6332009521 นายชินพัทธ์ นิธิพรศรี

1.1 1) จาก $X[0] = 3$, $X[1] = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$, $X[2] = -2$, $X[3] = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

จาก $x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]\, e^{j(2\pi/4)nk}$

$$= \frac{1}{4}\left(3 + e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{jn\frac{\pi}{2}} - 2e^{jn\pi} + e^{j\frac{\pi}{4}}e^{jn\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3 - 2\cos(n\pi) + 2\left(\frac{e^{j(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{\cos(n\pi)}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2} \quad \#$$

2) จาก $X[0] = -2$, $X[1] = \sqrt{3} + j1$, $X[2] = 3$, $X[3] = \sqrt{3} - j1$

จาก $x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]\, e^{j(2\pi/4)nk}$

$$= \frac{1}{4}\left(-2 + 2e^{j\frac{\pi}{6}}e^{jn\frac{\pi}{2}} + 3e^{jn\pi} + 2e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{jn\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2 + 3\cos(n\pi) + 4\left(\frac{e^{j(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})} + e^{-j(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})}}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3\cos(n\pi)}{4} + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \quad \#$$

3) จาก $X[0] = 1$, $X[1] = 2 - j2\sqrt{3}$, $X[2] = -3$, $X[3] = 2 + j2\sqrt{3}$

จาก $x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]\, e^{j(2\pi/4)nk}$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 4e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{jn\frac{\pi}{2}} - 3e^{jn\pi} + 4e^{j\frac{\pi}{3}}e^{jn\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 3\cos(n\pi) + 8\left(\frac{e^{j(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} + e^{-j(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3\cos(n\pi)}{4} + 2\cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \quad \#$$

2.1 1) ต้องการหา DTFT ของ $n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

หา DTFT ของ $a^{|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^{n} + \sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\omega})^{m}$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1-ae^{j\omega}+ae^{j\omega}-a^2}{1-ae^{j\omega}-ae^{-j\omega}+a^2}$$

$$= \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$$

จะได้ $n a^{|n|} \xleftrightarrow{DTFT} j\, d\left(\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}\right)/d\omega = -j\,\frac{(1-a^2)(2a\sin(\omega))}{(1-2a\cos(\omega)+a^2)^2}$ (differentiation in frequency)

$$n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{DTFT} \frac{-j12\sin(\omega)}{(5-3\cos(\omega))^2}$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{-j12\sin(\omega)}{(5-3\cos(\omega))^2} \quad \#$$

6332009521 นายชินพัทร์ นิรินพรศรี

2) ต้องการหา DTFT ของ $a^n\cos(\Omega_0 n)\cdot u[n]$, $|a|<1$

จาก DTFT ของ $a^n u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

นั่นคือ $a^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$e^{j\Omega_0 n} a^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\Omega_0)}}$ (frequency shifting)

และ $e^{-j\Omega_0 n} a^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\Omega_0)}}$ (frequency shifting)

จะได้ $\left(\frac{e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}}{2}\right) a^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\Omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\Omega_0)}}\right)$ (linearity)

$a^n\cos(\Omega_0 n)\cdot u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\Omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\Omega_0)}}\right)$

$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\Omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\Omega_0)}}\right)$ #

3) ต้องการหา DTFT ของ $(n+1)a^n\cdot u[n]$, $|a|<1$

จาก $a^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

และ $na^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} jd\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)/d\omega$ (differentiation in frequency)

$= \frac{ae^{j\omega}}{(a-e^{j\omega})^2}$

จะได้ $(n+1)a^n\cdot u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{ae^{j\omega}}{(a-e^{j\omega})^2} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j2\omega}}{(a-e^{j\omega})^2}$

$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{e^{j2\omega}}{(a-e^{j\omega})^2}$ #