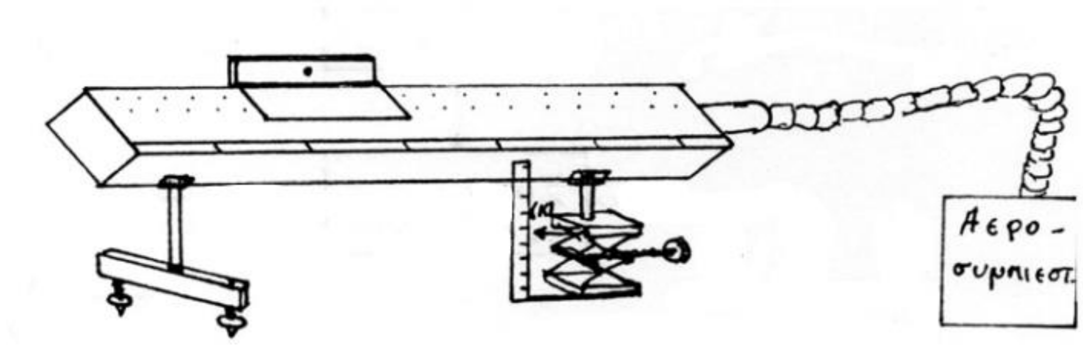
Εργαστηριακές Ασκήσεις Γενικής Φυσικής

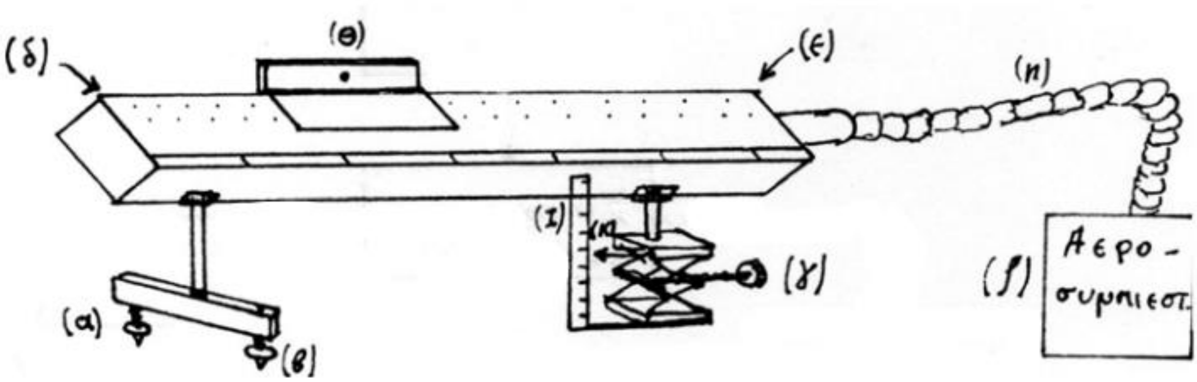
Εργασία 6

(Αεροδιάδρομος)



Εισαγωγή

Η εργασία αυτή αφορά 7 πειράματα μελέτης κίνησης ενός σώματος σε ευθύγραμμη τροχιά που διεξήχθησαν σε εργαστήριο της σχολής θετικών επιστημών του ΑΠΘ στο μάθημα εργαστηριακές ασκήσεις φυσικής. Για την προσέγγιση της ευθύγραμμης κίνησης του σώματος χρησιμοποιήθηκε η διάταξη του αεροδιάδρομου (Σχήμα 1) ενώ χρησιμοποιήθηκε και ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής ο οποίος έπαιρνε δεδομένα από τον αεροδιάδρομο και τύπωνε τα πειραματικά δεδομένα του χρόνου και της θέσης του σώματος στην οθόνη.



Σχήμα 1

Ο αεροδιάδρομος του σχήματος 1 αποτελείτε από :

1) Έναν κλειστό μεταλλικό σωλήνα ορθογώνιας διατομής ο οποίος εκτίνετε από το (δ) εώς το (ε) στο σχήμα 1.

    1.1) Στην άκρες (δ) και (ε) είχαν τοποθετηθεί καταλληλά λαστιχάκια ώστε ο ιππέας να γυρίζει στον σωλήνα ορθογώνιας διατομής χωρίς να έχει μεταβληθεί η ταχύτητα του σε μεγάλο βαθμό, καθώς μέσω της κρούσης του ιππέα με το λαστιχάκι προσεγγίζουμε σε μεγάλο βαθμό ελαστική κρούση.
    1.2) Ο σωλήνας αυτός έχει πάνω του μικρές τρυπούλες στην οποίες μπορεί να βγαίνει ο αέρας που διοχετεύεται μέσω του σωλήνα (η).
    1.3) Από της δυο πάνω μεριές του έχει αισθητήρες που εκτείνονται από την μια άκρη στην άλλη. Οι αισθητήρες αυτοί στέλνουν μέσω καλώδιού στον υπολογιστή ένα σήμα ώστε να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την θέση και τον χρόνο του ιππέα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
    1.4) Έχει ακόμη την δυνατότητα οριζοντιώσεως και αλλαγής της κλήσης του μέσω του συστήματος τριών μικρομέτρων κοχλιών (α),(β),(γ).

2) Τον αεροσυμπιεστή σταθερής παροχής και πίεσης αέρα, ο οποίος μέσω του σωλήνα (η) διοχετεύει αέρα στον σωλήνα ορθογώνιας διατομής.

Για την σύνδεση του αεροδιάδρομου με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η/Υ) χρησιμοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα, οπού λειτουργούσε ως εξής :

Καταρχάς χεριάζετε να σπρώξουμε ελαφρά τον ιππέα από την αριστερή ή δεξιά μεριά του ώστε να αποκτήσει μικρή σχετικά ταχύτητα, πατάμε λοιπόν στον πρόγραμμα πόσες μέτρησης θα θέλαμε να κάνει και μέσω ενός αλλού κουμπιού αρχίζαμε της μετρήσεις. Οι μέτρησης αυτές όταν τελείωνε την καταγραφεί το πρόγραμμα, εμφανίζονταν σε έναν πίνακα τον οποίο και σημειώναμε σε ένα τετράδιο. Να σιμωθεί ότι το πρόγραμμα αυτό καταγράφει την θέση του ιππέα ανά 3cm και την αντίστοιχη χρονική στιγμή στην οποία βρίσκεται σε εκείνη την θέση.

Το πρόγραμμα εμφάνιζε σε μια άλλη σελίδα του και τα διαγράμματα x-t, u-t, a-t και μέσω αυτόν μπορούσαμε να αντλήσουμε σημαντικές πληροφορίες όπως για παράδειγμα την αρχική ταχύτητα U_0 του ιππέα και άλλα.

Για την μαθηματική μελέτη του πειράματος αυτού θα χρειαστούμε την θεωρία σφαλμάτων και την θεωρία ελάχιστων τετράγωνων και τον 1^{ο} και 2^{ο} Νόμο του Νεύτωνα.

Σύμφωνα με την θεωρία σφαλμάτων ως $\boldsymbol{x}$ ορίζουμε οποιαδήποτε τιμή μετράμε στο πείραμα μας, εάν δεν υπήρχαν οι παράγοντες που επηρεάζουν την επαναληψιμότητα των μετρήσεων η τιμή αυτή θα έπαιρνε την μορφή **X**. Λόγο των παραγόντων αυτόν συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει κάποιο σφάλμα **ε** στης μετρήσεις μας, το σφάλμα αυτό ορίζετε ως : $\boldsymbol{x - X = \varepsilon}$ (1) , ακόμα ορίζουμε και το τυπικό σφάλμα **σ** των μετρήσεων μας όπου :

$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}}$ (1.1) , όπου **n** οι συνολικές μετρήσεις.

Παίρνοντας τον μέσο όρο δήγματος : $\boldsymbol{\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$ (1.2)

το σφάλμα του μέσου ορού θα ορίζετε ως εξής **E** = $\boldsymbol{\overline{x} - X}$ (2.3) ενώ η τυπική απόκλιση στο μέσο όρο θα ορίζετε ως :

$\boldsymbol{\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (1.3) .

Τέλος ορίζουμε και την απόκλιση d των μετρήσεων μας όπου :

$\boldsymbol{d_i = x_i - \overline{x}}$ (1.4) .

Για την θεωρία ελαχίστων τετραγώνων καταρχάς θα ορίσουμε ως $\boldsymbol{x_i}$ την θέση του ιππέα ενώ ως t_i η χρονική στιγμή που ο ιππέας βρίσκεται στο $\boldsymbol{x_i}$ αυτό. Σχεδιάζοντας την γραφική παράσταση ($\boldsymbol{x_i}$-$\boldsymbol{t_i}$) χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα του πειράματος μας, μπορούμε σύμφωνα με την θεωρία να βρούμε την ευθεία ελάχιστων τετράγωνων $x = \boldsymbol{\alpha} \cdot t + \boldsymbol{\beta}$ (1.5) της γραφικής παράστασης ως εξής : Καταρχάς θεωρούμε ως $\boldsymbol{\delta_i}$ της αποκλίσεις τον σημείων από την ευθεία αυτή σύμφωνα με την θεωρία , η ζητούμενη ευθεία είναι εκείνη για την οποία το άθροισα S των τετραγώνων των αποκλίσεων $\boldsymbol{S} = \sum \boldsymbol{\delta_i^2} = \sum[\boldsymbol{x_i - (at_i + \beta)}]^{\boldsymbol{2}}$ γίνεται ελάχιστο. Βρίσκοντας τα ελάχιστο της συνάρτησης αυτής και λύνοντας ως προς α και β προκύπτει ότι :

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{n}\cdot\sum(t_i\cdot x_i) - (\sum t_i)\cdot(\sum x_i)}{\mathbf{n}\cdot(\sum {t_i}^{2}) - (\sum t_i)^{2}} \quad (1.6) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\sum {t_i}^{\mathbf{2}} \cdot \sum(x_i) - (\sum t_i)\cdot(\sum(x_i\cdot t_i)}{\mathbf{n}\cdot(\sum {t_i}^{2}) - (\sum t_i)^{2}} \quad (1.7)$$

Επειδή όμως υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ευθείας λόγο αβεβαιότητας στα πειραματικά μας δεδομένα αυτό σημαίνει και την ύπαρξη τυπικής απόκλισης στην τιμή των συντελεστών α και β, η οποία δίνετε από τους παρακάτω τύπους :

$$\boldsymbol{\sigma_\alpha} = s_y \cdot \sqrt{\frac{n}{n\cdot(\sum {t_i}^{2}) - (\sum t_i)^{2}}} \quad (1.8) \qquad \boldsymbol{\sigma_\beta} = s_y \cdot \sqrt{\frac{(\sum {t_i}^{2})}{n\cdot(\sum {t_i}^{2}) - (\sum t_i)^{2}}} \quad (1.9)$$

$$\text{Όπου} \qquad \boldsymbol{s_y} = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum[\boldsymbol{x_i}-(\boldsymbol{at_i}+\boldsymbol{\beta})]^{\,2}}{n-2}} \qquad (2)$$

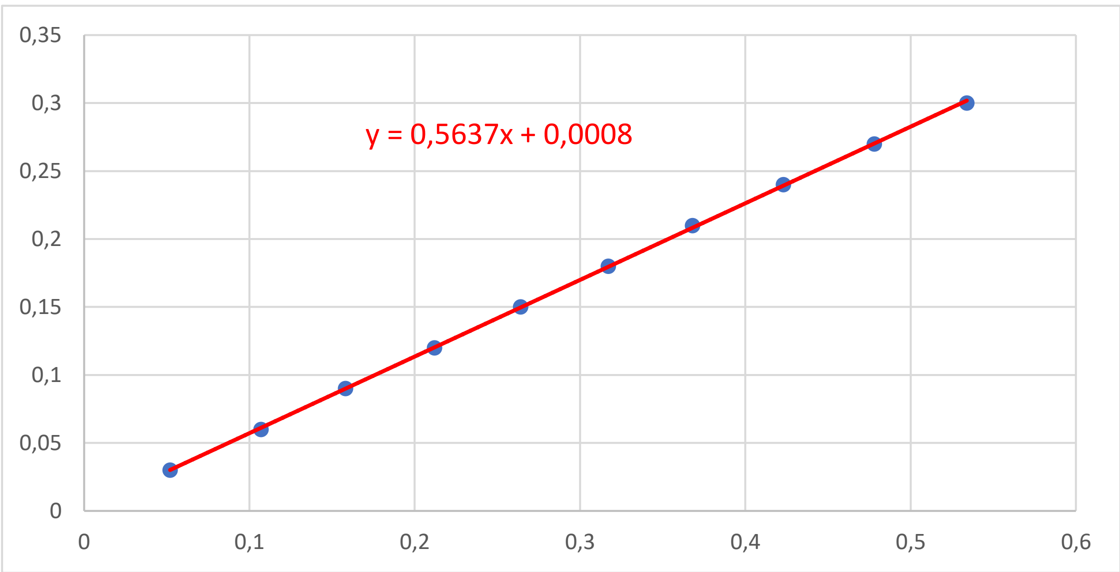
1ο Πείραμα

Το πρώτο πείραμα έχει ως σκοπό την προσέγγιση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης και τον προσδιορισμό της εξίσωσης κίνησης μέσω πειραματικών δεδομένων, για να πέτυχουμε την κίνηση αυτή καταρχάς οριζοντιοποιήσαμε των σωλήνα ορθογώνιας διατομής έτσι ώστε να μην έχει καθόλου κλίση. Αυτό το πετυχαίνουμε βάζοντας τον ιππέα στο κέντρο του σωλήνα και περιστρέφοντας τον κοχλία (γ), όταν λοιπόν ο ιππέας παράμενε στο κέντρο χωρίς να κινηθεί θεωρούμε ότι ο σωλήνας οριζοντιοποιήθηκε. Δίνοντας στον ιππέα λοιπόν μια μικρή σχετικά αρχική ταχύτητα πατάμε στον Η/Υ να μας αποτυπώσει 10 μετρήσεις. Οι μετρήσεις αυτές αποτυπώνονται στον πίνακα 1. Γνωρίζουμε ότι σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα ισχύει ότι :
$\mathrm{U} = {}^{\Delta \mathrm{x}}/_{\Delta \mathrm{t}} \Longrightarrow \Delta\mathrm{x} = \mathrm{U}\cdot\Delta\mathrm{t} \Longrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{U}\cdot\Delta\mathrm{t} + x_0$ (2.1)

α/α	t(s)	x(m)
1	0,052	0,03
2	0,107	0,06
3	0,158	0,09
4	0,212	0,12
5	0,264	0,15
6	0,317	0,18
7	0,368	0,21
8	0,423	0,24
9	0,478	0,27
10	0,534	0,3

Πίνακας 1

Για να αποδείξουμε πειραματικά την σχέση (2.1) θα πρέπει να σχεδιάσουμε αρχικά την γραφική παράσταση x(m)-t(s) (Σχήμα 2) μέσω των πειραματικών δεδομένων του πίνακα 1.



Σχήμα 2

Βρίσκουμε λοιπόν την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων της γραφικής παράστασης του Σχήματος 2 μέσω των σχέσεων (1.6), (1.7) και του πίνακα 1.1 που έχει προκύψει από τον βασικό πίνακα 1 του πειράματος.

n	Σt_i	Σx_i	$\Sigma t_i \cdot x_i$	$\Sigma {t_i}^2$
10	2,913	1,65	0,61236	1,082239

Πίνακας 1.1

Από την σχέση (1.6) προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{\mathrm{n} \cdot \sum(t_i \cdot x_i) - (\sum t_i) \cdot (\sum x_i)}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum {t_i}^2\right) - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 0.61236 - 2.913 \cdot 1.65}{10 \cdot 1.082239 - 2.913^2} = 0.56365 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0.56365}$$

ενώ από την σχέση (1.7) :

$$\beta = \frac{\sum \mathrm{t_i}^2 \cdot \sum(\mathrm{x_i}) - (\sum \mathrm{t_i}) \cdot (\sum(\mathrm{x_i} \cdot \mathrm{t_i}))}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum \mathrm{t_i}^2\right) - (\sum \mathrm{t_i})^2} = \frac{1.082239 * 1.65 - 2.913 * 0.61236}{10 \cdot 1.082239 - 2.913^2} = 0.0008 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0.0008}$$

Η ευθεία που προκύπτει λοιπόν από την θεωρία ελάχιστων τετραγώνων είναι η εξής :

$$x = \alpha \cdot t + \beta \Rightarrow \boldsymbol{x = 0.56365 \cdot t + 0.0008}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την εξίσωση (2.1) που απορρέει από τον 1ο Νομό του Νεύτωνα, εάν της συγκρίνουμε λοιπόν καταλαβαίνουμε ότι καταρχάς η σταθερή ταχύτητα του ιππέα στην κίνηση του αυτή ισούται με $\boldsymbol{U = 0.56365\, {}^{m}/_{s}}$,από την άλλη το β της εξίσωσης αντιστοιχεί στο x_0, θα πρέπει να τονιστεί όμως ότι αν και έχει μικρή τιμή είναι σφάλμα που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 1. Το σφάλμα προκύπτει διότι ο Η/Υ καταγράφει την θέση του ιππέα ανά 3 cm με όχι και τόσο μεγάλη ακρίβεια, μπορούμε να θεωρήσουμε συνεπώς ότι το σφάλμα ε θα ισούται με τουλάχιστον το μισό του 3 cm, $\varepsilon = 1.5$. Δηλαδή για κάθε $\mathrm{x_i}$ θα ισχύει ότι : $\mathbf{x_i} = \textbf{Την τιμή του } \pm \mathbf{1.5}$ (2.2).

2ο Πείραμα

Με το δεύτερο πείραμα έχουμε ως στόχο να προσδιορίσουμε εάν η ανάκρουση του ιππέα στο λάστιχο είναι ελαστική ή όχι. Καταρχάς αφήνουμε σε οριζόντια θέση τον αεροδιάδρομο όπως ήταν στο 1ο πείραμα, έπειτα πάμε και διαλέγουμε στον Η/Υ να μας καταγράψει 100 μετρήσεις. Δίνουμε στον ιππέα μικρή σχετικά αρχική ταχύτητα και λίγο πριν την ανάκρουση πατάμε να αρχίσει η καταγραφεί, έτσι ώστε να την συμπεριλάβουμε κατά την διάρκεια της καταγραφής. Έπειτα πέμπε χωρίς να καταγράψουμε της μετρήσεις της θέσης και του χρόνου στο διάγραμμα u-t του προγράμματος. Εκεί παρατηρούμε ότι σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα η ταχύτητα δεν παραμένει σταθερή σε ευθεία αλλά μειώνετε εκθετικά έως ότου φτάσει μηδέν και έπειτα αυξάνετε εκθετικά μέχρι να προσεγγίσει πάλι την αρχική ευθεία. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι σε εκείνο το χρονικό διάστημα πραγματοποιήθηκε η ανάκρουση του ιππέα με το λάστιχο, οπότε εκεί καταγράφουμε την ταχύτητα που είχε πριν την ανάκρουση και μετά και την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Ξανά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία άλλες 2 φορές και καταγράφουμε τα δεδομένα στον πίνακα 2.

Καταγραφές	U_π(m/s)	t_π (s)	U_μ (m/s)	t_μ (s)
2.1	0,346	1,52	0,338	2,056
2.2	0,394	1,676	0,38	2,164
2.3	0,246	1,831	0,24	2,53

Πίνακας 2

Καταγράψαμε της ταχύτητες πριν και μετά την κρούση διότι πολύ απλά εάν εξετάσουμε την απώλεια της κινητικής ενέργειας του ιππέα θα μπορέσουμε να βγάλουμε το συμπέρασμα εάν τελικά η ανάκρουση είναι ελαστική η όχι. Το ποσοστό απώλειας ενέργειας ισούται με :

$$^{\Delta E}/_{E} \cdot 100\% = ^{K\tau\varepsilon\lambda - K\alpha\rho\chi}/_{K\alpha\rho\chi} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}\cdot m\cdot U_{\mu}^{2} - \frac{1}{2}\cdot m\cdot U_{\pi}^{2}}{\frac{1}{2}\cdot m\cdot U_{\pi}^{2}} \cdot 100\% = \frac{U_{\mu}^{2} - U_{\pi}^{2}}{U_{\pi}^{2}} \cdot 100\% \quad (2.3)$$

Οπότε σύμφωνα με την σχέση (2.3) θα ισχύει για κάθε μια από της καταγραφές ότι :

$$\Pi_{2.1}\% = \frac{U_{\mu}^{2} - U_{\pi}^{2}}{U_{\pi}^{2}} \cdot 100\% = \frac{0{,}338^{2} - 0{,}346^{2}}{0{,}346^{2}} \cdot 100\% = -0{,}0457\%$$

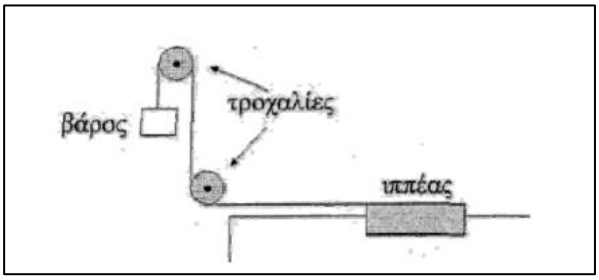
$$\Pi_{2.2}\% = \frac{U_{\mu}^{2} - U_{\pi}^{2}}{U_{\pi}^{2}} \cdot 100\% = \frac{0{,}38^{2} - 0{,}394^{2}}{0{,}394^{2}} \cdot 100\% = -0{,}0698\%$$

$$\Pi_{2.3}\% = \frac{U_{\mu}^{2} - U_{\pi}^{2}}{U_{\pi}^{2}} \cdot 100\% = \frac{0{,}24^{2} - 0{,}246^{2}}{0{,}246^{2}} \cdot 100\% = -0{,}04818\%$$

Όπως παρατηρούμε τα ποσοστά και στης 3 καταγραφές είναι πολύ μικρά, οπότε η ανάκρουση μπορεί να θεωρηθεί ελαστική.

3ο Πείραμα

Το 3ο πείραμα έχει ως στόχο την μελέτη και τον προσδιορισμό της εξίσωσης κίνησης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης μέσω πειράματος. Για να πέτυχουμε την κίνηση αυτή, συνδέουμε με το πάνω μέρος του ιππέα ένα νήμα, περνάμε το νήμα αυτό από δυο τροχαλίες και στο τέλος συνδέουμε ένα βαρίδιο (Σχήμα 3) , με τον τρόπο αυτό καταφέρνουμε να ασκείτε σταθερή δύναμη στον ιππέα ώστε να εκτελέσει την επιθυμητή κίνηση.



Σχήμα 3

Μετακινούμε τον ιππέα σε κατάλληλη θέση ώστε το βαρίδιο (βάρος στο σχήμα 3) να βρεθεί κοντά στην τροχαλία με το νήμα τεντωμένο και τον αφήνουμε να κινηθεί, ταυτόχρονα πατάμε και στον υπολογιστή να μας κάνει 11 μετρήσεις. Από της μετρήσεις αυτές βρίσκουμε από την σχέση ($U = \Delta x/\Delta t$) την ταχύτητα ανά δυο μέτρησης και ως πειραματικό δεδομένο κρατάμε μόνο την ταχύτητα και τον χρόνο. Ξαναεκτελούμε το πείραμα αυτό άλλες δυο φορές με την μονή διαφορά ότι την δεύτερη φορά προσθέτουμε άλλο ένα βαρίδιο (συνολικά 2 βαρίδια) και στην τρίτη άλλο ένα (συνολικά 3 βαρίδια).

Τα πειραματικά δεδομένα που προκύπτουν και από τα τρία πειράματα είναι τα εξής :

1 βαρίδιο		
α/α	**U(m/s)**	**t(s)**
1	0,196078	0,186
2	0,222222	0,339
3	0,241935	0,474
4	0,272727	0,598
5	0,285714	0,708
6	0,315789	0,813
7	0,319149	0,908
8	0,348837	1,002
9	0,277778	1,088
10	0,435688	1,196

Πίνακας 3.1

2 βαρίδια		
α/α	**U(m/s)**	**t(s)**
1	0,32967	0,104
2	0,361446	0,195
3	0,394737	0,278
4	0,434783	0,354
5	0,434783	0,423
6	0,46875	0,492
7	0,5	0,556
8	0,517241	0,616
9	0,555556	0,674
10	0,555556	0,728

Πίνακας 3.2

3 βαρίδια		
α/α	**U(m/s)**	**t(s)**
1	0,309278	0,122
2	0,361446	0,219
3	0,416667	0,302
4	0,46875	0,374
5	0,517241	0,438
6	0,517241	0,496
7	0,576923	0,554
8	0,588235	0,606
9	0,625	0,657
10	0,652174	0,705

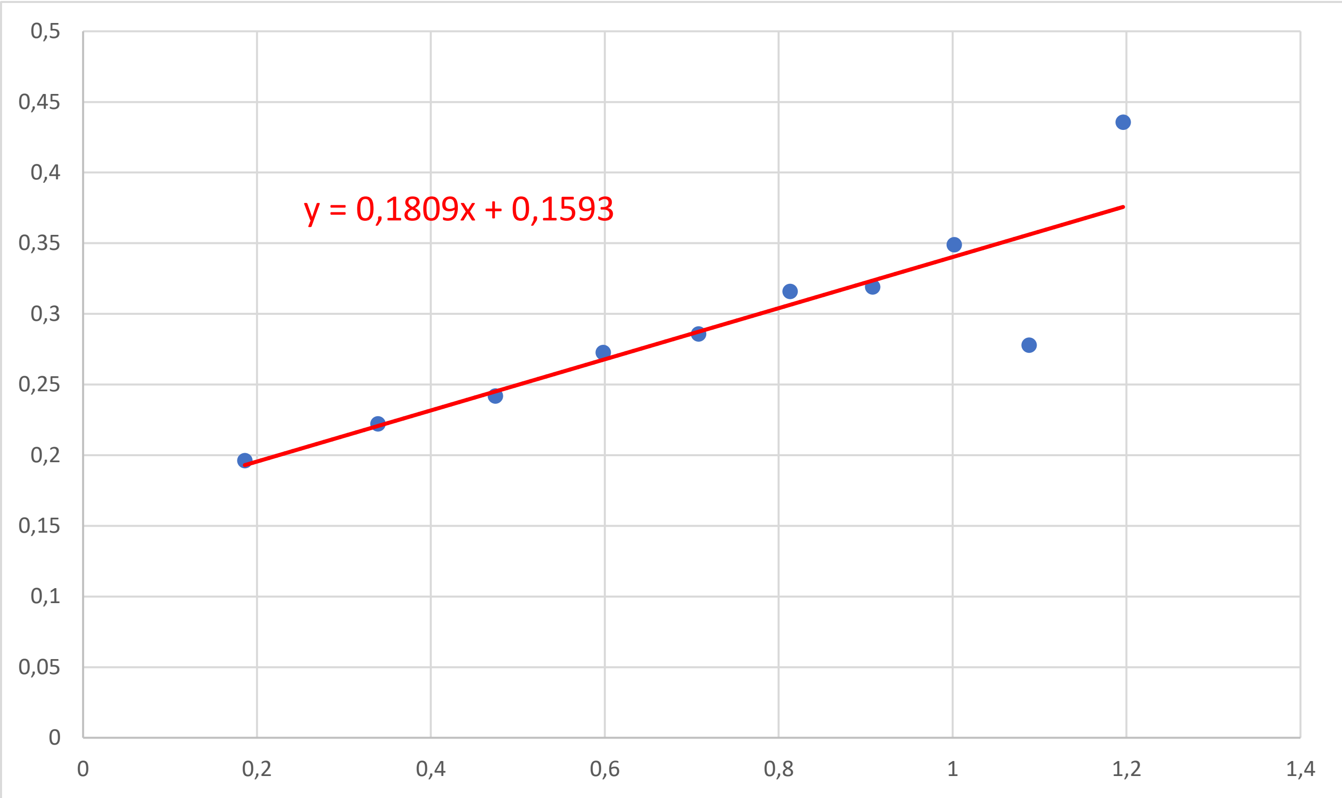
Πίνακας 3.3

Γνωρίζουμε καταρχάς ότι σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ισχύει ότι :

$$a = \frac{\Delta U}{\Delta t} \Rightarrow U = U_0 + a \cdot \Delta t \quad (2.4)$$

Για να αποδείξουμε την σχέση αυτή λοιπόν πειραματικά θα πρέπει για το κάθε πείραμα ξεχωριστά να κάνουμε την γραφική παράσταση u-t και μέσω της θεωρίας ελάχιστων τετραγώνων να βρούμε την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων της κάθε γραφικής και να της συγκρίνουμε με την σχέση (2.4).

Για το πείραμα 3.1 λοιπόν σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 3.1 έχουμε ότι η γραφική παράσταση U-t θα έχει την εξής μορφή :



Σχήμα 3.1

n	Σt_i	ΣU_i	$\Sigma U_i \cdot t_i$	Σt_i^2
10	7,312	2,915919	2,311222	6,336658

Πίνακας 3.11

Από την σχέση (1.6) και τον πίνακα 3.11 που απορρέει από το βασικό πίνακα 3.1,προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{\mathrm{n} \cdot \sum(t_i \cdot U_i) - (\sum t_i) \cdot (\sum U_i)}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum {t_i}^2\right) - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 2.311222 - 7.312 \cdot 2.912919}{10 \cdot 6.336658 - 7.312^2} = 0.18 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0.1809}$$

ενώ από την σχέση (1.7) και τον πίνακα 3.11:

$$\beta = \frac{\sum \mathrm{t_i}^2 \cdot \sum(\mathrm{U_i}) - (\sum \mathrm{t_i}) \cdot (\sum(\mathrm{U_i} \cdot \mathrm{t_i}))}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum \mathrm{t_i}^2\right) - (\sum \mathrm{t_i})^2} = \frac{6.336658 \cdot 2.912919 - 7.312 \cdot 2.311222}{10 \cdot 6.336658 - 7.312^2} = 0.1593$$

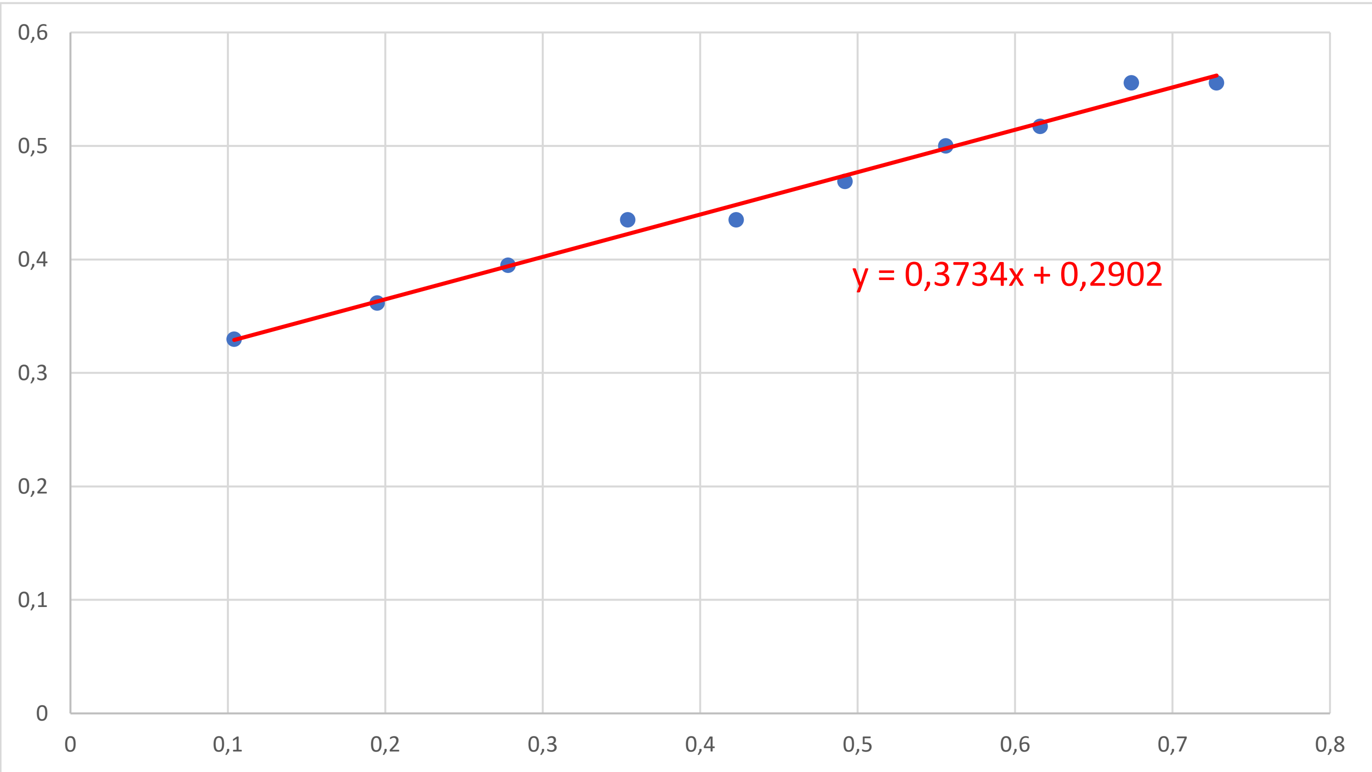
$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0.1593}$$

Η ευθεία που προκύπτει λοιπόν από την θεωρία ελάχιστων τετραγώνων, για το πρώτο πείραμα (3.1) με το ένα βαρίδιο είναι η εξής :

$x = \alpha \cdot t + \beta \Rightarrow \boldsymbol{x = 0.1809 \cdot t + 0.1593}$ (2.5)

Παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή έχει την μορφή της σχέσης (2.4) και συγκρίνοντας της δυο σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση του πρώτου πειράματος μας είναι ίση με $\boldsymbol{\alpha = 0,1593\ m/s^2}$ ενώ η αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{U_0 = 0,1593\ m/s}$ **.**

Για το πείραμα (3.2) στο οποίο συνδέσαμε 2 βαρίδια (άρα μεγαλύτερο βάρος) περιμένουμε καταρχάς μεγαλύτερη επιτάχυνση καθώς η δύναμη που θα ασκείτε στον ιππέα θα είναι μεγαλύτερη. Το διάγραμμα u-t λοιπόν για το πείραμα 3.2 είναι το εξής :



Σχήμα 3.2

n	Σt_i	ΣU_i	$\Sigma t_i \cdot U_i$	Σt_i^2
10	4,42	4,552521	2,158465	2,345286

Πίνακας 3.21

Από την σχέση (1.6) και τον πίνακα 3.21 που απορρέει από το βασικό πίνακα 3.2,προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{\mathrm{n} \cdot \sum(t_i \cdot U_i) - (\sum t_i) \cdot (\sum U_i)}{\mathrm{n} \cdot (\sum {t_i}^2) - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 2.158465 - 4.42 \cdot 4.552521}{10 \cdot 2.345286 - 4.42^2} = 0.3734 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0.3734}$$

ενώ από την σχέση (1.7) και τον πίνακα 3.21:

$$\beta = \frac{\sum t_i^{2} \cdot \sum(U_i) - (\sum t_i)\cdot(\sum(U_i \cdot t_i))}{n \cdot (\sum t_i^{2}) - (\sum t_i)^2} = \frac{2.345286 \cdot 4.552521 - 4.42 \cdot 2.158465}{10 \cdot 2.345386 - 4.42^2} = 0.2902$$

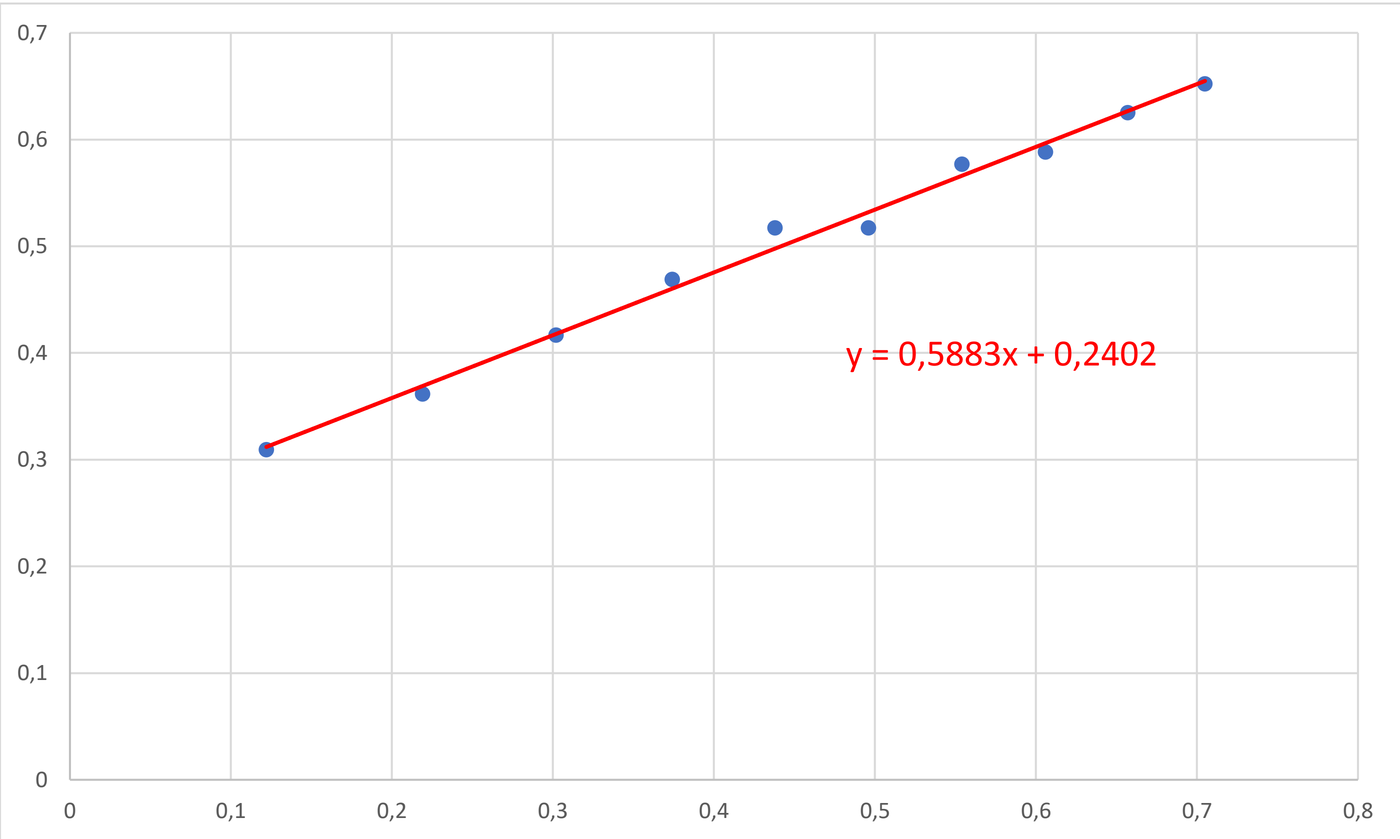
$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0.2902}$

Η ευθεία που προκύπτει λοιπόν από την θεωρία ελάχιστων τετραγώνων, για το πείραμα (3.2) με τα δυο βαρίδια είναι η εξής :

$x = \alpha \cdot t + \beta \Rightarrow \boldsymbol{x = 0.3734 \cdot t + 0.2902}$ (2.6)

Ομοίως συγκρίνοντας την σχέση (2.4) με την σχέση (2.6) συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση του πειράματος (3.2) είναι ίση με $\boldsymbol{\alpha = 0,3734\ m/s^2}$ ενώ η αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{U_0 = 0,2902\ m/s}$.

Τέλος για το πείραμα (3.3) με τα τρία βαρίδια η γραφική παράσταση σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα (3.3) θα έχει την εξής μορφή :



Σχήμα 3.2

n	Σt_i	ΣU_i	$\Sigma t_i \cdot U_i$	Σt_i^2
10	4,473	5,032956	2,447631	2,334611

Πίνακας 3.31

Από την σχέση (1.6) και τον πίνακα 3.31 που απορρέει από το βασικό πίνακα 3.3,προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{\mathrm{n} \cdot \sum(t_i \cdot U_i) - (\sum t_i) \cdot (\sum U_i)}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum {t_i}^2\right) - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 2{,}447631 - 4{,}473 \cdot 5{,}032956}{10 \cdot 2{,}334611 - 4{,}473^2} = 0.58827 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0.58827}$$

ενώ από την σχέση (1.7) και τον πίνακα 3.31:

$$\beta = \frac{\sum {\mathrm{t_i}}^2 \cdot \sum(\mathrm{U_i}) - (\sum \mathrm{t_i}) \cdot (\sum(\mathrm{U_i} \cdot \mathrm{t_i}))}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum {\mathrm{t_i}}^2\right) - (\sum \mathrm{t_i})^2} = \frac{2{,}334611 \cdot 5{,}032956 - 4{,}473 \cdot 2{,}447631}{10 \cdot 2{,}334611 - 4{,}473^2} = 0.24015$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0.24015}$$

Η ευθεία που προκύπτει λοιπόν από την θεωρία ελάχιστων τετραγώνων, για το πείραμα (3.3) με τα τρία βαρίδια είναι η εξής :

$$x = \alpha \cdot t + \beta \Rightarrow \boldsymbol{x = 0.58827 \cdot t + 0.24015} \quad (2.7)$$

Ομοίως συγκρίνοντας την σχέση (2.4) με την σχέση (2.7) συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση του πειράματος (3.3) είναι ίση με $\boldsymbol{\alpha = 0{,}58827\, m/s^2}$ ενώ η αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{U_0 = 0{,}24015\, m/s}$ **.**

4ο Πείραμα

Στόχος του 4ου πειράματος είναι να προσδιορίσουμε πειραματικά τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα ($F = m \cdot a$) και μέσω αυτού να βρούμε την μάζα του ιππέα πειραματικά και να την συγκρίνουμε με την πραγματική του μάζα. Οπότε αρχικά πάμε και μετράμε την μάζα των βαριδιών και του ιππέα σε μια ζυγαριά (Πίνακας 4). Θεωρώντας ότι το νήμα ήταν αβαρές και ότι δεν υπήρχαν καθόλου τριβές μεταξύ του νήματος και των δυο τροχαλιών, μαθηματικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη F που δρούσε στο ιππέα ήταν το αντίστοιχο βάρος των βαριδιών ($\mathbf{F = W = m \cdot g}$ (2.8)). Βάζοντας στην σχέση (2.8) την κατάλληλη μάζα και πολλαπλασιάζοντας με την επιτάχυνση της βαρύτητας, βρίσκουμε της αντίστοιχες δυνάμεις. Καταγράφουμε της δυνάμεις αυτές μαζί με της αντίστοιχες επιτάχυνσης του 3ου πειράματος σε έναν πίνακα (Πίνακας 5). Μέσω της γραφικής παράστασης F-a (Σχήμα 4) των πειραματικών δεδομένων του πίνακα 5, μπορούμε να βρούμε την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων της γραφικής παράστασης σύμφωνα με της σχέσης (1.6), (1.7) και τον πίνακα 5.1 που απορρέει άμεσα από τον πίνακα 5 και έτσι τελικά να βρούμε πειραματικά και την μάζα του ιππέα.

Βαρίδιο/α	Μάζα (kg)
1	0,0047
2	0,0101
3	0,0151
Ιππέας	0,153

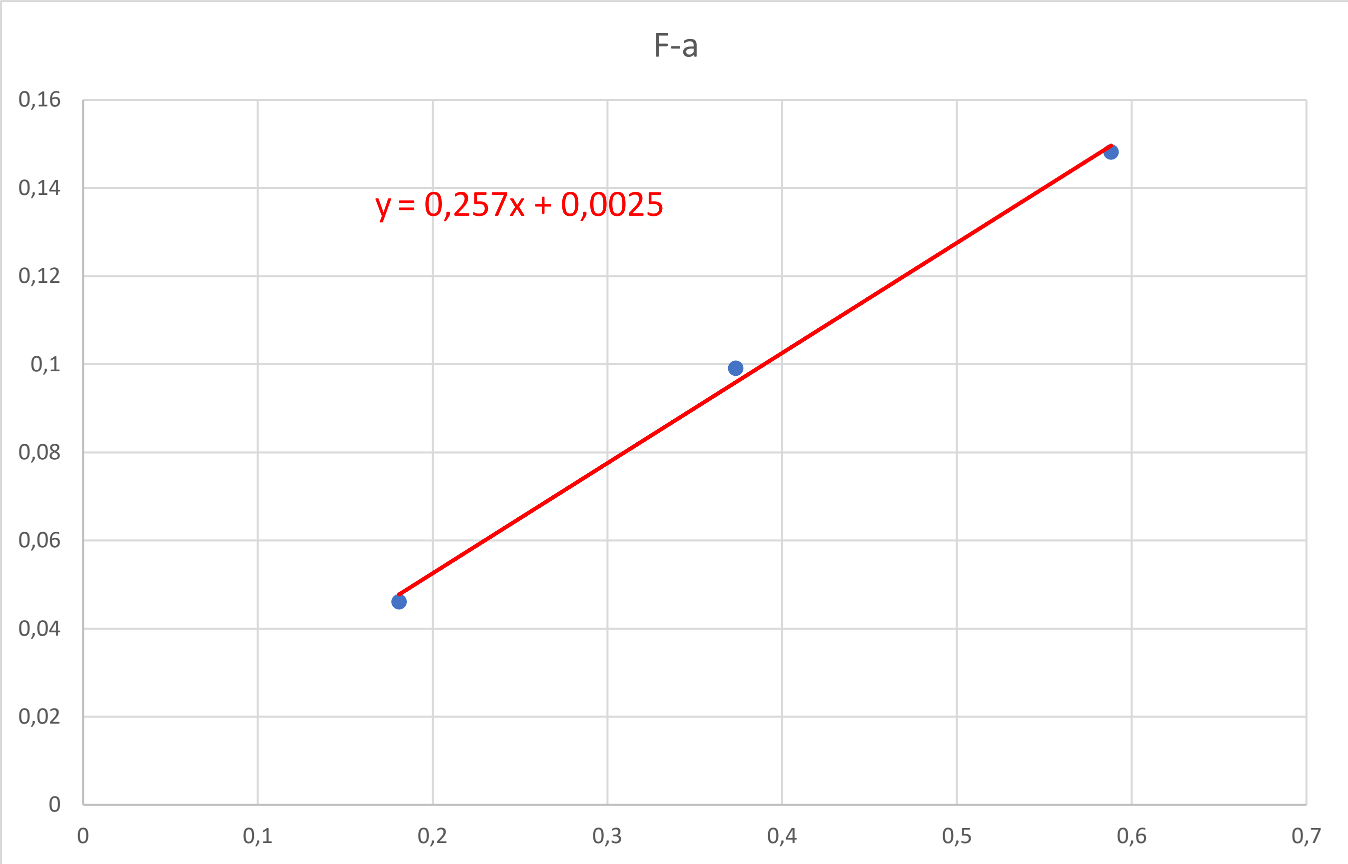
Πίνακας 4

α/α	a(m/s^2)	Δύναμη (F)
1	0,1809	0,046107
2	0,3734	0,099081
3	0,58827	0,148131

Πίνακας 5

n	Σα	ΣF	ΣF*a	Σα^2
3	1,14257	0,293319	0,132479	0,518213963

Πίνακας 5.1



Σχήμα 4

Από την σχέση (1.6) και τον πίνακα 5.1 λοιπόν, προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum(F_i \cdot \ a_i) - (\sum \alpha_i) \cdot (\sum F_i\ )}{n \cdot \left(\sum {\alpha_i}^2\ \right) - (\sum \alpha_i)^2} = \frac{3 \cdot 0{,}132479 - 1.14257 \cdot 0.293319}{3 \cdot 0.518213963 - 1.14257^2} = 0.257 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0.257}$$

ενώ από την σχέση (1.7) και τον πίνακα 3.31:

$$\beta = \frac{\sum {a_i}^2\ \cdot \sum(F_i) - (\sum a_i) \cdot (\sum(F_i \cdot \ a_i))}{n \cdot \left(\sum {a_i}^2\ \right) - (\sum a_i)^2} = \frac{0.518213963 \cdot 0.293319 - 1.14257 \cdot 0{,}132479}{3 \cdot 0.518213963 - 1.14257^2} = 0.00255$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0.00255}$$

Η ευθεία που προκύπτει λοιπόν από την θεωρία ελάχιστων τετραγώνων, για το πείραμα αυτό είναι η εξής :

$x = \alpha \cdot t + \beta \Rightarrow \boldsymbol{x = 0.257 \cdot t + 0.00255}$ (2.9)

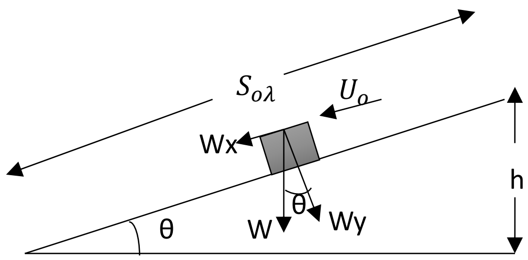
Συγκρίνοντας την σχέση (2.8) με την σχέση (2.9) συμπεραίνουμε ότι η μάζα του ιππέα που προσδιορίσαμε πειραματικά είναι ίση με $\boldsymbol{m_{\iota\pi\pi\acute{\varepsilon}\alpha} = 0{,}257\ kg = 257\ gr}$. Όπως καταλαβαίνουμε υπάρχει ένα σφάλμα ε της τάξης των 100 γραμμάριων ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{100}$)και αυτό κατά την γνώμη ευθύνεται στο ότι το νήμα δεν είναι αβαρές.

5ο Πείραμα

Με το 5ο πείραμα έχουμε ως στόχο να προσδιορίσουμε πειραματικά την εξίσωση κίνησης σε κεκλιμένο επίπεδο. Καταρχάς ανυψώνουμε τον διάδρομο κατά 3 εκατοστά μέσω του κοχλία (γ) έτσι ώστε να δημιουργήσουμε κεκλιμένο επίπεδο, γνωρίζουμε ότι το μήκος του αεροδιαδρόμου είναι $S_{ολ} = 1.8\ m$. Αφήνουμε τον ιππέα χωρίς αρχική ταχύτητα από το άνω άκρο του διάδρομου και αρχίζουμε την καταγραφή λίγο αργότερα όταν έχει απόκτηση κάποια ταχύτητα, χωρίς να συμπεριλάβουμε την ανάκρουση του στης μετρήσεις. Στον Η/Υ πάμε και πατάμε να γίνουν 11 μετρήσεις θέσης και χρόνου και από αυτές βγάζουμε την ταχύτητα μέσω της σχέσης ($U = \Delta x/\Delta t$) και σημειώνουμε τα πειραματικά δεδομένα στο πίνακα 6. Για την μαθηματική ανάλυση του κεκλιμένου επιπέδου ισχύουν τα εξής.

α/α	t (s)	U (m/s)
1	0,065	0,46875
2	0,129	0,483871
3	0,191	0,491803
4	0,252	0,5
5	0,312	0,5
6	0,372	0,535714
7	0,428	0,535714
8	0,484	0,545455
9	0,539	0,535714
10	0,595	0,555556

Πίνακας 6



Καταρχάς :

$$\sin\theta = \frac{h}{S_{ολ}} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{S_{ολ}}\right) \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0.03}{1.8}\right) = 0.0166 \Rightarrow \boldsymbol{\theta = 0.0166\ rad}$$

$$= \mathbf{0.95110994}\ ^{o}$$

Και

$$W_y = \cos\theta \cdot W = \cos\theta \cdot m_{ιππέα} \cdot \mathrm{g} \quad (3) \qquad , \qquad W_x = \sin\theta \cdot W = \sin\theta \cdot m_{ιππέα} \cdot g \quad (3.1)$$

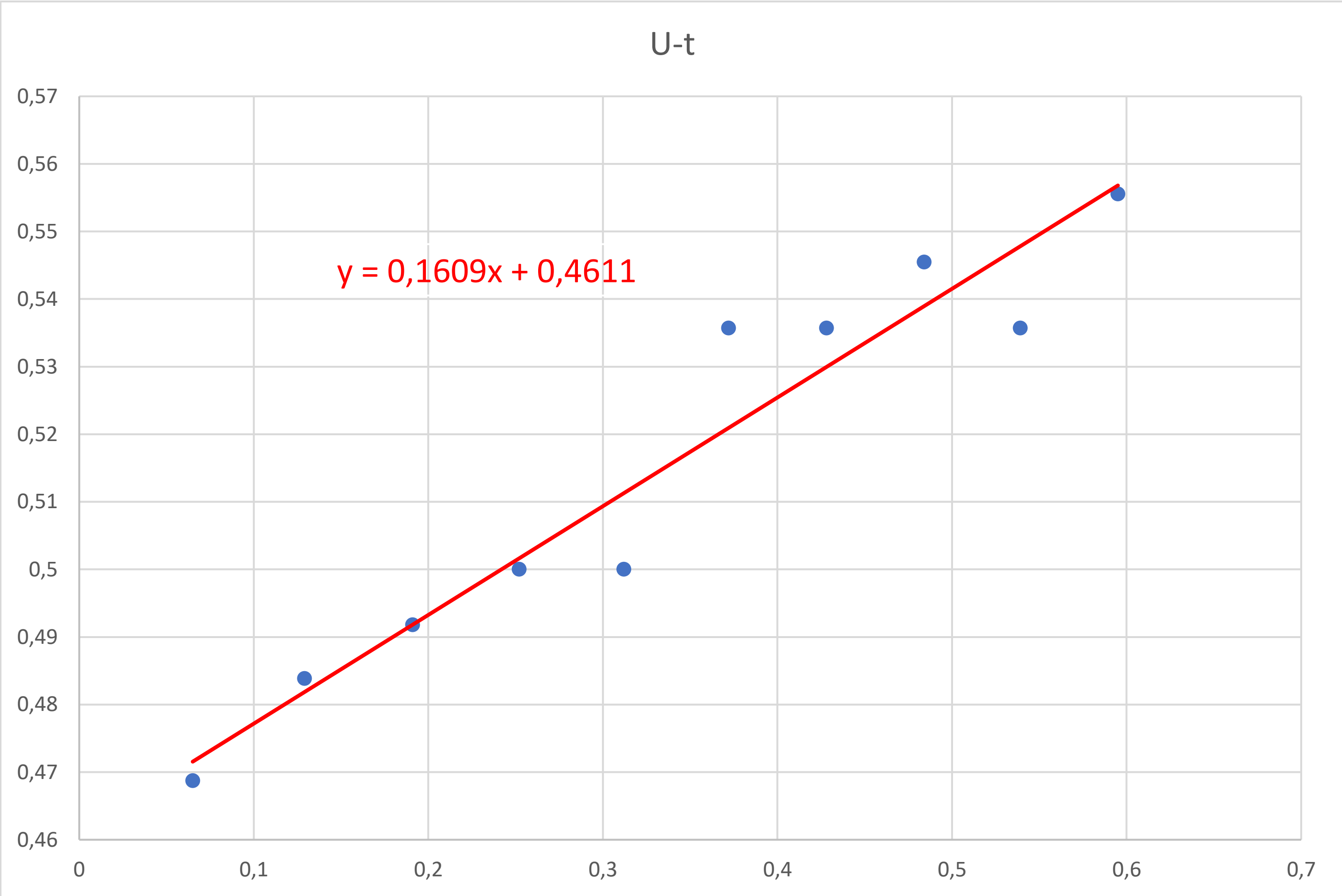
Ακόμη σύμφωνα με τον 2ο Νομό του Νεύτωνα θα ισχύει ότι :

$$\Sigma \mathrm{F} = m_{ιππέα} \cdot a \Longrightarrow W_x = m_{ιππέα} \cdot a \quad (3.2)$$

Ενώ για την ταχύτητα του ιππέα θα ισχύει ότι :

$$U = U_o + a \cdot t \quad (3.3)$$

Σχεδιάζοντας την γραφική παραίτηση u-t σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 6 μπορούμε μέσω της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων να βρούμε την επιτάχυνση α του ιππέα και την αρχική ταχύτητα που κατέγραφε ο Η/Υ.



Σχήμα 5

n	Σt_i	ΣU_i	$\Sigma {t_i}^2$	$\Sigma U_i \cdot t_i$
10	3,367	5,152577	1,418565	1,7807

Πίνακας 6.1

Από την σχέση (1.6) και τον πίνακα 6.1 λοιπόν, προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{\mathrm{n} \cdot \sum(U_i \cdot \ t_i) - (\sum t_i) \cdot (\sum U_i\ )}{\mathrm{n} \cdot \left(\sum {t_i}^2\ \right) - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 1{,}7807 - 3{,}367 \cdot 5{,}152577}{10 \cdot 1{,}418565 - 3{,}367^2} = 0.1609$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0.1609}$$

ενώ από την σχέση (1.7) και τον πίνακα 3.31:

$$\beta = \frac{\sum t_i^2 \cdot \sum(U_i) - (\sum t_i) \cdot (\sum(U_i \cdot t_i))}{n \cdot (\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2} = \frac{1{,}418565 \cdot 5{,}152577 - 3{,}367 \cdot 1{,}7807}{10 \cdot 1{,}418565 - 3{,}367^2} = 0.4611$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0.4611}$

Η ευθεία που προκύπτει λοιπόν από την θεωρία ελάχιστων τετραγώνων, για το πείραμα αυτό είναι η εξής :

$x = \alpha \cdot t + \beta \Rightarrow \boldsymbol{x = 0.1609 \cdot t + 0.4611}$ (2.9)

Συγκρίνοντας την σχέση (2.9) με την σχέση (3.3) συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση του ιππέα θα ισούται με $\mathbf{\alpha = 0.1609\ m/s^2}$ και η ταχύτητα που είχε αποκτήσει ο ιππέας όταν πατήσαμε την καταγραφή ισούται με $\mathbf{U_o = 0.4611\ m/s}$.

Ακόμη από την σχέση (3.2) μπορούμε να προσδιορίσουμε και την επιτάχυνση της βαρύτητας ως εξής :

$$(3.2) \Longrightarrow W_x = m_{\iota\pi\pi\acute{\varepsilon}\alpha} \cdot \alpha \overset{(3.1)}{\Longrightarrow} sin\theta \cdot m_{\iota\pi\pi\acute{\varepsilon}\alpha} \cdot g = m_{\iota\pi\pi\acute{\varepsilon}\alpha} \cdot \alpha$$

$$\Longrightarrow g = \frac{\alpha}{sin\theta} = \frac{0.1609}{\sin(0.0166)} = 9.693\ m/s^2 \Longrightarrow \boldsymbol{g = 9.693\ m/s^2}$$

Η οποία τιμή είναι πολύ κοντά στην πραγματική (9.81).

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα , μπορούμε να βρούμε και την κινούσα δύναμη F ως εξής :

$$F_{\kappa\iota\nu} = m_{\iota\pi\pi\acute{\varepsilon}\alpha} \cdot a = 0{,}257 \cdot 0.1609 = 0.041\ N \Longrightarrow F_{\kappa\iota\nu} = 0.041\ N$$

Από την άλλη μέσω της εξίσωσης (3.1) Μπορούμε να βρούμε την W_x

$$W_x = sin\theta \cdot m_{\iota\pi\pi\acute{\varepsilon}\alpha} \cdot g = \sin(0.0166) \cdot 0{,}257 \cdot 9.81 = 0.041\ N$$

Όπως παρατηρούμε η δυο αυτές τιμές είναι ιδίες και αυτό διότι πρακτικά μιλάμε για την ιδιά δύναμη αφού η κινούσα δύναμη είναι η W_x.

6ο Πείραμα

Με το 6ο πείραμα έχουμε ως στόχο να προσδιορίσουμε πειραματικά την απώλεια κινητικής ενέργειας κατά την ανάκρουση σε κεκλιμένο επίπεδο. Έτσι επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο πείραμα προσέχοντας όμως στην καταγραφή να συμπεριλάβουμε και την ανάκρουση του ιππέα με το λάστιχο. Όταν τελείωση η καταγραφή δεν σημειώνουμε τα πειραματικά δεδομένα που εμφανίζονται αλλά πάμε και βλέπουμε την γραφική παράσταση U-t στην άλλη σελίδα του προγράμματος. Στην γραφική αυτή παράσταση προσδιορίζουμε το σημείο της ανάκρουσης και σημειώνουμε την ταχύτητα που είχε ο ιππέας πριν και μετρά από αυτήν. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή άλλη μια φορά και καταγράφουμε τα δεδομένα αυτά σε έναν πίνακα (Πίνακας 7).

α/α	U_π(m/s)	t_π (s)	U_μ (m/s)	t_μ (s)
7.1	0,457	1,722	0,437	2,143
7.2	0,518	1,805	0,496	2,199

Πίνακας 7

Σύμφωνα με την σχέση (2.3) του 2ου πειράματος η απώλεια κινητικής ενέργειας θα ισούται με :

$$\Delta E /_{E} = Κτελ - Καρχ /_{Καρχ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot U_\mu^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot U_\pi^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot U_\pi^2} = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2}$$

Οπότε για το πείραμα 7.1 σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 7 θα ισχύει ότι η απώλεια της κινητικής ενέργειας θα ισούται με :

$$A_{7,1} = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}437^2 - 0{,}457^2}{0{,}457^2} = -0.08561\, J$$

Ενώ για το 7.2 θα ισούται με :

$$A_{7,2} = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}496^2 - 0{,}518^2}{0{,}518^2} = -0.08313\, J$$

Καταρχάς όπως παρατηρούμε την δεύτερη φορά είχαμε μεγαλύτερη ταχύτητα κρούσης από την πρώτη αλλά η απώλεια της κινητικής ενέργειας παρέμεινε σχετικά ίδια. Παρο’λαυτα με πειραματικά δεδομένα μόνο από δυο πειράματα δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ακριβή συμπεράσματα για το εάν παίζει κάποιόν ρόλο η ταχύτητα του ιππέα πριν την ανάκρουση, στην απώλεια της κινητικής ενέργειας. Εάν θεωρήσουμε όμως ότι η απώλεια της κινητικής ενέργειας εξαρτάτε από την ταχύτητα που είχε ο ιππέας πριν την ανάκρουση τότε θεωρητικά παίζει και ρόλο η κίνηση που κάνει ο ιππέας πριν την ανάκρουση, δηλαδή έναν κάνει ευθύγραμμη ομαλή ή ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Εάν από την άλλη δεν εξαρτάτε από την αρχική ταχύτητα τότε δεν εξαρτάτε και από την κίνηση που κάνει.

7ο Πείραμα

Τέλος στο 7μο πείραμα θα προσδιορίσουμε πάλι την απώλεια της κινητικής ενέργειας πειραματικά, αλλά αυτήν την φορά θα μελετήσουμε πολλαπλές ανάκρουσες σε μια μόνο κίνηση. Δηλαδή θα πρέπει να αφήσουμε τον ιππέα όπως και στο προηγούμενο πείραμα και να πατήσουμε στον Η/Υ να κάνει περίπου 400 μετρήσεις ώστε να συμπεριλάβει σε μια κίνηση τουλάχιστον 6 ανακρούσεις. Ομοίως καταγράφουμε σε κάθε ανάκρουση μέσο του διαγράμματος U-t την ταχύτητα που είχε πριν και μετά την ανάκρουση ο ιππέας. Έτσι καταλήγουμε στα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 8.

Ανάκρουση	U_π **(m/s)**	U_μ **(m/s)**
1	0,737	0,733
2	0,692	0,659
3	0,64	0,595
4	0,58	0,55
5	0,532	0,506
6	0,509	0,513

Πίνακας 8

Σύμφωνα με την σχέση (2.3) λοιπόν για κάθε ανάκρουση θα ισχύει ότι η απώλεια της κινητικής ενέργειας θα ισούται με :

$$A_1 = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}733^2 - 0{,}737^2}{0{,}737^2} = -0.01082\, J$$

$$A_2 = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}659^2 - 0{,}692^2}{0{,}692^2} = -0.09310\, J$$

$$A_3 = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}595^2 - 0{,}64^2}{0{,}64^2} = -0.13568\,J$$

$$A_4 = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}55^2 - 0{,}58^2}{0{,}58^2} = -0.10077\,J$$

$$A_5 = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}506^2 - 0{,}532^2}{0{,}532^2} = -0.09535\,J$$

$$A_6 = \frac{U_\mu^2 - U_\pi^2}{U_\pi^2} = \frac{0{,}513^2 - 0{,}509^2}{0{,}509^2} = 0.01577\,J$$

Όπως παρατηρούμε η απώλεια κινητικής ενέργειας παραμένει σχετικά σταθερή και κατά μετρό μικρή και στης έξι ανακρούσεις. Δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι με τον τρόπο αυτό προσεγγίζουμε καλά και σε πολύ μεγάλο βαθμό μια ελαστική κρούση. Σημειώνουμε ακόμη ότι στην καταγραφή των ταχυτήτων αυτών παίρνουμε προσεγγιστικά την ταχύτητα που έχει ο ιππέας πριν και μετά την ανάκρουση, άρα υπάρχει σίγουρα κάποιο σφάλμα στα πειραματικά δεδομένα αυτά και αυτό φαίνεται ακόμη και από την απώλεια της 6ης ανάκρουσης, όπου αντί να χάνει ο ιππέας κινητική ενέργεια κερδίζει.

Συμπεράσματα

Καταρχάς στα περισσότερα από τα πάνω πειράματα αντλήθηκαν δεδομένα από Η/Υ και με τον τρόπο αυτό κατά την γνώμη μου μειώνονται σημαντικά τα σφάλματα που οφείλονται σε ανθρώπινο παράγοντα, παρο’λαυτα όπως ειπώθηκε και στην αρχή, θεωρήσαμε ότι και οι μετρήσεις από τον Η/Υ εμπεριείχαν ένα σφάλμα περίπου ίσο με ($\varepsilon = 1{,}5$). Θα μπορούσαμε φυσικά στην πειραματική διάταξη να χρησιμοποιούσαμε πιο ευαίσθητα όργανα και με τον τρόπο αυτό να πετυχαίναμε μεγαλύτερη ακρίβεια και λιγότερα σφάλματα στα πειραματικά δεδομένα. Παρο’λαυτα και μέσω αυτής της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποιήθηκε προσεγγίσαμε σε μεγάλο βαθμό όλες της κινήσεις κάθε πειράματος.