Κύκλωμα Γέφυρας – Μετασχηματισμοί Δ ↔ Υ

Κλάιντι Τσάμη

Περίληψη:

Η εργαστηριακή άσκηση επικεντρώθηκε κυρίως στην θεωρητική αλλά και πειραματική εισαγωγή στο κύκλωμα γέφυρας (γνωστό ως γέφυρα Wheatstone), με στόχο τη μελέτη του συγκεκριμένου κυκλώματος. Κατά τη διάρκεια της άσκησης, πραγματοποιήθηκαν πειραματικές μετρήσεις πάνω στο κύκλωμα αυτό. Οι πειραματικές τιμές που καταγράφηκαν συγκρίθηκαν με τις θεωρητικές τιμές που υπολογίστηκαν, αναδεικνύοντας την απόκλιση μεταξύ τους. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι πειραματικές και θεωρητικές τιμές εμφάνισαν εξαιρετικά μικρή απόκλιση μεταξύ τους, καθιστώντας την μελέτη αυτή αξιόπιστη και ακριβή. Αυτή η σύγκριση αποτελεί σημαντικό εύρημα, αποδεικνύοντας την ακρίβεια των πειραματικών αποτελεσμάτων και ενισχύοντας την κατανόησή μας για τη λειτουργία της γέφυρας Wheatstone.

Εισαγωγή:

Αυτή η εργαστηριακή άσκηση όπως ειπώθηκε παραπάνω πραγματοποιήθηκε με βασικό σκοπό την μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, γνωστό ως Γέφυρα Wheatstone το οποίο χρησιμοποιούταν παλιότερα για την εύρεση μιας άγνωστης αντίστασης κατόπιν συγκρίσεως με μια γνωστή πρότυπη αντίσταση . Με την μελέτη του συγκεκριμένου κυκλώματος, πραγματοποιείται ταυτόχρονα και μια εμβάθυνση σε διάφορες θεωρίες και φαινόμενα που συνδέονται με τη διάταξη αυτή. Αυτό οδηγεί σε μια πιο βαθιά κατανόηση της θεωρίας και των διαφόρων φαινομένων που μπορούν να παρατηρηθούν, όχι μόνο σε αυτό το συγκεκριμένο κύκλωμα, αλλά και σε πολλά άλλα ηλεκτρικά κυκλώματα και πειραματικές διατάξεις.

Θεωρία:

Για την μαθηματική μελέτη της εργαστηριακής άσκησης αυτής χρειάζονται κάποιες βασικές θεωρίες και εξισώσεις η οποίες αναγράφονται και αριθμούνται παρακάτω.

Καταρχάς, εάν σε ένα κύκλωμα έχουμε συνδέσει πολλές αντιστάσεις σε σειρά, το ρεύμα που διαπερνά κάθε αντίσταση είναι το ίδιο, αυτό διότι το ρεύμα έχει μόνο μία διαδρομή. Η συνολική αντίσταση στο κύκλωμα αυτό θα είναι το άθροισμα των αντιστάσεων. Για παράδειγμα, εάν στο κύκλωμα συνδέονται σε σειρά n αντιστάσεις, τότε η συνολική αντίσταση θα ισούται με:

$$\boldsymbol{R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \quad (1)$$

Από την άλλη εάν οι n αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα τότε για την συνολική αντίσταση θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}} \quad (1.1)$$

Νόμος του Ohm:

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm η τάση στα άκρα ενός κυκλώματος ισούται με το γινόμενο της τιμής της αντίστασης επί την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Δηλαδή: $\boldsymbol{V = I \cdot R} \quad (2)$

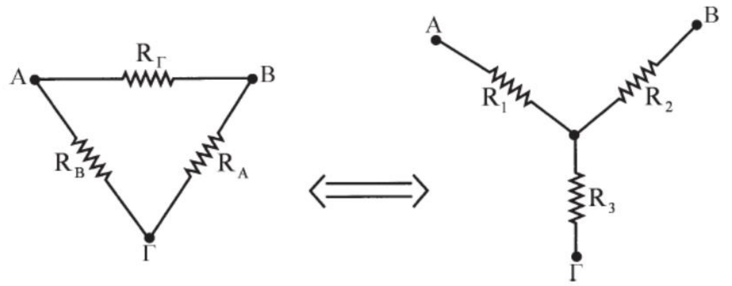
Από την σχέση (2) εύκολα μπορεί να καταλήξει κάποιος στην παρακάτω σχέση:

$$(\mathbf{2}) \Rightarrow \boldsymbol{I} = \boldsymbol{V}/\boldsymbol{R} \quad (2.1)$$

Επιπλέον, επειδή πρόκειται να συγκριθούν πειραματικές τιμές με θεωρητικές (ονομαστικές), απαιτείται η χρήση μιας σχέσης για την απόκλιση των τιμών αυτών. Αυτή η σχέση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta} = \frac{\boldsymbol{\text{ονομ. τιμή} - \text{πειρ. τιμή}}}{\boldsymbol{\text{ονομ. τιμή}}} \quad (3)$$

Επιπλέον, θα χρειαστεί παρακάτω και ο μετασχηματισμός κυκλωμάτων Δ σε Υ (Εικόνα 1).



Εικόνα 1

Σύμφωνα με την θεωρία έχει αποδειχθεί ότι η τιμές των αντιστάσεων του κυκλώματος Δ σε σύγκριση με της τιμές των αντιστάσεων του κυκλώματος Υ όταν γίνει ο μετασχηματισμός (από Υ σε Δ) θα ισούνται με:

$$\boldsymbol{R_Γ} = (\boldsymbol{R_1} \cdot \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_2} \cdot \boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_3} \cdot \boldsymbol{R_1})/\boldsymbol{R_3} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{R_B} = (\boldsymbol{R_1} \cdot \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_2} \cdot \boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_3} \cdot \boldsymbol{R_1})/\boldsymbol{R_2} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{R_A} = (\boldsymbol{R_1} \cdot \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_2} \cdot \boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_3} \cdot \boldsymbol{R_1})/\boldsymbol{R_1} \quad (6)$$

Ενώ εάν γίνει μετασχηματισμός από Δ στο Υ για της αντιστάσεις του κυκλώματος Υ θα ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{R_1} = (\boldsymbol{R_B} \cdot \boldsymbol{R_Γ})/(\boldsymbol{R_A} + \boldsymbol{R_B} + \boldsymbol{R_Γ}) \quad (7)$$

$$\boldsymbol{R_2} = (\boldsymbol{R_Γ} \cdot \boldsymbol{R_A})/(\boldsymbol{R_A} + \boldsymbol{R_B} + \boldsymbol{R_Γ}) \quad (8)$$

$$\boldsymbol{R_3} = (\boldsymbol{R_A} \cdot \boldsymbol{R_B})/(\boldsymbol{R_A} + \boldsymbol{R_B} + \boldsymbol{R_Γ}) \quad (9)$$

Πειραματική διαδικασία:

Καταρχάς όπως ειπώθηκε και παραπάνω ο σκοπός της πειραματικής άσκησης αυτής είναι η μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, γνωστό ως Γέφυρα Wheatstone (Εικόνα 2). Το κύκλωμα αυτό αποτελείτε από έξι αντιστάτες R , R_A , R_B, $R_Γ$, R_4 $και$ R_5 οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην εικόνα 1 και τροφοδοτούνται από πηγή συνεχούς τάσης $V_{dc} = 9\ V$.

Για την υλοποίηση της πειραματικής διαδικασίας απαιτείτε μια πηγή τάσης, έξι αντιστάσεις με τιμές ($R = 1.0\ kΩ$, $R_A = 0.27\ kΩ, R_B = 1.0\ kΩ$, $R_Γ = 3.3\ kΩ, R_4 = 1.5\ kΩ\ και\ R_5 = 3.3\ kΩ$ μια πλακέτα διασύνδεσης (breadboard), ένα πολύμετρο και τέλος ένα κιβώτιο αντιστάσεων.

1)

α) Αρχικά χρειάζεται πρώτα να γίνει ωμομέτρηση των αντιστάσεων. Για να μετρηθεί η κάθε αντίσταση πειραματικά χρειάζεται μια πλακέτα διασύνδεσης και ένα πολύμετρο. Έχοντας βρει την κατάλληλη αντίσταση, δηλαδή τα καταλληλά χρώματα που αντιστοιχούν σε αντίσταση με τιμή για παράδειγμα $R = 1.0\ k\Omega$ πάμε και συνδέουμε την αντίσταση στο breadboard. Στα άκρα της αντίστασης αυτής συνδέουμε το πολύμετρο το οποίο και το ρυθμίζουμε στην ένδειξη Ωμ. Η πειραματική τιμή της αντίστασης διακρίνετε στη οθόνη του πολύμετρου η οποία για την πρώτη αντίστασης R ισούται με $\boldsymbol{R_\pi = 0.99\ k\Omega}$. Ακολουθώντας την ιδιά διαδικασία και για της άλλες πέντε αντιστάσεις καταλήγουμε στης εξής πειραματικές τιμές:

$$\boldsymbol{R_\pi = 0.99\ \mathrm{k\Omega},\ R_{A,\pi} = 0.28\ \mathrm{k\Omega},\ R_{B,\pi} = 0.99\ \mathrm{k\Omega},\ R_{\Gamma,\pi} = 3.27\ \mathrm{k\Omega},\ R_{4\pi} = 1.48\ \mathrm{k\Omega}\ \ \text{και}\ \ R_{5,\pi} = 3.28\ \mathrm{k\Omega}}$$

Εφόσον πλέον γνωρίζουμε της ονοματικές τιμές αλλά και της πειραματικές τιμές των αντιστάσεων είναι εύκολο να βρεθεί η απόκλιση της πειραματικής από την ονοματική τιμή. Σύμφωνα με την σχέση (3) για την κάθε αντίσταση ξεχωριστά θα ισούται με:

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R)} = \frac{\boldsymbol{ονομ.\ τιμή - πειρ.\ τιμή}}{\boldsymbol{ονομ.\ τιμή}} = \frac{\mathbf{1.0-0.99}}{\mathbf{1.0}} = \frac{\mathbf{0.01}}{\mathbf{1.0}} = \mathbf{0.01}$$

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_A)} = \frac{\mathbf{0.27-0.28}}{\mathbf{0.28}} = \frac{\mathbf{-0.01}}{\mathbf{0.27}} = \mathbf{-0.04}$$

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_B)} = \frac{\mathbf{1.0-0.99}}{\mathbf{1.0}} = \frac{\mathbf{0.01}}{\mathbf{1.0}} = \mathbf{0.01}$$

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_\Gamma)} = \frac{\mathbf{3.3-3.27}}{\mathbf{3.3}} = \frac{\mathbf{0.03}}{\mathbf{3.3}} = \mathbf{9.1 \cdot 10^{-3}}$$

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_4)} = \frac{\mathbf{1.5-1.48}}{\mathbf{1.5}} = \frac{\mathbf{0.02}}{\mathbf{1.5}} = \mathbf{0.01}$$

$$\%\ \boldsymbol{\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_5)} = \frac{\mathbf{3.3-3.28}}{\mathbf{3.3}} = \frac{\mathbf{0.02}}{\mathbf{3.3}} = \mathbf{6.1 \cdot 10^{-3}}$$

Τα δεδομένα αυτά είναι και τα δεδομένα του Πίνακα Ι της (Εικόνας 2). Από της παραπάνω τιμές γίνεται ευκολά αντιληπτό ότι η πειραματική τιμή έχει μια μικρή απόκλιση σε σχέση με την ονοματική την οποία και υπολογίσαμε παραπάνω. Για ποιον λόγο συμβαίνει όμως αυτό;

Αυτό συμβαίνει λόγο της επίδρασης της εσωτερικής αντίστασης του πολύμετρου, το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο επίδρασης φορτιού και επιδρά περισσότερο στην πειραματική τιμή όταν η τιμή της αντίστασης του κυκλώματος είναι ιδίας τάξης μεγέθους με την εσωτερική αντίσταση του οργάνου μέτρησης που στην περίπτωση μας είναι το πολύμετρο.

Για να βρεθεί το ποσοστό επίδρασης του φαινομένου αυτού απλά χρειάζεται να πολλαπλασιαστεί η απόκλισή με το 100. Συγκεκριμένα για κάθε αντίσταση το ποσοστό επίδρασης του φαινομένου επίδρασης φορτιού θα ισούται με :

$$\boldsymbol{LE_R = 100 \cdot \%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R) = 100 \cdot 0.01 = 1\ \%}$$

$$\boldsymbol{LE_{RA} = 100 \cdot \%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_A) = 100 \cdot (-0.04) = -4\ \%}$$

$$\boldsymbol{LE_{RB} = 100 \cdot \%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_B) = 100 \cdot 0.01 = 1\ \%}$$

$$\boldsymbol{LE_{R\Gamma} = 100 \cdot \%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_\Gamma) = 100 \cdot 9.1 \cdot 10^{-3} = 0.91\ \%}$$

$$\boldsymbol{LE_{R4} = 100 \cdot \%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (R_4) = 100 \cdot 0.01 = 1\ \%}$$

$\boldsymbol{LE_{R5} = 100 \cdot \%\ απόκλιση\ (R_5) = 100 \cdot 6.1 \cdot 10^{-3} = 0.61\ \%}$

Το ποσοστό αυτό είναι περίπου ίδιο και στης έξι αντιστάσεις καθώς και η έξι έχουν ίδια τάξης μεγέθους τιμή, δηλαδή ήταν κάτι αναμενόμενο.

β) Στο δεύτερο μέρος της πειραματικής εργασίας χρειάζεται να συνδεσουμε την πηγή τάσης και να μετρήσουμε την πειραματική τιμή της. Για να το επιτύχουμε αυτό καταρχάς συνδέουμε στο breadboard της έξι αντιστάσεις ακριβώς όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην εικόνα 2, έπειτα συνδέουμε το ελεύθερο άκρο της αντίστασης R με τον αρνητικό πόλο της πηγής και το ελεύθερο άκρο της αντίσταση των αντιστάσεων R_4και R_5 με την γείωση της πηγής. Έπειτα ρυθμίζουμε την τάση στην πηγή στα 9V. Τέλος περνούμε το πολύμετρο, επιλέγουμε μέτρηση συνεχούς τάσης και το συνδέουμε στα άκρα του κυκλώματος. Η τιμή που εμφανίζεται στην οθόνη του πολύμετρου είναι η πειραματική τιμή και στην περίπτωση μας ισούται με $\boldsymbol{V_\pi = 9.001\ V}$.

Σύμφωνα με την εξίσωση (6) η απόκλιση της πειραματικής τιμής από την ονοματική θα ισούται με:

$$\%\ \textbf{απόκλιση}\ (\mathbf{V}) = \frac{\textbf{ονομ. τιμή} - \textbf{πειρ. τιμή}}{\textbf{ονομ. τιμή}} = \frac{\mathbf{9-9.001}}{\mathbf{9}} = \frac{\mathbf{-0.001}}{\mathbf{9}} = \mathbf{-1.1 \cdot 10^{-4}}$$

Θα πρέπει να προσέξουμε όμως ότι η απόκλισή αυτή αν και πολύ μικρή δεν παρατηρείτε μόνο λόγο του φαινομένου επίδρασης φορτιού αλλά και λόγο της ακρίβειας της ρυθμίσεις της τιμής στα 9V της πηγής τάσης. Εφόσον η επιλογή της τιμής αυτής δεν έγινε ψηφιακά αλλά με το χέρι, υπάρχει η επίδραση ανθρωπίνου παράγοντα στην πειραματική τιμή που υπολογίστηκε.

2) Υπολογισμός ρευμάτων

α) Στο τρίτο μέρος της πειραματικής εργασίας χρειάζεται να γίνει αρχικά μέτρηση της τάσης V_{Rj} στα άκρα κάθε αντιστάτη και στην συνέχεια, με την βοήθεια του νόμου του Ohm να υπολογιστεί το αντίστοιχο ρεύμα. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο αρχικά το κύκλωμα θα πρέπει να είναι ίδιο με του προηγούμενου μέρους β) έπειτα παρεμβάλλοντας το πολύμετρο ως βολτόμετρο στα άκρα κάθε αντίστασης καταγράφουμε την τιμή της οθόνης του πολύμετρου ως πειραματική τιμή τάσης. Οι τιμές που καταγραφτήκαν είναι οι παρακάτω:

$$\mathbf{V_R = 3.15\ V,\ V_{RA} = 0.36\ V,\ V_{RB} = 2.32\ V,\ V_{R\Gamma} = 2,68\ V,\ \ V_4 = 3,10V\ και\ V_5 = 3,46\ V}$$

Έπειτα σύμφωνα με τον νομό του Ohm, εξίσωση (2.1) θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{I_R = {}^{V_R}/_{R_\pi} = {}^{3.15}/_{0.99} = 3.18\ mA}$$

$$\mathbf{I_{RA} = {}^{V_{RA}}/_{R_{A,\pi}} = {}^{0.36}/_{0.28} = 1.29\ mA}$$

$$\mathbf{I_{RB} = {}^{V_{RB}}/_{R_{B,\pi}} = {}^{2.32}/_{0.99} = 2.34\ mA}$$

$$\mathbf{I_{R\Gamma} = {}^{V_{R\Gamma}}/_{R_{\Gamma,\pi}} = {}^{2.68}/_{0.99} = 0.82\ mA}$$

$\mathbf{I_{R4}} = {}^{\mathbf{V_{R4}}}/_{\mathbf{R_{4,\pi}}} = {}^{\mathbf{3.10}}/_{\mathbf{1.48}} = \mathbf{2.09\ mA}$

$\mathbf{I_{R5}} = {}^{\mathbf{V_{R5}}}/_{\mathbf{R_{5,\pi}}} = {}^{\mathbf{3.46}}/_{\mathbf{3.28}} = \mathbf{1.06\ mA}$

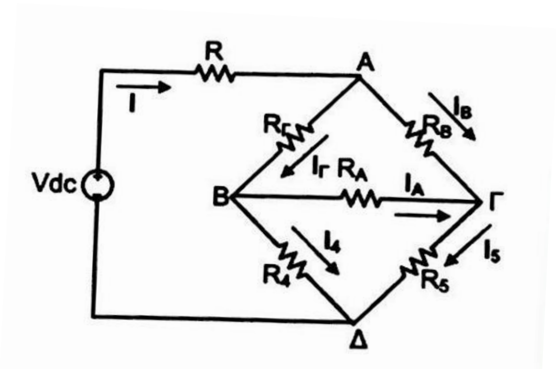
Από την άλλη μπορούμε και μέσω του πολύμετρου να βρούμε της τιμές των ρευμάτων, παρεμβάλλοντας το σε σειρά σε κάθε κλάδο. Αν το κάνουμε αυτό και επιλέξουμε στο πολύμετρο να μας εμφανίσει συνεχές ρεύμα παίρνουμε της παρακάτω τιμές:

$\mathbf{I_R = 3.15}\ \boldsymbol{mA}, \mathbf{I_{RA} = 1.28}\ \boldsymbol{mA},\ \ \mathbf{I_{RB} = 2.33}\ \boldsymbol{mA}, \mathbf{I_{R\Gamma} = 0.81}\ \boldsymbol{mA}, \mathbf{I_{R4} = 2.09}\ \boldsymbol{mA}\ \kappa\alpha\iota\ \mathbf{I_{R5} = 1.05}\ \boldsymbol{mA}$

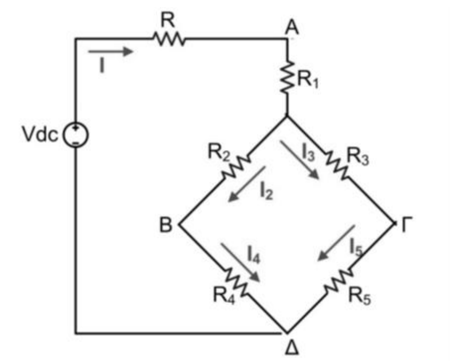
Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η τιμές αυτές είναι πολύ κοντά η μια στην άλλη γι' αυτό και δεν έχει νόημα να βρεθεί η απόκλιση ή να σχολιάσουμε τον λόγο που εμφανίζεται η απόκλιση αυτή καθώς οι περισσότερες τιμές διαφέρουν κατά 0.01 το οποίο είναι σχετικά μηδαμινό.

3) Θεωρητικός υπολογισμός των ρευμάτων

Για να υπολογίσουμε της θεωρητικές τιμές των ρευμάτων κάθε αντίστασης και έπειτα να της συγκρίνουμε με της πειραματικές, χρειάζεται να λύσουμε θεωρητικά το κύκλωμα. Συγκεκριμένα θα πρέπει να γίνουν δυο μετασχηματισμοί Δ σε Υ. Ξεκινώντας με το πάνω τρίγωνο της εικόνας 2 θα ισχύει ότι:



Εικόνα 3



Εικόνα 4

Δηλαδή από το αρχικό κύκλωμα (Εικόνα 3), μέσω του μετασχηματισμού θα πάρουμε το κύκλωμα της Εικόνας 4. Για τις συγκεκριμένες τιμές των αντιστάσεων και με βάση τις εξισώσεις (7, 8 και 9), θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$\mathrm{R_1} = (\mathrm{R_B} \cdot \mathrm{R_\Gamma})/(\mathrm{R_A} + \mathrm{R_B} + \mathrm{R_\Gamma}) = \frac{1 \cdot 3.3}{0.27+1+3.3} = \frac{3.3}{4.57} = 0.72\ k\Omega \Rightarrow \mathbf{R_1 = 0.72}\ \boldsymbol{k\Omega}$

$$\mathrm{R_2} = \frac{\mathrm{R_\Gamma} \cdot \mathrm{R_A}}{\mathrm{R_A} + \mathrm{R_B} + \mathrm{R_\Gamma}} = \frac{0.27 \cdot 3.3}{0.27 + 1 + 3.3} = \frac{0.891}{4.57} = 0.19\ k\Omega \Rightarrow \mathbf{R_1 = 0.19}\ \boldsymbol{k\Omega}$$

$$\mathrm{R_3} = \frac{\mathrm{R_A} \cdot \mathrm{R_B}}{\mathrm{R_A} + \mathrm{R_B} + \mathrm{R_\Gamma}} = \frac{0.27 \cdot 1}{0.27 + 1 + 3.3} = \frac{0.27}{4.57} = 0.06\ k\Omega \Rightarrow \mathbf{R_1 = 0.06}\ \boldsymbol{k\Omega}$$

Έπειτα, βρίσκουμε το συνολικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα ως εξής:

Καταρχάς η αντιστάσεις $R_2\ \kappa\alpha\iota\ R_4$ βρισκονται σε σειρα, σύμφωνα με την εξίσωση (1) θα ισχύει ότι:

$R_{2,4} = R_2 + R_4 = 0.19 + 1.5 = 1.69\ k\Omega \Rightarrow \boldsymbol{R_{2,4}} = \mathbf{1.69}\ \boldsymbol{k\Omega}$

Ομοίως για της αντιστάσεις R_3 και R_5:

$R_{3,5} = R_3 + R_5 = 0.06 + 3.3 = 3.36\ k\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{R_{3,5} = 3.36\ k\Omega}$

Όμως η αντιστάσεις $\boldsymbol{R_{2,4}}$ και $\boldsymbol{R_{3,5}}$ συνδέονται παράλληλα, οπότε για να βρούμε την ολικη τουσ αντισταση χρειαζόμαστε την εξίσωση 1.1, σύμφωνα με αυτήν θα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{R_{24,35}} = \frac{1}{R_{2,4}} + \frac{1}{R_{3,5}} = \frac{1}{1.69} + \frac{1}{3.36} = 0.89 \Longrightarrow \mathbf{R_{24,35} = 1.12\ k\Omega}$$

Τέλος σύμφωνα με τον νόμο του Ohm (εξίσωση 2.1) και της εξίσωσης 1 θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{I}_{o\lambda} = {}^{\mathrm{V}_{dc}}\!/_{\mathrm{R}_{o\lambda}} = {}^{9}\!/_{(R + R_1 + \mathrm{R}_{24,35})} = \frac{9}{(1 + 0.72 + 1.12) \cdot 10^3} = 3.17 \cdot 10^{-3} A = 3.17\ mA$$

$\Longrightarrow \mathbf{I_{o\lambda} = 3.17}\ \boldsymbol{mA}$

Φυσικά η τιμή αυτή που βρήκαμε ισοδύναμη και με την θεωρητική τιμή του ρεύματος της αντίστασης R, δηλαδή και $\boldsymbol{I_{R,\Theta} = 3.17\ mA}$**.**

Έπειτα για να βρούμε τα ρεύματα των αντιστάσεων $R_4\ και\ R_5$ θα πρέπει να εργαστούμε ως εξής:

Καταρχάς στον κόμβο κάτω από την αντίσταση R_1 σύμφωνα με τον 1ο κανόνα του Kirchhoff θα ισχύει ότι:
$\mathbf{I_{o\lambda} = I_2 + I_3}$ (10)

Επίσης επειδή η αντιστάσεις $R_{2,4}\ και\ R_{3,5}$ συνδέονται παράλληλα γνωρίζουμε ότι η τάση στα άκρα του θα είναι ίση, δηλαδή:
$V_{2,4} = V_{3,5} \Longrightarrow \mathrm{I}_2 \cdot (R_2 + R_4) = \mathrm{I}_3 \cdot (R_3 + R_5) \Longrightarrow \mathrm{I}_2 \cdot (0.19 + 1.5) = \mathrm{I}_3 \cdot (0.06 + 3.3)$

$\Longrightarrow \mathrm{I}_2 \cdot 1.69 = \mathrm{I}_3 \cdot 3.36 \Longrightarrow \mathbf{I_2 = 1.99 \cdot I_3}$ (11)

Από την σχέση 10 λοιπόν και την σχέση 11 θα ισχύει:

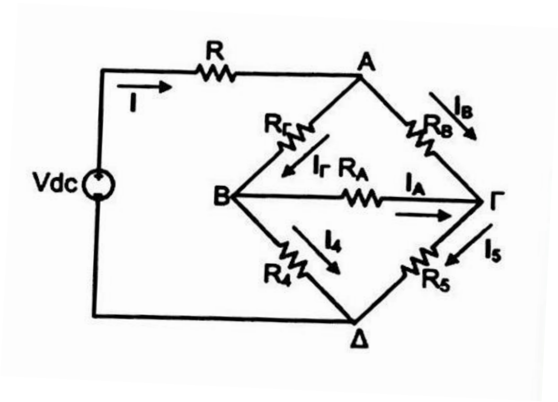
$$(10) \overset{(11)}{\Longrightarrow} \mathrm{I}_{o\lambda} = \mathrm{I}_2 + 1.99 \cdot \mathrm{I}_3 = 2.99 \cdot \mathrm{I}_3 \Longrightarrow \mathrm{I}_3 = \frac{\mathrm{I}_{o\lambda}}{2.99} = \frac{3.17}{2.99} = 1.06\ mA \Longrightarrow \mathbf{I_3 = 1.06}\ \boldsymbol{mA}$$

$Και\ \mathrm{I}_2 = 1.99 \cdot \mathrm{I}_3 = 1.99 \cdot 1.06 = 2.1\ \mathrm{mA} \Longrightarrow \mathbf{I_2 = 2.1\ mA}$

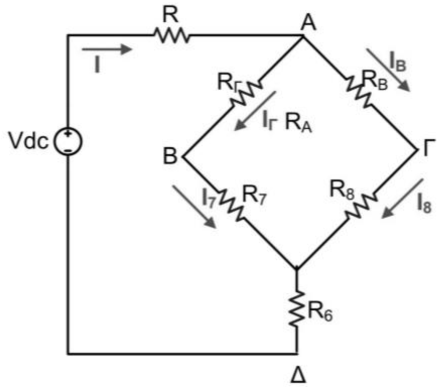
Φυσικά όπως ευκολά παρατηρεί κάνεις η αντιστάσεις $R_2\ και\ R_4$ όπως και η $R_3\ με\ R_5$ είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους σε σειρά, αρά της διαπερνά το ίδιο ρεύμα και έτσι το ρεύμα της αντίστασης R_4 θα είναι το I_2 ενώ της R_5 το I_3.

Δηλαδή: $\boldsymbol{I_{R4,\Theta} = 2.1\ mA}\ και\ \boldsymbol{I_{R5,\Theta} = 1.06\ mA}$

Εάν προσέξουμε το κύκλωμα δεν υπάρχουν η αντιστάσεις $R_B, R_\Gamma\ και\ R_A$. Της πρώτες δυο θα της βρούμε μέσω του μετασχηματισμού του κάτω τριγώνου ενώ την R_A στο τέλος. Με τον μετασχηματισμό του κάτω τριγώνου λοιπόν το κύκλωμα θα γίνει ως εξής (Εικόνα 5).



Εικόνα 3



Εικόνα 5

Ομοίως για της συγκεκριμένες τιμές των αντιστάσεων και με την λογική των εξισώσεων (7,8 και 9) θα ισχύουν η εξής σχέσεις:

$$\mathrm{R_6} = (\mathrm{R_5} \cdot \mathrm{R_4})/(\mathrm{R_4} + \mathrm{R_5} + \mathrm{R_A}) = \frac{3.3 \cdot 1.5}{1.5+3.3+0.27} = \frac{4.95}{5.07} = 0.98\ k\Omega \Longrightarrow \mathbf{R_6 = 0.98}\ \boldsymbol{k\Omega}$$

$$\mathrm{R_7} = \frac{\mathrm{R_4} \cdot \mathrm{R_A}}{\mathrm{R_4} + \mathrm{R_5} + \mathrm{R_A}} = \frac{1.5 \cdot 0.27}{5.07} = \frac{0.405}{5.07} = 0.08\ k\Omega \Longrightarrow \mathbf{R_7 = 0.08}\ \boldsymbol{k\Omega}$$

$$\mathrm{R_8} = \frac{\mathrm{R_5} \cdot \mathrm{R_B}}{\mathrm{R_4} + \mathrm{R_5} + \mathrm{R_A}} = \frac{3.3 \cdot 0.27}{5.07} = \frac{0.891}{5.07} = 0.17\ k\Omega \Longrightarrow \mathbf{R_8 = 0.17}\ \boldsymbol{k\Omega}$$

Προφανώς το συνολικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι το ίδιο ($\mathbf{I_{o\lambda} = 3.17}\ \boldsymbol{mA}$). Στον κόμβο Α έχουμε διάσπαση του ρεύματος σε $I_\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ I_B$. Σύμφωνα με τον 1ο κανόνα του Kirchhoff θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{I_{o\lambda} = I_\Gamma + \ I_B}\ (12)$$

Με όμοιο τρόπο και ίδια επεξήγηση θα ισχύει ότι:

$$V_{\Gamma,7} = V_{B,8} \Longrightarrow \mathrm{I_\Gamma} \cdot (R_\Gamma + R_7) = \mathrm{I_B} \cdot (R_B + R_8) \Longrightarrow \mathrm{I_\Gamma} \cdot (3.3 + 0.08) = \mathrm{I_B} \cdot (1 + 0.17)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{I_\Gamma} \cdot 3.38 = \mathrm{I_B} \cdot 1.17 \Longrightarrow \mathbf{I_\Gamma = 0.35 \cdot I_B}\ (13)$$

Από την σχέση 12 λοιπόν και την σχέση 13 θα ισχύει:

$$(12) \overset{(13)}{\Longrightarrow} \mathrm{I_{o\lambda}} = \mathrm{I_\Gamma} + 0.35 \cdot \mathrm{I_B} = 1.35 \cdot \mathrm{I_B} \Longrightarrow \mathrm{I_B} = \frac{\mathrm{I_{o\lambda}}}{1.35} = \frac{3.17}{1.35} = 2.35\ mA \Longrightarrow \mathbf{I_B = 2.35}\ \boldsymbol{mA}$$

$$\textit{Και}\ \mathrm{I_\Gamma} = 0.35 \cdot \mathrm{I_3} = 0.35 \cdot 2.35 = 0.82\ \mathrm{mA} \Longrightarrow \mathbf{I_\Gamma = 0.82\ mA}$$

Τα ρεύματα αυτά αντιστοιχούν στης αντιστάσεις $\mathrm{R_B}$ και $\mathrm{R_\Gamma}$ αντοιστηχα.

Δηλαδή: $\boldsymbol{I_{RB,\Theta} = 2.35\ \ mA}$ *και* $\boldsymbol{I_{R\Gamma,\Theta} = 0.82\ mA}$

Τέλος για την αντίσταση $\mathrm{R_A}$ σύμφωνα με το κύκλωμα της εικόνας 3 θα ισχύει ότι:

Στον κόμβο Β μέσω του 1ου νόμου του Kirchhoff το ρεύμα $\mathrm{I_\Gamma}$ θα ισουτε με
$\mathrm{I_\Gamma} = \mathrm{I_4} + \mathrm{I_{RA}} \Longrightarrow \mathrm{I_{RA}} = \mathrm{I_\Gamma} - \mathrm{I_4} = 0.82 - 2.1 = -1.28 \Longrightarrow \boldsymbol{I_{RA} = -1.28\ mA}$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η κατεύθυνση του ρεύματος είναι αντίθετη από αυτήν του κυκλώματος της εικόνας 3.

Έχοντας λοιπόν όλες της θεωρητικές τιμές των εντάσεων κάθε αντίστασης μπορούμε να συγκρίνουμε της τιμές αυτές με της τιμές των εντάσεων από το προηγούμενο μέρος, δηλαδή των έμμεσών τιμών, αυτών δηλαδή που βρήκαμε μέσω του νομού του ohm και των άμεσων, δηλαδή αυτών που βρήκαμε μέσω του πολύμετρο.

Για της έμμεσες τιμές (Εικόνα 2,Πινακας ΙΙ, 3η Στήλη) και της αποκλίσεις των τιμών αυτών από της θεωρητικές θα ισχύει ότι:

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{R,\varepsilon\mu}\right) = \frac{\text{ονομ. τιμή} - \text{πειρ. τιμή}}{\text{ονομ. τιμή}} = \frac{3.17-3.18}{3.17} = \frac{-0.01}{3.17} = -3.15 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{RA,\varepsilon\mu}\right) = \frac{1.28-1.29}{1.28} = \frac{-0.01}{1.28} = -7.81 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{RB,\varepsilon\mu}\right) = \frac{2.35-2.34}{2.35} = \frac{0.01}{2.35} = 4.25 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (I_{R\Gamma,\varepsilon\mu}) = \frac{0.82-0.82}{0.82} = \frac{0}{0.82} = 0$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (I_{R4,\varepsilon\mu}) = \frac{2.1-2.09}{2.1} = \frac{0.01}{2.1} = 4.76 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{R5,\varepsilon\mu}\right) = \frac{1.06-1.06}{1.06} = \frac{0}{1.06} = 0$$

Για της άμεσες τιμές (Εικόνα 2,Πινακας ΙΙ, 4η Στήλη) και της αποκλίσεις των τιμών αυτών από της θεωρητικές θα ισχύει ότι:

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{R,\alpha\mu}\right) = \frac{3.17-3.15}{3.17} = \frac{0.02}{3.17} = 6.31 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{RA,\alpha\mu}\right) = \frac{1.28-1.28}{1.28} = \frac{0}{1.28} = 0$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{RB,\alpha\mu}\right) = \frac{2.35-2.33}{2.35} = \frac{0.02}{2.35} = 8.51 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (I_{R\Gamma,\alpha\mu}) = \frac{0.82-0.81}{0.82} = \frac{0.01}{0.82} = 0.01$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ (I_{R4,\alpha\mu}) = \frac{2.1-2.09}{2.1} = \frac{0.01}{2.1} = 4.76 \cdot 10^{-3}$$

$$\%\ \alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \left(I_{R5,\alpha\mu}\right) = \frac{1.06-1.05}{1.06} = \frac{0.01}{1.06} = 9.43 \cdot 10^{-3}$$

4) Σχολιασμός τιμών και έλεγχος του νομού του Kirchhoff

Η αποκλίσεις όλων τον τιμών είναι πάρα πολύ μικρές, γι' αυτό ευθύνεται περισσότερο το ότι η ρύθμιση στην τιμή της πηγής τάσης έτυχε να προσδιοριστεί πάρα πολύ κοντά με την θεωρητική (9.0001 V) και ότι η αντίστασης που χρησιμοποιήθηκαν δεν είναι ίδιας τάξης μεγέθους με αυτή του πολύμετρο γι' αυτό και το φαινόμενο επίδρασης φορτίου δεν επηρέασε σε μεγάλο βαθμό της τιμές.

Για τον έλεγχο του 1ου νόμου του Kirchoff ας εξετάσουμε έναν έναν τους κόμβους:

Στον κόμβο Α θα πρέπει να ισχύει βλέποντας την εικόνα 3 η παρακάτω σχέση $I = I_\Gamma + I_B = 0.82 + 2.35 = 3.17\ mA \Longrightarrow I = 3.17\ mA$ δηλαδή το I το οποίο ισούται με το I_R ισούται με 3.17 mA κάτι που σύμφωνα με της θεωρητικές τιμές που βγάλαμε ισχύει.

Ο κόμβος Β αναλύθηκε παραπάνω για τον προσδιορισμό της I_{RA}.

Στον κόμβο Γ θα πρέπει να ισχύει:

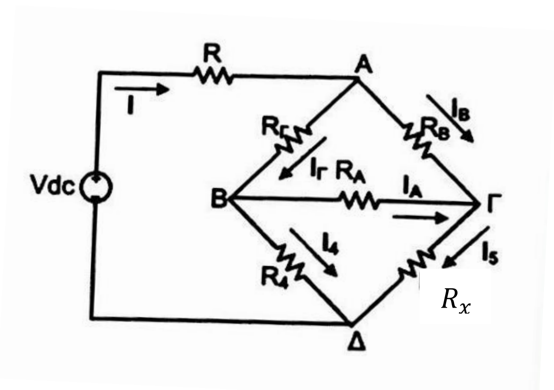
$I_B = I_A + I_5 = 1.28 + 1.06 = 2.34\ mA \Longrightarrow I_B = 2.34\ mA$, εάν συγκρίνουμε την τιμή αυτήν με την θεωρητική της θα δούμε ότι διαφέρουν κατά 0.01 mA. Αυτό δεν συμβαίνει λόγο κάποιου φαινομένου αλλά λόγο της ακρίβειας τον δεκαδικών των παραπάνω τιμών.

Τέλος στον κόμβο Δ:

$I = I_4 + I_5 = 2.1 + 1.06 = 3.16\ mA \Longrightarrow I = 3.16\ mA$, διαφορά με την θεωρητική τιμή του I_R κατά 0.01 πάλι λόγω της ακρίβειας τον δεκαδικών.

5) Ισορροπία Γέφυρας

Στο τελευταίο μέρος της εργαστηριακής άσκησης θα επιχειρήσουμε καταρχάς να αλλάξουμε των αντιστάτη R_5 με ένα κιβώτιο αντιστάσεων. Έπειτα δίνοντας διάφορες τιμές στο κιβώτιο και έχοντας συνδέσει το πολύμετρο στα άκρα της αντίστασης R_A ,θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε την τιμή της αντίστασης που πρέπει να πάρει το κιβώτιο αντιστάσεων ώστε η γέφυρα να ισορροπεί. Δηλαδή το πολύμετρο να μας δήξει τάση 0V ($V_{RA} = 0$). Έπειτα την τιμή της αντίστασης αυτής η οποία θα είναι και η πειραματική τιμή θα την συγκρίνουμε με την θεωρητική.



Για να προσδιορίσουμε την θεωρητική τιμή θα πρέπει να λύσουμε το κύκλωμα ως εξής:

Καταρχάς έχουμε ως δεδομένο ότι $V_{RA} = 0$, όμως $V_{RA} = I_{RA} \cdot R_{RA} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{I_{RA} = 0}$

Αυτό σημαίνει ότι στους κόμβους Β και Γ θα πρέπει σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Kirchoff να ισχύει:

$I_\Gamma = I_4 + I_A = I_4 + 0 \Longrightarrow \boldsymbol{I_\Gamma = I_4}$

Και

$$I_B = I_5 - I_A = I_5 - 0 \Longrightarrow I_B = I_5 \Longrightarrow I_B = \frac{V_{RX}}{R_x} \Longrightarrow \boldsymbol{R_x} = \frac{\boldsymbol{V_{RX}}}{\boldsymbol{I_B}} \quad (14)$$

Γνωρίζουμε ακόμη ότι η τάση των κόμβων Β και Γ πρέπει να είναι η ίδια. Δηλαδή:

$$V_B = V_\Gamma \Longrightarrow I_\Gamma \cdot (R_\Gamma + R_4) = V_\Gamma \Longrightarrow V_\Gamma = 0.82 \cdot 10^{-3}(3.3 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 10^3) = 0.82 \cdot 4.8 = 3.94\ V$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{V_{\Gamma} = 3.94\, V}$

Όμως $V_{\Gamma} = V_B + V_{Rx} \Longrightarrow V_{Rx} = V_{\Gamma} - V_B = V_{\Gamma} - I_B \cdot R_B = 3.94 - 2.35 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 3.94 - 2.35 = 1.59\, V$

$\Longrightarrow \boldsymbol{V_{Rx} = 1.59\, V}$

Οπότε από την σχέση (14):

$$\boldsymbol{R_x} = \frac{\boldsymbol{V_{RX}}}{\boldsymbol{I_B}} = \frac{1.59}{2.35 \cdot 10^{-3}} = 680\, \Omega \Longrightarrow \mathbf{R_x = 680\, \Omega}$$

Για την πειραματική τιμή όπως ειπώθηκε και νωρίτερα αυτό που θα πρέπει να γίνει όταν έχουμε συνδέσει το κιβώτιο αντιστάσεων στην θέση της αντίστασης R_5 είναι να δίνουμε τυχαίες τιμές στο κιβώτιο έως ότου η τάση στα άκρα της αντίστασης R_A να δήξει 0. Δηλαδή το πολύμετρο να δήξει 0 V.

Η πειραματική τιμή που μετρήθηκε ισούται με $\mathbf{R_{x,\pi} = 444\, \Omega}$ και το πολύμετρο για την συγκεκριμένη τιμή της αντίστασης έδειχνε $\mathbf{V_{RA} = 0.001\, V}$.

Για την απόκλιση τον δυο τιμών αυτών θα ισχύει ότι:

$\%\ απόκλιση\ (\mathbf{R_x}) = \frac{680-444}{680} = \frac{236}{680} = 0.35$

Συμπέρασμα:

Συμπερασματικά, η εργαστηριακή άσκηση αυτή είχε ως κύριο σκοπό τη μελέτη του κυκλώματος γέφυρας, τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι τιμές που προσδιορίστηκαν πειραματικά αποκλίνουν ελάχιστα από τις θεωρητικές τιμές, καθιστώντας τη μελέτη μας αξιόπιστη και ακριβή. Μέσα από αυτήν την άσκηση αποκτήσαμε βαθιά κατανόηση του τρόπου λειτουργίας της γέφυρας και ενίσχυσαν τις γνώσεις μας σχετικά με τα ηλεκτρικά κυκλώματα γενικότερα.