

Θεώρημα Thevenin - Norton

Κλάιντι Τσάμη

Περίληψη:

Η παρούσα εργασία αφορά την εφαρμογή και την αξιολόγηση των θεωρημάτων των Thevenin και Norton στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Με σκοπό την πληρέστερη κατανόηση της λειτουργίας και την ευκολότερη ανάλυση περίπλοκων κυκλωμάτων, υιοθετήθηκε μια προσέγγιση όπου αναλύθηκαν διάφορα κυκλώματα μέσω της απλοποίησης σε ισοδύναμες πηγές. Η μεθοδολογία περιλάμβανε τόσο θεωρητικούς υπολογισμούς όσο και πρακτική εφαρμογή σε εργαστηριακό περιβάλλον, με τα αποτελέσματα να αντανακλούν υψηλή συσχέτιση μεταξύ θεωρίας και πράξης. Η εργασία επιβεβαιώνει την πρακτική χρησιμότητα των θεωρημάτων στην αποδοτική ανάλυση και σχεδίαση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Εισαγωγή:

Η παρούσα εργαστηριακή άσκηση εκτελέστηκε με στόχο τη μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος μέσω των θεωρημάτων Thevenin - Norton. Με τη χρήση αυτών των θεωρημάτων, μπορούμε να εντοπίσουμε το ισοδύναμο κύκλωμα ενός αρχικά περίπλοκου κυκλώματος, το οποίο θα διατηρεί τα ίδια χαρακτηριστικά αλλά θα είναι σημαντικά πιο απλό. Μέσα από την εκτέλεση αυτής της εργαστηριακής άσκησης, δεν αποκτούμε μόνο τις γνώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό του ισοδύναμου κυκλώματος κατά Thevenin - Norton, αλλά επίσης αναπτύσσουμε την κατανόηση για το πώς μπορούμε να μετασχηματίσουμε κάτι περίπλοκο σε κάτι πολύ πιο απλό μέσω των μετασχηματισμών. Συνολικά, η εργαστηριακή άσκηση αυτή προσφέρει μια εκπαιδευτική εμπειρία που υπερβαίνει την απλή μελέτη θεωρητικών αρχών και μας εξοπλίζει με τις γνώσεις και τις δεξιότητες που είναι απαραίτητες για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων στον τομέα της ηλεκτρονικής και ηλεκτρικής τεχνολογίας.

Θεωρία:

Για την μαθηματική μελέτη της εργαστηριακής άσκησης αυτής χρειάζονται κάποιες βασικές θεωρίες και εξισώσεις η οποίες αναγράφονται και αριθμούνται παρακάτω.

Καταρχάς, εάν σε ένα κύκλωμα έχουμε συνδέσει πολλές αντιστάσεις σε σειρά, το ρεύμα που διαπερνά κάθε αντίσταση είναι το ίδιο, αυτό διότι το ρεύμα έχει μόνο μία διαδρομή. Η συνολική αντίσταση στο κύκλωμα αυτό θα είναι το άθροισμα των αντιστάσεων. Για παράδειγμα, εάν στο κύκλωμα συνδέονται σε σειρά η αντιστάσεις, τότε η συνολική αντίσταση θα ισούται με:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (1)$$

Από την άλλη εάν οι η αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα τότε για την συνολική αντίσταση θα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.1)$$

Νόμος του Ohm:

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm η τάση στα άκρα ενός κυκλώματος ισούται με το γινόμενο της τιμής της αντίστασης επί την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Δηλαδή: $V = I \cdot R$ (2)

Θα χρειαστεί παρακάτω επίσης και επίλυση κυκλώματος μέσω της μεθόδου των βροχών. Γενικότερα βρόχος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι τύπος κλειστής διαδρομής που δεν περιέχει άλλη κλειστή διαδρομή. Παραδείγματος χάρη για ένα κύκλωμα το οποίο έχει 2 βρόχους και 2 τάσης E_1 και E_2 , η γενίκευση της μεθόδου των βροχών παρουσιάζεται από τον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Όπου :

R_{11} : Το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στον βρόχο 1

R_{22} : Το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στον βρόχο 2

$R_{12} = R_{21}$: Το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους 1 και 2

Και i_a, i_b τα υποθετικά ρεύματα βρόχων

Επιπλέον, επειδή πρόκειται να συγκριθούν πειραματικές τιμές με θεωρητικές (ονομαστικές), απαιτείται η χρήση μιας σχέσης για την απόκλιση των τιμών αυτών. Αυτή η σχέση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

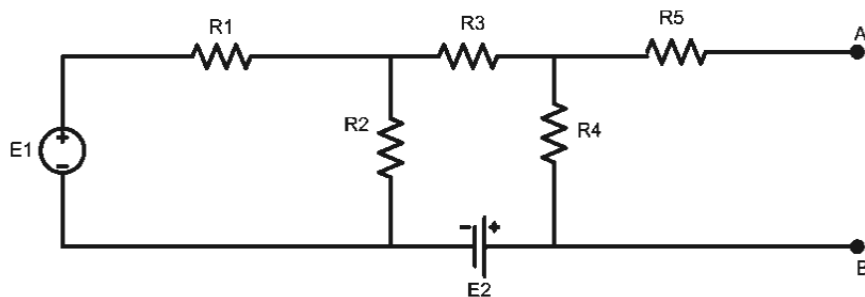
$$\% \text{ απόκλιση} = \frac{\text{ονομ. τιμή} - \text{πειρ. τιμή}}{\text{ονομ. τιμή}} \quad (4)$$

Πειραματική διαδικασία:

Τα βασικά ηλεκτρονικά εξαρτήματα που θα χρειαστούν για την υλοποίηση της εργαστηριακής ασκήσεως είναι τα παρακάτω:

- Πηγή τάσης
- Μπαταριά 2 V
- Πλακέτα διασύνδεσης (breadboard)
- Πολύμετρο
- Αντιστάτες (2 x 1 kΩ, 2 x 1.5 kΩ , 3.3 kΩ)
- Και διάφορα καλώδια για την διασύνδεση των εξαρτημάτων αυτών

1) Στο πρώτο μέρος της εργαστηριακής άσκησης θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω κύκλωμα (Εικόνα 2) και να υπολογίσουμε πειραματικά αλλά και θεωρητικά το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα καθώς και το ισοδύναμο κατά Norton.



Εικόνα 2

Καταρχάς λοιπόν πάμε και συνδέουμε της αντιστάσεις ($R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,5\text{ k}\Omega$, $R_4 = 3,3\text{ k}\Omega$ και $R_5 = 1,5\text{ k}\Omega$) πάνω στο breadboard όπως φαίνεται στην εικόνα 2. Έπειτα συνδέουμε την πηγή τάσης $E_1 = 12\text{ V}$ στα άκρα των αντιστάσεων R_1 και R_2 και την μπαταριά των $E_2 = 3\text{ V}$ στα άκρα των αντιστάσεων R_2 και R_4 .

Για να υπολογίσουμε την τάση V_{th} , δηλαδή την συνολική τάση του κυκλώματος πειραματικά αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να πάρουμε το πολύμετρο ως βολτόμετρο και να το συνδεσουμε στα άκρα A και B του κυκλώματος. Η τιμή που εμφάνισε το πολύμετρο για την πειραματική μέτρηση αυτή ήταν:

$$V_{th} = 1.8\text{ V}$$

Έπειτα για να υπολογίσουμε την αντίσταση R_{th} , δηλαδή την συνολική αντίσταση του κυκλώματος, αυτό που πρέπει αρχικά να κάνουμε είναι να βραχυκυκλώσουμε της τάσης E_1 και E_2 . Εφόσον το έχουμε κάνει αυτό απλά ομομετρούμε με το πολύμετρο τα άκρα A και B. Η τιμή που εμφάνισε το πολύμετρο για την πειραματική μέτρηση αυτή ήταν:

$$R_{th} = 2.72\text{ k}\Omega$$

Τέλος για να βρούμε το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Norton δηλαδή για να βρούμε το I_N θα πρέπει απλά να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ohm, σύμφωνα λοιπόν με την σχέση (2) θα ισχύει ότι:

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{1.8}{2.72 \cdot 10^3} = 0.66\text{ mA} \Rightarrow I_N = 0.66\text{ mA}$$

Της παραπάνω τιμές φυσικά μπορούμε να της βρούμε θεωρητικά λύνοντας το κύκλωμα. Η τάση για παράδειγμα V_{th} μπορεί να βρεθεί μέσω της μεθόδου των βρόχων, αν θεωρήσουμε ότι ο βρόχος της E_1 διαρρέετε από το υποθετικό ρεύμα i_α και ο βρόχος της E_2 διαρρέεται από το υποθετικό ρεύμα i_b . Τότε ο πίνακας (3) σύμφωνα με την θεωρία θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(R_1 + R_2) \cdot i_\alpha - R_2 \cdot i_b = E_1 \Rightarrow 2 \cdot 10^3 \cdot i_\alpha - 10^3 \cdot i_b = 12 \Rightarrow 10^3 \cdot i_b = 2 \cdot 10^3 \cdot i_\alpha - 12$$

$$\Rightarrow i_b = 2 \cdot i_\alpha - 12 \cdot 10^{-3} \quad (5)$$

και

$$-R_2 \cdot i_\alpha + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot i_b = -E_2 \Rightarrow -10^3 \cdot i_\alpha + 5.8 \cdot 10^3 \cdot i_b = -3$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} -10^3 \cdot i_\alpha + 5.8 \cdot 10^3 (2 \cdot i_\alpha - 12 \cdot 10^{-3}) = -3 \Rightarrow -10^3 \cdot i_\alpha + 11.6 \cdot 10^3 \cdot i_\alpha - 69.6 = -3$$

$$\Rightarrow 10.6 \cdot 10^3 \cdot i_\alpha = 66.6 \Rightarrow i_\alpha = 66.6 / 10.6 \cdot 10^{-3} = 6.28 \cdot 10^{-3} A \Rightarrow i_\alpha = 6.28 \cdot 10^{-3} A$$

και

$$(4) \Rightarrow i_b = 2 \cdot i_\alpha - 12 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 6.28 \cdot 10^{-3} - 12 \cdot 10^{-3} = 0.56 \cdot 10^{-3} A \Rightarrow i_b = 0.56 \cdot 10^{-3} A$$

και τελικά :

$$V_{th} = i_b \cdot R_4 = 0.56 \cdot 10^{-3} \cdot 3.3 \cdot 10^3 = 1.85 \Rightarrow V_{th} = 1.85 V$$

Για την συνολική αντίσταση R_{th} θα ισχύει το εξής:

Καταρχάς η αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι παράλληλα και όπως αποδείχθηκε παραπάνω $R_{1,2} = 0.5 \cdot 10^3 \Omega$, επίσης και η αντίσταση R_3 με την R_4 είναι παράλληλα συνδεδεμένες και $R_{3,4} = 1.04 \cdot 10^3 \Omega$.

$$\frac{1}{R_{3,4}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{1.5 \cdot 10^3} + \frac{1}{3.3 \cdot 10^3} = 0.96 \cdot 10^{-3} \Rightarrow R_{3,4} = 1.04 \cdot 10^3 \Omega$$

Τέλος η $R_{1,2}$, $R_{3,4}$ και R_5 είναι σε σειρά οπότε θα ισχύει:

$$R_{th} = R_{1,2} + R_{3,4} + R_5 = 0.5 \cdot 10^3 + 1.04 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 10^3 = 3.04 \cdot 10^3 \Omega \Rightarrow R_{th} = 3.04 \cdot 10^3 \Omega$$

Τέλος το I_N θα βρεθεί μέσω του νομου του ohm από της 2 παραπάνω τιμές, δηλαδή:

$$I_N = V_{th} / R_{th} = 1.85 / 3.04 \cdot 10^3 = 0.61 \cdot 10^{-3} A = 0.61 mA \Rightarrow I_N = 0.61 mA$$

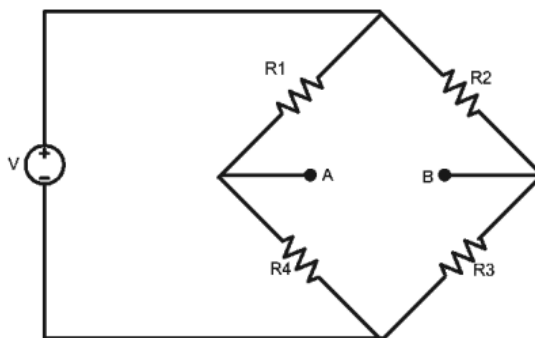
Για να βρούμε την απόκλιση των πειραματικών τιμών με των θεωρητικών θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3):

$$\% \text{ απόκλιση}(V_{th}) = \frac{1.85 - 1.8}{1.8} \cdot 100 = 0.05/2 \cdot 100 = 0.025 \cdot 100 = 2.5 \%$$

$$\% \text{ απόκλιση}(R_{th}) = \frac{3.04 - 2.72}{3.04} \cdot 100 = 0.32/3.04 \cdot 100 = 0.11 \cdot 100 = 11 \%$$

$$\% \text{ απόκλιση}(I_N) = \frac{0.61 - 0.66}{0.61} \cdot 100 = -0.05/0.61 \cdot 100 = -0.08 \cdot 100 = -8 \%$$

2) Στο δεύτερο μέρος της εργαστηριακής άσκησης θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε το παρακάτω κύκλωμα (Εικόνα 3), να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin – Norton και πειραματικά και θεωρητικά και να συγκρίνουμε όπως έγινε παραπάνω της τιμές αυτές:



Εικόνα 3

Καταρχάς λοιπόν πάμε και συνδέουμε της αντιστάσεις ($R_1 = 1.5\text{ k}\Omega$, $R_2 = 3.3\text{ k}\Omega$ και $R_3 = R_4 = 1\text{ k}\Omega$) πάνω στο breadboard όπως φαίνεται στην εικόνα 2. Έπειτα συνδέουμε την πηγή τάσης $V = 12\text{V}$ στα άκρα των αντιστάσεων R_1, R_2 και R_3, R_4 .

Για να υπολογίσουμε την τάση V_{th} , δηλαδή την συνολική τάση του κυκλώματος πειραματικά αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να πάρουμε το πολύμετρο ως βολτόμετρο και να το συνδεσουμε στα άκρα A και B του κυκλώματος. Η τιμή που εμφάνισε το πολύμετρο στην πειραματική μέτρηση αυτή ήταν:

$$V_{th} = 1.99\text{ V}$$

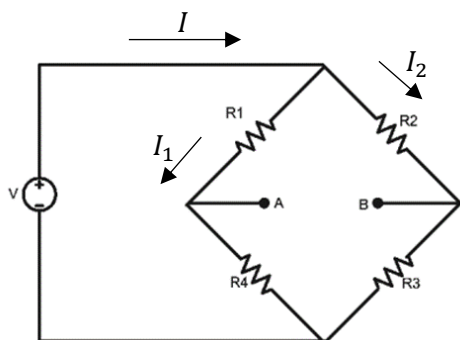
Έπειτα για να υπολογίσουμε την αντίσταση R_{th} , δηλαδή την συνολική αντίσταση του κυκλώματος, αυτό που πρέπει αρχικά να κάνουμε είναι να βραχυκυκλώσουμε την τάση V. Εφόσον το έχουμε κάνει αυτό απλά ομομετρούμε με το πολύμετρο τα άκρα A και B. Η τιμή που εμφάνισε το πολύμετρο για την πειραματική μέτρηση αυτή ήταν:

$$R_{th} = 1.39\text{ k}\Omega$$

Τέλος για να βρούμε το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Norton δηλαδή για να βρούμε το I_N θα πρέπει απλά να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ohm, σύμφωνα λοιπόν με την σχέση (2) θα ισχύει ότι:

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{1.99}{1.39 \cdot 10^3} = 1.43\text{ mA} \Rightarrow I_N = 1.43\text{ mA}$$

Για να βρούμε θεωρητικά την V_{th} θα πρέπει να λύσουμε το κύκλωμα ως εξής:



Σύμφωνα με τον 1^ο κανόνα Kirchhoff θα ισχύει ότι :

$$I = I_1 + I_2 \quad (6)$$

Από τον νόμο του Ohm όμως θα ισχύει ότι:

$$I = V/R_{o\lambda} = 12/1.59 = 7.55\text{ mA}$$

$$\begin{aligned} 1/R_{o\lambda} &= 1/R_{1,4} + 1/R_{2,3} = 1/(R_1 + R_4) + 1/(R_2 + R_3) = \\ &= 1/2.5 + 1/4.3 = 0.63 \Rightarrow R_{o\lambda} = 1/0.63 = 1.59\text{ k}\Omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_{o\lambda} = 1.59 \text{ k}\Omega$$

Επειδή στο κύκλωμα ισχύει ότι $V_{1,4} = V_{2,3}$ αφού είναι παράλληλα θα ισχύει το εξής:

$$V_{1,4} = V_{2,3} \Rightarrow I_1 \cdot R_{1,4} = I_2 \cdot R_{2,3} \Rightarrow I_1/I_2 = 4.3/2.5 = 1.72 \Rightarrow I_1 = 1.72 \cdot I_2 \quad (7)$$

$$(6) \stackrel{(7)}{\Rightarrow} 7.55 = 1.72 \cdot I_2 + I_2 = 2.72 \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = 7.55/2.72 = 2.78 \text{ mA} \Rightarrow I_2 = 2.78 \text{ mA}$$

Και

$$(6) \Rightarrow I_1 = 1.72 \cdot 2.78 = 4.78 \Rightarrow I_1 = 4.78 \text{ mA}$$

Τελικά για το V_{th} θα ισχύει ότι:

$$V_{th} = I_1 \cdot R_4 - I_2 \cdot R_3 = 4.78 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3 - 2.78 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3 = 2 \text{ V} \Rightarrow V_{th} = 2 \text{ V}$$

$$1/R_{th} = 1/R_{1,2} + 1/R_{4,3} = 1/(R_1 + R_2) + 1/(R_4 + R_3) =$$

$$= 1/4.8 + 1/2 = 0.71 \Rightarrow R_{o\lambda} = 1/0.71 = 1.41 \text{ k}\Omega$$

$$\Rightarrow R_{th} = 1.41 \text{ k}\Omega$$

Τέλος το I_N θεωρητικό θα βρεθεί από τον νόμο του Ohm:

$$I_N = V_{th}/R_{th} = 2/1.41 = 1.42 \text{ mA} \Rightarrow I_N = 1.42 \text{ mA}$$

Ομοίως για να βρούμε την απόκλιση των πειραματικών τιμών με των θεωρητικών θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3):

$$\% \text{ απόκλιση}(V_{th}) = \frac{2 - 1.99}{2} \cdot 100 = 0.01/2 \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-1} \%$$

$$\% \text{ απόκλιση}(R_{th}) = \frac{1.59 - 1.39}{1.59} \cdot 100 = 0.2/1.59 \cdot 100 = 0.13 \cdot 100 = 13 \%$$

$$\% \text{ απόκλιση}(I_N) = \frac{1.42 - 1.43}{1.26} \cdot 100 = -0.01/1.26 \cdot 100 = -8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = -0.8 \%$$

Συμπεράσματα:

Η παρούσα πειραματική εργασία επικεντρώθηκε στην εφαρμογή των θεωρημάτων των Thevenin και Norton σε ηλεκτρικά κυκλώματα. Η αξία των θεωρημάτων αυτών αποδείχθηκε ανεκτίμητη, καθώς μας επέτρεψαν να απλοποιήσουμε σύνθετα κυκλώματα σε ισοδύναμες πηγές τάσης και ρεύματος, κάτι που διευκόλυνε την ανάλυση και την κατανόηση τους. Επιπλέον, η συσχέτιση των πειραματικών αποτελεσμάτων με τις θεωρητικές προβλέψεις ήταν εξαιρετικά στενή, επιβεβαιώνοντας την ακρίβεια των μετρήσεων και την εγκυρότητα των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν. Τα ευρήματα αυτά υπογραμμίζουν τη σημασία των θεωρημάτων Thevenin και Norton ως ισχυρά εργαλεία για τη μελέτη και την εφαρμογή στα ηλεκτρικά κυκλώματα.