ĐỀ 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20201

Khóa: K64. Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1131. Thời gian: 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.***

Câu 1. (2 *điểm*) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2^n}{n^2+3^n}$.   **b)** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n+(-1)^n n}{n\sqrt{n}}$.

Câu 2. (1 *điểm*) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} x^n$.

Câu 3. (1 *điểm*) Khai triển $f(x)=\ln\left(\frac{3+x}{\sqrt{1-x}}\right)$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 4. (4 *điểm*) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$.

b) $y'+2y=y^3e^x,\ y(0)=-1$.

c) $y''-6y'+8y=4xe^{2x}$.

d) $xy''-(4x+1)y'+(3x+1)y=0$, biết một nghiệm riêng có dạng $y_1=e^{ax}$, $a\in\mathbb{R}$.

Câu 5. (1 *điểm*) Tính $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\frac{2}{s}\right\}(t)$.

Câu 6. (1 *điểm*) Sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:

$$x''+4x=\begin{cases}\sin t, & \text{nếu } 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ \cos t, & \text{nếu } t\ge\frac{\pi}{2}\end{cases},\quad x(0)=x'(0)=0.$$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $u_n = \dfrac{n^3+2^n}{n^2+3^n} > 0,\ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi dương.

Ta có: $u_n = \dfrac{n^3+2^n}{n^2+3^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, mà $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ hội tụ (do $|q| = \left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin n + (-1)^n n}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

+) Xét $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}$. Ta có: $0 \le \left|\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| \le \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}},\ \forall n \ge 2,$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ (vì $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1) \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right|$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối **(1)**.

+) Xét $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ta có:

(+) $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0,\ \forall n \ge 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu.

(+) $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = v_{n+1},\ \forall n \ge 2 \Rightarrow \{v_n\}$ là dãy đơn điệu giảm khi $n \to \infty$.

(+) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz **(2)**.

Từ **(1)** và **(2)** $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin n + (-1)^n n}{n\sqrt{n}}$ hội tụ.

Câu 2. Ta có: $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n},\ \forall n \ge 1$. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa là:

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{(1-0)^2}=1.$$

$\Rightarrow$ khoảng hội tụ $(-1;\ 1)$.

– Xét tại điểm $x=1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

Vì $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-2}=e^{-2}\neq 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$ phân kỳ vì **không** thoả mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

– Xét tại điểm $x=-1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}(-1)^n$.

Vì $\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}(-1)^n\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=e^{-2}\neq 0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}(-1)^n\neq 0$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}(-1)^n$ phân kỳ vì **không** thoả mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $(-1;\ 1)$.

Câu 3. Điều kiện: $-3<x<1$.

$$f(x)=\ln\left(\frac{3+x}{\sqrt{1-x}}\right)=\ln(3+x)-\ln\sqrt{1-x}=\ln\left[3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right]-\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right),\ \ \forall\left|\frac{x}{3}\right|<1\ \wedge\ |x|<1$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\frac{1}{2}\right)x^n,\ |x|<1.$$

Đây chính là khai triển Maclaurin cần tìm.

Câu 4.

a) $(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$. Phương trình **không** có nghiệm dạng $x=C$ nên $\mathrm{d}x\neq 0$.

$$\Rightarrow(4x-y)+(x+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow 4-\frac{y}{x}+\left(1+\frac{y}{x}\right)y'=0.$$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$. Phương trình trở thành:

$$4-u+(1+u)(u'x+u)=0\Leftrightarrow (1+u)u'x+4-u+(1+u)u=0$$

$$\Leftrightarrow (1+u)u'x=-(u^2+4)\Leftrightarrow \frac{1+u}{u^2+4}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{x}\Leftrightarrow \frac{1+u}{u^2+4}\mathrm{d}u=\frac{-\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{u^2+4}+\frac{u}{u^2+4}\right)\mathrm{d}u=\int\frac{-\mathrm{d}x}{x}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(u^2+4\right)=-\ln|x|+C$$

$$\Leftrightarrow \arctan\frac{u}{2}+\ln\left(u^2+4\right)+2\ln|x|=2C$$

Thay $y=\dfrac{y}{x}$ ta có $\arctan\dfrac{y}{2x}+\ln\left(\dfrac{y^2}{x^2}+4\right)+2\ln|x|=2C$ là tích phân tổng quát của phương trình.

b) $y'+2y=y^3e^x$. **(1)**

Mặc dù $y=0$ là một nghiệm của phương trình này, nhưng nó lại **không** thoả mãn điều kiện $y(0)=-1\Rightarrow y=0$ **không** là nghiệm cần tìm.

Với $y\neq 0$, chia hai vế của **(1)** cho $\dfrac{-y^3}{2}$ ta có: $\dfrac{-2y'}{y^3}-\dfrac{4}{y^2}=-2e^x$.

Đặt $z=\dfrac{1}{y^2}\Rightarrow z'=\dfrac{-2y'}{y^3}$. Phương trình trên trở thành: $z'-4z=-2e^x$.

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p(x)=-4,\ q(x)=-2e^x$.

Nghiệm tổng quát:

$$z=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=e^{\int 4\mathrm{d}x}\left[C+\int\left(-2e^x\right)e^{\int(-4)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=e^{4x}\left[C-\int 2e^xe^{-4x}\mathrm{d}x\right]=e^{4x}\left(C-\int 2e^{-3x}\mathrm{d}x\right)=e^{4x}\left(C+\frac{2}{3}e^{-3x}\right)=Ce^{4x}+\frac{2}{3}e^x.$$

Thay $z=\dfrac{1}{y^2}\Rightarrow\dfrac{1}{y^2}=Ce^{4x}+\dfrac{2}{3}e^x$.

Theo bài ra, $y(0)=-1\Rightarrow\dfrac{1}{(-1)^2}=Ce^0+\dfrac{2}{3}e^0\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{3}e^{4x}+\dfrac{2}{3}e^x$ là tích phân riêng cần tìm.

c) $y'' - 6y' + 8y = 4xe^{2x}$.

+) Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 4$.

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

+) Do $f(x) = 4xe^{2x}$, trong đó $\lambda = 2$ là nghiệm của phương trình đặc trưng

$\Rightarrow$ tìm nghiệm riêng có dạng: $Y = x(A + Bx)e^{2x} = e^{2x}\left(Ax + Bx^2\right)$.

$\Rightarrow Y' = e^{2x}\left[2\left(Ax + Bx^2\right) + A + 2Bx\right] = e^{2x}\left[A + (2A + 2B)x + 2Bx^2\right]$

$\Rightarrow Y'' = e^{2x}\left(2\left[A + (2A + 2B)x + 2Bx^2\right] + 2A + 2B + 4Bx\right)$

$= e^{2x}\left[4B + 2B + (4A + 8B)x + 4Bx^2\right]$.

Thay vào phương trình ban đầu, ta có:

$$e^{2x}\left[4B + 2B + (4A + 8B)x + 4Bx^2\right] - 6e^{2x}\left[A + (2A + 2B)x + 2Bx^2\right] +$$
$$+ 8e^{2x}\left[A + (2A + 2B)x + 2Bx^2\right] = 4xe^{2x}$$

$\Leftrightarrow \left[(2B - 2A) - 4Bx\right]e^{2x} = 4xe^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B - 2A = 0 \\ -4B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow Y = e^{2x}\left(-x - x^2\right)$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - \left(x + x^2\right)e^{2x}.$$

d) $xy'' - (4x + 1)y' + (3x + 1)y = 0$ **(1)**

Một nghiệm riêng có dạng $y_1 = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (y_1)' = ae^{ax} \Rightarrow (y_1)'' = a^2 e^{ax}$.

Thay vào **(1)** ta có: $x.a^2 e^{ax} - (4x + 1)ae^{ax} + (3x + 1)e^{ax} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left[\left(a^2 - 4a + 3\right)x + (1 - a)\right]e^{ax} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ 1 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

$\Rightarrow$ một nghiệm riêng là $y_1 = e^x$. Ta có:

(1) $\Rightarrow y'' - \left(4 + \dfrac{1}{x}\right)y' + \left(3 + \dfrac{1}{x}\right)y = 0$.

Với $p(x) = -4 - \dfrac{1}{x}$, áp dụng công thức Liouville:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x = e^x \int \frac{e^{\int\left(4 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}}{e^{2x}}\mathrm{d}x = e^x \int \frac{e^{4x + \ln|x|}}{e^{2x}}\mathrm{d}x = e^x \int |x| e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$= e^x \operatorname{sgn}(x)\int xe^{2x}\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sgn}(x)\int x\mathrm{d}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) = e^x \operatorname{sgn}(x)\cdot\left(\frac{xe^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x\right)$$

$$= e^x \operatorname{sgn}(x)\cdot\left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{4}e^{3x}(2x-1).$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^x + C_2\frac{\operatorname{sgn}(x)}{4}e^{3x}(2x-1).$$

Đặt $C_3 = C_2\dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{4} \Rightarrow y = C_1e^x + C_3e^{3x}(2x-1)$ là nghiệm tổng quát cần tìm.

Câu 5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{2}{s}\right\}(t) = \dfrac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\arctan\dfrac{2}{s}\right)\right\}(t) = \dfrac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{-2}{s^2}}{1+\left(\frac{2}{s}\right)^2}\right\}(t)$

$$= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s^2+2^2}\right\}(t) = \frac{-1}{t}\cdot(-\sin 2t) = \frac{\sin 2t}{t}.$$

Vậy $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{2}{s}\right\}(t) = \dfrac{\sin 2t}{t}$.

Câu 6. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{nếu } 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos t, & \text{nếu } t \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases} = \left[1 - u\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\sin t + u\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos t,\ t \ge 0.$

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \mathscr{L}\left\{\left[1-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin t + u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t\right\}(s)$$

$$= \mathscr{L}\left\{\sin t - u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] + u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\right\}(s)$$

$$= \frac{1}{s^2+1^2} + e^{\frac{-\pi}{2}s}\mathscr{L}\left\{-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}(s)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{\frac{-\pi}{2}s}\mathscr{L}\{-\cos t - \sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{\frac{-\pi}{2}s}\left(\frac{-s}{s^2+1^2} - \frac{1}{s^2+1^2}\right)$$

$x'' + 4x = f(t),\quad x(0) = x'(0) = 0$. Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$.

Tác động biến đổi Laplace lên phương trình trên với điều kiện ban đầu, ta có:

$$s^2X(s)+4X(s)=\frac{1}{s^2+1}-e^{\frac{-\pi s}{2}}\left(\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{1}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}-e^{\frac{-\pi s}{2}}\left(\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right)\ \textbf{(*)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right\}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3\left(s^2+1^2\right)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\right\}(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right\}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{3\left(s^2+1^2\right)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}\right\}(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t.$$

Tác động biến đổi Laplace ngược lên **(*)**, ta có:

$$x(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right\}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$$

$$-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}\cos\left(2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{3}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{6}\sin\left(2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin t}{3}+\frac{\cos 2t}{3}-\frac{\cos t}{3}+\frac{\sin 2t}{6}\right).$$

Đây chính là nghiệm cần tìm của phương trình đã cho.