì các chuỗi sau đây cũng hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức sơ cấp $|a_n b_n| \leqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ và theo điều kiện đầu bài ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) = c.$$

Từ đó suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ hội tụ. Khi đó chuỗi thứ hai, do ước lượng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b^2 \leqslant 2\left(c + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|\right)$$

cũng là chuỗi hội tụ. Tính hội tụ của chuỗi thứ ba được suy từ tính hội tụ của chuỗi thứ nhất nếu trong đó ta đặt $b_n = \frac{1}{n}$ và dùng kết quả là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

13. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh.

Theo định nghĩa giới hạn : $\forall\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < |a|)\exists N$ sao cho $\forall n > N$ và với số tự nhiên $p > 0$ bất kỳ, các bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$a - \varepsilon < (n + m)a_{n+m} < a + \varepsilon \ (m = 1, 2, \ldots, p)$$

hay các bất đẳng thức

$$\frac{a - \varepsilon}{n + m} < a_{n+m} < \frac{a + \varepsilon}{n + m}.$$

Lấy tổng các bất đẳng thức này theo m từ 1 đến p ta nhận được

$$(a - \varepsilon)\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{n + m} < \sum_{m=1}^{p} a_{n+m} < (a + \varepsilon)\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{n + m}.$$

Từ đó ta thấy rằng, do sự phân kỳ của chuỗi điều hòa $\left(\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{m=1}^{p} \frac{1}{n + m} = +\infty\right)$ phần dư của chuỗi được xét là phân kỳ. Do đó chính chuỗi ấy phân kỳ.

Chú thích. Từ điều kiện của bài toán ta suy ra rằng $a_n = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right)$ khi $n \to \infty$. Vì thế trên cơ sở của dấu hiệu so sánh với chuỗi lũy thừa, chuỗi đã cho phân kỳ. Tuy nhiên ở đây chúng ta đưa ra một cách chứng minh trực tiếp.

14. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ với các số hạng đơn điệu giảm hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Chứng minh. Theo tiêu chuẩn Côsi, từ sự hội tụ của chuỗi suy ra rằng $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$ sao cho $\forall n > N$ và mọi $p > 0$ có bất đẳng thức $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Vì a_n là dãy dương đơn điệu, nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra $pa_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tiếp theo ta lần lượt đặt $p = n$ và $p = n + 1$, từ đó ta thấy rằng $2na_{2n} < \varepsilon$ và $(2n + 1)a_{2n+1} < \varepsilon$ khi $n > N$. Do đó $na_n < \varepsilon$ với $n > 2N$ bất kỳ (chẵn và lẻ). Đó là điều cần phải chứng minh.

Sử dụng tiêu chuẩn Côsi, chứng minh sự hội tụ của các chuỗi sau:

15. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + ... + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + ...$

Chứng minh. Ta lấy $\varepsilon > 0$ tùy ý. Tìm được số N sao cho với mọi $n > N$ và $p > 0$ tùy ý, có ước lượng $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, trong đó S_n là dãy tổng riêng của chuỗi đã cho. Ta có

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \right.$$

$$\left. ... + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - ... - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n}.$$

Từ đó suy ra rằng $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, nếu ta chọn số N là $\frac{2}{\varepsilon} + 1$(*). Vì vậy theo tiêu chuẩn Côsi chuỗi đã cho hội tụ.

16. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + ... + \frac{\cos x^n}{n^2} + ...$

Chứng minh. Ta tìm số N sao cho với mọi $n > N$ và với $p > 0$ tùy ý bất đẳng thức sau được thỏa mãn: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$.

$$\text{Ta có: } |S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + ... + \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... +$$

$$+ \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Do đó nếu lấy $N = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ thì theo tiêu chuẩn Côsi chuỗi đã cho hội tụ.

Sử dụng tiêu chuẩn Côsi chứng minh các chuỗi sau đây phân kỳ

17. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$

(*) Vì N là số nguyên dương, nên cần lấy $N = \frac{2}{\varepsilon} + 1$. (N. D)

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Ta lấy $p = n$. Khi đó

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

với mọi n. Do đó theo tiêu chuẩn Côsi chuỗi đã cho phân kỳ.

18. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$

Chứng minh. Vì

$$S_{6n} - S_{3n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \ldots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n},$$

trong đó S_{6n} và S_{3n} là các dãy con của dãy tổng riêng của chuỗi đã cho, cho nên

$$S_{6n} - S_{3n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \ldots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

Vì thế, theo tiêu chuẩn Côsi, chuỗi đã cho phân kỳ.

19. $\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Ta có ước lượng

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{2}{2n+1} > \frac{1}{4}$$

với mọi x. Do đó, theo tiêu chuẩn Côsi, chuỗi đã cho phân kỳ.

Sử dụng các dấu hiệu khác nhau, nghiên cứu tính hội tụ của các chuỗi sau:

20. $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \ldots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \ldots$

Giải. Bởi vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{((n+1)!)^2\, 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}\,(n!)^2} = \lim \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0,$$

nên, theo dấu hiệu Đalambe, chuỗi đã cho hội tụ.

21. $\frac{4}{2} + \frac{4.7}{2.6} + \frac{4.7.10}{2.6.10} + \ldots$

Giải. Chú ý rằng số hạng tổng quát a_n của chuỗi có dạng

$$a_n = \frac{4.7.10\ldots(3n+1)}{2.6.10\ldots(4n-2)}.$$

Từ đó ta nhận thấy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}.$$

Do đó, theo dấu hiệu Đalambe, chuỗi đã cho hội tụ.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ trong đó $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ nếu } n = m^2 \\ \frac{1}{n^2} \text{ nếu } n \neq m^2 \end{cases}$ (m là số tự nhiên)

Giải. Ta chứng minh rằng chuỗi

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}\right)+\ldots+$$

$$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\ldots+\frac{1}{[(n+1)^2-1]^2}+\ldots\right. \quad (1)$$

nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho, là hội tụ. Muốn vậy trước tiên ta đánh giá từng số hạng của chuỗi (1). Ta có

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2} < 1+2.\frac{1}{2^2} < 2.1;$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{8^2} < \frac{1}{4}+\frac{4}{5^2} < 2.\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{[(n+1)^2-1]^2} < \frac{1}{n^2}+\frac{2n}{(n^2+1)^2} < 2.\frac{1}{n^2}; \ldots$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa nên do dấu hiệu so sánh chung chuỗi (1) cũng hội tụ. Khi đó dựa trên điều khẳng định trong bài 6 ta kết luận rằng chuỗi đã cho hội tụ.

23. $$\sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}.$$

Giải. Dễ thấy rằng

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n}. \tag{1}$$

Giả thiết rằng $x \neq 0$ (khi $x = 0$ thì chuỗi hiển nhiên là hội tụ) và lưu ý tới chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x^2)^n} \tag{2}$$

ta thấy rằng chuỗi (2) hội tụ theo dấu hiệu Đalambe.

Bây giờ ta sử dụng bất đẳng thức (1) và dấu hiệu so sánh chung thì có thể khẳng định rằng chuỗi đã cho hội tụ.

24. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Giải. Bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1$ nên theo điều kiện cần chuỗi đã cho phân kỳ.

25. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Giải. Vì

$$\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^n}{2^{\frac{n+1}{2}}\, n^{n+2}} = \frac{1}{n^2\, 2^{\frac{n+1}{2}}} = a_n,$$

và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nên theo dấu hiệu so sánh chung chuỗi đã cho hội tụ.

26. $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Giải. Một cách không khó khăn ta tìm được $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2\frac{n-1}{n+1}} = \dfrac{1}{e^2} < 1$. Bởi vậy chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu Côsi.

27. $$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$$

Giải. Chú ý rằng số hạng tổng quát của chuỗi đã cho có dạng

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\,-\,1\text{ căn}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

và ở đây ta đặt $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$, ta nhận được $a_n = \sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{2^n}} = 2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} <$

$< \dfrac{\pi}{2^n}$. Bởi vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu so sánh chung.

28. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q (a_n > 0)$ thì $a_n = o(q_1^n)$ trong đó $q_1 > q$.

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon > 0$ và đủ nhỏ để cho $\varepsilon < q_1 - q$. Theo định nghĩa giới hạn, với ε đó ta tìm được số N sao cho các bất đẳng thức sau được thỏa mãn:

$$q-\varepsilon < \frac{a_{N+1}}{a_N} < q+\varepsilon,\ q-\varepsilon < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q+\varepsilon \ldots$$

$$q-\varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < q+\varepsilon.$$

Nhân các bất đẳng thức này vế với vế ta được

$$a_N(q-\varepsilon)^{n-N} < a_n < (q+\varepsilon)^{n-N}a_N,$$

từ đó suy ra

$$0 < \frac{a_n}{q_1^n} < a_N\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n (q+\varepsilon)^{-N}\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1} < 1\right).$$

Bây giờ ta thấy rằng với các số n tăng lên có thể đạt được các bất đẳng thức

$$\frac{a_n}{q_1^n} < a_N(q+\varepsilon)^{-N}\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n$$

điều đó chứng tỏ rằng $a_n = o(q_1^n)$.

29. Giả sử đối với các số hạng của chuỗi dương thực sự $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1 \text{ khi } n \geqslant n_o.$$

Chứng minh rằng đối với phần dư của chuỗi $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ ta có ước lượng $R_n \leqslant a_{n_o} \frac{\rho^{n-n_o+1}}{1-\rho}$ nếu $n \geqslant n_o$.

Chứng minh. Do giả thiết ta có:

$$a_{n_o+1} \leqslant \rho a_{n_o},\ a_{n_o+2} \leqslant \rho^2 a_{n_o}, \ldots, a_{n+1} \leqslant \rho^{n-n_o+1} a_{n_o}, \ldots$$

từ đó $R_n \leqslant a_{n_o} \rho^{n-n_o+1} (1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = a_{n_o} \frac{\rho^{n-n_o+1}}{1-\rho}$ khi $n \geqslant n_o$, đó là điều cần chứng minh

30. Cần phải lấy bao nhiêu số hạng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(4n)!!}$ đủ để cho tổng riêng tương ứng S_n khác với tổng S của chuỗi bé hơn $\varepsilon = 10^{-6}$?

Giải. Ta sẽ dùng kết quả trong bài trước. Ở đây ta đặt $n_o = 1$. Khi đó $a_{n_o} = \frac{1}{2}$ và với $n \geqslant 1$ ta có: $\rho \leqslant \frac{1}{3}$. Do đó $R_n \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-6}$, từ đó ta thấy: $n \geqslant \dfrac{6 - \lg\frac{4}{3}}{\lg 3} \approx 12{,}3$. Như vậy để đạt tới độ chính xác đã cho ta chỉ cần chọn 13 số hạng của chuỗi.

31. Chứng minh rằng nếu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 (a_n > 0)$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Chứng minh. Ta chọn $\varepsilon > 0$ sao cho thỏa mãn bất đẳng thức $\varepsilon < 1 - q$. Do sự tồn tại giới hạn trên hữu hạn, với ε đã chọn ta tìm được số N mà bắt đầu từ đó thỏa mãn bất đẳng thức

$$0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q + \varepsilon \quad (i = N, N+1, \ldots, n-1).$$

Nhân các bất đẳng thức này ta được

$$o < a_n < \frac{a_n}{(q+\varepsilon)^N} (q+\varepsilon)^n.$$

Bởi vì chuỗi $\sum (q+\varepsilon)^n$ hội tụ, nên theo dấu hiệu so sánh chung, ta kết luận rằng chuỗi $\sum a_n$ cũng hội tụ.

Điều khẳng định ngược lại không đúng. Chẳng hạn ta xét chuỗi

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}\;\frac{1}{3^3}+\ldots,$$

chú ý rằng

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$$

đồng thời chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right).$$

hiển nhiên là hội tụ. Như vậy, từ điều kiện chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nói chung không suy ra được

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1.$$

32. Chứng minh rằng nếu đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n>0)$ tồn tại

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \tag{1}$$

thì cũng tồn tại

$$\lim_{n=1}\sqrt[n]{a_n}=q. \tag{2}$$

Điều khẳng định ngược lại không đúng: nếu tồn tại giới hạn (2) thì giới hạn (1) có thể không tồn tại.

Chứng minh điều khẳng định từ (1) suy ra (2) có thể được tiến hành giống như trong bài 81, chương I, tập I.

Để chứng minh rằng từ (2) không suy ra được (1), ta xét chuỗi với các số hạng $a_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$. Ta có $\rho_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3+(-1)^{n+1}}{2(3+(-1)^n)}$. Vì $\rho_{2n}=\dfrac{1}{4}$, $\rho_{2n+1}=1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n$ không tồn tại. Trong khi đó

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(3+(-1)^n)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim e^{\frac{1}{n}\left(\ln 3+\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\frac{1}{2}.$$

Do đó điều khẳng định ngược lại không đúng.

33. Chứng minh rằng nếu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\,(a_n\geqslant 0)$ thì:

a) khi $q<1$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ;

b) khi $q>1$ chuỗi đó phân kỳ (dấu hiệu Côsi tổng quát).

Chứng minh. Giả sử $q<1$. Với ε cố định thỏa mãn điều kiện $0<\varepsilon<1-q$, theo giả thiết ta tìm được số N mà bắt đầu từ đó các bất đẳng thức sau được thỏa mãn $0\leqslant a_{N+1}<(q+\varepsilon)^{N+1}$, ..., $0\leqslant a_n\leqslant(q+\varepsilon)^n$ $(q+\varepsilon<1)$. Nhưng vì chuỗi $\Sigma\,(q+\varepsilon)^n$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh chung, từ bất đẳng thức cuối cùng ta suy ra chuỗi $\Sigma\,a_n$ hội tụ.

Giả sử $q>1$. Khi đó với ε được chọn từ điều kiện $0<\varepsilon<q-1$ ta tìm được M, sao cho với mọi $k>M$ các phần tử của dãy con a_{n_k} $(\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\to q$ khi $n_k\to+\infty)$ sẽ thỏa mãn các bất đẳng thức

$$a_{n_{M+1}}>(q-\varepsilon)^{n_{M+1}},\quad a_{n_{M+2}}>(q-\varepsilon)^{n_{M+2}},\ \ldots,$$
$$a_{n_k}>(q-\varepsilon)^{n_k}\quad(q-\varepsilon>1).$$

Từ đó suy ra rằng số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không, tức là chuỗi $\Sigma\,a_n$ phân kỳ.

Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Giải. Theo dấu hiệu Côsi tổng quát, ta có

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}\,(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$$

Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Giải. Bởi vì

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leqslant \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1,$$

nên, theo dấu hiệu Côsi tổng quát, chuỗi đã cho hội tụ.

36. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p + \ldots$

Giải. Ta xét tỷ số

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^p \cdot \left(\frac{2.4.6\ldots 2n(2n+2)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}\right)^p =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ khi } n\to\infty.$$

Theo dấu hiệu Gaoxơ, từ đó ta thấy: với $p > 2$ chuỗi hội tụ, và với $p \leqslant 2$ chuỗi phân kỳ.

Chú thích. Dùng dấu hiệu Raabe cũng có thể tìm được miền hội tụ của chuỗi.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

Giải. Biến đổi tỷ số $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ về dạng

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\, e^n (n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!\, e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\, e^{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= e^{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{p-0{,}5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{p-0{,}5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)$$

và dùng dấu hiệu Raabe ta kết luận rằng với $p > \frac{3}{2}$ chuỗi hội tụ.

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$

Giải. Đơn giản tỷ số

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n!}\,(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n+1})}{(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})\,\sqrt{(n+1)!}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

và lập dãy Raabe R_n ta thấy chuỗi hội tụ.

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n^q}.$

Giải. Loại trừ các trường hợp tầm thường khi p là số nguyên âm hoặc bằng không, ta đơn giản tỷ số

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1} =$$

$$= \left(1-\frac{p}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q+1}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{q-p+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(n\to\infty)$$

Bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = q-p+1$ nên, theo dấu hiệu Raabe chuỗi đã cho hội tụ nếu $q > p$.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^p\frac{1}{n^q}.$

Giải. Lập tỷ số

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q$$

$$= \left(1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{p}{2} + q\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$$

ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{p}{2} + q$ và trên cơ sở dấu hiệu Raabe ta kết luận rằng chuỗi đã cho hội tụ với $\frac{p}{2} + q > 1$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right)$ $(p > 0, \quad q > 0)$.

Giải. Đưa tỷ số $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ về dạng

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{q+n}{p+n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{q-p}{p+n}\right)^\infty =$$

$$= 1 + \frac{\alpha(q-p)}{p+n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\alpha(q-p)}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

khi $n \to \infty$ và dùng dấu hiệu Raabe ta thấy chuỗi đã cho hội tụ khi $\alpha(q-p) > 1$.

Chú thích. Trong các bài 37, 39 – 41, $o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Vì thế theo dấu hiệu Gaoxơ, để thiết lập các điều kiện phân kỳ của các chuỗi tương ứng, trong tất cả các bất đẳng thức nhận được, ta thay dấu $>$ bằng dấu $\leqslant$.

42. Chứng minh rằng đối với chuỗi số dương thực sự $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ khi $n \to \infty$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

thì $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ ở đây $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, đồng thời nếu $p > 0$ thì a_n giảm tới 0 khi $n \to \infty$, tức là a_n với $n \geqslant n_0$ đơn điệu giảm, tiến tới không khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Ta bắt đầu với trường hợp $p > 0$. Cố định ε_o tùy ý ($0 < \varepsilon_o < p$), từ điều kiện tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$ ta thấy

$$1 + \frac{p-\varepsilon_o}{i} < \frac{a_i}{a_{i+1}} < 1 + \frac{p+\varepsilon_o}{i} \quad (i = N, \ldots, n-1),$$

trong đó N là số cố định đủ lớn. Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\left(1 + \frac{p-\varepsilon_o}{N}\right)\left(1 + \frac{p-\varepsilon_o}{N+1}\right)\ldots\left(1 + \frac{p-\varepsilon_o}{n-1}\right) < \frac{a_N}{a_n} <$$

$$\left(1 + \frac{p+\varepsilon_o}{N}\right)\left(1 + \frac{p+\varepsilon_o}{N+1}\right)\ldots\left(1 + \frac{p+\varepsilon_o}{n-1}\right).$$

Từ đó, chú ý $a_n > 0$, dùng bất đẳng thức Becnuli (bài 4, chương I, tập I) ta nhận được

$$0 < a_n < \frac{a_N}{\left(a + \frac{p-\varepsilon_o}{N}\right)\left(1 + \frac{p-\varepsilon_o}{N+1}\right)\ldots\left(1 + \frac{p-\varepsilon_o}{n-1}\right)} <$$

$$< \frac{a_N}{1 + (p-\varepsilon_o)\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)}. \tag{A}$$

Vì $p - \varepsilon_o > 0$ còn $\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên từ bất đẳng thức (A) suy ra rằng $a_n \to 0$. Hơn nữa, khi $p > 0$ dãy a_n đơn điệu (điều này thấy được như sau : với $n \geqslant n_o$, ở đây n_o là số đủ lớn, $\frac{p}{n} > o\left(\frac{1}{n}\right)$, do đó $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$) phần thứ hai của mệnh đề được chứng tỏ là đúng.

Để chứng minh phần thứ nhất của mệnh đề (p tùy ý, còn $\varepsilon > 0$) ta chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{p-\varepsilon} a_n) = o$ và lập tỷ số $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$ ta nhận được :

Ta ký hiệu $\varepsilon_n = n^{p-\varepsilon} a_n$

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\varepsilon - p} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\varepsilon - p}\left(1 + \frac{p}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\varepsilon - p}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{p}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

Chú ý rằng tỷ số này cũng có dạng như $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, dựa vào chứng minh trên ta đi đến kết luận $\varepsilon_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nếu :

43. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}$ $(n > 1)$.

Giải. Biến đổi biểu thức của số hạng tổng quát a_n và sử dụng các khai triển $(1 + x)^m$, $\ln(1 + x)$ theo công thức Macloranh với phần dư dạng Pêanô, ta có

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$$

$$= n^{-\frac{p}{2}}\left(2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-p}\left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= n^{-\frac{p}{2}} 2^{-p}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= O^*\left(\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Ta thấy rằng, theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi hội tụ với $p > 0$.

44. $a_n = \log_b^n\left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a > 0, b > 0)$.

Giải. Sử dụng kết quả trong bài toán trước ta có :

$$a_n = \frac{\ln(1 + n^{-1}\sqrt[n]{a})}{n\ln b} = \frac{1}{n\ln b}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

khi $n \to \infty$ $(b \neq 1)$.

Do đó theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi hội tụ nếu $b \neq 1$.

45. $a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$.

Giải. Sử dụng khai triển các hàm $\ln(1 + x)$, e^x theo công thức Macloranh ta được

$$a_n = \left(e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^p$$

$$= e^p\left(1 + e^{-1+n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\right)^p$$

$$= e^p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p$$

$$= O^*\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ khi } n \to \infty .$$

Như vậy nếu $p > 1$ thì, theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi hội tụ.

46. Chứng minh dấu hiệu Jamê : chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu $(1 - \sqrt[n]{a_n})\dfrac{n}{\ln n} \geqslant p > 1$ khi $n > n_o$, và phân kỳ nếu $(1 - \sqrt[n]{a_n})\dfrac{n}{\ln n} \leqslant 1$ khi $n > n_o$.

Chứng minh. Từ điều kiện thứ nhất ta thấy $0 \leqslant a_n \leqslant \left(1 - \dfrac{p\ln n}{n}\right)^n$ (chú ý rằng khi $n > n_o$ bất đẳng thức $1 - \dfrac{p\ln n}{n} > 0$ được thỏa mãn), từ đó

$$0 \leqslant a_n \leqslant e^{n\ln\left(1 - \frac{p\ln n}{n}\right)}.$$

Dùng khai triển các hàm $ln\,(1-x)$, e^x theo công thức Macloranh với phần dư dạng Pêanô, từ bất đẳng thức cuối cùng ta có :

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^p}\, e^{-p^2\frac{\ln^2 n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = \frac{1}{n^p} - \frac{p^2\ln^2 n}{2n^{p+1}} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{p+1}}\right)$$

$(n \to \infty)$ từ đó suy ra rằng chuỗi hội tụ khi $p > 1$.

Tiến hành tương tự, từ bất đẳng thức điều kiện thứ hai của bài toán ta tìm được

$$a_n \geqslant \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right)\ (n \to \infty).$$

Bất đẳng thức cuối cùng chứng tỏ rằng chuỗi phân kỳ

47. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) hội tụ nếu tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$ khi $n \geqslant n_0$ và phân kỳ nếu $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leqslant 1$ khi $n \geqslant n_0$ (dấu hiệu lôgarit).

Chứng minh. Từ điều kiện của bài toán dễ dàng nhận được bất đẳng thức $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ khi $n \geqslant n_0$ (trường hợp thứ nhất) và bất đẳng thức $a_n \geqslant \frac{1}{n}$ khi $n \geqslant n_0$ (trường hợp thứ hai). Do đó theo dấu hiệu so sánh có thể khẳng định rằng trong trường hợp thứ nhất chuỗi hội tụ nếu $\alpha > 0$, và trong trường hợp thứ hai chuỗi phân kỳ, đó là điều cần chứng minh.

Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi với số hạng tổng quát a_n nếu:

48. $$a_n = \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}} \quad (n > 2).$$

Giải. Vì $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 1{,}1$

khi $n > \exp(\exp(\exp 1{,}1))$ nên theo dấu hiệu lôgarit chuỗi hội tụ.

49. $$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \quad n > 1).$$

Giải. Nhờ ước lượng

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \leqslant 1,$$

ta thấy rằng với n đủ lớn

$$\lim \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0,$$

dựa vào dấu hiệu lôgarit ta khẳng định rằng chuỗi đã cho phân kỳ.

Chú thích. Dấu hiệu Jamê và dấu hiệu lôgarit không cho phép ta xác định được sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\gamma} n}$ khi $\gamma > 0$.

Thật vậy, chẳng hạn, sử dụng dấu hiệu lôgarit ta nhận được:

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = 1 + \gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}.$$

Từ đó suy ra rằng, vì $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1$ với mọi n nên theo dấu hiệu lôgarit chuỗi không thể phân kỳ. Mặt khác vì $\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên đối với $\gamma > 0$ và $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại n_0 sao cho $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} < 1 + \varepsilon$ khi $n > n_0$; nói một cách khác do sự tiến tới không của $\gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$ nên không tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho với mọi $n > n_0$ thỏa mãn bất đẳng thức $\gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} > \alpha > 0$ và do đó bất đẳng thức $\frac{na_n^{-1}}{\ln n} > 1 + \alpha$.

Như vậy, chuỗi không hội tụ và cũng chẳng phân kỳ. Điều đó có nghĩa là vấn đề hội tụ của chuỗi được chỉ ra không thể giải quyết bằng dấu hiệu lôgarit. Ta nhận được tình trạng tương tự nếu dùng dấu hiệu Jamê nghiên cứu chuỗi đã cho.

Sử dụng dấu hiệu tích phân Côsi, nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi với số hạng tổng quát a_n:

50. $$a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1).$$

Giải. Hàm $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ khi $x > 1$ là dương và giảm (xét dấu của đạo hàm) với p tùy ý và x đủ lớn. Vì vậy để nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi đã cho ta có thể sử dụng dấu hiệu tích phân Côsi. Ta có:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \frac{1}{(p-1)\, 2^{p-1}} < \infty$$

với $p > 1$. Do đó, chuỗi hội tụ với $p > 1$.

51. $$a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln(\ln n))^q} \quad (n > 2).$$

Giải. Như trong bài toán trước, ta dễ thấy rằng ở đây có thể sử dụng dấu hiệu tích phân. Xét tích phân

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x (\ln(\ln x))^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p \ln^q t}.$$

Nếu $p = 1$ thì từ đó ta thấy rằng

$$I = \int\limits_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{dz}{z^q} = \frac{z^{-q+1}}{1-q}\Bigg|_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} < \infty$$

với $q > 1$. Do đó chuỗi hội tụ với $p = 1$ và $q > 1$.

Nếu $p > 1$ thì do $\lim \frac{\ln^{\gamma} t}{t^{\varepsilon}} = 0$ với $\varepsilon > 0$ và γ tùy ý, ta có thể viết $\frac{1}{t^p \ln^q t} \leqslant \frac{1}{t^{\alpha}}$ với $t > 0$ đủ lớn, ở đây $p \geqslant \alpha > 1$.

Tương tự, nếu $p < 1$ thì với $t > 0$ đủ lớn ta có bất đẳng thức $\frac{1}{t^p \ln^q t} \geqslant \frac{1}{t^{\alpha}}$, ở đây $p \leqslant \alpha < 1$.

Khi đó, dựa vào dấu hiệu so sánh (xem § 4, chương IV, tập) I ta có thể khẳng định rằng tích phân đang xét là hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ nếu $p < 1$ (trong cả hai trường hợp q tùy ý). Điều đó cũng đúng (theo dấu hiệu tích phân Côsi) đối với chuỗi đã cho.

52. Dùng dấu hiệu tích phân và dấu hiệu so sánh, xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 . \ln 3 \ldots \ln(n+1)}{\ln(2+p)\ln(3+p)\ldots\ln(n+1+p)} \quad (p > 0).$$

Giải. Từ ước lượng sau đây của số hạng tổng quát của chuỗi ta suy ra chuỗi phân kỳ:

$$\frac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln(n+1)}{\ln(2+p)\ln(3+p)\ldots\ln(n+p+1)} \geqslant \ln 2 . \frac{\ln(n_o+2)\ln(n_o+3)\ldots\ln(n+1)}{\ln(p+2)\ln(p+3)\ldots\ln(p+n+1)} >$$

$$> \frac{\ln 2}{\ln(p+n-n_o+2)\ln(p+n-n_o+3)\ldots\ln(p+n+1)} \geqslant \frac{\ln 2}{\ln^{n_o}(p+n+1)}$$

ở đây số nguyên $n_o > p > 0$ như bài toán trước.

53. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, trong đó $\nu(n)$ là số chữ của n.

Giải. Dễ dàng chứng minh rằng $\nu(n) = [\lg n] + 1 \leqslant \ln n + 1$. Vì $\frac{\nu(n)}{n^2} \leqslant \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ và các chuỗi $\sum \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh chuỗi đã cho hội tụ.

54. Giả sử λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ là dãy nghiệm của phương trình $\operatorname{tg} x = x$. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

Giải. Bằng đồ thị ta có thể xác định được rằng để $\lambda_n > 0$ cần phải thỏa mãn các bất đẳng thức

$$n\pi < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Khi đó

$$\frac{1}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} < \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{(n\pi)^2}$$

và theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi đã cho hội tụ.

Tương tự, ta có kết quả trong trường hợp $\lambda_n < 0$.

55. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

Giải. Theo dấu hiệu tích phân Côsi, chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ phân kỳ. Sử dụng bất đẳng thức $\ln(n!) < n \ln n$ và dấu hiệu so sánh chúng ta kết luận rằng chuỗi đã cho phân kỳ.

56. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng dương thực sự đơn điệu giảm, hội tụ hay phân kỳ đồng thời với chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Chứng minh. Vì

$$0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_{2^{n+1}} \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n},$$

nên theo kết quả của bài 48 (ch I, tập I) và định lý về dãy đơn điệu và giới nội, từ sự hội tụ của chuỗi thứ hai suy ra sự hội tụ của chuỗi thứ nhất.

Mặt khác, theo ước lượng

$$\frac{1}{2}(4a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^{n+1}},$$

từ sự hội tụ của chuỗi thứ nhất suy ra sự hội tụ của chuỗi thứ hai.

57. Giả sử $f(x) > 0$ khi $x \geqslant 1$ là hàm đơn điệu không tăng. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ thì đối với phần dư thứ n của nó $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ thỏa mãn ước lượng

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Tìm tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ với độ chính xác đến 0,01.

Chứng minh. Do hàm $f(x)$ đơn điệu không tăng, ta có các bất đẳng thức $0 < f(k+1) \leqslant f(k)$ với $k \leqslant x \leqslant k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, sử dụng các bất đẳng thức đó ta thấy:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n.$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx > \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k+1) = R_n - f(n+1).$$

Bây giờ ta dễ dàng thấy rằng từ các bất đẳng thức vừa nhận được suy ra các ước lượng cần thiết.

Để tính tổng của chuỗi với độ chính xác đã được chỉ ra, ta cần sử dụng các ước lượng vừa chứng minh ở trên. Trong trường hợp này. $R_n = 0{,}01$; $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Khi đó,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0{,}01 < \frac{1}{(n+1)^3} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

từ đó ta nhận được số số hạng đầu tiên của chuỗi cần phải lấy để tính tổng của chuỗi với độ chính xác đến $0{,}01 : n = 7$.

Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} \approx 1 + 0{,}1250 +$
$+ 0{,}0370 + 0{,}0156 + 0{,}0080 + 0{,}0046 + 0{,}0029 \approx 1{,}1931 \approx 1{,}19$ (làm tròn thiếu).

58. Chứng minh dấu hiệu Lôbasepxki : chuỗi số dương thực sự $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, với các số hạng đơn điệu tiến tới không, hội tụ hay phân kỳ đồng thời với chuỗi $\sum\limits_{m=o}^{\infty} p_m 2^{-m}$, trong đó p_m là chỉ số lớn nhất của các số hạng a_n thỏa mãn bất đẳng thức $a_n \geqslant 2^{-n}$ $(n = 1,2, ..., p_m)$.

Chứng minh. Do điều kiện của định lý ta có các bất đẳng thức

$$a_1 > a_2 > ... > a_{p_o} \geqslant \frac{1}{2^k} > a_{p_o+1} > a_{p_o+2} > ... > a_{p_1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2^{k+1}} > a_{p_1+1} > ... > a_{p_2} \geqslant \frac{1}{2^{k+2}} > a_{p_2+1} > ... > a_{p_{m-1}+1} >$$

$$> \frac{1}{2^{k+m-1}} > a_{p_{m-1}+2} > ... > a_{p_m} \geqslant \frac{1}{2^{k+m}} \tag{1}$$

trong đó k là số tự nhiên nào đó. Từ bất đẳng thức (1) ta thấy

$$\frac{p_o}{2^k} < a_1 + a_2 + ... + a_{p_o} < p_o\, a_1,$$

$$\frac{p_1 - p_o}{2^{k+1}} < a_{p_o+1} + ... + a_{p_1} \frac{p_1 - p_o}{2^k}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} < a_{p_{m-1}+1} + ... + a_{p_m} < \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m-1}},$$

từ đó suy ra

$$\frac{p_o}{2^k} + \frac{p_1 - p_o}{2^{k+1}} + ... + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} < S_{p_m} <$$

$$< p_o\, a_1 + \frac{p_1 - p_o}{2^k} + ... + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m-1}}, \tag{2}$$

trong đó $_m = a_1 + a_2 + ... + a_{p_m}$ là dãy con của dãy tổng riêng của chuỗi thứ nhất.

Hơn nữa, vì

$$\frac{p_o}{2^k} + \frac{p_1 - p_o}{2^{k+1}} + ... + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} = \frac{1}{2^{k+1}}\left(C_m + \frac{p_m}{2^m}\right) > \frac{C_m}{2^{k+1}},$$

$$p_o a_1 + \frac{p_1 - p_o}{2^k} + ... + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m-1}} = p_o a_1 + \frac{1}{2^k}\left(C_m - 2p_o + \frac{p_m}{2^m}\right) <$$

$$< p_o\, a_1 + \frac{C_m}{2^k} + \frac{C_m}{2^k} = p_o a_1 + \frac{C_m}{2^{k-1}},$$

trong đó C_m là dãy tổng riêng của chuỗi thứ hai, nên từ (2) ta nhận được ước lượng

$$\frac{C_m}{2^{k+1}} < S_{p_m} < p_o a_1 + \frac{C_m}{2^{k-1}}$$

Từ ước lượng trên và từ tính đơn điệu của C_m và S_{p_m} suy ra rằng nếu chuỗi thứ nhất hội tụ thì chuỗi thứ hai cũng hội tụ, và từ sự hội tụ của chuỗi thứ hai suy ra sự hội tụ của chuỗi thứ nhất.

Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau:

59. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n}{4n-2}-\sin\frac{\pi n}{2n-1}\right).$$

Giải. Sử dụng công thức Macloranh với phần dư dạng Pêanô và cũng dùng các phép biến đổi cơ bản các hàm lượng giác, ta nhận được

$$a_n = \operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4n-2} - \sin\frac{\pi n}{2n+1} = \frac{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2(4n-2)}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2(4n-2)}} - \cos\frac{\pi}{2(2n+1)} =$$

$$= \frac{1-\dfrac{\pi}{2(4n-2)}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{1+\dfrac{\pi}{2(4n-2)}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} - 1 + \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4n-2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right) \text{ khi } n\to\infty.$$

Do đó theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa chuỗi phân kỳ.

60. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$$

Giải. Với $n \geqslant 3$ ta có các bất đẳng thức

$$\frac{n-2}{n^\alpha} < \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}.$$

Bởi vì các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-2}{n^\alpha}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, theo dấu hiệu tích phân. hội tụ với $\alpha > 2$, nên chuỗi đang xét, theo dấu hiệu so sánh, cũng hội tụ với $\alpha > 2$.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$.

Giải. Sử dụng công thức Macloranh, ta nhận được:

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

khi $n \to \infty$.

Từ đó, dựa vào dấu hiệu tích phân và dấu hiệu so sánh chung ta kết luận rằng chuỗi đã cho hội tụ.

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

Giải. Vì $\sin\frac{1}{n} > \frac{2}{\pi n}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ nên $\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right) < \ln^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

Do đó

$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)} > \frac{1}{\ln^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)} > \frac{2}{\pi n\ln\frac{\pi n}{2}} = O^*\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\ (n \to \infty).$$

Như vậy, dựa vào dấu hiệu tích phân Côsi và dấu hiệu so sánh chung, từ hệ thức cuối cùng ta suy ra rằng, chuỗi đã cho phân kỳ.

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

Giải. Hiển nhiên với $a = 0$ chuỗi phân kỳ. Với $a \neq 0$ ta sử dụng dấu hiệu Côsi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sin^2\frac{a}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1.$$

Do đó chuỗi hội tụ nếu $a \neq 0$.

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^\alpha} - 1)$.

Giải. Với $\alpha \geqslant 0$ chuỗi đã cho phân kỳ, vì số hạng tổng quát không tiến tới không khi $n \to \infty$. Vì thế ta sẽ xem rằng $\alpha < 0$, và khi xác định bậc tiến tới của số hạng tổng quát khi $n \to \infty$ ta sử dụng công thức Macloranh. Ta có:

$$n^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \ln n} - 1 = \frac{\ln n}{n^{-\alpha}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right)$$

$$= O^*\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ đó, dựa vào dấu hiệu tích phân và dấu hiệu so sánh chung ta thấy rằng chuỗi hội tụ khi $\alpha < -1$.

Chú thích. Bài 61 và 64 có thể giải như sau. Ta ký hiệu $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1$, $b_n = n^{n^\alpha} - 1$, trong đó chuỗi với các số hạng b_n được xét với tất cả các giá trị của tham số α mà $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Tiếp theo, ta có:

$$\frac{\ln n}{n^2+1} = \ln(1 + a_n),\ n^\alpha \ln n = \ln(1 + b_n),$$

từ đó, do điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\ln(1 + a_n) \sim a_n$, $\ln(1 + b_n) \sim b_n$ khi $n \to \infty$ ta suy ra rằng các chuỗi đang xét hội tụ hay phân kỳ đồng thời với các chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$ và $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^\alpha \ln n$. Áp dụng dấu hiệu tích phân Côsi, đối với hai chuỗi sau cùng ta nhận thấy rằng chuỗi với các số hạng a_n hội tụ, còn chuỗi với các số hạng b_n hội tụ khi $\alpha < -1$.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Giải. Ta có:

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}}.$$

Vì các dãy $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{b+n}$ và $\left(1+\frac{b}{n}\right)^{a+n}$ khi $n \to \infty$ tiến tới các hằng số tương ứng e^a và e^b nên $a_n \sim \frac{e^{-a-b}}{n^{a+b}}$ khi $n \to \infty$.

Do đó, theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi đã cho hội tụ với $a + b > 1$.

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right)$.

Giải. Hiển nhiên, nếu $\alpha \leqslant 0$ thì chuỗi phân kỳ, vì số hạng tổng quát không tiến tới không. Tiếp theo, với $\alpha > 0$, sử dụng công thức Macloranh ta nhận được:

$$a_n = \ln\frac{1}{n^{\alpha}} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right) = -\ln\left(n^{\alpha}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

$$= -\ln\left(n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{6n^{3\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\right) = O^{*}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \text{ khi } n\to\infty.$$

Như vậy theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{-(b\ln n + c\ln^2 n)}$ $(\alpha > 0)$.

Giải. Ta có: $\alpha^{-(b\ln n+c\ln^2 n)} = n^{-(b\ln\alpha + c\ln\alpha\ln n)}$. Từ đó ta thấy rằng nếu $c \neq 0$ thì theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, chuỗi hội tụ khi $c\ln\alpha > 0$. Thật vậy trong trường hợp này

$$0 < n^{-(b\ln\alpha + c\ln\alpha\ln n)} < n^{-(b\ln\alpha + c\ln\alpha\ln N)}$$

với $n > N$, trong đó N là một số sao cho $b\ln\alpha + c\ln\alpha\ln N > 1$.

Nếu $c\ln\alpha < 0$ thì số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không, tức là chuỗi đã cho phân kỳ.

Nếu $c = 0$ thì, theo dấu hiệu so sánh, chuỗi hội tụ với $b\ln\alpha > 1$ tức là với $\alpha^b > e$.

Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với số hạng tổng quát sau đây:

68. $u_n = \left(\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx\right)^{-1}$.

Giải. Bởi vì

$$\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx > \int_0^n x\,dx = \frac{n^2}{2},$$

nên $0 < u_n < \frac{2}{n^2}$ tức là, theo dấu hiệu so sánh, chuỗi hội tụ.

69. $u_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$

Giải. Do ước lượng

$$u_n > \frac{1}{\pi(n+1)} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

và do chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ phân kỳ, ta kết luận rằng chuỗi đã cho cũng phân kỳ.

70. $u_n = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx.$

Giải. Do bất đẳng thức

$$0 \leqslant \frac{\sin^3 x}{1+x} \leqslant x^3 \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}\right),$$

$$0 < u_n < \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} x^3 dx = \frac{\pi^4}{4n^4}$$

và do dấu hiệu so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

71. $$u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$$

Giải. Vì $0 < u_n \leqslant \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$ hội tụ theo dấu hiệu Đalambe, nên chuỗi đã cho cũng hội tụ theo dấu hiệu so sánh chung.

72. $$u_n = n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k.$$

Giải. Dễ thấy rằng với $n \geqslant 1$ bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn:

$$u_n \leqslant \frac{n\ln^2 n}{n^\alpha} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = a_n, \tag{1}$$

và với n đủ lớn, thỏa mãn bất đẳng thức

$$n^{1-\alpha} = \frac{n}{n^\alpha} \leqslant u_n. \tag{2}$$

Chuỗi $\Sigma n^{1-\alpha}$, theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, hội tụ nếu $\alpha > 2$. Chuỗi Σa_n, dựa vào bài toán 51, hội tụ cũng với điều kiện này. Bởi vậy, theo dấu hiệu so sánh chung, từ (1) và (2) suy ra chuỗi đã cho hội tụ với $\alpha > 2$.

Thay thế các dãy x_n ($n = 1, 2, \ldots$) bằng các chuỗi tương ứng, hãy xét sự hội tụ của nó, nếu:

73. $$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Giải. Vì $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1$ nên

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Chuỗi vừa nhận được hội tụ theo dấu hiệu so sánh, bởi vì

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2} \sim \frac{1}{2k^{3/2}} \text{ khi } k \to \infty$$

vì vậy dãy đã cho cũng hội tụ.

74. $$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}.$$

Giải. Tiến hành tương tự như trong bài toán trước ta nhận được

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2}(\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right)$$

từ đó

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2}(\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right).$$

Sử dụng công thức Maçloranh với phần dư dạng Pêanô, ta có:

$$2a_n = \frac{2\ln(n+1)}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1}\,.\ln n(n+1)$$

$$= \frac{2\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)+\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{-2\ln n}{n(n+1)} - 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{-2\ln n}{n(n+1)} - \frac{2}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \text{khi } n\to\infty$$

Do đó, sự hội tụ của dãy x_n tương đương với sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Chuỗi cuối cùng hội tụ theo dấu hiệu tích phân Côsi, vì vậy dãy đã cho cũng hội tụ.

§2. CÁC DẤU HIỆU HỘI TỤ CỦA CHUỖI CÓ DẤU THAY ĐỔI

1. Chuỗi hội tụ tuyệt đối và chuỗi hội tụ có điều kiện.

Ta nói rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ còn chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ thì ta nói rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ có điều kiện.

Nếu chuỗi hội tụ tuyệt đối thì các số hạng của chuỗi có thể đổi chỗ cho nhau theo thứ tự bất kỳ. Tổng của chuỗi đó vẫn giữ nguyên. Nếu như chuỗi chỉ hội tụ có điều kiện thì bằng cách đổi chỗ thích hợp các số hạng của nó, ta có thể nhận được chuỗi có tổng bằng số cho trước bất kỳ (trường hợp này không loại trừ $\pm\infty$).

2. Dấu hiệu Lepnit. Nếu $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \geqslant 0$ và dãy b_n bắt đầu từ một chỉ số n_o nào đó đơn điệu tiến tới không thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Đối với phần dư của chuỗi ta có ước lượng:

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3. Dấu hiệu Aben. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

hội tụ nếu chuỗi $\Sigma\, a_n$ hội tụ và dãy b_n đơn điệu, giới nội.

4. Dấu hiệu Đirichle. Chuỗi (1) hội tụ nếu dãy b_n bắt đầu từ một chỉ số n_o nào đó đơn điệu tiến tới không, và dãy tổng riêng của chuỗi Σa_n bị chặn.

5. Các số hạng của chuỗi hội tụ có thể nhóm lại với nhau tùy ý, khi ấy tổng của chuỗi không thay đổi.

75. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu thỏa mãn các điều kiện: a) số hạng tổng quát $a_n \to 0$ khi $n \to \infty$; b) chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho theo thứ tự tự nhiên của nó, hội tụ; c) số các phần tử a_i có mặt trong số hạng $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \ldots)$ là hữu hạn.

Chứng minh. Giả sử S^A_{nk} là dãy tổng riêng của chuỗi b). Khi đó

$$\begin{aligned} S^A_{nk} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + \ldots + a_{p_3-1} + \ldots + \\ + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1} = \\ = S_k + a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1} \quad (p_n \leqslant k \leqslant p_{n+1} - 1), \end{aligned}$$

trong đó S_k là dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vì $a_n \to 0$ và số các số hạng của dãy $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{p_{n+1}-1} = C_k$ theo điều kiện, là hữu hạn nên $C_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Do đó

$$\lim S^A_{nk} = \lim_{k\to\infty} S_k,$$

đó là điều cần chứng minh.

76. Chứng minh rằng chuỗi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} - a_{p_2} - \ldots - a_{p_3-1} + a_{p_3} + \ldots$$

hội tụ hay phân kỳ đồng thời với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right) (a_i > 0\ ;\ 1 = p_1 < p_2 < \ldots).$$

Chứng minh. Giả sử chuỗi thứ nhất hội tụ. Khi đó dãy con tùy ý của dãy tổng riêng của nó cũng hội tụ, trong số đó có dãy

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{i=p_k}^{p_{k+1}-1} a_i \right),$$

tức là dãy tổng riêng của chuỗi thứ hai hội tụ. Do đó chuỗi thứ hai cũng hội tụ.

Bây giờ giả sử chuỗi thứ hai hội tụ. Khi đó $\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \to 0$ khi $n \to \infty$. Điều này có nghĩa là, do a_i dương nên tổng $a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1}$ (xem bài trước) cũng tiến tới không và

$$\lim_{n\to\infty} S^A_{nk} = \lim_{k\to\infty} S_k,$$

tức là chuỗi thứ nhất hội tụ.

77. Chứng minh rằng tổng của chuỗi hội tụ không thay đổi nếu ta đổi chỗ các số hạng của chuỗi sao cho mỗi một số hạng đó không đi xa vị trí ban đầu của nó lớn hơn m chỗ, trong đó m là số đã cho trước.

Chứng minh. Giả sử S là tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n > N$, dãy tổng riêng S_n của chuỗi này thỏa mãn bất đẳng thức $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$. Theo điều kiện của bài toán, với $n > N + m$ ta có thể viết $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$ trong đó S'_n là dãy tổng riêng của chuỗi nhận được sau khi đã đổi chỗ các số hạng như đã chỉ ra.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S$.

Chứng minh sự hội tụ của các chuỗi sau đây và tìm tổng của chúng:

78. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

Giải. Số hạng tổng quát của chuỗi $a_n = (-1)^n b_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ trong đó $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$. Vì b_n bắt đầu từ một chỉ số nào đó là đơn điệu tiến tới không, nên, theo dấu hiệu Lepnit, chuỗi đã cho hội tụ. Việc chứng minh sự hội tụ của chuỗi này có thể xét trực tiếp. Cụ thể là, ta biểu diễn dãy tổng riêng S_n của chuỗi đã cho dưới dạng

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(n+1)},$$

trong đó

$$S_n^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$S_n^{(2)} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n^{(k+1)} = 2\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$$

$$S_n^{(n)} = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right), \quad S_n^{(n+1)} = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

a nhận được

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) -$$

$$- \frac{2}{3}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4}{3}\frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Bây giờ ta dễ thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tồn tại (tức là chuỗi hội tụ) và bằng $\frac{2}{9}$.

79. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

Giải. Vì số hạng tổng quát của chuỗi có dạng $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1, 2 \dots)$ và dãy $\frac{1}{n}$ đơn điệu tiến tới không, nên, theo dấu hiệu Lepnit, chuỗi hội tụ. Tìm S_{2n}. Ta có:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= C + \ln 2n + \varepsilon_{2n} - (C + \ln n + \varepsilon_n)$$

$$= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n,$$

trong đó C là hằng số Ơle, $\varepsilon_n \to 0$ khi $n \to \infty$ (xem bài 83, chương I, tập I). Lại chú ý rằng $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$, trong đó S_n là dãy tổng riêng của chuỗi đã cho, cuối cùng ta nhận được

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

80. Cho biết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, chứng minh mệnh đề sau đây: nếu các số hạng của chuỗi $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ đổi chỗ để cho p số hạng dương liên tiếp vào một nhóm, tiếp đến q số hạng âm liên tiếp vào một nhóm, thì tổng của chuỗi mới này sẽ bằng $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

Chứng minh. Theo cách đổi chỗ đã được chỉ ra ta nhận được chuỗi

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} +$$
$$+ \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \dots - \frac{1}{4q} + \dots,$$

có tổng, theo bài 76, bằng tổng của chuỗi

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2p-1} + \dots + \frac{1}{4p-1}\right) - \dots \tag{1}$$

trong trường hợp chuỗi sau cùng hội tụ.

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \dots + \frac{1}{2np-1} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - \dots - \frac{1}{2nq}\right) \tag{2}$$

Chuỗi (2) nhận được từ chuỗi (1) bằng cách nhóm các số hạng của (1) theo từng cặp. Vì vậy, nếu ta chứng minh được rằng chuỗi (2) hội tụ và tìm được tổng của nó, thì dựa vào kết quả trong bài toán 75, ta có thể khẳng định rằng chuỗi (1) cũng có tổng như vậy.

Giả sử $p > q$. Khi đó, dễ dàng nhận được

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2nq} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2nq+1} + \frac{1}{2nq+3} + \ldots + \frac{1}{2np-1}\right) \tag{3}$$

trong đó S_n là dãy tổng riêng của chuỗi (2). Thêm vào và bớt đi trong biểu thức (3) số hạng

$$\frac{1}{2nq+2} + \frac{1}{2nq+4} + \ldots + \frac{1}{2np} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{nq+1} + \frac{1}{nq+2} + \ldots + \frac{1}{np}\right)$$

và dùng công thức tiệm cận

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln\frac{m}{n} + \varepsilon_{mn} \ (\varepsilon_{mn} \to 0 \text{ khi } m \to \infty)$$

nhận được dựa vào bài toán 85 (chương I, tập I) từ (3) ta có

$$S_n = C_{2np} + \ln\frac{2np}{2nq} - \frac{1}{2}\ln\frac{np}{nq} + \varepsilon'_n \ (\varepsilon'_n \to 0 \text{ khi } n \to \infty) \tag{4}$$

trong đó C_{2np} là dãy con chẵn của dãy tổng riêng của chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Như vậy, từ (4) ta thấy:

$$S = \lim S_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

Nhận xét rằng bằng cách tương tự khi $p \leqslant q$ ta cũng nhận được kết quả như trên. Đặc biệt nếu $p = 2$ và $q = 1$ thì

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{3}{2}\ln 2;$$

nếu $p = 1, q = 2$ thì

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\ln 2$$

81. Đổi chỗ các số hạng của chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ để cho nó trở thành một chuỗi phân kỳ.

Giải. Chẳng hạn, ta xét chuỗi :

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Hiển nhiên chuỗi này nhận được từ chuỗi đã cho bằng cách đổi chỗ như sau : sau ba số hạng dương thì tiếp ngay một số hạng âm. Ta chứng minh rằng chuỗi này phân kỳ.

Do bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{2}{\sqrt{6n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}>0$$

ta có ước lượng số hạng tổng quát của chuỗi thứ hai : $a_n > \dfrac{1}{\sqrt{6n-5}}$. Bởi vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{6n-5}}$, theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa, là phân kỳ, nên theo dấu hiệu so sánh tổng quát chuỗi $\sum a_n$ cũng phân kỳ, đó là điều cần chứng minh. Chú ý rằng chuỗi xuất phát hội tụ theo dấu hiệu Lepnit.

82. Giả sử

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n \qquad (1)$$

trong đó $b_n > 0$, $b_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ đó có suy ra được rằng chuỗi (1) hội tụ hay không.

Giải. Nói chung là không. Nếu b_n có dạng $b_n = (\alpha + (-1)^n\beta)\varepsilon_n$ chẳng hạn, trong đó $\alpha > \beta > 0$ và ε_n giảm đến 0 $\left(\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^\gamma}\text{ khi } n \to \infty,\ 0 < \gamma \leqslant 1\right)$ thì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\alpha + (-1)^n\beta)\varepsilon_n$$

phân kỳ. Thật vậy dãy tổng riêng

$$S_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \varepsilon_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

phân kỳ $(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty)$, bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \varepsilon_k$ tồn tại (do sự hội tụ của chuỗi $\sum (-1)^n\varepsilon_n$ theo dấu hiệu Lepnit) còn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k = +\infty$ theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa.

Đặc biệt, nếu $\alpha = 2, \beta = 1, \varepsilon_n = \frac{1}{n}$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$ phân kỳ. Ví dụ này chứng tỏ rằng điều kiện đơn điệu của dãy b_n trong dấu hiệu Lepnit, nói chung không thể thiếu.

Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi có dấu thay đổi sau đây :

83. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$

Giải. Bởi vì chuỗi nhóm các số hạng, theo dấu hiệu Lepnit, là hội tụ, nên dựa vào chứng minh đã được đưa ra trong bài 75 ta đi tới kết luận rằng chuỗi đã cho cũng hội tụ.

84.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Giải. Bởi vì

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\right| = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}\left|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

và dãy $n^{-1}\ln^{100}n$ bắt đầu từ n đủ lớn đơn điệu tiến tới không (điều này được suy từ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{100}x = 100\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{99}x = 0$ còn $(x^{-1}\ln^{100}x)' < 0$ khi $x > e^{100}$) nên theo dấu hiệu Đirichlê chuỗi đã cho hội tụ.

85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$.

Giải. Các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ hội tụ; chuỗi thứ nhất hội tụ theo dấu hiệu Lepnit, chuỗi thứ hai (do sự giới nội của dãy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\cos 2k\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2\cos 1}\cos(2n+1)\right| < \frac{1+(\cos 1)^{-1}}{2}$$

và tính đơn điệu tiến tới không của $\dfrac{1}{n}$ khi $n\to\infty$) hội tụ theo dấu hiệu Đirichlê. Do đó chuỗi nửa hiệu của chúng

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-\cos 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

cũng là chuỗi hội tụ.

86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Giải. Biểu diễn số hạng tổng quát dưới dạng

$$\frac{(-1)}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

và chú ý rằng chuỗi $\sum \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ hội tụ theo dấu hiệu Lepnit, còn chuỗi $\sum \dfrac{1}{n-1}$ phân kỳ (đến $+\infty$), ta kết luận rằng chuỗi đã cho cũng phân kỳ (đến $+\infty$).

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2})$.

Giải. Bởi vì

$$\sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2}) = (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2 + k^2} - n)) = (-1)^n b_n,$$

trong đó $b_n = \sin \dfrac{\pi k^2}{\sqrt{n^2 + k^2} + n}$ là dãy đơn điệu (khi $n > n_0$) tiến tới không khi $n \to \infty$, nên, theo dấu hiệu Lepnit, chuỗi hội tụ.

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

Giải. Ta xét chuỗi nhận được do việc nhóm các số hạng của chuỗi đã cho. Ta có

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{15}\right) +$$

$$+ \ldots + (-1)^k \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 + 1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2 - 1}\right) + \ldots$$

Bởi vì

$$A_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 + 1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2 - 1} \leqslant \frac{2k + 1}{k^2} \to 0 \text{ khi } k \to \infty \text{ và}$$

$$A_k - A_{k+1} = (2k + 1) \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{(k^2 + m)((k+1)^2 + m)} - \frac{1}{k^2 + 4k + 2} -$$

$$- \frac{1}{k^2 + 4k + 3} > \frac{(2k + 1)^2}{(k^2 + 2k)(k^2 + 4k + 1)} - \frac{1}{k^2 + 4k + 2} - \frac{1}{k^2 + 4k + 3} > 0$$

với $k \geqslant k_0$, nên chuỗi $\sum (-1)^k A_k$, theo dấu hiệu Lepnit, là hội tụ. Khi đó dựa vào kết luận trong bài 76 ta thấy chuỗi đã cho cũng hội tụ.

89. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Giải. Ta có

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Bởi vì chuỗi $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$$

hội tụ theo dấu hiệu Lepnit, còn dãy $\cos\frac{\pi}{n+1}$ đơn điệu và giới nội, nên chuỗi đang xét hội tụ theo dấu hiệu Aben.

90. Chứng minh rằng chuỗi đan dấu

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1}b_n + \ldots \ (b_n > 0)$$

hội tụ nếu $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ khi $n \to \infty$, trong đó $p > 0$.

Chứng minh. Như đã chỉ ra trong bài 42, khi $p > 0$ dãy b_n giảm tới 0 khi $n > n_0$. Vì vậy theo dấu hiệu Lepnit chuỗi đã cho hội tụ, đó là điều cần chứng minh.

Nghiên cứu sự hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện của các chuỗi sau:

91. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Giải. Giả sử $p \leqslant 0$. Khi đó số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không, do đó chuỗi phân kỳ. Tiếp theo ta giả thiết rằng $p > 0$ và sử dụng công thức Macloranh với phần dư dạng Pêanô ta thấy

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Bởi vì chuỗi $\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$, theo dấu hiệu Lepnit, hội tụ khi $p > 0$, còn chuỗi $\sum a_n^*$ trong đó $a_n^* = \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, theo dấu hiệu so sánh, hội tụ khi $p > \frac{1}{2}$ $\left(\text{khi } p \leqslant \frac{1}{2} \text{ chuỗi phân kỳ tới } +\infty\right)$ nên chuỗi đã cho hội tụ chỉ với $p > \frac{1}{2}$.

Do bất đẳng thức

$$\frac{1}{2n^p} < \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right| < \frac{2}{n^p} \ (p > 0)$$

và theo dấu hiệu so sánh, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$. Do đó với những giá trị p thỏa mãn các bất đẳng thức $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ thì chuỗi đang xét hội tụ có điều kiện.

92. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$.

Giải. Khi $p \leqslant 0$ số hạng tổng quát không dần tới không, tức là chuỗi phân kỳ. Vì vậy ta xem rằng $p > 0$ và sử dụng công thức Macloranh với phần dư dạng Pêanô biến đổi số hạng tổng quát của chuỗi về dạng

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-p}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^p =$$
$$= (-1)^n n^{-p}\left(1 + p\,\frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Các chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right)$ hội tụ khi $p > 0$ (chuỗi thứ nhất theo dấu hiệu Lepnit, chuỗi thứ hai theo dấu hiệu so sánh). Vì vậy chuỗi xuất phát cũng hội tụ.

Tiếp theo, vì

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \leqslant \frac{1}{(n-1)^p} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

và chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ khi $p > 1$ nên nhờ các bất đẳng thức cuối cùng và theo dấu hiệu so sánh với lũy thừa chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$. Do đó khi $0 < p \leqslant 1$ chuỗi đã cho hội tụ có điều kiện.

93. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$.

Giải. Hiển nhiên, khi $p \leqslant 0$ chuỗi phân kỳ, bởi vì khi đó không thỏa mãn điều kiện cần của hội tụ. Khi $p > 0$, như trong bài trước, ta biểu diễn số hạng tổng quát của chuỗi dưới dạng

$$\sin\frac{n\pi}{4}\left(n^p+\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1}=n^{-p}\sin\frac{n\pi}{4}\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}-\frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ hội tụ khi $p>0$, theo dấu hiệu Đirichlê

bởi vì

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}\quad \text{và}\quad \frac{1}{n^p}\ \text{giảm tới } 0.$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$, theo dấu hiệu so sánh, hội tụ hay phân kỳ đồng thời với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2}{n^{2p}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}.$$

Tiếp đến chuỗi $\sum\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ hội tụ, theo dấu hiệu Đirichlê, khi $p>0$, còn chuỗi $\sum\frac{1}{n^{2p}}$ hội tụ khi $p>\frac{1}{2}$ (chú ý rằng khi $p\leqslant\frac{1}{2}$ chuỗi sau cùng phân kỳ tới $+\infty$, vì vậy chuỗi $\sum\frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2}{n^{2p}}$ cũng phân kỳ nếu $p\leqslant\frac{1}{2}$). Do đó chuỗi xuất phát hội tụ chỉ khi $p>\frac{1}{2}$.

Để xác định miền hội tụ tuyệt đối ta sử dụng các ước lượng

$$\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{2n^p} \leqslant \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \cdot \frac{1}{\left|1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right|} \leqslant \frac{2\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p},$$

$$\frac{1}{2n^p} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p} = \frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2}{n^p} \leqslant \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$$

và dấu hiệu so sánh. Từ các bất đẳng thức này suy ra rằng chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối chỉ khi $p > 1$. Vì vậy khi $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$. Chuỗi hội tụ có điều kiện.

94. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}. \tag{1}$$

Giải. Hiển nhiên khi $p > 1$ chuỗi hội tụ tuyệt đối. Để tìm miền hội tụ có điều kiện ta xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n, \tag{2}$$

trong đó $A_n = \frac{1}{(n^2)^p} + \frac{1}{(n^2+1)^p} + \dots + \frac{1}{(n^2+2n)^p}$, nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho. Bởi vì $0 < A_n < \frac{2n+1}{n^{2p}} \to 0$ khi $n \to \infty$ và $p > \frac{1}{2}$, và cũng vì

$$A_n - A_{n+1} = \sum_{i=0}^{2n} \frac{((n+1)^2+i)^p - (n^2+i)^p}{(n^2+i)^p\,(n^2+2n+i+1)^p} - (n^2+4n+2)^{-p} -$$

$$-(n^2+4n+3)^{-p} > \frac{(2n+1)\,((n^2+4n+1)^p - (n^2+2n)^p)}{(n^2+2n)^p\,(n^2+4n+1)^p} -$$

$$-\frac{1}{(n^2+4n+2)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+3)^p} > 0$$

với n đủ lớn, nên theo dấu hiệu Lepnit chuỗi (2) hội tụ.

Mặt khác $A_n > \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ không tiến tới không với $p \leqslant \frac{1}{2}$; vì vậy chuỗi (2) phân kỳ nếu $p \leqslant \frac{1}{2}$. Do đó theo bài 76 chuỗi (1) hội tụ chỉ khi $p > \frac{1}{2}$. Như vậy miền hội tụ có điều kiện của chuỗi (1) được xác định bởi bất đẳng thức $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$.

95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

Giải. Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{[e^{k-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^k]} \right)$

nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho. Nhờ ước lượng

$$\frac{1}{[e^{k-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^k]} > \frac{[e^k]-[e^{k-1}]}{[e^k]} =$$
$$= 1 - \frac{[e^{k-1}]}{[e^k]} \to 1 - \frac{1}{e} \neq 0 \ (k \to \infty),$$

chuỗi đó phân kỳ. Do đó theo bài 76, chuỗi xuất phát cũng phân kỳ.

96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \right)^p$.

Giải. Xét tỷ số

$$\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \right)^p : \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n)(2n+2)} \right)^p =$$
$$= \left(1 + \frac{p}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \ (n \to \infty).$$

Từ đó ta thấy rằng (theo bài 90) chuỗi hội tụ nếu $p > 0$. Bởi vì với $p \leqslant 0$ số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không khi $n \to \infty$, nên điều kiện này $(p > 0)$ cũng là điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

Hơn nữa theo dấu hiệu Gaoxơ, chuỗi hội tụ tuyệt đối chỉ khi $p > 2$. Do đó với những giá trị p thỏa mãn các bất đẳng thức $0 < p \leqslant 2$ chuỗi đã cho chỉ hội tụ có điều kiện.

97. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n . \sin n^2}{n}$.

Giải. Bởi vì

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k . \sin k^2\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} (\cos k(k-1) - \cos k(k+1))\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|1 - \cos (n+1) n\right| \leqslant 1$$

$\frac{1}{n}$ giảm tới 0 khi $n \to \infty$, nên theo dấu hiệu Đirichlê chuỗi hội tụ.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Giải. Ta chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$. Để chứng minh ta giả sử ngược lại, tức là giả sử $\lim_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$. Khi đó $\lim_{n\to\infty} \sin(n+1)^2$ cũng bằng không. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n+1)^2 = \lim_{n\to\infty} \sin(n^2+2n+1) = \lim_{n\to\infty} (\sin n^2 \cos(2n+1) +$$

$$+ \sin(2n+1)\cos n^2) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n+1)\sqrt{1-\sin^2 n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin(2n+1) = 0. \qquad (1)$$

Do đẳng thức cuối cùng ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2n+3) = \lim_{n\to\infty} (\sin(2n+1). \cos 2 + \sin 2. \cos(2n+1)) =$$

$$= \sin 2 \lim_{n\to\infty} \cos(2n+1) = 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy rằng: $\lim (\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)) = 0$. Ta nhận được một điều mâu thuẫn và điều đó chứng minh khẳng định của ta.

Như vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

99. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} \dots$

Giải. Ta thấy ngay rằng nếu $p \leqslant 0$ hoặc $q \leqslant 0$ thì chuỗi phân kỳ (theo điều kiện cần). Vì thế tiếp theo ta xem rằng $p > 0$ và $q > 0$.

Ta biết rằng trong bài 75, bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho ta có:

$$\left(\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}\right)+\left(\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^q}\right)$$

Bởi vì

$$\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^q}=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^q}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-q}=$$

$$=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^q}\left(1-\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n^p}+\frac{1}{n^q}+\frac{q}{n^{q+1}}+o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right)$$

khi $n\to\infty$,

nên theo dấu hiệu so sánh, chuỗi nhóm các số hạng hội tụ khi $p=q>0$. Nếu như $p\neq q$ thì suy ra rằng chuỗi hội tụ khi $p>1$ và $q>1$ đồng thời. Khi đó, theo ví dụ đã nói trên, với điều kiện này chuỗi đã cho hội tụ có điều kiện.

Hiển nhiên chuỗi hội tụ tuyệt đối chỉ khi $p>1$ và $q>1$.

100. $$1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots$$

Giải. Chuỗi $1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$ được thành lập từ trị số tuyệt đối của các số hạng của chuỗi đã cho, hội tụ chỉ khi $p>1$, vì với điều kiện này chuỗi $\sum\frac{1}{n^p}$ hội tụ, và các số hạng của chuỗi hội tụ tuyệt đối có thể thay đổi thứ tự tùy ý.

Khi $p=1$ ta nhận được chuỗi hội tụ (đã được xét trong bài 80, ở đó chúng ta đã xác định được chuỗi hội tụ).

Ta xét trường hợp $0<p<1$. Lấy một dãy con của dãy tổng riêng của chuỗi đã cho:

$$S_{3n}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}+$$

$$+\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p}=$$

$$=C_{2n}+\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p},$$

trong đó C_{2n} là dãy con của dãy tổng riêng của chuỗi hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

Bởi vì

$$\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} > \frac{n}{(4n-1)^p} \to +\infty \text{ khi } n \to \infty$$

nên

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p}\right) = +\infty.$$

Do đó chuỗi đã cho phân kỳ với $0 < p < 1$. Nhận xét rằng sự phân kỳ của nó khi $p \leqslant 0$ được suy từ điều kiện cần, cuối cùng ta xác định được rằng chuỗi đang xét hội tụ tuyệt đối nếu $p > 1$ và hội tụ có điều kiện nếu $p = 1$.

101. $1 + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{7^p} - \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{9^p} + \dfrac{1}{11^p} - \dfrac{1}{5^p} + \dots$

Giải. Hiển nhiên với $p > 1$ chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối vì với điều kiện này chuỗi $\sum \dfrac{1}{n^p}$ hội tụ, và các số hạng của chuỗi hội tụ tuyệt đối có thể thay đổi thứ tự tùy ý.

Giả sử $0 < p < 1$. Ta xét dãy con S_{3n} của dãy tổng riêng của chuỗi đã cho. Ta có

$$S_{3n} = \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p}.$$

Bởi vì

$S_{3n} > \dfrac{n}{(4n-1)^p} \to +\infty$ khi $n \to +\infty$ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Giả sử $p = 1$. Khi đó $0 < S_{3n} < \dfrac{1}{2}$ và theo định lý về dãy đơn điệu và giới nội, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n}$ hữu hạn. Do đó chuỗi sau đây hội tụ:

$$\left(1 + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

và do tất cả các điều kiện của bài 75 ở đây đều được thỏa mãn nên chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Chú ý thêm rằng khi $p \leqslant 0$ chuỗi đang xét phân kỳ, cuối cùng ta xác định rằng nó hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$ và hội tụ có điều kiện khi $p = 1$.

102. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \ldots$ (1)

Giải. Ta xét chuỗi

$$\sum_{n=1,4,7\ldots} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p}\right) \tag{2}$$

nhận được từ chuỗi đã cho bằng cách nhóm 3 số hạng của nó với nhau. Ta xem rằng $p > 0$ và $q > 0$, ta có:

$$a_n = \frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} = 2\left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\right) + 2\left(\frac{q}{n^{q+1}} - \frac{p}{n^{p+1}}\right) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ đó, theo dấu hiệu so sánh, suy ra rằng khi $p = q$ chuỗi (2) hội tụ. Giả sử $p \neq q$. Khi đó $a_n \sim \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$ khi $n \to \infty$ và do đó theo dấu hiệu so sánh chuỗi (2) phân kỳ nếu $\min(p, q) \leqslant 1$. Vì ở đây tất cả các điều kiện của bài 75 đều được thỏa mãn, nên các kết luận đối với chuỗi (2) cũng đúng đối với chuỗi (1).

Chú ý thêm rằng với $p \leqslant 0$ hoặc $q \leqslant 0$ chuỗi (1) đang xét là phân kỳ (số hạng tổng quát của nó không tiến tới không) còn khi $p > 1$ và $q > 1$ nói hội tụ tuyệt đối, ta kết luận rằng khi $0 < p = q \leqslant 1$ chuỗi hội tụ có điều kiện.

103. Đối với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\, n^q}$$

hãy xác định:

a) miền hội tụ tuyệt đối;

b) miền hội tụ có điều kiện.

Giải. Hiển nhiên nếu p là một số nguyên âm thì chuỗi hội tụ tuyệt đối. Vì vậy ta xem rằng $p \neq -n$.

Ta xét tỷ số

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{p}{n+1}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q-p}{n} + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ khi } n \to \infty,$$

ở đây dãy $b_n = \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\, n^q}$ bắt đầu từ một chỉ số nào đó có dấu xác định.

Từ tỷ số đã cho, dựa vào bài 90 ta thấy rằng chuỗi hội tụ nếu $q - p > 0$. Dựa vào dấu hiệu Gaoxơ ta kết luận rằng chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $q - p > 1$, Từ tỷ số này ta cũng suy ra rằng nếu $q - p < 0$ thì dãy $\{b_n\}$ đơn điệu tăng và có nghĩa là chuỗi phân kỳ. Nếu như $q = p$ thì ta có

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ khi } n \to \infty. \qquad (1)$$

Ta chứng minh rằng b_n không tiến tới không khi $n \to \infty$. Từ (1) ta suy ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) n^2 = C = \text{const}.$$

Điều đó có nghĩa là $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N$, thỏa mãn bất đẳng thức

$$1 + \frac{C - \varepsilon}{(k+1)^2} < \frac{b_{k+1}}{b_{k+2}} < 1 + \frac{C + \varepsilon}{(k+1)^2}\ (k = N, \ldots, n-2),$$

từ đó, xem rằng N khá lớn, ta thấy :

$$0 < \frac{b_{N+1}}{b_n} < \left(1 + \frac{C+\varepsilon}{(N+1)^2}\right)\left(1 + \frac{C+\varepsilon}{(N+2)^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{C+\varepsilon}{(n-1)^2}\right)$$

Từ các bất đẳng thức này, chú ý bài 38 (chương I, tập I) ta nhận được

$$0 < \frac{b_{N+1}}{b_n} < e^{(C+\varepsilon)\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2}\right)}$$

Do đó

$$|b_n| > |b_{N+1}|\, e^{-(|C|+\varepsilon)\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots\right)}$$

Vì vế phải của bất đẳng thức này không phụ thuộc vào n, nên $|b_n|$ không tiến tới không khi $n \to \infty$. Đó là điều cần sáng tỏ. Và khi đó do dấu hiệu cần của hội tụ, chuỗi đã cho phân kỳ nếu $p = q$.

Như vậy, ta kết luận rằng khi $p < q \leqslant p + 1$ chuỗi hội tụ có điều kiện và khi $q > p + 1$ chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Ngoài ra nó hội tụ tuyệt đối nếu p bằng một số nguyên âm còn q tùy ý.

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ trong đó $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

Giải. Để thuận tiện, ta biểu diễn số hạng tổng quát của chuỗi dưới dạng

$$\binom{m}{n} = (-1)^{n-1} b_n,\quad b_n = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\ldots(1-m)m}{n!},$$

Hiển nhiên khi $m = 0, 1, 2, \ldots$ chuỗi hội tụ tuyệt đối. Vì thế, loại trừ trường hợp này, có thể biểu diễn tỷ số

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m}{n(n-m)}. \qquad (1)$$

Vì bắt đầu từ một chỉ số n_o nào đó dãy b_n có dấu xác định nên không giảm tổng quát, ta sẽ xem rằng $b_n > 0$ $(n \geqslant n_o)$. Trong trường hợp đó từ tỷ số (1), chú ý bài 90, ta thấy rằng chuỗi hội tụ nếu $m + 1 > 0$. Bởi vì với $m + 1 \leqslant 0$ dãy đơn điệu tăng, nên điều kiện $m + 1 > 0$ cũng là điều kiện cần để chuỗi hội tụ. Sau nữa, theo dấu hiệu Gaoxơ, từ (1) suy ra rằng chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $m > 0$ và khi $m < 0$ phân kỳ (tuyệt đối).

Như vậy, tất cả những điều nói trên cho phép ta kết luận rằng với $m \geqslant 0$ chuỗi hội tụ tuyệt đối, còn nếu $-1 < m < 0$ thì chuỗi hội tụ có điều kiện.

105. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi hội tụ không tuyệt đối và

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n}{P_n} = 1$

Chứng minh. Ta ký hiệu S_n và C_n tương ứng là tổng riêng của chuỗi đã cho và chuỗi được lập nên từ các giá trị tuyệt đối $|a_i|$, ta sẽ có $N_n = C_n - S_n$ và $P_n = C_n + S_n$. Do điều kiện của bài toán ta có thể viết $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim C_n = +\infty$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n}{P_n} = \lim \dfrac{C_n - S_n}{C_n + S_n} = 1$, đó là điều cần chứng minh.

106. Chứng minh rằng tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ với mỗi $p > 0$ nằm giữa $\dfrac{1}{2}$ và 1.

Chứng minh. Vì theo dấu hiệu Lepnit chuỗi hội tụ nên các dãy con của dãy tổng riêng của nó có cùng một giới hạn S, trong đó dãy con

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right)$$

là dãy tăng, còn dãy con

$$S_{2n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \dots - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right)$$

là dãy giảm. Do đó $S_{2n} < S < S_{2n-1}$, từ đó ta thấy rằng $S < S_1 = 1$. Để chứng minh ước lượng dưới ta xét dãy con S_{4n-1}. Bởi vì đồ thị của hàm $\frac{1}{x^p}$ ($p > 0$, $x > 0$) là lồi xuống, nên các bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} > \frac{2}{4^p}, \ \frac{1}{7^p} + \frac{1}{9^p} > \frac{2}{8^p} \dots$$

$$\frac{1}{(4n-1)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \frac{2}{(4n)^p}.$$

Từ đó đối với S_{4n-1} ta có ước lượng

$$S_{4n-1} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(4n)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} >$$

$$> 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} - \dots - \frac{1}{(4n-2)^p} + \frac{1}{(4n)^p} = 1 - \frac{1}{2^p} S_{2n},$$

chuyển qua giới hạn ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n-1} = S \geqslant 1 - \frac{1}{2^p} \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1 - \frac{S}{2^p}.$$

Như vậy $S \geqslant \frac{2^p}{2^p+1} > \frac{1}{2}$, đó là điều cần chứng minh.

107. Cần lấy bao nhiêu số hạng của chuỗi để nhận được tổng của nó với độ chính xác đến 10^{-6} nếu :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$?

Giải. a) Theo ước lượng phần dư trong định lý Lepnit cần lấy số N từ bất đẳng thức $\frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+1}} < \frac{1}{10^6}$ từ đó $N \geqslant 10^6$.

b) Theo dấu hiệu Đirichlê chuỗi hội tụ và theo định lý ở mục 5 tổng của nó bằng tổng của chuỗi nhóm các số hạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \ b_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=180(n-1)+1}^{180n-1} \frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}},$$

mà hiển nhiên là chuỗi dạng Lep nit,tức là chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Lepnit. Do đó đối với phần dư của chuỗi này ta có ước lượng.

$$\left|\sum_{k=180n+1}^{180n+179} \frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{180n+1}} \sum_{k=180n+1}^{180n+179} \sin k^\circ < \frac{1}{\sqrt{N+1}\sin\frac{\pi}{360}} < 10^{-6}$$

từ đó $N \geqslant 1{,}32 \cdot 10^{16}$.

108. Chứng minh rằng chuỗi điều hòa vẫn phân kỳ nếu không đổi chỗ các số hạng của nó mà đổi dấu các số hạng sao cho sau p số hạng dương tiếp đến q số hạng âm ($p \neq q$). Chuỗi sẽ chỉ hội tụ nếu $p = q$.

Chứng minh. Chuỗi được nói tới trong bài toán là

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} - \dots - \frac{1}{p+q} + \\ + \frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q} - \dots$$

nhờ bài toán 76, hội tụ hay phân kỳ đồng thời với chuỗi

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) + \\ + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \dots \qquad (1)$$

Giả sử $p > q$. Do ước lượng

$$S_2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) > \\ > 1 - \frac{q}{p} = (p-q)\frac{1}{p};$$

$$S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \left(\frac{1}{2p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+2q}\right) > \\ > S_2 + \frac{p}{2p+q} - \frac{q}{2p+q} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q}\right),$$

$$S_{2n} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q} + \dots + \frac{1}{np+(n-1)q}\right) \equiv x_n > 0$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, nên chuỗi (1) phân kỳ.

Giả sử $p < q$. Khi đó ta đánh giá các tổng riêng của chuỗi như sau :

$$S_1 < p,\ S_2 < p - \frac{q}{p+q},\ S_3 < p - \frac{q-p}{p+q},$$

$$S_4 < p - \frac{q-p}{p+q} - \frac{q}{2(p+q)},\ S_5 < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

. . . .

$$S_{2n} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{q}{n(p+q)},$$

$$S_{2n+1} < p - \frac{q-p}{p-q}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

ta thấy rằng $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1} = -\infty$, tức là chuỗi (1) phân kỳ.

Cuối cùng giả sử $p = q$. Khi đó chuỗi (1) là chuỗi dạng Lepnit, do đó nó hội tụ.

§ 3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ CHUỖI

1. Cộng các chuỗi. Nếu các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

hội tụ, thì ta có đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

trong đó λ, μ là các số tùy ý.

2. Qui tắc Cosi. Theo qui tắc, tích của hai chuỗi (1) là một chuỗi thứ ba mà số hạng tổng quát của nó có dạng

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Nói chung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Tuy nhiên nếu một trong hai chuỗi hội tụ còn chuỗi kia hội tụ tuyệt đối thì luôn luôn

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Công thức này được thỏa mãn cả trong trường hợp ba chuỗi đều hội tụ.

Tìm tổng các chuỗi:

109. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Giải. Vì

$$\cos \frac{2n\pi}{3} = 1 - 2\left(\sin \frac{n\pi}{3}\right)^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{nếu } n \neq 3k \ (k = 1, 2...); \\ 1 & \text{nếu } n = 3k \end{cases}$$

và các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ, nên dựa trên mệnh đề 1 ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{2^6} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}\right) + \frac{1}{2^9} - \ldots = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{2}{7}$$

110. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $(|xy| < 1)$.

Giải. Do sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$, dựa trên mệnh đề 1 ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 1 + y + xy + xy^2 + x^2y^2 + x^2y^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n + y\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = (1 + y)\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1 + y}{1 - xy}.$$

111. Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

Giải. Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ, bởi vậy theo mục 2 ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n,$$

trong đó $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(n-k)!}$

$$\left(a_k = \frac{1}{(k-1)!},\ b_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right).$$

Bởi vì $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$ $(n = 1,2,...)$ nên

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} = 0 \ (n = 1, 2,...)$$

đó là điều cần chứng minh.

112. Chứng minh rằng bình phương của chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ là chuỗi phân kỳ.

Giải. Trước hết ta chú ý rằng theo dấu hiệu Lepnit chuỗi đã cho hội tụ (có điều kiện). Theo quy tắc ở mục 2 ta có

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}\right] = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}.$$

Bởi vì $\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2,..;\ k = 1, 2,.., n)$ nên

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{n}{n} = 1.$$

Do đó, theo điều kiện cần, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ phân kỳ, đó là điều cần chứng minh.

113. Kiểm tra lại rằng tích của hai chuỗi phân kỳ $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ và $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Giải. Dễ dàng thấy rằng (có thể theo dấu hiệu Côsi) các chuỗi đó phân kỳ. Theo quy tắc nhân các chuỗi ta có:

$$c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1}$$

trong đó $a_1 = 1$, $a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $b_1 = 1$, $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right)$ $(n = 2, 3, \ldots)$

Do đó

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2^k} -$$

$$- \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}} \sum_{k=2}^{n-1} 2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Khi đó $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4$, đó là điều cần chứng minh.

§4. DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM CÁC TÍNH CHẤT CỦA DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM HỘI TỤ ĐỀU

1. Khái niệm dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ đều.

Định nghĩa 1. Dãy hàm $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ được gọi là hội tụ về hàm $f(x)$ trên khoảng X, nếu với mỗi giá trị cố định $x_0 \in X$, dãy số $f_n(x_0)$ hội tụ về số $f(x_0)$, tức là $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon, x_0)$ sao cho $\forall n > N(\varepsilon, x_0)$ có bất đẳng thức

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 2. Dãy hàm $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) được gọi là hội tụ đều về hàm $f(x)$ trên khoảng X, nếu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ (phụ thuộc vào ε và không phụ thuộc vào x) sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

đồng thời đối với mọi $x \in X$. Trong trường hợp này ta viết

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \ \forall x \in X.$$

Định nghĩa 3. Chuỗi hàm

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots, \tag{1}$$

được gọi là hội tụ tới hàm $S(x)$ trên khoảng X, nếu dãy tổng riêng của nó

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) hội tụ, đồng thời

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x).$$

Định nghĩa 4. Chuỗi hàm (1) được gọi là hội tụ đều tới tổng $S(x)$ của nó trên khoảng X, nếu dãy tổng riêng $S_n(x)$ của chuỗi hội tụ đều tới hàm $S(x)$ trên X.

2. Dấu hiệu trội Vâyecstrat. Nếu đối với chuỗi hàm (1) tồn tại chuỗi số trội $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ trên X ($|u_k(x)| \leqslant a_k$, $\forall x \in X$, $k = 1, 2, \ldots$) thì chuỗi (1) hội tụ đều trên X.

3. Tiêu chuẩn Côsi. Để chuỗi (1) hội tụ đều trên khoảng X điều kiện cần và đủ là $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$, $\forall p > 0$ bất đẳng thức

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

được thỏa mãn đối với mọi $x \in X$.

4. Dấu hiệu Đirichlê. Nếu các tổng riêng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

giới nội đều trên khoảng X, tức là tồn tại một hằng số C ($0 < C < +\infty$) sao cho

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| < C \text{ với } n = 1, 2, \ldots, \text{ và với mọi } x \in X$$

còn dãy hàm $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ đơn điệu không tăng, dần đều tới không trên X thì chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\, v_k(x) \tag{2}$$

hội tụ đều trên X.

5. Dấu hiệu Aben. Chuỗi (2) hội tụ đều trên khoảng X nếu chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ hội tụ đều trên X, còn các hàm $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ đều giới nội và với mỗi x lập thành một dãy đơn điệu.

6. Tính chất hàm của giới hạn dãy hàm và tổng của chuỗi hàm. Nếu như dãy các hàm liên tục $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ đều trên $[a, b]$ về hàm $f(x)$ thì hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

Nếu tất cả các số hạng của chuỗi $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và chuỗi hội tụ đều trên $[a, b]$ thì tổng $S(x)$ của nó cũng liên tục trên $[a, b]$.

7. Chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân và tích phân từng từ của chuỗi. Nếu dãy các hàm liên tục $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ đều trên $[a, b]$ về hàm $f(x)$ tức là $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a, b]$ thì

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

với x_0 bất kỳ thuộc $[a, b]$, $n \to \infty$.

Nếu chuỗi (1), mà các số hạng của nó liên tục trên đoạn $[a, b]$, hội tụ đều trên đoạn này thì ta có đẳng thức

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt \tag{3}$$

tức là có thể tích phân từng từ chuỗi (1) trên $[x_0, x]$ với x_0 và x tùy ý trên $[a, b]$ đồng thời chuỗi (3) hội tụ đều trên $[a, b]$.

8. Chuyển qua giới hạn dưới dấu đạo hàm và đạo hàm từng từ của chuỗi Nếu dãy các hàm khả vi liên tục $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ tới hàm $f(x)$ trên $[a, b]$, còn dãy $f'_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ đều về hàm $\varphi(x)$ trên $[a, b]$ thì hàm $f(x)$ cũng khả vi trên $[a, b]$ và $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$, tức là có thể qua giới hạn dưới dấu đạo hàm.

Nếu chuỗi (1), với các số hạng khả vi liên tục, hội tụ trên $[a, b]$ và chuỗi đạo hàm

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

hội tụ đều trên $[a, b]$ thì tổng $S(x)$ của chuỗi khả vi trên $[a, b]$ đồng thời trên đoạn này thỏa mãn đẳng thức

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x),$$

tức là có thể đạo hàm từng từ chuỗi (1).

9. Qua giới hạn từng từ trong chuỗi hàm và dãy hàm. Nếu chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong lân cận điểm x_0 và nếu $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = c_k$ $(k = 1, 2,...)$ thì chuỗi số $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ hội tụ, đồng thời

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k,$$

tức là trong chuỗi hội tụ đều ta có thể qua giới hạn từng từ của nó.

Nếu dãy hàm $f_n(x)$ $(n = 1, 2,...)$ hội tụ đều trong lân cận điểm x_0 và với mỗi n tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$$

thì dãy số $A_n (n = 1, 2,...)$ cũng hội tụ và

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)).$$

Xác định khoảng hội tụ (tuyệt đối và có điều kiện) của các chuỗi hàm sau:

114. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1 + n^q} \quad (q > 0\ ;\ 0 < x < \pi).$$

Giải. Để chuỗi hội tụ điều kiện cần là $\dfrac{n^p}{1 + n^q} = \dfrac{1}{n^{q-p}} \cdot \dfrac{1}{1 + n^{-q}} \to 0$ khi $n \to \infty$, tức là $q - p > 0$.

Hội tụ tuyệt đối. Bởi vì $|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx = \dfrac{1 - \cos 2nx}{2}$ nên chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1 + n^q} |\sin nx| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1 + n^q} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1 + n^q} n^p$$

phân kỳ khi $0 < q - p \leqslant 1$. Thật vậy, chuỗi thứ nhất ở vế phải phân kỳ tới $+\infty$ theo dấu hiệu so sánh, bởi vì $\dfrac{n^p}{1 + n^q} \sim \dfrac{1}{n^{q-p}}$ khi $n \to \infty$, còn chuỗi thứ hai ở vế phải khi $0 < q - p \leqslant 1$, theo dấu hiệu Đirichlê, hội tụ vì

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx \right| = \left| \frac{\sin nx \, . \cos(n+1)x}{\sin x} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}$$

và $\dfrac{n^p}{1 + n^q}$ giảm dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Mặt khác vì $|\sin nx| \leqslant 1$ nên chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1 + n^q} |\sin nx| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1 + n^q},$$

theo dấu hiệu so sánh, hội tụ nếu $q - p > 1$ $\left(\dfrac{n^p}{1 + n^q} \sim \dfrac{1}{n^{q-p}} \text{ khi } n \to \infty \right)$

Như vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối chỉ với $q - p > 1$.

Hội tụ có điều kiện. Biểu diễn chuỗi đã cho dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1 + n^{-q}}$$

và dùng dấu hiệu Aben ta thấy rằng với $q - p > 0$ chuỗi hội tụ. Thật vậy, trong trường hợp này dãy $\dfrac{1}{1 + n^{-q}}$ tăng dần tới 1 khi $n \to \infty$ và chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$ hội tụ theo dấu hiệu Đirichlê. Do đó khi $0 < q - p \leqslant 1$ chuỗi đã cho hội tụ có điều kiện

115. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1 + a^{2n} x^2}.$$

Giải. Bởi vì (xem bài 37, chương I, tập I) $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{e}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ nên để chuỗi hội tụ, điều kiện cần là $x \neq 0$ và $|a| \neq 1$ (khi $x = 0$ hoặc khi $|a| = 1$, do chuỗi điều hòa phân kỳ và theo dấu hiệu so sánh, chuỗi đã cho phân kỳ).

Khi $x \neq 0$ và $|a| \neq 1$ ta áp dụng dấu hiệu Côsi. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1 + a^{2n}x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1 + a^{2n}x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{nếu } |a| > 1; \\ 1 & \text{nếu } |a| < 1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra rằng khi $|a| > 1$ chuỗi hội tụ tuyệt đối, còn khi $|a| < 1$ không thể nói gì về sự hội tụ của chuỗi được.

Tiếp theo, vì khi $|a| < 1$, $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1 + a^{2n}x^2} \geqslant \frac{1}{n(1 + x^2)}$

nên nhờ dấu hiệu so sánh chuỗi đã cho phân kỳ nếu $|a| < 1$. Như vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|a| > 1$ và $x \neq 0$.

116. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n} \quad (y \geqslant 0).$$

Giải. Giả sử $0 \leqslant y \leqslant 1$. Khi đó chuỗi hội tụ khi $|x| < 1$ theo dấu hiệu Côsi. Thật vậy,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n + y^n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n + y^n}} = |x| < 1.$$

Nếu $0 \leqslant y \leqslant 1$ và $x \geqslant 1$ thì

$$\frac{x^n}{n + y^n} \geqslant \frac{x^n}{n + 1} \geqslant \frac{1}{n + 1}.$$

Do đó theo dấu hiệu so sánh chuỗi đã cho phân kỳ, vì chuỗi điều hòa phân kỳ.

Nếu $0 \leqslant y \leqslant 1$ và $x < -1$ thì số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không, vì $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n + y^n} = +\infty$.

Nếu $0 \leqslant y \leqslant 1$ và $x = -1$ thì ta nhận được chuỗi dạng Lepnit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + y^n}.$$

Giả sử $y > 1$. Khi đó chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + ny^{-n}}$$

theo dấu hiệu Côsi, hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < y$.

Khi $x = \pm y$, số hạng tổng quát của chuỗi đã cho không tiến tới không, vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{n + y^n} = 1.$$

Như vậy, nếu $0 \leqslant y \leqslant 1$ và $|x| < 1$ hoặc $|x| < y$ và $y > 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối. Nếu như $x = -1$ và $0 \leqslant y \leqslant 1$ thì chuỗi đã cho chỉ hội tụ có điều kiện.

117. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + x^n)}{n^y} \quad (x \geqslant 0).$$

Giải. Ta xét ba trường hợp: a) $0 \leqslant x < 1$, b) $x = 1$; c) $x > 1$. Trong trường hợp a) ta có: $\ln(1 + x^n) \sim x^n$ khi $n \to \infty$. Bởi vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$, theo dấu hiệu Côsi, hội tụ với y tùy ý, nên theo dấu hiệu so sánh, cũng với điều kiện đó chuỗi đã cho hội tụ.

Trong trường hợp b) ta nhận được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$ hội tụ theo dấu hiệu so sánh với $y > 1$.

Cuối cùng, trong trường hợp c) ta có

$$\ln(1 + x^n) = n\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \sim n\ln x + \frac{1}{x^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Vì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y x^n}$ hội tụ khi $y > 2$ nên chuỗi đã cho, theo dấu hiệu so sánh, cũng hội tụ với $y > 2$.

118. Chứng minh rằng nếu chuỗi Đirichlê $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ hội tụ khi $x = x_0$ thì nó cũng hội tụ khi $x > x_0$.

Chứng minh. Với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

ta sử dụng dấu hiệu Aben. Ở đây chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ hội tụ theo giả thiết; $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ là dãy đơn điệu và giới nội khi $x > x_0$. Do đó theo dấu hiệu Aben, chuỗi đã cho hội tụ khi $x > x_0$.

119. Chứng minh rằng để cho dãy hàm $f_n(x)$ $(n = 1, 2,...)$ hội tụ đều trên tập hợp X tới hàm giới hạn $f(x)$, điều kiện cần và đủ là

$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in X} r_n(x)) = 0$$

trong đó $r_n(x) = | f(x) - f_n(x) |$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử $f_n(x)$ hội tụ đều trên tập hợp X tới hàm $f(x)$. Theo định nghĩa điều này có nghĩa là $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$ thỏa mãn bất đẳng thức $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon \ \forall x \in X$. Từ đó suy ra rằng $\sup r_n(x) \leqslant \varepsilon$.

Điều kiện đủ. Giả sử $\lim (\sup r_n(x)) = 0$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ sao cho $\sup_{x\in X} r_n(x) \leqslant \varepsilon$. Nhưng vì $r_n(x) \leqslant \sup_{x\in X} r_n(x)$ nên $r_n(x) < \varepsilon \ \forall x \in X$. Điều đó theo định nghĩa, có nghĩa là $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, đó là điều cần chứng minh.

Xét sự hội tụ đều của các dãy, trên các khoảng đã được chỉ ra:

120. $f_n(x) = x^n$; **a)** $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; **b)** $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. a) Ta có: $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Bởi vì $\sup_{0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}} x^n = \frac{1}{2^n}$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ nên theo bài 119 dãy đã cho hội tụ đều.

b) Ta tìm hàm giới hạn $f(x)$. Ta có

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ nếu } x = 1 \end{cases}$$

Do đó

$$| f_n(x) - f(x) | = \begin{cases} x^n \text{ nếu } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 \text{ nếu } x = 1. \end{cases}$$

Bởi vì $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} | f(x) - f_n(x) | = 1$ nên theo bài toán nói trên (bài 119), dãy đã cho hội tụ không đều.

121. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Hiển nhiên $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ khi $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Bởi vì

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(n+1)}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \text{ và}$$

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

nên, theo tiêu chuẩn đã được chứng minh trong bài 119, $f_n(x) \rightrightarrows 0$.

122. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Ở đây $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Hàm $f_n(x)$ đạt cực đại tuyệt đối tại điểm trong của đoạn: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0,1)$. Như vậy ta có

$$\sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = f_n(x_n) = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} r_n(x)\right) = \frac{1}{4} \neq 0$$

Từ đó suy ra rằng dãy $f_n(x) \to 0$ không đều.

123. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Dễ thấy rằng $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n+x} = x$ và ước lượng $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{nx}{1+n+x} - x\right| \leqslant \dfrac{2}{n+1}$ luôn luôn đúng. Vì thế $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$ tức là $f_n(x) \rightrightarrows x$.

124. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $-\infty < x < +\infty$.

Giải. Khi $n \to \infty$, $f_n(x) \to |x|$ trên khoảng $(-\infty, +\infty)$ đồng thời

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - x\right| = \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)} = \frac{1}{n}.$$

Vì thế $f_n(x) \rightrightarrows |x|$ trên toàn bộ trục số.

125. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; $0 < x < +\infty$.

Giải. Hiển nhiên

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < +\infty).$$

Bởi vì

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\right| = \sup_{0<x<+\infty} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = +\infty$$

nên, theo mệnh đề ở bài 119, dãy hàm hội tụ không đều.

126. a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$; $-\infty < x < +\infty$;

b) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$; $-\infty < \infty < +\infty$.

Giải. Ta có : a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{n} = 0$;

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0$.

Bởi vì a) $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n\to\infty$;

b) $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|\sin\dfrac{x}{n}\right| = 1$ (đạt được với $x_n = \dfrac{\pi n}{2}(2k+1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)),

nên theo bài 119 ta kết luận rằng trong trường hợp a) $f_n(x) \rightrightarrows 0$ còn trong trường hợp b) dãy hàm hội tụ không đều.

127. a) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $0 < x < +\infty$;

b) $f_n(x) = x\operatorname{arctg} nx$, $0 < x < +\infty$.

Giải. a) Ta có : $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \dfrac{\pi}{2}$. Bởi vì

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \lim_{x\to+0}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \frac{\pi}{2},$$

nên theo bài 119 dãy hàm hội tụ không đều.

b) Ở đây $f(x) = \dfrac{\pi x}{2}$. Ta tìm sup $r_n(x)$. Đạo hàm hàm $r_n(x)$ ta có

$$r_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx - \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Phương trình $r_n'(x) = 0$ với mỗi n có một nghiệm x_n. Tiếp theo,

$$\lim_{x\to 0} r_n(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} r_n(x) = \lim_{t\to+0} \frac{t}{n\operatorname{tg} t} = \frac{1}{n} \quad \left(t = \frac{1}{x}\right).$$

$$r_n(x_n) = \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx_n\right| x_n = \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^2} < \frac{1}{n}.$$

Như vậy $\sup\limits_{0<x<+\infty} r_n(x) = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} r_n(x)) = 0$ tức là $f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi x}{2}$.

128. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; a) trên khoảng hữu hạn (a, b);

b) trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Giải. Cả hai trường hợp ta đều dễ thấy rằng hàm giới hạn là $f(x) = e^x$. Tiếp theo, trong trường hợp a) ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} r_n(a) = \lim_{n\to\infty} \left|e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(b) = \lim_{n\to\infty} \left|e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n\right| = 0.$$

Từ các hệ thức này ta suy ra phương trình

$$\left(e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)'_x = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = 0 \tag{1}$$

luôn luôn có nghiệm x_n $(a < x_n < b)$. Từ (1) ta nhận được $e^{x_n} = \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$.

Áp dụng biểu thức này đối với $r_n(x)$ ta thấy $r_n(x_n) = \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} \frac{|x_n|}{n} \leqslant$
$\leqslant \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \frac{M}{n} \to 0$ khi $n\to\infty$, trong đó $M = \max(|a|, |b|)$. Do đó trên khoảng (a, b) dãy hàm hội tụ đều.

Trong trường hợp b) ta nhận được

$$\lim_{x\to+\infty} \left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = +\infty$$

vì vậy $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} r_n(x) = +\infty$. Như vậy dãy $f_n(x)$ trên toàn bộ trục số hội tụ không đều.

129. $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$; $1 \leqslant x \leqslant a$.

Giải. Dễ dàng tìm được $f_n(x) \to \ln x$ trên $[1,a]$ khi $n\to\infty$. Đạo hàm hàm $r_n(x) = |\ln x - n(x^{1/n} - 1)|$ ta nhận được $r_n'(x) \geqslant 0$ khi $x \geqslant 1$, do vậy $r_n(x)$

không giảm trên đoạn $[1, a]$. Do đó $\sup\limits_{x\in[1,a]} r_n(x) = |\ \ln a - n(a^{1/n} - 1)\ |$; $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{x\in[1,a]} r_n(x)) = 0$; vậy $f_n(x) \rightrightarrows \ln x$ trên $[1, a]$.

130.
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ nếu } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}; \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right) \text{ nếu } \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{2}{n}; \\ 0 \text{ nếu } x \geqslant \dfrac{2}{n} \end{cases}$$
trên đoạn $[0, 1]$.

Giải. Bởi vì $f_n(0) = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Tiếp theo $\forall x \in (0,1]\ \exists N$: $\forall n > N$, $x > \dfrac{2}{n}$. Do đó $f_n(x) = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ khi $x \in (0, 1]$. Như vậy $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ khi $x \in [0, 1]$.

Bởi vì $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = n\left(\text{đạt được khi } x = \dfrac{1}{n}\right)$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)) = +\infty$, do vậy dãy hội tụ không đều.

131. Giả sử $f(x)$ là hàm tùy ý, xác định trên đoạn $[a, b]$ và $f_n(x) = \dfrac{[nf(x)]}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Chứng minh rằng $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Từ định nghĩa phần nguyên ta suy ra rằng $[nf(x)] = nf(x) - p_n(x)$ $(0 \leqslant p_n(x) < 1)$. Vì thế $f_n(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng $f_n(x) = f(x) - \dfrac{p_n(x)}{n}$. Từ đó ta thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, và $|\ f_n(x) - f(x)\ | = \dfrac{p_n(x)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$ tức là $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

132. Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục $f'(x)$ trên (a, b) và $f_n(x) = n\left(f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Chứng minh rằng $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ trên đoạn $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ trong đó $a < \alpha < \beta < b$.

Chứng minh. Từ điều kiện tồn tại đạo hàm suy ra rằng $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f'(x$. Áp dụng công thức Lagơrăng đối với hàm $r_n(x) = \left|f'(x) - n\left(f(x) + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)\right|$, ta nhận được
$$r_n(x) = \left|f'(x) - f'\left(x + \frac{\theta_n(x)}{n}\right)\right| \quad (0 < \theta_n(x) < 1).$$

Vì hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ nên theo định lý Canto, nó liên tục đều. Điều đó có nghĩa là $\forall \varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với $\frac{\theta_n(x)}{n} < \delta$ thì $r_n(x) < \varepsilon$ đối với mọi x. Nhưng bất đẳng thức $\frac{\theta(x)}{n} < \delta$ được thỏa mãn với n đủ lớn và $\forall x$, vì vậy, chuyển qua ngôn ngữ « $\varepsilon - N$ » ta phát biểu như sau: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$ thỏa mãn bất đẳng thức $r_n(x) < \varepsilon$ đối với mọi $x \in [\alpha, \beta]$, tức là $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$, đó là điều cần chứng minh.

133. Giả sử $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$ trong đó $f(x)$ là hàm liên tục. Chứng minh rằng dãy $f_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn hữu hạn bất kỳ $[a, b]$.

Chứng minh. Hiển nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int\limits_0^1 f(x+t)\,dt \equiv \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x) \in C[a, b]$. Biểu diễn hàm $\varphi(x)$ dưới dạng

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f(x+t)\,dt$$

và áp dụng định lý về giá trị trung bình đối với tích phân ta nhận được

$$r_n(x) = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f(x) + t(dt - \frac{f\left(x+\frac{i}{n}\right)}{n}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x+\tau_i) - f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right)\Bigg| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x+\tau_i) - f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|$$

trong đó $\tau_i \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Từ tính liên tục đều của hàm $f(x)$ trên đoạn hữu hạn bất kỳ $[a, b]$ ta suy ra rằng $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta$ thì $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Lấy n lớn đến mức sao cho $\left|\tau_i - \frac{i}{n}\right| < \delta$, ta nhận được $r_n(x) < \varepsilon$, từ đó suy ra rằng $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Nghiên cứu đặc tính hội tụ của các chuỗi sau :

134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ trên đoạn $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Ước lượng phần dư của chuỗi như sau :

$$| S(x) - S_n(x) | = \left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

trong đó $S(x)$, $S_n(x)$ tương ứng là tổng và dãy tổng riêng của chuỗi đã cho (chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu so sánh

$$\left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < + \infty \right)$$

ta kết luận rằng chuỗi đang xét hội tụ đều.

135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ trên khoảng $(0, +\infty)$.

Giải. Vì tổng của chuỗi này $S(x) = e^x$ nên phần dư của nó $r_n(x) = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Nhưng $\sup\limits_{0<x<+\infty} | r_n(x) | = +\infty$ (hàm $e^x \to +\infty$ khi $x \to +\infty$ nhanh hơn hàm lũy thừa x^n bất kỳ), vì vậy chuỗi đã cho hội tụ không đều.

136. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1 - x) x^n$ trên đoạn $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Tổng riêng của chuỗi $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (1 - x) x^k = 1 - x^{n+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;$ từ đó ta thấy tổng của chuỗi

$$S(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 \leqslant x < 1; \\ 0 \text{ nếu } x = 1. \end{cases}$$

Do đó $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} | S_n(x) - S(x) | = 1$, tức là chuỗi đã cho hội tụ không đều.

Chú thích. Nếu chuỗi hàm gồm các hàm liên tục trên một đoạn hội tụ tới hàm gián đoạn thì chuỗi đó hội tụ không đều.

137. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

Giải. Ta tìm tổng riêng của chuỗi

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) =$$

$1 - \frac{1}{nx+1}$, từ đó ta nhận được $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$ $(0 < x < +\infty)$.

Tiếp theo vì

$$\sup_{0<x<+\infty} \frac{1}{nx+1} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{nx+1} = 1$$ nên chuỗi hội tụ không đều

138. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$;

a) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$;

b) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

Giải. Biểu diễn số hạng tổng quát $a_n(x)$ của chuỗi dưới dạng

$$a_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\dots(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\dots(1+(n-1)x)(1+nx)},$$

ta tìm được dãy tổng riêng của chuỗi

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}.$$

Từ đó suy ra rằng

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x > 0; \\ 0 \text{ nếu } x = 0. \end{cases}$$

Sai nữa trong trường hợp a) ta có: $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant\varepsilon} |S(x) - S_n(x)| = |S(+0) - S_n(+0)| = 1$, vì vậy chuỗi hội tụ không đều. Trong trường hợp b) ta thấy: $\sup\limits_{\varepsilon\leqslant x<+\infty} |S(x) - S_n(x) = \frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\dots(1+n\varepsilon)} \to 0$ khi $n \to \infty$ do vậy chuỗi hội tụ đều.

Dùng dấu hiệu Vâyecstrat chứng minh sự hội tụ đều trong các khoảng đã được chỉ ra của những chuỗi hàm sau đây:

139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$.

Giải. Ta tìm $\sup\limits_{|x|<+\infty} |a_n(x)|$ trong đó $a_n(x)$ là số hạng tổng quát của chuỗi. Ta có:

$$\sup_{|x|<+\infty} |a_n(x)| = \sup_{|x|<+\infty} \left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

và đạt được khi $x_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi trội đối với chuỗi đã cho. Vì chuỗi trội hội tụ nên chuỗi xuất phát, theo dấu hiệu Vâyecstrat, hội tụ đều.

140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$, $\dfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$.

Giải. Dễ dàng tìm được

$$\sup_{\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2} (x^n + x^{-n}) = 2^n + \frac{1}{2^n} < 2^{n+1}.$$

Bởi vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ hội tụ theo dấu hiệu Đalambe, nên chuỗi đang xét hội tụ đều.

141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$ $|x| < a$ trong đó $a > 0$.

Giải. Chuỗi trội đối với chuỗi đã cho là chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$.

Hiển nhiên nó hội tụ với $a < 1$, vì khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!} < \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

Giả sử $a \geqslant 1$. Khi đó ký hiệu S_n là dãy tổng riêng của chuỗi trội, do ước lượng

$$S_n < S_{2n+1} = \frac{a}{0!} + \frac{a^2}{1!} + \frac{a^3}{1!} + \dots + \frac{a^{2n}}{n!} + \frac{a^{2n+1}}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant a + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{2k+1}}{(k+1)!} = S,$$

ta nhận được $S_n \leqslant S$. Do đó dãy S_n là dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên. Và khi đó, theo định lý đã biết nó hội tụ, tức là chuỗi trội hội tụ.

142. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \quad |x| < a.$

Giải. Xuất phát từ các bất đẳng thức

$$0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n\ln^2 n} < \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

và sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n\ln^2 n}$ là chuỗi trội của chuỗi hàm đã cho, ta đi tới kết luận về sự hội tụ đều của chuỗi đó.

Xét sự hội tụ đều trong các khoảng đã được chỉ ra của những chuỗi hàm sau đây:

143. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; a) trên đoạn $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, trong đó $\varepsilon > 0$; b) trên đoạn $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Giải. a) Vì các tổng riêng $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ giới nội

$$\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

và dãy $\frac{1}{n}$ giảm dần tới 0 khi $n \to \infty$, nên theo dấu hiệu Đirichlê chuỗi hội tụ đều.

b) Trong trường hợp này tổng đã được chỉ ra không giới nội theo cả hai biến x và n, vì với $x = \frac{\pi}{n}$ $(n = 1,2, ...)$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \to +\infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó dấu hiệu Đirichlê không áp dụng được.

Ta sử dụng tiêu chuẩn Côsi. Lấy $\varepsilon = 0,1$ và đánh giá hiệu

$$\left| S_{2n}(x) - S_n(x) \right|_{x=\frac{1}{n}} =$$

$$= \left| \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + ... + \frac{\sin 2nx}{2n} \right|_{x=\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+2} + ... + \frac{\sin 2}{2n} \geqslant \frac{\sin 1}{2} > \varepsilon$$

với n bất kỳ. Do đó theo tiêu chuẩn Côsi dãy hội tụ không đều, tức là chuỗi đã cho hội tụ không đều (chuỗi hội tụ với mỗi x cố định $(0 < x < 2\pi)$, điều đó được suy từ dấu hiệu Đirichlê, còn với $x = 0$ và $x = 2$ hiển nhiên là chuỗi hội tụ).

144. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

Giải. Với mỗi $x > 0$ cố định ta có $2^n \sin \frac{1}{3^n x} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{x}$ khi $n \to \infty$, từ đó suy ra rằng, theo dấu hiệu so sánh chuỗi đã cho hội tụ. Để xét sự hội tụ đều của chuỗi ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi.

Giả sử $\varepsilon = 1$, $p = n$, $x = \frac{1}{3^n}$. Khi đó

$$| S_{n+p}(x) - S_n(x) | = | 2^{n+1} \sin \frac{1}{3} + 2^{n+2} \sin \frac{1}{3^2} + ... +$$

$$+ 2^{2n} \sin \frac{1}{3^n} \Big| > 2^{n+1} \sin \frac{1}{3} > \varepsilon \text{ khi } n > 1,$$

tức là chuỗi hội tụ không đều.

145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \, . \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

Giải. Vì theo ước lượng

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\right| \leqslant 2$$

các tổng riêng giới nội, còn dãy hàm $(n+x)^{-\frac{1}{2}}$ tiến đến 0 đều theo $x\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \right.$ $\left.\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ khi } n\to\infty\right)$ và đơn điệu theo n $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1+x}} = \right.$ $\left. = \dfrac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}\,(\sqrt{n+1+x}+\sqrt{n+x})} > 0\right)$, nên theo dấu hiệu Đirichlê chuỗi hội tụ đều.

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

Giải. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ hội tụ (xem bài 88) nên hàm $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ giới nội (bởi số 1) và với mỗi $x \geqslant 0$ cố định nó là dãy đơn điệu. Do đó theo dấu hiệu Aben chuỗi đã cho hội tụ đều.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

Giải. Bởi vì $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k\right| \leqslant 1$ nên dãy hàm $\dfrac{1}{n+x}$ tiến tới 0 đều theo x $\left(\dfrac{1}{x+n} < \dfrac{1}{n} \to 0 \text{ khi } n\to\infty\right)$ và đơn điệu theo n, nên theo dấu hiệu Đirichlê chuỗi hội tụ đều.

148. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[a, b]$ thì có nhất thiết rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ cũng hội tụ đều trên $[a, b]$ hay không?

Giải. Không nhất thiết. Thật vậy, nếu, chẳng hạn, $f_n(x) = (-1)^n \varphi_n(x)$, trong đó $\varphi_n(x)$ là dãy hàm không âm, tiến tới không đều theo x và đơn điệu theo n và chuỗi $\Sigma\varphi_n(x)$ hội tụ thì theo dấu hiệu Đirichlê, chuỗi $\Sigma f_n(x)$ hội tụ đều. Tính hội tụ tuyệt đối của nó được suy từ sự hội tụ của chuỗi $\Sigma\varphi_n(x)$. Nhưng vì từ sự hội tụ của chuỗi $\Sigma\varphi_n(x)$ không nhất thiết suy ra sự hội tụ đều, nên chuỗi $\Sigma\,|f_n(x)|$ không nhất thiết hội tụ đều.

Ta xét ví dụ: Giả sử $\varphi_n(x) = (1-x)x^n$ và $0 \leqslant x \leqslant 1$. Sự hội tụ đều của dãy này tới không được chứng minh ở bài 121. Hiển nhiên nó đơn điệu theo n. Do đó theo dấu hiệu Đirichlê, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ với $x \in [0,1]$ hội tụ đều.

Dễ dàng thấy rằng chuỗi này cũng hội tụ tuyệt đối và tổng của nó

$$S(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \neq 1; \\ 0 \text{ nếu } x = 1. \end{cases}$$

Tuy nhiên chuỗi $\Sigma\,|(-1)^n(1-x)x^n|$ hội tụ không đều (xem bài 136).

149. Chứng minh rằng chuỗi hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

trong đó

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x) \text{ nếu } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0 \quad \text{nếu } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

không thể có chuỗi số trội hội tụ với các số hạng không âm.

Chứng minh. Ta dễ dàng tìm được

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{nếu } 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k} (k = 1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \end{cases}$$

$$S(x) = \lim S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{nếu } 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k} \\ & (k = 1, 2, \dots); \\ 0 & \text{nếu } x = 0; \end{cases}$$

trong đó $S_n(x)$ và $S(x)$ tương ứng là dãy tổng riêng và tổng của chuỗi đã cho. Tiếp theo

$$S(x) - S_n(x) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{nếu } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{nếu } 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k} \ (k = n+1, n+2, \ldots) \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$

Bởi vì $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{n+1}$ $\left(\text{đạt được với } x_n = \frac{3}{2^{n+3}}\right)$ tiến tới không khi $n \to \infty$, nên chuỗi hội tụ đều.

Tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi được suy ra như sau: với mỗi $x \in [0, 1]$ cố định chuỗi chứa không quá một số hạng khác không.

Giả sử c_n là số hạng của chuỗi số trội. Theo giả thiết $c_n \geqslant \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x)|$.

Bởi vì $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ và đạt được với $x = \frac{3}{2^{n+2}}$, nên $c_n \geqslant \frac{1}{n}$. Tuy nhiên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, bởi vậy chuỗi xuất phát không thể có chuỗi số trội hội tụ với các số hạng không âm.

150. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ có các số hạng của nó là các hàm đơn điệu trên đoạn $[a, b]$, hội tụ tuyệt đối tại các điểm mút của đoạn này, thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên đoạn $[a, b]$

Chứng minh. Sử dụng tính đơn điệu của các hàm $\varphi_n(x)$ ta ước lượng phần dư $r_n(x)$ của chuỗi. Khi $x \in [a, b]$ ta có:

$$|r_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|). \tag{1}$$

Bởi vì chuỗi với các số hạng $\varphi_n(x)$ hội tụ tuyệt đối khi $x = a$ và $x = b$ nên $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N$ thì

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(b)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Bởi vì $\max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|) \leqslant |\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|$ nên dựa vào bất đẳng thức (2), bất đẳng thức (1) có dạng

$$\underset{x\in[a,\,b]}{|r_n(x)|} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|) < \varepsilon,$$

từ đó suy ra rằng $r_n(x) \rightrightarrows 0$ trên $[a, b]$, tức là chuỗi đã cho hội tụ đều.

Tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi được suy ra từ ước lượng (1).

151. Giả sử $a_n \to \infty$, sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ hội tụ. Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên tập hợp đóng giới nội bất kỳ, không chứa điểm $a_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Chứng minh. Giả sử X là tập hợp đóng giới nội không chứa điểm a_k. Khi đó, do giả thiết $a_n \to \infty$, $\forall x \in X$ và với $n \geqslant N$ đủ lớn sẽ thỏa mãn bất đẳng thức $|x - a_n| \geqslant \varepsilon$ trong đó $\varepsilon > 0$ cố định. Khi $n \geqslant N$ ta có

$$\frac{1}{|x - a_n|} = \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{x}{a_n} - 1\right|} \leqslant \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{M}{|a_n|} - 1\right|},$$

trong đó $M = \sup\limits_{x\in X} |x|$. Bởi vì với n đủ lớn thì $\frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{M}{|a_n|}\right)} \sim \frac{1}{|a_n|}$ nên chuỗi với các số hạng $b_n = \frac{1}{|a_n|\left(1 - \frac{M}{|a_n|}\right)}$ hội tụ. Theo dấu hiệu trội Vâyecstrat chuỗi với các số hạng $u_n(x) = \frac{1}{x - a_n}$ hội tụ đều. Sự hội tụ của chuỗi với các số hạng $|u_n(x)|$ được suy từ bất đẳng thức $|u_n(x)| \leqslant b_n$.

152. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi Đirichlê $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ hội tụ đều khi $x \geqslant 0$.

Chứng minh. Hàm $\frac{1}{n^x}$ bị chặn bởi 1 và với mỗi $x \geqslant 0$ nó lập thành dãy đơn điệu $\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \geqslant 0\right)$, còn chuỗi $\sum a_n$ hội tụ theo giả thiết; vì thế, theo dấu hiệu Aben chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ hội tụ đều khi $x \geqslant 0$, đó là điều cần chứng minh.

153. Chứng minh rằng hàm $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong miền $-\infty < x < +\infty$.

Giải. Hàm $\sin nx$, $\cos nx$ liên tục trong miền đã được chỉ ra. Ngoài ra các chuỗi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \; f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

theo dấu hiệu Vâyecstrat, hội tụ đều. Vì vậy, đầu tiên đạo hàm từng từ chuỗi đã cho theo mục 8 là hợp lý, sau đó theo mục 6 các hàm $f(x)$ và $f'(x)$ liên tục.

154. Chứng minh rằng hàm $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ a) xác định và liên tục tại tất cả các điểm trừ ra các điểm nguyên: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, b) tuần hoàn với chu kỳ bằng 1.

Giải. a) Hàm $f_n(x) = \frac{1}{(n-x)^2}$ liên tục với mọi $x \neq n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ta biểu diễn $f_n(x)$ dưới dạng

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^2} \quad (n \neq 0, \; |n| > \alpha)$$

ký hiệu $\alpha = \max(|a|, |b|)$, ta thấy rằng, với mọi $x \in (a, b)$ trong đó (a, b) là khoảng tùy ý không chứa điểm $x = n$, hàm $\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^2}$ giới nội bởi số $\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{|n|}\right)^2}$ và đơn điệu với mỗi $x \in (a, b)$ cố định. Chuỗi $\sum \frac{1}{n^2}$ $(n \neq 0)$ hội tụ đều, vì các số hạng của nó không phụ thuộc vào x. Vì vậy theo dấu hiệu Aben, chuỗi với các hạng $f_n(x)$ hội tụ đều trên (a, b). Vì (a, b) là khoảng tùy ý không chứa điểm $x = n$ nên chuỗi $\sum f_n(x)$ hội tụ đều tới hàm $f(x)$ trên mỗi tập hợp đóng không chứa các điểm $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Và khi đó theo mục 6 ta kết luận rằng hàm $f(x)$ liên tục trong miền tồn tại.

b) Bởi vì thay x bằng $x + 1$ tương đương với việc thay dưới dấu tổng n bằng $n + 1$, nên $f(x + 1) = f(x)$, tức là hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 1.

155. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx} - (n-1)\,xe^{-(n-1)x})$ hội tụ không đều trên đoạn $[0, 1]$, tuy nhiên tổng của nó là hàm liên tục trên đoạn này.

Giải. Ta có :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (kxe^{-kx} - x(k-1)\,e^{-(k-1)x}) = nxe^{-nx},$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0,\ x \in [0, 1].$$

Như vậy $S(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Tuy nhiên $\sup\limits_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{e}$, vì thế chuỗi hội tụ không đều tới tổng của nó.

156. Xác định miền tồn tại của hàm $f(x)$ và xét tính liên tục của nó nếu

a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$; c) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

Giải. a) Theo dấu hiệu Côsi, chuỗi hội tụ nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x + \frac{1}{n}\right| < 1$, tức là khi $|x| < 1$ (và phân kỳ khi $|x| \geqslant 1$, bởi vì trong trường hợp này số hạng tổng quát không tiến tới không). Như vậy hàm $f(x)$ được xác định với $|x| < 1$. Khi $|x| \leqslant r < 1$ chuỗi hàm hội tụ đều vì chuỗi trội của nó với các số hạng $\left(r + \frac{1}{n}\right)^n$ là hội tụ. Vì thế theo mục 6 ta có thể khẳng định rằng hàm $f(x)$ liên tục khi $|x| \leqslant r < 1$, tức là liên tục trên khoảng $(-1, 1)$.

b) Hàm $f_n(x) = \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$ liên tục khi $-\infty < x < +\infty$ còn chuỗi với các số hạng $f_n(x)$ hội tụ đều trên toàn trục số. Thật vậy, biểu diễn hàm $f_n(x)$ dưới dạng

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^2 + n^2}\left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

ta nhận xét rằng hàm $\varphi_n(x) = \dfrac{n^2}{x^2 + n^2}$ đơn điệu và bị chặn với mỗi x, còn chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$ hội tụ đều trên mỗi khoảng $(-L,\ L)$, do vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ theo dấu hiệu Aben, hội tụ đều trên $(-L,\ L)$. Vì thế tổng của chuỗi là hàm liên tục trên $(-L, L)$. Do số L tùy ý nên ta khẳng định rằng tổng của chuỗi liên tục trên toàn trục số.

c) Chuỗi hội tụ trên toàn trục số. Tính tổng của nó ta nhận được

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0\ ; \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Hiển nhiên hàm $f(x)$ liên tục khi $x \neq 0$ và gián đoạn tại điểm $x = 0$.

157. Giả sử $r_k (k = 1, 2...)$ là các số hữu tỷ của đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng hàm

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1}$$

có các tính chất sau: 1) liên tục; 2) khả vi tại các điểm vô tỷ và không khả vi tại các điểm hữu tỷ của khoảng $(0, 1)$.

Chứng minh. Hàm $a_k(x) = |x - r_k|$ liên tục với x tùy ý. Ngoài ra, chuỗi hàm đã cho hội tụ đều theo dấu hiệu trội Vâyecstrat. Vì vậy theo mục 6, hàm $f(x)$ liên tục.

Giả sử các số hữu tỷ của khoảng $(0, 1)$ được đánh số, chẳng hạn, theo thứ tự được chỉ bằng mũi tên trong bảng sau:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \longrightarrow & \frac{1}{5} & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{2}{3} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{7} & & \frac{2}{9} & & \dots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{7} & & \frac{3}{8} & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

Hiển nhiên đối với số vô tỷ tùy ý i thì từ $|i - r_k| \to 0$ suy ra $k \to \infty$

Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|i + \Delta x - r_k| - |i - r_k|}{\Delta x \cdot 3^k}$, trong đó $\Delta x \to 0$, được chia thành hai phần theo quy tắc sau: trong phần thứ nhất (I) ta sắp xếp các số hạng của chuỗi, mà các chỉ số của nó thỏa mãn bất đẳng thức

$$|i - r_k| > |\Delta x| \tag{2}$$

còn trong phần thứ hai (II) là các số hạng với chỉ số được xác định bằng bất đẳng thức

$$|i - r_k| \leqslant |\Delta x| \tag{3}$$

Như vậy ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|i + \Delta x - r_k| - |i - r_k|}{\Delta x \cdot 3^k} = \sum_{\mathrm{I}} + \sum_{\mathrm{II}},$$

từ đó, chú ý tới các bất đẳng thức (2) và (3) ta nhận được ước lượng

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|i + \Delta x - r_k| - |i - r_k|}{\Delta x \cdot 3^k} - \sum_{\mathrm{I}} \frac{\operatorname{sgn}(i - r_k)}{3^k}\right| \leqslant \sum_{\mathrm{II}} \frac{3}{3^k} \tag{4}$$

Giả sử $\Delta x \to 0$. Khi đó từ (3) suy ra $|i - r_k| \to 0$. Điều đó có nghĩa là chuỗi ở vế phải của (4) bắt đầu «mất» các số hạng, nói chung theo thứ tự tùy ý, nhưng theo nhận xét trên khi cho Δx tiến tới không, chuỗi nói trên càng mất nhiều số hạng hơn, nên $\sum_{\mathrm{II}} \frac{3}{3^k} \to 0$ do chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ hội tụ.

Do đó từ (4) ta tìm thấy

$$f'(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(i - r_k)}{3^k} \quad (0 < i < 1).$$

Giả sử $x = r_n$. Biểu diễn (1) dưới dạng

$$f(x) = \frac{|x - r_n|}{3^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|x - r_k|}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k}.$$

Hiển nhiên hàm $\frac{|x - r_n|}{3^n}$ không khả vi tại các điểm $x = r_n$, còn các hàm

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|x - r_k|}{3^k} \text{ và } \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k}$$

khả vi tại các điểm đó. Vì vậy tổng của ba hàm là không khả vi.

158. Chứng minh rằng hàm zêta Riman

$$\zeta(x) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^x}$$

liên tục trong miền $x > 1$ và có đạo hàm mọi cấp liên tục trong miền này.

Chứng minh. Giả sử $x \geqslant x_0 > 1$. Khi đó do sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}} \quad (p = 0, 1, 2 ...) \tag{1}$$

và dấu hiệu Vâyecstrat ta kết luận rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$$

hội tụ đều với $x \geqslant x_0 > 1$. Ngoài ra, vì hàm n^{-x} liên tục trong miền đã được chỉ ra, nên theo mục 6, hàm

$$\zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$$

cũng liên tục với $x \geqslant x_0 > 1$ tức là với $x > 1$.

Sự hội tụ của chuỗi (1) được suy từ dấu hiệu so sánh và từ ước lượng $\ln^p n \leqslant n^{\frac{x_0 - 1}{2}}$ $(x_0 > 1)$ đúng với n đủ lớn.

159. Chứng minh rằng hàm têta

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

xác định và khả vi vô hạn khi $x > 0$.

Chứng minh. Sự hội tụ của chuỗi được suy từ sự hội tụ của chuỗi với số hạng tổng quát là $e^{-\pi|n|x}$ và dấu hiệu so sánh ($e^{-\pi n^2 x} \leqslant e^{-\pi|n|x}$ (tức là hàm $\theta(x)$ xác định khi $x > 0$.

Tiếp theo, ta xét chuỗi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x_0} \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

trong đó $x \geqslant x_0 > 0$, là chuỗi trội đối với chuỗi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x} \tag{2}$$

Bởi vì chuỗi (1) hội tụ theo dấu hiệu Côsi, nên theo dấu hiệu Vâyecstrat chuỗi (2) hội tụ đều. Do đó theo mục 8 hàm $\theta(x)$ khả vi với số lần tùy ý ($p = 1, 2\ldots$) khi $x \geqslant x_0 > 0$. Do x_0 tùy ý, nên kết luận đó đúng với $x > 0$.

160. Xác định miền tồn tại của hàm $f(x)$ và xét tính khả vi của nó trên miền đó nếu:

a) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \qquad \text{b) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Giải. a) Dãy hàm $\dfrac{x}{n+x}$ khi $x \neq -n$ đơn điệu tiến tới không theo n. Do đó theo dấu hiệu Lepnit chuỗi hội tụ, tức là hàm $f(x)$ tồn tại với mọi $x \neq -n$.

Vì hàm $\left(\dfrac{x}{n+x}\right)'_x = \dfrac{n}{(n+x)^2}$ liên tục khi $x \neq -n$ và chuỗi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2}$$

hội tụ đều theo dấu hiệu Đirichlê, nên đạo hàm từng từ chuỗi a) là hợp lý.

b) Chuỗi hội tụ đều theo dấu hiệu Vâyecstrat với mọi x hữu hạn. Thật vậy, ở đây $\dfrac{|x|}{n^2+x^2} \leqslant \dfrac{A}{n^2}$ ($A = \text{const}$) và chuỗi $\sum \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ. Do đó hàm $f(x)$ tồn tại với mọi x ($-\infty < x < +\infty$).

Tiếp theo, tiến hành lấy đạo hàm chuỗi một cách máy móc ta nhận được

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2} \quad (x \neq 0) \tag{1}$$

Bởi vì $\varphi_n(x) = \frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x\,|\,x\,|}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \frac{n^2+A^2}{n^4} \leqslant \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$ khi $n \geqslant n_0$ và chuỗi $\sum \frac{2}{n^2}$ hội tụ, nên theo dấu hiệu Vâyecstrat chuỗi (1) hội tụ đều khi $|\,x\,| < A$. Khi đó, chú ý tới tính liên tục của hàm $\varphi_n(x)$ khi $x \neq 0$ và lưu ý đến mục 8, ta kết luận rằng việc đạo hàm từng từ của chuỗi b) là đúng.

Để nghiên cứu tính khả vi của chuỗi b) tại điểm $x = 0$, ta xét

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \left(\frac{|\,\Delta x\,|}{\Delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2} \right) \tag{2}$$

Ở đây chuỗi $\sum \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2}$ hội tụ đều theo dấu hiệu Vâyecstrat.

Vì vậy theo mục 9

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \tag{3}$$

Khi đó, từ (2), chú ý tới (3), ta có thể viết: $f'_+(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

$f'_-(0) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Như vậy hàm $f(x)$ không khả vi tại điểm $x = 0$.

161. Với những giá trị nào của tham số α: a) dãy

$$f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx} \tag{1}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ trên đoạn $[0,1]$; b) dãy (1) hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$; c) có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

Giải. a) Nếu $x > 0$ thì dùng quy tắc Lôpitan, dễ dàng thấy rằng $\lim\limits_{y \to +\infty} y^{\alpha} x e^{-xy} = 0$ với α bất kỳ. Khi $x = 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = 0$ là hiển nhiên. Vì vậy $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ với mọi $x \in [0,1]$.

b) Bởi vì

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} n^{\alpha}xe^{-nx}\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & \text{nếu } \alpha<1\\ \frac{1}{e}, & \text{nếu } \alpha=1\\ +\infty, & \text{nếu } \alpha>1\end{cases}$$

b) Bởi vì

nên dựa vào khẳng định của bài 119, dãy đã cho hội tụ đều chỉ khi $\alpha < 1$.

c) Bởi vì $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$, còn

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}-e^{-n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\right)n^{\alpha}\right)$$

bằng 0 chỉ với $\alpha < 2$, nên việc chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân chỉ được thực hiện được với $\alpha < 2$.

162. Chứng minh rằng dãy $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ không đều trên đoạn [0,1], tuy nhiên

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Giải. Hiển nhiên hàm giới hạn bằng 0 trên [0,1]. Tiếp theo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}(nx(1-x)^n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}\neq 0;$$

vì vậy $f_n(x)$ hội tụ không đều. Trong khi đó

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x(1-x)^n\,dx = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (1-u)u^n du =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0,$$

đó là điều cần chứng minh

Hãy tìm:

163 $$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\frac{x^n}{x^n+1}.$$

Giải. Theo dấu hiệu Aben, chuỗi đã cho hội tụ đều trong miền $x \geqslant 1$. Ngoài ra $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{x^n}{x^n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$, vì vậy theo mục 9 ta có thể cho qua giới hạn dưới dấu tổng

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

164. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$.

Giải. Vì chuỗi đã cho hội tụ không đều trên $[0,1]$, nên ta không có quyền chuyển qua giới hạn dưới dấu tổng. Vì vậy để tìm giới hạn này, ta sơ bộ tính tổng của chuỗi đã cho. Ta có

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)\, x^n = \lim_{x\to 1-0} \left(\lim_{n\to\infty} (1-x^n)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 \text{ nếu } x = 1 \end{cases} = 1.$$

165. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{2^n n^x}$.

Giải. Theo dấu hiệu Vâyecstrat chuỗi đã cho hội tụ đều khi $x \geqslant 0$. Vì vậy theo mục 9 ta có

$$\lim_{x\to +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

166. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

Giải. Vì $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \dfrac{x^2}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{n^2}$ và chuỗi $\sum \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ, nên theo dấu hiệu Vâyecstrat chuỗi đã cho hội tụ đều. Nhận xét thêm rằng

Nhận xét thêm rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{n^2}$, dựa vào mục 9, ta chuyển qua giới hạn dưới dấu tổng:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

167. Đạo hàm từng từ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n^2}$ có hợp lý hay không?

Giải. Hàm $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ khả vi liên tục khi $|x| < +\infty$. Ngoài ra, chuỗi đạo hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^4+x^2}$ theo dấu hiệu Vâyecstrat hội tụ đều khi $|x| < +\infty$. Do đó theo mục 8 việc đạo hàm từng từ chuỗi đã cho là hợp lý.

168. Tích phân từng từ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ trên đoạn $[0,1]$ có hợp lý không?

Giải. Chuỗi hàm đã cho hội tụ trên đoạn $[0,1]$ không đều. Thật vậy đối với tổng riêng $S_n(x)$ và tổng $S(x)$ của chuỗi ta có

$$S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}},\ S(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = 0; \\ 1 - x \text{ nếu } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ta thấy rằng tổng của chuỗi là hàm gián đoạn, vì vậy chuỗi không thể hội tụ đều. Tuy nhiên, vì

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \frac{1}{2} \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2},$$

nên việc tích phân từng từ của chuỗi là hợp lý.

169. Giả sử $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ là hàm khả vi vô hạn lần và dãy đạo hàm của nó $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ hội tụ đều trên mỗi khoảng hữu hạn (a, b) đến hàm $\varphi(x)$. Chứng minh rằng $\varphi(x) = ce^x$ trong đó c là hằng số.

Chứng minh. Do tính hội tụ đều của $f^{(n)}(x)$ tới hàm $\varphi(x)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$ với mọi $x \in (a, b)$, các bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\varphi(x) - \varepsilon < f^{(n)}(x) < \varphi(x) + \varepsilon$$
$$\varphi(x) - \varepsilon < f^{(n+1)}(x) < \varphi(x) + \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức thứ nhất với 1, bất đẳng thức thứ hai với $(x_0 - x)$, thứ ba với $\dfrac{(x_0 - x)^2}{2!}$ v.v..., sau đó cộng vế với vế các bất đẳng thức đó ta được

$$(\varphi(x) - \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_0 - x)^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n+k)}(x) \frac{(x_0 - x)^k}{k!} <$$

$$< (\varphi(x) + \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_0 - x)^k}{k!} \quad (a < x < x_0 < b).$$

Từ đó ta có

$$(\varphi(x) - \varepsilon)\, e^{x_0 - x} < f^{(n)}(x_0) < (\varphi(x) + \varepsilon)\, e^{x_0 - x}$$

hay
$$\left| f^{(n)}(x_0)\, e^{x - x_0} - \varphi(x) \right| < \varepsilon$$

Do đó
$$\varphi(x) = e^{x - x_0} \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x_0) \qquad (1)$$

Nhưng vì, theo giả thiết, $f^{(n)}(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, nên $f^{(n)}(x_0) \to \varphi(x_0)$. Vì vậy từ (1) suy ra rằng $\varphi(x) = \varphi(x_0)\, e^{x - x_0} = ce^x$, trong đó $c = \varphi(x_0)e^{-x_0} = \text{const}$. Bởi vì hàm e^x liên tục trên toàn trục số và hệ các khoảng có thể lựa chọn từng cặp phủ nhau, nên hàm $\varphi(x) = ce^x$ trên toàn trục số.

170. Giả sử các hàm $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ xác định và giới nội trên $(-\infty, +\infty)$ và $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ trên mỗi đoạn $[a, b]$. Có suy ra được rằng $\lim\limits_{n \to \infty} (\sup f_n(x)) = \sup\limits_x \varphi(x)$?

Giải. Ta xét ví dụ: $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ $(n = 1, 2, ...)$. Ở đây hàm $f_n(x)$ bị chặn (bởi 1) và $\varphi(x)_2 = 0$ trên $[a, b]$. Vì $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f_n(x) = e^{-(b-n)^2}$ và $\lim\limits_{n \to \infty} e^{-(b-n)^2} = 0$

nên dãy $f_n(x)$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Tuy nhiên vì $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} f_n(x) =$
$= e^{-(n-n)^2} = 1$ nên

$$\lim_{n\to\infty} (\sup_x f_n(x)) \neq \sup_x \varphi(x).$$

Như vậy câu trả lời là phủ định.

§5. CÁC CHUỖI LŨY THỪA

1. Khoảng hội tụ và bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

được gọi là *chuỗi lũy thừa*; a_n là *hệ số* của chuỗi lũy thừa (nó không phụ thuộc vào x), a là điểm cố định trên trục số. Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa luôn có dạng là khoảng $|x-a| < R$ trong đó R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa ($R \geqslant 0$). Bán kính hội tụ có thể được xác định theo công thức Côsin — Ađama.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{(A)}$$

hay theo công thức

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{(B)}$$

nếu các giới hạn này tồn tại. Trong trường hợp giới hạn (A) bằng 0 hoặc giới hạn (B) bằng $+\infty$ thì chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn trục số.

Để tìm hiểu về dáng điệu của chuỗi lũy thừa tại các điểm mút của khoảng hội tụ cần sử dụng các dấu hiệu hội tụ của chuỗi số (trừ các dấu hiệu Côsi, Đalambe và các dạng tương tự của chúng).

2. Các tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa. Tổng của chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ là một hàm liên tục. Hơn nữa trong khoảng hội tụ nó khả vi vô hạn.

Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ tại đầu mút $x = R + a$ của khoảng hội tụ thì chuỗi không thể hội tụ đều trong khoảng $[a, R+a)$.

Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ khi $x = R + a$ thì chuỗi sẽ hội tụ đều trên đoạn $[a, R+a]$.

Định lý Aben. *Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm $x = R + a$ thì tổng $S(x)$ của nó là hàm liên tục phía trái tại điểm đó, tức là*

$$S(R + a) = \lim_{x \to R + a - 0} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Mệnh đề tương tự cũng đúng với mút phải của khoảng hội tụ.

3. Khai triển hàm thành chuỗi Taylo. Nếu hàm $f(x)$ có thể khai triển trên khoảng $(a - R, a + R)$ thành chuỗi lũy thừa thì chuỗi này là *chuỗi Taylo* đối với hàm $f(x)$.

Để cho hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylo trên khoảng $(a - R, a + R)$, điều kiện cần và đủ là hàm $f(x)$ khả vi vô hạn và phần dư trong công thức Tay lo đối với hàm này tiến tới không khi $n \to \infty$ trên khoảng đó. Khai triển có dạng:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \tag{C}$$

Hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylo, được gọi là *hàm giải tích* và khai triển (C) của nó là duy nhất.

Trong thực hành, các trường hợp quan trọng là các trường hợp biểu diễn phần dư của khai triển (C) (hay phần dư của chuỗi (C)) dưới dạng Lagơrăng.

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \frac{f^{(n+1)}(a + (x - a))}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$$

và dưới dạng Côsi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x - a))}{n!} (1 - \theta_1)^n (x - a)^{n+1},$$

trong đó $\quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta_1 < 1.$

4. Trong công thức (C) đặt $a = 0$ ta nhận được năm khai triển cơ bản

I. $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (|x| < \infty).$

II. $\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \; (|x| < \infty).$

$$\text{III.} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \; (\,|\,x\,| < \infty).$$

$$\text{IV.} \; (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n (-1 < x < 1).$$

$$\text{V.} \; \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \; (-1 < x \leqslant 1).$$

5. Các phép toán về chuỗi lũy thừa. Các chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{và} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

luôn luôn có khoảng hội tụ chung và bên trong của khoảng này thỏa mãn các phép toán cộng và nhân sau đây:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)(x-a)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

trong đó $c_n = a_o b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_o$; λ, μ là các số.

Ngoài ra, bên trong của khoảng hội tụ, chuỗi lũy thừa có thể đạo hàm và tích phân từng tư: khi đó các chuỗi nhận được có khoảng hội tụ trùng với khoảng hội tụ của chuỗi xuất phát. Các công thức tương ứng có dạng:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x-a)^n$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C,$$

Xác định bán kính và khoảng hội tụ và nghiên cứu dáng điệu tại các điểm biên của khoảng hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau đây:

171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x + 1)^n).$

Giải. Theo công thức Côsi — Ađama ta có

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n + (-2)^n}{n}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k + 4^k}{2k}} = 3;$$

vì vậy với $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Ta hãy nghiên cứu dáng điệu của chuỗi lũy thừa tại các điểm mút của khoảng hội tụ.

Giả sử $x = -\frac{4}{3}$. Dễ thấy rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

hội tụ vì là tổng của hai chuỗi hội tụ.

Giả sử $x = -\frac{2}{3}$. Khi đó chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n3^n},$$

phân kỳ theo dấu hiệu so sánh

$$\left(\frac{3^n + (-2)^n}{n3^n} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} > \frac{1}{4n}\right)$$

Do đó tại điểm $x = -\frac{4}{3}$ chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ có điều kiện, còn tại điểm $x = -\frac{2}{3}$ chuỗi lũy thừa phân kỳ.

172. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

Giải. Theo công thức (B) ta có

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n!)((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4.$$

Vì vậy với $|x| < 4$ chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Khi $x = 4$ ta nhận được chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ trong đó $a_n = \dfrac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Vì

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n(n+1)}$, nên $a_n < a_{n+1}$. Điều đó có nghĩa là dãy a_n đơn điệu tăng. Do đó số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không, tức là chuỗi phân kỳ. Cũng theo nguyên nhân này chuỗi phân kỳ tại điểm $x = -4$.

173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

Giải. Theo công thức Cósi — Adama ta tìm được bán kính hội tụ của chuỗi là:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Do đó với $|x| < \dfrac{1}{e}$ chuỗi hội tụ tuyệt đối. Khi $x = \dfrac{1}{e}$ ta được chuỗi số $\sum a_n$, trong đó $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{e^n}$. Ta chứng minh rằng, số hạng tổng quát của chuỗi số này không tiến tới không. Thật vậy, ta có:

$$a_n = e^{-n+n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n+n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \to e^{-\frac{1}{2}}, \quad n\to\infty.$$

Như vậy tại điểm $x = \dfrac{1}{e}$ chuỗi lũy thừa phân kỳ. Cũng theo nguyên nhân này chuỗi phân kỳ tại điểm $x = -\dfrac{1}{e}$.

174. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{a^{n^2}} x^n \ (a > 1).$

Giải. Ta tìm bán kính hội tụ của chuỗi theo công thức (B). Ta có:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

do đó chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ trên toàn trục số.

175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^{p}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n}.$

Giải. Theo công thức (B) ta tìm được:

$$R=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{(2n-1)!!\,(2n+2)!!}{(2n)!!\,(2n+1)!!}\right)^{p}=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p}=2.$$

Do đó với $-1<x<3$ chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Khi nghiên cứu đặc tính hội tụ của chuỗi tại điểm $x=-1$ và $x=3$ ta sử dụng bài 90 và dấu hiệu Gaoxơ tương ứng. Ta có:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p}=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

trong đó $a_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$. Từ đó chú ý tới dấu hiệu đã nhắc trên, ta kết luận rằng tại điểm $x=-1$ chuỗi hội tụ khi $p>0$ còn khi $p>2$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối. Do đó tại điểm $x=-1$ nó hội tụ có điều kiện với $0<p\leqslant 2$. Tại điểm $x=3$ chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $p>2$ và phân kỳ khi $p\leqslant 2$.

176. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2^{n}(n!)}{(2n+1)!}\right)^{p}x^{n}.$

Giải. Theo công thức (B) ta nhận được:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{(2n+3)!}{(2^{n+1}((n+1)!)^2}\right)^{p}=\lim\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{p}=2^{p}.$$

Vì vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $|x|<2^{p}$.

Ta xét dáng điệu của chuỗi lũy thừa tại các điểm biên của khoảng hội tụ. Muốn vậy ta lập tỷ số.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{p}=1+\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\ (\varepsilon>0),$$

trong đó $a_n=\left(\frac{2^{n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^{p}\cdot 2^{pn}$. Sử dụng dấu hiệu Gaoxơ, từ tỷ số này ta tìm được tại điểm $x=-2^{p}$ chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $p>2$ và khi $p\leqslant 2$ chuỗi phân kỳ. Dựa vào bài 90 ta khẳng định rằng tại điểm $x=2^{p}$ chuỗi hội tụ khi $p>0$, hội tụ tuyệt đối khi $p>2$ (theo dấu hiệu Gaoxơ). Do đó tại các điểm này chuỗi hội tụ có điều kiện nếu $0<p\leqslant 2$.

177. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$.

Giải. Để thuận lợi ta biểu diễn chuỗi dưới dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1-m)(n-m-2)\dots(1-m)m_x n}{n!}$$

Hiển nhiên chuỗi hội tụ tuyệt đối, nếu $m = 0, 1, 2, \dots$, còn x tùy ý; vì vậy sau đây ta sẽ coi rằng $m \neq 0, 1, 2, \dots$.

Để tìm bán kính hội tụ ta sử dụng công thức (B). Ta có

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n-m} \right| = 1,$$

trong đó $\qquad a_n = \dfrac{(n-m-1)(n-m-2)\dots(1-m)m}{n!}$

Giả sử $x = -1$. Khi đó đối với chuỗi $\sum a_n$ ta lập tỷ số

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m(m+1)}{n(n-m)} \tag{1}$$

và dùng dấu hiệu Gaoxơ, ta được tại điểm này chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối nếu $m > 0$ và phân kỳ nếu $m < 0$.

Giả sử $x = 1$. Khi đó từ (1) và dựa vào bài 90 ta kết luận rằng chuỗi lũy thừa hội tụ nếu $m > -1$. Do đó khi $-1 < m < 0$ chuỗi hội tụ có điều kiện.

178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a > 0)$.

Giải. Theo công thức Côsi — Ađama ta tìm được:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1,$$

tức là khi $|x| < 1$ chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối.

Ta đặt $x = 1$ và với chuỗi số nhận được ta sử dụng dấu hiệu Raabe. Khi đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n(e^{\gamma_n \ln a}-1)=$$

$$=\ln a \lim_{n\to\infty}(n\gamma_n)=\ln a \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\begin{cases}+\infty, & \text{nếu } a>1,\\ 0, & \text{nếu } a=1,\\ -\infty, & \text{nếu } a<1,\end{cases}$$

trong đó $\gamma_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Do đó tại điểm $x=1$ chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối nếu $a>1$ và phân kỳ nếu $0<a\leqslant 1$.

Ta đặt $x=-1$, ta thấy rằng khi $a\leqslant 1$ chuỗi phân kỳ, vì số hạng tổng quát của nó không tiến tới không. Nếu như $a>1$ thì theo sự nghiên cứu ở trên, ta kết luận rằng tại điểm $x=-1$ chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối.

179. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

Giải. Áp dụng công thức (B) ta nhận được

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=1.$$

Do đó khi $|x|<1$ chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối.

Giả sử $x=1$. Khi đó, muốn nói tới khẳng định của bài 90 đối với chuỗi $\sum(-1)^n b_n$, trong đó $b_n=\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{1}{n!}$, ta lập tỷ số.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}=$$

$$=e^{1+n\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)}+o^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=1+\frac{1}{n}+0^*\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty). \quad (1)$$

Bây giờ ta thấy rằng theo khẳng định đã chỉ ra, chuỗi hội tụ.

Giả sử $x=-1$. Khi đó, sử dụng dấu hiệu Gaoxơ, từ tỷ số (1) ta nhận được rằng chuỗi lũy thừa phân kỳ (ở đây $\mu=1$). Từ đó suy ra tại điểm $x=1$ chuỗi hội tụ có điều kiện.

180. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n.$

Giải. Vì $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n$ (xem bài 85, chương I, tập I), nên

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n+C+\varepsilon_n}=1.$$

Như vậy theo công thức Côsi-Ađama, chuỗi hội tụ với $|x| < 1$. Tại các điểm $x = 1$ và $x = -1$ chuỗi phân kỳ, vì số hạng tổng quát của chuỗi (dựa vào điều đã chỉ ra trong bài trên) không tiến tới không khi $n \to \infty$.

181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$

Giải. Sử dụng công thức Côsi-Ađama, ta nhận được

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{3 + (-1)^n)}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[2k]{2k}} = 4.$$

Từ đó suy ra rằng khi $|x| < \frac{1}{4}$ chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Bởi vì đối với dãy con S_{2n} của dãy tổng riêng của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n4^n}$ thỏa mãn bất đẳng thức $S_{2n} \geqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, nên tại điểm $x = \frac{1}{4}$ chuỗi phân kỳ.

Tương tự tại điểm $x = -\frac{1}{4}$ ta có:

$$S_{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)} + \frac{1}{2n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k-1}(2k-1)}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$, vì vậy cả tại điểm này chuỗi cũng phân kỳ.

182. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (chuỗi Prinxgây).

Giải. Theo công thức Côsi-Ađama, ta tìm được

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Như vậy chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1$.

Tại điểm $x = 1$ ta được chuỗi số hội tụ đã chứng minh trong bài 88.

Tại điểm $x = -1$ ta nhận được chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq 4,\, 9,\, 16, \ldots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \qquad (1)$$

Bởi vì chuỗi thứ nhất có dạng Lepnit nên nó hội tụ. Chuỗi thứ hai cũng hội tụ. Vì, ngoài ra, chuỗi ở vế trái của (1) phân kỳ tuyệt đối (như chuỗi điều hòa) nên ta đi tới kết luận rằng tại điểm $x = -1$ chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ có điều kiện.

183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1 - x)^n$ trong đó $\nu(n)$ là số các chữ số của n.

Giải. Theo công thức Côsi — Adama ta nhận được:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{10^{\,[\lg n]+1}}{n}} = 1,$$

(xem bài 53), tức là khi $0 < x < 2$ chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối.

Do bất đẳng thức $n = 10^{\lg n} < 10^{[\lg n]} + 1 \leqslant 10^{\lg n+1} = 10n$ ta kết luận rằng tại điểm $x = 0$ và $x = 2$ chuỗi phân kỳ, vì trong trường hợp này, số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới không.

Viết khai triển của các hàm sau đây theo các lũy thừa nguyên dương của biến x và tìm khoảng hội tụ tương ứng:

184. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

Giải. Hàm $\sin x$ là hàm giải tích trên toàn trục số. Hàm $\arcsin x$ cũng giải tích, nhưng trên khoảng $|x| < 1$ (xem bài 197). Vì vậy hàm $f(x)$ là hàm hợp các hàm này, nên nó giải tích trên khoảng $|x| < 1$. Dễ tìm được khai triển của nó thành chuỗi lũy thừa nếu ta dùng chuỗi Taylo và sử dụng các giá trị của đạo hàm của hàm $f(x)$ tại điểm $x = 0$ (xem bài 130, chương II, tập I). Ta có:

$$\sin(\mu \arcsin x) = \mu x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu(\mu^2 - 1^2) \ldots (\mu^2 - (2k-1)^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$= \mu x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1^2 - \mu^2) \ldots ((2k-1)^2 - \mu^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \qquad (1)$$

Sử dụng công thức (B) ta tìm được bán kính và khoảng hội tụ của chuỗi (1):

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)^2 - \mu^2} \right| = 1 \; ; \; |x| < 1$$

$$(\mu \neq 0,\ 2k+1;\ k \text{ nguyên}).$$

Nếu $\mu = 0$ hoặc $2k+1$ (k nguyên) thì chuỗi (1) biến thành tổng hữu hạn, có nghĩa với mọi x ($|x| < \infty$). Tuy nhiên do vế trái của khai triển (1) có nghĩa chỉ với $|x| \leqslant 1$, nên trong trường hợp này đẳng thức (1) đúng chỉ với $|x| \leqslant 1$.

185. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

Giải. Dùng khai triển hàm e^x ta nhận được

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + (-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Bán kính và khoảng hội tụ tìm được theo công thức (B):

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim(2n+1)(2n+2) = +\infty$$

tức là khai triển nhận được đúng với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$.

186. Viết ba số hạng của khai triển hàm $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$ và $f(0) = e$ theo lũy thừa nguyên dương của biến x.

Giải. Biểu diễn hàm $f(x)$ dưới dạng $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ và dùng hai trong năm khai triển cơ bản (xem mục 4) ta nhận được:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)} =$$

$$= e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} =$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) + \frac{1}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right) =$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{x^3}{16} + \ldots\right). \qquad (1)$$

Vì hàm e^x giải tích trên toàn trục số còn hàm $\varphi(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$, $\varphi(0) = 1$ có khai triển

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n}$$

trên khoảng $|x| < 1$, nên hàm $e^{\varphi(x)}$ là hàm hợp của hai hàm này được khai triển thành chuỗi trong lân cận điểm không cũng giải tích trong khoảng $|x| < 1$. Do đó khai triển (1) đúng với $|x| < 1$.

187. Xác định khoảng hội tụ của khai triển thành chuỗi lũy thừa của hàm $f(x) = \frac{fx}{x^2 - 5x + 6}$ a) theo lũy thừa của x; b) theo lũy thừa của $x - 5$, không tiến hành khai triển

Giải. Biến đổi hàm $f(x)$ đối với các trường hợp a) và b) về dạng a) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$; b) $f(t+5) \equiv \varphi(t) = \frac{t+5}{(t+3)(t+2)}$ $(t = x - 5)$ và chú ý rằng bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa được xác định bằng khoảng cách từ tâm khai triển đến điểm kỳ dị đầu tiên của hàm giải tích hay của đạo hàm nào đó của nó, ta tìm được:

a) $x = 2$ là điểm gián đoạn vô hạn của hàm $f(x)$, $x = 0$ là tâm khai triển hàm đó thanh chuỗi lũy thừa (theo giả thiết), vì vậy $R = 2$ và khoảng hội tụ được xác định bằng đẳng thức $|x| < 2$.

b) $t = -2$ là điểm gián đoạn vô hạn của hàm $\varphi(t)$, còn $t = 0$ là tâm khai triển hàm đó thành chuỗi lũy thừa (theo giả thiết hàm $\varphi(t)$ khai triển theo lũy thừa $t = x - 5$). Do đó $R = 2$; khoảng hội tụ của chuỗi là $|t| < 2$ hay là $3 < x < 7$.

188. Có thể khẳng định rằng

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \rightrightarrows \sin x$$

trên $(-\infty, +\infty)$ khi $N \to \infty$ hay không?

Giải. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$ trên $(-\infty, +\infty)$ và

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \sin x - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = +\infty,$$

nên theo bài 119 dãy $\varphi_N(x)$ hội tụ không đều trên $(-\infty, +\infty)$.

Dùng các khai triển ở mục 4, viết khai triển thành chuỗi lũy thừa đối với x của các hàm sau :

189. $\sin^3 x$.

Giải. Biến đổi $\sin^3 x$ về dạng $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ và dùng khai triển hàm $\sin x$, ta tìm được

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.\frac{(3-3^{2n-1})}{(2n-1)!}.x^{2n-1}.$$

Theo công thức (B) dễ dàng thấy được chuỗi này hội tụ tuyệt đối với mọi x.

190. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Giải. Vì $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ nên đạo hàm từng từ khai triển đối với $(1-x)^{-1}$ ta nhận được : $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(|x| < 1)$.

191. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

Giải. Phân tích phân thức đã cho thành dạng tối giản $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} =$ $= -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$ và dùng khai triển IV mục 4, cùng kết quả của bài trước, ta có thể viết :

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^{n+1})n^n$$

Theo công thức Côsi – Ađama ta thấy rằng khoảng hội tụ tuyệt đối của chuỗi lũy thừa và nhận được là $|x| < 1$.

192. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

Giải. Biểu diễn phân thức đã cho dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-(t+\overline{t})x+x^2} = \frac{1}{(x-t)(x-\overline{t})} =$$

$$= \frac{1}{t-\overline{t}}\left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-\overline{t}}\right) = \frac{1}{t-\overline{t}}\left(\frac{t}{1-xt} - \frac{t}{1-x\overline{t}}\right),$$

trong đó $t = e^{i\varphi}\left(\varphi = \dfrac{2\pi}{3}\right)$ và dùng khai triển IV mục 4 cũng như công thức Ơle $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, ta nhận được:

$$f(x) = \frac{1}{t-\overline{t}}\left(t\sum_{n=0}^{\infty}(xt)^n - \overline{t}\sum_{n=0}^{\infty}(x\overline{t})^n =\right.$$

$$= \frac{1}{t-\overline{t}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n(t^{n+1}-\overline{t}^{n+1}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin(n+1)\varphi.$$

Theo công thức Côsi—Ađama ta thấy bán kính và khoảng hội tụ của chuỗi này là:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\sin\varphi(n+1)|} = 1;\ R = 1(|x| < 1).$$

193. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Hãy tính $f^{(1000)}(0)$?

Giải. Phân tích hàm $f(x)$ thành các phân thức tối giản và dùng khai triển IV, mục 4 ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{x}{2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos n\pi + \sin(n+1)\frac{\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right)x^n,$$

từ đó

$$f^{(1000)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1000}^{\infty} \left(\cos n\pi + \sin (n+1) \frac{\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \times$$

$$\times \frac{n!\, x^{n-1000}}{(n-1000)!}.$$

Do đó $f^{(1000)}(0) = 1000!$

194. $\dfrac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

Giải. Đặt $\sin\alpha = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, $\cos\alpha = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, trong đó $z = e^{i\alpha}$ và phân tích phân thức đã cho thành các phân thức tối giản, ta nhận được:

$$\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1 - xz} - \frac{1}{1 - x\bar{z}}\right).$$

Áp dụng khai triển IV, mục 4 đối với vế phải của hệ thức trên, ta có thể viết

$$\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} x^n(z^n - \bar{z}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha.$$

Hiển nhiên là chuỗi nhận được hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1$.

195. $\ln(1 + x + x^2 + x^3)$.

Giải. Biến đổi hàm đã cho về dạng

$\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \ln(1 + x) + \ln(1 + x^2)$ $(x > -1)$ và dùng khai triển V, mục 4 ta nhận được:

$$\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$(-1\ x\ 1). \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

Cộng các chuỗi vừa nhận được trong miền hội tụ chung của chúng $(-1 < x \leqslant 1)$, cuối cùng ta có:

$$\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^{n-1} + 2\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right) x^n$$

$$(-1 < x \leqslant 1).$$

Dễ dàng thấy rằng khi $|x| < 1$ chuỗi này hội tụ tuyệt đối và tại điểm $x = 1$ chỉ hội tụ có điều kiện (theo dấu hiệu Đirichlê).

196. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Giải. Xét hàm đã cho như là hàm

$$\operatorname{Re}(e^{x\cos\alpha + ix\sin\alpha}) = \operatorname{Re}(e^{xe^{i\alpha}})$$

và sử dụng khai triển I mục 4, ta có thể viết:

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n e^{in\alpha}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cos n\alpha}{n!}.$$

Bởi vì

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x^n\cos n\alpha|}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$$

và chuỗi lũy thừa thứ hai trong bất đẳng thức này hội tụ với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$ nên khai triển vừa nhận được đúng với $|x| < \infty$.

Khai triển thành chuỗi lũy thừa các hàm sau đây:

197. $f(x) = \arcsin x$.

Giải. Nhờ công thức IV mục 4, ta có:

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}\ (|x| < 1).$$

Tích phân từng từ chuỗi này (điều này có thể được vì ở bên trong khoảng hội tụ), ta được:

$$f(x) = C + x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Vì $f(0) = 0$ nên $C = 0$. Do đó

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$$

Ta tính bán kính hội tụ của chuỗi nhận được:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} = 1.$$

Để nghiên cứu tính hội tụ của chuỗi tại các điểm mút ta sử dụng dấu hiệu Raabe. Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}=\frac{3}{2}>1\ ;$$

vì vậy khi $x = \pm 1$ chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Như vậy khai triển vừa nhận được, theo dấu hiệu Aben đúng với $|x| \leqslant 1$, tức là trong toàn bộ miền tồn tại của hàm arcsin$x$.

198. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Giải. Khai triển đạo hàm của hàm đã cho $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ khi $|x| < 1$ thành chuỗi lũy thừa

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

sau đó tích phân ta nhận được

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n2-1)\,x^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)} + C.$$

Bởi vì $f(0) = 0$ nên $C = 0$.

Như trong thí dụ trước ta nhận thấy rằng, khai triển vừa nhận được hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leqslant 1$ và tại các điểm mút tổng của chuỗi bằng giá trị của hàm $f(x)$ tại các điểm này, theo định lý Aben. Như vậy khai triển vừa viết đúng với $|x| \leqslant 1$.

199. $$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}.$$

Giải. Biểu diễn hàm $f(x)$ dưới dạng

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}2x - \pi\,\varepsilon(x),$$

trong đó

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x > -\dfrac{1}{4}, \\ 1 \text{ nếu } x < -\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

(xem bài 370, chương I, tập I) và khai triển hàm arctg$2x$ thành chuỗi nhờ phép tích phân từng từ chuỗi đạo hàm của nó, ta nhận được :

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg}2 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n-1} - \pi\,\varepsilon(x).$$

Vì chuỗi nhận được hội tụ khi $|x| \leqslant 1/2$ (sự hội tụ tuyệt đối của nó khi $|x| < 1/2$ được khẳng định nhờ dấu hiệu Đalambe và tại các điểm mút nhờ dấu hiệu Lepnit) nên trong trường hợp đã cho

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } -\dfrac{1}{4} < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 \text{ nếu } -\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

200. $$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2 - x^2}.$$

Giải. Biểu diễn đạo hàm của hàm $f(x)$ dưới dạng

$$f'(x) = \frac{1}{1+t^4} + \frac{t^2}{1+t^4},$$

trong đó $t = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, và dùng công thức IV, mục 4, ta tìm được :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n+2}.$$

Hiển nhiên khi $|t| < 1$ cả hai chuỗi ở vế phải cùng hội tụ tuyệt đối ; vì vậy khi $|t| < 1$ có thể cộng chúng với nhau được. Ta có

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n} \quad (|x| < \sqrt{2}),$$

từ đó tích phân hai vế ta được :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)} \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

Vì khoảng hội tụ tuyệt đối của chuỗi sau khi tích phân không thay đổi, nên chuỗi vừa nhận được hội tụ tuyệt đối khi $|x| < \sqrt{2}$. Tại các điểm $x = \pm\sqrt{2}$ chuỗi hội tụ, nhưng có điều kiện. Thật vậy dãy $\dfrac{1}{2n+1}$ giảm dần tới 0 khi $n \to \infty$ còn

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \right| \leqslant 2;$$

vì vậy theo dấu hiệu Đirichlê, chuỗi hội tụ. Tích phân kỳ tuyệt đối của chuỗi tại các điểm này được suy từ sự phân kỳ của chuỗi điều hòa.
Nhưng vì hàm $f(x)$ tại các điểm $x = \pm\sqrt{2}$ không xác định nên khai triển vừa nhận được chỉ đúng với $|x| < \sqrt{2}$.

201. $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

Giải. Đạo hàm hàm $f(x)$ ta nhận được:

$$f'(x) = \frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1)$$

Dùng khai triển IV, mục 4, ta được:

$$f'(x) = 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n}\right) \operatorname{sgn}x \quad (0 < |x| < 1).$$

Tích phân từng từ chuỗi vừa nhận được ta có:

$$f(x) = 2\left(|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,|x|^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)}\right). \tag{1}$$

Chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leqslant 1$ theo dấu hiệu Raabe, tức là trên toàn bộ miền tồn tại của hàm $f(x)$.

Chú thích. Chuỗi (1) theo định lý Aben là hàm liên tục trên khoảng $|x| \leqslant 1$. Hàm $f(x)$ cũng liên tục trên khoảng này. Khai triển IV, mục 4 mà chúng ta đã sử dụng, bảo đảm cho ta sự trùng hợp tổng $S(x)$ của chuỗi với hàm $f(x)$ trong miền $0 < |x| < 1$. Ngoài ra $f(0) = S(0) = 0$. Vì vậy từ những điều nói trên suy ra rằng, hàm $f(x)$ hoàn toàn trùng với tổng của chuỗi (1).

202. Dùng tính duy nhất của khai triển

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots$$

tìm đạo hàm cấp n của các hàm sau đây:

$$\text{a) } f(x) = e^{x^2}; \text{ b) } f(x) = e^{\frac{a}{x}}; \text{ c) } f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Giải. Khai triển hàm

$$F(h) \equiv f(x+h) - f(x) = e^{x^2}\left(e^{2xh+h^2} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(e^{x^2}\right)^{(n)} \tag{1}$$

thành chuỗi lũy thừa của h, ta được

$$F(h) = e^{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1+(-1)^n]}{2\left[\frac{n}{2}\right]!} h^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} h^n - 1\right)$$

$$= e^{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n h^n \qquad (2)$$

trong đó $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{[1+(-1)^k]}{2\left[\frac{k}{2}\right]!} \cdot \frac{(2x)^{n-k}}{(n-k)!}$ là các hệ số nhận được do kết quả của việc nhân hai chuỗi lũy thừa. Do tính duy nhất của khai triển, từ (1) và (2) ta được:

$$(e^{x^2})^{(n)} = e^{x^2} n! \sum_{k=0}^{n} \frac{[1+(-1)^k]}{(n-k)!\, 2\left[\frac{k}{2}\right]!} (2x)^{n-k}.$$

b) Biểu diễn hàm số

$$F(h) = e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}} = e^{\frac{a}{x}} \left(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (e^{\frac{a}{x}})^{(n)} \qquad (1)$$

dưới dạng chuỗi theo lũy thừa của h, ta có:

$$F(h) = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n h^n}{x^{2n}\left(1+\frac{h}{x}\right)^n} =$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{x^{2n} n!} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} \frac{h^k}{x^k}\right) h^n =$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n h^n,$$

trong đó $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k}$

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^{n+k} a^n n(n+1)\dots(n+k-1)}{x^{2n+k} n!\,k!}$$

$$a_{n,0} = \frac{(-1)a^n}{x^{2n} n!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

So sánh biểu thức (1) và (2) ta được

$$(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} = e^{\frac{a}{x}} n! \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^{n-k}(n-k)(n-k+1)\dots(n-1)}{(n-k)!\,k!} x^k$$

$$(n = 2, 3, \dots).$$

c) Như trong các trường hợp trên, ta có:

$$F(h) = \operatorname{arctg} \frac{h}{1 + x^2 + xh} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (\operatorname{arctg} x)^{(n)} \tag{1}$$

(ta coi $1 + x(x + h) > 0$). Mặt khác

$$F(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} h^{2n-1}}{(2n-1)(1+x^2)^{2n-1}} \left(1 + \frac{xh}{1+x^2}\right)^{-(2n-1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} h^n \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{xh}{1+x^2}\right)^{-n}}{n(1+x^2)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n \sin \frac{n\pi}{2}}{n(1+x^2)^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!\,(1+x^2)^k} x^k h^k\right)$$

$$= \sum c_n h^n, \tag{2}$$

trong đó $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k,k}$

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k \sin\frac{n\pi}{2}(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(1+x^2)^{n+k}\,k!\,x^{-k}}$$

$$a_{n,0} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n(1+x^2)^n}.$$

So sánh (1) và (2) ta nhận được

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \frac{n!}{(1+x^2)^n}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}(n-k)(n-k+1)\dots(n-1)x^k}{(n-k)\,k!}$$

Chú ý rằng trong hai trường hợp sau, biểu thức $(n-k)(n-k+1)\dots(n-1)$ được hiểu là bằng đơn vị nếu $k<1$.

203. Khai triển hàm $f(x) = \ln x$ thành chuỗi lũy thừa theo lũy thừa nguyên dương của phân thức $\frac{x-1}{x+1}$.

Giải. Đặt $\frac{x-1}{x+1} = t$ ta nhận được

$$f\left(\frac{t+1}{1-t}\right) = F(t) = \ln\frac{t+1}{1-t}.$$

Bởi vì $x>0$ nên $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = |t| < 1$ (chú ý rằng điều khẳng định ngược lại cũng đúng). Do đó sử dụng công thức V mục 4 ta có thể viết:

$$\ln\frac{t-1}{1-t} = \ln(1+t) - \ln(1-t) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

204. Giả sử $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Chứng minh trực tiếp rằng $f(x).f(y) = f(x+y)$.

Chứng minh. Nhân hai chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ và $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$ ta được:

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{x^{n-j}y^j}{(n-j)!\,j!} \right)$$

Nhưng vì $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}y^k$ nên

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}y^k}{(n-k)!\,k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

đó là điều cần chứng minh.

205. Giả sử theo định nghĩa

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ và } \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Chứng minh rằng $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Chứng minh. Nhân hai chuỗi đã cho ta nhận được

$$\sin x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}. \tag{1}$$

Dễ dàng chứng minh theo quy nạp:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2k)!\,(2n-2k+1)!} = 2^{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Thay vế phải của (2) vào (1) và lưu ý tới định nghĩa hàm $\sin x$ đã cho ta nhận được:

$$\sin x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} 2^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

đó là điều cần phải chứng minh.

206. Viết một vài số hạng của khai triển thành chuỗi lũy thừa của hàm $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right)^{-1}$.

Giải. Ta cần chọn các hệ số α_n sao cho thỏa mãn đồng nhất thức theo x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 \text{ trong đó } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = f(x).$$

Điều đó cho ta một hệ vô số các phương trình đối với α_n:

$$\alpha_0 = 1, \ \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n-i+1} = -\frac{1}{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots),$$

mà từ đó ta tìm được: $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{12}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{24}, \ldots$

Tiến hành các phép toán tương ứng về các chuỗi lũy thừa, khai triển thành chuỗi lũy thừa các hàm sau đây:

207. $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

Giải. khai triển hàm ch $\sqrt{x}$ thành chuỗi theo lũy thừa của $\sqrt{x}$ ta nhận được

$$f(x) = (1 - 2x + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(2n)!} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - 2x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(2n)!} = 1 - \frac{3}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} - \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n-4)!}\right) x^n.$$

Hiển nhiên rằng khai triển này đúng với mọi x.

208. $f(x) = \ln^2(1-x)$.

Giải. Bình phương chuỗi $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ta nhận được

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{n} c_n x^{n+1}$, trong đó

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1-k)k} = \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$ nên khai triển đúng với $|x| < 1$.

209. $f(x) = e^x \cos x$.

Giải. Khai triển hàm $\overline{f}(x) = e^{x(1+i)}$ thành chuỗi lũy thừa

$$\overline{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x(\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

và chú ý rằng $f(x) = \mathrm{Re}\,\overline{f}(x)$, ta nhận được

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Bởi vì $\left|\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}\right| \leqslant \frac{(\sqrt{2}\,|x|)^n}{n!}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\,|x|)^n}{n!}$ hội tụ khi $|x| < \infty$ nên khai triển vừa nhận được cũng đúng với $|x| < \infty$.

210. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$ khi $x \neq 0$ và $f(0) = 1$.

Giải. Chú ý kết quả bài 197 ta được:

$$f(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,x^{2n}}{(2n)!!\,(2n+1)}\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n},$$

trong đó

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} \frac{(2k-1)!!\,((2k)!!)^{-1}}{(2n-2k+1)\,(2k+1)} (-1)!! = 1.$$

Bằng chứng minh quy nạp ta có

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(2n-2i-1)!!\,(2i-1)!!}{(2n-2i)!!\,(2i)!!\,(2n-2i+1)\,(2i+1)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)}.$$

Vì vậy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}. \qquad (1)$$

Dễ xác định được rằng chuỗi này hội tụ khi $|x| < 1$. Để tìm hiểu sự hội tụ của chuỗi (1) tại các điểm mút $x = \pm 1$ ta dùng dấu hiệu Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n = \lim n \left(\frac{3}{2n} - \frac{2n+3}{2n(n+1)^2}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Ta thấy rằng chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối cũng tại các điểm mút của khoảng hội tụ $|x| < 1$. Do đó khai triển (1) do tính liên tục của hàm $f(x)$ trên đoạn $|x| \leqslant 1$ và định lý Aben, đúng trên khoảng đã chỉ ra.

211. Giả sử khai triển $\sec x$ được viết dưới dạng

$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$. Rút ra công thức truy toán đối với các hệ số E_n (các số Ơle).

Giải. Công thức truy toán cần tìm được rút ra từ đồng nhất thức

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1.$$

Nhân các chuỗi này với nhau ta nhận được $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} = 1$ trong đó

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{E_{n-k}}{(2n-2k)!} = 1 \; (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Từ đó ta được

$$E_0 = 1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{E_{n-k}}{(2n-2k)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)} \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Thay $n-k$ bằng k, hệ thức cuối cùng cũng có thể biểu diễn dưới dạng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} E_k}{(2k)!\,(2n-2k)!} = \frac{1}{2n!}.$$

Đây chính là công thức truy toán cần tìm.

212. Khai triển thành chuỗi lũy thừa hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \; (|x| < 1).$$

Giải. Biến đổi hàm đã cho về dạng $f(x) = (y^2+\alpha)^{-\frac{1}{2}} = F(y^2) = Z(y)$ trong đó $y = t - x$, $\alpha = 1 - t^2$ và sử dụng kết quả bài 139, chương II, tập I, ta nhận được:

$$Z^{(n)}(y) = (2y)^n F^{(n)}(y^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2y)^{n-2} F^{(n-1)}(y^2) +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2y)^{n-4} F^{(n-2)}(y^2) + \ldots$$

Từ đó chú ý rằng $F^{(n)}(t^2) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n}$, ta được:

$$Z^{(n)}(t) = (-1)^n f^{(n)}(0) = (-1)^n \Bigg((2t)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} -$$
$$- \frac{n(n-1)}{1!}(2t)^{n-2}\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2t)^{n-4}\frac{(2n-5)!!}{2^{n-2}} - \ldots\Bigg).$$

Do đó chuỗi lũy thừa có dạng

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{(n)}(t)}{n!} x^n.$$

Bây giờ ta chứng minh rằng khi $|x| < 1$ khai triển này không hình thức. Dễ thấy rằng từ điều kiện $|x| < 1$ và biểu thức dưới căn dương ta suy ra bất đẳng thức $|t| \leqslant 1$. Giả sử $t = \cos\alpha$. Khi đó $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - xe^{i\alpha})(1 - xe^{-i\alpha})}}.$$

Vì $|xe^{i\alpha}| = |xe^{-i\alpha}| = |x|\,|e^{i\alpha}| = |x| < 1$ nên theo công thức IV, mục 4, ta có:

$$(1 - xe^{\pm i\alpha})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n e^{\pm in\alpha}$$

Do đó hàm $f(x)$ là tích của hai hàm giải tích $(1 - xe^{i\alpha})^{-\frac{1}{2}}$ và $(1 - xe^{-i\alpha})^{-\frac{1}{2}}$ với $|x| < 1$, cũng là hàm giải tích khi $|x| < 1$, tức là nó khai triển được thành chuỗi lũy thừa hội tụ khi $|x| < 1$, đó là điều cần chứng minh.

Ta thấy rằng hàm $P_n(t) = \dfrac{(-1)^n Z^{(n)}(t)}{n!}$ là đa thức Lơgiăngđrơ (xem bài 136, chương II, tập I), vì thế nên hàm đã cho (được gọi là hàm sinh của đa thức Lơgiăngđrơ) khi $|x| < 1$ có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n.$$

213. Giả sử $f(x) \in C^\infty(a, b)$ và $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ khi $x \in (a, b)$. Chứng minh rằng hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi lũy thừa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x_0 \in (a, b), \text{ hội tụ trong khoảng } (a, b).$$

Chứng minh. Ta đã biết rằng nếu một hàm nào đó khai triển thành chuỗi lũy thừa thì chỉ là chuỗi Taylo. Vì vậy ta sẽ chứng minh rằng $f(x)$ khai triển thành chuỗi Taylo, tức là

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n; \quad x, \ x_0 \in (a, b).$$

Để có điều đó ta ước lượng phần dư $R_n(x)$ của chuỗi dưới dạng Lagrăng. Ta có

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{(c(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Từ đó suy ra rằng $|R_n(x)| \to 0$ khi $n \to \infty$ và không phụ thuộc vào $x \in (a, b)$. Nhưng vì sự tiến tới không của phần dư đồng thời với tính khả vi vô hạn của hàm $f(x)$ là điều kiện cần và đủ để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Taylo, nên định lý được chứng minh.

214. Giả sử $f(x) \in C^\infty [-1, 1]$ và $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ khi $x \in [-1, 1]$. Chứng minh rằng trong khoảng $(-1, 1)$ hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Chứng minh. Ta chứng minh hàm đã cho khai triển thành chuỗi Macloranh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ khi } x \in (-1, 1),$$

tức là khai triển thành chuỗi lũy thừa theo lũy thừa của x.

Trước hết, chú ý rằng hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trên đoạn $[-1, 1]$, ta viết công thức Macloranh với phần dư dạng Lagrăng:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x))}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{1}$$

từ đó, do các đạo hàm của hàm $f(x)$ không âm, ta được bất đẳng thức

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_n(1))}{(n+1)!} = f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \leqslant f(1) \tag{2}$$

Nếu như ta xác lập được hệ thức

$$\sup_{0 < |x| \leqslant 1} f^{(n+1)}(\xi_n(x)) = f^{(n+1)}(\xi_n(1)), \tag{3}$$

thì khi đó từ công thức (1), chú ý tới bất đẳng thức (2), dễ dàng nhận được ước lượng của phần dư

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x))}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(1))}{(n+1)} |x|^{n+1} \leqslant f(1) |x|^{n+1}$$

mà từ đó ta có $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ khi $|x| < 1$. Điều này có nghĩa là hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi Macloranh trong khoảng $(-1, 1)$.

Bây giờ ta chứng minh mệnh đề (3). Giả sử $0 < x \leqslant 1$. Vi phân biểu thức

$$f^{(n+1)}(\xi_n(x)) = (n+1)!\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) x^{n-1} \equiv \omega_n(x)$$

theo x ta nhận được

$$\omega_n'(x) = (n+1)!\,\varphi_n(x)\,x^{-n-2}, \tag{4}$$

trong đó $\varphi_n(x) = xf'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^k - (n+1)\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right)$.

Dễ thấy rằng $\varphi_n^{(i)}(0) = 0$ khi $i = 0, 1, \ldots n$. còn $\varphi_n^{(n+1)}(x) = xf^{(n+2)}(x) > 0$ khi $x > 0$. Vì vậy theo bài 186, chương II, tập I, ta thấy rằng $\varphi_n(x) \geqslant 0$ khi $x > 0$. Và khi đó từ công thức (4) suy ra, hàm $\omega_n(x)$ là đơn điệu không giảm.

Giả sử $-1 \leqslant x < 0$. Ta xét hàm số

$$\psi_n(x) \equiv (-1)^n \varphi_n(-x) = (-1)^{n+1}\left(xf'(-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}(-1)^k x^k + \right.$$

$$\left. + (n+1)\left(f(-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(-1)^k x^k\right)\right),\ x \in [0, 1].$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\psi_n^{(i)} = 0$, khi $i = 0, 1, \ldots, n$; còn $\psi_n^{(n+1)}(x) = xf^{(n+2)}(-x) \geqslant 0$; vì vậy hàm $\psi_n(x)$, theo bài đã được chỉ ra ở trên, là không âm, tức là hàm $f^{(n+1)} \times \times (\xi_n(x))$ cả khi $-1 \leqslant x < 0$ là hàm đơn điệu không giảm.

Cuối cùng, ta lưu ý thêm rằng $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n+1)}(\xi_n(x)) = f^{(n+1)}(0)$ (tồn tại) ta đi đến kết luận là hàm $f^{(n+1)}(\xi_n(x))$ đơn điệu không giảm trên toàn đoạn $[-1, 1]$ (khi $x = 0$ ta đặt $f^{(n+1)}(\xi_n(0)) = f^{(n+1)}(0)$). Do đó hệ thức (3) đúng, đó là điều cần chứng minh.

215. Chứng minh rằng nếu 1) $a_n \geqslant 0$ và 2) tồn tại $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ thì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

Chứng minh. Do điều kiện (2) ta có

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n R^n + \lim_{x \to R-0} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = S$$

từ đó

$$S = \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \alpha_N, \tag{1}$$

trong đó
$$\alpha_N = \lim_{x \to R-0} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n.$$

Tiếp theo, bởi vì $a_n \geqslant 0$ nên $\alpha_N \geqslant 0$. Vì vậy từ (1) suy ra rằng $0 \leqslant \sum_{n=0}^{N} a_n R^n \leqslant S$.

Điều đó có nghĩa là dãy $\sum_{n=0}^{N} a_n R^n$ giới nội. Nhưng vì nó cũng đơn điệu nên theo định lý đã biết, nó hội tụ, tức là chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ hội tụ. Khi đó theo định lý Aben ta có: $\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Từ đó chú ý tới điều kiện 2) ta tìm được:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S,$$

đó là điều cần phải chứng minh.

Khai triển thành chuỗi lũy thừa các hàm:

216. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

Giải. Khai triển hàm $\frac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$ thành chuỗi lũy thừa $\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$ $(0 < |t| < \infty)$ và tích phân biểu thức vừa nhận được ta được:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad (|x| < \infty).$$

217. $\int\limits_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}$.

Giải. Các hệ số a_n trong chuỗi lũy thừa của hàm dưới dấu tích phân được tìm từ đồng nhất thức:

$$1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

từ đó cho ta hệ phương trình đại số đối với a_k:

$$a_o = 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(-1)^{k+1}}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Từ hệ phương trình này ta nhận được: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{12}$, $a_3 = \frac{1}{24}$. v.v...
Như vậy ta có

$$\int\limits_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + \ldots$$

Vì hàm $\varphi(t) = \frac{t}{\ln(1+t)}$ giải tích khắp nơi trừ điểm $t = -1$ (khi $t = 0$ ta đặt $\varphi(0) = 1$) nên bán kính hội tụ của chuỗi $\Sigma a_n t^n$ bằng 1. Do đó ta có khai triển vừa nhận được cũng có bán kính hội tụ như vậy.

Áp dụng đạo hàm từng từ, tính tổng các chuỗi sau đây:

218. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

Giải. Theo công thức Côsi-Ađama, chuỗi đã cho có bán kính hội tụ bằng 1. Theo định lý mục 5, có thể đạo hàm từng chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ. Ta có:

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x| < 1)$$

Tích phân biểu thức đó ta nhận được

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x + C.$$

Ở đây cho $x = 0$ ta tìm được hằng số $C = 0$.

Cuối cùng ta có

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \operatorname{arctg} x.$$

Chú ý tại các điểm mút của khoảng hội tụ chuỗi này hội tụ. Vì vậy theo định lý Aben, tổng của chuỗi là một hàm liên tục trên đoạn $[-1, 1]$. Vì hàm $\operatorname{arctg} x$ cũng liên tục trên đoạn này, nên đẳng thức cuối cùng đúng với mọi $x \in [-1, 1]$.

219. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Giải. Hiển nhiên chuỗi này hội tụ trên toàn trục số. Ký hiệu $S(x)$ là tổng của chuỗi đã cho, đạo hàm từng từ của nó ta nhận được

$$S(x) + S'(x) = e^x, \qquad S(x) - S'(x) = e^{-x}.$$

Từ đó $S(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x \; (|x| < \infty)$.

220. $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \dots$

Giải. Đạo hàm từng từ chuỗi đó trong khoảng hội tụ $|x| < 1$, ta nhận được:

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots = S(x).$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức này với x^2 $(x \neq 0)$ và sử dụng công thức V mục 4, ta tìm được

$$S(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2} \tag{1}$$

Khi $x = 0$ ta đặt $S = \frac{1}{2}$ ($x = 0$ là điểm gián đoạn khử được của hàm $S(x)$).

Tích phân (1) ta có:

$$\int S(x)\,dx = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + C. \tag{2}$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \dots\right) = 0$ nên từ (2) ta tìm được

$$C = -\lim_{x \to 0}\frac{1-x}{x}\ln(1-x) = 1. \text{ Do đó}$$

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \dots = \begin{cases} \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Khi $|x| < 1$ đẳng thức này bảo đảm định lý về tính quy luật của đạo hàm và tích phân từng từ chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ. Ta chứng minh rằng tại các điểm mút của khoảng hội tụ $x = \pm 1$, đẳng thức này thỏa mãn với một số điều kiện nào đó. Thật vậy, vì chuỗi lũy thừa đang xét hội tụ tại các điểm $x = \pm 1$, nên theo định lý Aben, tổng của nó là một hàm liên tục trên đoạn $[-1, 1]$. Nếu giá trị của hàm trong đẳng thức (3) ở phía phải điểm $x = 1$ ta đặt bằng 1, thì dễ thấy rằng hàm này cũng là hàm liên tục trên đoạn $[-1, 1]$. Vì vậy cuối cùng ta có thể viết:

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \ldots =$$

$$= \begin{cases} \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1, & \text{nếu } -1 \leqslant x < 0;\ 0 < x < 1; \\ 0, & \text{nếu } x = 0; \\ 1, & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

221. $1 + \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots$

Giải. Dễ kiểm chứng rằng bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$. Nhân đạo hàm của tổng của chuỗi đã cho $S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}2x + \frac{1.3.5}{2.4.6}3x^2 + \ldots$ $(|x| < 1)$ với $(1 - x)$ $(x \neq 1)$ ta được phương trình $(1 - x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x)$. Nghiệm tổng quát của phương trình này là hàm $S(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x}}$ ($C = \text{const}$). Cho $x = 0$ và chú ý $S(0) = 1$ ta được $C = 1$. Do đó $S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(|x| < 1)$.

Tính hội tụ của chuỗi đang xét tại điểm mút $x = -1$ dễ dàng xác định được, nếu sử dụng bài 90; tính phân kỳ của chuỗi tại điểm $x = 1$ được suy từ dấu hiệu Gaoxơ. Như vậy, tổng của chuỗi, theo định lý Aben, là hàm liên tục trong nửa đoạn $[-1, 1)$. Vì hàm $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ cũng liên tục trên nửa đoạn này, nên cuối cùng ta có:

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{1.4.6}x^3 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\text{khi } -1 \leqslant x < 1.$$

Áp dụng tích phân từng từ, tính tổng các chuỗi sau đây:

222. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$

Giải. Số hạng tổng quát của chuỗi này có dạng $a_n(x) = (-1)^{n-1}n^2x^n$. Vì vậy dễ dàng tìm được bán kính hội tụ của chuỗi $R = 1$.

Chia tổng $S(x)$ của chuỗi đã cho cho $x(x \neq 0)$, sau đó tích phân từng từ của nó trong khoảng $|x| < 1$, ta nhận được

$$\int \frac{S(x)}{x}\, dx = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots + C =$$

$$= (x^2 - x^3 + x^4 - \ldots)' - x + x^2 - x^3 + \ldots + C = \frac{x}{(1+x)^2} + C.$$

Đạo hàm đẳng thức vừa nhận được, ta có: $S(x) = \dfrac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ ($|x| < 1, x \neq 0$). Dễ thấy rằng hạn chế $x \neq 0$ có thể bỏ qua.

223. $1.2x + 2.3x^2 + 3.4x^3 + \ldots$

Giải. Số hạng tổng quát của chuỗi có dạng $a_n(x) = n(n+1)x^n$; vì vậy

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n+1)}} = 1.$$

Như vậy chuỗi hội tụ tới tổng của nó với $|x| < 1$.

Tích phân từng từ chuỗi đang xét trong khoảng $|x| < 1$ hai lần, ta nhận được

$$\int \frac{dx}{x^2}\left(\int S(x)\, dx\right) = x + x^2 + x^3 + \ldots - \frac{C_1}{x} + C_2 =$$

$$= \frac{x}{1-x} - \frac{C_1}{x} + C_2. \tag{1}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tích phân ; $x \neq 0$.

Vi phân đẳng thức (1) hai lần và chú ý rằng $S(0) = 0$, cuối cùng ta được: $S(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$ ($|x| < 1$).

224. Chứng minh rằng chuỗi $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ thỏa mãn phương trình $xy'' + y' - y = 0$.

Giải. Hiển nhiên chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$ và có thể đạo hàm từng từ với số lần tùy ý. Tiếp theo ta có:

$$xy'' + y' = (xy')' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y,$$

đó là điều cần phải chứng minh.

Sử dụng các khai triển tương ứng, tính giá trị của các hàm sau đây với độ chính xác tới lũy thừa đã được chỉ ra:

225. $\sin 18^\circ$ với độ chính xác tới 10^{-5}.

Giải. Dùng khai triển hàm $\sin x$ thành chuỗi lũy thừa ta có thể viết

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}!}.$$

Vì chuỗi này có dạng Lepnit, nên phần dư của chuỗi theo trị tuyệt đối, không vượt quá số hạng đầu tiên bị bỏ đi. Vì vậy, từ bất đẳng thức $\frac{\pi^7}{7!10^7} < 10^{-5} < \frac{\pi^5}{5!10^5}$ suy ra rằng: để nhận được kết quả với độ chính xác cần thiết phải lấy ba số hạng của khai triển. Ta có:

$$\sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} = \frac{\pi}{10}\left(1 - \frac{\pi^2}{600} + \frac{\pi^4}{12} 10^{-5}\right) = 0{,}30902\ldots$$

226. $\mathrm{tg}\, 9^\circ$ với độ chính xác tới 10^{-3}.

Giải. Nhờ ước lượng $R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 < 0{,}0005$ ($f(x) = \mathrm{tg}\, x$), để nhận được giá trị gần đúng $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{20}$ với độ chính xác đã được chỉ ra, cần phải lấy hai số hạng của khai triển hàm $\mathrm{tg}\, x$ thành chuỗi lũy thừa (xem bài 253, chương II, tập I). Như vậy

$$\mathrm{tg}\, 9^\circ = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} + \frac{\pi^3}{3 \cdot 20^3} = \frac{\pi}{20}\left(1 + \frac{\pi^2}{1200}\right) = 0{,}158\ldots$$

227. Xuất phát từ đẳng thức $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$ hãy tìm π với độ chính xác tới 10^{-4}.

Giải. Sử dụng khai triển hàm $\arcsin x$ ($|x| < 1$) thành chuỗi lũy thừa (xem bài 197). Ta có:

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n+1} n!(2n+1)}$$

Bởi vì: 1) phần dư của chuỗi đã cho được ước lượng như sau

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1} k!(2k+1)} \leqslant \frac{(2n+1)!!}{3 \cdot 2^{3n+2}(n+1)!(2n+3)},$$

2) bất đẳng thức $6 \cdot \dfrac{(2n+1)!!}{3 \cdot 2^{3n+2}(n+1)!\,(2n+3)} < 10^{-4}$ được thỏa mãn với $n \geqslant 4$, nên để nhận được giá trị gần đúng của số $\dfrac{\pi}{6}$ với độ chính xác cần thiết phải lấy 5 số hạng của khai triển đã chỉ ra:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{72 \cdot 8192} = 0{,}52359...,$$

từ đó $\pi = 3{,}1415...$

228. Dùng công thức $\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\dfrac{1}{(2n+1)} + \dfrac{1}{3(2n+1)^3} + ...\right)$ tìm $\ln 2$ và $\ln 3$ với độ chính xác tới 10^{-5}.

Giải. Đầu tiên ta chứng tỏ cách xây dựng công thức đó. Khai triển các hàm $\ln(1+x)$ và $\ln \dfrac{1}{1-x}$ thành các chuỗi lũy thừa theo lũy thừa của x, sau đó cộng chúng lại trong miền hội tụ chung ($|x| < 1$) ta được:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right) \qquad (1)$$

Đặt $x = \dfrac{1}{2n+1}$ ta nhận được công thức đã chỉ ra.

Bây giờ ta tìm số số hạng k tương ứng để tính gần đúng $\ln 2$ và $\ln 3$. Muốn vậy ta hãy đánh giá phần dư R_k của chuỗi đó. Ta có:

$$R_k = 3\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + ...\right) \leqslant \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}$$

Từ đó suy ra rằng nếu $x = \dfrac{1}{3}$ $(n = 1)$ thì $R_k \leqslant 10^{-5}$ bắt đầu với $k = 5$, và nếu $x = \dfrac{1}{5}$ $(n = 2)$ thì $R_k \leqslant 10^{-5}$ bắt đầu với $k = 3$. Như vậy

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147}\right) = 0{,}69314...,$$

$$\ln 3 \approx 0{,}69314 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625}\right) = 1{,}09860...$$

229. Bằng cách khai triển hàm dưới dấu tích phân thành chuỗi, hãy tính các tích phân sau với độ chính xác tới 0,001:

a) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$; b) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$; c) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$;

d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; e) $\int\limits_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$; f) $\int\limits_0^1 x^x dx$.

Giải. a) Dùng công thức I, mục 4, ta được:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\ (|x| < \infty),\ \text{từ đó}\ \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Chuỗi vừa nhận được có dạng Lepnit, vì vậy nếu lấy k số hạng của chuỗi để được giá trị gần đúng của tích phân đã cho, thì sai số không vượt quá số hạng thứ $(k+1)$ của chuỗi đó. Từ điều kiện này ta tìm được số k. Ta có: $\frac{1}{(k+1)!(2k+3)} \leqslant$ $\leqslant 0{,}001$, từ đó ta có $k \geqslant 4$. Do đó

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0{,}747\ldots$$

b) Dùng công thức I mục 4 và khai triển hàm dưới dấu tích phân theo lũy thừa của $\frac{1}{x}$, ta nhận được:

$$e^{\frac{1}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!x^n},\ 0 < |x| < +\infty.$$ Tích phân từng từ chuỗi này ta có:

$$\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx = 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{n(n+1)!\,2^n}.$$

Giới hạn bởi k số hạng, ta được

$$\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx \approx 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{n(n+1)!\,2^n}$$

Từ ước lượng phần dư của chuỗi

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)!\,2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}(n+1)}\left(1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)}+\dots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}(n+1)}\left(1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{(2n+4)^2}+\dots\right) \leqslant 0{,}001$$

suy ra rằng để được kết quả với độ chính xác đã được chỉ ra cần phải lấy $k > 3$. Như vậy

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx = 2 + 0{,}6931 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{7}{6608} = 2{,}834...$$

(hoặc 2,835 với độ sai thừa).

c) Ở đây $x \geqslant 2$, vì vậy ta khai triển hàm dưới dấu tích phân theo lũy thừa của $\frac{1}{x}$. Ta có:

$$(1+x^3)^{-1} = \frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{3(n+1)}} \quad (\,|\,x\,| > 1),$$

từ đó

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)\,2^{3n+2}}.$$

Vì chuỗi có dạng Lepnit, nên để được kết quả với độ chính xác đã chỉ ra, cần phải lấy k số hạng của chuỗi ($k = 0, 1, \dots$) mà k thỏa mãn bất đẳng thức $\frac{1}{(3k+5)\,2^{3k+5}} \leqslant 0{,}001$, từ đó có $k \geqslant 1$. Do đó

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{160} + \dots = 0{,}118...$$

(hoặc 0,119 với độ sai thừa).

d) Vì $0 < x < 1$, nên ta có thể khai triển hàm dưới dấu tích phân theo lũy thừa của x bằng cách sử dụng công thức IV, mục 4. Ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} x^{4n}\right) dx =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(4n+1)} = S. \quad (1)$$

Chuỗi vừa nhận được hội tụ khá chậm. Để làm tăng nhanh sự hội tụ của nó ta trừ đi chuỗi, mà tổng của nó dễ tìm được, chẳng hạn chuỗi

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(4n+4)} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Khi đó ta nhận được

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!(4n+1)(n+1)} \quad (2)$$

Chuỗi này hội tụ nhanh hơn chuỗi (1) rất nhiều. Thật vậy, nếu chọn k_1 số hạng đầu tiên của chuỗi (1) để tính tích phân đã cho sao cho phần dư của chuỗi thỏa mãn ước lượng

$$\left| \sum_{n=k_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(4n+1)} \right| < \frac{(2k_1+1)!!}{(3k_1+2)!!(4k_1+5)} \leqslant 0{,}001,$$

thì $k_1 \geqslant 36$; nếu giả thiết rằng tích phân được tính cũng với độ chính xác như vậy nhờ chuỗi (2), thì từ ước lượng

$$\frac{3}{4} \frac{(2k_2+1)!!}{(2k_2+2)!!(4k_2+5)(k_2+2)} \leqslant 0{,}001.$$

ta suy ra cần chọn k_2 ($k_2 \geqslant 6$) số hạng đầu tiên của chuỗi (2). Như vậy, sử dụng đẳng thức (2) ta nhận được

$$S \approx \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{72} - \frac{5}{832} + \frac{7}{2176} - \frac{1}{512} + \right.$$
$$\left. + \frac{33}{25600}\right) = 0{,}927...$$

e) Biến đổi tích phân về dạng:

$$\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x}\, dx + \int_{10}^{100} \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 10 + \int_{10}^{100} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n x^{n+1}} \right) dx.$$

Ở đây ta sử dụng khai triển hàm $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ thành lũy thừa của $\frac{1}{x}$ ($|x| > 1$).

Tích phân từng từ của chuỗi ta nhận được:

$$\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln^2 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 10^n} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Vì chuỗi này có dạng Lepnit, nên từ ước lượng phần dư của nó

$$\frac{1}{(k+1)^2 10^{k+1}} \left(1 - \frac{1}{10^{k+1}}\right) \leqslant 0{,}001$$

ta tìm được số k (số số hạng đầu tiên của chuỗi) cần cho kết quả với độ chính xác đã được chỉ ra. Dễ kiểm tra rằng $k \geqslant 2$. Vì thế

$$\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx \approx 7{,}95279 + (0{,}09 - 0{,}002475) = 8{,}040\ldots$$

f) Biểu diễn hàm dưới dấu tích phân dưới dạng $x^x = e^{x\ln x}$ và khai triển nó thành chuỗi lũy thừa theo lũy thừa của $x\ln x$ ($x > 0$) ta có thể viết

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n x}{n!}.$$

Tích phân từng từ chuỗi này ta nhận được

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x\, dx.$$

Tích phân từng phần ta có

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m \ln^n x \, dx = -\frac{m}{n+1} \int_0^1 x^m \ln^{n-1} x dx = -\frac{n}{m+1} I_{m,\, n-1}.$$

Trong công thức vừa nhận được, đặt liên tiếp $n = 1, 2, \ldots$ ta tìm được

$$I_{m,1} = -\frac{1}{m+1} I_{m,0}; I_{m,2} = \frac{2!}{(m+1)^2} I_{m,0}; \ldots$$

$$I_{m,n} = (-1)^n \frac{n}{(m+1)^n} I_{m,0}.$$

Bởi vì

$$I_{m,0} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

nên

$$I_{m,n} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \text{ từ đó } I_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Như vậy

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Từ ước lượng phần dư của chuỗi

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)^{n+2}} \leqslant 0{,}001,$$

suy ra rằng: để tính tích phân đã cho với độ chính xác đến 0,001 cần phải lấy bốn số hạng đầu tiên của chuỗi này. Khi đó ta nhận được:

$$\int_0^1 x^x dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} = 0{,}783\ldots$$

230. Tính với độ chính xác tới 0,01 độ dài cung của một nửa sóng hình sin: $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

Giải. Độ dài S của cung nói trên được biểu diễn bởi tích phân

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx. \tag{1}$$

Biến đổi hàm dưới dấu tích phân về dạng

$$\sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}}$$

và chú ý rằng $\frac{1}{3}|\cos 2x| \leqslant \frac{1}{3}$, ta khai triển nó thành chuỗi lũy thừa theo lũy thừa của $\frac{1}{3}\cos 2x$ (sử dụng công thức IV, mục 4):

$$\sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,3^n} \cos^n 2x\right) \tag{2}$$

Tích phân từng từ chuỗi này ta nhận được

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,3^n} I_n\right) \tag{3}$$

trong đó

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n 2x\, dx. \tag{4}$$

Việc tích phân từng từ của chuỗi ở đây là hợp lý, bởi vì chuỗi (2) hội tụ đều theo x theo dấu hiệu Vâyecstrat, còn chuỗi (3) hội tụ. Tích phân từng phần (4), ta được:

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{n-1} 2x\, d(\sin x) = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

từ đó $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Bởi vì $I_0 = \pi$, còn $I_1 = 0$, nên từ công thức trên ta nhận được $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$, $I_{2n-1} = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Sử dụng kết quả này, từ (3) và (1) ta có

$$S = \pi\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-1)!!\,(2n-1)!!}{(4n)!!\,3^{2n}(2n)!!}\right).$$

Ước lượng phần dư của chuỗi

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(4n-1)!!\,(2n-1)!!}{(4n)!!\,3^{2n}(2n)!!} < \frac{(4k+3)!!\,(2k+1)!!}{3^{2k+2}(2k+2)!!\,(4k+4)!!}\times$$

$$\times\left(1 + \frac{(4k+7)(2k+3)}{9(4k+8)(2k+4)} + \dots\right) < \frac{1}{6\cdot 3^{2k+2}}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots\right) =$$

$$= \frac{5}{3\cdot 9^{k+2}}$$

và chú ý rằng sai số tuyệt đối khi tính tích phân đã cho không được vượt quá 0,01, số số hạng đầu tiên của chuỗi là k tìm được từ bất đẳng thức

$\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{5}{3\cdot 9^{k+2}} \leqslant 0{,}01$. Điều đó cho $k \geqslant 1$. Do đó

$$S \approx \pi\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{48}\right) = 3{,}92\dots$$

§ 6. CHUỖI FUARIÊ

1. Các định nghĩa cơ bản. Hệ hàm

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \dots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \dots$$

xác định trên đoạn $[-l, l]$ được gọi là *hệ lượng giác cơ sở*. Hệ hàm này trực giao trên đoạn $[-l, l]$.

Giả sử $f(x)$ là hàm khả tích trên $[-l, l]$. Các số

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

được gọi là *hệ số Fuariê của hàm $f(x)$ theo hệ lượng giác cơ sở.*

Chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

được gọi là chuỗi Fuariê của hàm $f(x)$. Đặc biệt nếu hàm $f(x)$ là hàm chẵn thì chuỗi Fuariê của nó có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l};$$

chuỗi Fuariê của hàm lẻ có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Hàm $f(x)$ được gọi là *liên tục từng khúc* trên đoạn $[-l, l]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in [-l, l]$, trừ ra một số hữu hạn điểm mà tại đó nó gián đoạn loại 1.

Hàm $f(x)$ được gọi là *trơn từng khúc* trên đoạn $[-l, l]$ nếu hàm này liên tục từng khúc và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn này, có thể trừ một số hữu hạn điểm, tại đó đạo hàm có các giá trị giới hạn một phía hữu hạn.

2. Định lý về sự khai triển. Giả sử hàm $f(x)$ trơn từng khúc trên đoạn $[-l, l]$, tuần hoàn với chu kỳ $2l$, được thác triển trên toàn đường thẳng vô hạn. Khi đó chuỗi Fuariê của hàm $f(x)$ hội tụ tại mọi điểm $x \in (-\infty, +\infty)$ đến giá trị $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Nếu hàm $f(x)$ liên tục và trơn từng khúc trên đoạn $[-l, l]$ thỏa mãn đẳng thức $f(-l) = f(l)$, thì chuỗi lượng giác Fuariê của nó hội tụ đều trên đoạn này và tổng của chuỗi bằng hàm $f(x)$ tại mọi điểm $x \in [-l, l]$.

3. Tính khả vi và khả tích của chuỗi Fuariê. Giả sử hàm $f(x)$ và các đạo hàm của nó đến cấp m nào đó $(m \geqslant 1)$ liên tục trên $[-l, l]$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(-l) = f(l),\ f'(-l) = f'(l), \dots f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l).$$

Ngoài ra giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp $m+1$ liên tục từng khúc trên đoạn $[-l, l]$.

Khi đó: 1) chuỗi số sau đây hội tụ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^m (|a_k| + |b_k|);$$

2) chuỗi Fuariê của hàm đó có thể đạo hàm từng từ m lần trên đoạn đã cho.

Nếu hàm $f(x)$ khả tích theo Riman trên đoạn $[-l, l]$, thì có thể tích phân từng từ chuỗi Fuariê của nó trên đoạn này.

4. Khai triển thành Chuỗi Fuariê theo Các hệ trực giao khác. Trong toán lý thường đề cập tới các đa thức trực giao.

1) *Các đa thức Trêbưsep* $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$ trực giao trên khoảng $(-1, 1)$ với hàm trọng lượng $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, tức là

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, \text{ nếu } m \neq n \\ 2^{\frac{\pi}{2^{n-1}}}, \text{ nếu } m = n \end{cases}$$

2) *Các đa thức Lơgiăngđrơ* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ trực giao trên đoạn $[-1, 1]$, tức là

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

3) *Các đa thức Aben — Lage* $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$ có tính chất trực giao trên khoảng $(0, +\infty)$ với hàm trọng lượng e^x. Như vậy ta có

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ nếu } m \neq n; \\ 1, \text{ nếu } m = n. \end{cases}$$

4) *Các đa thức Trêbưsep — Hecmit*

$H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!}\frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ được xác định trên toàn trục số và thỏa mãn đẳng thức

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)H_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n; \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{n}, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

Khai triển thành chuỗi Fuariê trong các khoảng đã chỉ ra của các hàm sau:

231. $f(x) = \begin{cases} A, \text{ nếu } 0 < x < l, \\ 0, \text{ nếu } l < x < 2l, \end{cases}$

trong đó $A = \text{const}$ trong khoảng $(0, 2l)$.

Giải. Như ta thấy hàm đã cho trơn từng khúc, điểm $x = l$ là điểm gián đoạn loại một. Vì vậy theo định lý về sự khai triển, hàm $f(x)$ có thể biểu diễn được bằng chuỗi Fuariê.

Để thác triển tuần hoàn (với chu kỳ $2l$) hàm $f(x)$ trên toàn đường thẳng vô hạn, ta xây dựng hàm

$$f^*(x) = \begin{cases} A \text{ nếu } 2kl < x < (2k+1)l, \\ \dfrac{A}{2} \quad \text{nếu } x = kl, \\ 0 \text{ nếu } (2k-1)l < x < 2kl, \end{cases}$$

trong đó $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Theo định lý nói trên, hàm $f^*(x)$ trùng với chuỗi Fuariê hội tụ của nó tại mọi điểm x của đường thẳng vô hạn:

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

trong đó

$$a_0 = A, \; a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^*(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{0}^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{A}{l} \int_{0}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^*(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{A}{l} \int_{0}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{A}{n\pi} ((-1)^{n+1} + 1).$$

Do đó

$$f^*(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{l} \pi x$$

với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$, còn

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{l} \pi x$$

với $0 < x < l$ và $l < x < 2l$.

232. $f(x) = |x|$ trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

Giải. Hàm này liên tục trên $(-\pi, \pi)$ và có đạo hàm liên tục từng khúc khắp nơi, trừ $x = 0$. Để thác triển tuần hoàn (với chu kỳ 2π) hàm $f(x)$ trên toàn trục số, ta xây dựng hàm $f^*(x) = |x - 2k\pi|$, nếu $|x - 2k\pi| \leqslant \pi$, trong đó $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Hàm đó thỏa mãn định lý về sự khai triển thành chuỗi Fuariê hội tụ về nó.

Vì hàm $f^*(x)$ là chẵn nên $b_n = 0$;

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{4}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_0 = \pi$$

Do đó

$$f^*(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\infty < x < -\infty)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

233. $f(x) = \sin ax$ trong khoảng $(-\pi, \pi)$ (a không phải là số nguyên).

Giải. Theo hàm đã cho ta xây dựng hàm $f^*(x) = \sin(a(x - 2k\pi))$ nếu $|x - 2k\pi| < \pi$ và $f^*((2k+1)\pi) = 0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Hàm này trơn từng khúc khi $|x - 2k\pi| < \pi$. Ngoài ra $\frac{1}{2}(f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)) = f^*(x_k)$, trong đó $x_k = (2k+1)\pi$ là điểm gián đoạn loại một của hàm $f(x)$. Vì thế có thể khai triển hàm $f^*(x)$ thành chuỗi Fuariê hội tụ về nó tại mọi điểm của trục số.

Do hàm $f^*(x)$ lẻ, nên các hệ số $a_n = 0$;

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2}\sin a\pi \ (a \neq n).$$

Như vậy ta có

$$f^*(x) = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2 - a^2} \ (|x| < \infty)$$

$$f(x) = \frac{2\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2 - a^2} \ (|x| < \pi).$$

234. $f(x) = x$ trong khoảng $(a, a + 2l)$.

Giải. Hàm

$$f^*(x) = \begin{cases} x - 2lk, & \text{nếu } 2lk + a < x < a + 2l(k+1); \\ a + l, & \text{nếu } x = 2lk \end{cases}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ được xây dựng từ hàm đã cho và trùng với nó trên khoảng $(a, a + 2l)$, là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2l$, trơn từng khúc. Ngoài ra tại các điểm gián đoạn $x_k = 2lk$ thỏa mãn đẳng thức

$$f^*(x_k) = \frac{1}{2}\left(f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)\right).$$

Vì thế hàm $f^*(x)$ khai triển được thành chuỗi Fuariê hội tụ về nó tại mọi điểm $x \in (-\infty, +\infty)$.

Tiếp đó, ta có

$$a_0 = 2(a + l)$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} x\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2l}{k\pi}\sin\frac{k\pi a}{l}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi a}{l}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$

Như vậy

$$f^*(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l}(a - x) \; (|x| < \infty)$$

$$f(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} (a - x) \; (a < x < a + 2l)$$

Khai triển thành chuỗi các hàm tuần hoàn sau đây:

235. $f(x) = \text{sgn}\,(\cos x)$.

Giải. Hàm đã cho liên tục từng khúc (các điểm gián đoạn x_k là gián đoạn loại một, thỏa mãn phương trình $\cos x_k = 0$) và có đạo hàm liên tục từng khúc $f'(x) = 0$, khi $x \neq x_k$. Ngoài ra hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và $f(x_k) = \frac{1}{2}\,(f(x_k - 0) + f(x_k + 0))$.

Do đó nó có thể khai triển được thành chuỗi Fuariê hội tụ tại mọi điểm x của trục số.

Chú ý tính chẵn của hàm đang xét, ta nhận được:

$$b_n = 0, \; a_o = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sgn}(\cos x) \,.\, \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nx dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Như vậy ta có

$$\text{sgn}(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)\,x, \; -\infty < x < +\infty.$$

236. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

Giải. Dễ kiểm chứng rằng hàm này liên tục trên toàn trục số và có đạo hàm liên tục từng khác (nó không khả vi chỉ tại các điểm $x = k$, trong đó k nguyên). Ngoài ra nó tuần hoàn với chu kỳ 2π. Do đó chuỗi Fuariê của hàm hội tụ về nó tại mọi điểm $x \in (-\infty, +\infty)$.

Chú ý tính chẵn của hàm đã cho ta được:

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

Như vậy

$$\arcsin(\cos x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}\cos nx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\quad(-\infty < x < +\infty).$$

237. $f(x) = (x)$ là khoảng cách từ x đến số nguyên gần nhất.

Giải. Hàm (x) là chẵn, có chu kỳ $T = 1$; các tính chất khác của nó tương tự như tính chất của hàm $\arcsin(\cos x)$ mà ta đã xét ở trên. Vì vậy

$$b_n = 0,\ a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 2\pi nx\,dx = \frac{((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

Như vậy ta có:

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n-2)\pi x}{(2n-1)^2} \quad (|x| < \infty).$$

238. $f(x) = |\cos x|$.

Giải. Hiển nhiên hàm đã cho liên tục tại mọi điểm $x \in (-\infty, +\infty)$ và có đạo hàm liên tục từng khúc khắp nơi, trừ các điểm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k nguyên). Ngoài ra nó tuần hoàn (chu kỳ $T = \pi$). Vì vậy, chuỗi Fuariê của nó hội tụ về hàm này tại mọi điểm $x \in (-\infty, +\infty)$.

Chú ý tính chẵn của hàm ta có:

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nx\,dx = \frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \quad (n = 1, 2\ldots).$$

Do đó

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1} \quad (|x| < \infty).$$

239. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\,\frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1).$

Giải. Bởi vì

$$\left|\alpha^n\,\frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant \frac{n\,|\alpha|^n|x|}{\sin x} \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,|\alpha|^n|x|}{|\sin x|} < +\infty$$

nên theo dấu hiệu Vâyectrat, chuỗi đã cho hội tụ đều trên mỗi đoạn không chứa điểm $x = k\pi$ (k nguyên). Ngoài ra, vì hàm $\frac{\sin nx}{\sin x}$ liên tục khi $x \neq k\pi$ nên theo định lý đã biết hàm $f(x)$ liên tục khi $x \neq k\pi$.

Tương tự, có thể chứng minh rằng hàm

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{n\cos nx \sin x - \cos x \sin nx}{\sin^2 x}$$

cũng liên tục khi $x \neq k\pi$. Ngoài ra, từ đẳng thức

$$\lim_{x \to k\pi} f(x) = \lim_{x \to k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \to k\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sin nx}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to k\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n \cos nx}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n (-1)^{(n+1)k} \equiv \beta_k$$

suy ra $x = k\pi$ là điểm gián đoạn khử được của hàm $f(x)$.

Như vậy, hàm tuần hoàn

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), \text{ nếu } x \neq k\pi\,; \\ \beta_k \quad \text{nếu } x = k\pi \end{cases}$$

khai triển được thành chuỗi Fuariê hội tụ về nó khắp nơi. Ta có

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sin x} (\sin (n-2)x.\ \cos 2x + \cos(n-2)x \sin 2x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(n-1)x =$$

$$= -\alpha + \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos (n-1)x.$$

Từ đó ta được

$$f^*(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2} \cos (n-1)x =$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2} \cos (nx)$$

240. Khai triển thành chuỗi Fuariê hàm $f(x) \equiv \sec x$

$$\left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

Giải. Như trong các bài trước, ta xây dựng hàm $f^*(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, bằng $\sec x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Ta tìm được ngay

$$b_n = 0,\ a_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$$

$$a_1 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4x}{\cos x}\,dx = \frac{8}{\pi}\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right).$$

Để tính các hệ số a_n khi $n \geqslant 2$, ta đưa ra hệ thức liên hệ a_n và a_{n-2}. Ta có:

$$a_{n-2} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4n-8)x}{\cos x}\,dx = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx \cdot \cos 8x}{\cos x}\,dx +$$

$$+ \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4nx \cdot \sin 8x}{\cos x}\,dx =$$

$$= a_n + \frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4nx \cdot \sin 4x \cos 4x}{\cos x}\,dx -$$

$$- \frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 4x \cdot \cos 4nx}{\cos x}\,dx = a_n - \beta_n \qquad (1)$$

trong đó

$$\beta_n = -\frac{64}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos 2x \sin 4(n-1)x dx =$$

$$= \frac{(-1)^n 512\sqrt{2}(n-1)}{\pi(4n-1)(4n-3)(4n-5)(4n-7)} \quad (n = 1, 2, ...) \qquad (2)$$

Từ công thức truy toán (1) ta suy ra rằng $a_2 = a_0 + \beta_2$, $a_3 = a_1 + \beta_3$,

$a_4 = a_0 + \beta_2 + \beta_4$, $a_5 = a_1 + \beta_3 + \beta_5$, ..., $a_{2n} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_{2i}$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$a_{2n+1} = a_1 + \sum_{i=0}^{n} \beta_{2i+1}$ $(n = 0, 1, 2...)$. Phân tích phân số (2) thành các phân số đối giản, ta được

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_{2i} = -\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{8i-1} - \frac{1}{8i-3} - \frac{1}{8i-5} + \frac{1}{8i-7}\right) =$$

$$= \frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{4n}\frac{(-1)^m}{2m-1}\sin\left((2m-1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_{2i+1} = \frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{4n}\frac{(-1)^m}{2m+3}\sin\left((2m+3)\frac{\pi}{4}\right).$$

Như vậy, cuối cùng ta nhận được

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_0 + u_n)\cos 8nx + \sum_{n=0}^{\infty}(a_1 + v_n)\cos 4(2n+1)x,$$

$$-\infty < x < +\infty;\ \sec x = f^*(x), \text{ nếu } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

241. Khai triển hàm $f(x) = x^2$ thành chuỗi Fuariê: a) theo côsin của các cung bội; b) theo sin của các cung bội; c) trong khoảng $(0, 2\pi)$. Sử dụng các khai triển này tính tổng các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Giải. Trong trường hợp a) hàm $f(x)$ do giả thiết chỉ cần xét trên đoạn $[-\pi, \pi]$, ta thác triển tuần hoàn (với chu kỳ 2π) trên toàn trục số. Khi đó ta nhận được hàm $f^*(x)$ liên tục và trơn từng khúc, trùng với hàm $f(x)$ khi $|x| \leqslant \pi$ và khai triển được thành chuỗi Fuariê chỉ theo côsin. Đối với các hệ số a_n, b_n ta có:

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Vì thế $f^*(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$, với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \text{ chỉ với } |x| \leqslant \pi.$$

Để có khai triển trong trường hợp b) của hàm x^2, xét trên khoảng $(0, \pi)$, ta thác triển lẻ trên nửa đoạn $(-\pi, 0)$, sau đó thác triển tuần hoàn (với chu kỳ 2π) hàm vừa xây dựng trên toàn trục số. Kết quả ta được hàm

$$f^*(x) = \begin{cases} |x - 2k\pi|(x - 2k\pi), & \text{nếu } |x - 2k\pi| < \pi, \\ 0, & \text{nếu } x = (2l+1)\pi, \end{cases}$$

$(k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ xác định khắp nơi trên toàn trục số và thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý mục 2.

Tính các hệ số:

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)$$

ta có thể viết

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nx \quad (|x| < \infty)$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nx \quad (0 \leqslant x < \pi),$$

Cuối cùng trong trường hợp c) theo hàm $f(x) = x^2$ $(0 < x < 2\pi)$ ta xây dựng hàm $f^*(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, trùng với hàm $f(x) = x^2$ chỉ trên khoảng $(0, 2\pi)$ và tại các điểm gián đoạn $x = 2k\pi$ (k nguyên) bằng $2\pi^2$. Khi đó, đối với các hệ số a_n và b_n của hàm $f^*(x)$, ta dễ dàng nhận được:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) \cos nx dx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Do đó

$$f^*(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (|x| < \infty),$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Trong trường hợp thứ nhất đặt $x = \pi$ và $x=0$ ta được các kết quả tương ứng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Cộng từng từ hai chuỗi hội tụ này ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

242. Khai triển thành chuỗi lũy thừa hàm

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1\,; \\ 1, & \text{nếu } 1 < x < 2\,; \\ 3 - x, & \text{nếu } 2 \leqslant x \leqslant 3\,. \end{cases}$$

Giải. Đối với các hệ số Fuariê của hàm $f^*(x)$ với chu kỳ $T = 3$, trùng với hàm $f(x)$ trên đoạn $[0, 3]$, ta dễ dàng tìm được:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f^*(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f^*(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x dx + \frac{2}{3}\int_1^2 dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (3 - x)dx = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f^*(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f^*(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx = \frac{3}{\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right)\ (n = 1, 2, \ldots);$$

$b_n = 0$ (do tính chẵn của hàm $f^*(x)$).

Như vậy

$$f^*(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\quad (\,|\,x\,| < \infty),$$

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\quad (0 \leqslant x \leqslant 3).$$

Sử dụng các công thức $\cos x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ trong đó $z = e^{ix}$ và $\overline{z} = e^{-ix}$, khai triển thành chuỗi Fuariê các hàm sau :

243. $\cos^{2m} x$ (m nguyên dương).

Giải. Dùng các công thức đã chỉ và công thức nhị thức Niutơn ta có thể viết :

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{4^m}(z + \overline{z})^{2m} = \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^{k} z^{2(m-k)} =$$

$$= \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^{k}(\cos 2(m-k)x + i\sin 2(m-k)x) =$$

$$= \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)x = \frac{C_{2m}^{m}}{4^m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^{m-k}\cos 2kx.$$

Ở đây ta đã sử dụng đồng nhất thức $C_{2m}^{k} = C_{2m}^{2m-k}$ và cũng sử dụng tính chẵn của hàm $\cos 2kx$ và tính lẻ của hàm $\sin 2(m-k)x$.

244. $\frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

Giải. Áp dụng các công thức đã nêu ra trong bài trước và phân tích phân thức thành các phân thức tối giản, ta nhận được :

$$\frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2} = \frac{1}{2i(1 - qz)} - \frac{1}{2i(1 - q\overline{z})}.$$

Bởi vì $|qz| = |q\overline{z}| = |q| < 1$, nên có các khai triển thành chuỗi lũy thừa của các hàm $(1 - qz)^{-1}$ và $(1 - q\overline{z})^{-1}$ tương ứng theo các lũy thừa qz và $q\overline{z}$. Ta có :

$$\frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} q^n(z^n - \overline{z}^n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin nx,$$

đó là điều cần thực hiện.

245. $\ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ $(|q| < 1)$.

Giải. Đạo hàm hàm đã cho theo x và sử dụng khai triển trước ta nhận được :

$$(\ln(1 - 2q\cos x + q^2))'_x = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin nx,$$

từ đó ta có

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + C.$$

Đặt $x = \pi$ ta được :

$$\ln(1 + q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (-1)^{n+1} + C.$$

Từ đó theo công thức V, § 5, suy ra rằng $C = 0$. Như vậy, cuối cùng ta có

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx.$$

246. Khai triển thành chuỗi Fuariê hàm tuần hoàn không bị chặn $f(x) = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

Giải. Giả sử $0 < \varepsilon \leqslant x - 2k\pi \leqslant 2\pi - \varepsilon$ trong đó $\varepsilon > 0$ và k nguyên. Khi đó chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{1}$$

trong đó $z = e^{ix}$, hội tụ với mọi x đã được chỉ ra.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \mathrm{Re}\left(\ln\frac{1 - z}{2}\right) \quad (\ln 1 = 0). \tag{2}$$

Thật vậy, dùng đẳng thức đã biết

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \tag{3}$$

và biểu diễn $\omega = |\omega|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó ω là một số phức nào đó, φ là argumen của nó, $\mathrm{Re}\ln\omega = \ln|\omega|$, ta nhận được $\left(\text{đặt } \omega = \frac{1-z}{2}\right)$:

$$\mathrm{Re}\left(\ln\frac{1-z}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \tag{4}$$

So sánh (3) và (4) ta nhận được (2), đó là điều cần chứng minh.

Như vậy, sử dụng công thức (2) và khai triển hàm $-\ln(1-z)$ thành chuỗi (1) ta có

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Vì số ε có thể chọn nhỏ tùy ý, nên từ đó suy ra rằng khai triển vừa nhận được đúng với mọi $x \neq 2k\pi$.

247. Khai triển thành chuỗi Fuariê hàm

$$f(x) = \int_0^x \ln\sqrt{\left|\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

Giải. Đạo hàm của hàm $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right),$$

là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và trên khoảng $0 < |x| < \pi$ có thể biểu diễn bằng chuỗi Fuariê. Thật vậy dựa vào bài toán trước ta có

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi$$

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}, \quad x \neq (2k+1)\pi.$$

Vì vậy nếu $x \neq k\pi$ (k nguyên) thì

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cos nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

Tích phân từng từ chuỗi vừa nhận được, ta có:

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

248. Khai triển thành chuỗi Fuariê các hàm $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 4a)$, biểu diễn chu tuyến hình vuông dưới dạng tham số: $0 < x < a$, $0 < y < a$, trong đó s là độ dài của cung được tính từ điểm 0 $(0, 0)$ theo chiều ngược kim đồng hồ.

Giải. Xét các hàm sau đây:

$$x(\ ) = \begin{cases} s, & \text{nếu } 0 \leqslant s < a; \\ a, & \text{nếu } a \leqslant s < 2a; \\ 3a - s & \text{nếu } 2a \leqslant s < 3a; \\ 0, & \text{nếu } 3a \leqslant s < 4a; \end{cases} \qquad y(s) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } 0 \leqslant s < a; \\ s - a, & \text{nếu } a \leqslant s < 2a; \\ a, & \text{nếu } 2a \leqslant s < 3a; \\ 4a - s, & \text{nếu } 3a \leqslant s < 4a. \end{cases}$$

Tiếp đó các giá trị của các hàm $x(s)$ và $y(s)$ được lặp lại tuần hoàn.

Hiển nhiên các hàm đã cho là liên tục, khả vi từng khúc và tuần hoàn với chu kỳ $4a$. Do đó chúng có thể khai triển thành các chuỗi Fuariê hội tụ về chính nó.

Các hệ số Fuariê của hàm $x(s)$ như sau:

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s)ds = a$$

$$a_n = \frac{1}{2a}\left(\int_0^a s\cos\frac{n\pi s}{2a}\,ds + a\int_a^{2a} \cos\frac{n\pi s}{2a}\,ds + \int_{2a}^{3a} (3a - s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\,ds \right) =$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right),$$

$$b_n = \frac{1}{2a}\left(\int_0^a s\sin\frac{n\pi s}{2a}\,ds + a\int_a^{2a} \sin\frac{n\pi s}{2a}\,ds + \int_{2a}^{3a} (3a - s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\,ds \right) =$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Như vậy ta có

$$x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(\cos\frac{(2n-1)\pi s}{2a} + (-1)^n \sin\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right)$$

Tương tự ta tìm được

$$y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left(\cos\frac{(2n-1)\pi s}{2a} - (-1)^n \sin\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right).$$

249. Cần thác triển hàm liên tục $f(x)$ cho trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ra khoảng $(-\pi, \pi)$ như thế nào, để khai triển thành chuỗi Fuariê của nó có dạng :

$$f(x) = \sum a_n \cos(2n-1)x, \ (-\pi < x < \pi)?$$

Giải. Bởi vì $b_n = 0$ nên hàm $f(x)$ chẵn, tức là thác triển của nó trong khoảng $(-\pi, 0)$ là thác triển chẵn. Tiếp theo, chú ý rằng trong khai triển đã cho vắng mặt các số hạng $a_{2n}\cos 2nx$, ta kết luận rằng

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx dx = 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Tách tích phân này thành hai tích phân

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx dx$$

và đổi biến : trong tích phân thứ nhất $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, trong tích phân thứ hai $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, ta được :

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx dx = \frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\cos ny dy = 0$$

hay

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx dx = \frac{(-1)^n}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)\right)\cos ny dy = 0$$

Từ đó suy ra rằng

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)\right)\cos ny dy = 0.$$

tức là hàm $\Phi(y) = f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)$ là hàm lẻ. Tuy vậy hàm $\Phi(y)$ hiển nhiên là hàm chẵn, vì vậy $\Phi(y) = 0$.

Như vậy, phải có $f\left(\frac{\pi + y}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi - y}{2}\right)$ $(-\pi < y < \pi)$ hay, nếu trở về biến cũ x theo công thức $x = \frac{\pi - y}{2}$, $f(\pi - x) = -f(x)$. Do đó đồ thị của hàm được xây dựng là đối xứng đối với đường thẳng $x = 0$, còn các điểm $x = \pm\frac{\pi}{2}$ phải là tâm đối xứng của nó trên các đoạn $(0, \pi)$ và $(-\pi, 0)$ tương ứng.

250. Khai triển hàm $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: a) theo côsin của các cung lẻ; b) theo sin của các cung lẻ.

Giải. a) Ta xét hàm $f^*(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, mà trong khoảng $(-\pi, \pi)$ được xác định như sau:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), \text{ nếu } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ f(-x), \text{ nếu } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0; \\ (x - \pi)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \text{ nếu } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi; \\ (x + \pi)\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \text{ nếu } -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Hiển nhiên hàm vừa được xây dựng liên tục tại mọi điểm x của trục số và có đạo hàm liên tục từng khúc. Ngoài ra, nó là hàm chẵn và các hệ số Fuariê $a_{2n} (n = 0, 1, 2, ...)$ của nó bằng không, vì

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^*(x)\cos 2nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos 2nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \pi)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos 2nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\cos 2ny dy$$

$$+ \frac{2}{\pi}(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) y\cos 2ny dy = 0$$

(trong các tích phân thứ 3 và thứ 4 ta đã đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - y$ và $x = \frac{\pi}{2} + y$ tương ứng).

Như vậy hàm $f^*(x)$, trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ trùng với hàm $f(x)$, có thể khai triển thành chuỗi Fuariê chỉ theo các côsin của những cung lẻ. Ta có:

$$b_n = 0,\ a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\cos(2n-1)\,xdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(2n-1)xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-\pi)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(2n-1)\,xdx\right) =$$

$$= -\frac{2}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right)(n = 1, 2, \ldots).$$

Khai triển của các hàm $f^*(x)$ và $f(x)$ có dạng:

$$f^*(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x\ (\,|\,x\,| < \infty),$$

$$f(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Vì trong khai triển Fuariê phải vắng mặt côsin nên hàm $f^*(x)$ trùng với hàm $f(x)$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm lẻ.

Ngoài ra, theo giả thiết cần phải có

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\sin 2nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(x)\sin 2nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^*(x)\sin 2nx dx = 0.$$

Đổi biến trong tích phân thứ hai $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$ và trong tích phân thứ ba $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, ta được:

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin ny dy = 0$$

hay

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin ny dy = 0.$$

Từ hai đẳng thức cuối cùng này ta thấy rằng

$$b_{2n} = \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin ny dy = 0$$

từ đó suy ra rằng hàm $f^*\left(\frac{\pi - y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)$ là chẵn. Nhưng vì nó cũng là hàm lẻ (điều đó hiển nhiên) nên $f^*\left(\frac{\pi - y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi + y}{2}\right) = 0$ hay, trở về biến cũ x, ta có thể viết: $f^*(x) = f^*(\pi - x)$. Ý nghĩa hình học của đẳng thức này là đồ thị của hàm $f^*(x)$ trong khoảng $(0, \pi)$ là đối xứng đối với đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$.

Như vậy, để dựng đồ thị của hàm $f^*(x)$ với các tính chất đã nêu ra cần phải: thứ nhất, đồ thị của hàm $f(x)$ ánh xạ mặt gương đối với đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; thứ hai, đồ thị của hàm $f^*(x)$ nhận được trong khoảng $(0, \pi)$ là ánh xạ lẻ đối với điểm $x = 0$ (là tâm đối xứng của toàn bộ đồ thị) trong khoảng $(-\pi, 0)$. Khi đó đối với các hệ số Fuariê ta được :

$$a_o = a_n = 0,\ b_{2n} = 0,$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^*(x) \sin(2n-1)\, x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(2n-1)\, x dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)(x-\pi) \sin(2n-1) x dx =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} \left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right) \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Do đó khai triển của hàm $f^*(x)$ có dạng

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right) \sin(2n-1)\, x.$$

251. Hàm $f(x)$ phản tuần hoàn với chu kỳ π, tức là $f(x + \pi) = -f(x)$. Chuỗi Fuariê của hàm này trong khoảng $(-\pi, \pi)$ có gì đặc biệt ?

Giải. Giả thiết rằng hàm đã cho khai triển thành chuỗi Fuarié, xét đến tính phản tuần hoàn của nó, ta được

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = -a_o,$$

từ đó suy ra rằng $a_o = 0$.

Tiếp theo, ta thấy :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi) \cos nx dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = (-1)^{n+1} a_n$$

(ở đây ta sử dụng đẳng thức $f(x + 2\pi) = f(x)$). Do đó $a_{2n} = 0$. Tương tự ta xác định được $b_{2n} = 0\ (n = 1, 2, \ldots)$.

252. Biết các hệ số Fuariê a_n, b_n $(n = 0, 1, 2,...)$ của hàm khả tích $f(x)$ có chu kỳ 2π, hãy tính các hệ số Fuariê $\overline{a_n}$, $\overline{b_n}$ $(n = 0, 1, 2,..)$ của hàm «chệch» $f(x+h)$ $(h = \text{const})$.

Giải. Chú ý tính khả tích và tính tuần hoàn chu kỳ 2π của hàm $f(x+h)$ ta có:

$$\overline{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)(\cos nt\cos nh + \sin nt\sin nh)\ t =$$

$$= a_n\cos nh + b_n\sin nh,$$

$$\overline{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)(\sin nt\cos nh - \cos nt\sin nh)\ dt =$$

$$= b_n\cos nh - a_n\sin nh$$

$(n = 1, 2,...;\ \overline{a_0} = a_0)$.

253. Biết các hệ số Fuariê a_n, b_n $(n = 0, 1, 2,...)$ của hàm khả tích $f(x)$ với chu kỳ 2π, hãy tính các hệ số Fuariê A_n, B_n $(n = 0, 1, 2,...)$ của hàm Xtêklôp.

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

Giải. Chuỗi Fuariê

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \sim f(x)$$

của hàm khả tích $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, theo mục 3, có thể tích phân từng từ. Vì vậy, tích phân từng từ chuỗi đó theo x từ $x-h$ đến $x+h$ ta nhận được

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{nh}\sin nh\cos nx + \frac{b_n}{nh}\sin nh\sin nx\right) = f_h(x).$$

Từ đó ta được $A_0 = a_0$, $A_n = \dfrac{a_n}{nh}\sin nh$, $B_n = \dfrac{b_n}{nh}\sin nh$.

Khai triển thành chuỗi Fuariê theo đa thức Trêbưsep:

254. $f(x) = x^3 \quad x \in (-1,\ 1)$.

Giải. Xuất phát từ biểu diễn tổng quát của chuỗi hàm Fuariê:

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \tag{1}$$

trong đó a_n là các hệ số Fuariê, cần phải xác định. Để tính các hệ số đó ta sử dụng tính trực giao của đa thức Trêbưsep trong khoảng $(-1,\ 1)$ với trọng lượng $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Nhân cả hai vế đẳng thức (1) với hàm trọng lượng và tích phân theo $x \in (-1,\ 1)$, do các tính chất đã nêu ra và do tính lẻ của hàm x^3 ta nhận được $a_o = 0$. Tiếp đó nhân cả hai vế của đẳng thức (1) với $\dfrac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $(m = 1, 2, ...)$ và tích phân theo $x \in (-1, 1)$ ta tìm được:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^3 T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi\, a_m}{2^{2m-1}}.$$

Để tính tích phân ta sử dụng biểu thức tường minh (hiện) của đa thức Trêbưsep và đổi biến $\arccos x = t$. Khi đó ta được:

$$a_m = \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos(mt)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq 1,\ m \neq 3; \\ \dfrac{3}{4}, & \text{nếu } m = 1; \\ 1, & \text{nếu } m = 3. \end{cases}$$

Như vậy khi $x \in (-1,\ 1)$ $\quad x^3 = \dfrac{3}{4} T_1(x) + T_3(x)$.

255. $f(x) = |x|$, $x \in (-1,\ 1)$.

Giải. Như trong bài trên, ta biểu diễn hàm đã cho dưới dạng:

$$|x| = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x).$$

Nhân liên tiếp cả hai vế đẳng thức này với $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ và tích phân theo $x \in (-1, 1)$, nhân với $\dfrac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ và tích phân theo $x \in (-1,\ 1)$ ta nhận được (sử dụng các tính chất của đa thức trực giao):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{|x|\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$a_m = \frac{2^m}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{|x|\cos(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2^m}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos t|\cos(mt)\,dt =$$

$$= \frac{2^m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos(mt)\,dt - \frac{2^m}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\cos(mt)\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & m = 1 \\ \dfrac{2^{m+1}}{\pi}\;\dfrac{\cos\dfrac{m\pi}{2}}{1-m^2}, & m \neq 1. \end{cases}$$

Như vậy, khi $|x| < 1$ ta có thể viết:

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k(-1)^{k+1}}{4k^2-1}T_{2k}(x).$$

Khai triển thành chuỗi Fuariê theo đa thức Logiăngđrơ các hàm sau:

256. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } -1 < x < 0; \\ 1, \text{ nếu } \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

Giải. Ta có $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$. Vì thế

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_k(x)\,dx = \frac{2k+1}{2}\int_0^1 P_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{2k+1}{2}\int_0^1\frac{1}{2^k k!}\;\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx =$$

$$= \frac{(2k+1)}{2^{k+1}\,k!}\;\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k+1}}\Bigg|_0^1$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_0(x)\, dx = \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Vấn đề còn lại là tính $\left.\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}}\right|_0^1$. Hiển nhiên với bất kỳ $k \geqslant 1$, tại điểm $x = 1$, biểu thức này bằng 0. Để tính giá trị của nó tại điểm $x = 0$ ta dùng công thức nhị thức Niutơn:

$$((x^2-1)^k)^{k-1} = \left(\sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^p x^{2k-2p}\right)^{(k-1)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p \leqslant \frac{k+1}{2}} C_k^p (-1)^p (2k-2p)(2k-2p-1) \ldots (-2p+k+2)\, x^{k-2p+1} \qquad (1)$$

Từ hệ thức này ta suy ra rằng nếu k là số chẵn thì khi $x = 0$ tổng (1) bằng 0: nếu k là số lẻ $k = 2m + 1$ thì tại điểm $x = 0$ tổng (1) bằng $C_{2m+1}^{m+1} (-1)^{m+1} 2m(2m-1) \ldots 3 \cdot 2$.

Như vậy

$$a_{2m} = 0, \; a_{2m+1} = \frac{(4m+3)(-1)^m (2m)!}{2^{2m+2} m! \, (m+1)!} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Do đó

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+3)(2m)!}{2^{2m+2} m! \, (m+1)!} P_{2m+1}(x)$$

257. $f(x) = |x|$ khi $|x| < 1$.

Giải. Như trong các bài trên ta viết

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \text{ trong đó } a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} |x| P_k(x)\, dx.$$

Khi $k = 2m + 1$, ta có $a_{2m+1} = 0$, vì trong trường hợp này hàm dưới dấu tích phân lẻ. Khi $k = 2m$, hàm dưới dấu tích phân chẵn, vì vậy

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_{2m} = \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} \int_0^1 x \frac{d^{2m}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m}}\, dx =$$

$$= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} \left(x \frac{d^{2m-1}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-1}} \Big|_0^1 - \right.$$

$$\left. - \frac{d^{2m-2}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-2}} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} \left((x^2-1)^{2m}\right)^{(2m-2)} \Big|_{x=0} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Tương tự như trong bài 256 ta có thể viết

$$\left((x^2-1)^{2m}\right)^{(2m-2)} \Big|_{x=0} = (-1)^{m+1} C_{2m}^{m+1} (2m-2)!$$

Như vậy, cuối cùng ta có

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(4m+1)(2m-2)!}{2^{2m}(m-1)!(m+1)!} P_{2m}(x).$$

Khai triển thành chuỗi Fuariê theo các đa thức Lage $L_n(x)$ khi $x > 0$ của các hàm sau :

258. $f(x) = e^{-ax}$.

Giải. Biểu diễn hàm $f(x)$ dưới dạng $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$ và sử dụng tính trực giao của đa thức Lage trên nửa trục $x > 0$ với trọng lượng e^{-x}, ta nhận được $(n \geqslant 1)$:

$$a_n = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+a)} L_n(x)\, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(e^{-ax} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} \Big|_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}}\, dx \right).$$

Tiếp tục tích phân từng phần ta được :

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1+a)x}\, dx.$$

Đối với tích phân cuối này ta cũng áp dụng phương pháp tích phân từng phần, sau n bước ta nhận được

$$a_n = \frac{a^n}{(1+a)^n} \int_0^{+\infty} e^{-(1+a)x}\, dx = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Chú ý thêm rằng $a_0 = \dfrac{1}{1+a}$, cuối cùng ta có :

$$f(x) = \frac{1}{1+a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)^n} L_n(x).$$

259. $f(x) = x^n$ $(n \geqslant 1)$.

Giải. Ta có :

$$a_0 = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

$$a_k = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} x^n \frac{d^k(x^k e^{-x})}{dx^k}\, dx =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(x^n \frac{d^{k-1}(x^k e^{-x})}{dx^{k-1}} \Bigg|_0^{+\infty} - n \int_0^{+\infty} x^{n-1} \frac{d^{k-1}(x^k e^{-x})}{dx^{k-1}}\, dx \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!} n(n-1) \ldots (n-k+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{n!}{k!} (-1)^k n(n-1) \ldots (n-k+1) \text{ nếu } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Nếu như $k > n$, thì $a_k = 0$. Như vậy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n!)^2}{k!\,(n-k)!} L_k(x).$$

Khai triển thành chuỗi lũy thừa theo đa thức Trêbưsep—Hecmit của các hàm sau :

260. $f(x) = -1$ nếu $x < 0$ và $f(x) = 1$ nếu $x > 0$.

Giải. Ta viết khai triển cần tìm dưới dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x),$$

trong đó

$$a_k = \frac{k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) H_k(x)\, dx =$$

$$= \frac{-k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)\, dx + \frac{k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)\, dx,$$

$a_0 = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Sử dụng biểu thức tường minh $H_k(x)$ và thay biến tích phân x bằng $-x$ a nhận được:

$$a_k = \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{d^k\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^k}\, dx =$$

$$= \frac{-(1 + (-1)^{k+1})}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Bigg|_{x=0}.$$

Để tính giá trị của biểu thức $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Big|_{x=0}$ ta xét hàm $u = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Đạo hàm hàm này, ta thấy rằng hàm này thỏa mãn phương trình vi phân $u' + xu = 0$. Đối với phương trình này áp dụng công thức Lepnit, ta được

$$u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{(k)} u^{(n-1-k)} = 0.$$

Ở đây cho $x = 0$ ta có công thức truy hồi $u^{(n)}(0) = -(n-1)\, u^{(n-2)}(0)$ $(n = 2, 3, \dots)$. Vì $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, nên từ đó dễ dàng có được $u^{(2p)}(0) =$ $= (-1)^p (2p-1)!!$ $(p = 1, 2, \dots)$, $u^{(2p+1)}(0) = 0$.

Như vậy nếu $k=2p+1$ thì $a_{2p+1}=(-1)^{p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2p-1)!!\ (p=1, 2, \ldots)$,

$$a_1=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{; nếu } k=2p \text{ thì } a_{2p}=0.$$

Do đó cuối cùng ta có thể viết

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}(2p)!}{2^{p-1}\sqrt{2\pi}\,p!}\,H_{2p+1}(x).$$

261. $f(x)=|x|$.

Giải. Như trong các bài trên ta có :

$$a_k=\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k)}dx=\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-2)}\Bigg|_{x=0}$$

$$k=2, 3, \ldots;$$

$$a_{2p-1}=0,\ a_{2p}=\frac{(-1)^{p-1}(2p-2)!}{2^{p-2}(p-1)!\sqrt{2\pi}}\ (p=1, 2, \ldots),$$

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,x^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Vì vậy khai triển được biểu diễn dưới dạng

$$|x|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}(2p-2)!}{2^{p-2}(p-1)!\sqrt{2\pi}}H_{2p}(x).$$

262. $f(x)=e^{-ax}$.

Giải. Ta tính các hệ số của khai triển

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k)}dx\ (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Tích phân từng phần ta nhận được

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-1)} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \right.$$

$$\left. + a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-1)} dx \right)$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

hay $a_k = aa_{k-1}$. Trong công thức truy hồi đặt $k = 1, 2, \ldots$ và chú ý rằng

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+a)^2 + \frac{a^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{\frac{a^2}{2}}$$

ta nhận được $a_k = e^{\frac{a^2}{2}} a^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

Như vậy, cuối cùng ta có

$$e^{-ax} = e^{\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k H_k(x)$$

§ 7. PHÉP LẤY TỔNG CỦA CHUỖI

1. Phép lấy tổng trực tiếp. Giả sử đòi hỏi tính tổng của chuỗi hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (1)$$

Ta biểu diễn u_n dưới dạng $u_n = v_{n+1} - v_n$, trong đó $v_{n+1} = S_n + v_1$. S_n là dãy tổng riêng của chuỗi đã cho. Khi đó nếu $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_\infty$, thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = v_\infty - v_1.$$

Trong trường hợp số hạng tổng quát của chuỗi có dạng

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}},$$

trong đó $a_{n+k} = a_n + kd$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, $d = \text{const}$, thì

$$v_n = -\frac{1}{md} \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}}.$$

2. Phương pháp lấy tổng các chuỗi dựa trên định lý Aben. Giả sử chuỗi (1) hội tụ. Khi đó tổng của nó có thể được tìm theo công thức:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

3. Phép lấy tổng của chuỗi lượng giác. Nếu tổng của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \; z = e^{ix}$$

đã biết và bằng $C(x) + iS(x)$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos nx = C(x), \; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx = S(x).$$

Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \; (\ln 1 = 0)$$

hội tụ khi $|z| \leqslant 1$ trừ điểm $z = 1$, thường hữu ích.

Tìm tổng của các chuỗi sau:

263. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots$

Giải. Dễ thấy rằng số hạng tổng quát u_n của chuỗi có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, trong đó các số n, $n+1$, $n+2$ lập thành cấp số cộng với công bội là 1. Vì vậy theo mục 1 ta nhận được:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \to \infty} v_n - v_1$$

trong đó $v_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$ $(m = 2,\ a_n = n)$. Nhưng vì $v_1 = -\frac{1}{4}$ còn $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ nên $S = \frac{1}{4}$.

264. $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \ldots$

Giải. Số hạng tổng quát của chuỗi là $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$. Do đó theo dấu hiệu so sánh, chuỗi hội tụ tuyệt đối, bởi vì $|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Xét chuỗi lũy thừa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leqslant 1$ và cũng như một chuỗi lũy thừa bất kỳ, trong khoảng hội tụ có đạo hàm

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\frac{1}{1-x}.$$

Tích phân cả hai vế đẳng thức vừa nhận được, ta có:

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x + C.$$

Vì $f(0) = 0$, nên từ đó suy ra rằng $C = 0$. Như vậy

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

Như ta thấy, ở đây hoàn toàn áp dụng phương pháp lấy tổng của chuỗi của Aben (xem mục 2). Vì thế ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to-1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to-1+0} ((1-x)\ln(1-x) + x) =$$
$$= 2\ln 2 - 1.$$

265. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Giải. Sau khi biểu diễn chuỗi hội tụ đã cho dưới dạng hiệu của hai chuỗi hội tụ bằng phương pháp hệ số bất định:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ta áp dụng phương pháp lấy tổng trực tiếp. Đối với mỗi chuỗi ta có:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\lim_{N\to\infty}\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\right)=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

Do đó $S=\dfrac{1}{4}$.

266. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$ (*m* là số tự nhiên).

Giải. Biến đổi tổng riêng S_n của chuỗi về dạng

$$S_n=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)=$$

$$\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\right)=\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right)$$

ta nhận được: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{m}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{m}\right)$.

267. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\dots$

Giải. Đưa chuỗi đã cho về dạng

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\dots\right)=\frac{1}{2}S,$$

trong đó S là tổng của chuỗi đã xét trong bài 264, ta nhận được:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\dots=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

268. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

Giải. Biến đổi chuỗi về dạng

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

và dùng kết quả của bài 266, ta tìm được $S=\frac{3}{4}$.

269. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

Giải. Phân tích số hạng tổng quát của chuỗi thành các phân số đơn giản, ta có:

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n(n+1)}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{(n+1)^2}$$

trong đó $A=4$, $B=-1$, $C=-3$. Bởi vì

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-1,$$

nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=7-\frac{2}{3}\pi^2$.

270. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

Giải. Biểu diễn tổng riêng S_n của chuỗi dưới dạng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k}\right)\right) =$$

$$= 2\left(1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}\right)$$

và sử dụng bài 86, chương I, tập I, ta tìm được $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2(1 - \ln 2)$.

271. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$.

Giải. Đạo hàm từng từ chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^{n+1}}{n!} = 2xe^{2x}$, ta nhận được:

$$(2xe^{2x})' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}x^n}{n!},$$

từ đó đặt $x = 1$, ta tìm được $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2$.

272. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

Giải. Ta phân tích số hạng tổng quát của chuỗi thành các phân số đơn giản

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = -\frac{3}{4n} + \frac{3}{4(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{4(n+2)^2} = -\frac{3}{2n(n+2)} + \frac{1}{4n^2} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+2)^2}.$$

Lấy tổng của các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4},$$

cuối cùng ta tìm được $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}$.

273. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

Giải. Chú ý rằng giá trị của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x) \; (\,|x| < \infty)$$

khi $x = 1$ trùng với chuỗi số đã cho, ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

274. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$.

Giải. Phân tích phân số $\frac{1}{n^2 + n - 2}$ thành các phân số đơn giản, ta có thể viết :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2 + n - 2} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{3x^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{3x^3}\left(-\ln(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \; (0 < |x| < 1).$$

Từ đó áp dụng định lý Aben ta tìm được :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+n-2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}.$$

275. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$

Giải. Ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \sum \frac{n^2}{2^n n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} =$$

$$= e^{\frac{x}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!} x^n = e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} y^{(n-1)} \left(y = \frac{x}{2}\right). \qquad (1)$$

Tích phân từng từ chuỗi sau cùng, ta tìm được :

$$\int_0^y \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{n-1}}{n!}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny^n}{n!} = y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = ye^y.$$

Từ đó bằng cách đạo hàm, ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{n-1}}{n!} = e^y(y+1). \qquad (2)$$

Cuối cùng thay (2) vào (1), ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right) e^{\frac{x}{2}} \quad (|x| < \infty)$$

276. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}.$

Giải. Biểu diễn chuỗi đã cho dưới dạng tổng của hai chuỗi hội tụ

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty).$$

và chú ý rằng tổng của chuỗi thứ hai bằng $\cos x$, ta tính tổng của chuỗi thứ nhất. Ta có

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n}}{(2n-1)!} = x\varphi(x),$$

trong đó $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Tích phân từng từ chuỗi này, ta được

$$\int_0^x \varphi(x)\, dx = -\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\frac{x}{2} \sin x.$$

từ đó $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x.$

Do đó $f(x) = -\frac{x}{2}(\sin x + x\cos x)$ còn

$$S(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}\sin x \quad (|x| < \infty)$$

277. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

Giải. Giả sử $x > 0$. Đặt $x = y^2$, ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{2n}}{(2n+1)!} = y S_1(y)$$

trong đó $S_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{2n-1}}{(2n+1)!}$. Tích phân từng từ chuỗi này ta nhận được

$$\int_0^y S_1(y)\, dy = \frac{y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n y^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{y}{2} S_2(y), \tag{1}$$

trong đó $S_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n y^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

Tương tự ta tìm được

$$\int_0^y S_2(y)\,dy = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2y}(\operatorname{sh} y - y) \qquad (2)$$

(ta coi vế phải của đẳng thức này bằng 0 khi $y = 0$).

Đạo hàm cả hai vế đẳng thức (2) theo y ta được hàm $S_2(y)$. Hoàn toàn như vậy ta tìm được hàm $S_1(y)$ từ phương trình (1). Cuối cùng ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{4}\left((x+1)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right)(x > 0)$$

(chú ý rằng tại điểm $x = 0$ vế phải của công thức này, dựa vào định lý Aben (xem mục 2), bằng giới hạn của nó khi $x \to +0$).

Khi $x \leqslant 0$, ta tiến hành các tính toán tương tự. Kết quả ta đi đến đáp số:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!} = \begin{cases}\frac{1}{4}\left((x+1)\frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\cos\sqrt{-x}\right), & x < 0\\ 0, & x = 0\end{cases}$$

Bằng cách đạo hàm từng từ hãy tìm tổng các chuỗi sau:

278. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Giải. Đạo hàm chuỗi đã cho hai lần (trong khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa có thể đạo hàm từng từ của nó một số lần tùy ý), ta được:

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}\ (|x| < 1).$$

Từ đó tích phân liên tiếp theo x hai lần ta nhận được

$$f'(x) = 2\operatorname{arctg}x + C_1,\ f(x) = 2x\operatorname{arctg}x - \ln(1+x^2) + C_1x + C_2.$$

Vì $f(0) = f'(0) = 0$ nên $C_1 = C_2 = 0$. Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x\operatorname{arctg}x - \ln(1+x^2).$$

Vì chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ tại hai đầu mút của khoảng hội tụ ($x = \pm 1$), nên theo định lý Aben và tính liên tục của vế phải, ta có thể khẳng định rằng hệ thức cuối cùng đúng với $|x| \leqslant 1$.

279. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)(\ldots(a+(n-1)d)}{d \,.\, 2d \ldots nd} x^n \, (d > 0).$$

Giải. Trước hết ta lưu ý rằng nếu $a = -Nd$, trong đó $N = 0, 1, 2, \ldots$ thì chuỗi đã cho thực tế là tổng hữu hạn. Do đó trong trường hợp này chuỗi hội tụ với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$ và có dạng

$$-Nx + \frac{N(N-1)}{2} x^2 + \ldots + (-1)^N x^N = (1-x)^N - 1.$$

Tiếp theo, nếu $a \neq -Nd$ thì theo công thức I, § 5 dễ dàng tìm được khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa này: $x \in (-1, 1)$. Vì thế khi $|x| < 1$ chuỗi mà tổng của nó được ký hiệu là $S(x)$, có thể đạo hàm từng từ. Ta có

$$S'(x) = \frac{a}{d} + \frac{a}{d}\,\frac{a+d}{2d}\, 2x + \frac{a(a+d)(a+2d)}{d \,.\, 2d \,.\, 3d} 3x^2 + \ldots$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức này với $(1 - x)$ ta nhận được phương trình vi phân đối với tổng cần tìm $S(x)$:

$$(1-x)\, S'(x) = \frac{a}{d} + \frac{a}{d} S(x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đó có dạng

$$S(x) = -1 + C\left(|1-x|\right)^{-\frac{a}{d}} \quad (C = \text{const}).$$

Vì khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa được xác định bởi bất đẳng thức $|x| < 1$, nên $|1 - x| = 1 - x$. Ngoài ra $S(0) = 0$, vì vậy $C = 1$. Do đó, ta có

$$S(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1 \; (|x| < 1).$$

Ta còn phải xét tính hội tụ của chuỗi tại các điểm mút của khoảng hội tụ.

Giả sử $x = -1$. Khi đó ta nhận được chuỗi số có dấu thay đổi, từ tỷ số

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{(d-a)!}{a}\,\frac{1}{n} + \frac{a(a-d)}{d(a+nd)n}$$

$$a_n = \frac{a(a+d)\ldots(a+(n-1)d)}{d.2d \ldots nd}$$

(xem bài 90) ta suy ra chuỗi hội tụ nếu $d > a$.

Giả sử $x = 1$. Khi đó ta nhận được chuỗi số có dấu không đổi, từ tỷ số đã viết và dấu hiệu Gaoxơ suy ra chuỗi hội tụ khi $a < 0$.

Như vậy, xuất phát từ định lý Aben ta có thể khẳng định rằng, tổng của chuỗi lũy thừa đã cho tại điểm $x = -1$ bằng $2^{\frac{a}{d}} - 1$, nếu $d > a$ và tại điểm $x = 1$ bằng -1 nếu $a < 0$.

Bằng cách tích phân từng từ hãy tính tổng các chuỗi:

280. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

Giải. Chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1$, bởi vì bán kính hội tụ của nó $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-2}} = 1$. Tích phân chuỗi lũy thừa này hai lần theo x (trong khoảng hội tụ $|x| < 1$), xem $x \neq 0$:

$$\int \left(\frac{1}{x} \int S(x)\,dx\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C_1 \ln|x| + C_2,$$

trong đó $S(x)$ là tổng của chuỗi, còn C_1 và C_2 là các hằng số tùy ý. Chú ý đẳng thức $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ ($|x| < 1$) từ hệ thức cuối cùng, đạo hàm theo x ta được

$$S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \; (|x| < 1).$$

Chú ý rằng sự hạn chế $x \neq 0$ ở đây có thể bỏ qua bởi vì tổng của chuỗi lũy thừa bằng 1 khi $x = 0$.

281. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Giải. Ký hiệu tổng của chuỗi này là $S(x)$ ($|x| < \infty$) và tích phân từng từ chuỗi đó ta nhận được:

$$\int S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} + C = xe^{x^2} + C.$$

Đạo hàm cả hai vế đẳng thức này theo x, ta được:

$$S(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} \ (|x| < \infty).$$

Dùng phương pháp Aben hãy tìm tổng của các chuỗi sau đây:

282. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$

Giải. Xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = S(x).$$

Dễ dàng thấy rằng nó hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1$. Tiếp đó, ta thấy tại điểm $x = 1$ chuỗi lũy thừa trùng với chuỗi số hội tụ đã cho (theo dấu hiệu Lepnit). Do đó theo định lý Aben ta có:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots = \lim_{x \to 1-0} S(x).$$

Còn phải tìm $S(x)$. Đạo hàm từng từ chuỗi này, ta nhận được

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \ (|x| < 1).$$

từ đó $S(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3} + C.$

Vì $S(0) = 0$ nên $C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Do đó

$$S(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Vì vậy cuối cùng ta được

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

283. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots$

Giải. Bởi vì khi $|x| < 1$ có khai triển (xem § 5, công thức IV)

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

và chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu Lepnit, nên theo định lý Aben, ta nhận được :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots=\lim_{x\to 1-0}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

284. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots$

Giải. Tính hội tụ của chuỗi này được chứng minh trong bài 197. Ở đó ta cũng nhận được khai triển

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=\arcsin x\,(\,|x|<1),$$

từ đó suy ra $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots=\frac{\pi}{2}.$

Tính tổng của các chuỗi lượng giác sau đây :

285. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

Giải. Ta xét chuỗi này như là phần ảo của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\quad(z=e^{ix};\ 0<|x|<\pi).$$

ở đây $\ln z$ được hiểu là nhánh mà $\ln 1=0$. Khi đó ta có

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\operatorname{Im}\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2} & \text{nếu } 0<x<\pi;\\[2mm] \dfrac{-\pi-x}{2} & \text{nếu } -\pi<x<0.\end{cases}$$

Vì hàm $S(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và $S(k\pi) = 0$ (k nguyên) nên dùng kết quả cuối cùng, ta có thể viết :

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\pi - x}{2}, & \text{nếu } 2k < x < 2(k+1)\pi ; \\ 0, & \text{nếu } x = 2k\pi. \end{cases}$$

286. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$.

Giải. Biểu diễn chuỗi đã cho dưới dạng tổng của ba chuỗi hội tụ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n} \sin nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{n} \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\alpha + x)}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - 2\alpha)}{n}$$

và dùng kết quả ở bài trước ta được :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n} \sin nx = \frac{1}{2} S(x) - \frac{1}{4} S(x + 2\alpha) - \frac{1}{4} S(x - 2\alpha).$$

Chẳng hạn, khi $x \in [0, 2\pi)$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n} \sin nx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x = 0 ; \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{nếu } 0 < x < 2\alpha ; \\ \dfrac{\pi}{8}, & \text{nếu } x = 2\alpha ; \\ 0, & \text{nếu } 2\alpha < x < 2\pi - 2\alpha ; \\ -\dfrac{\pi}{8}, & \text{nếu } x = 2\pi - 2\alpha ; \\ -\dfrac{\pi}{4}, & \text{nếu } 2\pi - 2\alpha < x < 2\pi. \end{cases}$$

Tiếp theo, do tính tuần hoàn chu kỳ 2π của tổng chuỗi này, nên các giá trị của nó được lặp lại.

287. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

Giải. Xem chuỗi này là phần thực của tổng của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1}, \quad (z = e^{ix}, \ -\pi < x \leqslant \pi),$$

ta có thể viết

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \mathrm{Re} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1}.$$

Với điều kiện $z \neq -1$, chuỗi sau cùng biểu diễn dưới dạng tổng của hai chuỗi hội tụ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z\ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z}\right).$$

Do đó

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(z\ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x\sin x\right) \quad (e^{ix} \neq -1).$$

Chú ý rằng sự hạn chế ở trên ($e^{ix} \neq -1$) ở đây có thể rút bỏ. Thật vậy nếu $e^{ix} = -1$, thì $\cos nx = (-1)^n$. Khi đó ta được chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ bằng $\frac{3}{4}$ (xem bài 268). Mặt khác nếu $\cos nx = (-1)^n$, thì $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x\sin x\right) = \frac{3}{4}$.

Như vậy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)\cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x\sin x\right)$$

với mọi $x \in [-\pi, \pi]$. Tiếp đó vì tổng của chuỗi tuần hoàn với chu kỳ 2π, nên các giá trị của nó được lặp lại.

288. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

Giải. Ta dễ dàng tìm được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{Re}\, e^z = \mathrm{Re}\, e^{\cos x + i \sin x} =$$

$$= e^{\cos x} \cos(\sin x) \qquad (|x| < \infty).$$

Tìm tổng của các chuỗi sau đây :

289. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$.

Giải. Đạo hàm chuỗi này hai lần theo x (trong khoảng hội tụ $|x| < 1$) và nhân đạo hàm cấp hai của nó với $1 - x^2$, sau vài biến đổi ta nhận được phương trình vi phân đối với tổng phải tìm $S(x)$:

$$(1 - x^2) S''(x) - xS'(x) - 4 = 0.$$

Bằng phép thay biến độc lập x theo công thức $t = \arcsin x$ ta đi đến phương trình $S''(t) = 4$, từ đó ta được :

$$S(t) = 2t^2 + C_1 t + C_2 (C_1, C_2 = \mathrm{const}).$$

Vì $S(0) = S'(0) = 0$, nên từ đó ta nhận được :

$$S(x) = 2(\arcsin x)^2 \qquad (|x| < 1).$$

Dễ dàng tìm được chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} 4^n,$$

là giá trị của chuỗi lũy thừa đã cho khi $x = \pm 1$, hội tụ theo dấu hiệu Gaoxơ. Khi đó theo định nghĩa Abeu và dựa vào tính liên tục của hàm $2(\arcsin x)^2$ trên đoạn $[-1, 1]$, ta có thể khẳng định rằng $S(x) = 2(\arcsin x)^2$ khi $|x| \leqslant 1$.

290. $\displaystyle\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$

Giải. Trước hết ta xác định miền hội tụ. Muốn vậy chú ý rằng, số hạng tổng quát của chuỗi

$$a_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

($x \neq -k$, k là số tự nhiên) bắt đầu từ chỉ số đủ lớn có dấu xác định. Ta áp dụng dấu hiệu Gaoxơ. Ta có $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}$. Từ đó, nhờ dấu hiệu nói trên ta suy ra rằng chuỗi hội tụ chỉ với $x > 1$.

Bây giờ ta tìm tổng $S(x)$ của chuỗi đã cho. Muốn vậy ta biểu diễn số hạng tổng quát của chuỗi dưới dạng :

$$a_n = \frac{1}{x-1}\left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\dots(n-1+x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)}\right) \ (n = 2, 3, \dots)$$

và tính tổng riêng $S_n(x)$ của chuỗi đang xét :

$$S_n(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\left(\left(\frac{2!}{1+x} - \frac{3!}{(1+x)(2+x)}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{3!}{(1+x)(2+x)} - \frac{4!}{(1+x)\dots(3+x)}\right) + \dots +$$

$$\left. + \left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\dots(n-1+x)} - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(1+x)(2+x)\dots(n+x)} =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)a_n}{x-1}$$

Vì chuỗi hội tụ, còn các số hạng của chuỗi là dương và đơn điệu giảm, nên theo bài 14 ta có hệ thức $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\, a_n = 0$. Chú ý đến giới hạn đó, từ trên ta có

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x > 1).$$

291. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ với điều kiện $x > 0$, $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ phân kỳ.

Giải. Biểu diễn số hạng tổng quát $b_n(x)$ của chuỗi dưới dạng

$$b_n(x) = \frac{a_1a_2 \dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{a_1a_2\dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\dots a_{n+1}}{(a_2+x)\dots(a_{n+1}+x)}\right)$$
$$(n = 2, 3, \dots)$$

ta tìm được tổng riêng của chuỗi đã cho :

$$S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left(\left(\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2a_3}{(a_2+x)(a_3+x)}\right) + \right.$$

$$+ \frac{a_1a_2a_3}{(a_2+x)(a_3+x)} - \frac{a_1a_2a_3a_4}{(a_2+x)(a_3+x)(a_4+x)}\Bigg) + \dots +$$

$$\left. + \left(\frac{a_1a_2\dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\dots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left(\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2\dots a_{n+1}}{(a_2+x)\dots(a_{n+1}+x)}\right) \ (n = 2, 3, \dots)$$

Bởi vì

$$0 < \frac{a_1a_2\dots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\left(1+\frac{x}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)} \leqslant \frac{1}{1 + x\sum\limits_{q=2}^{n}\frac{1}{a_q}}$$

(xem bài 4, chương I, tập I) và chuỗi với các số hạng dương có thể phân kỳ tới vô hạn, nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1a_2\dots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)} = 0$$

Do đó $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{a_1}{x}$.

292. $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{x^4}{1-x^8} + \dots$ nếu a) $|x| < 1$; b) $|x| > 1$.

Giải. Biểu diễn tổng riêng của chuỗi dưới dạng

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \dots +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^{n-1}}}\right) - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1+x^8} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right),$$

ta nhận được

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + S_n(x) - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad \frac{1}{1+x^{2^n}}\right)$$

từ đó

$$S_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^{2^n}} - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Vì vậy nếu $|x| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x}$. Nếu $|x| > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$

Do đó tổng của chuỗi $S(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & \text{nếu } |x| < 1; \\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$

293. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ nếu a) $|x| < 1$; b) $|x| > 1$.

Giải. Xem tổng riêng $S_n(x)$ của chuỗi:

$$S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(x^2+x+1)} + \right.$$

$$+ \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)} + \dots +$$

$$\left. + \frac{x^{n-1}}{(1+x+\dots+x^{n-1})(1+x+\dots+x^n)}\right)$$

và chú ý rằng

$$\frac{x^{n-1}}{(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+\ldots+x^n)} =$$

$$= -\frac{1+x+\ldots+x^{n-2}}{1+x+\ldots+x^{n-1}} + \frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{1+x+\ldots+x^n} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

ta nhận được

$$S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{1+x+\ldots+x^n} = \frac{x^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}.$$

Từ đó suy ra rằng, nếu $|x| < 1$ thì $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. Nếu $|x| > 1$, thì $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, ở đây $S(x)$ là tổng của chuỗi.

§8. DÙNG CHUỖI ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Bằng cách khai triển hàm dưới dấu tích phân thành chuỗi, hãy tính các tích phân sau :

294. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx.$

Giải. Khi $|x| \leqslant 1$ ta có khai triển

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!\,x^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)}$$

(xem bài 198). Chia các số hạng của chuỗi cho $x(x \neq 0)$ và tích phân từ 0 đến 1' ta nhận được :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)^2}.$$

295. $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx \quad (p > 0,\ q > 0).$

Giải. Tích phân đã cho nói chung là một tích phân suy rộng; vì vậy

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx.$$

Bởi vì, với $0 < x < 1$ ta có khai triển

$$\ln(1-x^q) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{qn}}{n}$$

nên

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1}\ln(1-x^q)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1^{qn+p}-(1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1^{qn+p}}{n(qn+p)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} =$$

$$= \varepsilon_1^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1^{qn}}{n(qn+p)} - (1-\varepsilon_2)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)}.$$

Chú ý rằng cả hai chuỗi lũy thừa hội tụ khi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, nên trên cơ sở định lý Aben, ta có:

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\varepsilon_1^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon_1^q)^n}{n(qn+p)} -$$

$$-\lim_{\varepsilon_2\to+0}(1-\varepsilon_2)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)}. \quad (1)$$

Do sự hội tụ đều của các chuỗi này và sự tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\varepsilon_1^q = 0$ và $\lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}((1-\varepsilon_2)^q)^n = 1$, từ hệ thức (1) ta suy ra rằng

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(nq+p)}.$$

296. $\int_0^1 \ln x \,.\, \ln(1-x)dx.$

Giải. Áp dụng phương pháp tích phân từng phần ta đưa tích phân đã cho về dạng

$$\int_0^1 \ln x \,.\, \ln(1-x)dx = -\int_0^1 \ln(1-x)dx - \int_0^1 \ln x dx + \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x}. \quad (1)$$

Xem rằng $0 < \varepsilon_1 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon_2$, ta viết khai triển thành các chuỗi lũy thừa tương ứng:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \ln x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n},$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}.$$

Bởi vì

$$\int_0^1 \ln x \,.\, \ln(1-x)\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \ln x \,.\, \ln(1-x)\, dx,$$

nên từ (1), bằng cách tích phân từng từ các chuỗi lũy thừa, dựa trên định lý Aben ta nhận được

$$\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_2)^{n+1} - \varepsilon_1^{n+1}}{n(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_1)^{n+1} - \varepsilon_2^{n+1}}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_2^n - (1-\varepsilon_1)^n}{n^2}\right)$$

cũng như trong bài trước, từ đó ta suy ra rằng

$$\int_0^1 \ln x \,.\, \ln(1-x)\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

297. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}$.

Giải. Đặt $t = e^{-2\pi x}$, ta nhận được một trong các tích phân đã tính trong bài trước:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1} = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^1 \frac{\ln t dt}{1-t}.$$

Vì vậy ta có

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{24}.$$

298. Khai triển tích phân eliptic đầy đủ loại 1 sau đây theo các lũy thừa nguyên dương của môđun k $(0 \leqslant k < 1)$.

$$F(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Giải. Vì $k^2\sin^2\varphi \leqslant k^2 < 1$, nên có khai triển (xem công thức IV, §5):

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi. \qquad (1)$$

Do ước lượng $k^{2n}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sin^{2n}\varphi \leqslant \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}$ và tính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^{2n}$, nên chuỗi (1) hội tụ đều theo φ (theo dấu hiệu Vâyecstrat). Ngoài ra, các số hạng của chuỗi (1) là hàm liên tục; vì vậy theo một tính chất của chuỗi hàm, thì chuỗi hàm đang xét có thể tích phân từng từ. Ta có:

$$F(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi d\varphi.$$

Từ đó, dùng kết quả bài 98, ch, IV. tập I, cuối cùng ta tìm được:

$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right).$$

299. Biểu diễn độ dài cung của elip $x = a\sin t$, $y = b\cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ bằng chuỗi sắp xếp theo các lũy thừa nguyên dương của tâm sai (tâm sai ε của elip là tỷ số $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (N.D)).

Giải. Độ dài S được nói đến được biểu diễn bằng tích phân

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt\,.$$

Biến đổi hàm dưới dấu tích phân, ta được:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 t}\quad dt, \tag{1}$$

trong đó ε là tâm sai của elip $(a \geqslant b)$.

Dùng khai triển

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,x^{2n}}{(2n)!!\,(2n-1)} \quad (\,|\,x\,| \leqslant 1)$$

đúng với $|\,x\,| < 1$ suy từ công thức IV, § 5 (tính hợp lý của nó khi $x = \pm 1$ suy từ định lý Aben), và đặt $x = \varepsilon\sin t$ $(\varepsilon\,|\,\sin t\,| \leqslant 1)$ từ (1), chú ý bài 98, ch IV, tập I, cuối cùng ta có thể viết:

$$S = 2\pi a\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)}\right).$$

Chứng minh các đẳng thức:

300. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Chứng minh. Biểu diễn hàm dưới dấu tích phân dưới dạng

$$\frac{1}{x^x} = \begin{cases} e^{-x\ln x} & \text{nếu } x > 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$

khai triển nó thành các lũy thừa của $x\ln x$ (xem $x\ln x$ khi $x = 0$ bằng 0):

$$\frac{1}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \ln^n x \quad (x \geqslant 0).$$

Vì chuỗi hàm này (theo dấu hiệu Vâyecstrat) hội tụ đều trên mỗi khoảng hữu hạn (0, A), nên có thể tích phân từng từ. Ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx,$$

từ đó dựa vào bài 229 (f) ta nhận được công thức cần thiết.

301. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}$.

Chứng minh. Tích phân suy rộng $I(a)$ ở vế trái của đẳng thức đã cho, cũng như đạo hàm tích phân của nó

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x \cos ax dx,$$

theo dấu hiệu trội Vâyecstrat, hội tụ đều (theo tham số a).

Lưu ý điều này và tiến hành tích phân từng phần tích phân cuối cùng, ta được phương trình vi phân đối với hàm $I(a)$:

$$2I'(a) + aI(a) - 1 = 0.$$

Nghiệm tổng quát của nó có dạng

$$I(a) = Ce^{-\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{4}} \int_0^a e^{\frac{a^2}{4}} da \quad (C = \text{const}).$$

Vì $I(0)=0$ nên $C=0$. Do đó ta có:

$$I(a)=\frac{1}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}\int_0^a e^{\frac{a^2}{4}}\,da.$$

Khai triển các hàm $e^{-\frac{a^2}{4}}$ và $e^{\frac{a^2}{4}}$ thành các chuỗi lũy thừa, từ hệ thức cuối cùng ta nhận được

$$I(a)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{4^n n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}.$$

Nhân hai chuỗi với nhau ta được:

$$I(a)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n a^{2n+1}; \qquad (1)$$

trong đó

$$b_n=\frac{1}{4^n}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(2n+1)(n-m)!\,m!}. \qquad (2)$$

Một mặt vì

$$\frac{1}{n!}\int_0^1(1-y^2)\,dy=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(2m+1)(n-m)!\,m!}$$

(ở đây ta sử dụng công thức nhị thức Niutơn), và mặt khác

$$\frac{1}{n!}\int_0^1(1-y^2)^n\,dy=4^n\frac{n!}{(2n+1)!}$$

(xem bài 101, ch IV, tập I) nên từ (1) và (2) suy ra:

$$I(a)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n!}{(2n+1)!}\,a^{2n+1},$$

đó là điều cần chứng minh.

302. $$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{n!} & \text{nếu } n=1,2,\ldots\\ 2\pi & \text{nếu } n=0.\end{cases}$$

Chứng minh. Khai triển hàm $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ thành chuỗi ta nhận được:

$$e^{\cos x}\cos(\sin x) = \mathrm{Re}(e^{z}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!}$$

trong đó $z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Theo dấu hiệu Vâyecstrat, chuỗi vừa nhận được hội tụ đều trên toàn trục số, còn hàm $\cos kx$ liên tục, vì vậy chuỗi này có thể tích phân từng từ cùng với hàm $\cos nx$. Ta có:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx\,dx = \frac{\pi}{n!},$$

nếu $n = 1, 2, \ldots$ và

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx = 2\pi.$$

Tìm:

303. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx)\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Giải. Bởi vì $e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx) = \mathrm{Re}(e^{az - inx})$, trong đó $z = e^{ix}$ và $e^{az} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k z^k}{k!}$ nên

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx)\,dx = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k e^{ikx}}{k!}\,dx = \frac{2\pi a^n}{n!}.$$

304. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}\,dx.$

Giải. Giả sử $|\alpha| < 1$. Dùng bài 194 ta được

$$I = \int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x\sin nx\,dx \quad (|\alpha| < 1).$$

Vì hàm $x\sin nx$ liên tục trên $[0, \pi]$ và chuỗi hàm ở vế phải hội tụ đều theo dấu hiệu trội Vâyecstrat $\left(\text{ở đây } |\alpha^{n-1} x\sin nx| \leqslant \pi |\alpha|^{n-1} \text{ và chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{n-1}\right.$ $\left.\text{hội tụ}\right)$, nên chuỗi đang xét có thể tích phân từng từ. Ta có

$$I = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \alpha^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha} \ln(1+\alpha), & \text{nếu } \alpha \neq 0; \\ \pi & \text{, nếu } \alpha = 0. \end{cases}$$

Giả sử $|\alpha| > 1$. Khi đó biến đổi hàm dưới dấu tích phân về dạng $\dfrac{x\sin x}{\alpha^2(\alpha^{-2} - 2\alpha^{-1}\cos x + 1)}$ và sử dụng các kết quả vừa nhận được ở trên ta có thể viết :

$$I = \frac{\pi}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (|\alpha| > 1).$$

Giả sử $\alpha = 1$. Khi đó tích phân xuất phát có dạng :

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\operatorname{tg} t}.$$

Hàm $f(t) = \dfrac{t}{\operatorname{tg} t}$ liên tục và bị chặn trên đoạn $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{khi } t = 0 \text{ và } t = \dfrac{\pi}{2} \text{ ta đặt } f(0) = 1 \text{ và } f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\right)$. Do đó nó khả tích, tức là tích phân cuối cùng có nghĩa.

Mặt khác chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ hội tụ theo dấu hiệu Lepnit. Vì vậy theo định lý Aben :

$$I\,|_{\alpha=1} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \pi \ln 2.$$

Giả sử $\alpha = -1$. Khi đó tích phân

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx$$

phân kỳ, bởi vì $x\operatorname{tg}\frac{x}{2} \sim \frac{2\pi}{\pi - x}$, khi $x \to \pi$.

Như vậy cuối cùng ta nhận được

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha}\ln(1+\alpha) & \text{, nếu } -1 < \alpha < 0 \text{ và } 0 < \alpha \leqslant 1; \\ \pi & \text{, nếu } \alpha = 0; \\ \frac{\pi}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) & \text{, nếu } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

305. $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx.$

Giải. Giả sử $|\alpha| < 1$. Khi đó sử dụng kết quả bài 245 ta được

$$I = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = 0. \qquad (1)$$

Giả sử $|\alpha| < 1$. Trong trường hợp này biến đổi hàm dưới dấu tích phân về dạng $\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) = 2\ln|\alpha| + \ln(1 - 2\alpha^{-1}\cos x + \alpha^{-2})$ và dùng đẳng thức (1) ta tìm được $I = 2\pi\ln|\alpha|$.

Giả sử $\alpha = 1$. Khi đó theo định lý Aben, ta có thể viết:

$$\ln[2(1-\cos x)] = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \quad (x \neq 2k\pi).$$

Do đó

$$I\,|_{\alpha=1} = \int_{\varepsilon}^{\pi} \ln 2(1-\cos x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)\,dx =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\,dx.$$

Chú ý rằng, theo dấu hiệu Đirichlê, chuỗi nằm dưới dấu tích phân sau cùng hội tụ đều còn hàm $\cos nx$ liên tục, ta thực hiện tích phân từng từ:

$$I|_{\alpha=1} = 2\lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n^2}.$$

Bởi vì $\frac{|\sin n\varepsilon|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ và chuỗi $\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, nên theo dấu hiệu trội Vâyecstrat chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n^2}$ hội tụ đều (theo tham số ε). Ngoài ra $\lim_{\varepsilon\to+0} \sin n\varepsilon = 0$. Do đó theo một tính chất của chuỗi hội tụ đều, ta nhận được:

$$I|_{\alpha=1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \lim \frac{\sin n\varepsilon}{n^2} = 0.$$

Tính tương tự được $I\,|_{\alpha=-1} = 0$.

Như vậy, cuối cùng ta có

$$I = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |\alpha| \leqslant 1; \\ 2\pi\ln|\alpha| & \text{nếu } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

306. Chứng minh công thức

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}} \qquad (1)$$

trong đó $a > 0$, $0 < \theta_n < 1$.

Nếu trong công thức (1) lấy hai số hạng, thì tích phân sau đây chính xác đến mức độ nào?

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x}\,dx?$$

Chứng minh. Tích phân từng phần n lần ta nhận được

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)}{a^n} + (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{(a+x)^{n+1}}.$$

Bởi vì

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{(a+x)^{n+1}} < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{a^{n+1}} = \frac{1}{a^{n+1}},$$

nên

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{(a+x)^{n+1}} = \frac{\theta_n}{a^{n+1}}, \text{ trong đó } 0 < \theta_n < 1.$$

Đó là công thức cần chứng minh.

Nếu trong công thức (1) ta lấy hai số hạng, thì nhận được:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{100+x} = \frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} + R,$$

trong đó $R = \dfrac{2\theta_2}{100^3} < 2 \cdot 10^{-6}$.

CÁC BÀI TẬP VÀ CÁC VÍ DỤ TỰ GIẢI

1. Chứng minh dấu hiệu Bectơrăng: nếu tồn tại giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n\right) = q$$

thì chuỗi số có dấu không đổi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ khi $q > 1$ hội tụ, còn khi $q < 1$ phân kỳ.

Nghiên cứu tính hội tụ của các chuỗi $\sum a_n$, nếu:

2. $a_n = \prod_{k=2}^{n} \gamma_k$, trong đó $\gamma_k = \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k\ln k} + \frac{1}{k\ln^2 k}\right)^{-1}$

3. $a_n = \dfrac{1}{\underbrace{|\ln|\ln|\ln\ldots|\ln n|\ldots|||^{\alpha}}_{n\text{ lôgarit}}}$ $(n = 2, 3, 4,\ldots)$.

4. $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) n^{-\alpha}$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$.

5. $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-n^2x^2+x^2}}{x^2 + nx^4 + 1}\,dx$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$.

6. $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\cos nt}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$.

7. $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\ln t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$.

8. $a_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f(x)\,|\sin nx|\,dx$, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \neq 0$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$,

trong đó hàm $f(x)$ khả tích tuyệt đối trên $(0, +\infty)$.

9. $a_n = \left|\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx - 1\right|$; $n = 1, 2,\ldots$

10. $\left|\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt - \frac{\cos n^2}{2n}\right|$; $n = 1, 2,\ldots$

11. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2 - \sqrt{3}$; $n = 1, 2, 3...$

Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi có dấu thay đổi với số hạng tổng quát $a_n (n = 1, 2, ...)$ nếu :

12. $a_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^n}{1 + x^{2n}}\, dx.$

13. $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^{n^2} dx \,.\, \sin n.$

14. $a_n = \dfrac{\sin\left(n + \dfrac{1}{n}\right)}{n^\alpha}.$

15. $(n + 2)a_{n+2} + 2(n + 1)a_{n+1} + na_n = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}.$

16. $a_n = n^{-\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \cos^3 2n$ (p là số tự nhiên).

17. $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^3 + n}}\right)$

18. $a_n = \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{2(-1)^n n}{\pi}\right)^{1 + \frac{1}{n}} - 1.$

19. $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\sin n}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

20. $a_n = \dfrac{\sqrt[n^2]{n}}{\ln^\alpha n} \sin (\pi \sqrt[n^3]{n^3 + n^2})$ $(n > 1)$

21. $a_n = \dfrac{\sin(\pi \sqrt[3]{n^3 + n})}{\ln^\alpha n}$ $(n > 1)$

Nghiên cứu tính hội tụ đều của các hàm sau đây :

22. a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ khi $y \to +\infty$, $x \in (0, +\infty)$;

b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ khi $y \to +0$, $x \in (0, +\infty)$;

c) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ khi $y \to +\infty$, $x \in (1, A)$;

d) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ khi $y \to +0$, $x \in (1, +\infty)$.

23. $f(x, y) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2y}$, $x \in (0, 1)$

a) khi $y \to 1$; b) khi $y \to 2$.

24. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}}}$, $x \in (1, +\infty)$.

a) khi $y \to +\infty$; b) khi $y \to +0$.

25. $f(x, y) = \dfrac{1}{x}(e^{xy} - 1)$, $x \in (0, +\infty)$.

a) khi $y \to +0$; b) khi $y \to -0$; c) khi $y \to -\infty$; d) khi $y \to 1$.

26. $f(x, y) = \dfrac{y \operatorname{arctg}(xy)}{y + 1}$, $x \in [1, +\infty)$

a) khi $y \to +0$; b) khi $y \to +\infty$.

27. $f(x, y) = y\ln(x^2 + y^2)$, $x \in (0, 1)$;

a) khi $y \to 0$; b) khi $y \to 1$.

Nghiên cứu tính hội tụ đều của các dãy hàm sau:

28. $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{xy^2}{n}\right) dy$; a) $x \in (0, 1)$; b) $x \in (0, +\infty)$.

29. $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos(xy)\, dy}{y^2 + n^2}$; a) $x \in (0, 1)$; b) $x \in (1, +\infty)$.

30. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{k^2 x}{n^3}$, $x \in (0, +\infty)$.

31. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{xn^2}\right)$, $x \in (0, 1)$.

Xác định sơ bộ miền hội tụ của các chuỗi hàm sau đây, nghiên cứu tính hội tụ đều của nó:

32. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^2}$.

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{2n+1}$.

36. Có thể có hay không một chuỗi hàm của các hàm gián đoạn, hội tụ không đều trong khoảng (a, b), biểu diễn một hàm liên tục trong khoảng này? Cho ví dụ.

37. Giả sử $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 x}$ hội tụ đều khi $x \geqslant \varepsilon > 0$.

Lập luận tính hợp lý của phép đạo hàm từng từ các chuỗi sau đây trong miền đã chỉ ra:

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$, $0 < x < 2\pi$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1+nx^{2n}}$, $|x| \neq 1$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$, $|x| < 1$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n^2+\cos(\sqrt{n}\,x)}$, $0 < x < 2\pi$.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\varepsilon x}}$, $x > \frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

43. Có thể khẳng định được hay không: a) Nếu hàm $f(x)$ liên tục trong mỗi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ thì nó liên tục trong khoảng (a, b)? b) Nếu dãy $f_n(x)$ hội tụ đều trên mỗi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ thì nó hội tụ đều cả trên khoảng (a, b)? c) Nếu dãy $f_n(x) \in C[\alpha, \beta]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ đều trên mỗi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ tới hàm $f(x)$, thì trong khoảng (a, b) hàm giới hạn nhất định liên tục?

Tìm :

44. $$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-nx})\cos nx}{x^2+n^3}.$$

45. $$\lim_{x\to+0} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n\ln(1-e^{-x})}.$$

46. $$\lim_{y\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\arcsin\left(\frac{ny}{ny+1}\right)}{1+n^4x^2+y}\,dx.$$

47. $$\lim_{y\to1+0} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}\,(y-1)}{n}\right)}{\cos\frac{\pi y}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{x(y-1)}{n}\right)}\,dx.$$

48. $$\lim_{y\to0} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\cos ny}{y+n}\cdot\frac{\sin y}{y}\right).$$

Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau đây :

49. $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1}\,((2k-1)!!)^2\,((2n-2k-3)!!)^2\,\frac{x^n}{(n!)^2}.$$

50. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{tg}x)^{(n)}|_{x=0}}{n!}\,x^n.$$

51. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg}(2\sin x)^{(n)}|_{x=0}}{n!}\,.\,x^n.$$

Khai triển thành chuỗi Fuariê các hàm $f(x)$ sau đây:

52. $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a(n+x)^2}\quad (a>0).$$

53. $f(x) = e^{-\cos x}(\cos(2x - \sin x) + 2\cos x \cdot \cos(\sin x)) - \cos x$.

54. $f(x) = e^{-\cos x}(\sin(2x - \sin x) - 2\cos x \sin(\sin x)) + \sin x$.

55. $f(x) = \sin x \cdot \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$

56. $f(x) = \cos x \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$.

57. Chứng minh rằng, hiện tượng Ghipxơ(*) không phải là « độc tôn » của chuỗi lượng giác, mà nó xuất hiện ở tất cả các dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ không đều.

58. Có thể gọi các chuỗi lượng giác sau đây là chuỗi Fuariê được không?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{\ln n}}$;

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n - \sqrt{n}}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin nx}{(n+1)\ln n}$?

Chứng minh rằng:

59. $$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^{j}(-1)^j (k-j)^{n-1}, |x| < 1 \ (n = 1, 2, \ldots)$$

60. $$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}\right) \ (x > 0).$$

Hướng dẫn. Áp dụng bài 52.

Tìm:

61. $\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^3 (2 - \sqrt{3})^{2k}$.

62. $\lim_{x \to 1-0} \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$.

(*) Xem Fichtengôn, Cơ sở giải tích toán học, tập 3, trang 495 – 497. (Bản tiếng Nga) – N. D.

Tìm tổng của các chuỗi lượng giác sau

63. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)n}$

64. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)\,n(n+1)}$

65. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\,\varphi}{2k+1}$ $(|\xi| < 1)$

66. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,\sin(2k+1)\,x}{(2k)!!\,(2k+1)}$.

CHƯƠNG II

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

§1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. TÍNH LIÊN TỤC

1. Giới hạn của hàm số. Giả sử hàm $f(p) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định trên tập E với điểm giới hạn p_o.

Số A được gọi là giá trị giới hạn của hàm $f(p)$ tại điểm p_o (hay giới hạn của hàm số khi $p \to p_o$), nếu $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, p_o) > 0$ sao cho $|f(p) - A| < \varepsilon$ khi $p \in E$ và $0 < \rho(p, p_o) < \varepsilon$, trong đó $\rho(p, p_o)$ là khoảng cách giữa các điểm p và p_o. Để ký hiệu giá trị giới hạn A của hàm số $f(p)$ tại điểm p, ta dùng cách viết

$$\lim_{p \to p_o} f(p) = A \text{ hay } f(p) \to A, \text{ nếu } p \to p_o.$$

2. Tính liên tục. Giả sử điểm $p_o \in E$, E là miền xác định của hàm $f(p)$. ε — lân cận bất kỳ của điểm p_o chứa các điểm khác với p_o.

Hàm $f(p)$ gọi là liên tục tại điểm p_o, nếu

$$\lim_{p \to p_o} f(p) = f(p_o). \tag{1}$$

Điểm mà tại đấy (1) không thỏa mãn, được gọi là điểm gián đoạn của hàm số.

Hàm $f(p)$ được gọi là liên tục trên miền đã cho, nếu nó liên tục tại mọi điểm của miền này.

3. Tính liên tục đều. Hàm $f(p)$ được gọi là liên tục đều trong miền G, nếu $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho $|f(p') - f(p'')| < \varepsilon\ \forall p', p'' \in G$ thỏa mãn bất đẳng thức $\rho(p', p'') < \delta$.

Hàm liên tục trong miền kín và giới nội thì liên tục đều trong miền đó.

1. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x, y)) = 1, \quad \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y)) = -1$$

trong khi đó $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ không tồn tại.

Giải. Ta có

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1;$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

Bởi vì các dãy $\{x_n, y_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$, $\{x'_n, y'_n\} = \left\{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right\}$ đều hội tụ tới điểm $(0, 0)$ khi $n \to \infty$, còn các dãy tương ứng các giá trị của hàm lại hội tụ tới những giới hạn khác nhau:

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{0\} \to 0$$

$$\{f(x'_n, y'_n)\} = \left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}\right\} \to \frac{1}{3} \text{ khi } n \to \infty$$

nên $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ không tồn tại.

2. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ ta có

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x, y)) = \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y)) = 0$$

tuy nhiên $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ không tồn tại.

Giải. Đẳng thức của các giới hạn lặp suy ra từ

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = 0, \qquad \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0.$$

Còn giới hạn bội (kép) không tồn tại vì các dãy

$$\{x_n, y_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}, \quad \{x'_n, y'_n\} = \left\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right\}$$

đều hội tụ tới điểm $(0, 0)$, và các dãy tương ứng các giá trị hàm số lại hội tụ tới những giá trị giới hạn khác nhau khi $n \to \infty$:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \to 1, \; f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^2}} \to 0$$

3. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, cả hai giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ và $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$ không tồn tại, nhưng giới hạn kép tồn tại và $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

Giải. Giả sử $y \neq \frac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ thì $y\sin\frac{1}{y} \neq 0$. Hiển nhiên các dãy $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ tới không khi $n \to \infty$; các dãy tương ứng các giá trị của hàm $\{f(x_n, y)\} = \{0\}$; $\{f(x'_n, y) = \left\{y\sin\frac{1}{y}\right\}$ sẽ hội tụ tới những giới hạn khác nhau khi $n \to \infty$. Vì vậy $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$ không tồn tại. Tương tự ta cũng có $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ không tồn tại. Từ đó suy ra cả hai giới hạn lặp không tồn tại. Tuy nhiên từ bất đẳng thức $0 \leqslant \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$, được thỏa mãn với $x \neq 0$, $y \neq 0$ bất kỳ. Do đó

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left((x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = 0.$$

4. Giới hạn sau đây có tồn tại hay không

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}?$$

Giải. Giới hạn này không tồn tại, bởi vì các dãy

$$\{x_n, y_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}, \{x'_n, y'_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\}$$

hội tụ tới điểm $(0, 0)$ khi $n \to \infty$, trong khi đó các dãy tương ứng các giá trị của hàm sẽ hội tụ tới những giá trị giới hạn khác nhau:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \to 1,\quad f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} \to 0$$

khi $n \to \infty$.

5. Giới hạn của hàm $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ dọc theo một tia bất kỳ $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ khi $t \to +\infty$ là bao nhiêu? Có thể gọi hàm số đó là vô cùng bé khi $x \to \infty$ và $y \to \infty$ được không?

Giải. Ký hiệu $F(t, \alpha) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$, khi đó $F(t, \alpha) = t^2\cos^2\alpha\, e^{-t^2\cos^2\alpha + t\sin\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$.

Nếu $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ thì $F\left(t, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và vì vậy $F\left(t, \pm\frac{\pi}{2}\right) \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Nếu $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$, thì $\cos^2\alpha \neq 0$ và $t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha \to +\infty$ khi $t \to +\infty$. Khi đó, theo quy tắc Lôpitan ta có

$$\lim_{t\to+\infty} F(t, \alpha) = \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} =$$

$$= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{(2t\cos^2\alpha - \sin\alpha)\, e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} =$$

$$= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\cos^2\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{2t}\right) e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} = 0.$$

Vì vậy $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t, \alpha) = 0$ với α bất kỳ.

Hàm $f(x, y)$ không phải là vô cùng bé khi $x \to \infty$, $y \to \infty$, bởi vì khi $x_n = n \to +\infty$, $y_n = n^2 \to +\infty$ ta có đẳng thức

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} n^2 e^{-(n^2 - n^2)} = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

điều này trái với định nghĩa đại lượng vô cùng bé.

6. Tìm $\lim\limits_{x\to a} \left(\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right)$ và $\lim\limits_{y\to b} \left(\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right)$, nếu:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$, $a = \infty$, $b = \infty$.

b) $f(x, y) = \dfrac{x^y}{1 + x^y}$, $a = +\infty$, $b = +0$;

c) $f(x, y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x + y}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

d) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}$, $a = 0, b = \infty$;

e) $f(x, y) = \log_x (x + y)$, $a = 1$, $b = 0$.

Giải. a) Khi $x \neq 0$, $y \neq 0$ ta có:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\lim_{y\to\infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{x^2}{y^2} + 1}{\frac{x^2}{y^2} + y^2} \right) = 0;$$

$$\lim_{y\to\infty} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{y\to\infty} 1 = 1.$$

b) Hàm x^y liên tục khi $y > 0$ (xem x không đổi), vì vậy $\lim\limits_{y\to+0} x^y = 1$; khi giá trị $y > 0$ không đổi, thì hàm x^y liên tục với mọi $x > 0$; vì vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} x^y = +\infty$.

Sử dụng các đẳng thức nhận được, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\lim_{y\to+0} \frac{x^y}{1 + x^y} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to+0} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1 + x^y} \right) = 1.$$

c) Với mỗi giá trị x cố định thì hàm số liên tục theo biến y, còn khi y cố định thì hàm số liên tục theo biến x. Vì vậy

$$\lim_{y\to\infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} = 0; \quad \lim_{x\to\infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} = \lim_{x\to\infty} \sin \frac{\pi}{2 + \frac{y}{x}} = 1$$

Do đó

$$\lim_{x\to\infty} \left(\lim_{y\to\infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right) = 0; \quad \lim_{y\to\infty} \left(\lim_{x\to\infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right) = 1.$$

d) Khi $x \neq 0$ cố định, $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{xy}{1 + xy} = 1$; vì vậy do tính liên tục của hàm tg ta nhận được:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} = 0.$$

Giả sử bây giờ cố định y, khi đó, do $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1$, nên

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}}{\dfrac{xy}{1+xy}} (1 + xy)^{-1} = 1.$$

Từ đó ta có:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to\infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right) = 0;$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right) = 1.$$

e) Ta có $f(x, y) = \log_x(x + y) = \frac{\ln(x+y)}{\ln x}$, $x > 0$, $x + y > 0$, $x \neq 1$. Từ tính liên tục của hàm lôgarit suy ra

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln x} = 1.$$

Vì vậy, $\lim\limits_{x\to 1} (\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = 1$.

Bởi vì

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } -1 < y < 0 \\ -\infty, & \text{nếu } \quad 0 < y < +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \begin{cases} -\infty, & \text{nếu } -1 < y < 0 \\ +\infty, & \text{nếu } \quad 0 < y < +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = 1, \text{ nếu } y = 0,$$

nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x, y)$, và cùng với nó, $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 1} f(x, y))$ không tồn tại.

Tìm các giới hạn kép sau đây:

7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$.

Giải. Sử dụng bất đẳng thức $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy$ khi $x \neq 0$, $y \neq 0$, ta nhận được:

$$0 \leqslant \left|\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x+y}{xy}\right| \leqslant \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}.$$

Từ đó ta có:

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left| \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leqslant \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left(\frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|} \right) = 0.$$

Vì vậy

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{(x + y)}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

8. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$.

Giải. Giả sử $x \neq 0$, $y \neq 0$. Khi đó

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x^2}{x^4 + y^4} + \frac{y^2}{x^4 + y^4} \leqslant \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}. \qquad (1)$$

Bởi vì $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \right) = 0$, nên từ bất đẳng thức (1), ta kết luận rằng

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0.$$

9. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

Giải. Ta có $\dfrac{\sin xy}{xy} . y = \dfrac{\sin xy}{x}$.

Bởi vì $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ $(xy = t,\ a \neq \infty)$,

nên $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} . \lim\limits_{y \to a} y = a.$

10. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)}$.

Giải. Sử dụng bất đẳng thức sơ cấp sau đây (thỏa mãn khi $x > 0, y > 0$):

$$(x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}.$$

ta nhận được:

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \leqslant \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}\right) = 0$$

Từ đó $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0.$

11. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}.$

Giải. Từ bất đẳng thức hiển nhiên $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ suy ra $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}$.
Vì vậy

$$0 < \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2} = 0.$$

12. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

Giải. Từ các bất đẳng thức

$$x^2y^2 \leqslant \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$$

$$1 \geqslant (x^2 + y^2)^{x^2y^2} \geqslant (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$$

(đúng khi $0 < x^2 + y^2 < 1$) và từ

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim_{t \to +0} t^{\frac{1}{4}t^2} =$$

$$= \lim_{t \to +0} e^{\frac{t^2}{4}\ln t} = 1$$

suy ra đẳng thức

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Giải. Do tính liên tục của hàm mũ và hàm lôgarit ta có

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} e^{\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e.$$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Giải. Sử dụng tính liên tục của hàm lôgarit và $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \neq 0$,

ta nhận được:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

15. Theo những hướng φ nào thì giới hạn hữu hạn sau đây tồn tại :

a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; b) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

nếu $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$?

Giải : a) Giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$ tồn tại khi $\cos\varphi \leqslant 0$, tức là nếu $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

b) Ta có $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy = \lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

Bởi vì $\rho^2 \to +\infty$, còn $\sin(\rho^2 \sin 2\varphi)$ là hàm giới nội, nên giới hạn sẽ hữu hạn, nếu $\cos 2\varphi < 0$ hoặc $\sin 2\varphi = 0$. Trong trường hợp thứ nhất $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$, trong trường hợp thứ hai $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Tìm các điểm gián đoạn của những hàm sau đây :

16. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Giải. Hàm $x^2 + y^2$ liên tục đối với tất cả x và y, vì nó là một đa thức của x và y. Theo định lý đã biết về tính liên tục của hàm hợp các hàm liên tục, thì hàm $(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ cũng là hàm liên tục với tất cả x và y, trừ điểm $(0, 0)$, tại đấy mẫu số $\sqrt{x^2 + y^2}$ triệt tiêu.

Vì vậy điểm $(0, 0)$ là điểm gián đoạn vô cực.

17. $u = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$

Giải. Bởi vì tử số và mẫu số là những hàm liên tục, nên hàm có thể có điểm gián đoạn chỉ tại những điểm mà tại đấy mẫu số $x^3 + y^3 = 0$. Giải phương trình này đối với y ta được $y = -x$. Do đó hàm có điểm gián đoạn trên đường thẳng $y = -x$.

Giả sử $x_o \neq 0$, $y_o \neq 0$ và $x_o + y_o = 0$. Khi đó

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} =$$

$$= \frac{1}{x_o^2 - x_o y_o + y_o^2}.$$

Điều này có nghĩa là các điểm của đường thẳng $y = -x$ $(x \neq 0)$ là điểm gián đoạn bỏ được của hàm u. Từ hệ thức

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = +\infty$$

suy ra điểm $(0, 0)$ là điểm gián đoạn vô cực.

18. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

liên tục theo mỗi một biến x và y riêng biệt (với giá trị cố định của biến kia) nhưng không liên tục đồng thời theo cả hai biến đó.

Giải. Giả sử $y \neq 0$, x_o là số cố định bất kỳ. Khi đó

$$\lim_{x \to x_o} f(x, y) = \lim_{x \to x_o} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x_o y}{x_o^2 + y^2} = f(x_o, y).$$

Nếu $y = 0$, thì với bất kỳ $x_o \neq 0$ $\lim\limits_{x \to x_o} f(x, 0) = 0 = f(x_o, 0)$. Cuối cùng nếu $y = 0$, $x_o = 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$. Như vậy, với mỗi y cố định hàm $f(x, y)$ liên tục theo biến x. Do tính đối xứng của hàm đối với x và y, nên khi cố định x thì hàm $f(x, y)$ lại liên tục theo biến y.

Tuy nhiên hàm số không liên tục theo cả hai biến tại điểm (0,0). Thật vậy, cả hai dãy $\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$ và $\left\{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right\}$ cùng hội tụ tới điểm (0,0) khi $n \to \infty$ còn các dãy giá trị hàm tương ứng với chúng lại hội tụ tới những giá trị giới hạn khác nhau khi $n \to \infty$:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \to 1;$$

$$f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \to \frac{4}{5}$$

19. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{, nếu } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

liên tục tại điểm (0, 0) theo mỗi tia $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ đi qua điểm đó, tức là tồn tại

$$\lim_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0, 0),$$

tuy nhiên hàm đó không liên tục tại điểm (0, 0).

Giải. Ta có

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2\alpha, \sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Bởi vì $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0$ khi $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, nên với những giá trị α này

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0, 0).$$

Nếu $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, thì $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha > 0$ và $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \to \sin^2\alpha > 0$ khi $t \to 0$. Vì vậy $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0, 0)$. Như vậy theo mỗi tia bất kỳ đi qua điểm $(0, 0)$ hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm này.

Hàm $f(x, y)$ gián đoạn tại điểm $(0, 0)$ được suy ra từ dãy $\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\}$ hội tụ tới điểm $(0, 0)$ khi $n \to \infty$, còn

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

20. Khảo sát tính liên tục đều của hàm tuyến tính $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ trong mặt phẳng vô hạn $E^2 = \{\,|x| < +\infty,\ |y| < +\infty\}$.

Giải. Đối với các điểm bất kỳ (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in E^2$ ta có:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,|x_1 - x_2| + 3\,|y_1 - y_2|.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là một số bất kỳ cho trước, khi đó với điều kiện $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6} =$,

$|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$ thì bất phương trình

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

được thỏa mãn. Từ đó, theo định nghĩa, hàm $f(x, y)$ liên tục đều trên E^2.

21. Khảo sát tính liên tục đều của hàm $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ trong mặt phẳng $E^2 = \{\,|x| < +\infty,\ |y| < +\infty\}$.

Giải. Với $\varepsilon > 0$ tùy ý và 2 điểm bất kỳ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E^2$ ta có:

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| = |\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}| =$$

$$= \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - x_2|\,|x_1 + x_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{|y_1 - y_2|\,|y_1 + y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - x_2| \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + |y_1 - y_2| \frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}}$$

$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

khi $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$.

Vì vậy theo định nghĩa thì hàm u liên tục đều trong mặt phẳng E^2.

22. Hàm $f(x, y) = \sin \dfrac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$ có liên tục đều trong miền $x^2 + y^2 < 1$. hay không?

Giải. Hàm $1 - x^2 - y^2$ liên tục đối với tất cả các giá trị x và y, vì là đa thức của x và y. Theo định lý về hàm hợp các hàm liên tục, thì hàm đã cho cũng là hàm liên tục với tất cả các giá trị của x và y thỏa mãn bất đẳng thức $x^2 + y^2 < 1$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng trong miền này hàm đã cho liên tục không đều. Muốn vậy ta lấy hai dãy:

$$M_n(x_n, y_n) = \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos\alpha ; \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin\alpha \right\},$$

$$M'_n(x'_n, y'_n) = \left\{ \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \cos\alpha ; \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \sin\alpha \right\},$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ thuộc miền xác định của hàm số.

Vì $$\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} =$$

$$= \left| \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \right| \to 0 \text{ khi } n \to \infty, \text{ còn}$$

$$\left| f(M_n) - f(M'_n) \right| = \left| \sin 2n\pi - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right| = 1 \;\forall n,$$

nên với $\varepsilon \in (0,1)$ không tồn tại số δ để thỏa mãn định nghĩa về liên tục đều.

23. Cho hàm số $u = \arcsin \dfrac{x}{y}$. Hàm số đó có liên tục trong miền xác định E của nó hay không? Hàm u có liên tục đều trong miền E hay không?

Giải. Miền xác định E được xác định từ bất đẳng thức $|x| \leqslant |y|$, $y \neq 0$. Trong miền này hàm $u(x, y)$ liên tục vì là hàm hợp của những hàm liên tục.

Tuy nhiên hàm đã cho không liên tục đều, bởi vì đối với các dãy $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$; $M'_n\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ta có hệ thức:

$$\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \to 0$$

khi $n \to \infty$, còn khoảng cách giữa các giá trị của hàm tại các điểm tương ứng là $|u(M_n) - u(M'_n)| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = |2\arcsin 1| = \pi$, không có thể bé hơn π.

24. Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm số $f(x, y) = x\sin\frac{1}{y}$, nếu $y \neq 0$ và $f(x, 0) = 0$ không phải là tập đóng.

Chứng minh. Giả sử $y_n = \dfrac{2}{\pi(1 + 4n)}$, $x_n = \dfrac{nx_0}{n + 1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ở đây x_0 là một số cố định bất kỳ. Khi đó dãy $\{x_n, y_n\}$ hội tụ tới điểm $(x_0, 0)$, khi $n \to \infty$. Từ hệ thức $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx_0}{1 + n} \sin \dfrac{\pi(1 + 4n)}{2} = x_0 \neq f(x_0, 0) = 0$ $(x_0 \neq 0)$ suy ra rằng $(x_0, 0)$ $(x_0 \neq 0)$ là điểm gián đoạn của hàm $f(x, y)$. Còn từ bất đẳng thức $|f(x, y)| = \left|x\sin\frac{1}{y}\right| < |x|$ suy ra tính liên tục của hàm $f(x, y)$ tại điểm $(0,0)$.

Như vậy, tập các điểm gián đoạn của hàm $f(x, y)$ lấp đầy trục Ox, trừ điểm $(0, 0)$, mà điểm đó là điểm giới hạn của tập hợp này. Vì vậy, tập điểm gián đoạn của hàm $f(x, y)$ không chứa tất cả các điểm giới hạn của nó nên không phải là tập đóng.

25. Chứng minh rằng, nếu trong một miền G nào đó hàm số $f(x, y)$ liên tục theo biến x và liên tục đều theo biến y đối với x, thì hàm số đó liên tục trong miền đang xét.

Chứng minh. Giả sử có 2 điểm (x_0, y_0) và $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ thuộc miền xác định của hàm $f(x, y)$, ta có:

$$\begin{aligned}|\Delta f(x_0, y_0)| &= |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| + \\ &+ |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \qquad (1)\end{aligned}$$

Bởi vì hàm $f(x, y)$ liên tục đều theo biến y đối với x_0, nên $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$, sao cho khi $|\Delta y| < \delta_1$ ta có

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

bất đẳng thức này thỏa mãn đối với $x_o + \Delta x$ bất kỳ thuộc miền xác định của hàm $f(x, y)$.

Hơn nữa, do hàm $f(x, y)$ liên tục theo biến x, nên với ε đã chỉ ra ở trên, $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_o, y_o)$ sao cho

$$|f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

ngay khi $|\Delta x| < \delta_2$.

Chọn $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, thì khi $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ cả hai bất đẳng thức (2) và (3) đồng thời được thỏa mãn. Bởi vậy, khi $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ thì từ các bất đẳng thức (2), (3) và (1) suy ra $|\Delta f(x_o, y_o)| < \varepsilon$, mà điều này có nghĩa là hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm (x_o, y_o).

26. Chứng minh rằng, nếu trong một miền G nào đó hàm $f(x, y)$ liên tục theo biến x và thỏa mãn điều kiện Lipsit theo biến y, tức là

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

trong đó $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ và L là hằng số, thì hàm số đó liên tục trong miền đã cho.

Chứng minh. Bởi vì hàm $f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện Lipsit theo biến y, nên với $\varepsilon > 0$ tùy ý và các điểm (x_o, y_o), (x, y) bất kỳ thuộc miền G ta đều có:

$$|f(x,y) - f(x_o,y_o)| \leqslant |f(x,y) - f(x,y_o)| + |f(x,y_o) - f(x_o,y_o)| \leqslant$$
$$\leqslant L|y - y_o| + |f(x,y_o) - f(x_o,y_o)|. \tag{1}$$

Do hàm $f(x, y_o)$ liên tục tại điểm x_o, nên có thể tìm được.

$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_o, y_o)$ để khi $|x - x_o| < \delta_1$ thì ta có bất đẳng thức

$$|f(x, y_o) - f(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) và điều kiện $|x - x_o| < \delta$, $|y - y_o| < \delta$ trong đó $\delta = \min\left(\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{2L}\right)$ ta có bất đẳng thức:

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| < L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

điều đó chứng tỏ hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm (x_o, y_o) bất kỳ thuộc miền G.

27. Giả sử hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền $G: a \leqslant x \leqslant A, b \leqslant y \leqslant B$, còn dãy hàm $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ hội tụ đều trên $[a, A]$ và thỏa mãn điều kiện $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant$ $\leqslant B$. $(n = 1, 2, ...)$. Chứng minh rằng dãy hàm $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ $(n = 1, 2, ...)$ cũng hội tụ đều trên đoạn $[a, A]$.

Chứng minh. Vì hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền đóng G, nên nó liên tục đều trong miền này. Do đó, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho bất đẳng thức $|f(x, y') -$ $- f(x, y'')| < \varepsilon$ (1) thỏa mãn đối với mọi $x \in [a, A]$ và $y', y'' \in [b, B]$ mà

$|y' - y''| < \delta$. Do dãy $\{\varphi_n(x)\}$ hội tụ đều trên $[a, A]$, nên $\forall\, \delta > 0$ (trong đó có số δ đã chỉ ra ở trên) $\exists N = N(\delta)$ để cho

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \delta, \forall n > N, \forall p > 0$$

và $\forall x \in [a, A]$.

Trong bất đẳng thức (1) ta đặt $y' = \varphi_{n+p}(x)$, $y'' = \varphi_n(x)$ $(\varphi_{n+p}(x), \varphi_n(x) \in$ $\in [b, B])$, ta nhận được bất đẳng thức sau.

$$|f(x, \varphi_{n+p}(x)) - f(x, \varphi_n(x))| < \varepsilon$$

được thỏa mãn $\forall n > N$, $\forall p > 0$ và $\forall x \in [a, A]$. Vì vậy dãy $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ hội tụ đều trên $[a, A]$.

28. Giả sử rằng: 1) hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền $R = \{a < x < A, b < y < B\}$; 2) hàm $\varphi(x)$ liên tục trong khoảng (a, A) và có các giá trị thuộc khoảng (b, B). Chứng minh rằng hàm $F(x) = f(x, \varphi(x))$ liên tục trong khoảng (a, A).

Chứng minh. Giả sử rằng (x_o, y_o) là điểm bất kỳ của miền R. Vì hàm $f(x, y)$ liên tục trong R, nên $\forall \varepsilon < 0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_o, y_o)$ sao cho

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| < \varepsilon \quad (1)$$

ngay khi $|x - x_o| < \delta_1$, $|y - y_o| < \delta_1$.

Ký hiệu $y = \varphi(x)$, $y_o = \varphi(x_o)$. Từ tính liên tục của hàm $\varphi(x)$ trong khoảng (a, A) suy ra với δ_1 đã chỉ ra ở trên, $\exists \delta_2 = \delta_2(\delta_1)$ sao cho

$$|\varphi(x) - \varphi(x_o)| = |y - y_o| < \delta_1 \quad (2)$$

nếu $|x - x_o| < \delta_2$. Do đó, từ các bất đẳng thức (1) và (2), và $y = \varphi(x) \in (b, B)$, nếu $x \in (a, A)$ suy ra bất đẳng thức

$$|f(x, \varphi(x)) - f(x_o, \varphi(x_o))| < \varepsilon$$

được thỏa mãn khi $|x - x_o| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Như vậy hàm $F(x) = f(x, \varphi(x))$ liên tục trên khoảng (a, A).

29. Giả sử: 1) hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền $R = \{a < x < A;\ b < y < B\}$; 2) hàm $x = \varphi(u, v)$ và $y = \psi(u, v)$ liên tục trong miền $R' = \{a' < u < A';\ b' < v < B'\}$ và có các giá trị tương ứng thuộc khoảng (a, A) và (b, B). Chứng minh rằng hàm $F(u, v) = f(\varphi(u, v); \psi(u, v))$ liên tục trong miền R'.

Chứng minh. Giả sử (u_o, v_o) là điểm cố định bất kỳ thuộc R', còn $x_o =$ $= \varphi(u_o, v_o)$, $y_o = \psi(u_o, v_o)$. Từ điều kiện 1) ta có: $\forall \varepsilon < 0$ $\exists \sigma = \sigma(\varepsilon, x_o, y_o)$ để cho

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| < \varepsilon \quad (1)$$

ngay khi $|x - x_o| < \sigma$, $|y - y_o| < \sigma$. Từ điều kiện 2) ta thấy rằng, với σ đã chỉ ra ở trên, $\exists \delta = \delta_1(\sigma) = \delta(\varepsilon, u_o, v_o)$ để khi $|u - u_o| < \delta$; $|v - v_o| < \delta$ thì các bất đẳng thức

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_o, v_o)| < \sigma, \ |\psi(u, v) - \psi(u_o, u_o)| < \sigma \quad (2)$$

được thỏa mãn. Từ các bất đẳng thức (1) và (2) ta có:

$$|f(\varphi(u,v),\ \psi(u,v)) - f(\varphi(u_o,v_o),\ \psi(u_o,v_o))| = |F(u,v) - F(u_o,v_o)| < \varepsilon,$$

khi $|u-u_o| < \delta$, $|v - v_o| < \delta$, tức là hàm $F(u,v)$ liên tục tại điểm (u_o, v_o). Do (u_o, v_o) là điểm bất kỳ của R', nên ta kết luận rằng hàm $F(u, v)$ liên tục trong miền R'.

§ 2. ĐẠO HÀM RIÊNG, VI PHÂN CỦA HÀM

1. Đạo hàm riêng. Giả sử hàm $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ xác định trong một miền G nào đấy và $M_o(x_1^o, x_2^o, ... x_m^o)$ là một điểm trong của miền này. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn) của tỷ số số gia riêng $\Delta x_k u$ của hàm u tại điểm M_o với số gia tương ứng Δx_k của biến x_k:

$$\frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1^o, ..., x_{k-1}^o, x_k^o + \Delta x_k, x_{k+1}^o, ..., x_m^o) - f(x_1^o, .., x_m^o)}{\Delta x_k}$$

khi $\Delta x_k \to 0$, thì giới hạn này gọi là đạo hàm riêng của hàm $u = f(x_1, x_2, ... x_m)$ tại điểm M_o theo biến x_k và ký hiệu bằng một trong các ký hiệu sau:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \frac{\partial f}{\partial x_k},\ u'_{x_k},\ f'_{x_k}.$$

Như vậy

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k}\ (1 \leqslant k \leqslant m).$$

2. Vi phân của hàm. Hàm $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ được gọi là khả vi tại điểm M_o, nếu số gia toàn phần của nó

$\Delta u = f(x_1^o + \Delta x_1, x_2^o + \Delta x_2, ..., x_m^o + \Delta x_m) - f(x_1^o, x_2^o, ..., x_m^o)$ tại điểm này có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m + o(\rho)$$

ở đây $A_1, A_2, ..., A_m$ là những hằng số nào đấy không phụ thuộc vào $\Delta x_1, \Delta x_2, ... \Delta x_m$, còn

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2}.$$

Nếu có ít nhất một trong các số A_k ($k = 1, 2, ..., m$) khác không, thì tổng $A_1\Delta x_1 + ... + A_m\Delta x_m$ là phần tuyến tính chính đối với các số gia của các đối số của số gia của hàm khả vi. Khi định nghĩa hàm khả vi người ta không loại trừ khả năng tất cả các $A_1, A_2, ..., A_m$ triệt tiêu.

Nếu hàm u khả vi tại điểm M_o, thì tại điểm này tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$, đồng thời $\frac{\partial u}{\partial x_k} = A_k$. Như vậy, điều kiện khả vi của hàm u tại điểm M_o có thể viết dưới dạng sau:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho),$$

ở đây các đạo hàm riêng được tính tại điểm M_o.

Phần tuyến tính chính đối với các số gia của các đối số của số gia của hàm khả vi u tại điểm M_o được gọi là vi phân của hàm này tại điểm M_o và ký hiệu là du. Do đó

$$du = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \dots + A_m\Delta x_m.$$

Bởi vì, hàm khả vi thì $A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, và $\Delta x_i = dx_i$, nên biểu thức vi phân có thể được viết như sau:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m. \tag{1}$$

Công thức (1) đúng cả trong trường hợp các đối số $x_1, x_2, \dots, x_m$ là những hàm khả vi của các biến mới $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Đạo hàm riêng của $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ theo biến x_n, tức là biểu thức $\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$, được gọi là đạo hàm riêng cấp hai và ký hiệu bằng một trong những ký hiệu sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n}, \quad u^{(2)}_{x_k x_n}.$$

Đồng thời, nếu $k \neq n$ thì đạo hàm riêng trên được gọi là đạo hàm hỗn hợp. Tương tự ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp cao hơn hai. Nếu hàm khả vi tại điểm nào đấy n lần, thì tại điểm này đạo hàm hỗn hợp cấp n tùy ý không phụ thuộc vào thứ tự của các biến được lấy đạo hàm.

Vi phân của du, tức là biểu thức $d(du)$, được gọi là vi phân cấp hai và ký hiệu là d^2u. Tương tự: $d(d^2u) = d^3u$; $d(d^3u) = d^4u, \dots$ Đối với vi phân cấp cao ta có công thức tượng trưng sau:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n u.$$

3. Đạo hàm hàm hợp. Nếu hàm $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ khả vi, thì

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

4. Đạo hàm theo hướng Građiên. Giả sử cho hàm khả vi $u = f(x, y, z)$ tại lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và hướng l được đặc trưng bởi các côsin chỉ phương: $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Khi đó đạo hàm theo hướng l được tính theo công thức:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Građiên của hàm $u = f(x, y, z)$ tại điểm M_0 là một vectơ (ký hiệu là grad$u$) có các tọa độ bằng những đạo hàm tương ứng: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ lấy tại điểm M_0. Như vậy

$$\mathrm{grad}\,u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Đồng thời kh đó ta có thể viết

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{A}, \mathrm{grad}\,u), \text{ trong đó } \mathbf{A} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Građiên của hàm u tại điểm M_0 đặc trưng cho hướng và đại lượng độ tăng lớn nhất của hàm đó tại điểm M_0. Do đó

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\,\mathrm{grad}\,u\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Vectơ grad$u$ tại điểm M_0 đã cho vuông góc với mặt mức của hàm $u = f(x, y, z)$ đi qua điểm M_0.

30. Tìm $f'_x(x, 1)$, nếu $f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Giải. Theo định nghĩa đạo hàm riêng ta có:

$$f'_x(x, 1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, 1) - f(x, 1)}{\Delta x}.$$

Bởi vì $f(x + \Delta x, 1) = x + \Delta x$, $f(x, 1) = x$, nên

$$f'_x(x, 1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

31. Tìm $f'_x(0, 0)$ và $f'_y(0, 0)$ nếu $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Hàm số đó có khả vi tại điểm $O(0, 0)$ hay không?

Giải. Từ định nghĩa của đạo hàm riêng ta có:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \, . \, 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \, . \, \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Để nghiên cứu tính khả vi của hàm đã cho tại điểm $O(0, 0)$, ta viết số gia của hàm số đó tại điểm này:

$$\Delta f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \, . \, \rho, \text{ ở đây } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2};$$

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sqrt[3]{\Delta x \, . \, \Delta y} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Bởi vì $A_1 = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$, $A_2 = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, nên để hàm khả vi, thì hàm $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ phải là vô cùng bé khi $\rho \to 0$, tức là khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Giả sử $\Delta x = \dfrac{1}{n}$, $\Delta y = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, hiển nhiên $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$ khi $n \to \infty$. Vì dãy điểm $M_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ khi $n \to \infty$ tiến tới điểm $O(0, 0)$, còn dãy tương ứng các giá trị của hàm $\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}$ tiến tới $+\infty$ khi $n \to \infty$ nên hàm $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ không phải là vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Vì vậy hàm $f(x, y)$ không khả vi tại điểm $O(0, 0)$.

32. Hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ có khả vi tại điểm $O(0, 0)$ hay không?

Giải. Ta tìm các đạo hàm riêng:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1.$$

Biểu diễn số gia của hàm $f(x, y)$ tại điểm $O(0, 0)$ dưới dạng:

$$\Delta f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} = \Delta x + \Delta y + (\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y)$$
$$= f'_x(0,0)\,\Delta x + f'_y(0,0)\,\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \, . \, \rho$$

ở đây $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$.

Chú ý rằng, dãy $\varepsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}}$

($n = 1, 2, \ldots$) không phải là vô cùng bé khi $n \to \infty$ (tức là khi $\Delta x = \frac{1}{n} \to 0$, $\Delta y = \frac{1}{n} \to 0$), ta kết luận rằng $\varepsilon\rho \neq o(\rho)$ khi $\rho \to 0$, và hàm $f(x, y)$ không khả vi tại điểm $O(0, 0)$.

33. Khảo sát tính khả vi của hàm $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ khi $x^2 + y^2 > 0$ và $f(0,0) = 0$ tại điểm $O(0, 0)$.

Giải. Như trong thí dụ trước, ta tìm các đạo hàm riêng:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^2} e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} e^{-\frac{1}{\Delta y^2}} = 0.$$

Do số gia của hàm tại điểm $O(0, 0)$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\Delta f(0, 0) = e^{-\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) . \rho$$

trong đó $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} . e^{-\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho^2}} \to 0$

khi $\rho \to 0$, vì vậy ta suy ra ngay rằng hàm $f(x, y)$ khả vi tại điểm $O(0,0)$.

34. Chứng minh rằng hàm $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ liên tục tại điểm $O(0, 0)$, có cả hai đạo hàm riêng $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ tại điểm đó, tuy nhiên hàm này không khả vi tại $O(0, 0)$.

Hãy nói rõ dáng điệu của các đạo hàm $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ trong lân cận điểm $O(0, 0)$.

Giải. Sử dụng định nghĩa của đạo hàm, ta tìm được

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|0 . \Delta x|}}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta y . 0|}}{\Delta y} = 0.$$

Bởi vì $\Delta f(0, 0) = \sqrt{|\Delta x . \Delta y|} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ \dfrac{\sqrt{|\Delta x . \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) . \rho$

ở đây $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\sqrt{|\Delta x . \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, còn $\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}}} \to \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$,

nên hàm $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ không phải là vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Từ đó suy ra hàm $f(x, y)$ không khả vi tại điểm $O(0, 0)$.

Từ $f'_x(x, y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\dfrac{y}{x}\right|}\ \mathrm{sgn}x$ khi $x \neq 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f'_x\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$, suy ra đạo hàm $f'_x(x, y)$ không giới nội tại lân cận điểm $O(0, 0)$. Kết luận đó cũng đúng đối với đạo hàm $f'_y(x, y)$.

35. Chứng minh rằng hàm $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^6 + y^2}$ nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0, 0) = 0$, gián đoạn tại $x = 0$, $y = 0$, nhưng có các đạo hàm riêng tại điểm $O(0, 0)$.

Giải. Từ các hệ thức $M_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^3}\right) \to O(0, 0)$ khi $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^3}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^6}}{\dfrac{1}{n^6} + \dfrac{1}{n^6}} = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$, suy ra rằng hàm $f(x, y)$ gián đoạn tại điểm $O(0, 0)$. Từ định nghĩa đạo hàm riêng ta tìm được

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

36. Chứng minh rằng hàm $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0, 0) = 0$, trong lân cận của điểm $O(0, 0)$ liên tục và có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ giới nội, tuy nhiên hàm đó không khả vi tại điểm $O(0, 0)$.

Chứng minh. Khi $x^2 + y^2 \neq 0$ hàm $f(x, y)$ liên tục vì là hàm sơ cấp. Từ bất đẳng thức hiển nhiên $|f(x, y)| = \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}$ và $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}} = 0$

ta có: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

Vậy hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm $O(0, 0)$.

Ta có:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \ x^2 + y^2 \neq 0,$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \ x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Từ đó và từ bất đẳng thức $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, ta chứng tỏ được rằng

$$|f'_x(x, y)| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|xy|}{x^2+y^2} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{3}{2}, \ |f'_y(x, y)| \leqslant \frac{3}{2}$$

tức là đạo hàm đã chỉ ra giới nội.

Ta viết số gia của hàm $f(x, y)$ tại điểm $O(0, 0)$ dưới dạng:

$$\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x\, \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$$

ở đây $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Dễ dàng thấy rằng hàm $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ không phải là vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, và vì vậy hàm $f(x, y)$ không khả vi tại điểm $O(0, 0)$.

37. Chứng minh rằng hàm $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$ nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0, 0) = 0$, có trong lân cận điểm $O(0, 0)$, các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ gián đoạn tại điểm $(0, 0)$ và không giới nội trong lân cận bất kỳ của điểm đó. Tuy nhiên hàm này lại khả vi tại điểm $(0, 0)$.

Giải. Nếu $x^2 + y^2 \neq 0$, thì sử dụng các công thức và quy tắc tính đạo hàm, ta tìm được các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f_y(x, y)$:

$$f'_x(x, y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Nếu $x = 0$, $y = 0$, thì ta sẽ tìm các đạo hàm $f'_x(0, 0)$ và $f'_y(0, 0)$ từ định nghĩa:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x} = 0.$$

Tương tự ta tìm được:

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ gián đoạn tại điểm $O(0, 0)$ và không giới nội trong lân cận bất kỳ của điểm này. Muốn thế ta chọn dãy $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ tới điểm $O(0, 0)$ sao cho $\cos\dfrac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 1$ tức là $\dfrac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 2n\pi$.

Chẳng hạn: $x_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$; $y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Bởi vì $x_n \to 0$ và $y_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên dãy điểm $\{(x_n, y_n)\}$ rơi vào lân cận bất kỳ của điểm $(0, 0)$. Khi đó dãy tương ứng các giá trị của hàm $f'_x(x_n, y_n) = -2\sqrt{n\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tiến tới $-\infty$. Vì vậy đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ gián đoạn tại điểm $(0, 0)$ và không giới nội trong lân cận bất kỳ của điểm đó.

Tương tự ta cũng có kết quả đối với $f'_y(x, y)$. Bởi vì $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, còn số gia $\Delta f(0, 0)$ biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho\,\varepsilon(\rho),$$

ở đây $\varepsilon(\rho) = \rho\sin\dfrac{1}{\rho^2} \to 0$ khi $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ nên hàm $f(x, y)$ khả vi tại điểm $O(0, 0)$.

38. Hãy kiểm tra đẳng thức $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, nếu:

a) $u = x^{y^2}$, b) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Giải. a) Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2}\ln x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x).$$

Từ đó suy ra đẳng thức $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ được thỏa mãn với tất cả các điểm (x, y) thuộc miền xác định của đạo hàm hỗn hợp: $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

b) Tương tự bài trước ta tìm được các đạo hàm hỗn hợp:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(xy - x^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{x}{4}(xy - x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2}(xy^3 - x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{x}{4}(xy - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

và thấy rằng chúng bằng nhau trong miền xác định của chúng:

$$0 < \frac{x}{y} < 1.$$

Các ví dụ này khẳng định sự bằng nhau của các đạo hàm hỗn hợp liên tục, có thứ tự lấy đạo hàm khác nhau.

39. Giả sử $f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0, 0) = 0$. Chứng minh rằng $f''_{yx}(0, 0) \neq f''_{xy}(0, 0)$.

Giải. Khi $x^2 + y^2 \neq 0$ ta có:

$$f'_x(x, y) = y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$f'_y(x, y) = x\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Nếu $x = y = 0$, thì các đạo hàm $f'_x(0, 0)$ và $f'_y(0, 0)$ được tính trực tiếp từ định nghĩa:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Sử dụng các giá trị này, ta tìm được các đạo hàm hỗn hợp:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1;$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1.$$

Từ đó ta khẳng định rằng $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Nhận xét rằng tại điểm $O(0, 0)$ không thỏa mãn điều kiện đủ để các đạo hàm hỗn hợp liên tục.

Thật vậy khi $x^2 + y^2 \neq 0$ ta có:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

Do dãy $\left\{M_n\left(\frac{a}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ hội tụ tới $(0, 0)$ khi $n \to \infty$, còn

$$\lim_{n \to \infty} f''_{xy}(M_n) = \lim_{n \to \infty} f''_{yx}(M_n) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\left(1 + \frac{8a^2}{(a^2 + 1)^2}\right),$$

nên các đạo hàm hỗn hợp gián đoạn tại điểm $(0, 0)$.

40. Nếu $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ khi $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0, 0) = 0$ thì $f''_{xy}(0, 0)$ có tồn tại hay không?

Giải. Khi $x^2 + y^2 \neq 0$ ta có $f'_x(x, y) = \dfrac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Sử dụng định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

Vì giới hạn

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{2\Delta y^3}{\Delta y^4}}{\Delta y}$$ không tồn tại nên $f''_{xy}(0, 0)$ tại điểm $(0, 0)$ cũng không tồn tại.

41. Chứng minh rằng: Nếu hàm khả vi $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, thỏa mãn phương trình

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = pu \tag{1}$$

thì nó là hàm thuần nhất cấp p.

Chứng minh. Xét hàm $F(t) = \dfrac{f(tx_o, ty_o, tz_o)}{t^p}$, (2)

nó xác định, liên tục và khả vi với mọi $t > 0$ sao cho điểm $N(tx_o, ty_o, tz_o) \in G$.

Tính đạo hàm của hàm $F(t)$ ta nhận được biểu thức có tử số bằng

$$t(x_o f'_x(tx_o, ty_o, tz_o) + y_o f'_y(tx_o, ty_o, tz_o) + \\ + z_o f'_z(tx_o, ty_o, tz_o)) - pf(tx_o, ty_o, tz_o). \quad (3)$$

Trong đẳng thức (1) ta thay x, y, z bởi tx_o, ty_o, tz_o tương ứng, ta kết luận rằng biểu thức (3) bằng không. Vì vậy $F'(t) = 0$ và $F(t) = C = \text{const}$. Để xác định hằng số C, trong (2), đặt $t = 1$ ta được $C = f(x_o, y_o, z_o)$. Từ đó sử dụng đẳng thức (2) ta nhận được $f(tx_o, ty_o, tz_o) = t^p f(x_o, y_o, z_o)$, $(x_o, y_o, z_o) \in G$, đó là điều phải chứng minh.

42. Chứng minh rằng nếu $f(x, y, z)$ là hàm khả vi, thuần nhất cấp p, thì các đạo hàm riêng của nó $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ là những hàm thuần nhất cấp $p - 1$.

Chứng minh. Vì $f(x, y, z)$ là hàm thuần nhất cấp p nên ta có đẳng thức $f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z)$, đồng thời biểu thức ở vế trái khả vi. Đạo hàm đẳng thức cuối theo x ta có

$$f'_x(tx, ty, tz) \,.\, t = t^p f'_x(x, y, z)$$

hay

$$f'_x(tx, ty, tz) = t^{p-1} f'_x(x, y, z).$$

Từ đẳng thức cuối suy ra $f'_x(x, y, z)$ là hàm thuần nhất cấp $p - 1$. Đối với các đạo hàm $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ ta cũng chứng minh tương tự.

43. Giả sử $u = f(x, y, z)$ là hàm hai lần khả vi, thuần nhất bậc n. Chứng minh rằng:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)\,u. \quad (1)$$

Chứng minh. Do u là hàm thuần nhất cấp n nên nó thỏa mãn phương trình:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu. \quad (2)$$

Thay x, y, z bởi tx_o, ty_o, tz_o trong (2) và đạo hàm nó theo t ta có:

$$x_o u'_x + y_o u'_y + z_o u'_z + tx_o^2 u''_{x^2} + ty_o^2 u''_{y^2} + tz_o^2 u''_{z^2} + \\ + t(2x_o y_o u''_{xy} + 2x_o z_o u''_{xz} + 2y_o z_o u''_{yz}) = n(x_o u'_x + y_o u'_y + z_o u'_z),$$

ở đây đạo hàm được tính tại điểm $M_o(ty_o, ty_o, tz_o)$. Trong đẳng thức cuối cùng đặt $t = 1$, ta có:

$$x_0^2 u''_{x^2} + y_0^2 u''_{y^2} + z_0^2 u''_{z^2} + 2(x_0 y_0 u''_{xy} + y_0 z_0 u''_{yz} + x_0 z_0 u''_{xz})$$

$$= (n-1)(x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z).$$

Từ đó, và từ (2) ta trực tiếp suy ra:

$$\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Bởi vì (x_0, y_0, z_0) là điểm bất kỳ, nên (1) được chứng minh.

44. Chứng minh rằng: nếu $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, thì $d^2u \geqslant 0$.

Chứng minh. Ký hiệu $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$, và vi phân liên tiếp biểu thức $u = \sqrt{\varphi}$ ta có:

$$du = \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}},\ d^2u = \frac{\sqrt{\varphi}\, d^2\varphi + d\varphi \dfrac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}}{2\varphi} = \frac{2\varphi d^2\varphi + (d\varphi)^2}{4\sqrt{\varphi^3}}.$$

Bởi vì $d^2\varphi = d(d(x^2 + y^2 + z^2)) = d(2xdx + 2ydy + 2zdz) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \geqslant 0$, nên $d^2u \geqslant 0$.

45. Giả sử x, y là bé theo giá trị tuyệt đối, hãy tìm các công thức gần đúng đối với các biểu thức sau:

a) $(1+x)^m (1+y)^m$; b) $\ln(1+x) . \ln(1+y)$; c) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy}$

Giải. Giả sử hàm $f(x, y, \ldots, z)$ khả vi tại lân cận điểm $(0, 0, \ldots, 0)$. Khi đó:

$$\Delta f(0, 0, \ldots, 0) = f(x, y, \ldots, z) - f(0, 0, \ldots, 0) =$$

$= f'_x(0, 0, \ldots, 0)x + f'_y(0, 0, \ldots, 0)y + \ldots + f'_z(0, 0, \ldots, 0)z + o(\rho)$ ở đây $o(\rho)$ là vô cùng bé cấp cao hơn so với $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + \ldots + z^2}$. Bỏ qua $o(\rho)$ và chuyển $f(0, 0, \ldots, 0)$ sang vế phải, ta nhận được đẳng thức gần đúng:

$$f(x, y, \ldots, z) \approx f(0, 0, \ldots, 0) + f'_x(0, 0, \ldots, 0)x + \\ + f'_y(0, 0, \ldots, 0)y + \ldots + f'_z(0, 0, \ldots, 0)z. \quad (1)$$

Bởi vì các hàm đang xét khả vi tại lân cận điểm $M(0, 0)$, nên các công thức gần đúng tương ứng sẽ có dạng như sau:

a) $(1+x)^m(1+y)^m \approx 1 + mx + my$;

b) sử dụng đẳng thức gần đúng (1) viết cho một biến:

$f(t) \approx f(0) + f(0)t$, ta nhận được: $\ln(1+x) \approx x$, $\ln(1+y) \approx y$. Vì vậy

$$\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy.$$

c) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy} \approx x + y.$

46. Bằng cách thay số gia của hàm bởi vi phân, hãy tính gần đúng:

a) $1,002 \,.\, 2,003^2 \,.\, 3,004^3$;

b) $\dfrac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}}$.

c) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$;

d) $\sin 29^\circ \,.\, \mathrm{tg}46^\circ$; e) $0,97^{1,05}$.

Tính.

a) Viết đẳng thức (1) trong bài trước đối với hàm $f(x, y, z) = (1 + x) \times \times (2 + y)^2 (3 + z)^3$, ta có:

$$(1 + x)(2 + y)^2(3 + z)^3 \approx 1 \,.\, 2^2 \,.\, 3^3 + 2^2 \,.\, 3^3 x + 2^2 \,.\, 3^3 y + 2^2 \,.\, 3^3 z.$$

Trong đẳng thức này thay $x = 0,002$; $y = 0,003$; $z = 0,004$; ta nhận được

$$1,002 \times 2,003^2 \times 3,004^3 \approx 108 + 0,216 + 0,324 + 0,432 = 108,972.$$

b) Đẳng thức gần đúng của hàm $f(x, y, z) = \dfrac{(1 + x)^2}{\sqrt[3]{(1 - y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$ là

$f(x, y, z) \approx 1 + 2x + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4}$ và đặt $x = 0,03$; $y = 0,02$; $z = 0,05$; ta có:

$$\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}} \approx 1 + 0,06 + 0,0066 - 0,0125 \approx 1,054.$$

c) Ta có $\sqrt{(1 + x)^3 + (2 - y)^3} \approx 3 + \dfrac{x}{2} - 2y$. Giả sử $x = 0,02$; $y = 0,03$;

khi đó:

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3 + 0,01 - 0,06 = 2,95.$$

d) Trong đẳng thức gần đúng (xem bài trước)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\,x + $$
$$+ \sin\frac{\pi}{6} \,.\, \frac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}\,x.$$

đặt $x = 0,017$, khi đó:

$$\sin 29^\circ \mathrm{tg} 46^\circ \approx 0,5 - 0,866 \,.\, 0,017 + 0,017 \approx 0,502.$$

e) Viết đẳng thức gần đúng của hàm $(1 - x)^{1+y}$: $(1 - x)^{1+y} \approx 1 - x$. Đặt $x = 0,03$; $y = 0,05$; ta có:

$$0,97^{1,05} \approx 1 - 0,03 = 0,97.$$

47. Chứng minh rằng hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ giới nội trong một miền lồi E nào đó, thì liên tục đều trong miền này.

Chứng minh. Giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là hai điểm bất kỳ thuộc miền lồi E. Do E lồi nên điểm $(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2))$ cũng thuộc E với $0 \leqslant t \leqslant 1$. Hàm $\varphi(t) = f(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2))$ có đạo hàm giới nội khi $t \in (0, 1)$:

$$\varphi'(t) = (x_1 - x_2)f'_x(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2)) + \\ + (y_1 - y_2)\ f'_y(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2)) \qquad (1)$$

và

$$\varphi(0) = f(x_2, y_2),\ \varphi(1) = f(x_1, y_1).$$

Áp dụng công thức Lagrăng và (1), ta tìm được:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = \varphi'(\xi) = \\ = (x_1 - x_2) f'_x(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 + \xi(y_1 - y_2)) + \\ + (y_1 - y_2)f'_y(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 + \xi(y_1 - y_2)), \\ 0 < \xi < 1 \qquad (2)$$

Vì các đạo hàm riêng $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ giới nội nên tồn tại các hằng số L_1, L_2:

$$|f'_x| < L_1,\ |f'_y| < L_2,\ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra bất đẳng thức

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant |x_1 - x_2|\, L_1 + |y_1 - y_2|\, L_2 \qquad (4)$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ bất kỳ, khi đó chọn $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2L_1}, \frac{\varepsilon}{2L_2}\right)$, để khi $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$ với bất kỳ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ thì từ (4) ta có: $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Nghĩa là hàm $f(x, y)$ liên tục đều trong miền E.

48. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x, y)$ liên tục theo biến x với mỗi giá trị y cố định và có đạo hàm theo biến y giới nội, thì hàm này liên tục theo cả hai biến x và y.

Chứng minh. Từ giả thiết, $\exists M > 0$ để

$$|f'_y(x, y)| \leqslant M \qquad (1)$$

$\forall (x, y) \in G$, G là miền xác định của hàm $f(x, y)$.

Giả sử $\varepsilon > 0$ bất kỳ, $(x_o, y_o) \in G$ là một điểm tùy ý, khi đó:

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| \leqslant |f(x, y) - f(x, y_o)| + |f(x, y_o) - \\ - f(x_o, y_o)| \leqslant |f'_y(x, y_o + \theta(y - y_o))|\ |y - y_o| + \\ + |f(x, y_o) - f(x_o, y_o)|. \qquad (2)$$

Vì hàm $f(x, y)$ liên tục theo biến x với $y = y_o$, nên $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_o)$ để

$$|f(x, y_o) - f(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (3)$$

khi $|x - x_o| < \delta_1$. Từ (2), (1) và (3) ta nhận được:

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| \leqslant M\,|y - y_o| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

khi $|x - x_o| < \delta$, $|y - y_o| < \delta$, ở đây $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta_1\right\}$. Đó là điều phải chứng minh.

49. Giả sử $P_n(x, y, z)$ là đa thức thuần nhất cấp n. Chứng minh rằng, $d^n P_n(x, y, z) = n!\, P_n(dx, dy, dz)$.

Chứng minh. Giả sử (x, y, z) là điểm bất kỳ thuộc miền xác định của hàm $P_n(x, y, z)$. Vì $P_n(x, y, z)$ là đa thức thuần nhất cấp n, nên ta có đẳng thức:

$$P_n(tx, ty, tz) = t^n P_n(x, y, z). \tag{1}$$

Tính đạo hàm cấp n cả hai vế của (1) ta có:

$$P_n^{(n)}(tx, ty, tz) = n!\, P_n(x, y, z). \tag{2}$$

Ký hiệu vế trái của (1) là $F(t)$ và đạo hàm liên tiếp ta có:

$$F'(t) = \frac{\partial P_n}{\partial x} x + \frac{\partial P_n}{\partial y} y + \frac{\partial P_n}{\partial z} z = \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z\right) P_n;$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} z^2 + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial y} xy +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial z} xz + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial y \partial z} yz = \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z\right)^2 P_n.$$

Sau nữa, bằng phương pháp quy nạp dễ dàng chứng tỏ rằng:

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z\right)^n P_n(tx, ty, tz).$$

Do P_n là đa thức thuần nhất cấp n nên các đạo hàm riêng cấp một là các đa thức thuần nhất cấp $n - 1$ (xem bài 42). Từ đó ta suy ra rằng các đạo hàm riêng cấp n là các đa thức thuần nhất cấp không, vì vậy nó là hằng số, tức là không phụ thuộc t.

Vì vậy có thể viết:

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z\right)^n P_n(x, y, z). \tag{3}$$

So sánh (2) với (3) và thay x, y, z bằng dx, dy, dz ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

50. Cho $Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$. Tìm Au và $A^2u = A(Au)$, nếu:

a) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; b) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Giải.

a) Ta có: $Au = x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + y\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) =$

$$= x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x}{x^2+y^2} = -u.$$

Do toán tử A thuần nhất, nên $A^2u = A(Au) = A(-u) = -Au = -(-u) = u$.

b) Tương tự: $Au = x\dfrac{\partial}{\partial x}(\ln\sqrt{x^2+y^2}) + y\dfrac{\partial}{\partial y}(\ln\sqrt{x^2+y^2})$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1,\ A^2u = A(Au) = A1 = 0.$$

51. Cho $\Delta_1 u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, $\Delta_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Tìm $\Delta_1 u$ và $\Delta_2 u$ nếu $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Giải. Ký hiệu $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ta tìm được:

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)^2 = \left(-\frac{x}{r^3}\right)^3 + \left(-\frac{y}{r^3}\right)^2 +$$

$$+ \left(-\frac{z}{r^3}\right)^2 = \frac{1}{r^4};$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Bởi vì

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5};\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

nên $\Delta_2 u = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3}{r^3} = 0\ (r \neq 0)$.

52. Chứng minh rằng dạng vi phân cấp bất kỳ của hàm $f(\xi, \eta, \zeta)$ không thay đổi dạng (bất biến) khi thay các biến số ξ, η, ζ bằng những hàm tuyến tính:

$$\xi = a_1x + a_2y + a_3z;\quad \eta = b_1x + b_2y + b_3z;\quad \zeta = c_1x + c_2y + c_3z.$$

Chứng minh. Vi phân cấp hai của hàm sẽ là:

$$d^2f = f''_{\xi^2}\,d\xi^2 + f''_{\eta^2}\,d\eta^2 + f''_{\zeta^2}\,d\zeta^2 + 2f''_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ 2f''_{\xi\zeta}\,d\xi\,d\zeta + 2f''_{\eta\zeta}\,d\eta\,d\zeta + f'_{\xi}\,d^2\xi + f'_{\eta}\,d^2\eta + f'_{\zeta}\,d^2\zeta.$$

Bởi vì các hàm ξ, η, ζ tuyến tính, nên $d^2\xi = 0$, $d^2\eta = 0$, $d^2\zeta = 0$ do đó ta có:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,d\zeta\right)^2 f.$$

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được rằng:

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,d\zeta\right)^n f$$

tức là dạng vi phân cấp bất kỳ của hàm không đổi (bất biến) khi thay các biến số bằng những hàm tuyến tính.

Tìm vi phân toàn phần cấp một và cấp hai của các hàm hợp sau (x, y, z là các biến độc lập).

53. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Giải. Vi phân u như hàm hợp, ta được:

$$du = f'd\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f'\,\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$d^2u = d(f')\,\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'd\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Bởi vì $\qquad d(f') = f''\,\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $d\left(\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \dfrac{(ydx - xdy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$

nên cuối cùng ta tìm được:

$$d^2u = f''\,\frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f'\,\frac{(ydx - xdy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},\ (x^2 + y^2 \neq 0).$$

54. $u = f(\xi, \eta)$, ở đây $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Giải. Do các biến ξ và η là những hàm tuyến tính, nên dạng vi phân cấp bất kỳ là bất biến (xem thí dụ 52). Vì vậy

$$du = f'_1 d\xi + f'_2 d\eta;$$

$$d^2u = f''_{11}\,d\xi^2 + 2f''_{12}\,d\xi\,d\eta + f''_{22}\,d\eta^2.$$

Thay $d\xi$ và $d\eta$ bởi những giá trị của chúng, tìm được từ đẳng thức $\xi = x + y$ $\eta = x - y$, ta nhận được

$$du = f'_1(dx + dy) + f'_2(dx - dy);$$

$$d^2u = f''_{11}\,(dx + dy)^2 + 2f''_{12}\,(dx^2 - dy^2) + f''_{22}\,(dx - dy)^2.$$

55. $u = f(\xi, \eta)$, ở đây $\xi = xy$, $\eta = \dfrac{x}{y}$.

Giải. Vi phân u như hàm hợp, ta nhận được :

$$du = f'_1(ydx + xdy) + f'_2\,\frac{ydx - xdy}{y^2};$$

$$d^2u = f''_{11}(ydx + xdy)^2 + 2f''_{12}\,\frac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} +$$

$$+ f''_{22}\left(\frac{ydx - xdy}{y}\right)^2 + 2f'_1\,dxdy - 2f'_2\,\frac{(ydx - xdy)dy}{y^3}.$$

56. $u = f(x, y, z)$, ở đây $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Giải. Tương tự các bài trước :

$$du = f'_1\,dt + f'_2\,2tdt + f'_3\,3t^2dt = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3)\,dt;$$

$$d^2u = f''_{11}\,dt^2 + f''_{22}\,4t^2dt^2 + f''_{33}\,9t^4dt^2 + 4f''_{12}\,tdt^2 + 6t^2f''_{13}\,dt^2 +$$

$$+ 12t^3f''_{23}\,dt^2 + 2f'_2\,dt^2 + 6tf'_3\,dt^2 = (f''_{11} + 4t^2f''_{22} + 9t^4f''_{33} +$$

$$+ 4tf''_{12} + 6t^2f''_{13} + 12t^3f''_{23} + 2f'_2 + 6tf'_3)\,dt^2.$$

57. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, ở đây $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

Giải. Áp dụng quy tắc vi phân của hàm hợp, ta có :

$$du = f'_1(2xdx + 2ydy) + f'_2(2xdx - 2ydy) + f'_3(2ydx + 2xdy);$$

$$d^2u = 4f''_{11}(xdx + ydy)^2 + 4f''_{22}(xdx - ydy)^2 + 4f''_{33}(ydx + xdy)^2 +$$

$$+ 8f''_{12}(x^2dx^2 - y^2dy^2) + 8f''_{13}(xdx + ydy)(ydx + xdy) +$$

$$+ 8f''_{23}(xdx - ydy)(ydx + xdy) + 2f'_1(dx^2 + dy^2) + 2f'_2(dx^2 - dy^2) +$$

$$+ 4f'_3dxdy.$$

Tìm d^nu, nếu :

58. $u = f(ax + by + cz)$.

Giải. Vì trong trường hợp này dạng vi phân bất biến (xem bài 52), nên

$$d^nu = f^{(n)}\,(d(ax + by + cz))^n = f^{(n)}\,(adx + bdy + cdz)^n.$$

59. $u = f(ax, by, cz)$.

Giải. Do tính bất biến của dạng vi phân cấp n (xem bài 52), ta có :

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial s}\,adx + \frac{\partial}{\partial t}\,bdy + \frac{\partial}{\partial r}\,cdz\right)^n f(s, t, r),$$

ở đây $s = ax$, $t = by$, $r = cz$.

60. $u = f(s, t, r)$, ở đây $s = a_1x + b_1y + c_1z$, $t = a_2x + b_2y + c_2z$; $r = a_3x + b_3y + c_3z$.

Giải. Sử dụng tính bất biến của dạng vi phân cấp n (xem bài 52), ta có:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial s}ds + \frac{\partial}{\partial t}dt + \frac{\partial}{\partial r}dr\right)^n f(s, t, r) =$$

$$= \left((a_1dx + b_1dy + c_1dz)\frac{\partial}{\partial s} + (a_2dx + b_2dy + c_2dz)\frac{\partial}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + (a_3dx + b_3dy + c_3dz)\frac{\partial}{\partial r}\right)^n f(s, t, r).$$

61. Giả sử $u = f(r)$, ở đây $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ và f là hàm khả vi hai lần. Chứng minh rằng $\Delta u = F(r)$, ở đây

$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ là toán tử Laplaxơ,

và tìm hàm $F(r)$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'\frac{x}{r};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''\frac{x^2}{r^2} + f'\frac{1}{r} - f'\frac{x^2}{r^3}.$$

Tương tự ta tìm được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''\frac{y^2}{r^2} + f'\frac{1}{r} - f'\frac{y^2}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''\frac{z^2}{r^2} + f'\frac{1}{r} - f'\frac{z^2}{r^3}.$$

Như vậy

$$\Delta u = f''\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3}{r}f' - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}f' =$$

$$= f'' + \frac{3}{r}f' - \frac{1}{r}f' = f'' + \frac{2}{r}f' = F(r).$$

62. Chứng minh rằng, nếu hàm $u = u(x, y)$ thỏa mãn phương trình Laplaxơ $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, thì hàm $v = u\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$ cũng thỏa mãn phương trình đó.

Chứng minh. Để thuận tiện, ta ký hiệu $\varphi = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $\psi = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Ta có:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_1'\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_2'\frac{\partial \psi}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial y} = u_1'\frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_2'\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u_{11}''\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2u_{12}''\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + u_{22}''\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + u_1'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u_2'\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = u_{11}''\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2u_{12}''\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + u_{22}''\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + u_1'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + u_2'\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Từ đó

$$\Delta v = u''_{11}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right) + u''_{22}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right) +$$

$$+ 2u''_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + u'_1\,\Delta\varphi + u'_2\Delta\psi. \qquad (1)$$

Tính các đạo hàm

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3};\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3};$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3};\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3};$$

ta thấy rằng

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\ \Delta\varphi = 0,\ \Delta\psi = 0. \qquad (2)$$

Như vậy, từ (1) và (2) và từ $\Delta u = 0$ suy ra

$$\Delta v = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\Delta u = 0.$$

63. Chứng minh rằng, nếu hàm $u = u(x, t)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, thì hàm $v = \frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right)$ $(t > 0)$ cũng thỏa mãn phương trình đó.

Chứng minh. Tính các đạo hàm

$$v'_t = \left(-\frac{u}{2a\sqrt{t^3}} + \frac{x^2u}{4a^3\sqrt{t^5}} - \frac{xu'_1}{a^3\sqrt{t^5}} + \frac{u'_2}{a^5\sqrt{t^5}}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

$$v''_{x^2} = \left(-\frac{u}{2a^3\sqrt{t^3}} + \frac{x^2u}{4a^5\sqrt{t^5}} - \frac{xu'_1}{a^5\sqrt{t^5}} + \frac{u''_{11}}{a^5\sqrt{t^5}}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

và thay chúng vào biểu thức $v'_t - a^2v''_{x^2}$. Sau khi đơn giản ta nhận được

$$v'_t - a^2v''_{x^2} = \frac{1}{a^5\sqrt{t^5}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,(u'_2 - a^2u''_{11}).$$

Bởi vì $u'_2 - a^2u''_{11} = 0$, nên $v'_t - a^2v''_{x^2} = 0$.

64. Chứng minh rằng hàm $u = \frac{1}{r}$, ở đây $r = \sqrt{(a-x)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, thỏa mãn phương trình Laplaxơ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ khi } r \neq 0.$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x-a}{r} = -\frac{x-a}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} \frac{3(x-a)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5}; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

Cộng ba đẳng thức cuối với nhau, ta nhận được:

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

65. Giả sử hàm $u_1 = u_1(x, y, z)$ và $u_2 = u_2(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình Laplaxơ $\Delta u = 0$. Chứng minh rằng hàm $v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)\, u_2(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình song điều hòa $\Delta(\Delta v) = 0$.

Chứng minh. Đạo hàm liên tiếp ta tìm được:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2xu_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2u_2 + 4x\frac{\partial u_2}{\partial x} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2u_2 + 4y\frac{\partial u_2}{\partial y} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_2 + 4z\frac{\partial u_2}{\partial z} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Vì vậy $\Delta v = \Delta u_1 + 6u_2 + 4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + (x^2 + y^2 + z^2)\,\Delta u_2$.

Chú ý rằng các hàm u_1 và u_2 thỏa mãn phương trình Laplaxơ, tức là $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = 0$, nên ta nhận được:

$$\Delta v = 6u_2 + 4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

Tìm các đạo hàm $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial z^2}$, rồi cộng chúng lại ta có:

$$\Delta(\Delta v) = 14\Delta u_2 + 4\left(x\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial z} + x\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial x} + \right.$$

$$\left. + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial z} + x\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial x} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial y} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3}\right).$$

Viết lại đẳng thức cuối cùng dưới dạng

$$\Delta(\Delta v) = 14\Delta u_2 + 4x\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2) + 4y\frac{\partial}{\partial y}(\Delta u_2) + 4z\frac{\partial}{\partial z}(\Delta u_2)$$

và sử dụng $\Delta u_2 = 0$, ta thấy đẳng thức $\Delta(\Delta v) = 0$ là đúng.

66. Giả sử $f(x, y, z)$ là hàm thuần nhất cấp n, khả vi m lần. Chứng minh rằng

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x, y, z).$$

Chứng minh. Giả sử (x, y, z) là một điểm cố định bất kỳ thuộc miền xác định của hàm $f(x, y, z)$, và $m \leqslant n$. Do tính thuần nhất ta có:

$$t^n f(x, y, z) = f(tx, ty, tz).$$

Đạo hàm liên tiếp m lần theo t:

$$nt^{n-1} f(x, y, z) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) f(tx, ty, tz)$$

$$n(n-1)t^{n-2} f(x, y, z) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} +$$

$$+ 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(tx, ty, tz),$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots(n-m+1)t^{n-m} f(x, y, z) =$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(tx, ty, tz),$$

và đặt $t = 1$, ta nhận được công thức cần chứng minh.

67. Giả sử $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ và $f(x, y, z) = F(u, v, w)$. Chứng minh rằng $xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$.

Chứng minh. Theo điều kiện đầu bài ta có

$$F(u, v, w) = f(\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}).$$

Đạo hàm đẳng thức này theo u, v, w ta tìm được

$$F'_u = f'_y \frac{w}{2\sqrt{uw}} + f'_z \frac{v}{2\sqrt{uv}},$$

$$F'_v = f'_x \frac{w}{2\sqrt{vw}} + f'_z \frac{u}{2\sqrt{uv}}, \tag{1}$$

$$F'_w = f'_x \frac{v}{2\sqrt{vw}} + f'_y \frac{u}{2\sqrt{uw}}.$$

Nhân lần lượt các đẳng thức (1) với u, v, w tương ứng rồi cộng chúng lại vế với vế, ta có:

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = f'_y \frac{uw}{2\sqrt{uw}} + f'_z \frac{uv}{2\sqrt{uv}} + f'_x \frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_y \frac{uw}{2\sqrt{uw}} +$$

$$+ f'_z \frac{uv}{2\sqrt{uv}} + f'_x \frac{vw}{2\sqrt{vw}} = \sqrt{vw}f'_x + \sqrt{uw}f'_y + \sqrt{uv}f'_z.$$

Từ đó và từ điều kiện của bài toán, cuối cùng ta tìm được:

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = xf'_x + yf'_y + zf'_z.$$

Bằng cách vi phân liên tiếp, hãy khử các hàm tùy ý φ và ψ:

68. $z = x + \varphi(x, y)$.

Giải. Tìm các đạo hàm riêng theo x và theo y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'.$$

Nhân đẳng thức đầu với x, đẳng thức thứ hai với $-y$ rồi cộng lại ta có:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

69. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'_1 + \varphi'_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi'_2$$

Cộng các đẳng thức này vế với vế, ta nhận được:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

70. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\psi, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\psi'.$$

Từ đó

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\psi\varphi'\psi' = z\varphi'\psi'.$$

Mặt khác $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \varphi'\psi'$. Do đó từ hai đẳng thức cuối ta trực tiếp suy ra :

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y} = z\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

71. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Giải. Sử dụng các đẳng thức :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi' + \frac{1}{y}\psi'\ ;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\varphi'' + \frac{1}{y^2}\psi''\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi' - \frac{x}{y^2}\psi'\ ;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\varphi'' + \frac{x^2}{y^4}\psi'' + \frac{2x}{y^3}\psi',$$

ta nhận được các hệ thức sau :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y}\psi'\ ;\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y}\psi'.$$

Từ đó ta suy ra :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

72. Tìm đạo hàm của $z = x^2 - y^2$ tại điểm $M(1, 1)$ theo hướng l lập với chiều dương của trục Ox một góc $\alpha = 60°$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial z(M)}{\partial l} = \frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta = 2\cos\alpha - 2\cos\beta.$$

Như vậy :

$$\frac{\partial z(M)}{\partial l} = 1 - \sqrt{3}$$

73. Tìm đạo hàm của hàm $z = \ln(x^2 + y^2)$ tại điểm $M(x_o, y_o)$ theo hướng l vuông góc với đường mức đi qua điểm đó.

Giải. Do vectơ grad$u$ tại điểm M trực giao với đường mức $C = \ln(x^2 + y^2)$ đi qua điểm M, nên các côsin chỉ phương của vectơ l bằng các côsin chỉ phương của vectơ grad$u$ tại điểm M, tức là

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial z(M)}{\partial x}}{|\operatorname{grad}u(M)|},\ \cos\beta = \frac{\dfrac{\partial z(M)}{\partial y}}{|\operatorname{grad}u(M)|}$$

Nhưng

$$\frac{\partial z(M)}{\partial x} = \frac{2x_o}{x_o^2 + y_o^2}, \quad \frac{\partial z(M)}{\partial y} = \frac{2y_o}{x_o^2 + y_o^2},$$

$$|\operatorname{gradu}(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial z(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(M)}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}},$$

vì vậy

$$\cos\alpha = \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}.$$

Do đó

$$\frac{\partial z(M)}{\partial l} = \frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}} \quad (x_o^2 + y_o^2 \neq 0).$$

74. Tìm đạo hàm của hàm $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ tại điểm $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ theo hướng pháp tuyến trong của đường cong $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm đó.

Giải. Tang của góc nghiêng của pháp tuyến đường cong đã cho được xác định bằng công thức

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{y'\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}$$

ở đây $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Từ đó ta có $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, còn các côsin chỉ phương của pháp tuyến trong được biểu diễn bằng các công thức :

$$\cos\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos\beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(ta chọn dấu trừ là do pháp tuyến trong). Sử dụng công thức đạo hàm theo hướng $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n} = \frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta.$$

Tính các đạo hàm :

$$\frac{\partial z(M)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \frac{\partial z(M)}{\partial y} = -\frac{\sqrt{2}}{b},$$

ta tìm được

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n} = \frac{b\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}.$$

75. Tìm đạo hàm của hàm $u = xyz$ tại điểm $M(1, 1, 1)$ theo hướng $\mathbf{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Đại lượng gradien của hàm tại điểm đó bằng bao nhiêu?

Giải. Hiển nhiên là

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u(M)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 1.$$

Theo công thức đạo hàm theo hướng, ta nhận được

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Đại lượng građiên được xác định theo công thức

$$|\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

76. Xác định góc giữa các građiên của hàm $u = x^2 + y^2 + z^2$ tại các điểm $A(\varepsilon, 0, 0)$ và $B(0, \varepsilon, 0)$.

Giải. Ta có:

$$\operatorname{grad} u(A) = \left\{\frac{\partial u(A)}{\partial x}, \frac{\partial u(A)}{\partial y}, \frac{\partial u(A)}{\partial z}\right\} = \{2\varepsilon, 0, 0\},$$

$$\operatorname{grad} u(B) = \left\{\frac{\partial u(B)}{\partial x}, \frac{\partial u(B)}{\partial y}, \frac{\partial u(B)}{\partial z}\right\} = \{0, 2\varepsilon, 0\}.$$

Từ đó $|\operatorname{grad} u(A)| = 2|\varepsilon|$; $|\operatorname{grad} u(B)| = 2|\varepsilon|$. Thay các giá trị này vào đẳng thức

$$(\operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B)) = |\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)| \cos\varphi,$$

ta nhận được

$$\cos\varphi = 0, \text{ tức là } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

77. Chứng minh rằng tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ góc giữa các građiên của các hàm $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ và $v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$ (a, b, c, m, n, p là các hằng số và $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) dần đến không, nếu điểm M_0 xa ra vô cùng.

Giải. Ta có:

$$\cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} u|\ |\operatorname{grad} v|},$$

ở đây

$$\operatorname{grad} u = \{2ax_0, 2by_0, 2cz_0\}$$

$$\operatorname{grad} v = \{2ax_0 + 2m, 2by_0 + 2n, 2cz_0 + 2p\}.$$

$$|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{(ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2},$$

$$|\operatorname{grad} v| = 2\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}.$$

Khi đó góc φ được xác định từ đẳng thức:

$$\cos\varphi = \frac{ax_0(ax_0 + m) + by_0(by_0 + n) + cz_0(cz_0 + p)}{\sqrt{((ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2)((ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2)}}.$$

Ta sẽ tính $\sin\varphi$ và chứng tỏ rằng $\sin\varphi \to 0$, nếu $\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2} \to \infty$:

$$|\sin\varphi| = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{(ax_on - by_om)^2 + (ax_op - cz_om)^2 + (by_op - cz_on)^2}{((ax_o)^2 + (by_o)^2 + (cz_o)^2)\,((ax_o + m)^2 + (by_o + n)^2 + (cz_o + p)^2)}}.$$

Sử dụng bất các đẳng thức $2|x_o \cdot y_o| \leqslant x_o^2 + y_o^2$, $2|x_oz_o| \leqslant x_o^2 + z_o^2$, $2|y_oz_o| \leqslant y_o^2 + z_o^2$ và ký hiệu đại lượng lớn nhất theo trị tuyệt đối của các hệ số của x_o^2, y^2, z_2 ở tử số là A^2 ta nhận được ước lượng:

$$(ax_on - by_om)^2 + (ax_op - cz_om)^2 + (by_op - cz_on)^2 \leqslant$$
$$\leqslant A^2(x^2 + y_o^2 + z_o^2).$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Giả sử $B = \min\{|a|, |b|, |c|\}$, khi đó $a^2x_o^2 + b^2y_o^2 + c^2z_o^2 \geqslant B^2(x_o^2 + y_o^2 + z_o^2)$. Như vậy ta có ước lượng:

$$0 \leqslant |\sin\varphi| \leqslant \frac{A\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}}{B\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}\cdot\sqrt{(ax_o + m)^2 + (by_o + n)^2 + (cz_o + p)^2}} =$$

$$= \frac{A}{B\sqrt{(ax_o + m)^2 + (by_o + n)^2 + (cz_o + p)^2}} \qquad (1)$$

Hiển nhiên là, nếu $\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2} \to \infty$ thì

$$\sqrt{(ax_o + m)^2 + (by_o + n)^2 + (cz_o + p)^2} \to \infty;$$

vì vậy, từ bất đẳng thức (1) ta suy ra rằng, khi điểm M_o xa ra vô cùng thì $\sin\varphi$ dần đến không, và theo nó góc φ cũng dần tới không.

78. Giả sử $u = f(x, y, z)$ là hàm khả vi hai lần và $\mathbf{l}_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$; $\mathbf{l}_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\}$; $L_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$ là ba hướng vuông góc với nhau từng đôi. Chứng minh rằng:

a) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Chứng minh. a) Ta tìm các đạo hàm của hàm u theo các hướng l_1, l_2, l_3:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial l_1} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_1 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_1,\\
\frac{\partial u}{\partial l_2} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_2, \qquad (1)\\
\frac{\partial u}{\partial l_3} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_3 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_3 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_3.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3)$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3) + \tag{2}$$

$$+ 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3).$$

Bởi vì ma trận

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn (i, j, k) về cơ sở trực chuẩn (l_1, l_2, l_3) nên nó có tính chất là: tổng bình phương các phần tử của một dòng (cột) bất kỳ bằng đơn vị, còn tổng các tích của các phần tử tương ứng của hai dòng (cột) khác nhau thì bằng không.

Như vậy trong đẳng thức (2) ta có hệ số của ba đạo hàm bình phương: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ bằng đơn vị, còn hệ số của các tích $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$ thì bằng không.

Từ đó và từ (2) ta suy ra đẳng thức a).

b) Ta tìm $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} = \frac{\partial}{\partial l_1}\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)$, ở đây $\frac{\partial u}{\partial l_1}$ được xác định từ đẳng thức (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma_1 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha_1\cos\beta_1 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta_1\cos\gamma_1.$$

Tương tự ta cũng tính được $\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}$.

Cộng các đẳng thức nhận được ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3) +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3) +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3).$$

Từ đó và sử dụng tính chất của ma trận (3) ta nhận được đẳng thức b).

79. Giả sử $u = u(x, y)$ là hàm khả vi và với $y = x^2$ ta có $u(x, y) = 1$ và $\frac{\partial u}{\partial x} = x$. Tìm $\frac{\partial u}{\partial y}$ với $y = x^2$.

Giải. Do điều kiện $u(x, x^2) = 1$, nên từ đó sử dụng tính khả vi của hàm u, ta nhận được $\frac{\partial}{\partial x}u(x, x^2) = 0$, tức là

$$\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y}2x = 0. \tag{1}$$

Nhưng theo điều kiện $\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial x} = x$, vì vậy từ (1) ta suy ra $\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y} = -\frac{1}{2}$.

80. Giả sử $u = u(x, y)$ thỏa mãn phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ và các điều kiện: $u(x, 2x) = x$; $u'_x(x, 2x) = x^2$. Tìm $u''_{xx}(x, 2x)$; $u''_{xy}(x, 2x)$; $u''_{yy}(x, 2x)$.

Giải. Đạo hàm cả hai vế của đẳng thức $u(x, 2x) = x$ theo x: $u'_x(x, 2x) + 2u'_y(x, 2x) = 1$ và sử dụng đẳng thức $u'_x(x, 2x) = x^2$ ta có $x^2 + 2u'_y(x, 2x) = 1$. Ta lại đạo hàm đẳng thức này theo x:

$$2x + 2u''_{yx}(x, 2x) + 4y''_{yy}(x, 2x) = 0.$$

Vì $u''_{xx} = u''_{yy}$ và $u''_{xy} = u''_{yx}$, nên

$$2u''_{xx}(x, 2x) + u''_{xy}(x, 2x) = -x. \tag{1}$$

Sau nữa, đạo hàm đẳng thức $u'_x(x, 2x) = x^2$ theo x, ta có:

$$u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x) = 2x. \tag{2}$$

Giải hệ (1) và (2) đối với u''_{xx}, u''_{xy} và chú ý rằng $u''_{xx} = u''_{yy}$ ta tìm được:

$$u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4x}{3},\ u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5x}{3}.$$

81. Tìm nghiệm $z = z(x, y)$ của phương trình $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, thỏa mãn điều kiện $z(x, x^2) = 1$.

Giải. Tích phân phương trình theo y, ta có $z(x, y) = x^2y + y^2 + \varphi(x)$, ở đây $\varphi(x)$ là hàm còn chưa xác định. Để tìm nó ta sử dụng điều kiện $z(x, x^2) = 1$: $z(x, x^2) \equiv x^2x^2 + x^4 + \varphi(x) = 1$. Từ đó suy ra $\varphi(x) = -2x^4 + 1$. Như vậy

$$z(x, y) = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1.$$

82. Tìm nghiệm $z = z(x, y)$ của phương trình $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ thỏa mãn các điều kiện $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

Giải. Ta có :

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \int_0^x (x + y)dx + \varphi_0(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y),$$

$$z(x, y) = \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} + x \quad + \varphi_0(y)\right)dy = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} +$$

$$+ \varphi(y) + \psi(x).$$

ở đây $\varphi(y) = \int_0^y \varphi_0(y)dy$.

Sử dụng điều kiện $z(x, 0) = x$, ta tìm được $z(x, 0) \equiv \psi(x) = x$. Vì vậy $z(x, y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + x$. Sau nữa từ điều kiện $z(0, y) = y^2$ suy ra $z(0, y) = \varphi(y) = y^2$. Vì vậy cuối cùng ta có

$$z(x, y) = \frac{x^2y + xy^2}{2} + y^2 + x.$$

83. Tìm nghiệm $z = z(x, y)$ của phương trình $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, thỏa mãn các điều kiện $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

Giải. Tương tự như bài trên $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2y + \varphi(x)$, $z(x, y) = y^2 + y\varphi(x) + \psi(x)$.

Chú ý rằng $z(x, 0) \equiv \psi(x) = 1$, $z'_y(x, 0) \equiv \varphi(x) = x$, cuối cùng ta có:

$$z(x, y) = y^2 + xy + 1.$$

§3. KHÔNG GIAN MÊTRIC

1. Định nghĩa không gian mêtric. Tập hợp $X = \{x, y, z, ..., u, v\}$ các phần tử của một đối tượng nào đấy được gọi là không gian mêtric, nếu mỗi cặp sắp xếp thứ tự các phần tử $x, y \in X$ được đặt tương ứng một số $\rho(x, y)$ không âm, được gọi là *khoảng cách* giữa các phần tử này, hoặc là *mêtric* của không gian X, và thỏa mãn các điều kiện (các tiên đề mêtric):

1) $\rho(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$ (tiên đề đồng nhất);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (tiên đề đối xứng);

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (tiên đề tam giác).

Các phần tử của không gian mêtric X cũng được gọi là những điểm của không gian này. Mọi tập hợp $Y \subset X$, được xét với cùng một mêtric trong X cũng là một không gian mêtric và được gọi là *không gian con* của không gian X.

2. Sự hội tụ trong không gian mêtric. Giả sử X là không gian mêtric bất kỳ. Ta nói rằng dãy các phần tử $\{x_n\}$ của không gian mêtric X hội tụ, nếu tồn tại điểm $x_o \in X$, sao cho dãy số $\rho(x_n, x_o) \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ hoặc $x_n \to x_o$ khi $n \to \infty$.

3. Tập mở, tập đóng. Tập hợp các điểm x của không gian mêtric X, mà các phần tử đó thỏa mãn bất đẳng thức $\rho(x, a) < r$, ở đây a là điểm cố định thuộc không gian X, r là số thực cố định, được gọi là *hình cầu mở* bán kính r, tâm a và ký hiệu là $S(a, r)$.

Tập hợp các điểm của không gian mêtric X thỏa mãn bất đẳng thức $\rho(x, a) \leqslant r$ được gọi là *hình cầu đóng* và ký hiệu là $\bar{S}(a, r)$.

Mọi hình cầu mở có tâm tại điểm a thuộc không gian mêtric X được gọi là *lân cận điểm* a.

Điểm $a \in X$ được gọi là *điểm giới hạn* của tập $M \subset X$, nếu lân cận bất kỳ của điểm a đều chứa ít nhất một điểm của tập M, khác a. Trong trường hợp này chính điểm a cũng có thể thuộc tập M, cũng có thể không thuộc tập M.

Nếu tập $M \subset X$ chứa tất cả các điểm giới hạn của nó, thì nó là tập đóng.

Tập $M \subset X$ được gọi là *mở*, nếu với mỗi điểm $x \in X$ ta tìm được hình cầu mở $S(x, r)$ sao cho $S(x, r) \subset M$ tức là điểm x thuộc tập M cùng với lân cận nào đó của no.

4. Không gian mêtric (đầy đủ). Dãy các phần tử $\{x_n\}$ của không gian mêtric X được gọi là *hội tụ về chính nó*, hoặc là một *dãy cơ bản*, hoặc là một dãy Côsi, nếu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ sao cho $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ $\forall n > N$ và $p > 0$ nguyên bất kỳ.

Nếu dãy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ tới $x_o \in X$, thì nó hội tụ về chính nó. Thật vậy, giả sử $x_o = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$, sao cho

$$\rho(x_n, x_o) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(x_o, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n > N, \ \forall p > 0.$$

Từ đó, sử dụng bất đẳng thức tam giác ta có hệ thức:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_o) + \rho(x_o, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

đúng $\forall n > N$ và $\forall p > 0$.

Nếu trong không gian mêtric X mệnh đề đảo cũng đúng, tức là dãy bất kỳ $\{x_n\} \subset X$ hội tụ về chính nó, hội tụ tới $x_o \in X$ nào đấy, thì không gian X được gọi là *đầy đủ* (không gian đủ).

5. Ánh xạ. Giả sử cho hai tập hợp đối tượng bất kỳ $X = \{x\}$ và $Y = \{y\}$. Nếu mỗi phần tử $x \in X$ theo quy tắc hoặc định luật xác định được đặt tương ứng với một phần tử xác định $y \in Y$, thì ta nói rằng đã cho một *ánh xạ* từ X vào Y, hoặc là một *hàm* xác định trên X với giá trị trên Y. Khi đó ta viết $y = f(x)$ (hoặc $y = fx$).

Cho X và Y là những không gian mêtric, f là ánh xạ từ $M \subset X$ vào Y, x_o là điểm giới hạn của tập M. Ánh xạ f được gọi là liên tục tại điểm x_o, nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho khi $\rho_X(x, x_o) < \delta$ thì $\rho_Y(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$. Định nghĩa sau đây về tính liên tục của ánh xạ là tương đương với định nghĩa trên:

Ánh xạ f được gọi là *liên tục tại điểm* $x_o \in M$, nếu từ dãy $\{x_n\} \subset M$ bất kỳ hội tụ tới điểm x_o suy ra dãy $\{f(x_n)\} \to f(x_o)$, khi $n \to \infty$.

Ánh xạ liên tục tại mọi điểm của tập M được gọi là *liên tục trên tập này*.

Nếu ánh xạ f xác định trong không gian mêtric X, mà mỗi điểm $x \in X$ đặt tương ứng với điểm $f(x)$ cũng thuộc không gian này, thì ta nói rằng f ánh xạ không gian X vào chính nó. Ngoài ra, nếu $\forall x', x'' \in X$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant \theta\rho(x', x''), \ 0 < \theta < 1$$

thì ánh xạ f được gọi là *ánh xạ co*.

Điểm $x^* \in X$ được gọi là *điểm bất động của ánh xạ* f, nếu $f(x^*) = x^*$.

84. Giả sử $X = E_n$, ở đây E_n là tập tất cả các hệ n số thực sắp thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Chứng minh rằng, nếu khoảng cách giữa các điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ của không gian này được xác định bằng một trong các hệ thức:

a) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$,

b) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$,

c) $\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - y_i |$,

thì E_n là không gian mêtric.

Giải. Chỉ cần thử lại các tiên đề mêtric là đủ.

a) Sự thỏa mãn tiên đề đồng nhất được suy ra từ đẳng thức

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0$$

đúng, khi và chỉ khi

$$x_i = y_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tiên đề đối xứng được suy ra từ đẳng thức hiển nhiên

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \rho(y, x).$$

Giả sử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ và $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ là những điểm bất kỳ thuộc E_n. Ta sẽ chứng tỏ rằng, tiên đề tam giác $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ được thỏa mãn, tức là thỏa mãn bất đẳng thức

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} \qquad (1)$$

Với mục đích đó, ta ký hiệu $x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Khi đó $x_i - y_i = a_i + b_i$ và bất đẳng thức (1) được viết dưới dạng

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=n}^{n} b_i^2} \qquad (2)$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad (3)$$

Bất đẳng thức (3) tương đương với bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Bất đẳng thức này đúng với các số thực a_i, b_i bất kỳ ($i = 1, 2, \ldots, n$) (xem bài 6, chương I, tập I).

Vì vậy có bất đẳng thức (3) và do đó có (1). Vậy E_n là không gian mêtric.

Việc thử lại các tiên đề đối với mêtric b) và c) dành cho bạn đọc.

85. Giả sử $X = N$ trong đó N là tập hợp tất cả các số tự nhiên. Tập hợp này có phải là không gian mêtric hay không, nếu đối với bất kỳ $k, m \in N$, mêtric được cho bằng một trong các hệ thức:

a) $\rho(k, m) = |k - m|$;

b) $\rho(k, m) = |k^2 - m^2|$;

c) $\rho(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k = m \\ \dfrac{1}{1 + \min\{k, m\}}, & \text{nếu } k \neq m; \end{cases}$

d) $\rho(k, m) = |k - m|^2$?

Giải. Trong các trường hợp a) và b) các tiên đề đồng nhất và đối xứng được thỏa mãn một cách hiển nhiên; còn tiên đề tam giác suy ra từ các tính chất của giá trị tuyệt đối. Thật vậy, giả sử $k, m, r \in N$, khi đó:

a) $\rho(k, m) = |k - m| = |k - r + r - m| \leqslant$
$\leqslant |k - r| + |r - m| = \rho(k, r) + \rho(r, m)$;

b) $\rho(k, m) = |k^2 - m^2| = |k^2 - r^2 + r^2 - m^2| \leqslant$
$\leqslant |k^2 - r^2| + |r^2 - m^2| = \rho(k, r) + \rho(r, m)$

Vì vậy trong các trường hợp a) và b) tập hợp N lập thành không gian mêtric.

c) Tiên đề đồng nhất và đối xứng hiển nhiên được thỏa mãn, và do

$$\rho(k, m) = \frac{1}{1 + \min\{k, m\}} = \max\left\{\frac{1}{1+k}, \frac{1}{1+m}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+m} \leqslant \max\left\{\frac{1}{1+k}, \frac{1}{1+r}\right\} +$$
$$+ \max\left\{\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1+m}\right\} = \frac{1}{1 + \min\{k, r\}} +$$
$$+ \frac{1}{1 + \min\{r, m\}} = \rho(k, r) + \rho(r, m).$$

nên tập hợp N với mêtric c) lập thành không gian mêtric

d) Hiển nhiên tiên đề đồng nhất và đối xứng được thỏa mãn. Tuy nhiên tiên đề tam giác không thỏa mãn. Ví dụ đối với $k = 1$, $m = 3$, $r = 2$ ta có

$$\rho(1,3) = 4 > \rho(1,2) + \rho(2,3) = 1 + 1 = 2.$$

Như vậy tập N không lập thành không gian mêtric, bởi vì hàm $\rho(k, m)$ không thỏa mãn tất cả các tiên đề mêtric.

86. Giả sử $X = C[a, b]$, ở đây $C[a, b]$ là tập các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khoảng cách giữa các hàm $x(t)$, $y(t)$ bất kỳ thuộc tập $C[a, b]$ được xác định bằng đẳng thức

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|. \tag{1}$$

Chứng minh rằng tập $C[a, b]$ với mêtric được cho trong đẳng thức (1) là không gian mêtric.

Giải. Thử lại các tiên đề mêtric. Hiển nhiên tiên đề đồng nhất và đối xứng được thỏa mãn. Ta sẽ chứng tỏ rằng tiên đề tam giác cũng được thỏa mãn. Thật vậy, đối với bất kỳ $t \in [a, b]$ và bất kỳ $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in C[a, b]$ ta có:

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| +$$
$$+ |z(t) - y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)| =$$
$$= \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Nhưng khi đó

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Vì vậy

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

bởi vậy tập $C[a, b]$ lập thành không gian mêtric.

87. Giả sử l_2 là tập các dãy số thực $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ sao cho $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, còn khoảng cách giữa các điểm $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ và $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ được xác định bởi đẳng thức:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Chứng minh rằng l_2 là không gian mêtric.

Giải. Giả sử $x, y \in l_2$ tức là $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$.

Khi đó từ bất đẳng thức hiển nhiên

$$(x_i \pm y_i)^2 \leqslant 2(x_i^2 + y_i^2)$$

suy ra rằng hàm $\rho(x, y)$ được xác định đối với tất cả $x, y \in l_2$. Các tiên đề đồng nhất và đối xứng hiển nhiên được thỏa mãn. Còn tiên đề tam giác được viết dưới dạng:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2}.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta chỉ cần chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ trong bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}.$$

Bất đẳng thức này được thỏa mãn với bất kỳ n (xem bài 84a)).

88. Sự hội tụ

1) trong không gian E_n với mêtric a) (xem bài 84);

2) trong không gian $C[a, b]$ (xem bài 86), là hội tụ gì?

Giải. 1. Giả sử dãy $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ là những điểm của không gian E_n, hội tụ tới điểm $x^{(o)} = (x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}$, tức là

$$\rho(x^{(k)}, x^{(o)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(o)})^2} \to 0 \text{ khi } k \to \infty$$

Do tổng $\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(o)})^2$ không âm nên hệ thức cuối cùng thỏa mãn khi và chỉ khi $x_i^{(k)} \to x_i^{(o)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ khi $k \to \infty$.

Như vậy sự hội tụ trong không mêtric E_n là sự hội tụ của các tọa độ các điểm của dãy tới các tọa độ tương ứng của điểm giới hạn. Sự hội tụ như vậy được gọi là hội tụ theo tọa độ.

2) Cho dãy $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$ hội tụ tới điểm $x_o(t) \in C[a, b]$, tức là $\rho(x_n, x_o) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_o(t)| \to 0$, khi $n \to \infty$. Điều này có nghĩa là $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ sao cho bất đẳng thức $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_o(t)| < \varepsilon$ thỏa mãn $\forall n > N$.

Bất đẳng thức cuối cùng tương đương với mệnh đề sau: bất đẳng thức $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, $n > N$ đúng đối với mọi $t \in [a, b]$. Điều này có nghĩa là sự hội tụ trong không gian $C[a, b]$ là sự hội tụ đều của dãy hàm trên đoạn $[a, b]$ tới hàm giới hạn $x_0(t)$.

89. Chứng minh rằng nếu dãy $\{x_n\}$ có các phần tử đôi một khác nhau của không gian mêtric X, hội tụ tới giới hạn $a \in X$, thì a là điểm giới hạn của dãy này.

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon > 0$ là số bất kỳ cho trước. Bởi vì $\rho(x_n, a) \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\exists N = N(\varepsilon)$ để $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ đối với mọi $n > N$, tức là bắt đầu từ chỉ số $N + 1$, tất cả các phần tử của dãy $\{x_n\}$ thuộc hình cầu $S(a, \varepsilon)$. Vì vậy a là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

90. Giả sử M là tập của không gian mêtric X, còn a là điểm giới hạn của tập này. Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\} \subset M$ hội tụ tới điểm a.

Chứng minh. Giả sử $\{\alpha_n\}$ là dãy số thực bất kỳ, hội tụ tới không. Ta chọn số $r_1 \leqslant |\alpha_1|$ tùy ý và xét lân cận $S(a, r_1)$ của điểm a. Bởi vì a là điểm giới hạn của tập M nên tồn tại ít nhất một điểm $x_1 \in M$ $(x_1 \neq a)$ thuộc lân cận $S(a, r_1)$. Sau nữa, chọn số r_2 bất kỳ, sao cho $r_2 < \rho(x_1, a)$ và $r_2 \leqslant |\alpha_2|$. Lân cận $S(a, r_2)$ lần nữa lại chứa điểm $x_2 \in M$ $(x_2 \neq a)$. Tiếp tục biện luận tương tự, ta thấy tồn tại dãy $\{x_n\}$ $(x_n \neq a)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ gồm những phần tử của tập M mà $\rho(x_n, a) <$ $< r_n \leqslant |\alpha_n|$.

Bởi vì dãy $|\alpha_n| \to 0$ khi $n \to \infty$, nên $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, a) = 0$. Điều này có nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới điểm a.

91. Giả sử X là không gian mêtric. Chứng minh rằng mêtric $\rho(x, y)$ của không gian mêtric này là một hàm liên tục theo tất cả các biến trong không gian X.

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng tỏ rằng, đối với ba điểm bất kỳ $a, b, c \in X$ bất đẳng thức sau đây thỏa mãn

$$|\rho(a, b) - \rho(a, c)| \leqslant \rho(c, b). \tag{1}$$

Thật vậy, từ tiên đề tam giác ta có $\rho(a, b) - \rho(a, c) \leqslant \rho(c, b)$. Thay đổi vị trí c và b ta nhận được:

$$-[\rho(a, b) - \rho(a, c)] \leqslant \rho(c, b).$$

Từ hai bất đẳng thức này và chú ý rằng $\rho(c, b) \geqslant 0$ ta sẽ nhận được bất đẳng thức (1).

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng hàm $\rho(x, y)$ liên tục. Giả sử $x_0, y_0 \in X$ và $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ khi $n \to \infty$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức (1), ta có:

$$\begin{aligned} |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| &= |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_n) + \\ &+ \rho(x_0, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant |(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_n)| + \\ &+ |\rho(x_0, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \to 0 \end{aligned}$$

khi $n \to \infty$. Từ đó trực tiếp suy ra rằng hàm $\rho(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0).

92. Chứng minh rằng, trong không gian mêtric mọi hình cầu đóng $\overline{S}(a, r)$ là tập đóng.

Chứng minh. Giả sử x_0 là điểm giới hạn bất kỳ của tập hợp $\overline{S}(a, r)$. Khi đó (xem bài 90) tồn tại dãy $\{x_n\} \subset \overline{S}(a, r)$ để $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$. Bởi vì $\rho(x_n, a) \leqslant r$ $(n = 1, 2, ...)$ nên do tính liên tục của khoảng cách và chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức $\rho(x_n, a) \leqslant r$ khi $n \to \infty$ ta sẽ nhận được $\rho(x_0, a) \leqslant r$. Từ đó suy ra rằng $x_0 \in \overline{S}(a, r)$, tức là hình cầu $\overline{S}(a, r)$ chứa tất cả những điểm giới hạn của nó, và vì vậy nó là tập đóng.

93. Chứng minh rằng, trong không gian mêtric mọi hình cầu mở $S(a, r)$ là một tập mở.

Chứng minh. Giả sử x_0 là điểm bất kỳ thuộc hình cầu $S(a, r)$. Ký hiệu $r_1 = \rho(a, x_0)$, khi đó $S(x_0, r - r_1) \subset S(a, r)$. Thật vậy, nếu $x \in S(x_0, r - r_1)$, thì do bất đẳng thức tam giác ta có $\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < (r - r_1) + r_1 = r$. Từ đó ta có $x \in S(a, r)$ và $S(x_0, r - r_1) \subset S(a, r)$. Như vậy, mọi điểm của hình cầu $S(a, r)$ thuộc hình cầu này cùng với lân cận nào đấy, và vì vậy hình cầu $S(a, r)$ là tập mở.

94. Giả sử X là tập các số hữu tỷ, khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó được xác định bằng đẳng thức

$$\rho(r_1, r_2) = | r_1 - r_2 | .$$

Chứng minh rằng X là không gian mêtric. Nó có phải là không gian đủ không?

Giải. Tiên đề đồng nhất và đối xứng hiển nhiên thỏa mãn. Sau nữa, sử dụng bất đẳng thức $| a + b | \leqslant | a | + | b |$, ta thấy tiên đề tam giác cũng thỏa mãn, vì

$$\rho(r_1, r_2) = | r_1 - r_2 | \leqslant | r_1 - r_3 | + | r_3 - r_2 | = \rho(r_1, r_3) + \rho(r_3, r_2).$$

Vì vậy X là không gian mêtric.

Ta sẽ chứng tỏ rằng không gian mêtric X là không đầy đủ. Muốn vậy, ta hãy xét một dãy số hữu tỷ $x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ $(n = 1, 2, ...)$. Bởi vì $\rho(x_{n+p}, x_n) = | x_{n+p} - x_n | < \frac{1}{p \cdot n!} \to 0$ khi $n \to \infty$, tức là $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$ khi $n \to \infty$, nên dãy $\{x_n\}$ hội tụ về chính nó. Nhưng vì $x_n \to e \notin X$ khi $n \to \infty$, nên dãy $\{x_n\}$ không có giới hạn trong không gian X. Đó là điều phải chứng minh.

95. Chứng minh rằng không gian mêtric $C[a, b]$ (xem bài 86) là không gian đủ.

Chứng minh. Giả sử $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$ khi $n \to \infty$. Nghĩa là tồn tại hàm $x(t)$ để $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $x(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ tức là $x(t) \in C[a, b]$.

Bởi vì sự hội tụ trong không gian $C[a, b]$ là hội tụ đều, nên $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ sao cho $\forall n > N$ bất đẳng thức $| x_n(t) - x(t) | < \frac{\varepsilon}{3}$ (1) đúng với tất cả $t \in [a, b]$. Cố định một chỉ số n bất kỳ trong số đó; ước lượng số gia $\Delta x(t_0) = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, ở đây $t_0 \in [a, b]$ còn Δt thay đổi sao cho $t_0 + \Delta t \in [a, b]$ ta có:

$$| \Delta x(t_0) | = | x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) | \leqslant | x(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0 + \Delta t) | + | x_n(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0) | + | x_n(t_0) - x(t_0) | \quad (2)$$

Từ bất đẳng thức (1) suy ra

$$| x(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0 + \Delta t) | < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$| x_n(t_0) - x(t_0) | < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Do $x_n(t)$ là hàm liên tục, nên đối với $\varepsilon > 0$ đã chỉ ra $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, sao cho

$$| x_n(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0) | < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

ngay khi $| \Delta t | < \delta = \delta(\varepsilon)$. Như vậy, từ bất đẳng thức (2), (3) và (4) suy ra $| \Delta x(t_0) | < \varepsilon$ ngay khi $| \Delta t | < \delta = \delta(\varepsilon)$, tức là hàm $x(t)$ liên tục trên $[a, b]$.

96. Chứng minh định lý (nguyên lý điểm bất động): mọi ánh xạ co A, ánh xạ không gian mêtric đủ X vào chính nó, có trong không gian này điểm bất động duy nhất. Nói cách khác là phương trình $x = Ax$ có nghiệm duy nhất trong không gian X.

Chứng minh. Giả sử x_0 là phần tử bất kỳ thuộc không gian X. Vì A ánh xạ không gian X vào chính nó, nên $Ax_0 = x_1 \in X$, $Ax_1 = x_2 \in X, \ldots, Ax_{n-1} = x_n \in X$; ... Ta sẽ chứng tỏ rằng dãy vừa dựng $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ như trên là dãy cơ bản. Thật vậy, vì A là ánh xạ co nên ta có:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax_0, Ax_1) \leqslant \theta\rho(x_0, x_1) = \theta\rho(x_0, Ax_0)$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \theta\rho(x_1, x_2) \leqslant \theta^2\rho(x_0, Ax_0);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \theta^n\rho(x_0, Ax_0);$$
$$0 \leqslant \theta < 1.$$

Từ đó suy ra:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant (\theta^n + \theta^{n+1} + \ldots + \theta^{n+p-1})\rho(x_0, Ax_0) = \frac{\theta^n - \theta^{n+p}}{1 - \theta}\rho(x_0, Ax_0).$$

Vì rằng $0 \leqslant \theta < 1$, nên ta có

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{\theta^n}{1 - \theta}\rho(x_0, Ax_0).$$

Chú ý rằng, khoảng cách không âm, và cũng do điều kiện $\theta^n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$ khi $n \to \infty$ với số p tự nhiên bất kỳ, tức là dãy $\{x_n\}$ là dãy cơ bản.

Do X là không gian đủ, nên tồn tại phần tử $x^* \in X$ để $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Đối với phần tử giới hạn x^* ta có:

$$\rho(x^*, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, Ax^*) = \rho(x^*, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \theta\rho(x_{n-1}, x^*) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Như vậy, $\rho(x^*, Ax^*) = 0$, tức là $x^* = Ax^*$. Do đó x^* là điểm bất động. Còn lại phải chứng minh rằng điểm bất động (nghiệm của phương trình $x = Ax$) là duy nhất. Để chứng minh ta giả thiết ngược lại, tức là tồn tại điểm $z \neq x^*$, sao cho $z = Az$. Bởi vì A là ánh xạ co, nên

$$\rho(z, x^*) = \rho(Az, Ax^*) \leqslant \theta\rho(z, x^*)$$

Từ đó theo giả thiết $z \neq x^*$, tức là $\rho(z, x^*) > 0$, ta có bất đẳng thức $1 < \theta$, trái với điều kiện định lý.

Nguồn gốc sinh ra mâu thuẫn là do ta giả thiết rằng ánh xạ A có hai điểm bất động.

Định lý được chứng minh.

97. Giả sử A ánh xạ không gian mêtric E_n vào chính nó, được cho bởi hệ

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

chuyển điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ từ không gian E_n thành điểm $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ của chính không gian này. Tìm điều kiện co của ánh xạ, nếu mêtric được chọ bởi một trong những dạng a), b) hoặc c) trong bài toán 84.

Giải. a) Nếu trong E_n, mêtric cho bởi đẳng thức a), thì sử dụng bất đẳng thức Côsi — Bunhiacốpxki, ta có:

$$\rho(Ax, Az) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - z_j)\Big)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} (x_j - z_j)^2\Big)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\, \rho(x, z)$$

Từ đó ta nhận được điều kiện đủ của phép ánh xạ co là:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \theta < 1.$$

b) Nếu trong E_n, mêtric cho bởi đẳng thức b), thì khi đó

$$\rho(Ax, Az) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - z_j) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} || x_j - z_j | \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right) \sum_{j=1}^{n} | x_j - z_j | = \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{n=1}^{n} | a_{ij} | \right) \rho(x, z).$$

Vậy điều kiện đủ của ánh xạ co là:

$$\sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \leqslant \theta < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

c) Bây giờ ta xét mêtric cho bởi đẳng thức c). Khi đó từ bất đẳng thức

$$\rho(Ax, Az) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - z_j) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | | x_j - z_j | \leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right) \rho(x, z),$$

ta có điều kiện đủ của ánh xạ co là:

$$\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \leqslant \theta < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§4. HÀM ẨN

1. Định nghĩa hàm ẩn. Xét phương trình

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

ở đây hàm $F(x, y)$ xác định trên tập $X \times Y$ (ký hiệu $X \times Y$ là tập hợp các cặp sắp thứ tự (x, y), với $x \in X$, $y \in Y$). Ký hiệu E là tập hợp những giá trị $x \in X$ mà mỗi $x \in E$ cố định phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thực $y \in Y$

Khi đó trên tập E có thể xác định một hàm $y = f(x)$ đơn trị hay đa trị, đặt tương ứng với mỗi $x \in X$ cố định giá trị y là nghiệm của phương trình (1) với x cố định. Hàm được xác định như trên được gọi là hàm ẩn. Do định nghĩa của hàm $y = f(x)$, đẳng thức $F(x, f(x)) = 0$ thỏa mãn với tất cả giá trị $x \in E$.

Tương tự nhờ hệ phương trình

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

ta xác định hệ các hàm ẩn

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

để

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Định lý tồn tại. Định lý 1 : *Giả sử hàm $F(x, y)$ liên tục theo các biến x và y trong hình chữ nhật $R : |x - x_o| \leqslant a, \ |y - y_o| \leqslant b$ và $F(x_o, y_o) = 0$. Sau nữa, giả sử hàm $F(x, y)$ có đạo hàm riêng $F'_y(x, y)$ trong R, liên tục tại điểm (x_o, y_o), đồng thời $F'_y(x_o, y_o) \neq 0$. Khi đó tồn tại các số $\alpha > 0$ và $\beta > 0$, để trong hình chữ nhật $R_o : |x - x_o| \leqslant \alpha, |y - y_o| \leqslant \beta$ phương trình (1) xác định duy nhất hàm liên tục $y = f(x)$, nhận giá trị y_o, khi $x = x_o$.*

3. Đạo hàm hàm ẩn. Định lý 2 : *Giả sử các điều kiện của định lý 1 được thỏa mãn, ngoài ra tại điểm (x_o, y_o), tồn tại đạo hàm $F'_x(x_o, y_o)$. Khi đó hàm $y = f(x)$ xác định bởi phương trình (1) có đạo hàm tại điểm $x = x_o$, đồng thời*

$$\frac{dy(x_o)}{dx} = -\frac{F'_x(x_o, y_o)}{F'_y(x_o, y_o)}$$

4. Các hàm ẩn xác định bởi hệ phương trình. Định lý 3 :

Giả sử: 1) các hàm $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ liên tục theo các đối số của nó tại lân cận điểm $M_o(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o, y_1^o, y_2^o, \ldots, y_n^o)$ và $F_i(M_o) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; 2) các hàm F_i trong lân cận đã chỉ có các đạo hàm $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ liên tục tại điểm M_o; 3) định thức hàm $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$ tại điểm M_o. Khi đó trong lân cận nào đấy của điểm M_o tồn tại duy nhất một hệ hàm liên tục (3), mà trong lân cận đó nó thỏa mãn các phương trình (2) và thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$f_i(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o) = y_i^o \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Định lý 4. Giả sử thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý 3, ngoài ra tại điểm M_o tồn tại các đạo hàm : $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Khi đó các hàm (3) xác định bởi hệ (2), có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}$ $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots m)$ tại điểm $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o)$; đồng thời các đạo hàm riêng theo x_k, ở đây $k = 1, 2, \ldots, m$, có thể tìm được từ hệ sau :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

Phần lớn các bài toán cho trong phần này, ta giả thiết rằng các điều kiện tồn tại của hàm ẩn và các đạo hàm tương ứng của chúng đã thỏa mãn.

98. Chứng minh rằng hàm Đirichlê

$$y = \begin{cases} 1, \text{ nếu } x \text{ hữu tỷ} \\ 0, \text{ nếu } x \text{ vô tỷ}, \end{cases}$$

gián đoạn tại mọi điểm, thỏa mãn phương trình $y^2 - y = 0$.

Chứng minh. Tại các điểm hữu tỷ, giá trị của hàm y và bình phương của nó bằng đơn vị. Vì vậy tại các điểm này phương trình $y^2 - y = 0$ thỏa mãn. Nếu x vô tỷ thì $y = 0$, $y^2 = 0$, nên lần nữa ta thấy rằng, đẳng thức $y^2 - y = 0$ thỏa mãn.

Như vậy với tất cả giá trị thực của x, hàm Đirichlê thỏa mãn phương trình $y^2 - y = 0$.

99. Giả sử hàm $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Trong trường hợp nào thì phương trình $f(x)\,y = 0$ (*) có nghiệm liên tục duy nhất $y = 0$ với $a < x < b$?

Giải. Hiển nhiên $y = 0$ $(a < x < b)$ là nghiệm liên tục của phương trình (*) với hàm $f(x)$ bất kỳ, xác định trong khoảng (a, b). Giả sử $y = y(x)$ $(a < x < b)$ là hàm liên tục khác và là nghiệm của phương trình (*), và điểm $x_0 \in (a, b)$, sao cho $y(x_0) \neq 0$. Từ tính liên tục của $y(x)$, suy ra $y(x) \neq 0$ trên khoảng $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ nào đấy chứa điểm x_0. Khi đó để $f(x)\,y(x) \equiv 0$ được thỏa mãn trên khoảng (α, β) thì điều kiện cần và đủ là $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Như vậy, nếu tập không điểm của hàm $f(x)$ không lấp đầy trọn vẹn một khoảng $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ nào, tức là không trù mật khắp nơi trên (a, b), thì $y = 0$ là nghiệm liên tục duy nhất của phương trình (*).

100. Giả sử các hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trong khoảng (a, b). Trong trường hợp nào thì phương trình

$$f(x)y = g(x) \tag{1}$$

có nghiệm liên tục duy nhất trong khoảng (a, b)?

Giải. Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm liên tục $y = y(x)$ và $z = z(x)$ $(a < x < b)$, tức là giả sử $f(x)\,y(x) \equiv g(x)$; $f(x)\,z(x) \equiv g(x)$. Từ đó suy ra

$$f(x)\,(y(x) - z(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Như vậy, nghiệm $y(x)$ và $z(x)$ của phương trình (1) trùng nhau, nếu phương trình thuần nhất $f(x)\,y = 0$ có nghiệm liên tục duy nhất $y = 0$ $(a < x < b)$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi tập hợp không điểm của hàm $f(x)$ không trù mật khắp nơi trong khoảng (a, b) (xem bài 99).

Nếu $f(x) \neq 0$ $(a < x < b)$, thì hiển nhiên $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ là nghiệm liên tục duy nhất của phương trình (1). Giả sử $f(x)$ triệt tiêu trên tập $\{\xi\} \in (a, b)$ không trù mật khắp nơi, khi đó hệ thức $\frac{g(x)}{f(x)}$ không xác định trên tập $\{\xi\}$, còn hàm $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ là nghiệm của phương trình (1) chỉ trên tập hợp điểm của khoảng (a, b) mà ở đấy $f(x) \neq 0$. Nếu đòi hỏi tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to \xi} \frac{g(x)}{f(x)} \tag{2}$$

(mà điều này chỉ có thể xảy ra khi $g(\xi) = 0$, $\xi \in \{\xi\}$), khi đó hàm

$$y = \begin{cases} \frac{g(x)}{f(x)}, & x \in (a, b) \;\; x \neq \xi \in \{\xi\}, \\ \lim\limits_{x \to \xi} \frac{g(x)}{f(x)}, & x = \xi \in \{\xi\} \end{cases}$$

sẽ là nghiệm liên tục duy nhất của phương trình (1). Vậy, phương trình (1) có nghiệm liên tục duy nhất, nếu:

1) tập điểm $\{\xi\}$ để $f(\xi) = 0$ không trù mật khắp nơi trên (a, b);

2) $g(\xi) = 0$, $\xi \in \{\xi\}$;

3) tồn tại giới hạn hữu hạn (2) tại tất cả các điểm $\xi \in \{\xi\}$.

101. Giả sử cho phương trình

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

và

$$y = y(x), \; (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{2}$$

là hàm đơn trị thỏa mãn phương trình (1).

1) Có bao nhiêu hàm đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

2) Có bao nhiêu hàm liên tục, đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

3) Có bao nhiêu hàm liên tục, đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1), nếu:

a) $y(0) = 1$; b) $y(1) = 0$?

Giải. 1) Các hàm đơn trị thỏa mãn phương trình (1) là một tập hợp vô số hàm. Thí dụ, nếu $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\; n = 2, 3, \ldots)$, thì đối với bất kỳ $n = 2, 3, \ldots$, hàm đơn trị

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{nếu } x_{2k} \leqslant x < x_{2k+1}, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{nếu } x_{2k+1} \leqslant x < x_{2k+2}, \\ 0 \quad\quad\quad, & \text{nếu } x = 1, \end{cases}$$

(ở đây $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) thỏa mãn phương trình (1).

2) Nếu x là số cố định bất kỳ thuộc đoạn $[-1,1]$, thì phương trình (1) có 2 nghiệm $y = \sqrt{1-x^2}$; $y = -\sqrt{1-x^2}$. Như vậy ta có thể xác định được hai hàm liên tục đơn trị $y = \sqrt{1-x^2}$ và $y = -\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ thỏa mãn phương trình (1).

3) Rõ ràng rằng chỉ có hàm $y = \sqrt{1-x^2}$ trong các hàm đã tìm được từ mục trước thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$. Điều kiện b) cả hai hàm thỏa mãn.

102. Giả sử cho phương trình

$$x^2 = y^2 \tag{1}$$

và

$$y = y(x) \quad -\infty < x < +\infty \tag{2}$$

là hàm đơn trị thỏa mãn phương trình (1). Hỏi:

1) Có bao nhiêu hàm đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

2) Có bao nhiêu hàm liên tục, đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

3) Có bao nhiêu hàm khả vi, đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

4) Có bao nhiêu hàm liên tục, đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1), nếu

a) $y(1) = 1$; b) $y(0) = 0$?

5) Có bao nhiêu hàm liên tục, đơn trị $y = y(x)$ với $1 - \delta < x < 1 + \delta$ thỏa mãn phương trình (1), nếu $y(1) = 1$ và δ đủ bé?

Giải. 1) Ta sẽ chứng tỏ rằng, những hàm đơn trị thỏa mãn phương trình (1), là tập hợp vô số hàm. Cho tập $\{\alpha\}$ bất kỳ, mà các phần tử là dãy đơn điệu tăng $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}, \ldots$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_n} = +\infty$ với tất cả α.

Đối với mỗi α, hàm đơn trị

$$y(x) = \begin{cases} -|x|, \text{ nếu } x < x_{\alpha_1} \\ \ \ |x|, \text{ nếu } x_{\alpha_{2n-1}} \leqslant x < x_{\alpha_{2n}}, \\ -|x|, \text{ nếu } x_{\alpha_{2n}} \leqslant x < x_{\alpha_{2n+1}} \end{cases}$$

(ở đây $n = 1, 2, \ldots$) xác định với tất cả giá trị x và thỏa mãn phương trình (1).

2) Từ phương trình (1) ta tìm được $|y| = |x|$ $(-\infty < x < +\infty)$. Từ đó ta lại có:

$$y = -x,\ y = x,\ y = |x|;\ y = -|x| \ (|x| < \infty) \tag{3}$$

Bốn hàm này liên tục, đơn trị, thỏa mãn phương trình (1).

3) Bởi vì các hàm $y = |x|$, $y = -|x|$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Vậy từ bốn hàm trong (3) chỉ có hai hàm $y = x$, $y = -x$ là nghiệm khả vi, đơn trị của phương trình (1).

4) Thử lại trực tiếp các hàm dạng (3), chỉ có hai hàm $y = x$ và $y = |x|$ thỏa mãn điều kiện a) và tất cả bốn hàm thỏa mãn điều kiện b).

5) Bởi vì hàm $y = x$, $y = |x|$ liên tục, đi qua điểm (1,1), đồng nhất trong khoảng $(1 - \delta, 1 + \delta)$ $(0 < \delta < 1)$, nên đối với mọi x thuộc khoảng này chỉ có một hàm $y = x$ liên tục thỏa mãn phương trình (1).

103. Phương trình $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ (1)

xác định y là hàm đa trị của x. Trong những tập hợp điểm nào của trục số thì hàm này: 1) đơn trị; 2) hai trị; 3) ba trị; 4) bốn trị? Xác định các điểm chia nhánh của hàm này và các nhánh liên tục, đơn trị của nó.

Giải. Từ phương trình (1) ta tìm được:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}\ ,\ \text{nếu}\ 0 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \qquad (2)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}\ ,\ \text{nếu}\ 1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\ \text{và}$$

$x = 0$

Từ đó trực tiếp suy ra:

1) Không có giá trị x nào để phương trình (1) xác định hàm đơn trị (không có điểm chung để bốn giá trị y trùng nhau).

2) Phương trình (1) xác định hàm hai trị, nếu $0 < |x| < 1$ và $|x| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

3) Nếu $x = 0$ hoặc $|x| = 1$ thì đẳng thức (2) cho ta ba giá trị của y. Vì vậy trên tập $\{-1, 0, 1\}$ phương trình (1) xác định hàm ba trị.

4) Giao của các tập, mà trên đó hai hàm hai trị (2) xác định, cho ta tập $1 < |x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; ở đây phương trình (1) xác định hàm 4 trị. Từ (2) ta thấy rằng

$$y = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}\ \left(|x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$y = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}\ \left(1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$$

với $\varepsilon = \pm 1$ là những nhánh liên tục đơn trị.

Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm chia nhánh của phương trình $F(x, y) = 0$, nếu: a) $F(x_0, y_0) = 0$; b) không tồn tại một lân cận nào của điểm (x_0, y_0), mà ở đó phương trình đã cho được thỏa mãn bởi hàm $y = f(x)$ liên tục đơn trị duy nhất, với $y_0 = f(x_0)$. Đối với trường hợp của ta $(\pm 1, 0)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là những điểm chia nhánh.

104. Xác định các điểm chia nhánh và các nhánh đơn trị liên tục $y = y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ của hàm đa trị được xác định từ phương trình

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \qquad (1)$$

Giải. Sử dụng định lý 1 của mục 2, ta thấy rằng $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ tại các điểm $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, ở đây

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2.$$

Vì vậy những điểm này có thể là những điểm chia nhánh.

Từ phương trình (1) ta có

$$y^2 = \frac{-2x^2 - 1 \pm \sqrt{8x^2 + 1}}{2} \quad (|x| \leqslant 1)$$

và do $y^2 \geqslant 0$ nên cuối cùng ta tìm được

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2 + 1} - 1 - 2x^2}{2}} \quad (|x| \leqslant 1).$$

Từ đó ta nhận được tất cả các nhánh liên tục, đơn trị :

$$y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2 + 1} - 1 - 2x^2}{2}} \quad (|x| \leqslant 1),$$

ở đây $\varepsilon(x) = -1$, 1 $\mathrm{sgn}x$ và $-\mathrm{sgn}x$.

Bởi vì có hơn một nhánh liên tục đơn trị đi qua các điểm $(0, 0)$, $(-1, 0)$ và $1, 0)$ nên chúng là những điểm chia nhánh.

105. Giả sử $f(x)$ liên tục khi $a < x < b$ còn $\varphi(y)$ đơn điệu tăng và liên tục khi $c < y < d$. Trong trường hợp nào thì phương trình $\varphi(y) = f(x)$ xác định hàm đơn trị $y = \varphi^{-1}(f(x))$?

Xét các ví dụ : a $\sin y + \mathrm{sh} y = x$; b) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

Giải. Hàm $y = \varphi^{-1}(f(x)$ được xác định như sau : đối với giá trị $x \in (a, b)$ cố định bất kỳ (tức là đối với giá trị cố định $f(x)$) ta đặt tương ứng giá trị y, mà giá trị y đó là nghiệm của phương trình $\varphi(y) = f(x)$.

Bởi vì hàm $\varphi(y)$ liên tục và đơn điệu tăng trong khoảng (c, d) nên phương trình $\varphi(y) = A$ có nghiệm duy nhất $y = \varphi^{-1}(A)$, nếu số A thuộc tập hợp các giá trị của hàm $\varphi(y)$ $(c < y < d)$.

Như vậy, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y = \varphi^{-1}(f(x))$ nếu tập hợp các giá trị của các hàm $\varphi(y)$ $(c < y < d)$ và $f(x)$ $(a < x < b)$ có các điểm chung.

Ví dụ. Xét các thí dụ : a) $\sin y + \mathrm{sh} y = x$. Ở đây hàm $\varphi(y) (-\infty < x < +\infty)$ liên tục. Sử dụng công thức Taylo, ta thấy rằng đạo hàm

$$\varphi'(y) = \cos y + \mathrm{ch} y = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) = 2\left(1 + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) \quad (-\infty < y < +\infty)$$

dương. Vì vậy, hàm $\varphi(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$ đơn điệu tăng. Bởi vì tập hợp các giá trị của hàm $\varphi(y) = \sin y + \operatorname{sh} y$ $(-\infty < y < +\infty)$ và $f(x) = x(-\infty < x < +\infty)$ trùng nhau, nên phương trình $\sin y + \operatorname{sh} y = x$ xác định hàm đơn trị duy nhất $y = \omega(x)$ $(-\infty < x < y + \infty)$, biến phương trình thành đồng nhất thức.

b) $e^{-y} = -\sin^2 x$. Trong trường hợp này tập hợp các giá trị của hàm $\varphi(y) = e^{-y}$ $(-\infty < y < +\infty)$ là nửa khoảng vô hạn $(0, +\infty)$ còn tập hợp các giá trị của hàm $f(x) = -\sin^2 x$ $(-\infty < x < +\infty)$ là đoạn $[-1, 0]$. Do các tập hợp này không có điểm chung nên phương tr.nh $e^{-y} = -\sin^2 x$ không có nghiệm.

106. Giả sử $x = y + \varphi(y)$ (1), ở đây $\varphi(0) = 0$ và $|\varphi'(y)| \leqslant k < 1$, khi $-a < y < a$.

Chứng minh rằng với $-\varepsilon < x < \varepsilon$ tồn tại hàm khả vi duy nhất $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình (1) sao cho $y(0) = 0$.

Chứng minh: Từ đầu bài suy ra bất đẳng thức $\dfrac{dx}{dy} = 1 + \varphi'(y) > 0$ $(-a < y < a)$, nên hàm liên tục $x = y + \varphi(y)$ $(-a < y < a)$ đơn điệu chặt. Giả sử $\varepsilon = \min\{|x(-a+0)|, |x(a-0)|\}$. Khi đó do tính đơn điệu chặt của hàm $x = y + \varphi(y)$ nên mỗi $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ chỉ tương ứng với một giá trị $y \in (-a, a)$, để $y + \varphi(y) = x$. Vì vậy trên $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tồn tại hàm $y = y(x)$ là hàm ngược của hàm $x = y + \varphi(y)$ và cũng đơn điệu chặt. Vì phương trình (1) khi $y = 0$ có nghiệm $x = 0$, nên $y(0) = 0$.

Ta sẽ chứng minh rằng, hàm $y = y(x)$ khả vi. Giả sử x_o, $x_o + \Delta x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ và $\Delta x \neq 0$, khi đó y_o, $y_o + \Delta y \in (-a, a)$, ở đây y_o là nghiệm của phương trình $x_o = y + \varphi(y)$, $\Delta y \neq 0$ và $\Delta y \to 0$, khi $\Delta x \to 0$.

Do tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(1 + \frac{\varphi(y_o + \Delta y) - \varphi(y_o)}{\Delta y}\right) = 1 + \varphi'(y_o),$$

nên từ đồng nhất thức $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ ta thấy rằng tồn tại đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}$.

Vậy hàm $y = f(x)$ khả vi trên $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

107. Giả sử $y = y(x)$ là hàm ẩn, xác định bởi phương trình

$$x = ky + \varphi(y) \qquad (1)$$

trong đó hằng số $k \neq 0$, $\varphi(y)$ là hàm khả vi, tuần hoàn với chu kỳ ω, sao cho $|\varphi'(y)| < |k|$. Chứng minh rằng $y = \dfrac{x}{y} + \psi(x)$, trong đó $\psi(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $|k|\omega$.

Chứng minh. Ánh xạ A xác định bằng đẳng thức $Ay = \dfrac{x}{k} - \dfrac{\varphi(y)}{k}$ biến tập $C(-\infty, +\infty)$ vào chính nó. Ta sẽ chứng tỏ rằng nó là ánh xạ co. Thật vậy, đối với các hàm bất kỳ $y(x)$ và $z(x)$ từ $C(-\infty, +\infty)$, ứng dụng định lý Lagorăng ta nhận được

$$\rho(Ay, Az) = \max_{-\infty<x<+\infty} |Ay - Az| = \max_{-\infty<x<+\infty} \left|\frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{k}\right| =$$

$$= \max_{-\infty<x<+\infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} |y - z| \leqslant \max_{-\infty<x<+\infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} \max_{-\infty<x<+\infty} |y - z| =$$

$$= \max_{-\infty<x<+\infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} \rho(y, z),$$

trong đó ξ nằm giữa y và z. Bởi vì $|\varphi'(y)| < |k|$ nên

$$0 < \theta = \max_{-\infty<x<+\infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} < 1.$$

Vì vậy $\rho(Ay, Az) \leqslant \theta\rho(y, z), \; 0 < \theta < 1$

và ta chứng minh được ánh xạ A là ánh xạ co.

Vậy thì, theo nguyên lý về ánh xạ co (xem bài toán 96) sẽ tồn tại hàm duy nhất $y(x) \in C_{(-\infty, +\infty)}$ thỏa mãn phương trình $y = Ay$, tức là phương trình (1). Hàm này là giới hạn của dãy

$$y_1 = \frac{x}{k} - \frac{\varphi(0)}{k}, \quad y_n = \frac{x}{k} - \frac{\varphi(y_{n-1})}{k} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức cuối cùng, ta nhận được :

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x), \text{ ở đây } \psi(x) = -\frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \varphi(y_{n-1}(x)).$$

Ta lại chứng tỏ rằng các hàm $\varphi(y_{n-1}(x))$ $(n = 2, 3, \ldots)$ tuần hoàn theo biến x với chu kỳ $|k|\omega$. Để chứng minh điều đó ta áp dụng phương pháp quy nạp. Khi $n = 2$ hàm $\varphi(y_1(x))$ tuần hoàn theo biến x với chu kỳ $|k|\omega$. Thật vậy, theo điều kiện $\varphi(y \pm \omega) = \varphi(y)$, vì vậy

$$\varphi(y_1(x + |k|\omega)) = \varphi\left(\frac{x + |k|\omega}{k} - \frac{\varphi(0)}{k}\right) = \varphi(y_1(x) + \omega \operatorname{sgn} k) = \varphi(y_1(x)).$$

Sau nữa, giả sử rằng hàm $\varphi(y_{n-1}(x))$ có chu kỳ $|k|\omega$, ta nhận được đẳng thức

$$\varphi(y_n(x + |k|\omega)) = \varphi\left(\frac{x + |k|\omega}{k} - \frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x + |k|\omega))\right) =$$

$$= \varphi\left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x)) + \omega \operatorname{sgn} k\right) = \varphi(y_n(x) + \omega \operatorname{sgn} k) = \varphi(y_n(x)) ;$$

từ đó suy ra $|k|\omega$ là chu kỳ của hàm $\varphi(y_n(x))$ theo biến x.

Hàm giới hạn $\psi(x)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ $|k|\omega$. Điều này thấy rõ ràng từ đẳng thức hiển nhiên :

$$\psi(x+|k|\omega)-\psi(x)=\left(\psi(x+|k|\omega)+\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x+|k|\omega))\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x)-\psi(x)\right),$$

và chuyển qua giới hạn khi $n\to\infty$. Bởi vì mỗi số hạng tiến đều tới không, nên trong giới hạn ta nhận được đẳng thức

$$\psi(x+|k|\omega)-\psi(x)=0.$$

Vậy ta đã chứng minh xong hàm $\psi(x)$ là hàm tuần hoàn.

108. Chứng minh rằng, khi $1+xy=k(x-y)$, trong đó k là đại lượng không đổi, ta có đẳng thức

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}. \tag{1}$$

Chứng minh. Do $x\neq y$, nên $k=\dfrac{1+xy}{x-y}$. Vi phân đẳng thức này ta có :

$$0=\frac{(x-y)(xdy+ydx)-(1+xy)(dx-dy)}{(x-y)^2}$$

Từ đó suy ra hệ thức $(1+x^2)dy-(1+y^2)dx=0$, tương đương với đẳng thức (1).

109. Chứng minh rằng, nếu

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0 \tag{1}$$

thì với $xy>0$, ta có đẳng thức

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0. \tag{2}$$

Chứng minh. Vi phân (1) ta có :

$$2xy^2dx+2x^2ydy+2xdx+2ydy=0.$$

Từ đó tìm được :

$$x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0. \tag{3}$$

Từ đẳng thức (1) suy ra :

$$x^2=\frac{1-y^2}{1+y^2}\ ;\quad y^2=\frac{1-x^2}{1+x^2}\ ;$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}\ ;\ y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \tag{4}$$

Nếu x, y cùng dấu, tức là $xy>0$, thì thay x, y trong (3) bởi những giá trị (4) của chúng, ta sẽ nhận được

$$\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}\,(1+y^2)\,dx+\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,(1+x^2)\,dy=0$$

hay

$$\sqrt{1-y^4}\,dx+\sqrt{1-x^4}\,dy=0,$$

từ đó trực tiếp suy ra đẳng thức (2).

110. Chứng minh rằng, phương trình

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ a\neq 0 \qquad (1)$$

trong lân cận điểm $x=0$, $y=0$ xác định hai hàm khả vi $y=y_1(x)$ và $y=y_2(x)$. Tìm $y_1'(0)$, $y_2'(0)$.

Chứng minh. Với $\varepsilon>0$ đủ bé và $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ cố định bất kỳ, từ phương trình (1) ta tìm được hai giá trị y:

$$y=\varphi(x) \text{ và } y=-\varphi(x), \text{ trong đó}$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\sqrt{2a^2x^2+\frac{a^4}{4}}-x^2-\frac{a^2}{2}}\,.$$

Hàm $\varphi(x)$ xác định như trên liên tục trên $(-\varepsilon,\varepsilon)$ và $\varphi(0)=0$. Vì vậy có thể xác định 4 hàm liên tục:

$$y_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{nếu } 0\leqslant x<\varepsilon\\ -\varphi(x), & \text{nếu } -\varepsilon<x<0\,;\end{cases}$$

$$y_2(x)=\begin{cases}-\varphi(x), & \text{nếu } 0\leqslant x<\varepsilon\\ \varphi(x), & \text{nếu } -\varepsilon<x<0\,;\end{cases}$$

$$y_3(x)=\varphi(x)\ (-\varepsilon<x<\varepsilon)\ ;\ y_4(x)=-\varphi(x)\ (-\varepsilon<x<\varepsilon),$$

thỏa mãn phương trình (1).

Ta xét tính khả vi của các hàm này khi $x=0$. Với mục đích đó ta tính $\varphi'_-(0)$. Ta có:

$$\varphi'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}-\Delta x^2-\frac{a^2}{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}-\Delta x^4-\Delta x^2a^2-\frac{a^4}{4}}}{\Delta x\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}+\Delta x^2+\frac{a^2}{2}}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\Delta x|\sqrt{a^2-\Delta x^2}}{\Delta x\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}+\Delta x^2+\frac{a^2}{2}}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\sqrt{a^2-\Delta x^2}}{\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}+\Delta x^2+\frac{a^2}{2}}}=-1.$$

Tương tự ta tìm được $\varphi'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}=1.$

Từ đó ta suy ra ngay các hàm $y_3(x)$, $y_4(x)$, không có đạo hàm khi $x = 0$. Vì $y'_{1-}(0) = -\varphi'_-(0) = 1$, $y'_{1+}(0) = \varphi'_+(0) = 1$ nên hàm $y_1(x)$ có đạo hàm khi $x = 0$ và bằng đơn vị. Tương tự từ các đẳng thức

$$y'_{2-}(0) = \varphi'_-(0) = -1, \ y'_{2+}(0) = -\varphi'_+(0) = -1$$

suy ra hàm $y_2(x)$ cũng khả vi tại điểm $x = 0$, đồng thời $y'_2(0) = -1$.

111. Tìm y' khi $x = 0$ và $y = 0$, nếu

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3. \tag{1}$$

Giải. Biểu diễn đường cong xác định từ phương trình (1) dưới dạng tham số. Muốn vậy ta đặt $y = tx$, khi đó từ phương trình (1) ta tìm được

$$x = \frac{3t - t^3}{(1 + t^2)^2}.$$

Từ đó ta suy ra :

$$y = tx = \frac{3t^2 - t^4}{(1 + t^2)^2}.$$

Nhận xét rằng $x = 0$, $y = 0$ ứng với ba giá trị của tham số t là : $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$, $t_3 = -\sqrt{3}$. Còn lại phải tính đạo hàm của hàm theo tham số đã cho tại các giá trị tham số này, tức là khi $x = 0$. Ta có :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + t^2)(6t - 4t^3) - 4t(3t^2 - t^4)}{(1 + t^2)(3 - 3t^2) - 4t(3t - t^3)}.$$

Từ đó khi $t = 0$, $t = \sqrt{3}$ và $t = -\sqrt{3}$ ta tìm được $y'_1(0) = 0$; $y'_2(0) = \sqrt{3}$; $y'_3(0) = -\sqrt{3}$.

112. Tìm y', y'' và y''', nếu $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Giải. Sử dụng công thức $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$, ta nhận được :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad (x \neq -2y) ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x + 2y)(2 + y') - (2x + y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2} =$$

$$= -\frac{18}{(x + 2y)^3} \quad (x \neq -2y) ;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{54}{(x + 2y)^4}(1 + 2y') = \frac{-162x}{(x + 2y)^5} \quad (x \neq -2y).$$

113. Tìm y', y'' và y''' khi $x = 0$, $y = 1$, nếu

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0. \tag{1}$$

Giải. Đạo hàm 3 lần đẳng thức (1) :

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0 ;$$
$$2 - 2y' - xy'' + 4y'^2 + 4yy'' - y'' = 0 ;$$
$$-3y'' - xy''' + 12y'y'' + 4yy''' - y''' = 0.$$

Thay $x = 0$ và $y = 1$ vào các kết quả, ta nhận được hệ phương trình :

$$3y' = 0,\ 2 + 3y'' = 0,\ 2 + 3y''' = 0,$$

từ đó ta tìm được :

$$y' = 0,\ y'' = -\frac{2}{3},\ y''' = -\frac{2}{3}.$$

114. Chứng minh rằng đối với đường cong bậc 2 :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{d^3}{dx^3}\left((y'')^{-\frac{2}{3}}\right) = 0. \qquad (1)$$

Giải. Từ phương trình đường cong ta nhận được :

$$y = \frac{1}{c}\left(-(bx + e) \pm \sqrt{(b^2 - ac)x^2 + 2(be - cd)x + e^2 - cf}\right).$$

Ta tìm đạo hàm cấp 2 :

$$y' = \frac{1}{c}\left(-b \pm \frac{(b^2 - ac)x + (be + cd)}{\sqrt{(b^2 - ac)x^2 + 2(be - cd)x + e^2 - cf}}\right);$$

$$y'' = \pm\frac{1}{c}\,\frac{(b^2 - ac)(e^2 - cf) - (be - cd)^2}{\sqrt{((b^2 - ac)x^2 + 2(be - cd)x + e^2 - cf)^3}}.$$

Từ đó ta nhận được đẳng thức :

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \left(\pm\frac{(b^2 - ac)(e^2 - cf) - (be - cd)^3}{c}\right)^{-\frac{2}{3}} ((b^2 - ac)x^2 + 2(be - cd)x + e^2 - cf) :$$

từ đó suy ra đẳng thức (1).

Cho hàm $z = z(x, y)$; tìm các đạo hàm **riêng cấp** một và cấp hai, nếu :

115. $z^3 - 3xyz = a^3$.

Giải. Ta tìm các đạo hàm riêng của hàm $z(x, y)$ được xác định bằng phương trình $F(x, y, z) = 0$ theo các công thức sau :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Đối với trường hợp trên ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy} ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy} \quad (z^2 - xy \neq 0).$$

Chú ý rằng $z = z(x, y)$, ta tìm được đạo hàm cấp hai :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(z^2 - xy)y\frac{\partial z}{\partial x} - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)}{(z^2 - xy)^2} =$$

$$= \frac{(z^2 - xy)y\frac{zy}{z^2 - xy} - yz\left(2z\frac{yz}{z^2 - xy} - y\right)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3} ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2yx^3 z}{(z^2 - xy)^3} ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z^2 - xy)\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} =$$

$$= \frac{(z^2 - xy)\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} =$$

$$= \frac{z(z^4 - 2z^2 xy - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3} \quad (z^2 \neq xy).$$

116. $\quad z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Giải. Tương tự như bài trước, ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{x^2 - y^2}\cos^{-2}\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{xz}{(\sqrt{x^2 - y^2})^3}}{1 - \sqrt{x^2 - y^2}\cos^{-2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

Từ đầu bài ta có :

$$\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} ; \quad \cos^{-2}\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{z^2}{x^2 - y^2} + 1.$$

Sử dụng các đẳng thức này ta nhận được :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{xz}{(x^2-y^2)}\left(\dfrac{z^2}{x^2-y^2}+1\right)}{-\dfrac{z^2}{x^2-y^2}} =$$

$$= \frac{xz}{x^2-y^2} \quad (x^2 \neq y^2).$$

Cũng bằng cách trên ta tìm được :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2-y^2} \quad (x^2 \neq y^2).$$

Ta tìm các đạo hàm cấp hai (chú ý tới đạo hàm cấp 1 đã tìm được) :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2-y^2)\left(z+x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-xz\,.\,2x}{(x^2-y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2)\left(z+\dfrac{x^2z}{x^2-y^2}\right)-2zx^2}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2} \quad (x^2 \neq y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(x^2-y^2)\left(z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)-yz(-2y)}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2} \quad (x^2 \neq y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{(x^2-y^2)x\dfrac{\partial z}{\partial y}-xz(-2y)}{(x^2-y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2)x\dfrac{(-yz)}{x^2-y^2}+2xyz}{(x^2-y^2)^2} = \frac{xyz}{(x^2-y)^2}\,(x^2 \neq y^2).$$

Tìm dz và d^2z, nếu :

117. $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1.$

Giải. Xem rằng $z = z(x, y)$, sau khi vi phân ta có :

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{z}\,\frac{ydz - zdy}{y^2}, \; yzdx - xydz - yzdz + z^2dy = 0 \qquad (1)$$

Từ đó :

$$dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)} \quad (x \neq -z). \qquad (2)$$

Vi phân đẳng thức (1), rút gọn ta được:

$$y(x+z)d^2z = zdxdy + (zdy - xdy)dz - ydz^2.$$

Từ đó và (2), cuối cùng ta được:

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3} \quad (x \neq -z).$$

118. $z - x = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{z-x}$:

Giải. Sau khi vi phân ta nhận được:

$$d(z-x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{(z-x)}\right)^2} \cdot \frac{(z-x)dy - yd(z-x)}{(z-x)^2}.$$

Từ đó:

$$((z-x)^2 + y^2 + y)\,d(z-x) = (z-x)dy \qquad (1)$$

hay

$$dz = dx + \frac{(z-x)dy}{(z-x)^2 + y^2 + y}.$$

Vi phân đẳng thức (1):

$$((z-x)^2 + y^2 + y)d^2(z-x) = -2((z-x)\,d(z-x) + ydy)\,d(z-x).$$

Thay $d(z-x)$ bởi biểu thức tìm được từ (1), ta nhận được:

$$d^2(z-x) = d^2z = -\frac{2(y+1)(z-x)\,((z-x)^2 + y^2)}{((z-x)^2 + y^2 + y)^3}\,dy^2.$$

119. Tìm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, nếu $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$.

Giải. Sau khi vi phân liên tiếp đẳng thức đã cho ta tìm được:

$$F'_1(dx + dy + dz) + F'_2(2xdx + 2ydy + 2zdz) = 0 \qquad (1)$$

$$F''_{11}(dx + dy + dz)^2 + 2F''_{12}(dx + dy + dz)(2xdx + 2ydy + 2zdz) +$$

$$+ F'_1 d^2z + F''_{22}(2xdx + 2ydy + 2zdz)^2 +$$

$$+ 2F'_2(dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z) = 0.$$

Thay biểu thức nhận được từ đẳng thức thứ nhất sau đây:

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = -\frac{F'_1}{F'_2}(dx + dy + dz)$$

vào đẳng thức thứ hai, ta nhận được (sau khi biến đổi):

$$(F'_1 + 2zF'_2)d^2z = \frac{-F_1'^2F''_{22} + 2F'_1F'_2F''_{12} - F_2'^2F''_{11}}{F_2'^2} \times$$

$$\times (dx + dy + dz)^2 - 2F'_2(dz^2 + dx^2 + dy^2). \qquad (2)$$

Từ (1) ta lại có

$$dz = -\frac{(F_1' + 2xF_2')dx + (F_1' + 2yF_2')dy}{F_1' + 2zF_2'}. \quad (3)$$

Tính tổng

$$dx + dy + dz = \frac{2F_2'((z - x)dx + (z - y)dy)}{F_1' + 2zF_2'}. \quad (4)$$

Từ các đẳng thức (2), (3) và (4) ta tìm được vi phân cấp hai:

$$d^2z = -\frac{4(F_1'^2F_{22}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_2'^2F_{11}'')}{(F_1' + 2zF_2')^3}((z - x)^2dx^2 +$$

$$+ 2(z - x)(z - y)dxdy + (z - y)^2dy^2) -$$

$$- 2F_2'\frac{(F_1' + 2xF_2')^2dx^2 + 2(F_1' + 2xF_2')(F_1' + 2yF_2')dxdy}{(F_1' + 2zF_2')^3} +$$

$$+ \frac{(F_1' + 2yF_2')^2dy^2}{(F_1' + 2zF_2')^3} - 2F_2'(dx^2 + dy^2)(F_1' + 2zF_2')^{-1}.$$

Nửa hệ số của $dxdy$ bằng $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. Vì vậy,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{4(z - x)(z - y)}{(F_1' + 2zF_2')^3}(F_1'^2F_{22}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_2'^2F_{11}'') -$$

$$- \frac{2(F_1' + 2xF_1')(F_2 + 2yF_2')}{(F_1' + 2zF_2')^3}F_2', \ (F_1' + 2zF_2' \neq 0).$$

120. Tìm d^2z, nếu: a) $F(x + z, y + z) = 0$;

b) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$.

Giải. a) Sau khi vi phân liên tiếp ta nhận được:

$$F_1'(dx + dz) + F_2'(dy + dz) = 0 \quad (1)$$

$$F_{11}''(dx + dz)^2 + 2F_{12}''(dx + dz)(dy + dz) +$$

$$+ F_{22}''(dy + dz)^2 + (F_1' + F_2')d^2z = 0. \quad (2)$$

Từ đẳng thức (1) ta tìm được vi phân cấp 1:

$$dz = -\frac{F_1'dx + F_2'dy}{F_1' + F_2'},$$

và tính các tổng:

$$dx + dz = dx - \frac{F_1'dx + F_2'dy}{F_1' + F_2'} = \frac{F_2'(dx - dy)}{F_1' + F_2'},$$

$$dy + dz = dy - \frac{F_1'dx + F_2'dy}{F_1' + F_2'} = -\frac{F_1'(dx - dy)}{F_1' + F_2'}.$$

Sử dụng các hệ thức này, từ (2) ta tìm được vi phân cấp hai:

$$d^2z = -(F'_1 + F'_2)^{-3}(F'^2_2 F''_{11} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + F'^2_1 F''_{22})(dx - dy)^2.$$

b) Ta có:

$$F'_1 \frac{zdx - xdz}{z^2} + F'_2 \frac{zdy - ydz}{z^2} = 0. \tag{3}$$

Nhân đẳng thức trên với z^2 rồi vi phân lần nữa, ta có:

$$F''_{11}\frac{(zdx - xdz)^2}{z^2} + 2F''_{12}\frac{(zdx - xdz)(zdy - ydz)}{z^2} +$$

$$+ F''_{22}\frac{(zdy - ydz)^2}{z^2} - (xF'_1 + yF'_2)d^2z = 0. \tag{4}$$

Từ (3) ta tìm được vi phân cấp một

$$dz = z \cdot \frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{xF'_1 + yF'_2},$$

và tính các tổng:

$$zdx - xdz = zF'_2 \frac{ydx - xdy}{xF'_1 + yF'_2};\ zdy - ydz = -zF'_1 \frac{ydx - xdy}{xF'_1 + yF'_2}. \tag{5}$$

Giải theo d^2z từ (4) và sử dụng (5) ta tìm được vi phân cấp hai:

$$d^2z = (xF'_1 + yF'_2)^{-3}(F'^2_2 F''_{11} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + F'^2_1 F''_{22})(ydx - xdy)^2.$$

121. Giả sử $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$; $z = z(x, y)$ là những hàm xác định bằng phương trình $F(x, y, z) = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $x = x(y, z)$. Từ đồng nhất thức

$$F(x(y, z), y, z) = 0$$

ta tìm được:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}.$$

Tương tự đối với các trường hợp khác ta có:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y},\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},$$

Từ các hệ thức tìm được suy ra đẳng thức:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right) = -1$$

122. Tìm $\dfrac{dx}{dz}$ và $\dfrac{dy}{dz}$ nếu $x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$ (1)

Giải. Hệ đã cho xác định các hàm $x = x(z)$, $y = y(z)$, mà đạo hàm của chúng được tìm theo công thức (4) mục 4.

Vi phân đẳng thức (1) theo z, ta nhận được hệ:

$$\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0,\ 2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} + 2z = 0.$$

Từ đó ta nhận được

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y};\ \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}\ (x \neq y)$$

123. Tìm $\frac{dx}{dz}$; $\frac{dy}{dz}$; $\frac{d^2x}{dz^2}$; $\frac{d^2y}{dz^2}$ khi $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, nếu $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$; $x + y + z = 2$.

Giải. Giả sử rằng hệ đã cho xác định các hàm $x = x(z)$, $y = y(z)$. Vi phân nó theo z ta có:

$$2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} = z;\ \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1. \qquad (1)$$

Thay vào (1) với $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ ta có hệ:

$$\frac{dx}{dz} - \frac{dy}{dz} = 1,\ \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1, \text{ hay } \frac{dx}{dz} = 0; \frac{dy}{dz} = -1.$$

Để tìm các đạo hàm cấp 2 ta vi phân (1) lần nữa theo z:

$$2x\frac{d^2x}{dz^2} + 2y\frac{d^2y}{dz^2} + 2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0,$$

đặt vào các đẳng thức này $x = 1$; $y = -1$, $\frac{dx}{dz} = 0$ và $\frac{dy}{dz} = -1$, rồi giải hệ nhận được ta có:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{4};\ \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{4}.$$

124. Tìm du, dv, d^2u, d^2v nếu $u + v = x + y$, $y\sin u - x\sin v = 0$.

Giải. Vi phân các đẳng thức đã cho ta nhận được hệ:

$$du + dv = dx + dy,\ y\cos u du - x\cos v dv = \sin v dx - \sin u dy \qquad (1)$$

Giải hệ đó, ta tìm được:

$$du = \frac{(x\cos v + \sin v)dx + (x\cos v - \sin u)dy}{x\cos v + y\cos u},$$

$$dv = \frac{(y\cos u - \sin v)dx + (y\cos u + \sin u)dy}{x\cos v + y\cos u}.$$

Để tìm vi phân cấp hai, ta vi phân đẳng thức (1). Sau một số phép biến đổi đơn giản, ta nhận được

$$y\cos u d^2u - x\cos v d^2v = (2\cos v dx - x\sin v dv)dv + (y\sin u du - 2\cos u dy)du,$$
$$d^2u + d^2v = 0.$$

Từ đó

$$d^2u = -d^2v = \frac{(2\cos v dx - x\sin v dv)dv + (y\sin u du - 2\cos u dy)du}{y\cos u + x\cos v}.$$

125. Tìm du, dv, d^2u, d^2v khi $x = 1, y = 1, u = 0, v = \frac{\pi}{4}$, nếu

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}\ ;\ e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Giải. Vi phân cả hai vế của hệ đã cho, ta có:

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{xdu - udx}{x^2} - e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{ydv - vdy}{y^2} = \frac{dx}{\sqrt{2}},$$
$$e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\,\frac{xdu - udx}{x^2} + e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\,\frac{ydv - vdy}{y^2} = \frac{dy}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Thay $x = y = 1,\ u = 0,\ v = \frac{\pi}{4}$ vào hệ (1) ta có hệ:

$$du - dv + \frac{\pi}{4}dy = dx;\ du + dv - \frac{\pi}{4}dy = dy;$$

từ đó ta tìm được:

$$du = \frac{1}{2}(dx + dy);\ dv = \frac{\pi}{4}dy - \frac{1}{2}(dx - dy). \qquad (2)$$

Sau nữa, vi phân (1), ta có:

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{x^2d^2u - 2(xdu - udx)dx}{x^3} - e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\times$$
$$\times\frac{y^2d^2v - 2(ydv - vdy)dy}{y^3} + e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\left(\left(\frac{xdu - udx}{x^2}\right)^2 -\right.$$
$$\left.-\left(\frac{ydv - vdy}{y^2}\right)^2\right) - 2e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\,\frac{xdu - udx}{x^2}\cdot\frac{ydv - vdy}{y^2} = 0,$$

$$e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{x^2d^2u-2(xdu-udx)dx}{x^3}+e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\times$$

$$\times\frac{y^2d^2v-2(ydv-vdy)\,dy}{y^3}+e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\left(\left(\frac{xdu-udx}{x^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{ydv-vdy}{y^2}\right)^2\right)+2e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{xdu-udx}{x^2}\cdot\frac{ydv-vdy}{y^2}=0.$$

Thay vào các đẳng thức này $x=y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$ ta nhận được hệ:

$$d^2u-2dudx-d^2v+2dvdy-\frac{\pi}{2}dy^2+du^2-\left(dv-\frac{\pi}{4}dy\right)^2-$$

$$-2du\left(dv-\frac{\pi}{4}dy\right)=0, \tag{3}$$

$$d^2u-2dudx+d^3v-2dvdy+\frac{\pi}{2}dy^2+du^2-\left(dv-\frac{\pi}{4}dy\right)^2+$$

$$+2du\left(dv-\frac{\pi}{4}dy\right)=0.$$

Từ các hệ (2) và (3) ta tìm được

$$d^2u=dx^2;\ d^2v=\frac{1}{2}(dy-dx)^2.$$

126. Giả sử $x=t+t^{-1}$; $y=t^2+t^{-2}$, $z=t^3+t^{-3}$. Tìm

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2};\ \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Giải. Hệ đã cho xác định hai hàm theo tham số:

$$\begin{cases}x=t+t^{-1},\\ y=t^2+t^{-2};\end{cases}\quad\text{và}\quad\begin{cases}x=t+t^{-1},\\ z=t^3+t^{-3}.\end{cases}$$

Vì vậy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-2t^{-3}}{1-t^{-2}}=2\left(t+\frac{1}{t}\right)(t\neq\pm1);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2(1-t^{-2})}{1-t^{-2}}=2\quad(t\neq\pm1);$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \frac{3t^2 - 3t^{-4}}{1 - t^{-2}} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right) \quad (t \neq \pm 1);$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6(t - t^{-3})}{1 - t^{-2}} = 6\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (t \neq \pm 1).$$

127. Trong miền nào của mặt phẳng Oxy, hệ phương trình

$$x = u + v,\ y = u^2 + v^2;\ z = u^3 + v^3 \tag{1}$$

(ở đây các tham số u và v nhận tất cả các giá trị thực có thể có) xác định z như hàm của biến x và y?

Tìm các đạo hàm $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Giải. Hệ (1) xác định hàm đơn trị $z = \varphi(x, y)$ đối với tập hợp điểm (x, y), mà hệ $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$ (2) có nghiệm đơn trị đối với các biến u và v. Hệ (2) gồm những hàm khả vi liên tục. Vì vậy nếu Jacôbiên $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ khác không tại điểm (u, v) nào đấy thì trong lân cận của điểm này hệ (2) có nghiệm khả vi liên tục duy nhất

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y). \tag{3}$$

Thay (3) vào đẳng thức thứ ba của (1) ta nhận được hàm $z = \varphi(x, y)$. Hàm $\varphi(x, y)$ khả vi (xem các định lý 3, 4 mục 4) Jacôbiên

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2(v - u)$$

khác không nếu $v - u = \sqrt{2(u^2 + v^2) - (u + v)^2} = \sqrt{2y - x^2} \neq 0$. Do $2y - x^2 = 2(x^2 + v^2) - (u + v)^2 = (u - v)^2 \geqslant 0$, nên từ điều kiện $\sqrt{2y - x^2} \neq 0$ suy ra $y > \frac{x^2}{2}$. Vì vậy, đối với tập điểm (x, y), mà nó thỏa mãn bất đẳng thức $y > \frac{x^2}{2}$, tồn tại hàm $z = \varphi(x, y)$ khả vi liên tục đơn trị duy nhất.

Để tính các đạo hàm riêng, ta tính

$$dz = 3(u^2du + v^2dv) \tag{4}$$

ở đây du và dv được xác định từ hệ:

$$dx = du + dv,\ dy = 2udu + 2vdv. \tag{5}$$

Thay du và dv tìm được từ (5) vào (4), ta được

$$dz = -3uvdx + \frac{3}{2}(u + v)\,dy \quad (u - v \neq 0).$$

Các trị số của dx và dy bằng $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ tương ứng, vì vậy,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v) \ (u \neq v).$$

128. Hệ phương trình $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ xác định các hàm khả vi $u = u(x, y)$ và $v = v(x, y)$, sao cho $u(1, 2) = 0$ và $v(1, 2) = 0$. Tìm $du(1, 2)$ và $dv(1, 2)$.

Giải. Vi phân cả hai vế của các đẳng thức đã cho, ta có:

$$xe^{u+v}(du + dv) + 2(udv + vdu) + e^{u+v}\,dx = 0$$

$$ye^{u-v}(du - dv) - \frac{(1+v)\,du - udv}{(1+v^2)} + e^{u-v}\,dy = 2dx.$$

Thay $x = 1$, $y = 2$, $u = v = 0$ ta được hệ:

$$du + dv = -dx, \ du - 2dv = 2dx - dy.$$

Từ đó ta nhận được:

$$du = -\frac{1}{3}dy; \ dv = \frac{1}{3}dy - dx.$$

129. Giả sử $\qquad x = \varphi(u, v), \ y = \psi(u, v).$ $\qquad$ (1)

Tìm các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của các hàm ngược $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Giải. Vi phân (1), ta có hệ:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv; \ dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv. \qquad (2)$$

Từ (2) ta tìm được các vi phân của các hàm ngược

$$du = \frac{1}{I}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}dx - \frac{\partial \varphi}{\partial v}dy\right); \ dv = -\frac{1}{I}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}dx - \frac{\partial \varphi}{\partial u}dy\right) \qquad (3)$$

ở đây $I = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}$. Từ (3) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \qquad (4)$$

Vi phân hệ (2):

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\, d^2u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\, d^2v + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\, du^2 + 2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\, du\,dv + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\, dv^2.$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial u}\, d^2u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\, d^2v + \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\, du^2 + 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\, du\,dv + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\, dv^2.$$

Và tìm vi phân cấp hai của các hàm ngược

$$\begin{aligned} d^2u = \frac{1}{I}\Bigg(&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right) du^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) du\,dv + \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) dv^2\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2v = \frac{1}{I}\Bigg(&\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right) du^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) du\,dv + \\ &+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) dv^2\Bigg). \end{aligned}$$

Thay (3) vào hệ này, rồi nhóm các hệ số của dx^2, $2dxdy$, dy^2 ta nhận được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{I^3}\Bigg(&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{1}{I^3}\Bigg(&\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Bigg); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{I^3}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \right.$$

$$+ 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right); \ldots$$

130. Hàm $u = u(x)$ được xác định bởi hệ:

$$u = f(x, y, z),\ g(x, y, z) = 0,\ h(x, y, z) = 0.$$

Tìm $\frac{du}{dx}$ và $\frac{d^2u}{dx^2}$.

Giải. Giả sử hệ đã cho xác định ba hàm khả vi $u = u(x)$, $y = y(x)$, $z = z(x)$. Vi phân theo x hệ đã cho:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}; \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}; \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \end{aligned} \tag{1}$$

Từ hai phương trình cuối của (1) ta có các đạo hàm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_2}{I_1},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{I_3}{I_1} \tag{2}$$

ở đây

$$I_1 = \frac{D(g, h)}{D(y, z)};\ I_2 = \frac{D(g, h)}{D(z, x)};\ I_3 = \frac{D(g, h)}{D(x, y)}.$$

Sử dụng (2), từ phương trình thứ nhất của hệ (1) ta được:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{I_2}{I_1}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{I_3}{I_1}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{I_1}\left(I_1\frac{\partial f}{\partial x} + I_2\frac{\partial f}{\partial y} + I_3\frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{I_1}\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} = \frac{I}{I_1}\left(I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}\right).$$

Để xác định $\frac{d^2u}{dx^2}$ ta vi phân hệ (1):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2};$$

$$0=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\frac{dz}{dx}+$$
$$+2\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2};$$
$$0=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+$$
$$+2\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx}+2\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Sử dụng các công thức (2) ta viết lại các đẳng thức cuối cùng dưới dạng cô đậm hơn:

$$\frac{d^2 u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^2}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2};$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}=-\frac{1}{I_1^2}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g,\tag{3}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}=-\frac{1}{I_1^2}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h.$$

Từ hai đẳng thức cuối cùng ta tìm được các đạo hàm:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h-\frac{\partial h}{\partial z}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right)$$
$$\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.g-\frac{\partial g}{\partial y}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 h\right),$$

và tính tổng:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right)=$$
$$=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{D(f,g)}{D(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+\right.$$
$$\left.+\frac{D(h,f)}{D(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right).\tag{4}$$

Cuối cùng, từ (2) và (4) ta nhận được :

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{D(g,h)}{D(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{D(h,f)}{D(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+\frac{D(f,g)}{D(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right)$$

131. Giả sử $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$.

Tìm
$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Giải. Vi phân các đẳng thức đã cho, ta nhận được hệ :

$$dx = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw;\ dy = g'_u du + g'_v dv + g'_w dw,$$

$$dz = h'_u du + h'_v dv + h'_w dw.$$

Từ đó ta tính vi phân :

$$du=\frac{1}{\dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}}\cdot\begin{vmatrix} dx & f'_v & f'_w\\ dy & g'_v & g'_w\\ dz & h'_v & h'_w\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}}\cdot\left(\frac{D(g,h)}{D(v,w)}dx+\frac{D(h,f)}{D(v,w)}dy+\frac{D(f,g)}{D(v,w)}dz\right).$$

Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I},$$

ở đây

$$I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)};\ I_1=\frac{D(g,h)}{D(v,w)};\ I_2=\frac{D(h,f)}{D(v,w)};\ I_3=\frac{D(f,g)}{D(v,w)}.$$

132. Giả sử hàm $z = z(x, y)$ thỏa mãn hệ phương trình :

$$f(x,y,z,t)=0;\ g(x,y,z,t)=0,$$

ở đây t là tham biến. Tìm dz.

Giải. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt = 0\\ g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz + g'_t dt = 0.\end{cases}$$

Từ đó:

$$dz = -\frac{1}{\frac{D(f,g)}{D(z,t)}} \cdot \begin{vmatrix} f'_x dx + f'_y dy & f'_t \\ g'_x dx + g'_y dy & g'_t \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{D(f,g)}{D(z,t)}} \left((f'_x\, g'_t - f'_t\, g'_x)\, dx + (f'_y\, g'_t - f'_t\, g'_y)\, dy \right) =$$

$$= -\frac{1}{I_3}(I_1\, dx + I_2\, dy),$$

trong đó

$$I_1 = \frac{D(f,g)}{D(x,t)},\ I_2 = \frac{D(f,g)}{D(y,t)};\ I_3 = \frac{D(f,g)}{D(z,t)}.$$

133. Giả sử $u = f(z)$, ở đây z là hàm ẩn của các biến x và y, xác định từ phương trình $z = x + y\,\varphi(z)$.

Chứng minh công thức Lagorăng:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ (\varphi(z))^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

Chứng minh. Ứng dụng phương pháp quy nạp toán học. Muốn thế trước hết chứng minh công thức Lagorăng đúng với $n = 1$.

Từ phương trình $z = x + y\,\varphi(z)$ ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\frac{d\varphi}{dz}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\frac{d\varphi}{dz}}\left(y\frac{d\varphi}{dz} \neq 1\right) \quad (1)$$

Từ (1) và đẳng thức $u = f(z)$ a nhận được:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\frac{df}{dz}}{1 - y\frac{d\varphi}{dz}};\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{df}{dz}}{1 - y\frac{d\varphi}{dz}}$$

Từ đó

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

nghĩa là công thức Lagorăng đúng khi $n = 1$.

Giả sử rằng công thức Lagorăng đúng với $n = k > 1$, ta chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left\{(\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}. \quad (3)$$

Đạo hàm công thức Lagơrăng khi $n = k$, ta nhận được:

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial x^{k-1}\partial y}\left\{(\varphi(z))^k \frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\varphi(z))^k \frac{\partial u}{\partial x}\right\}\right). \quad (4)$$

Sử dụng đẳng thức $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$ (suy ra từ (1)) và đẳng thức (2), ta biến đổi biểu thức $\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\varphi(z))^k \frac{\partial u}{\partial x}\right\}$. Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\varphi(z))^k \frac{\partial u}{\partial x}\right\} = k(\varphi(z))^{k-1}\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} =$$

$$= k(\varphi(z))^{k-1}\frac{d\varphi}{dz}\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= k(\varphi(z))^k\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$

$$= k(\varphi(z))^k\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\left(\varphi(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$

$$= \left\{(k+1)(\varphi(z))^k\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right\}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Từ đó và từ (4) trực tiếp suy ra (3).

134. Hàm $z = z(x, y)$ được cho bởi phương trình

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0. \quad (1)$$

Chứng minh rằng $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

Giải. Vi phân đẳng thức (1) ta nhận được:

$$F'_1\cdot\left(dx + \frac{ydz - zdy}{y^2}\right) + F'_2\cdot\left(dy + \frac{xdz - zdx}{x^2}\right) = 0.$$

Từ đó:

$$dz = \frac{y(zF'_2 - x^2F'_1)}{x(xF'_1 + yF'_2)}dx + \frac{x(zF'_1 - y^2F'_2)}{y(xF'_1 + yF'_2)}dy \quad (xF'_1 + yF'_2 \neq 0).$$

Vì vậy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF'_2 - x^2F'_1)}{x(xF'_1 + yF'_2)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF'_1 - y^2F'_2)}{y(xF'_1 + yF'_2)}.$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với x và đẳng thức thứ hai với y, rồi cộng lại ta được điều phải chứng minh:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y(zF'_2 - x^2F'_1) + x(zF'_1 - y^2F'_2)}{xF'_1 + yF'_2} =$$

$$= \frac{xF'_1(z - xy) + yF'_2(z - xy)}{xF'_1 + yF'_2} = z - xy.$$

135. Chứng minh rằng hàm $z = z(x, y)$ xác định từ hệ :

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha) \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha), \end{cases}$$

trong đó $\alpha = \alpha(x, y)$ là tham biến, $f(\alpha)$ là hàm khả vi bất kỳ thỏa mãn phương trình

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

Giải. Vi phân đẳng thức thứ nhất của hệ, ta có :

$$\cos\alpha dx + \sin\alpha dy + (-x\sin\alpha + y\cos\alpha - f'(\alpha))\, d\alpha + \frac{dz}{z} = 0.$$

Do đẳng thức thứ hai của hệ, nên hệ số của $d\alpha$ bằng không. Vì vậy :

$$dz = -z\cos\alpha dx - z\sin\alpha dy.$$

Từ đó

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -z\cos\alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -z\sin\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\cos^2\alpha + z^2\sin^2\alpha = z^2.$$

136. Chứng minh rằng hàm $z = z(x, y)$ được cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} (z - f(\alpha))^2 = x^2(y^2 - \alpha^2) \\ (z - f(\alpha))f'(\alpha) = \alpha x^2, \end{cases}$$

(ở đây $\alpha = \alpha(x, y)$ là tham biến và $f(\alpha)$ là hàm khả vi bất kỳ) thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Giải. Vi phân đẳng thức thứ nhất của hệ, ta có :

$$2(z - f(\alpha))\,(dz - f'(\alpha)\,d\alpha) = 2x\,(y^2 - \alpha^2)\,dx + 2x^2(ydy - \alpha d\alpha).$$

Do đẳng thức thứ hai, hệ số của $d\alpha$ bằng không và cũng từ đẳng thức thứ nhất ta có

$$y^2 - \alpha^2 = \frac{1}{x^2}\,(z - f(\alpha))^2.$$

Sử dụng đẳng thức đó ta nhận được

$$dz = \frac{1}{x}\,(z - f(\alpha))dx + \frac{x^2ydy}{z - f(\alpha)},$$

hay

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - f(\alpha)}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 y}{z - f(\alpha)} \ (z \neq f(\alpha)).$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - f(\alpha)}{x} \cdot \frac{x^2 y}{z - f(\alpha)} = xy.$$

137. Chứng minh rằng hàm $z = z(x, y)$ được cho bởi hệ

$$z = \alpha x + y\,\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \; 0 = x + y\,\varphi'(\alpha) + \Psi'(\alpha),$$

ở đây $\alpha = \alpha(x, y)$ là tham biến, còn $\varphi(\alpha)$, $\Psi(\alpha)$ là những hàm khả vi bất kỳ, thì thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Giải. Từ đẳng thức thứ nhất ta có :

$$dz = \alpha dx + \varphi dy + (x + y\,\varphi' + \psi')\,d\alpha.$$

Theo điều kiện, hệ số của $d\alpha$ bằng không. Chú ý tới nó ta tìm vi phân cấp hai :

$$d^2 z = (dx + \varphi' dy) d\alpha. \tag{1}$$

Ta tìm vi phân $d\alpha$ từ đẳng thức thứ hai của hệ :

$$dx + \varphi' dy + (y\,\varphi'' + \psi'')\,d\alpha = 0\ ;$$

$$d\alpha = -\frac{dx + \varphi' dy}{y\varphi'' + \psi''}.$$

Từ đó và từ (1) ta nhận được :

$$d^2 z = -\frac{(dx + \varphi' dy)^2}{y\varphi'' + \psi''}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{y\varphi'' + \psi''};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\varphi'}{y\varphi'' + \psi''}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(\varphi')^2}{y\varphi'' + \psi''}.$$

Thay vào đẳng thức cần chứng minh, ta có :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{(\varphi')^2}{(y\varphi'' + \psi'')^2} - \frac{(\varphi')^2}{(y\varphi'' + \psi'')^2} = 0$$

$(y\varphi'' + \psi'' \neq 0)$, đó là điều phải chứng minh.

§5. ĐỔI BIẾN

1. Đổi biến trong biểu thức các đạo hàm thường. Giả sử cho biểu thức nào đấy

$$w = w\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) \tag{1}$$

chứa biến độc lập x, hàm y theo x và các đạo hàm đến cấp nào đấy của y theo x. Cần chuyển sang biến độc lập mới t và hàm của t là u. Đồng thời các biến này liên hệ với biến cũ x, y bởi các phương trình

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u). \tag{2}$$

Từ phương trình (2) ta tìm được:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}\,;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \ldots \tag{3}$$

Sử dụng các đẳng thức từ (1) — (3) ta có:

$$w = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots\right).$$

Nếu các biến cũ và mới liên hệ bởi các đẳng thức:

$$\Phi(x, y, t, u) = 0, \quad \Psi(x, y, t, u) = 0 \tag{4}$$

thì, sử dụng quy tắc vi phân hàm ẩn, từ (4) ta tìm được $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ rồi sau đó tính các đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$.

2. Đổi biến trong biểu thức chứa các đạo hàm riêng. Ta giới hạn trong trường hợp hai biến độc lập. Trong các trường hợp khác ta tiến hành tương tự. Giả sử cho biểu thức

$$A = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right) \tag{5}$$

chứa các biến độc lập x, y, hàm $z = z(x, y)$ và các đạo hàm riêng của nó. Đòi hỏi thay các biến độc lập x, y và hàm $z = z(x, y)$ bởi các biến độc lập mới u, v và hàm $w = w(u, v)$ mới. Các biến u, v, w biểu diễn qua x, y, z bởi các đẳng thức sau:

$$u = \varphi(x, y, z), \quad v = \psi(x, y, z), \quad w = \chi(x, y, z) \tag{6}$$

ở đây φ, ψ, χ là những hàm khả vi đủ số lần và $\dfrac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0$ trong miền ta quan tâm.

Để giải quyết bài toán đã đặt ra, ta biểu diễn các đối số của hàm F qua u, v, w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, ... là đủ. Với mục đích đó, ta viết các vi phân của các đẳng thức (6):

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right), \tag{7}$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right), \tag{8}$$

$$dw = \frac{dw}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right). \tag{9}$$

Thay du và dv trong đẳng thức cuối cùng bởi các biểu thức (7) và (8) của nó rồi so sánh các hệ số của dx và dy ta nhận được hệ:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y};$$

từ đó ta tìm được $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}. \tag{11}$$

Các đạo hàm riêng cấp hai được xác định từ các đẳng thức nhận được do kết quả tính vi phân cấp một từ những đạo hàm cấp một đã tìm.

Tương tự ta tiến hành đổi biến trong trường hợp các biến mới liên hệ với các biến cũ bởi các đẳng thức:

$$\Phi_1(u, v, w, x, y, z) = 0, \qquad \Phi_2(u, v, w, x, y, z) = 0,$$
$$\Phi_3(u, v, w, x, y, z) = 0.$$

Đặc biệt, nếu

$$x = f(u, v, w), \qquad y = g(u, v, w), \qquad z = h(u, v, w),$$

ở đây các hàm f, g và h đủ trơn, ta tiến hành như sau. Sử dụng tính bất biến của vi phân cấp một trong các đẳng thức

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right)\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv + \frac{\partial g}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}du + \frac{\partial h}{\partial v}dv + \frac{\partial h}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right), \tag{12}$$

so sánh hệ số của du, dv ta được hệ :

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Từ đó ta tìm được $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ như là hàm của $\frac{\partial w}{\partial u}$ và $\frac{\partial w}{\partial v}$.

138. Hãy biến đổi các phương trình :

a) $y'y''' - 3y''^2 = x$;

b) $y'^2 y^{(4)} - 10y'y''y''' + 12y''^3 = 0$ nếu xem y là biến độc lập mới.

Giải. Theo quy tắc đạo hàm của hàm ngược ta có :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{-\frac{d^3x}{dy^3}\cdot\frac{dx}{dy} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}\right)=$$

$$=\frac{-\frac{d^4x}{dy^4}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+10\frac{d^3x}{dy^3}\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dx}{dy}-15\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^3}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^7}.$$

Thay vào các đẳng thức a) và b) các đạo hàm $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ các giá trị của chúng vừa tính được, ta có:

$$\text{a)}\ \frac{d^3x}{dy^3}+x\left(\frac{dx}{dy}\right)^5=0;\quad \text{b)}\ \frac{d^5x}{dy^5}=0.$$

139. Xem x là hàm và $t = xy$ là biến độc lập, hãy biến đổi phương trình

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0.$$

Giải. Vi phân đẳng thức $t = xy$, ta có $dt = xdy + ydx$. Từ đó và từ $y=\frac{t}{x}$ ta tìm thấy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\frac{dx}{dt}}-\frac{t}{x^2}. \tag{1}$$

Tính đạo hàm cấp hai:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x\frac{dx}{dt}}-\frac{t}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}-\frac{2}{x^2\frac{dx}{dt}}+\frac{2t}{x^3}. \tag{2}$$

Từ điều kiện của bài toán và các đẳng thức (1), (2) ta nhận được

$$\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0.$$

Bằng cách đưa vào biến mới, hãy biến đổi các phương trình vi phân thường sau đây:

140. $x^2y'' + xy' + y = 0$, nếu $x = e^t$.

Giải. Ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}\,\frac{dy}{dt} = \frac{1}{e^t}\,\frac{dy}{dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Thay trong phương trình đã cho $x = e^t$, các đạo hàm y' và y'' bằng giá trị của chúng đã được tính ở trên, ta nhận được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

141. $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, nếu $t = \ln|x|$.

Giải. Khi $x \neq 0$, ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{\operatorname{sgn}x}{|x|} = \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right).$$

Như vậy phương trình đã cho có dạng:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

142. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ nếu $x = \cos t$.

Giải. Tính các đạo hàm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}\,\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sin t}\,\frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin t}\,\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\,\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\,\frac{dy}{dt}.$$

Đặt chúng vào phương trình đã cho và thay x bởi $\cos t$ ta nhận được:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

143. $y'' + y'\,\mathrm{th}x + \dfrac{m^2}{\mathrm{ch}^2x}\,y = 0$, nếu $x = \ln\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}$.

Giải. Ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\,\frac{dy}{dt} = \sin t\,\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin t\,\frac{d}{dt}\left(\sin t\,\frac{dy}{dt}\right) = \sin^2 t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin t\cos t\,\frac{dy}{dt}.$$

Bởi vì $\mathrm{th}x = -\cos t$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x} = \sin^2 t$, nên

$$y'' + y'\mathrm{th}x + \frac{m^2}{\mathrm{ch}^2x}\,y = \sin^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y\right) = 0.$$

Từ đó ta có:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y = 0.$$

144. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ nếu $y = ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$.

Giải. Ta tìm các đạo hàm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\,e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} - \frac{p(x)}{2}\,ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} =$$

$$= \left(\frac{du}{dx} - \frac{p(x)u}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2u}{dx^2} - p(x)\,\frac{du}{dx} - \frac{u}{2}\,\frac{dp}{dx} + \frac{up^2(x)}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

Sau khi đặt chúng vào phương trình, ta nhận được:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{1}{3}\, p'(x)\right) u = 0.$$

145. $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, nếu $x = e^t$ và $y = ue^{2t}$, ở đây $u = u(t)$.

Giải. Theo công thức (3) mục 1, ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{du}{dt} + 2u\right)e^{2t}}{e^t} = \left(\frac{du}{dt} + 2u\right)e^t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3\frac{du}{dt} + 2u\right)e^t}{e^t} =$$

$$= \frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + 2u.$$

Khi đó phương trình được viết như sau:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (u+3)\frac{du}{dt} + 2u = 0.$$

146. $(1 + x^2)^2y'' = y$, nếu $x = \operatorname{tg}t$, $y = \frac{u}{\cos t}$, ở đây $u = u(t)$.

Giải. Tương tự bài trước ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{u'\cos t + u\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = u'\cos t + u\sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{u''\cos t - u'\sin t + u'\sin t + u\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = (u'' + u)\cos^3 t.$$

ở đây $u' = \frac{du}{dt}$. Vì vậy $\frac{1}{\cos^4 t}(u'' + u)\cos^3 t = \frac{u}{\cos t}$ hoặc $u'' = 0$.

147. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, nếu $x = u + t$, $y = u - t$, ở đây $u = u(t)$.

Giải. Theo công thức (3) mục 1, ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u' - 1}{u' + 1};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{u' + 1}\,\frac{(u' + 1)u'' - (u' - 1)u''}{(u' + 1)^2} = \frac{2u''}{(u' + 1)^3},$$

ở đây $u' = \dfrac{du}{dt}$. Đặt các biểu thức này vào phương trình và thay trong nó x và y tương ứng bởi $u + t$ và $u - t$, ta nhận được

$$u'' + 8u(u')^3 = 0.$$

148. $y''' - x^3y'' + xy' - y = 0$ nếu $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{u}{t}$, ở đây $u = u(t)$

Giải. Theo công thức (3) mục 1 ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{t\dfrac{du}{dt} - u}{t^2}}{-\dfrac{1}{t^2}} = -t\frac{du}{dt} + u.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = -t^2\left(-t\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt}\right) =$$

$$= t^3\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = -t^2\left(t^3\frac{d^3u}{dt^3} + 3t^2\frac{d^2u}{dt^2}\right).$$

Như vậy phương trình đã cho có dạng:

$$t^5\frac{d^3u}{dt^3} + (3t^4 + 1)\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0$$

149. Biến đổi phương trình Xtốc: $y'' = \dfrac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, bằng cách đặt $u = \dfrac{y}{x-b}$, $t = \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$ và xem u là hàm của biến t.

Giải. Từ công thức biến đổi khi $\dfrac{x-a}{x-b} > 0$ ta tìm được

$$x - a = \frac{(a-b)e^t}{1-e^t};\ x - b = \frac{a-b}{1-e^t};\ y = \frac{(a-b)u}{1-e^t}.$$

Vì vậy:

$$\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{Au(1-e^t)^3}{(a-b)^3e^{2t}}. \tag{1}$$

Ta tìm đạo hàm

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=(e^{-t}-1)\frac{du}{dt}+u$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(1-e^t)^3\left(\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}\right)}{(a-b)e^{2t}}. \tag{2}$$

So sánh (1) và (2) sau khi ước lương ta nhận được :

$$\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}=\frac{Au}{(a-b)^2}.$$

Ta tiến hành tương tự đối với trường hợp $\frac{x-a}{x-b}<0$.

150. Biến đổi phương trình $(1+x^2)^2y''+y=0$ bằng cách đặt

$$x=\text{th}t,\ y=\frac{4}{\text{ch}t}\text{ ở đây } u=u(t).$$

Giải. Vi phân y như hàm cho theo tham biến t ta có :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{u'\text{ch}t-u\text{sh}t}{\text{ch}^2t}}{\frac{1}{\text{ch}^2t}}=u'\text{ch}t-u\text{sh}t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{u''\text{ch}t-u\text{ch}t}{\frac{1}{\text{ch}^2t}}=(u''-u)\text{ch}^3t.$$

Từ đó và từ đầu bài ta suy ra $\frac{d^2u}{dt^2}=0$.

151. Chứng minh rằng biểu thức Svac

$$S(x(t))=\frac{x'''(t)}{x''(t)}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''(t)}{x'(t)}\right)^2$$

không thay đổi giá trị của nó với phép biến đổi phân tuyến tính :

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}\ (ad-bc\neq 0).$$

Giải. Ta có :

$$y' = (ad - bc)\,\frac{x'}{(cx+d)^2};$$

$$y'' = (ad - bc)\left(\frac{x''}{(cx+d)^2} - \frac{2cx'^2}{(cx+d)^3}\right),$$

$$y''' = (ad - bc)\left(\frac{x'''}{(cx+d)^2} - \frac{6cx'x''}{(cx+d)^3} + \frac{6c^2x'^3}{(cx+d)^4}\right).$$

Từ đó :

$$S(y(t)) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \frac{x'''}{x'} - \frac{6cx''}{cx+d} + \frac{6c^2x'^2}{(cx+d)^2} -$$
$$- \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'} - \frac{2cx'}{(cx+d)}\right)^2 = \frac{x'''}{x'} - \frac{6cx''}{2x+d} +$$
$$+ \frac{6c^2x'^2}{(cx+d)^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{6cx''}{cx+d} - \frac{6c^2x'^2}{(cx+d)^2} =$$
$$= \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = S(x(t)).$$

Hãy biến đổi về tọa độ cực r và φ bằng cách đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, các phương trình sau :

152 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Giải. Sử dụng công thức (3) mục 1, ta tìm thấy :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Vì vậy

$$\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Sau khi biến đổi ta nhận được $\dfrac{dr}{d\varphi} = r$.

153. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$.

Giải. Sử dụng đẳng thức (1) của bài trước, ta nhận được :

$$\left(r\cos\varphi\,\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - r\sin\varphi\right)^2 =$$
$$= 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \left(\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2\right).$$

Từ đó ta có:

$$r'^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2.$$

154. $(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3$.

Giải. Đạo hàm đẳng thức (1) trong bài 152, ta nhận được:

$$y'' = \frac{\frac{d}{d\varphi}(y')}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}\left(y' = \frac{dy}{dx},\ r' = \frac{dr}{d\varphi}\right).$$

Bởi vì $(x^2 + y^2)^2 = r^4$, và $(x + yy')^3 = \frac{r^3 r'^3}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}$, nên phương trình đã cho được viết dưới dạng sau:

$$\frac{r^4(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3} = \frac{r^3 r'^3}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3},$$

$$r'\cos\varphi - r\sin\varphi \neq 0,$$

hay

$$r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3.$$

155. Biểu diễn theo tọa độ cực r và φ độ cong K của đường cong phẳng

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2_x)^{3/2}}.$$

Giải. Ta sử dụng các biểu thức của y' và y'' viết trong hệ tọa độ cực (xem các bài 152, 154) ta có:

$$K = \frac{\left|\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}\right|}{\left(1 + \left(\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

$$(r'\cos\varphi - r\sin\varphi \neq 0).$$

156. Chuyển sang tọa độ cực hệ phương trình:

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2),\quad \frac{dy}{dx} = -x + ky(x^2 + y^2).$$

Giải. Đạo hàm các đẳng thức $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, theo t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Từ đó ta tìm được:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\sin\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\left(-\frac{dx}{dt}\sin\varphi + \frac{dy}{dt}\cos\varphi\right).$$

Chú ý rằng

$$\frac{dx}{dt} = r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi,\ \frac{dy}{dt} = -r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi$$

ta tìm được

$$\frac{dr}{dt} = kr^3;\ \frac{d\varphi}{dt} = -1.$$

157. Biến đổi biểu thức $w = x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}$ bằng cách đưa vào các hàm mới

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}.$$

Giải. Đạo hàm đẳng thức $\varphi = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ ta có:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2 + y^2},$$

từ đó

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Đạo hàm đẳng thức cuối cùng, ta nhận được:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = w.$$

158. Trong phép biến đổi Lơgiăngđrơ mỗi điểm (x, y) của đường cong $y = y(x)$ được đặt tương ứng với điểm (X, Y), trong đó $X = y'$, $Y = xy' - y$. Tìm Y', Y'' và Y'''.

Giải. Xem x là tham số, ta có:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}} = \frac{xy'' + y' - y'}{y''} = x.$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dY}{dX}\right)}{\dfrac{dX}{dx}} = \frac{1}{y''};$$

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2Y}{dX^2}\right)}{\dfrac{dX}{dx}} = \frac{y'''}{(y'')^3}\ (y'' \neq 0).$$

Bằng cách đưa vào các biến độc lập ξ, η mới, hãy giải các phương trình sau :

159. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, nếu $\xi = x + y$ và $\eta = x - y$.

Giải. Ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Từ đó $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv 2\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0$. Như vậy, giải phương trình $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0$, ta tìm được nghiệm $z = \varphi(\xi)$ hoặc $z = \varphi(x + y)$, ở đây φ là hàm khả vi bất kỳ.

160. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ nếu $\xi = x$ và $\eta = x^2 + y^2$.

Giải. Sau khi tính các đạo hàm :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta}2y,$$

ta tìm được

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} \equiv y\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0.$$

Giải phương trình $y\dfrac{\partial z}{\partial \xi} = 0$ ta tìm được nghiệm $z = \varphi(\eta)$ hay $z = \varphi(x^2 + y^2)$, ở đây φ là hàm khả vi bất kỳ.

161. $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, nếu $\xi = x$, $\eta = y - bz$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Từ đó

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\left(1 + b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\left(1 + b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}.$$

Thay các đạo hàm tìm được vào phương trình đã cho ta nhận được $\dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \dfrac{1}{a}$. Từ đẳng thức cuối ta tìm được $z = \dfrac{\xi}{a} + \varphi(\eta)$ hay $z = \dfrac{x}{a} + \varphi(y - bz)$, ở đây φ là hàm khả vi bất kỳ.

162. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, nếu $\xi=x$, $\eta=\dfrac{y}{x}$.

Giải. Ta tìm các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{y}{x^2}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{x}.$$

Như vậy, phương trình được biểu diễn dưới dạng $\xi\dfrac{\partial z}{\partial \xi}=z$. Do đó $z=\xi\varphi(\eta)$ hay $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, ở đây φ là hàm khả vi bất kỳ.

Biến đổi các phương trình sau bằng cách dùng u và v làm biến độc lập mới:

163. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, nếu $u=\ln x$ và $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

Giải. Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{x}\quad (x\neq 0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Sử dụng các đẳng thức này và $x=e^u$, $y=\operatorname{sh}v$ từ điều kiện đã cho, ta nhận được:

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v.$$

164. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, nếu $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ và $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Giải. Tương tự như bài trước, ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Thay các biểu thức này vào phương trình đã cho, ta nhận được $\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$.

165. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, nếu $u=\dfrac{y}{x}$ và $v=z+$
$+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Giải. Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{x + z\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{y + z\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial v};$$

Từ đó:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - \frac{v}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - \frac{v}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Như vậy, phương trình đã cho được biểu diễn dưới dạng:

$$\frac{x^2+y^2+v^2}{v-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = v \text{ hay } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

166. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$, nếu $u = 2x - z^2$ và $v = \frac{y}{z}$.

Giải. Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\left(2 - 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Từ đó

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\frac{\partial z}{\partial u}}{1 + 2z\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1 + 2z\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Khi đó phương trình đã cho được viết dưới dạng:

$$\frac{2x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1 + 2z\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{x}{z}.$$

Từ đầu bài ta có: $2x = u + z^2$, $\frac{y}{z} = v$, $\frac{x}{z} = \frac{u + z^2}{2z}$. Thay vào biểu thức trên, sau khi đã đơn giản ta được:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \frac{u + z^2}{z^2 - u} \quad (z^2 \neq u).$$

167. Dùng các biến độc lập mới $\xi = y + ze^{-x}$, $\eta = x + ze^{-y}$ (1)
hãy biến đổi biểu thức

$$A = (z + e^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y)\frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y}).$$

Giải. Từ hệ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\left(e^{-x}\frac{\partial z}{\partial x} - e^{-x}z\right) + \frac{\partial z}{\partial \eta}\left(1 + e^{-y}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\left(1 + e^{-x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial \eta}\left(e^{-y}\frac{\partial z}{\partial y} - e^{-y}z\right),$$

nhận được khi đạo hàm z như hàm hợp, ta tìm thấy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}}{1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}$$

Hơn nữa, bằng những biến đổi đơn giản, ta nhận được:

$$A = \frac{(z + e^x)\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + (z + e^y)\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)}{1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}} - (z^2 - e^{x+y}) =$$

$$= \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}} \quad \left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta} \neq 0\right),$$

ở đây x và y được xác định từ hệ (1).

168. Biến đổi biểu thức $A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, bằng cách đặt $x = uv$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

Giải. Đạo hàm z như hàm hợp, ta nhận được hệ:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}v + \frac{\partial z}{\partial y}u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}u - \frac{\partial z}{\partial y}v.$$

Từ đó ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v\dfrac{\partial z}{\partial u} + u\dfrac{\partial z}{\partial v}}{u^2 + v^2}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u\dfrac{\partial z}{\partial u} - v\dfrac{\partial z}{\partial v}}{u^2 + v^2}\ (u^2 + v^2 \neq 0).$$

Vì vậy:

$$A = \frac{\left(v\dfrac{\partial z}{\partial u} + u\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(u\dfrac{\partial z}{\partial u} - v\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2 + v^2}.$$

169. Dùng x làm hàm còn y và z là biến độc lập, hãy biến đổi phương trình

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Giải. Viết đẳng thức (9) của mục 2, trong đó đặt $u = z$, $v = y$, $w = x$, ta nhận được:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial x}{\partial y}dy.$$

So sánh các hệ số của dx và dy ta nhận được hệ:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\ ;\ 0 = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y},$$

Từ đó tìm được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}.$$

Phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$$\frac{x - z}{\dfrac{\partial x}{\partial z}} - \frac{y\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}} = 0$$

hay

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x - z}{y}\ (y \neq 0).$$

170. Dùng x làm hàm, còn $u = y - z$, $v = y + z$ làm biến độc lập, hãy biến đổi phương trình

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Giải. Thay vào biểu thức (9) của mục 2: $w = x$, $u = y - z$, $v = y + z$, ta có:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\left(dy - \frac{\partial z}{\partial x}\,dx - \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(dy + \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right).$$

So sánh các hệ số của dx và dy ta có:

$$1 = -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}\ ;\ 0 = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Từ đó:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}},$$

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}} - v\,\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}} = 0.$$

Sau khi đơn giản, cuối cùng ta tìm được:

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}\left(v \neq 0,\ \frac{\partial x}{\partial u} \neq \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

171. Dùng x làm hàm, còn $u = xz$, $v = yz$ làm biến độc lập, hãy biến đổi biểu thức

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Giải. Tương tự bài trước, ta có:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\left(z dx + x\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + x\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(z dy + y\,\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + y\,\frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Để xác định $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ và $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ ta nhận được hệ:

$$1 = z\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$0 = x\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial y} + z\,\frac{\partial z}{\partial v} + y\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Từ đó:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-z\dfrac{\partial x}{\partial u}}{x\dfrac{\partial x}{\partial u}+y\dfrac{\partial x}{\partial v}}=\frac{xu-u^2\dfrac{\partial x}{\partial u}}{x^2\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z\dfrac{\partial x}{\partial v}}{x\dfrac{\partial x}{\partial u}+y\dfrac{\partial x}{\partial v}}=\frac{-u^2\dfrac{\partial x}{\partial v}}{x^2\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)}.$$

Vì vậy:

$$A=\frac{x^2u^2-2xu^3+u^4\left(\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{x^4\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}\quad\left(x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)\neq 0\right).$$

172. Biến đổi phương trình $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, bằng cách đặt $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$.

Giải. Đạo hàm u như hàm hợp, ta tìm được:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \eta};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Vì vậy

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

173. Biến đổi phương trình

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+z)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z,$$

bằng cách đặt:

$$e^{\xi}=x-u,\ e^{\eta}=y-u,\ e^{\zeta}=z-u.$$

Giải. Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Từ đó sử dụng các đẳng thức

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=e^{-\xi}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=-e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}=-e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial x},$$

ta tìm được

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{-\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}}{1 + e^{-\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}}.$$

Tương tự:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^{-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}}{1 + e^{-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^{-\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}}{1 + e^{-\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}}.$$

Sử dụng các đẳng thức tìm được của $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, cũng như các đẳng thức $x + y + z = 3u + e^{\xi} + e^{\eta} + e^{\zeta}$; $y + z + u = 3u + e^{\eta} + e^{\zeta}$, $x + z + u = 3u + e^{\xi} + e^{\zeta}$, $x + y + u = 3u + e^{\xi} + e^{\eta}$, từ phương trình xuất phát ta nhận được:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + e^{\xi} + e^{\eta} + e^{\zeta} = 0$$

$$\left(1 + e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta} \neq 0\right).$$

Trong các phương trình sau đây, hãy chuyển sang các biến mới u, v w, trong đó $w = w(u, v)$:

174. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial x} = (y - x)z$, nếu $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$.

Giải. Sử dụng công thức (11) mục 2, ta nhận được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}2x - \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{1}{x^2} + 1}{-\dfrac{1}{z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}2y - \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{1}{y^2} + 1}{-\dfrac{1}{z}}.$$

Vì vậy phương trình đã cho được viết dưới dạng:

$$2xyz\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{yz}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + yz - 2xyz\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{xz}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} - xz = (y - x)z,$$

hoặc sau khi đơn giản ta có: $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

175. $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, nếu $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

Giải. Ứng dụng công thức (11) mục 2, ta tìm được các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}},$$

thay chúng vào phương trình đã cho ta có: $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

176. $(xy - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 + y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$, nếu $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$.

Giải. Sử dụng công thức đã chỉ ra trong bài trước, ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}z - y}{\frac{\partial w}{\partial u}y + \frac{\partial w}{\partial v}x + 1};\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}z - \frac{\partial w}{\partial v} - x}{\frac{\partial w}{\partial u}y + \frac{\partial w}{\partial v}x + 1}$$

Từ đó và từ phương trình đã cho ta nhận được:

$$\frac{(xy + z)\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}z + y\right) + (1 - y^2)\left(-\frac{\partial w}{\partial u}z + \frac{\partial w}{\partial v} + x\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}y + \frac{\partial w}{\partial v}x + 1} = x + yz$$

hoặc sau khi nhóm các số hạng chung ta có $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

177. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$, nếu $x = ue^w$, $y = ve^w$, $z = we^w$.

Giải. Để xác định $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ như là hàm của $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ ta sử dụng hệ (13) trong mục 2:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1 + u\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}v\frac{\partial w}{\partial u} = (1 + w)\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}u\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(1 + v\frac{\partial w}{\partial v}\right) = (1 + w)\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Từ đó:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial u}}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} + uv\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} + uv\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}},$$

Như vậy theo các biến mới u, v, w, phương trình đã cho có dạng sau

$$\frac{\left(ue^{w}(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(ve^{w}(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2}{\left(1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} + uv\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2} =$$

$$= \frac{w^2e^{2w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}(1+w)^2}{\left(1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} + uv\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2}$$

hoặc sau khi đã đơn giản ta có:

$$\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

178 Biến đổi biểu thức $A = \dfrac{x-y}{\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}}$ $(x \neq y)$, bằng cách đặt $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg} z$, $w = x + y + z$, ở đây $w = w(u, v)$.

Giải. Sử dụng công thức (11) mục 2, ta tìm được các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{x}{x^2+y^2} - 1}{\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} - 1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1}{\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} - 1},$$

thay chúng vào biểu thức đã cho ta nhận được:

$$A = \frac{\dfrac{x-y}{1 - \dfrac{x}{x^2+y^2}\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\dfrac{\partial w}{\partial u} - 1}}{\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} - 1} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}}{\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial u}}.$$

Bởi vì $x^2 + y^2 = e^{2u}$, $\dfrac{1}{1+z^2} = \cos^2 v$, nên ta có:

$$A = \frac{e^{2u}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}}\left(1 - \cos^2 v\,\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

179. Trong phương trình $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u + \dfrac{xy}{z}$. đặt $\xi = \dfrac{x}{z}$, $\eta = \dfrac{y}{z}$, $\zeta = z$, $w = \dfrac{u}{z}$, ở đây $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

Giải. Sử dụng tính bất biến của vi phân cấp một, ta có:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial \xi}\left(\frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial \eta}\left(\frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\,dz =$$

$$= -\frac{u}{z^2}\,dz + \frac{1}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz\right).$$

So sánh các hệ số của dx, dy, dz ta nhận được hệ:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial x};\quad \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$-\frac{x}{z^2}\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{u}{z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z},$$

từ đó ta tìm được:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{z} - \frac{x}{z}\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{y}{z}\frac{\partial w}{\partial \eta} + z\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

Sử dụng các kết quả đó, ta biến đổi phương trình đã cho về dạng :

$$\zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \xi\eta.$$

Biến đổi các biểu thức sau về tọa độ cực r và φ bằng cách đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

180. a) $w = x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x}$; b) $w = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$;

c) $w = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1}$$

Các đạo hàm $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ và $\dfrac{\partial r}{\partial y}$ sẽ tìm được từ hệ nhận được sau khi đạo hàm các đẳng thức $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ theo x và y:

$$1 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$0 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$0 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$1 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Từ đó :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r} \tag{2}$$

Ta viết đẳng thức (1) dưới dạng :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{3}$$

Như vậy:

a). $$w = r\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}\right) -$$
$$- r\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\,\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

b) $$w = r\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\right) +$$
$$+ r\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}\right) = r\,\frac{\partial u}{\partial r}.$$

c) $$w = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2.$$

181. a) $= w\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; b) $w = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

c) $w = y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Giải. Đạo hàm đẳng thức (3) và sử dụng đẳng thức (2) trong bài 180 ta tìm được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\sin^2\varphi}{r} + 2\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,\frac{\sin^2\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi\sin\varphi -$$
$$- \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\cos^2\varphi}{r} - 2\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Trên cơ sở của các đẳng thức này, ta nhận được:

a) $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$;

b) $w = r^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$; c) $w = \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

182. Trong biểu thức $I = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$ hãy thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Giải. Bởi vì (xem đẳng thức (3) trong bài 180)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

nên

$$I = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

183. Giải phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bằng cách đưa vào các biến độc lập mới $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

Giải. Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} =$$

$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Như vậy phương trình đã cho có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0.$$

Từ đó sau khi tích phân liên tiếp ta tìm thấy

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

$$u = \int f(\xi)\,d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

ở đây $\varphi(\xi) = \int f(\xi)\,d\xi$ và $\Psi(\eta)$ là hàm khả vi bất kỳ.

Trở lại biến cũ, ta nhận được:

$$u(t, x) = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

Dùng u và v làm các biến độc lập mới, hãy biến đổi các phương trình sau

184. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, nếu $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$.

Giải. Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Tương tự ta cũng tìm được các đạo hàm khác:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Thay các kết quả đã tính được vào phương trình đã cho và nhóm các số hạng chung, ta nhận được:

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

185. $(1 + x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

nếu $u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

Giải. Tương tự bài trước ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{1}{1 + x^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dv}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{1 + y^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{y}{\sqrt{(1 + y^2)^3}}.$$

Vì vậy, phương trình được biến đổi về dạng :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

186. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, nếu $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Giải. Ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{(y^2 - x^2)^2}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{4xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Tương tự ta tìm được

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{4xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{(y^2 - x^2)^2}{(x^2 + y^2)^4} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Sau đó, phương trình đã cho sẽ có dạng $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$

187. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$, nếu $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$, $(y > 0)$.

Giải. Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \left(-\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) -$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{1}{y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{1}{y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{2y\sqrt{y}} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{2y\sqrt{y}}.$$

Thay vào phương trình đã cho giá trị các đạo hàm riêng vừa tính, ta nhận được

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

188. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, nếu $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Giải. Cũng tiến hành như trên, ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}y + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{x^2}{y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{x^2}{y^4} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2x}{y^3}.$$

Như vậy, phương trình đã cho được biến đổi về dạng:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

189. Với phép biến đổi tuyến tính $\xi = x + \lambda_1 y$, $\eta = x + \lambda_2 y$ hãy biến đổi phương trình:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

ở đây A, B, C là những hằng số và $AC - B^2 < 0$, về dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{2}$$

Tìm dạng tổng quát của hàm thỏa mãn phương trình (1).

Giải. Tính các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\lambda_1 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\lambda_2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\lambda_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\lambda_1\lambda_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta}\lambda_2^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\lambda_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\lambda_2;$$

và thay chúng vào phương trình (1) ta nhận được:

$$(C\lambda_1^2 + 2B\lambda_1 + A)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2(C\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + A)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} +$$
$$+ (C\lambda_2^2 + 2B\lambda_2 + A)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0. \qquad (3)$$

Nếu λ_1 và λ_2 là các nghiệm của phương trình $C\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ tức là $\lambda_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$ $(C \neq 0)$, thì trong phương trình (3) các hệ số của $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ và $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ triệt tiêu.

Bởi vì $AC - B^2 < 0$, nên $\lambda_1 \neq \lambda_2$ và $C\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + A \neq 0$. Vì vậy phương trình (1) được biến đổi về dạng (2). Nghiệm của nó sẽ là hàm (xem nghiệm của phương trình (1) trong bài 183): $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Trở lại biến cũ ta nhận được

$$u = \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y).$$

190. Chứng minh rằng phương trình Laplaxơ $\Delta z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ không đổi dạng với mọi sự thay biến không suy biến bất kỳ $x = \varphi(u, v)$, $y = \Psi(u, v)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\Psi}{\partial u}. \qquad (1)$$

Giải Đạo hàm z như hàm hợp và sử dụng điều kiện (1) ta nhận được:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Tương tự ta tính đạo hàm cấp hai $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ và $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} +$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} +$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}.$$

Cộng hai đẳng thức cuối cùng, ta nhận được :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (2)$$

Hơn nữa, đạo hàm đẳng thức thứ nhất của (1) theo u và thứ hai theo v :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial u}\ ;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}.$$

ta thấy

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0. \qquad (3)$$

Cuối cùng, do sự thay biến không suy biến, nên từ (1) suy ra :

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 \neq 0.$$

Như vậy, từ đẳng thức (2) ta tìm được $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$

191. Biến đổi các phương trình

a) $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; b) $\Delta(\Delta u) = 0$,

bằng cách đặt $u = f(r)$, ở đây $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Giải. a) Ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Tương tự ta tìm được :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\frac{r^2 - y^2}{r^3}.$$

Vì vậy

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}.$$

b) Tiến hành như trên, ta nhận được :

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x} = \frac{d^3u}{dr^3}\frac{x}{r} + \frac{d^2u}{dr^2}\frac{x}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial x^2} = \frac{d^4u}{dr^4}\frac{x^2}{r^2} + \frac{d^3u}{dr^3}\frac{1}{r} + \frac{d^2u}{dr^2}\frac{r^2-3x^2}{r^4} - \frac{du}{dr}\frac{r^2-3x^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial y^2} = \frac{d^4u}{dr^4}\frac{y^2}{r^2} + \frac{d^3u}{dr^3}\frac{1}{r} + \frac{d^2u}{dr^2}\frac{r^2-3y^2}{r^4} - \frac{du}{dr}\frac{r^2-3y^2}{r^5}.$$

Như vậy

$$\Delta(\Delta u) = \frac{d^4u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}.$$

192. Biến đổi biểu thức $A = x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x}$, bằng cách đặt $x + y = X$, $y = XY$.

Giải. Bởi vì $X = x + y$ nên $Y = \dfrac{y}{x+y}$, do đó đạo hàm u như hàm hợp. ta nhận được :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{y^2}{(x+y)^4} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{2y}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{x-y}{(x+y)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{xy}{(x+y)^4} - \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

Vì vậy

$$A = (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{y}{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X} =$$

$$= X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}.$$

193. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

không đổi dạng khi đổi biến $x = uv$, $y = \dfrac{1}{v}$. (1)

Giải. Từ hệ (1) ta nhận được $u = xy$, $v = \dfrac{1}{y}$. Như thường lệ ta tìm các đạo hàm :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}y;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y^2.$$

Khi ấy phương trình đã cho được biến đổi về dạng :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3) \frac{\partial z}{\partial v} + u^2v^2z = 0.$$

Đó là điều phải chứng minh.

194. Biến đổi phương trình.

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

bằng cách đặt $x = \eta\zeta$, $y = \xi\zeta$, $z = \xi\eta$.

Giải. Bởi vì $u(x, y, z) = u(\eta\zeta, \xi\zeta, \xi\eta)$ nên theo quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial y}\zeta + \frac{\partial u}{\partial z}\eta ; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\zeta + \frac{\partial u}{\partial z}\xi ; \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x}\eta + \frac{\partial u}{\partial y}\xi.$$

Từ đó ta xác định được $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ và $\frac{\partial u}{\partial z}$, rồi sau đó

$$2x \frac{\partial u}{\partial x} = -\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$2y \frac{\partial u}{\partial y} = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

$$2z \frac{\partial u}{\partial z} = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Bây giờ ta tính biểu thức $4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$:

$$4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial}{\partial y}\left(2x \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(2x \frac{\partial u}{\partial x}\right) -$$
$$- \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(2x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(2x \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) -$$
$$- \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + 2\xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Tương tự :

$$4yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) -$$
$$- \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + 2\eta\zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}.$$

$$4xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) -$$
$$- \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}\left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + 2\xi\zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta}.$$

Sử dụng ba đẳng thức cuối cùng, ta nhận được phương trình biến đổi:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) =$$

$$= 2\left(\zeta\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + \xi\zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta}\right).$$

195. Biến đổi phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

bằng cách đặt $y_1 = x_2 + x_3 - x_1$, $y_2 = x_1 + x_3 - x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 - x_3$.

Giải. Đạo hàm z như hàm hợp:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \ (j = 1, 2, 3),$$

ta nhận được:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial z}{\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial y_3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} - \frac{\partial z}{\partial y_3}.$$

Sau nữa, ta tính các đạo hàm cấp hai:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_3} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_2 \partial y_3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_2}$$

Tương tự, tính tiếp các đạo hàm còn lại, ta viết phương trình biến bồi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0.$$

196. Biến đổi phương trình:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

bằng cách đặt $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = \dfrac{z}{x}$, $\zeta = y - z$.

Giải. Ta có

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=-\zeta\frac{\partial u}{\partial \xi}-\eta\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=y\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)=-\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+y\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

$$z\frac{\partial u}{\partial z}=z\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)=\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}-z\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Nếu toán tử A xác định bằng đẳng thức:

$$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z},$$

thì phương trình đã cho được viết dưới dạng $A^2u-Au=0$.
Bởi vì đối với trường hợp của ta $Au=\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}$, $A^2u=A(Au)=A\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)=$ $=\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}$; $A^2u-Au=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, nên cuối cùng ta nhận được $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0$ $(y\neq z)$.

197. Biến đổi các biểu thức

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

và

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

về tọa độ cầu, bằng cách đặt: $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$.

Giải. Ta biểu diễn phép biến đổi đã cho dưới dạng tổ hợp của hai phép biến đổi

$$x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ z=z; \qquad (1)$$
$$R=r\sin\theta,\ \varphi=\varphi,\ z=r\cos\theta \qquad (2)$$

Với biến đổi (1) (xem bài 180c)), ta nhận được

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2.$$

Vì vậy

$$\Delta_1 u=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Ứng dụng phép biến đổi (2) (xem bài 180c)) ta nhận được.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2;\quad \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Cuối cùng ta tìm thấy :

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Tương tự, thực hiện biến đổi (1) (xem bài 180a)), ta nhận được

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

theo phép biến đổi (2) (xem bài 180a)) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Thay vào đẳng thức (3) trong bài 180, $y = R$, $\varphi = \theta$, ở đây $R = r\sin\theta$, ta nhận được :

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Từ hai đẳng thức cuối cùng và từ

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

ta tìm được :

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right).$$

198. Trong phương trình $z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, đưa vào hàm mới w, với $w = z^2$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2z\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y}=2z\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{x^2}=2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Từ đó ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{4w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{4w}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

Sử dụng các công thức đã tìm được, ta viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

Dùng u và v làm các biến độc lập mới và $w = w(u, v)$ làm hàm mới, hãy biến đổi các phương trình sau:

199. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x}$ nếu $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

Giải. Ứng dụng đẳng thức thứ hai của công thức (11) trong mục 2, ta nhận được:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + 1}{-x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}.$$

Tính đạo hàm cấp 2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{x}{y^4}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Ta thấy rằng phương trình đã cho có dạng $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$.

200. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, nếu $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x}$.

Giải. Ứng dụng công thức (11) của mục 2, ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) + \dfrac{z}{x^2}}{-\dfrac{1}{x}} = x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x}} = x\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Đạo hàm các đẳng thức nhận được, ta có các đạo hàm cấp hai :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\,\frac{y}{x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^3}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2\,\frac{\partial w}{\partial u}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \left(\frac{y}{x} - 1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,.$$

Thay giá trị các đạo hàm riêng vừa tìm thấy vào phương trình đã cho, rồi nhóm các số hạng chung ta nhận được :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

201. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, nếu $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$.

Giải. Ứng dụng cùng công thức trong bài trước, ta tìm được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\,\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} + y\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\,\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} + x.$$

Hơn nữa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 1.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,.$$

Như vậy, ta có $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \dfrac{1}{2} = 0.$

202. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = z$, nếu $u = \dfrac{1}{2}\,(x + y)$, $v = \dfrac{1}{2}\,(x - y)$, $w = ze^{y}$.

Giải. Theo công thức (11) trong mục 2, ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\,\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\,\dfrac{1}{2} + \dfrac{\partial u}{\partial v}\,\dfrac{1}{2}}{-\,e^{y}} = \frac{1}{2}\,e^{-y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Ta tìm các đạo hàm cấp hai cần thiết:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4} e^{-y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4} e^{-y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Bây giờ ta viết phương trình biến đổi $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 2w.$

203. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$
nếu $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.

Giải. Ứng dụng công thức (11), mục 2, ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v} - 1.$$

Đạo hàm các đẳng thức cuối cùng, ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Với các biến mới phương trình sẽ có dạng sau

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \left(1 - \frac{v}{u}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

204. $(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$, nếu $x = \sin u$, $y = \sin v$, $z = e^w$.

Giải. Thành lập hệ (xem công thức (13) mục 2):

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos u = e^w\frac{\partial w}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\cos v = e^w\frac{\partial w}{\partial v}$$

Từ đó ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^w}{\cos v}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Tính các đạo hàm cấp hai:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{du}{dx} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{1}{\frac{dx}{du}} =$$

$$= \frac{1}{\cos u}\left(\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{e^w}{\cos u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \frac{\sin u}{\cos^2 u}e^w\frac{\partial w}{\partial u}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dv}{dy} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{1}{\frac{dy}{dv}} =$$

$$= \frac{1}{\cos v}\left(\frac{e^w}{\cos v}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{e^w}{\cos v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + \frac{\sin v}{\cos^2 v}e^w\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Thay các đạo hàm đó o phương trình đã cho và nhóm các số hạng chúng, , ta nhận được

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

205. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\,\frac{x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2} \quad (|x| > |y|),$$

nếu $u = x + y$, $v = x - y$, $w = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

Giải. Ta tìm các đạo hàm cấp 1 theo công thức (11) mục 2:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{xz}{x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \frac{yz}{x^2-y^2}.$$

Đạo hàm các đẳng thức trên, ta có các đạo hàm cấp hai:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2-y^2} + z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right) + \frac{x}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right) +$$

$$+ \frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \frac{zy^2}{(x^2-y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right) -$$

$$- \frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \frac{zx^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

Thay vào phương trình đã cho các đạo hàm $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ bằng các giá trị của chúng vừa tính được và nhóm các số hạng chung, ta nhận được $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$

206. Chứng minh rằng mọi phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c là hằng số) có thể đưa được về dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 x = 0 \ (c_1 = \text{const})$$

bằng phép thế $z = ue^{\alpha x + \beta y}$, trong đó α, β là những đại lượng không đổi và $u = u(x, y)$.

Chứng minh. Giả sử α và β là những hằng số và sẽ được xác định sau. Đạo hàm đẳng thức

$$z = ue^{\alpha x + \beta y} \tag{1}$$

ta tìm được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)e^{\alpha x + \beta y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \beta u\right)e^{\alpha x + \beta y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\beta u\right)e^{\alpha x + \beta y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Thay vào phương trình đã cho hàm z và các đạo hàm của nó bằng các giá trị tìm được trong (1) và (2), sau đó ước lượng cho $e^{\alpha x + \beta y}$, ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (a + \beta)\frac{\partial u}{\partial x} + (b + \alpha)\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c)u = 0 \tag{3}$$

Ta xác định các số α và β sao cho $a + \beta = 0$, $b + \alpha = 0$, tức là $a = -\beta$, $b = -\alpha$. Khi đó $\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = c - ab = c_1$ và phương trình (3) có dạng $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0$.

207. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{1}$$

không đổi dạng khi thay biến $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = -\frac{1}{y}$, $w = \sqrt{y}\, e^{-\frac{x^2}{4y}} z$.

Giải. Sử dụng công thức (11) mục 2, ta tìm được:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{zx}{2y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}. \tag{2}$$

Còn lại, tính $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y\sqrt{y}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{x^2}{4y}}\right)-\frac{z}{2y}-\frac{x}{2y}\frac{\partial z}{\partial x}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{xe^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}. \tag{3}$$

Từ các đẳng thức (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{xe^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}=$$

$$=-\frac{x}{y^2\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}.$$

Từ đó sau khi nhóm các số hạng chung và ước lượng cho $\frac{1}{y^2\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial w}{\partial v},$$

đó là điều phải chứng minh.

208. Trong phương trình

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+q+p+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

trong đó $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, hãy đặt $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$ và xem $w=w(u,v)$.

Giải. Ta tìm các đạo hàm $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ và $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ (xem công thức (11) mục 2):

$$p = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} - 1}{A}, \quad q = -\frac{\frac{\partial w}{\partial v} - 1}{A^2},$$

ở đây

$$A = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1.$$

Từ đó:

$$q(1+q) = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right)}{A^2}; \quad p(1+p) = -\frac{\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - 1\right)}{A^2}, \tag{1}$$

$$1 + q + p + 2pq = \frac{1}{A^2}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} + 2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Chú ý rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + p = \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = p = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} - 1}{A},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q = -\frac{\frac{\partial w}{\partial v} - 1}{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + q = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{A},$$

ta tìm các đạo hàm cấp hai:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial w}{\partial u} - 1}{A}\right)\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{A} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial w}{\partial u} - 1}{A}\right)\frac{\frac{\partial w}{\partial u} - 1}{A} =$$

$$= -\frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - 1\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - 1\right)^2\right];$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - 1\right)\right];$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial w}{\partial u} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right)^2\right].$$

Từ các đẳng thức (1), (2) và phương trình đã cho suy ra:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

209. Trong phương trình.

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

đặt $x = e^{\xi}$, $y = e^{\eta}$, $z = e^{\zeta}$, $u = e^{w}$ trong đó $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

Giải. Do tính bất biến của vi phân cấp một, ta có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{du}{dw} dw,$$

hoặc

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} e^{\xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial y} e^{\eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial z} e^{\zeta} d\zeta =$$

$$= e^{w} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial w}{\partial \zeta} d\zeta\right).$$

Từ đó:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = e^{w} \frac{\partial w}{\partial \xi},\ y \frac{\partial u}{\partial y} = e^{w} \frac{\partial w}{\partial \eta};\ z \frac{\partial u}{\partial z} = e^{w} \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \tag{1}$$

Đạo hàm đẳng thức thứ nhất trong các đẳng thức này theo x và sử dụng $\frac{d\xi}{dx} = e^{-\xi}$, ta nhận được:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{w} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + e^{w} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \frac{d\xi}{dx} = e^{w} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right) e^{-\xi}.$$

Từ đó và từ (1) ta tìm thấy:

$$x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = e^{w} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right).$$

Tương tự

$$y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{w} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \eta}\right),$$

$$z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = e^{w} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right).$$

Như vậy, theo các biến mới phương trình đã cho có dạng sau:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = (e^{w} - 1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

210. Chứng minh rằng dạng của phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

không thay đổi với sự thay đổi bất kỳ vai trò giữa các biến x, y và z.

Giải. Giả sử x (chẳng hạn) là hàm, còn y và z là các biến độc lập. Sử dụng tính bất biến của vi phân cấp một, ta có

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

So sánh các hệ số của dx và dy ta nhận được hệ:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x};\quad 0 = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Từ đó ta tìm thấy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}.$$

Ta tìm các đạo hàm cấp hai:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\right)\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}\dfrac{\partial x}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial z}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\right)\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= -\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^3}.$$

Vì vậy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=0$$

tức là

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\right)^2=0.$$

Tiến hành tương tự, xem y là hàm, còn x và z là biến độc lập.

211. Xem x là hàm của các biến y và z, hãy giải phương trình:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Giải. Thay $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ và $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ vào phương trình đã cho bằng các giá trị tương ứng của chúng đã tính được trong bài trước và nhóm các số hạng chung, ta nhận được phương trình $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$. Từ đó ta có $\frac{\partial x}{\partial y}=\varphi(z)$ và $x=y\varphi(z)+\psi(z)$ trong đó $\varphi(z)$ và $\psi(z)$ là những hàm bất kỳ khả vi đến cấp cần thiết.

212. Biến đổi phương trình

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

bằng phép biến đổi Lơgiăngđrơ:

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\ Y=\frac{\partial z}{\partial y},\ Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z. \tag{1}$$

trong đó $Z=Z(X,Y)$.

Giải. Giả sử rằng hàm $z=z(x,y)$ thỏa mãn điều kiện

$$I=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0 \tag{2}$$

Đạo hàm đẳng thức thứ ba của (1) theo x và y, chú ý rằng:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{z}{\partial y^2},$$

ta nhận được:

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Từ đó và do điều kiện (2) ta tìm được

$$x=\frac{\partial Z}{\partial X},\quad y=\frac{\partial Z}{\partial Y} \tag{3}$$

Sau nữa, đạo hàm đẳng thức (3) theo x và y, ta có hai hệ:

$$1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$0 = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

và

$$0 = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

với định thức khác không: $\dfrac{D(x, y)}{D(X, Y)} = \dfrac{1}{I} \neq 0.$

Vì vậy các hệ đó xác định đơn trị các đạo hàm cấp hai:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}}{I^{-1}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}}{I^{-1}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}}{I^{-1}} \tag{4}$$

Sử dụng các đẳng thức (1) và (4), ta viết phương trình biến đổi:

$$A(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + C(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$$

§ 6. CÔNG THỨC TAYLO

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN

1. Công thức Taylo. Nếu cho hàm $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ khả vi $n+1$ lần trong lân cận nào đấy của điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$, thì đối với tất cả các điểm $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ thuộc lân cận này ta đều có công thức:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + (x_m - x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\Big)^k f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) + R_n(x_1, x_2, ..., x_m), \tag{1}$$

ở đây

$$R_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{(n+1)!}\left((x_1 - x_1^\circ)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^\circ)\frac{\partial}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \dots + (x_m - x_m^\circ)\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(x_1^\circ + \theta(x_1 - x_1^\circ), x_2^\circ + \theta(x_2 - x_2^\circ), \dots$$

$$\dots, x_m^\circ + \theta(x_m - x_m^\circ)),\ 0 < \theta < 1.$$

2. Chuỗi Taylo. Nếu hàm $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ khả vi vô hạn và $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, thì hàm này có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left((x_1 - x_1^\circ)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^\circ)\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \right.$$

$$\left. + (x_m - x_m^\circ)\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ)$$

Ta gọi chuỗi này là *chuỗi Taylo* của hàm $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ trong lân cận điểm $M_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ)$.

Đặc biệt, đối với các công thức (1) và (2) khi $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = 0$, $x_3^\circ = 0, \dots, x_m^\circ = 0$ được gọi tương ứng là công thức Macloranh và chuỗi Macloranh.

3. Điểm bất thường của đường cong phẳng. Quỹ tích của các điểm, mà tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình $F(x, y) = 0$, được gọi là đường cong.

Ta gọi quỹ tích các điểm, mà tọa độ của chúng (ít nhất là trong một hệ tọa độ vuông góc) thỏa mãn phương trình $y = f(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, trong đó x_1 và x_2 là các hằng số, còn $f(x)$ là hàm đơn trị liên tục, là *đoạn đơn giản của đường cong*.

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là điểm thường của đường cong $F(x, y) = 0$, nếu tồn tại các số dương α, β, sao cho phần đường cong $F(x, y) = 0$ nằm trong hình chữ nhật $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|y - y_0| \leqslant \beta$ là đoạn đơn giản. Nếu các số α, β như vậy không tồn tại, thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là điểm bất thường.

Những điểm bất thường của đường cong $F(x, y) = 0$ chỉ có thể có tại những điểm, mà tại đó các điều kiện sau đây thỏa mãn:

$$F(x, y) = 0,\ F'_x(x, y) = 0,\ F'_y(x, y) = 0 \tag{3}$$

(ở đây và sau này ta giả thiết rằng hàm F có các đạo hàm riêng đến cấp cần thiết).

Nếu tại điểm M_0 các điều kiện (3) thỏa mãn, còn ít nhất một trong các điều kiện

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0) = 0,\ B = F''_{xy}(x_0, y_0) = 0,\ C = F''_{yy}(x_0, y_0) = 0 \tag{4}$$

không thỏa mãn, thì điểm M_o được gọi là **điểm kép**. Nếu các điều kiện (3) và (4 cùng thỏa mãn, nhưng ít nhất một trong các đạo hàm riêng cấp ba F'''_{xxx}, F'''_{xxy}, F'''_{xyy}, F'''_{yyy} tại điểm M_o, khác không, thì điểm M_o được gọi là điểm bội ba. Trong trường hợp tổng quát, nếu tại điểm M_o tất cả các đạo hàm riêng đến cấp $n-1$ bằng không liên tiếp, nhưng ít nhất có một trong các đạo hàm riêng cấp n khác không, thì điểm M_o là điểm bội n.

Để phân loại các điểm kép, ta xét phương trình

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}f'(x_o) + F''_{yy}f'^2(x_o) = 0 \qquad (5)$$

nhận được khi vi phân đồng nhất thức $F(x, f(x)) = 0$, ở đây $y = f(x)$ là đoạn đơn giản của đường cong và giả thiết rằng hàm $F(x, y)$ khả vi hai lần.

1. Nếu nghiệm của phương trình (5) là phức, tức là nếu $AC - B^2 > 0$, thì không tồn tại đoạn đơn giản chứa điểm $M_o(x_o, y_o)$. Trong trường hợp này điểm $M_o(x_o, y_o)$ được gọi là *điểm bất thường cô lập*.

2. Nếu các nghiệm của phương trình (5) là thực và khác nhau, tức là nếu $AC - B^2 < 0$, thì tồn tại hai đoạn đơn giản cắt nhau. Trong trường hợp này ta có *điểm kép nút* (dạng thòng lọng — N. D).

3. Nếu nghiệm phương trình (5) là nghiệm bội: $AC - B^2 = 0$, thì hai nhánh của đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm M_o. Trong trường hợp này có thể:

a) là điểm lùi (hồi quy) loại 1, khi cả hai nhánh của đường cong nằm về một phía của pháp tuyến chung và các phía khác nhau của tiếp tuyến chung tại điểm M_o;

b) là điểm lùi loại 2, khi cả hai nhánh của đường cong ở về một phía của pháp tuyến chung và về một phía của tiếp tuyến chung ;

c) là điểm mật tiếp, khi cả hai nhánh nằm về hai phía của tiếp tuyến chung và về cả hai phía của pháp tuyến chung;

a) là điểm bất thường cô lập.

Trong trường hợp $A = B = C = 0$ có thể có những loại điểm bất thường phức tạp hơn.

4. Tiếp tuyến và pháp diện (mặt phẳng pháp tuyến).

Giả sử đường cong trong không gian ba chiều được cho bởi phương trình

$$x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (a, b), \qquad (6)$$

trong đó các hàm φ, Ψ, χ có đạo hàm không đồng thời bằng không, tức là

$$(\varphi'(t_o))^2 + (\psi'(t_o))^2 + (\chi'(t_o))^2 > 0, \; t_o \in (a, b).$$

Tiếp theo, giả sử $x_o = \varphi(t_o)$, $y_o = \psi(t_o)$, $z_o = \chi(t_o)$ và $x'_o = \varphi'(t_o)$, $y'_o = \psi'(t_o)$, $z'_o = \chi'(t_o)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến với đường cong (6) tại điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ có dạng:

$$\frac{x - x_o}{x'_o} = \frac{y - y_o}{y'_o} = \frac{z - z_o}{z'_o} \tag{7}$$

phương trình của pháp diện tại điểm này là:

$$(x - x_o)x'_o + (y - y_o)y'_o + (z - z_o)z'_o = 0 \tag{8}$$

5. Mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến. Giả sử mặt được cho bởi phương trình: $F(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in D$, trong đó F là hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z của nó tại điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in D$, đồng thời

$$(F'_x(M_o))^2 + (F'_y(M_o))^2 + (F'_z(M_o))^2 > 0.$$

Khi đó phương trình mặt phẳng tiếp xúc có dạng:

$$(x - x_o)F'_x(M_o) + (y - y_o)F'_y(M_o) + (z - z_o)F'_z(M_o) = 0, \tag{9}$$

và phương trình pháp tuyến tại điểm M_o sẽ là:

$$\frac{x - x_o}{F'_x(M_o)} = \frac{y - y_o}{F'_y(M_o)} = \frac{z - z_o}{F'_z(M_o)}. \tag{10}$$

Đặc biệt, nếu mặt được cho bởi phương trình $z = f(x, y)$, ở đây f là hàm khả vi tại điểm (x_o, y_o) và $z_o = f(x_o, y_o)$ thì:

$$(x - x_o)\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} + (y - y_o)\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = z - z_o \tag{11}$$

là phương trình mặt phẳng tiếp xúc, và

$$\frac{x - x_o}{\dfrac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x}} = \frac{y - y_o}{\dfrac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y}} = \frac{z - z_o}{-1} \tag{12}$$

là phương trình của pháp tuyến.

Nếu mặt được cho bởi phương trình $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ở đây x, y, z là những hàm khả vi liên tục trong miền D nào đấy, và tại điểm $(u_o, v_o) \in D$ hàm x, y, z nhận các giá trị tương ứng là x_o, y_o và z_o, thì

$$(x - x_o)A + (y - y_o)B + (z - z_o)C = 0 \tag{13}$$

là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc, và

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C} \tag{14}$$

và phương trình pháp tuyến, trong đó

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix};$$

trong đó các giá trị của các đạo hàm riêng được tính tại điểm tiếp xúc.

6. Hình bao của họ đường cong phẳng. Hình bao của họ đường cong một tham số $F(x, y, \alpha) = 0$ (α là tham số) thỏa mãn hệ phương trình

$$F(x, y, \alpha) = 0, F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \tag{15}$$

chẳng hạn, nếu thỏa mãn các điều kiện:

1. tại lân cận điểm (x_o, y_o, z_o), (mà tại điểm đó hệ (15) thỏa mãn) các đạo hàm F'_x, F'_y, $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$, $F''_{\alpha\alpha}$ liên tục;

2. tại điểm này $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$, $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$. Khi đó biệt tuyến (đường cong đặc biệt) quỹ tích các điểm thỏa mãn hệ (15) đi qua điểm (x_o, y_o) là hình bao của họ đường cong ta xét (tại lân cận điểm đó).

213. Khai triển hàm $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ theo công thức Taylo trong lân cận điểm $A(1, -2)$.

Giải. Hàm đã cho có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp bất kỳ. Bởi vì tất cả các đạo hàm riêng cấp cao hơn hai đều bằng không, nên số hạng dư $R_n (\forall n \geqslant 2)$ bằng không và do đó công thức Taylo có dạng sau:

$$f(x, y) = f(1, -2) + \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial f(1, -2)}{\partial y}(y + 2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x^2}(x - 1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x \partial y}(x - 1)(y + 2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial y^2}(y + 2)^2\right) \tag{1}$$

Ta tìm các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4x - y - 6; \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x - 2y - 3;$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2.$$

Tính các giá trị của hàm và đạo hàm của nó tại điểm $A(1, -2)$:

$$f(1,-2) = 5\,;\ \frac{\partial f(1,-2)}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial f(1,-2)}{\partial y} = 0\,;\ \frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x \partial y} = -1\,;\ \frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial y^2} = -2.$$

Thay vào khai triển (1) ta nhận được

$$f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

214. Khai triển hàm $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ theo công thức Taylo tại lân cận điểm $A(1, 1, 1)$.

Giải. Bởi vì tất cả các đạo hàm riêng cấp cao hơn ba đều bằng không, nên số hạng dư R_n trong công thức Taylo là bằng không $\forall n \geqslant 3$. Vì vậy trong trường hợp này công thức Taylo có dạng:

$$f(x, y, z) = f(A) + df(A) + \frac{1}{2!}d^2f(A) + \frac{1}{3!}d^3f(A) \tag{1}$$

ở đây $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $dz = z - 1$. Tính tại điểm $A(1, 1, 1)$ giá trị của hàm và các vi phân của nó:

$$f(A) = 0,\ df(A) = 0,\ d^2f(A) = 6\,((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 -$$
$$- (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1))\,;$$
$$d^3f(A) = 6\,((x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3) - 18\,(x-1)(y-1)(z-1)).$$

rồi sử dụng khai triển (1), ta nhận được:

$$f(x, y, z) = 3((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (y-1)(z-1) -$$
$$- (x-1)(z-1)) + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1).$$

215. Tìm gia số của hàm $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ khi chuyển từ các giá trị $x = 1$, $y = -1$ tới các giá trị $x_1 = 1 + h$, $y_1 = -1 + k$.

Giải. Trong trường hợp đã cho, khai triển hàm $f(x, y)$ theo công thức Taylo tại lân cận điểm $(1, -1)$ có thể viết dưới dạng:

$$\Delta f(1, -1) = f(x, y) - f(1, -1) = \frac{\partial f(1,-1)}{\partial x}(x-1) +$$
$$+ \frac{\partial f(1,-1)}{\partial y}(y+1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial x^2}(x-1)^2 +\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial x \partial y}(x-1)(y+1) + \frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial y^2}(y+1)^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(1,-1)}{\partial x^3}(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3 f(1,-1)}{\partial x^2 \partial y}(x-1)^2(y+1) +\right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 f(1,-1)}{\partial x \partial y^2}(x-1)(y+1)^2 + \frac{\partial^3 f(1,-1)}{\partial y^3}(y+1)^3\right).$$

ở đây ta đặt $x = 1 + h$, $y = -1 + k$ và tính các đạo hàm cần thiết, thay vào ta sẽ nhận được

$$\Delta f(1, -1) = h - 3k - h^2 - 2hk + k^2 + h^2k + hk^2.$$

216. Trong khai triển hàm $f(x, y) = x^y$ theo công thức Taylo tại lân cận điểm $A(1, 1)$, hãy viết đến số hạng cấp hai:

Giải. Ta tìm các đạo hàm riêng liên tiếp đến cấp ba:

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1}, f'_y(x, y) = x^y \ln x.$$

$$f''_{x^2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}; f''_{xy}(x, y) = (1 + y\ln x)x^{y-1};$$

$$f''_{y^2}(x, y) = x^y \ln^2 x.$$

$$f'''_{x^3}(x, y) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}; f'''_{x^2y}(x, y) = (2y - 1 + y(y-1)\ln x)\, x^{y-2},$$

$$f'''_{xy^2}(x, y) = (y\ln^2 x + 2\ln x)\, x^{y-1},$$

$$f'''_{y^3}(x, y) = x^y \ln^3 x.$$

Sau đó tính các giá trị của hàm và đạo hàm cấp 1, cấp hai tại điểm : A (1, 1): $f(1, 1) = 1$; $f'_x(1, 1) = 1$. $f'_y(1, 1) = 0$, $f''_{x^2}(1,1) = 0$, $f''_{xy}(1, 1) = 1$, $f''_{y^2}(1, 1) = 0$ và viết các vi phân cấp một và cấp hai tại điểm này: $df(1, 1) = dx$; $d^2f(1, 1) = 2dxdy$.

Khai triển cần tìm được viết dưới dạng:

$$f(x, y) = f(1, 1) + df(1, 1) + \frac{1}{2} d^2f(1, 1) + R_2(1 + \theta dx, 1 + \theta dy) =$$

$$= 1 + dx + dxdy + R_2(1 + \theta dx, 1 + \theta dy).$$

ở đây $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $0 < \theta < 1$; $R_2(x, y) = \frac{1}{6} d^3f(x, y) =$

$$= \frac{x^y}{6}\left(\frac{y(y-1)(y-2)}{x^3} dx^3 + 3\frac{2y - 1 + y(y-1)\ln x}{x^2} dx^2dy + \right.$$

$$\left. + 3\frac{y\ln^2 x + 2\ln x}{x} dxdy^2 + \ln^3 x dy^3\right).$$

217. Khai triển hàm $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ theo công thức Macloranh đến các số hạng cấp bốn.

Giải. Ta tìm các vi phân của hàm liên tiếp đến cấp bốn:

$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}; df(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2xdx - 2ydy).$$

$$d^2f(x, y) = -\frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx - 2ydy)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2dx^2 - 2dy^2);$$

$$d^3f(x, y) = \frac{3}{8}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx - 2ydy)^3 -$$

$$-\frac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx - 2ydy)(-2dx^2 - 2dy^2);$$

$$d^4f(x, y) = -\frac{15}{16}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{7}{2}}(-2xdx - 2ydy)^4 +$$

$$+\frac{9}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx - 2ydy)^2(-2dx^2 - 2dy^2) -$$

$$-\frac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2dx^2 - 2dy^2)^2.$$

Ở đây đặt $x = y = 0$, $dx = x$, $dy = y$, ta nhận được:

$$f(0, 0) = 1,\ df(0, 0) = 0,\ d^2f(0, 0) = -(x^2 + y^2).$$

$$d^3f(0, 0) = 0,\ d^4f(0, 0) = -3(x^2 + y^2)^2.$$

Bây giờ ta dễ dàng viết được khai triển cần thiết:

$$f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2!}d^2f(0, 0) + \frac{1}{3!}d^3f(0, 0) + \frac{1}{4!}d^4f(0, 0) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2.$$

218. Tìm các công thức xấp xỉ chính xác đến các số hạng bậc hai đối với các biểu thức:

a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{1 + x + y}{1 - x + y}$.

Giải. a) Sử dụng các công thức

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2);\ \frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + o(q^2).$$

Các công thức này đúng khi $t \to 0$ và $q \to 0$ tương ứng. Ta nhận được:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)} = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2 o(y^2) +$$

$$+ y^2 o(x^2) \approx 1 - \frac{x^2 - y^2}{2}.$$

b) Ký hiệu $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{1 + x + y}{1 - x + y}$. Ta tính $f(0, 0)$, $df(0, 0)$, $d^2f(0,0)$:

$$f(0, 0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$df(x, y) = \frac{2(1 + y)\,dx - 2x\,dy}{(1 - x + y)^2 + (1 + x + y)^2},\ df(0, 0) = dx;$$

$$d^2f(x, y) =$$

$$= \frac{-(2(1 + y)dx - 2xdy)(2(1 - x + y)(-dx + dy) + 2(1 + x + y)(dx + dy))}{((1 - x + y)^2 + (1 + x + y)^2)^2}$$

$$d^2f(0, 0) = -2dxdy.$$

Sau nữa, ta sử dụng công thức Macloranh:

$$f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2}d^2f(0, 0) + \dots,$$

ở đây $dx = x$, $dy = y$. Ta nhận được công thức gần đúng (xấp xỉ) cần tìm là:

$$\operatorname{arctg}\frac{1 + x + y}{1 - x + y} \approx \frac{\pi}{4} + x - xy.$$

219. Đơn giản biểu thức:

$$\cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z,$$

nếu xem x, y, z là các đại lượng bé theo giá trị tuyệt đối.

Giải. Sử dụng công thức Macloranh đối với $\cos t$, ta có:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},\ \cos y \approx 1 - \frac{y^2}{2},\ \cos z \approx 1 - \frac{z^2}{2};$$

$$\cos(x + y + z) \approx 1 - \frac{1}{2}(x + y + z)^2.$$

Thay vào biểu thức đã cho các cosin gần đúng đã nhận được và bỏ qua các đại lượng bé cấp cao, ta nhận được :

$$\cos(x + y + z) - \cos x\cos y\cos z \approx 1 - \frac{1}{2}(x + y z)^2 -$$

$$- \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) -$$

$$- (xy + xz + yz) - 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{4}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) +$$

$$+ \frac{1}{8}x^2y^2z^2 \approx -(xy + xz + yz).$$

220. Khai triển hàm $F(x, y) = \frac{1}{4}(f(x + h, y) + f(x, y + h) + f(x - h, y) +$ $+ f(x, y - h)) - f(x, y)$ theo lũy thừa của h chính xác đến h^4.

Giải. Theo công thức Macloranh, ta có

$$F(x, y) = \frac{1}{4}\left(f + hf'_x + \frac{h^2}{2}f''_{x^2} + \frac{h^3}{6}f'''_{x^3} + \frac{h^4}{24}f^{(IV)}_{x^4} +\right.$$

$$+ o(h^4) + f + hf'_y + \frac{h^2}{2}f''_{y^2} + \frac{h^3}{6}f'''_{y^3} + \frac{h^4}{24}f^{(VI)}_{y^4} +$$

$$+ o(h^4) + f - hf'_x + \frac{h^2}{2}f''_{x^2} - \frac{h^3}{6}f'''_{x^3} + \frac{h^4}{24}f^{(IV)}_{x^4} + o(h^4) + f -$$

$$\left.- hf'_y + \frac{h^2}{2}f''_{y^2} - \frac{h^3}{6}f'''_{y^3} + \frac{h^4}{24}f^{(IV)}_{y^4} + o(h^4)\right) - f.$$

ở đây giá trị của hàm f và các đạo hàm $f^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ của nó được tính tại điểm (x, y). Sau khi nhóm các số hạng chung ta nhận được :

$$F(x, y) = \frac{h^2}{4}(f''_{x^2} + f''_{y^2}) + \frac{h^4}{48}(f^{(IV)}_{x^4} + f^{(IV)}_{y^4}) + o(h^4).$$

221. Khai triển hàm $\triangle_{xy} f(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) -$ $- f(x, y + k) + f(x, y)$ theo lũy thừa của h và k.

Giải. Đầu tiên ta viết khai triển của hàm $f(x + h, y + k)$ theo công thức Macloranh :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + h\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\partial y} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y). \quad (1)$$

Viết tượng trưng đạo hàm cấp n dưới dạng sau:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}h^m k^{n-m}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}h^m k^{n-m}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}+h^n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}+k^n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n},$$

Ta viết khai triển (1) dưới dạng

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+$$

$$+hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}+k^n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right).$$

Sau nữa, sử dụng đẳng thức này và các khai triển của các hàm $f(x+h,y)$ và $f(x,y+h)$:

$$f(x+h,y)=f(x,y)+h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n},$$

$$f(x,y+k)=f(x,y)+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n},$$

ta viết khai triển của hàm $\Delta_{xy}f(x,y)$:

$$\Delta_{xy}f(x,y)=hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}$$

222. Khai triển hàm:

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)d\varphi,$$

theo lũy thừa của ρ, trong đó $f(x, y)$ là hàm khả vi với số lần bất kỳ và được khai triển theo lũy thừa của ρ thành chuỗi lũy thừa.

Giải. Viết khai triển của hàm $f(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)$ theo công thức Macloranh:

$$f(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y).$$

Giả thiết rằng chuỗi lũy thừa này có thể tích phân từng từ, ta sẽ nhận được khai triển của hàm $F(\rho)$ theo lũy thừa của ρ:

$$F(\rho) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y)d\varphi.$$

Bởi vì

$$\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y) = \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^j\,\partial y^{k-j}}\cos^j\varphi\sin^{k-j}\varphi,$$

nên khai triển của hàm $F(\rho)$ có thể viết dưới dạng:

$$F(\rho) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^j\,\partial y^{k-j}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^j\varphi\sin^{k-j}\varphi d\varphi \tag{1}$$

Xét tích phân:

$$I(j, k-j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^j\varphi\sin^{k-j}\varphi\, d\varphi. \tag{2}$$

Nếu $j = 2m-1$, thì $\cos^j\varphi\sin^{k-j}\varphi\, d\varphi = P_{k-1}(\sin\varphi)\, d(\sin\varphi)$, ở đây $P_{k-1}(\sin\varphi)$ là đa thức bậc $k-1$. Từ đó suy ra

$$I(2m-1, k-2m+1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{k-1}(\sin\varphi)\, d\sin\varphi = 0$$

Tương tự, nếu $k = 2n - 1$, thì $I(j, 2n - 1 - j) = 0$. Vì vậy tích phân (2) khác không chỉ trong trường hợp $k = 2n$, $j = 2m$:

$$I(2m, 2n - 2m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2m}\varphi \sin^{2n-2m}\varphi \, d\varphi.$$

Tính tích phân này bằng phương pháp tích phân từng phần, ta nhận được:

$$I(2m, 2n - 2m) = \frac{2m - 1}{2n - 2m + 1} \, I(2m - 2, 2n - 2m + 2).$$

Từ đó suy ra:

$$I(2m, 2n - 2m) = \frac{(2m - 1)(2m - 3) \dots 3 \cdot 1}{(2n - 2m + 1)(2n - 2m + 3) \dots (2n - 3)(2n - 1)} I(0, 2n) =$$

$$= \frac{(2m - 1)!!\,(2n - 2m - 1)!!}{(2n - 1)!!} I(0, 2n).$$

Sử dụng công thức (xem bài 99 chương IV tập I):

$$I(0, 2n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!}$$

ta nhận được

$$I(2m, 2n - 2m) = \frac{(2m - 1)!!\,(2n - 2m - 1)!!}{(2n - 1)!!} \, \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} =$$

$$= \frac{(2m - 1)!!\,(2n - 2m - 1)!!}{(2n)!!}.$$

Sau nữa, chú ý rằng

$$(2k - 1)!! = \frac{(2k - 1)!!\,(2k)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{2^k \, k!}.$$

Cuối cùng ta có:

$$I(2m, 2n - 2m) = \frac{(2m)!\,(2n - 2m)!}{2^{2n} \, n!\, m!\, (n - m)!}. \qquad (3)$$

Thay vào khai triển (1) k bởi $2n$, j bởi $2m$ và sử dụng đẳng thức (3), ta nhận được:

$$F(\rho) = f(x, y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2m)!\,(2n-2m)!} \frac{(2m)!\,(2n-2m)!}{2^{2n}\,n!\,m!\,(n-m)!} \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m}\,\partial y^{2n-2m}} =$$

$$= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m}\,\partial y^{2n-2m}} =$$

$$= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \Delta^n f(x, y),$$

ở đây $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Khai triển thành chuỗi Macloranh các hàm sau:

223. $f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$.

Giải. Ta có:

$$f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2!} d^2 f(0, 0) + \ldots \qquad (1)$$

Tính giá trị của hàm và các vi phân của nó tại điểm $(0, 0)$:

$$f(0, 0) = 1,\ df(0, 0) = m\Delta x + n\Delta y,$$

$$d^2 f(0, 0) = m(m-1)\,\Delta x^2 + 2mn\,\Delta x \Delta y + m(n-1)\Delta y^2,$$

. . . .

Ở đây ta đặt $\Delta x = x$, $\Delta y = y$ và thay kết quả vào đẳng thức (1) ta nhận được khai triển của hàm $f(x, y)$ theo chuỗi Macloranh:

$$f(x, y) = 1 + mx + nx + \frac{1}{2}\left(m(m-1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2\right) + \ldots$$

224. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$.

Giải. Do đối số của lôgarit $1 + x + y$ là hàm tuyến tính, nên dạng của vi phân cấp tùy ý sẽ có tính chất bất biến. Vì vậy

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} x^m y^{n-m} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n\,(n-1)!}{m!\,(n-m)!} x^m y^{n-m} \qquad (|x + y| < 1).$$

225. $f(x, y) = e^x \sin y$.

Giải. Chuỗi Maclo ranh của hàm

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0),$$

được biến đổi như sau:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!\,x^m y^{n-m}}{m!\,(n-m)!} \frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m y^{n-m}}{m!\,(n-m)!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

Đặt $n - m = k$, ta nhận được:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m y^k}{m!\,k!} \frac{\partial^{m+k} f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k}. \qquad (1)$$

Đối với trường hợp của ta:

$$\frac{\partial^{m+k} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(e^x \sin y)}{\partial x^m \partial y^k} = e^x \sin\left(y + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Từ đó

$$\frac{\partial^{m+k} f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n, & \text{nếu } k = 2n + 1 \\ 0 & \text{nếu } k = 2n. \end{cases}$$

Thay biểu thức cuối cùng vào (1) ta nhận được:

$$e^x \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^m y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!} \quad (|x| < \infty, |y| < \infty).$$

226. $f(x, y) = e^x \cos y$.

Giải. Sử dụng công thức (1) trong bài trước. Muốn vậy, ta tìm các đạo hàm:

$$\frac{\partial^{m+k} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(e^x \cos y)}{\partial x^m \partial y^k} = e^x \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right)$$

và tính các giá trị của chúng tại điểm (0, 0):

$$\frac{\partial^{m+k} f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = \cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n, & \text{nếu } k = 2n \\ 0, & \text{nếu } k = 2n + 1. \end{cases}$$

Sử dụng công thức (1) trong bài trước, cuối cùng ta nhận được :

$$e^x\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m y^{2n}}{m!\,(2n)!}\ (|x|<\infty,\ |y|<\infty.)$$

227. a) $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$; b) $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$.

Giải. a) Ta tìm các đạo hàm

$$\frac{\partial^{m+k}f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(\sin x \operatorname{sh} y)}{\partial x^m \partial y^k} = \begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{m\pi}{2}\right)\operatorname{sh} y, \text{ nếu } k = 2n, \\ \sin\left(x+\dfrac{m\pi}{2}\right)\operatorname{ch} y, \text{ nếu } k = 2n+1. \end{cases}$$

Ở đây đặt $x = 0$, $y = 0$, ta có :

$$\frac{\partial^{m+k}f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = (-1)^s, \text{ nếu } m = 2s+1,\quad k = 2n+1,$$

$$\frac{\partial^{m+k}f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = 0, \text{ trong trường hợp còn lại.}$$

Sử dụng công thức (1) trong bài 225, ta nhận được :

$$\sin x \operatorname{sh} y = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+1} y^{2n+1}}{(2s+1)!\,(2n+1)!}\ (|x|<\infty;\ |y|<\infty).$$

b) Tương tự trường hợp trên ta tìm được :

$$\frac{\partial^{m+k}f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(\cos x \operatorname{ch} y)}{\partial x^m \partial y^k} = \begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{m\pi}{2}\right)\operatorname{ch} y, \text{ nếu } k = 2n, \\ \cos\left(x+\dfrac{m\pi}{2}\right)\operatorname{sh} y, \text{ nếu } k = 2n+1. \end{cases}$$

Từ đó :

$$\frac{\partial^{m+k}f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = \begin{cases} (-1)^s, \text{ nếu } m = 2s,\ k = 2n \\ 0, \text{ trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Thay các giá trị tìm được của đạo hàm vào công thức (1) trong bài 225, ta nhận được :

$$\cos x \operatorname{ch} y = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s} y^{2n}}{(2s)!\,(2n)!}\ (|x|<\infty,\ |y|<\infty).$$

228. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

Giải. Sử dụng khai triển đã biết :

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{(2n-1)!}, \text{ đúng với } |u| < \infty,$$

ta nhận được, khi $u = x^2 + y^2$, công thức Macloranh của $\sin(x^2 + y^2)$:

$$\sin(x^2 + y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x^2 + y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty).$$

229. Tìm ba số hạng trong khai triển (thành chuỗi) Macloranh của hàm

$$f(x, y) = \int_0^1 (1 + x)^{t^2 y} dt.$$

Giải. Khi $|x| < 1$, $|y| < 1$, ta có :

$$f(x, y) = \int_0^1 \left(1 + t^2 xy + \frac{1}{2} t^2 y (t^2 y - 1) x^2 + \ldots\right) dt$$

Sau khi tích phân ta nhận được :

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) y + \ldots$$

230. Khai triển hàm e^{x+y} thành chuỗi nguyên theo lũy thừa nguyên dương của các nhị thức $x - 1$ và $y - 1$.

Giải. Bởi vì chuỗi nguyên là chuỗi Taylo của hàm $f(x, y)$, nên để nhận được khai triển cần tìm ta ứng dụng công thức (2) mục 2, mà đối với trường hợp của ta được viết dưới dạng :

$$f(x, y) = f(1, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1, 1). \quad (1)$$

Biến đổi công thức đó như sau :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1, 1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!\,(x-1)^m (y-1)^{n-m}}{m!\,(n-m)!} \frac{\partial^n f(1, 1)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

Ký hiệu $n - m = k$, ta nhận được :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y-1)^k}{m!\,k!} \frac{\partial^{m+k} f(1, 1)}{\partial x^m \partial y^k}. \qquad (2)$$

Ta tìm các đạo hàm :

$$\frac{\partial^{m+k} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(e^{x+y})}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^m e^x}{\partial x^m} \frac{\partial^k e^y}{\partial y^k} = e^x \cdot e^y = e^{x+y},$$

sau đó tính các giá trị của chúng tại điểm (1, 1) :

$$\frac{\partial^{m+k} f(1, 1)}{\partial x^m \partial y^k} = e^2,$$

và thay chúng vào công thức (2), ta nhận được

$$f(x, y) = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y-1)^k}{m!\,k!} \quad (|x| < \infty, |y| < \infty).$$

231. Giả sử z là hàm ẩn của hai biến x và y, được xác định từ phương trình : $z^3 - 2xz + y = 0$ và nhận giá trị $z = 1$ khi $x = 1, y = 1$. Viết một số số hạng của khai triển hàm z theo lũy thừa tăng của các nhị thức $x - 1$ và $y - 1$.

Giải. Từ điều kiện đầu bài, ta suy ra : $z(1, 1) = 1$. Ta tìm các đạo hàm riêng của hàm z từ hàm ẩn đã cho

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3z^2 - 2x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(3z^2 - 2x)\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2\left(6z\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2\right)z}{(3z^2 - 2x)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2}{(3z^2 - 2x)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2 - 2x)^2}; \dots$$

Tại điểm (1, 1) : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6, \dots$$

Sử dụng công thức (2) trong bài trước, ta nhận được :

$$z(x, y) = 1 + (2(x-1) - (y-1)) - (8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2) + \dots$$

232. Viết khai triển của hàm $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ thành chuỗi Taylo tại điểm $M(1, 1)$.

Giải. Biểu diễn hàm $f(x, y)$ dưới dạng :

$$f(x, y) = \frac{1 + (x - 1)}{1 + (y - 1)}.$$

Chú ý rằng tử số đã là khai triển (thành chuỗi) Taylo. Sử dụng công thức Taylo của hàm $(1 + (y - 1))^{-1}$:

$$(1 + (y - 1))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (y - 1)^n, \quad (|y - 1| < 1),$$

ta nhận được

$$f(x, y) = (1 + (x - 1)) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (y - 1)^n \quad (|x| < \infty, 0 < y < 2).$$

Nghiên cứu các loại điểm bất thường của các đường cong sau :

233. $y^2 = ax^2 + x^3$.

Giải. Ký hiệu $F(x, y) = y^2 - ax^2 - x^3$.

Thành lập hệ phương trình :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= y^2 - ax^2 - x^3 = 0 \\ F'_x(x, y) &= -ax - 3x^2 = 0 \\ F'_y(x, y) &= 2y = 0. \end{aligned}$$

Giải hệ đó, ta có $x_o = 0$, $y_o = 0$.

Tìm các đạo hàm cấp hai : $F''_{xx}(x, y) = -2a - 6x$, $F''_{xy}(x, y) = 0$, $F''_{yy}(x, y) = 2$; ta tính các giá trị của chúng tại điểm (x_o, y_o) :

$$A = F''_{xx}(0, 0) = -2a, \; B = F''_{xy}(0, 0) = 0 ; \; C = F''_{yy}(0, 0) = 2.$$

Bởi vì $\Delta = AC - B^2 = -2a$, nên khi $a < 0$ điểm $M(0, 0)$ là điểm bất thường cô lập, còn khi $a > 0$ thì điểm $M(0, 0)$ là điểm nút (xem mục 3). Nếu $a = 0$, thì từ giả thiết suy ra rằng : $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$. Vì vậy $M(0, 0)$ là điểm lùi (hồi quy).

234. a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; b) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$; c) $x^2 + y^4 = x^6$; d) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(a \neq 0)$.

Giải. a) Ký hiệu $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ và giải hệ

$$F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 3xy = 0$$
$$F'_x(x, y) \equiv 3x^2 - 3y = 0$$
$$F'_y(x, y) \equiv 3y^2 - 3x = 0,$$

ta nhận được $x_o = 0$, $y_o = 0$.

Ta tìm các đạo hàm riêng cấp hai: $F''_{xx}(x, y) = 6x$, $F''_{xy}(x, y) = -3$, $F''_{yy}(x, y) = 6y$, tại điểm $(0, 0)$, ta nhận được:

$$A = F''_{xx}(0, 0) = 0, \quad B = F''_{xy}(0, 0) = -3; \quad C = F''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Bởi vì $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$ nên $(0,0)$ là điểm nút.

b) Tương tự như trên ta thành lập hệ:

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0$$
$$F'_x(x, y) \equiv 2x - 4x^3 = 0$$
$$F'_y(x, y) \equiv 2y - 4y^3 = 0.$$

Giải hệ này, ta nhận được $x_o = 0$, $y_o = 0$.

Tiếp theo, ta tính các đạo hàm cấp hai $F''_{xx}(x, y) = 2 - 12x^2$, $F''_{xy}(x, y) = 0$, $F''_{yy}(x, y) = 2 - 12y^2$; sau đó ta tìm các số:

$$A = F''_{xx}(0, 0) = 2, \quad B = F''_{xy}(0, 0) = 0, \quad C = F''_{yy}(0, 0) = 2.$$

Từ $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, suy ra điểm $(0,0)$ là điểm cô lập.

c) Từ hệ $F(x, y) = x^2 + y^4 - x^6 = 0$, $F'_x(x, y) = 2x - 6x^5 = 0$; $F'_y(x, y) = 4y^3 = 0$, ta tìm được $x_o = 0$, $y_o = 0$. Bởi vì:

$$F''_{xx}(0, 0)\, F''_{yy}(0, 0) - F''^2_{xy}(0, 0) = 0,$$

nên điểm $(0,0)$ hoặc là điểm lùi, hoặc là điểm cô lập hoặc là điểm mật tiếp. Để tiếp tục nghiên cứu ta biểu diễn phương trình đường cong dưới dạng: $y^4 = x^2 \times \times (x^4 - 1)$. Bởi vì khi $|x| < 1$ vế phải của đẳng thức này không dương, còn vế trái thì không âm, nên $(0,0)$ là điểm duy nhất có tọa độ thỏa mãn phương trình đã cho và hoành độ của nó thì thuộc khoảng $(-1, 1)$. Điều đó có nghĩa là: điểm $(0, 0)$ là điểm bất thường cô lập.

d) Giải hệ: $F(x, y) \equiv (x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0$,

$$F'_x(x, y) \equiv 4x(x^2 + y^2) - 2a^2 x = 0.$$
$$F'_y(x, y) \equiv 4y(x^2 + y^2) + 2a^2 x = 0,$$

ta được $x_o = 0$, $y_o = 0$. Bởi vì $F''_{xx}(0, 0) \cdot F''_{yy}(0,0) - F''^2_{xy}(0,0) = -4a^4 < 0$, nên điểm $(0,0)$ là điểm nút.

235. Nghiên cứu các điểm bất thường của các đường cong sau:

a) $y^2 - 1 + e^{-x^2} = 0$; b) $y^2 - 1 + e^{-x^3} = 0$;

c) $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$.

Giải. a) Giả sử $F(x, y) = y^2 - 1 + e^{-x^2}$, dễ dàng thử lại rằng, tại điểm $(0, 0)$ thì

$$F = F'_x = F'_y = F''_{xx} = F''_{xy} = 0, F''_{yy} = 2.$$

Như vậy

$$F''_{xx} F''_{yy} - F''^2_{xy} = 0.$$

Từ phương trình đã cho ta tìm thấy $y = \pm \sqrt{1 - e^{-x^2}}$. Từ đó ta trực tiếp kết luận rằng, điểm $(0, 0)$ là điểm mật tiếp.

b) Các giá trị của các đạo hàm cấp một và cấp hai cũng như trong bài trước. Từ phương trình đã cho ta tìm thấy $y = \pm \sqrt{1 - e^{-x^3}}$, $x \geqslant 0$. Trên cơ sở đồ thị của hàm, dễ dàng kết luận rằng điểm $(0, 0)$ là điểm lùi loại 1.

c) Dễ dàng thử lại rằng, điểm $(0, 0)$ là điểm bất thường. Các giá trị của các đạo hàm cấp một và cấp hai cũng như trong hai bài trước. Bởi vì cả hai nhánh $y = x^2 \pm x^2\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ của đường cong đã cho đều nằm về cùng một phía của tiếp tuyến chung và về cùng một phía của pháp tuyến chung, nên điểm $(0,0)$ là điểm lùi loại hai.

236. Viết phương trình các tiếp tuyến và pháp diện của những đường cong sau đây tại những điểm đã cho trước:

a) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ tại điểm $t = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $y = x$, $z = x^2$ tại điểm $M(1, 1, 1)$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$; $x + y + z = 0$ tại điểm $M(1, -2, 1)$.

Giải. a) Tìm các đạo hàm: $x' = 2a\sin t\cos t$; $y' = b(\cos^2 t - \sin^2 t)$; $z' = -2c\cos t\sin t$; sau đó tính $x_o = x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a}{2}$; $y_o = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{b}{2}$; $z_o = z\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{c}{2}$; $x'_o = x'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = a$, $y'_o = y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; $z'_o = z'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -c$;

Sử dụng các công thức (7) và (8) mục 4, kết quả ta nhận được: $\dfrac{x - \dfrac{a}{2}}{a} =$ $= \dfrac{y - \dfrac{b}{2}}{0} = \dfrac{z - \dfrac{c}{2}}{-c}$ hoặc $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$, $y = \dfrac{b}{2}$ là phương trình tiếp tuyến; $ax - cz = \dfrac{1}{2}(a^2 - c^2)$ là phương trình pháp diện.

b) Bài toán được tiến hành như trong bài trước, nếu xem x là tham số. Khi đó phương trình đường cong có dạng:

$$x = x,\ y = x,\ z = x^2.$$

Từ đó ta có: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, $x'_0 = 1$, $y'_0 = 1$, $z'_0 = 2$. Cũng sử dụng các công thức (7) và (8) mục 4 ta nhận được $x - 1 = y - 1 = \dfrac{z-1}{2}$ là phương trình tiếp tuyến, còn $x + y + 2z = 4$ là phương trình pháp diện.

c) Ta xem rằng đường cong được cho bởi phương trình

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Khi đó

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 6\ ;\ x(t) + y(t) + z(t) = 0.$$

Đạo hàm các đẳng thức này theo t, ta nhận được hệ:

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,\ x' + y' + z' = 0.$$

Từ hệ đó với $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 1$ ta có $x'_0 = 1$, $y'_0 = 1$, $z'_0 = -1$.
Sử dụng các công thức (7) và (8) mục 4 như trong các bài trên ta được $x + z = 2$, $y + 2 = 0$ là phương trình tiếp tuyến, còn $x - z = 0$ là phương trình pháp diện.

237. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến với các mặt sau tại những điểm cho trước:

a) $z = x^2 + y^2$ tại điểm M_0 (1, 2, 5); b) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ tại điểm M_0 (3, 4, 12); c) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ tại điểm M_0 (2, 2, 1).

Giải. a) Ta có $f'_x(1, 2) = 2$; $f'_y(1, 2) = 4$. Sử dụng các công thức (11) và (12) mục 5, ta nhận được: $2x + 4y - z - 5 = 0$ là phương trình mặt tiếp xúc, còn $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$ là phương trình pháp tuyến.

b) Trong trường hợp này $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0$.
Tính các giá trị của các đạo hàm: $F'_x(M_0) = F'_x(3, 4, 12) = 6$; $F'_y(M_0) = F'_y(3, 4, 12) = 8$; $F'_z(M_0) = 24$ và ứng dụng các công thức (9), (10) mục 5, ta nhận được: $3x + 4y + 12z = 169$ là phương trình mặt tiếp xúc, còn $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-12}{12}$ là phương trình pháp tuyến.

Phương trình pháp tuyến có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}.$$

c) Ta tìm các đạo hàm của $F(x, y, z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8$:

$$F'_x(x, y, z) = 2^{\frac{x}{z}} \frac{\ln 2}{z};\ F'_y(x, y, z) = 2^{\frac{y}{z}} \frac{\ln 2}{z};$$

$$F'_z(x, y, z) = -\left(x2^{\frac{x}{z}} + y2^{\frac{y}{z}}\right)\frac{\ln 2}{z^2},$$

và tính giá trị của chúng tại điểm $M_o(2, 2, 1)$:

$$F'_x(M_o) = 4\ln 2;\ F'_y(M_o) = 4\ln 2,\ F'_z(M_o) = -16\ln 2.$$

Sử dụng cũng công thức như trong câu b), ta được: $x + y - 4z = 0$ là phương trình mặt tiếp xúc, còn $x - 2 = y - 2 = \dfrac{z-1}{-4}$ là phương trình pháp tuyến.

238. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc và phương trình pháp tuyến của các mặt sau đây tại các điểm đã cho trước:

a) $x = a\cos\psi\cos\varphi,\quad y = b\cos\psi\sin\varphi,\quad z = c\sin\psi$ tại điểm M_o (φ_o, ψ_o); b) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r\mathrm{ctg}\alpha$ tại điểm M_o (φ_o, r_o).

Giải. a) Tìm các đạo hàm tại điểm M_o:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -a\cos\psi_o\sin\varphi_o,\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} = b\cos\psi_o\cos\varphi_o;\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial\psi} = -a\sin\psi_o\cos\varphi_o,\ \frac{\partial y}{\partial\psi} = -b\sin\psi_o\sin\varphi_o;\ \frac{\partial z}{\partial\psi} = c\cos\psi_o;$$

và tính A, B, C: $A = bc\cos^2\psi_o\cos\varphi_o$, $B = ac\cos^2\psi_o\sin\varphi_o$, $C = ab\sin\psi_o.\cos\psi_o$. Sử dụng các công thức (13) và (14) mục 5, ta nhận được:

$$\frac{x}{a}\cos\psi_o\cos\varphi_o + \frac{y}{b}\cos\psi_o\sin\varphi_o + \frac{z}{c}\sin\psi_o = 1$$

là phương trình mặt phẳng tiếp xúc, còn

$$\frac{x\sec\psi_o\sec\varphi_o - a}{bc} = \frac{y\sec\psi_o\,\mathrm{cosec}\,\varphi_o - b}{ac} = \frac{z\,\mathrm{cosec}\,\psi_o - c}{ab}$$

là phương trình pháp tuyến.

b) Tương tự, ta đi tìm các đạo hàm tại điểm M_0:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r_0 \sin\varphi_0, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r_0 \cos\varphi_0, \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi_0, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi_0, \frac{\partial z}{\partial r} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

cùng các giá trị A, B, C: $A = r_0 \cos\varphi_0 \operatorname{ctg}\alpha$, $B = r_0 \sin\varphi_0 \operatorname{ctg}\alpha$, $C = -r_0$. Ta lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc:

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0;$$

và phương trình pháp tuyến:

$$\frac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{z - r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$$

239. Tìm vị trí giới hạn của mặt phẳng tiếp xúc với mặt

$$x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3,$$

khi điểm tiếp xúc $M(u, v)$ $(u \neq v)$ tiến dần tới điểm M_0 (u_0, v_0) của đường biên $u = v$ của mặt.

Giải. Ta tính các đại lượng tỷ lệ với các cosin chỉ phương của pháp tuyến với mặt đã cho tại điểm $M(u, v)$:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 6uv(v - u); \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = -3(v^2 - u^2);$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 2(v - u);$$

và viết phương trình mặt tiếp xúc tại điểm $M(u, v)$:

$$(x - u - v)6uv - (y - u^2 - v^2)\, 3(u + v) + (z - u^2 - v^2)2 = 0.$$

Nếu điểm $M(u, v)$ tiến dần tới điểm $M_0(u_0, v_0)$ của đường $u = v$ của mặt, thì ta suy ra, từ đẳng thức cuối cùng (khi $u \to u_0$, $v \to v_0$, $u_0 = v_0$), mặt tiếp xúc nhận vị trí giới hạn là:

$$3xu_0^2 - 3yu_0 + z - 2u_0^3 = 0.$$

Tìm hình bao của một họ đường cong phẳng một tham số:

240. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ($p =$ const).

Giải. Giả sử $F(x, y, \alpha) \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$. Khi đó $F'_\alpha(x, y, \alpha) = -\sin\alpha + y\cos\alpha$ và hệ (15) mục 6 có dạng:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0; \ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0.$$

Loại tham số α từ hệ này, ta nhận được phương trình biệt tuyến (đường cong đặc biệt) $x^2 + y^2 = p^2$. Hơn nữa, ta có

$$F'_x(x, y, \alpha) = \cos\alpha; \ F'_y(x, y, \alpha) = \sin\alpha.$$

Tại các điểm của biệt tuyến $F'^2_x + F'^2_y = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$, và cũng tại các điểm này

$$\cos\alpha = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \ \sin\alpha = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$F''_{\alpha\alpha}(x, y, \alpha) = -x\cos\alpha - y\sin\alpha = \mp\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \mp \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \mp p \neq 0, \text{ nếu } p \neq 0.$$

Như vậy, biệt tuyến $x^2 + y^2 = p^2$ là hình bao.

241. $(x - a)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Giải. Ta có

$$F(x, y, a) = (x - a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}.$$

Vì vậy hệ (15) mục 6 có dạng:

$$(x - a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \ -2(x - a) - a = 0.$$

Từ đó nhận được phương trình biệt tuyến dưới dạng tham số: $x = \dfrac{a}{2}$, $y^2 = \dfrac{a^2}{4}$ hoặc dưới dạng hiện $y = \pm x$. Hơn nữa, ta lại có $F'_x = 2(x - a)$; $F'_y = 2y$; $F''_{aa} = 1$. Tại các điểm của biệt tuyến $F'^2_x + F'^2_y = 4(x - a)^2 + 4y^2 = 2a^2 \neq 0$, $F''_{aa} = 1 \neq 0$. Vậy biệt tuyến $y = \pm x$ là hình bao.

242. $y = kx + \dfrac{a}{k}$ ($a =$ const).

Giải. Từ hệ $F(x, y, k) \equiv y - kx - \dfrac{a}{k} = 0$, $F'_k = -x + \dfrac{a}{k^2} = 0$ ta được phương trình biệt tuyến $y^2 = 4ax$. Đường cong này là hình bao, vì $F'^2_x + F'^2_y = k^2 + 1 \neq 0$, $F''_{kk} = -\dfrac{2a}{k^3} \neq 0$ thỏa mãn đối với tất cả các điểm.

243. $y^2 = 2px + p^2$.

Giải. Ký hiệu $F(x, y, p) = y^2 - 2px - p^2$ và viết hệ (15) mục 6:

$$y^2 - 2px - p^2 = 0;\ -2x - 2p = 0$$

ta thấy tọa độ của điểm duy nhất thỏa mãn hệ này là,

$$x = 0,\ y = 0,\ p = 0$$

Vì vậy không có hình bao.

§ 7. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. Định nghĩa cực trị địa phương. Cho hàm $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định trên tập $E \subset E_n$ và điểm $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ) \in E$.

Ta nói rằng hàm $f(x)$ có *cực đại địa phương* (*cực tiểu địa phương*) tại điểm x°, nếu tồn tại lân cận $S(x^\circ, \delta) = \{x : 0 < \rho(x, x^\circ) < \delta\}$ của điểm x°, sao cho $\forall x \in S(x^\circ, \delta) \cap E$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(x^\circ) \geqslant f(x) \quad (f(x^\circ) \leqslant f(x)). \tag{1}$$

Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi chung là *cực trị địa phương*, còn những điểm, mà tại đấy hàm đạt được cực trị được gọi là *điểm cực trị*.

Nếu tại điểm x° hàm $f(x)$ đạt cực trị địa phương thì số gia toàn phần $\Delta f(x^\circ) = f(x) - f(x^\circ)$ $(x \in S(x^\circ, \delta) \cap E)$ của hàm này tại điểm x° thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$f(x^\circ) \leqslant 0$ (trong trường hợp cực đại địa phương),

$f(x^\circ) \geqslant 0$ (trong trường hợp cực tiểu địa phương).

2. Điều kiện cần của cực trị địa phương. Giả sử hàm $f(x)$ có cực trị địa phương tại điểm x°. Khi đó, nếu tại điểm này tồn tại các đạo hàm riêng cấp một theo tất cả các biến thì tất cả các đạo hàm riêng này đều bằng không. Như vậy, trong trường hợp này các điểm cực trị của hàm $f(x)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$f'_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Nếu như hàm $f(x)$ khả vi tại điểm x°, thì hệ thức

$$df(x^\circ) = 0 \tag{3}$$

là điều kiện cần của cực trị địa phương. Các điểm thỏa mãn điều kiện (2) hoặc (3), được gọi là các *điểm dừng*. Hàm $f(x)$ có thể có cực trị địa phương chỉ tại các điểm dừng hoặc tại các điểm không tồn tại các đạo hàm riêng cấp một. Tất cả những điểm này được gọi là *các điểm có thể có cực trị*.

3. Dạng toàn phương xác định dấu.

Hàm

$$A(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{4}$$

của các biến $h_1, h_2, \dots, h_n$ được gọi là *dạng toàn phương*. Các số a_{ik} được gọi là *hệ số* của dạng toàn phương.

Dạng toàn phương (4) được gọi là xác định dương (xác định âm), nếu với giá trị bất kỳ của các biến $h_1, h_2, \dots, h_n$ thỏa mãn điều kiện $h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2 > 0$ thì (4) có giá trị dương (hay âm). Các dạng toàn phương xác định dương và xác định âm được gọi chung là *dạng xác định dấu*. Ta phát biểu tiêu chuẩn dạng toàn phương xác định dấu — Tiêu chuẩn Xinvectrơ. Để dạng thức toàn phương (4) xác định dương, thì điều kiện cần và đủ là các bất đẳng thức sau đây thỏa mãn:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Để dạng thức toàn phương (4) xác định âm, thì điều kiện cần và đủ là các bất đẳng thức sau đây thỏa mãn:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

4. Điều kiện đủ của cực trị địa phương. Giả sử tại lân cận nào đấy của điểm dừng x° hàm $f(x)$ khả vi hai lần và tất cả các đạo hàm riêng cấp hai $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ liên tục tại điểm x°. Nếu tại điểm này vi phân cấp hai

$d^2 f(x^\circ) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \, . \, dx_i \, dx_j$ là dạng toàn phương xác định dấu của các biến

$dx_1\ dx_2,\dots,\ dx_n$, thì tại điểm x° hàm $f(x)$ đạt được cực trị địa phương. Khi đó, nếu $d^2f(x^\circ) < 0$ thì tại điểm x° hàm $f(x)$ đạt cực đại địa phương, còn nếu $d^2f(x^\circ) > 0$ thì đạt cực tiểu địa phương.

Trường hợp hàm hai biến. Giả sử tại lân cận nào đấy của điểm dừng $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ hàm $f(x, y)$ khả vi hai lần và tất cả các đạo hàm riêng cấp hai $a_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $a_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ liên tục tại điểm này. Khi đó, nếu tại điểm $M_\circ$ $\Delta(M_\circ) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, thì hàm $f(x, y)$ có cực trị địa phương tại điểm này, cụ thể là: cực đại nếu $a_{11} < 0$, và cực tiểu nếu $a_{11} > 0$. Nếu cũng tại $M_\circ$ mà $\Delta(M_\circ) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ thì hàm $f(x, y)$ không đạt cực trị địa phương tại điểm này.

Trong trường hợp $\Delta(M_\circ) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ cần phải nghiên cứu thêm.

Giả sử tại lân cận điểm x° hàm $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ khả vi m lần và tất cả các đạo hàm riêng cấp m liên tục tại điểm này, đồng thời

$$df(x^\circ) = 0;\ d^2f(x^\circ) = d^3f(x^\circ) = \dots = d^{m-1}f(x^\circ) = 0;$$
$$d^mf(x^\circ) \gtrless 0.$$

Khi đó nếu m lẻ thì điểm x° không phải là điểm cực trị, còn nếu m chẵn thì tại điểm x° hàm $f(x)$ đạt cực trị: cực đại địa phương, nếu $d^mf(x^\circ) < 0$, cực tiểu địa phương, nếu $d^mf(x^\circ) > 0$.

Nếu trong hệ thức (1) dấu bằng đạt được với $\delta > 0$ bất kỳ đủ bé và các giá trị nào đó của x, $x \neq x^\circ$, thì cực trị địa phương gọi là không chặt (tương ứng là cực đại địa phương không chặt và cực tiểu địa phương không chặt). Trong trường hợp này cực trị địa phương đạt được trên một tập điểm nào đấy.

Nếu điểm cực trị x° thuộc biên của miền xác định E của hàm $f(x)$, thì cực trị gọi là cực trị biên (tương ứng gọi là cực đại biên và cực tiểu biên).

5. Cực trị của hàm cho dưới dạng ẩn. Nếu hàm ẩn $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset E_n$ được xác định bởi phương trình

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$$

thì:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0,\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E.$$

Giả sử hàm u khả vi liên tục hai lần trong E. Khi đó tại điểm dừng $M_\circ(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ thỏa mãn các đẳng thức

$$du = -\frac{1}{F'_u}(F'_{x_1}dx_1 + F'_{x_2}dx_2 + \dots + F'_{x_n}dx_n) = 0 \tag{5}$$

$$F(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots x_n^\circ, u^\circ) = 0,$$

ở đây

$$u^\circ = u(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

Do mệnh đề ngược cũng thỏa mãn, nên các điểm dừng có thể tìm được từ hệ

$$F'_{x_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), F = 0. \tag{6}$$

Ta vi phân một lần nữa đẳng thức đầu tiên của (5) và chú ý rằng tại $du = 0$, ta nhận được:

$$d^2u = -\frac{1}{F'_u} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j. \tag{7}$$

Nếu $d^2u > 0$ tại điểm M_o, thì hàm u có cực tiểu, nếu như tại điểm này điểm dừng $d^2u < 0$, thì cực đại.

6. Cực trị có điều kiện. Giả sử hàm $f(x, y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ xác định trên miền $E \subset E_{n+m}$ nào đấy. Ngoài ra, giả sử theo các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ còn có m điều kiện bổ sung $(m < n)$:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

được gọi là các phương trình liên hệ (ràng buộc).

Ta nói rằng hàm $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện (cực tiểu có điều kiện) tại điểm $(x^\circ, y^\circ) = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_m^\circ)$ nếu tại lân cận nào đó của điểm này, thỏa mãn bất đẳng thức $f(x, y) \leqslant f(x^\circ, y^\circ)$, $(f(x, y) \geqslant f(x^\circ, y^\circ))$ trong đó các điểm (x, y), (x°, y°) thỏa mãn các phương trình liên hệ (8).

Việc nghiên cứu cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$ với các phương trình liên hệ $F_j(x, y) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ $(m < n)$ dẫn tới việc nghiên cứu cực trị thông thường của hàm

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(x, y) \tag{9}$$

được gọi là hàm Lagơrăng, ở đây λ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ là các hằng số nhân. Khi này dấu của vi phân cấp hai $d^2\Phi(x^\circ, y^\circ)$ tại điểm dừng (x°, y°) xác định đặc điểm của cực trị với điều kiện là các biến $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ liên hệ với nhau bằng các hệ thức

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} dx_k + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_s} dy_s = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

7. Cực trị tuyệt đối. Nếu hàm $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ khả vi trong miền $E \subset E_n$ và liên tục trên miền kín $\overline{E}$, thì nó đạt được trị lớn nhất và bé nhất trên tập $\overline{E}$ hoặc là tại các điểm dừng hoặc là tại các điểm biên miền E.

Để xác định cực trị tuyệt đối của hàm $f(x)$ trên tập E ta so sánh các giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm $f(x, y)$ tại các điểm dừng của miền E với giá trị lớn nhất và bé nhất trên biên miền E.

Nghiên cứu cực trị địa phương của các hàm sau:

244. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Giải. Tính các đạo hàm riêng $z'_x = 4x^3 - 2x - 2y$, $z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$. Các điểm dừng tìm được từ hệ:

$$4x^3 - 2x - 2y = 0,\ 4y^3 - 2x - 2y = 0.$$

Hệ này có 3 nghiệm:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = -1,\ y_2 = -1;\ x_3 = 1,\ y_3 = 1.$$

Để thử lại điều kiện đủ của cực trị địa phương, ta tính các đạo hàm cấp hai:

$$a_{11} = z''_{xx} = 12x^2 - 2,\ a_{12} = z''_{xy} = -2,\ a_{22} = z''_{yy} = 12y^2 - 2$$

và thành lập biểu thức:

$$\Delta(x, y) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4.$$

Bởi vì $\Delta(0, 0) = 0$ nên để tìm hiểu vấn đề tồn tại cực trị, ta xét số gia của hàm z tại điểm $(0, 0)$:

$$\Delta z(0, 0) = z(h, k) - z(0, 0).$$

Nếu $k = h$ với $0 < h < \sqrt{\frac{3}{2}}$, thì $\Delta z(0,0) = 2h^2\left(h^2 - \frac{3}{2}\right) < 0$. Nếu $k = -h$ với $h > 0$, thì $\Delta z(0, 0) = 2h^4 > 0$. Vì vậy số gia $\Delta z(0, 0)$ nhận các giá trị có dấu khác nhau, bởi vậy khi $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, không có cực trị. Tại điểm $(-1, -1)$ và $(1, 1)$ $\Delta = 96 > 0$, và vì $a_{11} = 10 > 0$, nên tại các điểm này hàm đạt cực tiểu, đồng thời $z_{min} = -2$.

245. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

Giải. Từ hệ $z'_x = 8x^3 - 2x = 0$, $z'_y = 4y^3 - 4y = 0$, ta tìm được các điểm dừng: $M_1(0, 0)$; $M_2(0, 1)$; $M_3(0, -1)$; $M_4\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; $M_5\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $M_6\left(\frac{1}{2}, -1\right)$; $M_7\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; $M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Tính các đạo hàm cấp hai: $z''_{x^2} = 24x^2 - 2$, $z''_{xy} = 0$; $z''_{y^2} = 12y^2 - 4$, và thành lập biểu thức:

$$\Delta(x, y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 8(12x^2 - 1)(3y^2 - 1).$$

Ta tìm được $\Delta(0, 0) = 8 > 0$, $\Delta(0, 1) = -16 < 0$, $\Delta(0, -1) = -16 < 0$, $\Delta\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -16 < 0$, $\Delta\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 32 > 0$, $\Delta\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 32 > 0$, $\Delta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -16 < 0$, $\Delta\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 32 > 0$, $\Delta\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = 32 > 0$.

Vì vậy, các điểm M_2, M_3, M_4, M_7 không phải là điểm cực trị. Các điểm M_1, M_5, M_6, M_8, M_9 là các điểm cực trị, đồng thời tại điểm $M_1(0, 0)$ đạt cực đại (vì $z''_{xx}(0, 0) = -2 < 0$) và $z_{max} = 0$. Tại các điểm $M_5\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ đạt cực tiểu vì $z''_{xx}\left(\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right) = 4 > 0$ và $z_{min} = -\frac{9}{8}$.

246. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

Giải. Thành lập hệ

$$z'_x = xy^3(12 - 3x - 2y) = 0;\ z'_y = x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0,$$

sau đó giải nó, ta được các điểm dừng : $M_1(2, 3)$; $M_2(0, y)$, ở đây $-\infty < y < +\infty$; $M_3(x, 0)$, ở đây $-\infty < x < +\infty$.

Để thử lại điều kiện đủ của cực trị địa phương, ta tìm các đạo hàm riêng cấp hai :

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= 12y^2 - 6xy^3 - 2y^4 \\ z''_{xy} &= 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3 \qquad (1) \\ z''_{y^2} &= 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2. \end{aligned}$$

Bởi vì $z''_{x^2}(2, 3) = -162$, $z''_{xy}(2, 3) = -108$; $z''_{y^2}(2, 3) = -144$, còn $\Delta(2, 3) = 144 \cdot 162 - 108^2 > 0$, nên tại điểm $M_1(2, 3)$ hàm z đạt cực đại và $z_{max} = 108$. Tại các điểm M_2 và M_3 biểu thức $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ triệt tiêu. Điều đó chưa có thể nói gì về cực trị tại các điểm này.

Để nghiên cứu tiếp ta tính số gia của hàm tại điểm $M_2(0, y)$ $-\infty < y < \infty$: $\Delta z(0, y) = \Delta x^2(y + \Delta y)^2((6 - \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2)$. Dễ dàng chứng tỏ rằng, khi Δx và Δy đủ bé, $\Delta z(0, y) \leqslant 0$, nếu $-\infty < y < 0$ hoặc $6 < y < +\infty$; $\Delta z(0, y) \geqslant 0$, nếu $0 < y < 6$. Đồng thời trong cả hai trường hợp đạt được dấu đẳng thức khi $|\Delta x| > 0$ và $|\Delta y| > 0$ (ví dụ nếu $y + \Delta y = 0$). Vì vậy, tại các điểm $M_2(0, y)$ ở đây $-\infty < y < 0$ hoặc $6 < y < +\infty$ hàm z có cực đại không chặt, còn tại các điểm $M_2(0, y)$ với $0 < y < 6$ hàm z có cực tiểu không chặt. Các điểm $M_2(0, 0)$ và $M_2(0, 6)$ không phải là điểm cực trị của hàm z, bởi vì khi $x = 0$ số gia $\Delta z(0, y)$ thay đổi dấu khi biến y chuyển qua điểm $y = 0$ và $y = 6$.

Hơn nữa, từ đẳng thức (1) ta suy ra rằng: đạo hàm cấp hai bằng không tại các điểm $M_3(x, 0)$ với $(-\infty < x < \infty)$. Vì vậy để nghiên cứu tiếp, ta tính các đạo hàm cấp ba. Đạo hàm các đẳng thức (1) ta tìm được đạo hàm cấp ba:

$$z'''_{x^3} = -6y^3;\ z'''_{x^2y} = 36y^2 - 18xy^2 - 8y^3;$$

$$z'''_{xy^2} = 72xy - 18x^2y - 24xy^3;\ z'''_{y^3} = 36x^2 - 6x^3 - 24x^2y,$$

và tính các giá trị của chúng tại các điểm $M_3(x, 0)$:

$$z'''_{x^3}(x, 0) = 0,\ z'''_{x^2y}(x, 0) = 0,\ z'''_{xy^2}(x, 0) = 0,\ z'''_{y^3}(x, 0) = 36x^2 - 6x^3.$$

Như vậy $d^3z(x, 0) = (36x^2 - 6x^3)dy^3 \not\equiv 0$ trên tập điểm $M_3(x, 0)$ $(-\infty < < x < \infty)$, vì vậy tại các điểm $M_3(x, 0)$ $(-\infty < x < \infty)$ hàm z không đạt được cực trị.

247. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Giải. Tính các đạo hàm riêng và cho chúng bằng không ta có hệ:

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0,\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Giải hệ này ta tìm được các điểm dừng là $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$. Sau đó tính các đạo hàm riêng cấp hai: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$ và thành lập biểu thức $\Delta(x, y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36xy - 9$. Tại điểm M_1 ta có $\Delta = -9 < 0$, vậy điểm này không phải là điểm cực trị. Tại điểm M_2 ta có $\Delta = 27 > 0$, $a_{11} > 0$, vì vậy tại điểm này hàm đạt cực tiểu, đồng thời $z_{\min} = -1$.

248. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ $(x > 0;\ y > 0)$.

Giải. Từ hệ $z'_x = y - \dfrac{50}{x^2} = 0$, $z'_y = x - \dfrac{20}{y^2} = 0$, ta tìm được điểm dừng duy nhất là $x = 5$, $y = 2$ thuộc miền xác định của hàm. Tính các đạo hàm cấp hai:

$$z''_{x^2} = \frac{100}{x^3};\ z''_{xy} = 1;\ z''_{y^2} = \frac{40}{y^3}$$

và thành lập biểu thức:

$$\Delta(x, y) = \frac{4000}{x^3y^3} - 1.$$

Ta thấy rằng $\Delta(5, 2) = 3 > 0$, $a_{11}(5, 2) = \dfrac{4}{5} > 0$. Vậy tại điểm này hàm đạt cực tiểu và $z_{\min} = 30$.

249. $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ $\quad (a > 0,\ b > 0)$.

Giải. Từ hệ

$$z'_x = \frac{y\left(1 - \dfrac{2x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0;\ z'_y = \frac{x\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

ta tìm được các điểm dừng: $M_1(0, 0)$; $M_2 = \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}; \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$; $M_3\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}, -\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$; $M_4\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, -\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$; $M_5\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

Để thử lại điều kiện đủ, ta viết các đạo hàm cấp hai:

$$z''_{x^2} = \frac{-\dfrac{xy}{a^2}\left(3 - \dfrac{2x^2}{a^2} - \dfrac{3y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$z''_{y^2} = \frac{-\dfrac{xy}{b^2}\left(3 - \dfrac{3x^2}{a^2} - \dfrac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$z''_{xy} = \frac{1 - \dfrac{3x^2}{a^2} - \dfrac{3y^2}{b^2} + \dfrac{2x^4}{a^4} + \dfrac{3x^2y^2}{a^2b^2} + \dfrac{2y}{b^4}}{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sau đó tính giá trị Δ tại các điểm dừng. Ta có $\Delta(M_1) = -1 < 0$, vì vậy điểm này không phải điểm cực trị.

Bởi vì $\Delta\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}};\ \pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = 4 > 0$ nên các điểm M_2, M_3, M_4 và M_5 là các điểm cực trị. Vì rằng:

$z''_{x^2}(M_2) = z''_{x^2}(M_3) = -\frac{4ab}{9} < 0$, $z''_{x^2}(M_4) = z''_{x^2}(M_5) = \frac{4ab}{9} > 0$, nên tại các điểm M_2 và M_3 hàm z đạt cực đại, còn tại các điểm M_4, M_5 đạt cực tiểu. Tính trực tiếp ta được:

$$z_{max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}};\quad z_{mim} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}.$$

250. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ $\quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Giải. Tìm các đạo hàm riêng và cho chúng bằng không, ta nhận được hệ:

$$z'_x = \frac{a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = 0; \qquad (1)$$

$$z'_y = \frac{b(x^2 + y^2 + 1) - y(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = 0$$

Nhân đẳng thức đầu của hệ (1) với $-b(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}$ và đẳng thức thứ hai với $a(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}$ rồi cộng chúng lại, ta được phương trình $(bx - ay) \times \times (ax + by + c) = 0$, từ đó ta suy ra $bx = ay$, $ax + by + c = 0$. Từ hệ này và từ (1) ta có điểm dừng $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$ (nếu $c = 0$ thì khi $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ hàm z không có điểm dừng).

Đối với các đạo hàm riêng cấp hai, ta có các biểu thức:

$$z''_{x^2} = -\frac{by + c}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x(a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c))}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}};$$

$$z''_{y^2} = -\frac{ax + c}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y(b(x^2 + y^2 + 1) - y(ax + by + c))}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}};$$

$$z''_{xy} = -\frac{ay + bx}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xy(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Tính giá trị các đạo hàm cấp hai tại điểm dừng:

$$z''_{x^2}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = -\frac{b^2 + c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$z''_{y^2}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = -\frac{a^2 + c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$z''_{xy}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

ta thấy rằng:

$$\Delta\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^{-3}\left(\frac{b^2 + c^2}{c} \cdot \frac{a^2 + c^2}{c} - \frac{a^2b^2}{c^2}\right) > 0,$$

tức là tồn tại cực trị.

Bởi vì đạo hàm cấp hai z''_{x^2} tại điểm dừng là âm khi $c > 0$ và dương khi $c < 0$, nên trong trường hợp đầu hàm z có cực đại $z_{max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; còn trong trường hợp thứ hai hàm z có cực tiểu: $z_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

251. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Giải. Dễ dàng chứng tỏ rằng hàm đã cho không có điểm dừng. Nhưng tại điểm $M(0, 0)$ các đạo hàm riêng cấp một không tồn tại, bởi vì các tỷ sai phân

$$\frac{z(\Delta x, 0) - z(0, 0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}; \quad \frac{z(0, \Delta y) - z(0, 0)}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

không có giới hạn. Vì vậy điểm $(0, 0)$ có thể là điểm cực trị.

Bởi vì số gia $z(x, y) - z(0, 0) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ âm, nên tại điểm này hàm có cực đại, đồng thời $z_{max} = 1$.

252. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

Giải. Để xác định các điểm dừng ta nhận được hệ:

$$z'_x = 1 + 4\cos x \sin y = 0, \quad z'_y = 1 + 4\sin x \cos y = 0.$$

Biến đổi nó về dạng:

$$1 - 2\sin(x - y) + 2\sin(x + y) = 0$$
$$1 + 2\sin(x - y) + 2\sin(x + y) = 0$$

Ta tìm được $\sin(x-y)=0$, $\sin(x+y)=-\dfrac{1}{2}$, từ đó ta có:

$$x+y=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi,\quad m=0,\pm 1,\pm 2\ldots,$$

$$x-y=n\pi,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots \tag{1}$$

hoặc

$$x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m+n)\frac{\pi}{2},\quad y=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m-n)\frac{\pi}{2},$$

$$m,n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

Ta tìm các đạo hàm riêng cấp hai:

$$z''_{x^2}=-4\sin x\sin y,\ z''_{y^2}=-4\sin x\sin y;\ z''_{xy}=4\cos x\cos y$$

và thành lập biểu thức:

$$\Delta(x,y)=16\sin^2x\sin^2y-16\cos^2x\cos^2y=-16\cos(x-y)\cos(x+y).$$

Để tính các giá trị của $\Delta(x,y)$ tại các điểm dừng ta sử dụng công thức (1). Ta nhận được:

$$\Delta=-16\cos n\pi\cos\left((-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi\right)=$$

$$=(-1)^{m+n+1}16\cos\frac{\pi}{6},\ m,n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

Từ đó suy ra rằng, khi $m+n+1$ chẵn thì $\Delta>0$ và cực trị tồn tại, còn khi $n+m+1$ lẻ thì không có cực trị. Như vậy, hàm có cực trị khi $m+n$ lẻ. Trong trường hợp này các số m và n có tính chẵn lẻ khác nhau.

Để giải thích đặc trưng của cực trị ta hãy biến đổi đạo hàm cấp hai z''_{x^2} về dạng:

$$z''_{x^2}=2\cos(x+y)-2\cos(x-y)$$

và tính các giá trị của nó tại các điểm cực trị (khi đó $m+n$ lẻ).

$$z''_{x^2}=2\left(\cos\left((-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi\right)-\cos n\pi\right)=(-1)^m\sqrt{3}-(-1)^n.2.$$

Nếu $m=2k$ – chẵn, còn $n=2r-1$ – lẻ, thì $z''_{x^2}=\sqrt{3}+2>0$ và hàm có cực tiểu; nếu $m=2k-1$ – lẻ, còn $n=2r$ – chẵn, thì $z''_{x^2}=-\sqrt{3}-2<0$ và hàm có cực đại.

Tính các cực trị của hàm, ta nhận được:

$$z_{min} = 2k\pi - 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2,...)$$

$$z_{max} = (2k - 1)\pi + 2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2,...).$$

253. $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

Giải. Giải hệ $z'_x = (2x - 2x(x^2 + y^2))\, e^{-(x^2+y^2)} = 0$

$$z'_y = (2y - 2y\,(x^2 + y^2))\, e^{-(x^2+y^2)} = 0,$$

ta nhận được tập các điểm dừng gồm điểm $(0, 0)$ và các điểm của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Ta tìm các đạo hàm cấp hai:

$$z''_{x^2} = (4x^2(x^2 + y^2) - 12x^2 + 2)\, e^{-(x^2+y^2)},$$

$$z''_{y^2} = (4y^2(x^2 + y^2) - 12y^2 + 2)\, e^{-(x^2+y^2)},$$

$$z''_{xy} = (4xy\,(x^2 + y^2) - 8xy)\, e^{-(x^2+y^2)}.$$

Bởi vì tại điểm $(0, 0)$ $z''_{x^2} = 2$, $z''_{y^2} = 2$, $z''_{xy} = 0$, $\Delta(0, 0) = 4 > 0$ nên tại đó hàm có cực tiểu và $z_{min} = 0$.

Để thử lại điều kiện đủ tại các điểm thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, ta xét hàm z như hàm của một biến $t = x^2 + y^2$: $z = t\,e^{-t}$. Đối với nó $t = 1$ là điểm dừng. Bởi vì đạo hàm cấp hai $z'' = (t - 2)\,e^{-t}$ âm khi $t = 1$, nên hàm z có cực đại. Như vậy, hàm đã cho $z(x, y)$ có cực đại không chặt $z_{max} = e^{-1}$ tại các điểm của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

254. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

Giải. Từ hệ:

$$u'_x = 2x + 2 = 0;\ u'_y = 2y + 4 = 0;\ u'_z = 2z - 6 = 0$$

ta xác định được điểm dừng duy nhất là: $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$. Ta tìm các đạo hàm cấp hai: $u''_{x^2} = 2$, $u''_{y^2} = 2$, $u''_{z^2} = 2$; $u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yz} = 0$. Như vậy

$$u''_{x^2} = 2 > 0; \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} \end{vmatrix} = 4 > 0; \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

tức là vi phân cấp hai d^2u theo tiêu chuẩn Xinvectrơ là dạng toàn phương xác định dương. Vì vậy, tại điểm $(-1, -2, 3)$ hàm có cực tiểu : $u_{min} = -14$.

255. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Giải. Ta có :

$$u'_x = 3x^2 + 12y = 0; \ u'_y = 2y + 12x = 0, \ u'_z = 2z + 2 = 0.$$

Từ đó ta tìm được các điểm dừng: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = -1$; $x_2 = 24$, $y_2 = -144$; $z_2 = -1$. Tiếp theo, ta tìm các đạo hàm cấp hai :

$u''_{x^2} = 6x$, $u''_{xy} = 12$; $u''_{xz} = 0$, $u''_{y^2} = 2$, $u''_{yz} = 0$, $u''_{z^2} = 2$, và tính tại các điểm dừng giá trị của các định thức:

$$A_1 = u''_{x^2}, \ A_2 = \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} \end{vmatrix}, \ A_3 = \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{xy} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Tại điểm $M_1(0, 0, -1)$ định thức đầu tiên của hệ (1) triệt tiêu cho nên vấn đề tồn tại cực trị tại điểm này cần nghiên cứu tiếp. Với mục đích đó ta tìm vi phân cấp ba tại điểm M_1, và chứng tỏ $d^3u(0, 0, -1) = 6dx^3 \not\equiv 0$. Vì vậy điểm $M_1(0, 0, -1)$ không phải là điểm cực trị.

Tại điểm $M_2(24, -144, -1)$: $A_1 = 144 > 0$, $A_2 = 144 > 0$, $A_3 = 288 > 0$. Vì vậy tại điểm đó hàm có cực tiểu và $z_{min} = -6913$.

256. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Giải : Từ hệ :

$$u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \ u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \ u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0,$$

ta tìm được điểm dừng duy nhất : $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$. Sau đó ta tìm các đạo hàm cấp hai :

$$u''_{x^2} = \frac{y^2}{2x^3}, \ u''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \ u''_{xz} = 0, \ u''_{y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},$$

$$u''_{zy} = -\frac{2z}{y^2}; \ u''_{z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$$

và tính giá trị của chúng tại các điểm dừng: $u''_{x^2} = 4$; $u''_{xy} = -2$, $u''_{xz} = 0$, $u''_{y^2} = -3$, $u''_{yz} = -2$, $u''_{z^2} = 6$. Tính các định thức (xem bài 255): $A_1 = 4$, $A_2 = 8$, $A_3 = 32$, ta kết luận rằng, tại điểm $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ hàm có cực tiểu: $z_{min} = 4$.

257. $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$ $(a > 0)$.

Giải. Giải hệ:

$$\begin{aligned} u'_x &= y^2z^3(a - 2x - 2y - 3z) = 0 \\ u'_y &= 2xyz^3(a - x - 3y - 3z) = 0 \\ u'_z &= 3xy^2z^2(a - x - 2y - 4z) = 0, \end{aligned}$$

ta nhận được các điểm dừng như sau: $M_1\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$, các điểm $M_2(0, y, z)$ thuộc đường thẳng $x = 0$, $2y + 3z = a$; các điểm $M_3(x, 0, z)$ thuộc mặt phẳng $y = 0$: các điểm $M_4(x, y, 0)$ thuộc mặt phẳng $z = 0$.

Ta thử lại xem điều kiện đủ của cực trị địa phương có thỏa mãn hay không. Với mục đích đó ta tìm các đạo hàm cấp hai:

$$\begin{aligned} &u''_{x^2} = -2y^2z^3; \; u''_{xy} = 2yz^3(a - 2x - 3y - 3z); \\ &u''_{xz} = 3y^2z^2(a - 2x - 2y - 4z); \; u''_{y^2} = 2xz^3(a - x - 6y - 3z); \qquad (1) \\ &u''_{yz} = 6xyz^2(a - x - 3y - 4z); \; u''_{z^2} = 6xy^2z(a - x - 2y - 8z). \end{aligned}$$

Tại điểm $M_1\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$ ta có $u''_{x^2} = -\frac{2a^5}{7^5}$; $u''_{xy} = -\frac{2a^5}{7^5}$; $u''_{xz} = -\frac{3a^5}{7^5}$; $u''_{y^2} = -\frac{6a^5}{7^5}$; $u''_{yz} = -\frac{6a^5}{7^5}$; $u''_{z^2} = -\frac{24a^5}{7^5}$; $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, ở đây A_1, A_2 và A_3 là các định thức (8) trong mục 3 khi $n = 3$. Từ đó ta kết luận rằng, tại điểm này hàm có cực đại: $u_{max} = \frac{a^7}{7^7}$.

Sử dụng các đẳng thức (1) ta viết vi phân cấp hai của hàm u tại điểm M_2:

$$d^2x = -2y^2z^3dx^2 + 2yz^3(a - 3y - 3z)\,dxdy + 3y^2z^2(a - 2y - 4z)\,dxdz.$$

Theo dạng vi phân dễ dàng chứng tỏ rằng, nó có thể có dấu khác nhau, tức là không phải dạng xác định dấu đối với các biến dx, dy, dz. Vì vậy tại điểm M_2 không có cực trị.

Ta viết vi phân cấp hai tại điểm M_3:

$$d^2u = 2xz^3(a - x - 3z)\,dy^2.$$

Ta thấy rằng khi $a - x - 3z \neq 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$ nó là dạng xác định dấu. Vì vậy tại điểm M_3 với điều kiện $a - x - 3z \neq 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$, hàm u có cực trị không chặt, bằng không.

Tại điểm M_4 vi phân cấp hai đồng nhất bằng không, tuy nhiên $d^3u = 6xy^2(a - x - xy)\,dz^3 \not\equiv 0$. Vì vậy các điểm này không phải là các điểm cực trị.

258. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$

$$(0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \pi)$$

Giải. Ta có :

$$u'_x = \cos x - \cos(x + y + z) = 0,$$
$$u'_y = \cos y - \cos(x + y + z) = 0,$$
$$u'_z = \cos z - \cos(x + y + z) = 0.$$

Giải hệ này ta nhận được 3 điểm dừng : $M_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $M_2(0, 0, 0)$; $M_3(\pi, \pi, \pi)$.

Ta thử lại xem tại những điểm nào thì tồn tại cực trị. Tính giá trị của các đạo hàm cấp hai :

$$u''_{x^2} = -\sin x + \sin(x + y + z);\ u''_{xy} = \sin(x + y + z),$$

$$u''_{y^2} = -\sin y + \sin(x + y + z);\ u''_{yz} = \sin(x + y + z),$$

$$u''_{z^2} = -\sin z + \sin(x + y + z);\ u''_{zx} = \sin(x + y + z).$$

Tại điểm M_1 ta có :

$$u''_{x^2} = -2,\ u''_{xy} = -1,\ u''_{zx} = -1,\ u''_{y^2} = -2,\ u''_{yz} = -1,\ u''_{z^2} = -2.$$

Từ đó ta thấy rằng :

$$A_1 = u''_{x^2} < 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} \end{vmatrix} > 0;\ A_3 = \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{xz} & u''_{yz} & u''_{z^2} \end{vmatrix} < 0.$$

Như vậy, tại điểm M_1 hàm đạt cực đại địa phương và $u_{max} = 4$.

Còn tại các điểm M_2 và M_3 hàm đạt cực tiểu trên biên và bằng không. Điều này được thấy rõ ràng, vì với các số gia bất kỳ Δx, Δy, Δz của các biến độc lập thuộc miền $0 \leqslant \Delta x \leqslant \pi$, $0 \leqslant \Delta y \leqslant \pi$, $0 \leqslant \Delta z \leqslant \pi$ sao cho $0 < \Delta x + \Delta y + \Delta z < \pi$ thì thỏa mãn các bất đẳng thức (xem bài 8 trong chương I, tập I) :

$$\Delta u(0,0,0) = u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - u(0,0,0) = u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) =$$
$$= \sin\Delta x + \sin\Delta y + \sin\Delta z - \sin(\Delta x + \Delta y + \Delta z) \geqslant 0,$$
$$\Delta u(\pi, \pi, \pi) = u(\pi - \Delta x, \pi - \Delta y, \pi - \Delta z) - u(\pi, \pi, \pi) =$$
$$= u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \geqslant 0.$$

259. $u = x_1 x_2^2 \ldots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n)$, $(x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0)$.

Giải. Cho các đạo hàm riêng cấp một bằng không, ta nhận được hệ để xác định các điểm dừng :

$$u'_{x_1} = x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n (\varphi - x_1) = 0$$

$$u'_{x_2} = 2x_1 x_2^{2-1} \ldots x_n^n (\varphi - x_2) = 0$$

$$u'_{x_3} = 3x_1 x_2^2 x_3^{3-1} \ldots x_n^n (\varphi - x_3) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u'_{x_n} = nx_1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^{n-1} (\varphi - x_n) = 0,$$

ở đây $\varphi = 1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n$. Bởi vì $x_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, nên các điểm dừng phải thỏa mãn hệ sau :

$$\varphi - x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Trong hệ (1) ta lấy phương trình đầu trừ đi phương trình thứ hai, rồi lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ ba v.v... Kết quả ta nhận được hệ :

$$-x_j + x_{j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

từ đó ta suy ra $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Sử dụng kết quả đó, từ phương trình đầu tiên của hệ (1), (mà trong trường hợp này có dạng $1 - x_1(1 + 2 + \ldots + n) - x_1 = 0$) ta tìm được điểm dừng :

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2}.$$

Ta tìm các đạo hàm cấp hai :

$$u''_{x_1^2} = -2x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n,$$

$$u''_{x_k^2} = k(k-1) x_1 x_2^2 \ldots x_k^{k-2} x_n^n (\varphi - x_k) -$$

$$- k(k+1) x_1 x_2^2 \ldots x_k^{k-1} \ldots x_n^n, \ (k = 2, 3, \ldots, n),$$

$$u''_{x_k x_m} = kmx_1x_2^2 \dots x_k^{k-1} \dots x_m^{m-1} \dots x_n^n (\varphi - x_k) -$$

$$- kmx_1x_2^2 \dots x_k^{k-1} \dots x_n^n \ (k, m = 1, 2, \dots, n, k \neq m).$$

Ký hiệu x là giá trị chung của tọa độ điểm dừng:

$$x = x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2},$$

còn a_{ij} là giá trị của đạo hàm $u''_{x_i x_j}$ tại điểm dừng và chú ý rằng tại điểm dừng thì $\varphi - x_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, ta nhận được:

$$a_{11} = u''_{x_1^2} = -2 \cdot x^{\frac{n^2+n-2}{2}}, \quad a_{kk} = u''_{x_k^2} = -k(k+1)\,x^{\frac{n^2+n-2}{2}};$$

$$a_{km} = u''_{x_k x_m} = -kmx^{\frac{n^2+n-2}{2}}. \tag{2}$$

Để nghiên cứu dấu của dạng toàn phương:

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j \ (a_{ij} = u''_{x_i x_j}), \tag{3}$$

ta tính định thức:

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Theo (2) từ dòng thứ k của định thức (4) ta rút ra hằng số nhân $(-1) \cdot kx^{\frac{n^2+n-2}{2}}$ vì vậy:

$$A_m = (-1)^m m!\, x^{\frac{n^2+n-2}{2}m} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & m \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \dots & m \\ 1 & 2 & 4 & 4 & \dots & m \\ 1 & 2 & 3 & 5 & \dots & m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m m!\, x^{\frac{n^2+n-2}{2}m} \left(1 + \frac{m^2 + m}{2}\right).$$

Từ đó, trực tiếp suy ra rằng: $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, $A_4 > 0$, ... tức là dạng (3) xác định âm. Như vậy, tại điểm dừng hàm đạt cực đại. Tính giá trị cực đại của hàm, ta có:

$$u_{max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$$

260. $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$ $(x_i > 0, i = 1, 2, ... n)$.

Giải. Cho các đạo hàm riêng cấp một bằng không, ta nhận được hệ để xác định các điểm dừng:

$$u'_{x_1} = 1 - \frac{x_2}{x_1^2} = 0$$

$$u'_{x_k} = \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k^2} = 0 \ (k = 2, 3, ..., n-1)$$

$$u'_{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{2}{x_n^2} = 0.$$

Từ đó ta có điểm dừng là:

$$x_2 = x_1^2, x_3 = x_1^3; ... ; x_n = x_1^n; x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}$$

Để thử lại điều kiện đủ của cực trị, ta tìm đạo hàm cấp hai. Ký hiệu $a_{ij} = u''_{x_i x_j}$, ta nhận được:

$$a_{11} = \frac{2}{x_1}; a_{12} = -\frac{1}{x_1^2}, a_{1j} = 0 \ (j = 3, 4, ..., n)$$

$$a_{kk-1} = -\frac{1}{x_1^{2k-2}}, a_{kk} = \frac{2}{x_1^{2k-1}}, a_{kk+1} = -\frac{1}{x_1^{2k}};$$

$$a_{kj} = 0 \ (j = 1, 2, ..., k-2, k+2, k+3, ... n; k = 2, 3, ..., n-1); \quad (1)$$

$$a_{nn-1} = -\frac{1}{x_1^{2n-2}}; a_{nn} = \frac{4}{x_1^{3n}} = \frac{2}{x_1^{2n-1}}$$

$$a_{n,j} = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n-2).$$

Để nghiên cứu dấu của dạng toàn phương:

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j. \quad (2$$

trong đó các hệ số được xác định theo công thức (1), ta xét định thức, được tạo nên bởi các hệ số của dạng thức (2):

$$A_m = \begin{vmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_1^2} & \frac{2}{x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_1^4} & \frac{2}{x_1^5} & -\frac{1}{x_1^6} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{x_1^{2m-2}} & \frac{2}{x_1^{2m-1}} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Biến đổi định thức (3) về dạng:

$$A_m = \begin{vmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3x_1^5} & -\frac{1}{x_1^6} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m+1}{mx_1^{2m-1}} \end{vmatrix}$$

Nhận xét rằng $A_m > 0$, khi $m = 1, 2, \dots, n$.

Như vậy, dạng toàn phương (2) xác định dương, và do đó hàm u có cực tiểu:

$$u_{\min} = (n+1)\, 2^{\frac{1}{n+1}}.$$

261. *Bài toán Huyghen*. Giữa hai số dương a và b, hãy thêm vào n số x_1, x_2, ..., x_n, sao cho giá trị của phân số sau đây lớn nhất:

$$u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\dots(x_n + b)}.$$

Giải. Lôgarit hàm u và ký hiệu $v = \ln u$, ta có:

$$v = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n - \ln(a + x_1) - \ln(x_1 + x_2) - \dots -$$
$$- \ln(x_{n-1} + x_n) - \ln(x_n + b).$$

Hiển nhiên các điểm cực trị của các hàm u và v trùng nhau, và vì vậy để xác định điểm dừng ta xét hệ:

$$v'_{x_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{a + x_1} - \frac{1}{x_1 + x_2} = 0$$

$$v'_{x_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1 + x_2} - \frac{1}{x_2 + x_3} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v'_{x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1} + x_n} - \frac{1}{x_n + b} = 0.$$

Từ phương trình đầu của hệ này ta có: $x_2 = \dfrac{1}{a} x_1^2$, từ phương trình hai: $x_3 = \dfrac{1}{x_1} x_2^2 = \dfrac{1}{a^2} x_1^3$; ...; từ phương trình cuối cùng ta có:

$$b = \frac{x_n^2}{x_{n-1}} = \frac{x_1^{n+1}}{a^n}.$$

Từ đó, ta tính được $x_1 = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Như vậy, tọa độ của điểm dừng M có thể viết dưới dạng cấp số nhân:

$$x_1 = aq,\ x_2 = aq^2, ...,\ x_n = aq^n \text{ với công bội } q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Ta tìm đạo hàm cấp hai:

$$v''_{x_1^2} = -\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{(a + x_1)^2} + \frac{1}{(x_1 + x_2)^2}, \quad v''_{x_1x_2} = \frac{1}{(x_1 + x_2)^2}$$

$$v''_{x_1x_j} = 0 \ (j = 3, 4, ..., n);$$

$$v''_{x_kx_{k-1}} = \frac{1}{(x_{k-1} + x_k)^2}; \quad v''_{x_k^2} = -\frac{1}{x_k^2} + \frac{1}{(x_{k-1} + x_k)^2} + \frac{1}{(x_k + x_{k+1})^2}$$

$$v''_{x_kx_{k+1}} = \frac{1}{(x_k + x_{k+1})^2}; \quad v''_{x_kx_j} = 0$$

$$(j = 1, 2, ..., k - 1,\ k + 2,\ k + 3, ..., n;\ k = 2, 3, ...\ n - 1).$$

$$v''_{x_nx_{n-1}} = \frac{1}{(x_{n-1} + x_n)^2}; \quad v''_{x_n^2} = -\frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{(x_{n-1} + x_n)^2} + \frac{1}{(x_n + b)^2};$$

$$v''_{x_nx_j} = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n - 2),$$

và tính các giá trị của chúng tại điểm dừng ($a_{ij} = v''_{x_i x_j}$):

$$a_{11} = -\frac{-2}{a^2 q^2 (1+q)^2}\ ; \quad a_{12} = \frac{1}{a^2 q^2 (1+q)^2}\ ; \quad a_{1j} = 0$$

$$(j = 3, 4, \ldots, n)\ ;$$

$$a_{k,k-1} = \frac{1}{a^2 q^{2k-2} (1+q)^2}, \qquad a_{kk} = -\frac{1}{a^2 q^{2k-1} (1+q)^2}\ ;$$

$$a_{k,k+1} = \frac{1}{a^2 q^{2k} (1+q)^2}\ ;$$

$$a_{k,j} = 0\ (j = 1, 2, \ldots\ k-1\ ; \quad j = k+2, k+3, \ldots, n\ ; \quad k = 2, 3, \ldots, n-1)\ ;$$

$$a_{n,n-1} = \frac{1}{a^2 q^{2n-2} (1+q)^2}\ ; \quad a_{nn} = -\frac{2}{a^2 q^{2n-1} (1+q)^2} \tag{1}$$

$$a_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Như trong các bài trước, ta tính các định thức A_m được tạo nên bởi các hệ số của dạng toàn phương:

$$d^2 v(M) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j. \tag{2}$$

Do các số a_{ij} trong các đẳng thức của (1) có nhân thức chung $\frac{1}{a^2 (1+q)^2}$, nên đưa nó ra ngoài dấu định thức, ta có:

$$A_m = \frac{1}{(a(1+q))^{2m}} \begin{vmatrix} -\frac{2}{q} & \frac{2}{q^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{q^2} & -\frac{2}{q^3} & \frac{1}{q^4} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^4} & -\frac{2}{q^5} & \frac{1}{q^6} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{q^{2m-2}} & -\frac{2}{q^{2m-1}} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Biến đổi (3) về dạng tam giác:

$$A_m = \frac{1}{[a(1+q)]^{2m}} \begin{vmatrix} -\frac{2}{q} & \frac{1}{q^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2q^3} & \frac{1}{q^4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3q^5} & \frac{1}{q^6} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{m+1}{mq^{2m-1}} \end{vmatrix}$$

và tính nó ta có: $A_m = \frac{(-1)^m(m+1)}{[a(1+q)]^{2m}q^{m^2}}$. Từ đó suy ra rằng: $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$,... tức là dạng toàn phương (2) xác định âm. Vì vậy hàm v, và cùng với nó là hàm u có cực đại tại điểm M.

Tìm các cực trị của hàm ẩn z của các biến x và y:

262. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$

Giải. Để xác định các điểm dừng, ta thành lập hệ (xem công thức (6) mục 5): $F'_x \equiv 2x - 2 = 0$, $F'_y \equiv 2y + 2 = 0$, $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$

Giải hệ đó ta nhận được:

$$x_1 = 1,\ y_1 = -2,\ z_1 = -2;$$
$$x_2 = 1,\ y_2 = -1,\ z_2 = 6.$$

Để thử lại điều kiện đủ, ta tìm các đạo hàm $F'_z = 2z - 4$; $F''_{x^2} = 2$; $F''_{y^2} = 2, F''_{xy} = 0$ và tính vi phân cấp hai tại các điểm dừng. Do (xem công thức (7) mục 5)

$$d^2F(1, -1, -2) = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) > 0;$$

$$d^2F(1, -1, 6) = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) < 0,$$

nên $z_{min} = -2$, $z_{max} = 6$, khi $x = 1, y = -1$.

263. $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$

Giải. Từ hệ

$$F'_x \equiv 2x - z + 2 = 0,\ F'_y \equiv 2y - z + 2 = 0$$
$$F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$$

ta có các điểm dừng:

$$M_1: x = -3 + \sqrt{6},\ y = -3 + \sqrt{6},\ z = -4 + 2\sqrt{6};$$
$$M_2: x = -3 - \sqrt{6},\ y = -3 - \sqrt{6},\ z = -4 - 2\sqrt{6}.$$

Ta tìm các đạo hàm:

$$F'_z = 2z - x - y + 2,\ F''_{x^2} = 2;\ F''_{y^2} = 2,\quad F''_{xy} = 0$$ và tính vi phân cấp hai d^2z tại các điểm dừng:

$$d^2z(M_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2);\ d^2z(M_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2).$$

Vì vậy:

$$z_{max} = -4 + 2\sqrt{6} \text{ khi } x = -3 + \sqrt{6},\ y = -3 + \sqrt{6};$$

$$z_{min} = -4 - 2\sqrt{6} \text{ khi } x = -3 - \sqrt{6},\ y = -3 - \sqrt{6}.$$

264. $x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0\ (a > 0)$.

Giải. Để tìm các điểm có thể đạt cực trị ta giải hệ:

$$F = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$F'_x = 4x^3 - 4a^2x = 0;\ F'_y = 4y^3 - 4a^2y = 0,$$

từ đó ta có điểm bất thường: $x = y = z = 0$ và 6 điểm dừng khác:

$$M_1: x_1 = 0,\ y = 0,\ z = a\sqrt{2};\ M_2: x = 0,\ y = 0,\ z = -a\sqrt{2},$$

$$M_{3,4}: x = \pm a,\ y = \pm a,\ z = a\sqrt{1 + \sqrt{3}};$$

$$M_{5,6}: x = \pm a,\ y = \pm a,\ z = -a\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

Tiếp theo, ta tìm các đạo hàm:

$$F'_z = 4z^3 - 4a^2z;\ F''_{x^2} = 12x^2 - 4a^2;\ F''_{y^2} = 12y^2 - 4a^2;\ F''_{xy} = 0,$$ và tính tại các điểm $M_i\ (i = 1, 2, \ldots, 6)$ vi phân cấp hai d^2z:

$$d^2z(M_1) = \frac{dx^2 + dy^2}{a\sqrt{2}};\qquad d^2z(M_2) = -\frac{dx^2 + dy^2}{a\sqrt{2}};$$

$$d^2z(M_{3,4}) = \frac{-2(dx^2 + dy^2)}{a\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}};\qquad d^2z(M_{5,6}) = \frac{2(dx^2 + dy^2)}{a\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}}.$$

Vì vậy tại điểm M_1 hàm đạt cực tiểu địa phương $z_{min} = a\sqrt{2}$, tại M_2 đạt cực đại: $z_{max} = -a\sqrt{2}$, tại các điểm $M_{3,4}$ đạt cực đại: $z_{max} = a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$; tại các điểm $M_{5,6}$ đạt cực tiểu $z_{min} = -a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Khảo sát cực trị có điều kiện của các hàm sau:

265. $z = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$, nếu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na,\ a > 0;\ m > 1$.

Giải. Thành lập hàm Lagơrăng (xem công thức (9) mục 6):

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^m + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right),$$

và viết hệ:

$$\Phi'_{x_i} = mx_i^{m-1} + \lambda = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ \sum_{i=1}^{n} x_i = na.$$

Từ đó ta có $\lambda = -ma^{m-1}$ và các tọa độ $x_i = a$ của điểm M có thể là điểm cực trị $(a, a, \ldots, a)$. Tiếp theo ta tìm vi phân cấp hai $d^2\Phi = m(m-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-2} dx_i^2$ và tính giá trị của nó tại điểm (M, λ):

$$d^2\Phi(M, \lambda) = m(m-1)a^{m-2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2.$$

Bởi vì $d^2\Phi(M, \lambda) > 0$, nên tại điểm M hàm z đạt cực tiểu $z_{min} = na^n$.

266. $u = xyz$, nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Giải. Tương tự bài trước, ta thành lập hàm Lagơrăng $\Phi = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$ và viết hệ để xác định λ và các tọa độ của điểm có thể có cực trị:

$$\Phi'_x = yz + 2\lambda x = 0, \quad \Phi'_y = xz + 2\lambda y = 0, \quad \Phi'_z = xy + 2\lambda z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Từ hệ này ta tìm được 8 điểm dừng: $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(1, -1, -1)$, $M_3(-1, 1, -1)$; $M_4(-1, -1, 1)$ với $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ và $M_5(-1, -1, -1)$, $M_6(-1, 1, 1)$, $M_7(1, -1, 1)$, $M_8(1, 1, -1)$, với $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Ta tìm vi phân cấp hai của hàm Lagơrăng:

$$d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdxdy + 2ydxdz + xdydz. \tag{1}$$

Với $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ và điểm M_1 ta có:

$$d^2\Phi(M_1, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2dxdy + 2dxdz + 2dydz =$$
$$= -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)dz.$$

Thay vào số hạng cuối cùng vi phân dz bởi giá trị của nó, tìm được từ phương trình liên hệ tại điểm M_1, tức là $dz = -(dx + dy)$, ta nhận được bất đẳng thức

$$d^2\Phi(M_1, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dx + dy)^2 < 0.$$

Từ đó ta thấy rằng tại điểm M_1 hàm đạt cực đại:

Với $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ và điểm M_2, từ (1) và phương trình liên hệ ta có:

$$d^2\Phi(M_2, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz,$$
$$dx = dy + dz;$$

và do đó:

$$d^2\Phi(M_2, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dy + dz)^2 < 0,$$

nên tại điểm M_2 hàm u đạt cực đại. Tương tự ta thấy rằng hàm u đạt cực đại tại các điểm M_3 và M_4. Tại tất cả các điểm này $u_{max} = 1$.

Với $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ và điểm M_5: từ (1) và từ phương trình liên hệ ta nhận được:

$$d^2\Phi(M_5, \lambda_2) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz,$$

$dx + dy + dz = 0$. Từ đó ta có bất đẳng thức:

$$d^2\Phi(M_5, \lambda_2) = (dx - dy)^2 + dz^2 + 2(dx + dy)^2 > 0,$$

nên kết luận rằng, tại điểm M_5 hàm u đạt cực tiểu. Dễ dàng thử lại rằng tại các điểm $M_{6,7,8}$ hàm u cũng đạt cực tiểu và $u_{min} = -1$.

267. $u = x^m y^n z^p$, nếu $x + y + z = a$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $a > 0$).

Giải. Hiển nhiên là các điểm cực trị của hàm u và hàm $v = \ln u$ trùng nhau, cho nên ta nghiên cứu cực trị có điều kiện của hàm $v = \ln u = m\ln x + n\ln y + p\ln z$ với điều kiện $x + y + z = a$.

Thành lập hàm Lagơrăng: $\Phi = m\ln x + n\ln y + p\ln z + \lambda(x + y + z - a)$ và hệ:

$$\Phi'_x = \frac{m}{x} + \lambda = 0,\ \Phi'_y = \frac{n}{y} + \lambda = 0,\ \Phi'_z = \frac{p}{z} + \lambda = 0,$$

$$x + y + z = a.$$

Ta tìm được các tọa độ của các điểm có thể có cực trị:

$x = mt$, $y = nt$, $z = pt$ với $t = \dfrac{a}{m + n + p}$. Bởi vì vi phân cấp hai của hàm Φ:

$$d^2\Phi = -\frac{mdx^2}{x^2} - \frac{ndy^2}{y^2} - \frac{pdz^2}{z^2}$$

tại điểm (mt, nt, pt) thỏa mãn bất đẳng thức

$$d^2\Phi = -\left(\frac{dx^2}{mt^2} + \frac{dy^2}{nt^2} + \frac{dz^2}{pt^2}\right) < 0,$$

nên hàm v (cùng với hàm u) đạt cực đại tại điểm (mt, nt, pt):

$$u_{max} = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m + n + p)^{m+n+p}}.$$

268. $u = x^2 + y^2 + z^2$, nếu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c > 0$).

Giải. Đạo hàm hàm Lagơrăng $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ theo tất cả các biến rồi kết hợp với phương trình liên hệ ta nhận được hệ:

$$\Phi'_x = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0;\ \Phi'_y = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0,\ \Phi'_z = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Từ đó ta tìm được λ và các điểm có thể xảy ra cực trị:

$$\lambda_{1,2} = -c^2,\ M_{1,2}\,(0, 0, \pm c);\ \lambda_{3,4} = -a^2,\ M_{3,4}\,(\pm a, 0, 0);$$
$$\lambda_{5,6} = -b^2;\ M_{5,6}\,(0, \pm b, 0).$$

Để thử lại điều kiện đủ, ta tìm vi phân cấp hai:

$$d^2\Phi = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + x\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2.$$

Từ các bất đẳng thức:

$$d^2\Phi(M_{1,2}, \lambda_{1,2}) = 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)dy^2 > 0$$

$$d^2\Phi(M_{3,4}, \lambda_{3,4}) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)dz^2 < 0$$

suy ra rằng hàm u tại các điểm $M_{1,2}$ đạt cực tiểu $u_{\min} = c^2$; còn tại các điểm $M_{3,4}$ thì u đạt cực đại $u_{\max} = a^2$. Tại các điểm $M_{5,6}$, khi $dx = 0$, $dz \neq 0$ thì $d^2\Phi(M_{5,6};\ \lambda_{5,6}) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dz^2 < 0$, còn khi $dx \neq 0$, $dz = 0$ thì $d^2\Phi(M_{5,6}, \lambda_{5,6}) = 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dx^2 > 0$. Vậy các điểm $M_{5,6}$ không phải là các điểm cực trị.

269. $u = xy^2z^3$, nếu $x + 2y + 3z = a$ ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$).

Giải. Thành lập hàm Lagơrăng đối với hàm phụ $v = \ln u$

$$\Phi = \ln x + 2\ln y + 3\ln z + \lambda(x + 2y + 3z - a),$$

và lập hệ:

$$\Phi'_x = \frac{1}{x} + \lambda = 0;\ \Phi'_y = \frac{2}{y} + 2\lambda = 0,\ \Phi'_z = \frac{3}{z} + 3\lambda = 0,$$
$$x + 2y + 3z = a,$$

ta nhận được giá trị λ và tọa độ các điểm dừng: $\lambda = -\frac{6}{a}$, $x = y = z = \frac{a}{6}$.

Bởi vì vi phân cấp hai $d^2\Phi = -\frac{dx^2}{x^2} - \frac{dy^2}{y^2} - \frac{dz^2}{z^2}$ tại điểm dừng thỏa mãn điều kiện

$$d^2\Phi\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}, -\frac{6}{a}\right) = -\frac{36}{a^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0,$$

nên hàm v (cũng như hàm u) đạt cực đại tại điểm này

$$u_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^6.$$

270. $u = xyz$, nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Giải. Tính các đạo hàm riêng của hàm Lagơrăng

$\Phi = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$ theo các biến x, y, z và cho các đạo hàm riêng bằng không ta nhận được hệ:

$$\Phi'_x = yz + 2\lambda x + \mu = 0,\ \Phi'_y = xz + 2\lambda y + \mu = 0$$

$$\Phi'_z = xy + 2\lambda z + \mu = 0$$

Từ hai phương trình liên hệ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x + y + z = 0$ và hệ này, ta tìm được 6 điểm có thể đạt cực trị:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ M_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

$$M_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ khi } \lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}};$$

$$M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ khi } \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Tiếp theo ta tìm vi phân cấp hai của hàm Lagơrăng:

$$d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz \quad (1)$$

và từ phương trình liên hệ ta có các hệ thức:

$$xdx + ydy + zdz = 0,\ dx + dy + dz = 0. \quad (2)$$

Ta thử lại điều kiện đủ tại các điểm M_1 và M_4. Tại các điểm này:

$$x = y = 2\lambda,\ z = -4\lambda. \quad (3)$$

Khi đó từ (1), (2), (3) ta nhận được đẳng thức

$$d^2\Phi = 2\lambda((dx - dy)^2 + dz^2 + dx^2 + dy^2).$$

Từ đó suy ra rằng khi $\lambda < 0$ (tức là tại điểm M_4) $d^2\Phi < 0$, nên tại đó hàm đạt cực đại: $u_{max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$. Khi $\lambda > 0$ (tức là tại điểm M_1) $d^2\Phi > 0$, vậy tại điểm này hàm u đạt cực tiểu $u_{min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Tương tự ta thấy rằng tại các điểm M_5 và M_6 hàm u đạt cực đại: $u_{max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$; còn tại các điểm M_2 và M_3 hàm u đạt cực tiểu: $u_{min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

271. $u = xy + yz$, nếu $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Giải. Lập hàm Lagơrăng $\Phi = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2)$ và thành lập hệ:

$$\Phi'_x = y + 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = x + z + 2\lambda y + \mu = 0,\ \Phi'_z = y + \mu = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2;\ y + z = 2$$

ta tìm được các số λ, μ và tọa độ của điểm dừng là $x = y = z = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = -1$.

Tính vi phân cấp hai $d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2dxdy + 2dydz$ và thay $\lambda = -\frac{1}{2}$ ta nhận được

$$d^2\Phi = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz.$$

Từ phương trình liên hệ suy ra rằng $dy = -dz = -dx$, vì vậy $d^2\Phi = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0$. Như vậy, tại điểm (1, 1, 1) hàm u đạt cực đại và bằng 2.

272. $u = \sin x \sin y \sin z$, nếu $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Giải. Thành lập hàm phụ $\Phi = \ln\sin x + \ln\sin y + \ln\sin z + \lambda\left(x + y + z - \frac{\pi}{2}\right)$ và hệ

$$\Phi'_x = \mathrm{ctg}x + \lambda = 0,\ \Phi'_y = \mathrm{ctg}y + \lambda = 0,\ \Phi'_z = \mathrm{ctg}z + \lambda = 0,\ x + y + z = \frac{\pi}{2}$$

ta nhận được điểm có thể đạt được cực trị $x = y = z = \frac{\pi}{6}$.

Bởi vì

$$d^2\Phi = -\left(\frac{dx^2}{\sin^2 x} + \frac{dy^2}{\sin^2 y} + \frac{dz^2}{\sin^2 z}\right) < 0,$$

nên tại điểm $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ hàm u đạt cực đại, $u_{max} = \frac{1}{8}$.

273. $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$, $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$.

Giải. Thành lập hàm Lagorăng

$\Phi = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$ và cho các đạo hàm riêng theo x, y, z bằng không, ta nhận được hệ:

$$\begin{aligned} \Phi'_x &= \frac{2x}{a^2} - 2\lambda x + \mu\cos\alpha = 0 \\ \Phi'_y &= \frac{2y}{b^2} - 2\lambda y + \mu\cos\beta = 0 \\ \Phi'_z &= \frac{2z}{c^2} - 2\lambda z + \mu\cos\gamma = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Nhân lần lượt các đẳng thức của hệ (1) với x, y, z rồi cộng chúng lại, ta có đẳng thức:

$$2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \mu(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

Từ đó và từ các phương trình liên hệ, suy ra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \lambda, \text{ tức là } u = \lambda.$$

Như vậy $u_{\max} = \max\lambda$, $u_{\min} = \min\lambda$.

Giải hệ (1) đối với x, y, z, rồi nhân lần lượt các đẳng thức nhận được với $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (chú ý rằng $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$), ta tìm thấy:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\dfrac{1}{a^2} - \lambda} + \frac{\cos^2\beta}{\dfrac{1}{b^2} - \lambda} + \frac{\cos^2\gamma}{\dfrac{1}{c^2} - \lambda} = 0$$

hay

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{c^2b^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2c^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2} = 0.$$

Nếu λ_1 và λ_2 là các nghiệm của phương trình này, đồng thời $\lambda_1 < \lambda_2$ thì $u_{\max} = \lambda_2$, $u_{\min} = \lambda_1$.

274. $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, nếu $\dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_n} = 1\ (a_i > 0,$ $i = 1, 2, \dots, n)$.

Giải. Ta có:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1\right).$$

Từ hệ $\Phi'_{x_j} = 2x_j + \lambda \dfrac{1}{a_j} = 0$ $(j = 1, 2, \dots n)$ ta có

$$x_j = -\frac{\lambda}{2a_j} \tag{1}$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$. Từ phương trình liên hệ và hệ (1) ta nhận được:

$$\lambda = -\frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{a_j^2}},\quad x_j = \frac{1}{a_j \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{a_j^2}}\quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

Bởi vì $d^2\Phi = 2\sum\limits_{j=1}^{n} dx_j^2 > 0$, nên tại điểm dừng (2) hàm u đạt cực tiểu

$$u_{\min} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{a_j^2}}.$$

275. $u = \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^p$ $(p > 1)$, nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$ $(a > 0)$.

Giải. Lập hàm Lagorăng $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^p + \lambda\left(a - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)$, và hệ:

$$\Phi'_{x_k} = px_k^{p-1} - \lambda = 0\ (k = 1, 2, \dots, n),\ \sum_{j=1}^{n} x_j = a,$$

ta nhận được:

$$\lambda = p\left(\frac{a}{n}\right)^{p-1}, \quad x_k = \frac{a}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ta tìm vi phân cấp hai:

$$d^2\Phi = p(p-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^{p-2}\, dx_k^2,$$

và tính giá trị của nó tại điểm dừng, ta thấy rằng

$$d^2\Phi = p(p-1)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^{p-2} dx_k^2 > 0.$$

Vậy tại điểm dừng hàm đạt cực tiểu:

$$u_{min} = \frac{a^p}{n^{p-1}}.$$

276. $u = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, nếu $x_i > 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ $(a > 0, \alpha_i > 1, i = 1, 2, \ldots, n)$.

Giải. Nhận xét rằng các điểm cực trị của hàm u và hàm $v = \ln u$ trùng nhau. Cho nên ta nghiên cứu cực trị địa phương của hàm v. Lập hàm Lagorăng

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j \ln x_j + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - a\right).$$

và giải hệ

$$\Phi'_{x_k} = \frac{\alpha_k}{x_k} + \lambda = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = a$$

ta tìm được giá trị λ và tọa độ của điểm M có thể xảy ra cực trị là

$$\lambda = -\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \quad x_k = \frac{a\alpha_k}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Tìm vi phân cấp hai:

$$d^2\Phi = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{x_k^2}\, dx_k^2.$$

Nhận xét rằng

$$d^2\Phi(M) = -\frac{1}{a^2}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{dx_k^2}{\alpha_k} < 0,$$

ta kết luận rằng tại điểm M hàm u đạt cực đại:

$$u_{max} = \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_n^{\alpha_n} \left(\frac{a}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

277. Tìm cực trị của dạng toàn phương $u = \sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$ là những số thực) với điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{n} x^2 = 1$.

Giải. Lập hàm Lagơrăng

$$\Phi = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

và thành lập hệ:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Phi'_{x_1} &= (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = 0,\\
\frac{1}{2}\Phi'_{x_2} &= a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = 0 \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{2}\Phi'_{x_n} &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0.
\end{aligned}$$

Hệ (1) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi số λ là nghiệm của phương trình

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Trước tiên ta chỉ ra rằng các nghiệm λ của phương trình (2) là những nghiệm thực. Muốn vậy ta ký hiệu A là ma trận đối xứng $\{a_{ij}\}$ của dạng toàn phương u đã cho. Khi đó hệ (2) có thể viết dưới dạng

$$Ax = \lambda x \tag{3}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$. Giả sử rằng λ là nghiệm phức tức là $\lambda = \alpha + i\beta$, trong đó $i = \sqrt{-1}$. Vì a_{ij} là các số thực nên $x = u + iv$. Khi đó từ (3) suy ra:

$$Au = \alpha u - \beta v \tag{4}$$

$$Av = \beta u + \alpha v. \tag{5}$$

Nhân vô hướng cả hai vế của (4) với v và (5) với u rồi trừ các kết quả cho nhau, ta nhận được:

$$(Au, v) - (Av, u) = -\beta((u, u) + (v, v)). \tag{6}$$

Bởi vì $(Au, v) = (u, A^T v) = (u, Av)$, ở đây A^T là ma trận chuyển vị của A, nên từ (6) ta có: $\beta((u, u) + (v, v)) = 0$. Bởi vì $(u, u) + (v, v) \neq 0$ nên $\beta = 0$, tức là λ là số thực.

Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các nghiệm của phương trình (2). Khi đó với mỗi λ_i $(i = 1, 2, \dots n)$, từ hệ (1) và điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, ta tìm được điểm có thể xảy ra cực trị là $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ $(i = 1, 2, \dots n)$.

Sau nữa, từ hệ (1) nhân các đẳng thức với $x_1, x_2, \dots, x_n$ tương ứng, rồi cộng lại, ta có:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Chú ý tới phương trình liên hệ, ta nhận được đẳng thức $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda$, mà tại điểm có thể đạt cực trị nó được viết dưới dạng: $u(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Từ đó suy ra rằng

$$u_{max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i\,; \quad u_{min} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i.$$

278. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, nếu $n \geqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Chứng minh. Ta nghiên cứu cực trị có điều kiện của hàm $u = \frac{x_n + y_n}{2}$, nếu $x + y = s$. Thành lập hàm Lagơrăng

$$\Phi = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(s - x - y)$$

và hệ:

$$\Phi'_x = \frac{nx^{n-1}}{2} - \lambda = 0, \ \Phi'_y = \frac{ny^{n-1}}{2} - \lambda = 0, \ x + y = s,$$

Tìm số λ, cũng như tọa độ điểm dừng của hàm u:

$$\lambda = \frac{n}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1}, \ x = y = \frac{s}{2}.$$

Bởi vì vi phân cấp hai $d^2\Phi = \frac{n(n-1)}{2}(x^{n-2}dx^2 + y^{n-2}dy^2)$ tại điểm $x = y = \frac{s}{2}$ thỏa mãn điều kiện:

$$d^2\Phi\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-2}(dx^2 + dy^2) > 0,$$

nên hàm u đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$, tức là $u_{min} = \left(\frac{s}{2}\right)^n \leqslant u(x, y)$, nếu $x + y = s$, hoặc $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n + y^n}{2}$.

279. Chứng minh bất đẳng thức Hônđe:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, ..., n, \ p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

Chứng minh. Nghiên cứu cực trị có điều kiện của hàm:

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

với điều kiện $A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, ở đây A là hằng số.

Lập hàm Lagơrăng

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} + \lambda\left(A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

và lập hệ:

$$\Phi'_{x_j} = x_j^{q-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}-1} - \lambda a_j = 0 \ (j = 1, 2, \dots, n). \qquad (1)$$

Không mất tính tổng quát, ta xem rằng $x_i > 0$, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Chia đẳng thức thứ j của hệ (1) cho đẳng thức thứ m của cùng hệ đó, ta nhận được:

$$\left(\frac{x_j}{x_m}\right)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}$$

Từ đó với m cố định ta tìm được

$$x_j = x_m\left(\frac{a_j}{a_m}\right)^{\frac{1}{q-1}} (j = 1, 2, \dots n;\ j \neq m) \qquad (2)$$

Thay (2) vào phương trình liên hệ ta có:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{n} a_i x_m \left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{\frac{1}{q-1}} + a_m x_m = A,$$

hay

$$\frac{x_m}{a_m^{\frac{1}{q-1}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{q}{q-1}} = A. \qquad (3)$$

Bởi vì $\frac{q}{q-1} = p$, $\frac{1}{q-1} = \frac{p}{q}$, từ hệ (3), ta nhận được các tọa độ của điểm có thể đạt được cực trị:

$$x_m = \frac{A a_m^{\frac{p}{q}}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} (m = 1, 2, \dots, n).$$

Để thử lại điều kiện đủ, ta tìm vi phân cấp hai của hàm Φ:

$$d\Phi = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-1}\,dx_i - \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i\,dx_i\,;$$

$$d^2\Phi = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big((q-1)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-2}\,dx_i^2 +$$

$$+ (1-q)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-2}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-1}\,dx_i\Big)^2\Big).$$

Do các phương trình liên hệ $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0$, nên tại điểm dừng ta có:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-1}\,dx_i\Big)^2 = \left(\frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{2(q-1)}\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0,$$

và vì vậy $d^2\Phi > 0$.

Vậy thì tại điểm dừng hàm u đạt cực tiểu, $u_{\min} = A$, vì vậy $u \geqslant A$, điều đó tương đương với bất đẳng thức Hônđe.

280. Chứng minh bất đẳng thức Ađam đối với định thức $\Delta = |a_{ij}|$ cấp n:

$$\Delta^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big).$$

Chứng minh. Ký hiệu A_{ij} là các phần phụ đại số của các phần tử a_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), ta nghiên cứu cực trị của định thức

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn},$$

sinh ra do khai triển theo các phần tử của dòng k, với k phương trình liên hệ:

$$a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + \ldots + a_{kn}^2 = s_k \ (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

Trong trường hợp này hàm Lagơrăng được viết dưới dạng

$$\Phi = \Delta + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + \ldots + a_{kn}^2 - s_k)$$

(giả thiết rằng $s_k \neq 0$, bởi vì khi $s_k = 0$ thì $\Delta = 0$).

Tìm đạo hàm riêng của hàm Φ theo a_{kj} và cho chúng bằng không, ta được n^2 đẳng thức :

$$\begin{aligned}
\Phi'_{a_{k1}} &= A_{k1} + 2\lambda_k a_{k1} = 0 \\
\Phi'_{a_{k2}} &= A_{k2} + 2\lambda_k a_{k2} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Phi'_{a_{kn}} &= A_{kn} + 2\lambda_k a_{kn} = 0.
\end{aligned}$$

Bởi vì hàm Δ liên tục trên tập kín (1), nên cực trị tồn tại. Từ (2) ta thấy rằng tại các điểm dừng các hệ thức sau đây thỏa mãn :

$$a_{k1} = -\frac{A_{k1}}{2\lambda_k},\ a_{k2} = -\frac{A_{k2}}{2\lambda_k},\ \ldots,\ a_{kn} = -\frac{A_{kn}}{2\lambda_k}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Từ đó và từ các phương trình liên hệ (1) ta tìm được :

$$\frac{A_{k1}^2}{4\lambda_k^2} + \frac{A_{k2}^2}{4\lambda_k^2} + \ldots + \frac{A_{kn}^2}{4\lambda_k^2} = s_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Từ đó nhận được hai giá trị λ_k :

$$\lambda_{k1} = \sqrt{\frac{A_{k1}^2 + A_{k2}^2 + \ldots + A_{kn}^2}{4s_k}},$$

$$\lambda_{k2} = -\sqrt{\frac{A_{k1}^2 + A_{k2}^2 + \ldots + A_{kn}^2}{4s_k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Do đó, đối với hai điểm cực trị có thể xảy ra, thỏa mãn các hệ thức :

$$a_{ij} = -\frac{A_{ij}}{2\lambda_{i1}} \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \text{ tại điểm } M_1 \qquad (3)$$

$$a_{ij} = -\frac{A_{ij}}{2\lambda_{i2}} \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \text{ tại điểm } M_2 \qquad (4)$$

Ta tìm vi phân cấp hai của hàm Φ :

$$d^2\Phi = 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (da_{k1}^2 + da_{k2}^2 + \ldots + da_{kn}^2).$$

Từ đó và từ (3), (4) sẽ có các bất đẳng thức : $d^2\Phi(M_1) > 0$; $d^2\Phi(M_2) < 0$. Như vậy *tại điểm M_1 hàm đạt cực tiểu còn tại M_2 hàm đạt cực đại và tại điểm cực đại, cực tiểu hàm nhận giá trị bằng nhau theo giá trị tuyệt đối.*

Ta tính các giá trị cực trị của hàm Δ. Tại điểm cực trị (như đã thấy từ (3) *hoặc (4)) các đẳng thức sau đây thỏa mãn* :

$$\frac{a_{k1}}{A_{k1}} = \frac{a_{k2}}{A_{k2}} = \dots = \frac{a_{kn}}{A_{kn}} \; (k = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

Từ các tính chất của định thức suy ra rằng

$$a_{j1} A_{k1} + a_{j2} A_{k2} + \dots + a_{jn} A_{kn} = 0 \quad j \neq k \tag{6}$$

Vì vậy từ (5), (6) và (1) ta nhận được :

$$a_{j1} a_{k1} + a_{j2} a_{k2} + \dots + a_{jn} a_{kn} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ s_k & j = k. \end{cases}$$

Do đó, tại điểm dừng M_1 hoặc M_2 ma trận

$$A = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{s_1}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{s_1}} & \dots & \frac{a_{1n}}{\sqrt{s_1}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{s_2}} & \frac{a_{22}}{\sqrt{s_2}} & \dots & \frac{a_{2n}}{\sqrt{s_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}}{\sqrt{s_n}} & \frac{a_{n2}}{\sqrt{s_n}} & \dots & \frac{a_{nn}}{\sqrt{s_n}} \end{vmatrix}$$

trực giao, tức là $A^T = A^{-1}$. Do $D_A^2 = 1$, trong đó D_A là định thức của ma trận A và $D_A^2 = \dfrac{\Delta^2}{s_1 s_2 \dots s_n}$ nên

$$\Delta_{min} = -\sqrt{\prod_{i=1}^{n} s_i}, \quad \Delta_{max} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} s_i}.$$

Từ đó và từ (1) ta suy ra ngay bất đẳng thức Adam.

Xác định giá trị lớn nhất (sup) và bé nhất (inf) của các hàm sau trong các miền đã cho:

281. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, nếu $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

Giải. Hàm z liên tục trong tập hợp kín giới nội $\{x^2 + y^2 \leqslant 25\}$. Vì vậy theo định lý Vâyecstrat, nó sẽ đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên tập hợp này. Rõ ràng rằng sup$z$ (inf$z$) bằng giá trị lớn nhất (bé nhất) của hàm z tại các điểm có thể có cực trị trên tập hợp $\{x^2 + y^2 < 25\}$ hoặc tại các điểm có thể có cực trị có điều kiện, nếu $x^2 + y^2 = 25$.

Bởi vì hệ $z'_x = 2x - 12 = 0$, $z'_y = 2y + 16 = 0$ không có nghiệm thuộc tập hợp $\{x^2 + y^2 < 25\}$, nên sup$z$ và inf$z$ đạt được trên vòng tròn $x^2 + y^2 = 25$.

Thành lập hàm Lagơrăng $\Phi = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(25 - x^2 - y^2)$ và giải hệ

$\Phi'_x = 2x - 12 - 2\lambda x = 0$; $\Phi'_y = 2y + 16 - 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 = 25$,

ta nhận được hai điểm có thể đạt được cực trị có điều kiện là $M_1(3, -4)$, $M_2(-3, 4)$. Tính giá trị của hàm z tại các điểm đó $z(M_1) = -75$, $z(M_2) = 125$. Ta kết luận: sup$z = 125$, inf$z = -75$.

282. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, nếu $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100$.

Giải. Tương tự bài trước, từ hệ:

$$u'_x = 2x = 0,\ u'_y = 4y = 0,\ u'_z = 6z = 0,$$

ta tìm được điểm dừng $M_1(0, 0, 0)$ thuộc tập hợp $\{x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$. Thành lập hàm Lagơrăng $\Phi = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(100 - x^2 - y^2 - z^2)$, và từ hệ

$$\Phi'_x = 2x - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = 4y - 2\lambda y = 0,$$
$$\Phi'_z = 6z - 2\lambda z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 100,$$

ta tìm được 3 điểm có thể đạt được cực trị có điều kiện: $M_2(10, 0, 0)$, $\lambda_1 = 1$; $M_3(0, 10, 0)$, $\lambda_2 = 2$; $M_4(0, 0, 10)$, $\lambda_3 = 3$.
Từ các đẳng thức:

$$u(M_1) = 0\ \ u(M_2) = 100,\ u(M_3) = 200,\ u(M_4) = 300$$

suy ra rằng: sup $u = 300$, inf $u = 0$.

283. $u = x + y + z$, nếu $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

Giải. Dễ dàng chứng tỏ rằng, hàm u không có thể có cực trị tại những điểm trong của miền xác định, vì vậy sup u và inf u đạt được hoặc trên đáy của hình nón $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$, hoặc là trên mặt xung quanh của hình nón $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z < 1$.

Giả sử $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$. Thành lập hàm Lagơrăng $\Phi = x + y + 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$; từ hệ

$$\Phi'_x = 1 - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = 1 - 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 1.$$

ta tìm được 4 điểm có thể đạt được cực trị là

$$M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),$$
$$M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Bây giờ ta tìm những điểm có thể có cực trị của hàm $u = x + y + x^2 + y^2$, nếu $0 \leqslant x^2 + y^2 < 1$. Ta có $u'_x = 1 + 2x + 0$, $u'_y = 1 + 2y = 0$. Từ đó và từ điều kiện $z = x^2 + y^2$ ta nhận được thêm một điểm $M_5\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ có thể đạt cực trị.

Tính các giá trị của hàm u tại điểm M_i $(i = 1, 2, \dots, 5)$, ta kết luận rằng $\sup u = 1 + \sqrt{2}$, $\inf u = -\frac{1}{2}$.

284. Tìm cận trên và cận dưới của hàm $u = (x + y + z)\, e^{-(x+2y+3z)}$ trên tập $E = \{M(x, y, z)\}$, trong đó $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, $0 < z < \infty$.

Giải. Hàm u xác định, liên tục và khả vi trên tập mở E. Bởi vì hệ

$$u'_x = (1 - x - y - z)\, e^{-(x+2y+3z)} = 0$$
$$u'_y = (1 - 2x - 2y - 2z)\, e^{-(x+2y+3z)} = 0$$
$$u'_z = (1 - 3x - 3y - 3z)\, e^{-(x+2y+3z)} = 0$$

không có nghiệm thuộc tập E, và $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty \\ z \to +\infty}} u = 0$, nên $\sup u$ và $\inf u$ không có thể đạt được tại các điểm trong của tập E. Vì vậy $\sup u = \lim\limits_{M \to M'_1} u$ $\inf u = \lim\limits_{M \to M'_2} u$, ở đây M'_1, M'_2 thuộc tập $\overline{E} \setminus E$ ($\overline{E} = E + E'$ là bao kín của tập E, E' là tập các điểm giới hạn của tập E).

Ta dựng hàm phụ v trên tập kín $\overline{E}$, bằng cách đặt

$$v = \begin{cases} u & \text{nếu } M \in E \\ \lim\limits_{M \to M'} u, & \text{nếu } M' \in \overline{E} \setminus E. \end{cases}$$

Rõ ràng rằng, trong trường hợp này, do hàm u liên tục, ta có $v = (x + y + z)\, e^{-(x+2y+3z)}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ và $\sup u = \sup v$, $\inf u = \inf v$, đồng thời $\sup v$ và $\inf v$ đạt được trên tập $\overline{E} \setminus E$. Trên mỗi tập

$E_1 : x = 0,\ 0 < y < \infty,\ 0 < z < \infty$

$E_2 : 0 < x < \infty,\ y = 0,\ 0 < z < \infty$

$E_3 : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ z = 0,$

hàm v không có điểm có thể có cực trị, vì vậy nó không thể đạt được $\sup v$ và ifn$v$ trên các tập này.

Ta còn phải nghiên cứu hàm v trên các nửa đường thẳng:

$E_4 : 0 \leqslant x < \infty,\ y = 0,\ z = 0$

$E_5 : x = 0,\ 0 \leqslant y < \infty,\ z = 0$

$E_6 : x = 0,\ y = 0,\ 0 \leqslant z < \infty.$

Trên E_4 hàm $v(x, 0, 0) = xe^{-x}$ có điểm dừng $x = 1$, và $v(1, 0, 0) = e^{-1}$, $v(0, 0, 0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x, 0, 0) = 0$. Trên E_5 hàm $v(0, y, 0) = y\, e^{-2y}$ có điểm dừng $y = \frac{1}{2}$ và $v\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} e^{-1}$, $\lim\limits_{y \to +\infty} v = 0$; cuối cùng, trên E_6 hàm $v(0, 0, z) = ze^{-3z}$ có điểm dừng $z = \frac{1}{3}$ và $v\left(0, 0\, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{-1}$, $\lim\limits_{z \to +\infty} v = 0$. Từ đó suy ra $\sup v = \sup u = e^{-1}$, $\inf v = \inf u = 0$.

285. Chứng minh rằng hàm $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ có tập vô hạn các cực đại và không có một cực tiểu nào.

Giải. Giải hệ $z'_x = -(1 + e^y)\sin x = 0$, $z'_y = (\cos x - y - 1)\, e^y = 0$ ta tìm được hai tập vô hạn các điểm dừng $M_n\,(2n\,\pi,\, 0)$ và $M'_n\,((2n - 1)\,\pi,\, -2)$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Thử lại điều kiện đủ. Muốn vậy, ta tìm các đạo hàm cấp hai:

$$z''_{x^2} = -(1 + e^y)\cos x,\ z''_{xy} = -\sin x\, e^y,\ z''_{y^2} = (\cos x - y - 2)\, e^y,$$

và tính tại điểm M_n, M'_n các định thức:

$$\Delta(M_n) = z''_{x^2}(M_n)\, z''_{y^2}(M_n) - z''^2_{xy}(M_n) = 2,$$

$$\Delta(M'_n) = z''_{x^2}(M'_n)\, z''_{y^2}(M'_n) - z''^2_{xy}(M'_n) = -e^{-2}(1 + e^{-2}).$$

Do $\Delta(M_n) > 0$ và $z''_{x^2}(M_n) = -2 < 0$, nên hàm z đạt cực đại trên tập vô hạn các điểm $M_n(2n\,\pi,\, 0)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Và vì $\Delta(M'_n) < 0$, nên tại các điểm M'_n hàm z không đạt được cực trị. Ngoài ra không còn điểm cực trị nào khác.

Vậy, hàm z có tập vô hạn các điểm cực đại, nhưng không có một cực tiểu nào.

286. Có phải điều kiện đủ để có cực tiểu tại điểm $M_0\,(x_0, y_0)$ của hàm $f(x, y)$ là hàm này có cực tiểu dọc theo mỗi đường thẳng đi qua điểm M_0 hay không?

Giải. Không phải. Ví dụ, hàm $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ tại điểm $(0, 0)$, dọc theo đường thẳng bất kỳ đi qua điểm này có cực tiểu bằng không (điều này dễ dàng thử lại). Tuy nhiên, xem là hàm hai biến, nó không có cực trị tại điểm $(0, 0)$. Thật vậy, số gia $\Delta f(0, 0) = 2\,\Delta x^2 - 3\,\Delta x \Delta y^2 + \Delta y^4 = \left(\Delta y^2 - \frac{3\Delta x}{2}\right)^2 -$

$-\dfrac{\Delta x^2}{4}$ với $\Delta x = 6t^2$, $\Delta y = 3t$ $(t > 0)$ và khi $\Delta x = 0$, $|\Delta y| > 0$ có dấu khác nhau.

287. Phân tích số dương a cho trước thành n thừa số dương, sao cho tổng các lũy thừa dương cho trước của chúng là nhỏ nhất.

Giải. Ta cần tìm các điểm tại đó hàm $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ $(x_i > 0,\ \alpha_i > 0,$ $i = 1, 2, \dots, n)$ đạt cực tiểu, với điều kiện $a = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

Viết hàm Lagơrăng $\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda\left(\ln a - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$

và thành lập hệ

$$\Phi'_{x_i} = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} - \frac{\lambda}{x_i} = 0, \ (i = 1, 2, \dots, n), \ a = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Từ n đẳng thức đầu của hệ này ta tìm được:

$$x_i = \left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \ (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

và thay chúng vào đẳng thức cuối cùng của hệ. Ta nhận được

$$a = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}} \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{-1}$$

Từ đó ta tìm được λ:

$$\lambda = \left(a \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}}} \tag{2}$$

rồi sau đó từ (1) ta xác định được các tọa độ điểm dừng

$$x_i = \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(a \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}}} \right]^{\frac{1}{\alpha_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (3).$$

Dễ dàng thử lại rằng với các giá trị x_i này thì hàm u có cực tiểu. Tìm đạo hàm cấp hai :

$$\Phi''_{x_i x_j} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$\Phi''_{x_i^2} = \alpha_i (\alpha_i - 1)\, \alpha_i^{\alpha_i - 2} + \frac{\lambda}{x_i^2} = \frac{\alpha_i^2 x_i^{\alpha_i} - \alpha_i x_i^{\alpha_i} + \lambda}{x_i^2} \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Từ đẳng thức (1), ta suy ra rằng $-\alpha_i x_i^{\alpha_i} + \lambda = -\lambda + \lambda = 0$.

Vì vậy tại điểm dừng

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^{\alpha_i - 2} dx_i^2 > 0,$$

tức là hàm u đạt cực tiểu.

288. Trên mặt phẳng cho n chất điểm $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ với khối lượng tương ứng là $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Với vị trí nào của điểm $P(x, y)$ thì mômen quán tính của hệ đối với điểm này là nhỏ nhất?

Giải. Ta nghiên cứu cực trị của mômen quán tính

$$I(x, y) = \sum_{i=1}^{n} m_i ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2).$$

Từ hệ

$$I'_x = 2 \sum_{i=1}^{n} m_i (x - x_i) = 0, \ I'_y = 2 \sum_{i=1}^{n} m_i (y - y_i) = 0$$

ta tìm được điểm dừng duy nhất

$$x_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Tính đạo hàm cấp hai:

$$I''_{x^2} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i, \; I''_{y^2} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i, \; I_{xy} = 0,$$

ta thấy rằng tại điểm dừng thì

$$I''_{x^2} I''_{y^2} - I''_{xy} = 4\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 > 0, \; I''_{x^2} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i > 0.$$

Vậy tại điểm (x_o, y_o) hàm $I(x, y)$ đạt cực tiểu.

289. Trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hãy tìm một điểm mà tổng bình phương các khoảng cách từ điểm đó đến n điểm cho trước $M_i\,(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là cực tiểu.

Giải. Từ điều kiện bài toán ta suy ra rằng cần phải tìm cực tiểu của hàm

$$u = \sum_{i=1}^{n} [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2],$$

nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Thành lập hàm Lagơrăng

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] + \lambda\,(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

và giải hệ

$$\Phi'_x = 2\sum_{i=1}^{n} (x - x_i) - 2\lambda x = 0$$

$$\Phi'_y = 2\sum_{i=1}^{n} (y - y_i) - 2\lambda y = 0$$

$$\Phi'_z = 2\sum_{i=1}^{n}(z - z_i) - 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

ta nhận được hai điểm dừng:

$$\lambda_1 = n + N,\ x'_1 = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y'_1 = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z'_1 = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i,$$

$$\lambda_2 = n - N,\ x'_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y'_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z'_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i,$$

ở đây

$$N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}.$$

Tính vi phân cấp hai:

$$d^2\Phi = 2(n - \lambda)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

và nhận xét rằng

$$d^2\Phi(x'_1, y'_1, z'_1, \lambda_1) = -2N(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$$
$$d^2\Phi(x'_2, y'_2, z'_2, \lambda_2) = 2N(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$$

ta kết luận tại điểm (x'_1, y'_1, z'_1) hàm u đạt cực đại, còn tại điểm (x'_2, y'_2, z'_2) đạt cực tiểu:

$$u_{min} = n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

290. Một vật gồm một hình trụ đứng tròn xoay ghép với một hình nón thẳng đứng. Với diện tích toàn phần cho trước bằng Q hãy xác định kích thước của vật, sao cho thể tích của nó là lớn nhất.

Giải. Giả sử r là bán kính hình trụ, h là chiều cao của nó, còn α là góc giữa đường sinh hình nón và đáy của nó. Khi đó diện tích toàn phần Q của vật thể và thể tích V được xác định bởi các đẳng thức:

$$Q = \pi r^2 + 2\pi rh + \frac{\pi r^2}{\cos\alpha},\quad V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Khử h từ các đẳng thức này, ta nhận được hàm :

$$V(\alpha) = \frac{Qr}{2} - \frac{\pi r^3}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) + \frac{\pi r^3}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

mà ta cần nghiên cứu cực trị của nó. Từ đẳng thức $V'(\alpha) = \frac{\pi r^3}{2\cos^2\alpha}\left(\frac{2}{3} - \sin\alpha\right) = 0$ ta tìm được điểm dừng $\alpha_0 = \arcsin\frac{2}{3}$ (theo ý nghĩa của bài toán thì α không thể bằng $\frac{\pi}{2}$, tức là $\cos\alpha \neq 0$).

Từ hệ thức $V'(\alpha_0 - \varepsilon) > 0$, $V'(\alpha_0 + \varepsilon) < 0$ thỏa mãn với $\varepsilon > 0$ đủ bé, suy ra với $\alpha_0 = \arcsin\frac{2}{3}$ thì thể tích vật thể đạt được cực đại.

291. Tìm hình chữ nhật có chu vi $2p$ cho trước, sao cho khi hình đó quay quanh một trong các cạnh của nó, thì tạo nên vật có thể tích lớn nhất.

Giải. Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là x và y, và quay quanh cạnh có độ dài là y. Khi đó bài toán sẽ dẫn tới nghiên cứu cực trị của hàm $V = \pi x^2 y$, nếu $x + y = p$. Khử y từ các hệ thức này, ta nhận được $V = \pi(px^2 - x^3)$.

Từ đẳng thức $V' = \pi(2px - 3x^2) = 0$, ta tìm được $x = \frac{2p}{3}$ ($x = 0$ bài toán không có nghĩa). Còn từ đẳng thức $V''\left(\frac{2p}{3}\right) = -2\pi p < 0$ suy ra rằng $V = V_{max}$, nếu $x = \frac{2p}{3}$.

Vậy : cạnh của hình chữ nhật cần tìm bằng $\frac{2p}{3}$ và $\frac{p}{3}$.

292. Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa parabôn $y = x^2$ và đường thẳng $x - y - 2 = 0$.

Giải. Bài toán dẫn tới xác định cực tiểu hàm

$$\delta = \frac{x - y - 2}{-\sqrt{2}}, \text{ nếu } y = x^2.$$

Thành lập hàm Lagơrăng

$$\Phi = -\frac{x - y - 2}{\sqrt{2}} + \lambda(y - x)^2.$$

Giải hệ

$$\Phi'_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\lambda x = 0, \quad \Phi'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda = 0, \quad y = x^2$$

ta tìm được: $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$. Bởi vì tại điểm này $d^2\Phi = \frac{1}{2}dx^2 > 0$, nên hàm δ đạt cực tiểu

$$\delta_{\min} = \frac{7}{4\sqrt{2}}.$$

293. Tìm các bán trục của mặt có tâm bậc hai:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1. \qquad (1)$$

Giải. Bình phương các bán trục của mặt có tâm bằng giá trị cực trị của hàm $u = x^2 + y^2 + z^2$, nếu x, y, z liên hệ với nhau bởi hệ thức (1), tức là bài toán được dẫn tới nghiên cứu cực trị của hàm u với phương trình ràng buộc (1). Viết hàm Lagơrăng

$$\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(1 - Ax^2 - By^2 - Cz^2 - 2Dxy - 2Eyz - 2Fxz)$$

và cho các đạo hàm riêng của nó bằng không, ta nhận được:

$$\begin{aligned} \Phi'_x &= 2x - \lambda(2Ax + 2Dy + 2Fz) = 0 \\ \Phi'_y &= 2y - \lambda(2By + 2Dx + 2Ez) = 0 \\ \Phi'_z &= 2z - \lambda(2Cz + 2Ey + 2Fx) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Nhân lần lượt các phương trình của hệ (2) với x, y, z tương ứng và cộng kết quả lại ta được đẳng thức:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2\lambda(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz) = 0$$

hay

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \text{ (chú ý sử dụng (1)).}$$

Do đó giá trị cực trị của hàm u bằng giá trị λ.

Theo ý nghĩa của bài toán thì hệ (2) có nghiệm không tầm thường, vì vậy định thức của nó bằng không:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda A & -\lambda D & -\lambda F \\ -\lambda D & 1-\lambda B & -\lambda E \\ -\lambda F & -\lambda E & 1-\lambda C \end{vmatrix} = 0.$$

Từ phương trình này ta tìm được 3 giá trị của λ bằng bình phương các bán trục của mặt có tâm (1).

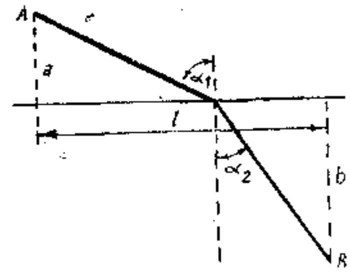
294. Theo nguyên lý Phécma, ánh sáng xuất phát từ điểm A và chiếu vào điểm B sẽ được truyền theo một đường cong, sao cho thời gian đi theo đường ấy là ngắn nhất.

Giả sử rằng các hình A và B ở trong hai môi trường quang học khác nhau bị ngăn cách bởi một mặt phẳng, trong đó tốc độ truyền ánh sáng trong môi trường thứ nhất là v_1 và trong môi trường thứ hai là v_2, hãy tìm định luật khúc xạ ánh sáng.

Giải. Giả sử t_1 là thời gian truyền ánh sáng trong môi trường thứ nhất, t_2 – trong môi trường thứ hai. Khi đó (hình 1) : $t_1 = \frac{a}{v_1\cos\alpha_1}$, $t_2 = \frac{b}{v_2\cos\alpha_1}$. Cần nghiên cứu cực trị của hàm

$$T = t_1 + t_2 = \frac{a}{v_1\cos\alpha_1} + \frac{b}{v_2\cos\alpha_2}$$

với điều kiện $l = a\operatorname{tg}\alpha_1 + b\operatorname{tg}\alpha_2$.



Hình 1

Thành lập hàm Lagơrăng

$$\Phi = \frac{a}{v_1\cos\alpha_1} + \frac{b}{v_2\cos\alpha_2} + \lambda(l - a\operatorname{tg}\alpha_1 - b\operatorname{tg}\alpha_2).$$

Từ hệ

$$\Phi'_{\alpha_1} = \frac{a\sin\alpha_1}{v_1\cos^2\alpha_1} - \frac{\lambda a}{\cos^2\alpha_1} = 0,$$

$$\Phi'_{\alpha_2} = \frac{b\sin\alpha_2}{v_2\cos^2\alpha_2} - \frac{\lambda b}{\cos^2\alpha_2} = 0,\ l = a\operatorname{tg}\alpha_1 + b\operatorname{tg}\alpha_2$$

ta thấy rằng tại điểm dừng thì điều kiện $\lambda = \frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_1}{v_2}$ (1) thỏa mãn.

Từ đó và từ phương trình cuối cùng của hệ có thể tìm được số λ, rồi tìm được các góc α_1 và α_2. Tuy nhiên ta không cần tìm nó cụ thể, bởi vì chúng không cần thiết cho chúng ta sau này.

Để thử lại điều kiện đủ ta cần tính vi phân cấp hai :

$$d^2\Phi = \left[\frac{a}{v_1\cos\alpha_1} + 2a\,\frac{\sin\alpha_1}{\cos^3\alpha_1}\left(\frac{\sin\alpha_1}{v_1} - \lambda\right)\right] d\alpha_1^2 +$$
$$+ \left[\frac{b}{v_2\cos\alpha_2} + 2b\,\frac{\sin\alpha_2}{\cos^3\alpha_2}\left(\frac{\sin\alpha_2}{v_2} - \lambda\right)\right] d\alpha_2^2.$$

Do điều kiện (1), nên tại điểm dừng thì

$$d^2\Phi = \frac{a}{v_1\cos\alpha_1}\,d\alpha_1^2 + \frac{b}{v_2\cos\alpha_2}\,d\alpha_2^2 > 0.$$

Do đó hàm T đạt cực tiểu nếu đẳng thức $\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$ thỏa mãn. Đó chính là định luật khúc xạ ánh sáng.

CÁC BÀI TẬP VÀ CÁC VÍ DỤ TỰ GIẢI

1. Chứng minh rằng hàm $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ tại điểm $(0, 0)$ ít ra cũng là vô cùng bé cùng cấp so với $\rho = (x^2 + y^2)^{3/2}$

2. Chứng minh rằng dãy $a_{nm} = \dfrac{1}{n - m + \dfrac{1}{2}}$ có $\lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$ nhưng $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{nm}$ không tồn tại.

3. Chứng minh rằng dãy $a_{nm} = \dfrac{\sin n}{m}$ tồn tại giới hạn kép $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{nm}$, nhưng

$\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}) \neq \lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$. Các giới hạn kép sau đây có tồn tại hay không? Hãy tính những giới hạn đó:

4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \dfrac{(\ln n)^2 - (\ln m)^2}{(\ln n)^2 + (\ln m)^2}$.

5. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \dfrac{\mathrm{tg} n + \mathrm{tg} m}{1 - \mathrm{tg} n \,\mathrm{tg} m}$.

6. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \dfrac{1}{m^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{k}{m}$.

7. Chứng minh rằng các hàm $f(x, y) = \dfrac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$; $g(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$ tiến tới không khi điểm (x, y) tiến tới điểm $(0, 0)$ dọc theo một đường thẳng bất kỳ đi qua điểm $(0, 0)$, nhưng các hàm này không có giới hạn tại điểm $(0, 0)$.

Bằng ngôn ngữ « ε, δ » hãy chứng minh sự liên tục của các hàm sau:

8. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$;

9. $f(x, y) = \sqrt{1 + e^{xy}}$.

10. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x, y)$ liên tục theo từng biến x và y riêng biệt và đơn điệu theo một trong các biến đó, thì hàm $f(x, y)$ liên tục theo cả hai biến.

11. Khảo sát sự liên tục đều của hàm

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{khi } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{khi } x = 0,\ y = 0, \end{cases}$$

trên mặt phẳng $E_2 = \{ |x| < +\infty, |y| < +\infty \}$.

12. Chứng minh rằng hàm $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ không liên tục đều trên toàn không gian $E_3 = \{ |x| < +\infty, |y| < +\infty, |z| < +\infty\}$.

13. Tính $z'_x(0, 0)$, $z'_y(0, 0)$, nếu $z = |x| + |y| - |x + y|$.

14. Tính $z'_x(0, 0)$ và $z'_y(0, 0)$, nếu $z = (|x| + |y|) \sin (|x| + |y|)$.

Khảo sát tính khả vi tại điểm $(0, 0)$ của các hàm sau:

15. $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, nếu $x^2 + y^2 > 0$ và $f(0, 0) = 0$.

16. $f(x, y) = \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, nếu $x^2 + y^2 > 0$ và $f(0, 0) = 0$.

17. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, nếu $x^2 + y^2 > 0$ và $f(0, 0) = 0$.

18. Chứng minh rằng $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$, nếu $f(x, y) = x^2\text{arctg}\,\dfrac{y}{x} - y^2\text{arctg}\,\dfrac{x}{y}$, khi $x \neq 0$, $y \neq 0$ và $f = 0$ khi $x = 0$, hoặc $y = 0$.

19. Chứng minh rằng hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$ thỏa mãn phương trình Laplaxơ $f''_{x_1x_1} + f''_{x_2x_2} + ... + f''_{x_nx_n} = 0$.

20. Chứng minh rằng hàm f thuần nhất cấp một thì thỏa mãn phương trình vi phân $f''_{xx} + f''_{yy} + ... + 2f''_{xy} + 2f''_{xz} + ... = 0$.

Thử lại các đẳng thức sau (đối với các hàm đã gặp trong các thí dụ từ 23 – 30 với giả thiết rằng trong các bài toán này chúng có đạo hàm đến cấp cần thiết):

21. $\dfrac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} = (1 - r^2)^{-\frac{5}{2}}$, nếu $u_1 = \dfrac{x}{\sqrt{1-r^2}}$; $u_2 = \dfrac{y}{\sqrt{1-r^2}}$; $u_3 = \dfrac{z}{\sqrt{1-r^2}}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

22. $$\frac{D\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial x_n}\right)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{D\left(\dfrac{\partial v}{\partial y_1}, \dfrac{\partial v}{\partial y_2}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial y_n}\right)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)},$$
nếu $v = v(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ là hàm có các đạo hàm cấp hai liên tục.

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y} = \alpha^2 u$ nếu $u = e^{-\alpha x}\varphi(x, y)$.

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\varphi''$ nếu $u = \varphi(y - x) - x\varphi'(y - x)$.

25. $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$ nếu $z = e^y\varphi\left(y\, e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$

26. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ nếu $u = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

27. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$, nếu $u = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$.

28. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (n-1)nu$ nếu $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) +$

$$+ x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, nếu $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

30. $a^2\left(u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = b^2\left(u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)$,

trong đó $u = \varphi(ay + bx)\,\psi(bx - ay)$.

31. Giả sử cho phương trình $y^2 - (x^2 - 1)^2 = 0$ (1) và $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ (2) là hàm đơn trị thỏa mãn phương trình (1).

1. Có bao nhiêu hàm đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

2. Có bao nhiêu hàm liên tục đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

3. Có bao nhiêu hàm khả vi đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?

4. Có bao nhiêu hàm liên tục đơn trị $y = y(x)$ $(-\delta < x < \delta)$ thỏa mãn phương trình (1), nếu $y(0) = 1$ và $0 < \delta < 1$?

32. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Tìm y' khi $x = y$.

33. $x = y - \alpha\sin y$. Tìm y' và y''.

34. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$. Tìm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

35. Tìm d^2z tại điểm $x = a$, $y = a$, $z = 0$, nếu $x^2 + z^2 - 3axz = y^3$.

36. Cho phương trình $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$. Tìm y' và z'', khi $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

37. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Tìm y' và z'.

38. Từ phương trình $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 3y^2 = 1$. Tìm d^2y, d^2z nếu x là biến độc lập.

39. Tại điểm $(1, 1, -2)$ tìm các đạo hàm cấp một và cấp hai của y và z, nếu $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 - z^3 = 10$.

40. $x = a\cos u \sin v$, $y = b\cos u \sin v$, $z = c\sin u$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$.

41. Chứng minh rằng hàm z là hàm của x và y xác định từ phương trình $x - az = \varphi(y - bz)$ (ở đây φ là hàm bất kỳ) có đạo hàm thỏa mãn phương trình $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

42. Chứng minh rằng với điều kiện $z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$, $0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)$ thì z thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0.$$

43. Thay $\ln(x + a) = t$ vào phương trình

$$(x + a)^3 y''' + 3(x + a)^2 y'' + (x + a)y' + b = 0.$$

44. Thay $x + y = v$, $x - y = u$ với u là đối số v là hàm số, vào phương trình

$$2y'' + (x + y)(1 - y')^3 = 0.$$

45. Biến đổi phương trình $xy\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$ với y là đối số, còn hàm mới $z = \ln\frac{y}{x}$.

46. Biến đổi biểu thức $A = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$, bằng cách đặt $x = c\alpha\beta\cos\psi$, $y = c\alpha\beta\sin\psi$, $z = \frac{c}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$.

Biến đổi toán tử Laplaxơ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

bằng cách đặt :

47. $x = c\alpha\beta$, $y = \frac{c}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$, $z = z$.

48. $x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\,.\,\sin\varphi$, $z = z$,

49. $x = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi\sin\psi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi\cos\psi$, $z = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi$.

50. $x = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\psi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}$, $y = \frac{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\psi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}$, $z = -\frac{a\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}$.

Khảo sát cực trị của các hàm sau :

51. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

52. $u = xyz(4a - x - y - z)$.

53. Tính cực đại của hàm $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 6xy + 3y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

54. Xác định các điểm dừng của hàm $f(x, y) = y^2\left(\sin x - \dfrac{x}{2}\right)$ và giải thích đặc điểm của chúng.

Tìm trị lớn nhất và bé nhất của các hàm sau, nếu các biến liên hệ với nhau bởi điều kiện :

55. $u = xyz$, $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

56. $u = \dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i = p$

trong đó α_i, β_i, x_i là dương

57. Chứng minh các bất đẳng thức :

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \leqslant \frac{n(n-1)}{1.2}a^2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3.$$

và v.v..., nếu $x_1 x_2 \dots x_n \geqslant 0$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = na$.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG I

2. Hội tụ khi $\alpha > 1$. **3.** Phân kỳ. **4.** Hội tụ khi $\alpha < -1$. **5.** Phân kỳ **6.** Hội tụ. **7.** Phân kỳ. **8.** Phân kỳ. **9.** Phân kỳ. **10.** Hội tụ. **11.** Hội tụ. **12.** Phân kỳ. **13.** Hội tụ có điều kiện. **14.** Hội tụ khi $\alpha > 0$; hội tụ có điều kiện khi $0 < \alpha \leqslant 1$. **15.** Hội tụ có điều kiện. **16.** Khi $\alpha > p + 2$ hội tụ tuyệt đối. khi $p + 1 < \alpha \leqslant p + 2$ hội tụ có điều kiện. **17.** Hội tụ có điều kiện. **18.** Hội tụ có điều kiện. **19.** Hội tụ có điều kiện. **20.** Hội tụ có điều kiện khi $\alpha > 0$. **21.** Hội tụ với mọi α; hội tụ tuyệt đối khi $\alpha > 1$. **22.** a) Không đều; b) không đều; c) đều; d) đều. **23.** a) Không đều; b) đều. **24.** a) Không đều; b) đều. **25.** Hội tụ không đều trong mọi trường hợp. **26.** a) Đều; b) không đều **27.** a) Đều; b) đều. **28.** a) Đều; b) không đều. **29.** a) Đều; b) không đều. **30.** Không đều. **31.** Không đều. **32.** $|x| < 1$; không đều **33.** $(-\infty, +\infty)$; không đều. **34.** $(-\infty, +\infty)$; không đều. **35.** $(-\infty, +\infty)$; không đều. **36.** Có thể. **43.** a) Đúng; b) không; c) đúng. **44.** $\frac{\pi^2}{6}$. **45.** 1. **46.** 0. **47.** $\ln 2$. **48.** $\ln\frac{1}{2}$,

49. $\frac{1}{4}$. **50.** $\frac{\pi}{2}$. **51.** $\frac{1}{2}$. **52.** $\frac{1}{\sqrt{a}} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{a} n^2} \cos 2n\pi x$. **53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} \cos nx$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} \sin nx$. **55.** $\frac{1}{4} \sin x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx$ $(|x| < \pi)$.

56. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \cos nx$ $(|x| < \pi)$. **58.** a) Được; b) không; c) được; d) không. **61.** 1. **62.** $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. **63.** $(1 - \cos x) \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi - x}{2} \sin x + \cos x$ $0 < x < 2\pi$. **64.** $(1 - \cos x) \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}$. **65.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\xi \sin\varphi}{1 - \xi^2}$.
66. $-\sin x + \operatorname{sgn} x . \ln\left(\sqrt{1 + |\sin x|} + \sqrt{|\sin x|}\right)$, $|x| \leqslant \pi$.

CHƯƠNG II

4. Không. **5.** Không. **6.** Có. **11.** Liên tục đều. **13.** $z'_x(0, 0) = 0$, $z'_y(0, 0) = 0$. **15.** Không khả vi. **16.** Không khả vi. **17.** Khả vi. **31.** 1) Tập hợp vô hạn; 2) tám; 3) bốn; 4) một. **32.** $y' = -1$. **33.** $y' = \dfrac{1}{1 - \alpha\cos y}$, $y'' = \dfrac{-\alpha\sin y}{(1 - \alpha\cos y)^3}$. **34.** $(z^2 - 1)^3 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2zx^2y^2$. **35.** $d^2z\,(a, a) = \dfrac{1}{a}(dx^2 + dy^2)$. **36.** $y' = 1$, $y'' = \dfrac{2}{3}$. **37.** $y(y - z)\,y' = x(z - x)$, $z(z - y)\,z' = x(y - x)$. **38.** $25y^3d^2y = -(20y^2 + 16x^2)dx^2$, $25z^3d^2z = (5z^2 - x^2)dx^2$. **39.** $y' = -1$, $z' = 0$, $5y'' = -4$, $5z'' = 4$. **40.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c}{a}\sin v \operatorname{ctg} u$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c}{b}\cos v \operatorname{ctg} u$. **43.** $\dfrac{d^3y}{dt^3} + by = 0$. **44.** $v'' + v = 0$. **45.** $y\dfrac{d^2z}{dy^2} + \dfrac{dz}{dy} = 0$. **46.** $A = \dfrac{1}{c\delta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \dfrac{1}{c\alpha\beta}\,\dfrac{\partial u}{\partial \psi}$, trong đó $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. **47.** $\Delta u = \dfrac{1}{c^2\delta^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, trong đó $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$. **48.** $\Delta u = \dfrac{1}{a^2\delta^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, trong đó $\delta^2 = \operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi$. **49.** $\Delta u = \dfrac{1}{a^2\delta^2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}\xi}\,\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) + \dfrac{1}{a^2\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\varphi}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$, trong đó $\delta^2 = \operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi$. **50.** $\Delta u = \dfrac{\lambda(1 + \cos\varphi\operatorname{ch}\xi)}{a^2\operatorname{sh}\xi}\,\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\lambda\sin\varphi}{a^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} + \dfrac{\lambda^2}{a^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2\xi}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}\right)$, trong đó $\lambda = \operatorname{ch}\xi + \cos\varphi$. **51.** Cực tiểu khi $x = \sigma\sqrt{2}$, $y = -\sigma\sqrt{2}$, $\sigma = \pm 1$; khi $x = 0$, $x = 0$ không có cực trị. **52.** Cực đại khi $x = y = z = a$. Khi $x = y = z = 0$, không có cực trị. **53.** $\dfrac{14 + 2\sqrt{67}}{3}$. **54.** Các điểm yên ngựa: $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{3}, \ldots$; các cực tiểu: $y = 0$, $x = \dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}, \dfrac{17\pi}{3}, \ldots$. **55.** Giá trị lớn nhất $\dfrac{112}{27}$, nhỏ nhất 4. **56.** Cực đại $\dfrac{1}{p} \times (\sqrt{\alpha_1\beta_1} + \sqrt{\alpha_2\beta_2} + \ldots + \sqrt{\alpha_n\beta_n})^2$.

MỤC LỤC

Chương I – CHUỖI

Chương II – PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

CÁC VÍ DỤ VÀ CÁC BÀI TOÁN

Phần I (Tập II)

In 17.000 cuốn, tại nhà máy in sách KHKT – Hà nội, khổ 19×27. Số in 82/79.
Số XB. 30/ĐH In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 1979.

ĐÍNH CHÍNH

Giải tích toán học—phần I (tập II)

Trang	Dòng	Đã in	Xin sửa lại
15	4	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots$	$+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$
16	5dl	$\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots$	$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\dots$
19	10	$(2n)\,!!$	$((2n)\,!!)^2$
25	5,6dl	và lập tỷ số... Ta ký hiệu...	Ta ký hiệu ... và lập tỷ số...
30	4	$\lim \frac{\ln^\gamma t}{t} = 0$	$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln^\gamma t}{t^\varepsilon} = 0$
32	7	$\leqslant f(k)$	$\leqslant f(x) \leqslant f(k)$
33	6dl	trong đó	trong đó $S_{p_m} =$
78	7dl	$f(x) + t\,(dt$	$f(x+t)\,dt$
84	5dl	nên dãy hàm	và dãy hàm
96	7dl	$\operatorname{im}\limits_{x\to+0} \frac{1}{2^n n^x}$	$\lim\limits_{x\to+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$
108	13	$10^{[\lg n]}+1$	$10^{[\lg n]+1}$
115	3	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}-1\right)$
127	1dl	$\dots x^{n-1} \equiv w_n(x)$	$\dots x^{-n-1} \equiv w_n(x)$
144	2dl	$d^n\, e^{\frac{x^2}{2}}$	$d^n\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
162	7dl	$(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$	$(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
183	10	$\dots\cos\sqrt{-x}\,)$	$\dots-\cos\sqrt{-x}\,)$
198	5	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$\varepsilon = \frac{b}{a}$
200	9	$\frac{(-1)^m}{(2n+1)(n-m)\,!\,m\,!}$	$\frac{(-1)^m}{(2m+1)(n-m)\,!\,m\,!}$
207	4dl	$\sin(\pi\sqrt[n3]{n^3+n^2})$	$\sin(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2})$
231	11	A	a
350	8	chẳng hạn,	Chẳng hạn,
371	12, 13dl	$f(x^\circ)$	$\Delta f(x^\circ)$
374	7	điểm dừng $d^2u < 0$	$d^2u < 0$