Θεώρημα Μέγιστης Μεταφοράς Ισχύος
και Επαλληλίας

Κλάιντι Τσάμη

Περίληψη:

Η εργαστηριακή άσκηση αυτή αποτελεί μια σημαντική διαδικασία που ενισχύει την κατανόηση των βασικών αρχών της μέγιστης μεταφοράς ισχύος στον τομέα της ηλεκτρολογίας και της ενέργειας. Κατά τη διάρκεια αυτής της άσκησης, εφαρμόσαμε τη θεωρία που μελετήσαμε σε ένα πρακτικό πλαίσιο, χρησιμοποιώντας διαγράμματα και πειραματικές μετρήσεις. Αυτό μας επέτρεψε να επαληθεύσουμε την ακρίβεια της θεωρίας και να εξοικειωθούμε με τη διαδικασία ανάλυσης και επίλυσης πραγματικών προβλημάτων στον τομέα αυτόν. Η επιτυχής ολοκλήρωση αυτής της άσκησης ενίσχυσε τις γνώσεις μας και τις δεξιότητές μας, προετοιμάζοντάς μας για πιο προηγμένες εφαρμογές και μελλοντικές προκλήσεις στον χώρο της ηλεκτρολογίας και της ενέργειας.

Εισαγωγή:

Η εργαστηριακή άσκηση αυτή έγινε με κύριο σκοπό την πειραματική μελέτη των θεωρημάτων μέγιστης μεταφοράς ισχύος και επαλληλίας. Παρακάτω εφαρμόζονται τα θεωρήματα αυτά σε δυο συγκεκριμένα ηλεκτρικά κυκλώματα με κύριο στόχο την απόδειξη των θεωρημάτων αυτών μέσω πειραματικών τιμών, συγκρίνοντας δηλαδή της πειραματικές τιμές που μετρήθηκαν με της θεωρητικές τιμές σύμφωνα με την θεωρία.

Θεωρία:

Για την μαθηματική μελέτη της εργαστηριακής άσκησης αυτής χρειάζονται κάποιες βασικές θεωρίες και εξισώσεις η οποίες αναγράφονται και αριθμούνται παρακάτω.

Καταρχάς, εάν σε ένα κύκλωμα έχουμε συνδέσει πολλές αντιστάσεις σε σειρά, το ρεύμα που διαπερνά κάθε αντίσταση είναι το ίδιο, αυτό διότι το ρεύμα έχει μόνο μία διαδρομή. Η συνολική αντίσταση στο κύκλωμα αυτό θα είναι το άθροισμα των αντιστάσεων. Για παράδειγμα, εάν στο κύκλωμα συνδέονται σε σειρά n αντιστάσεις, τότε η συνολική αντίσταση θα ισούται με:

$$\boldsymbol{R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \quad (1)$$

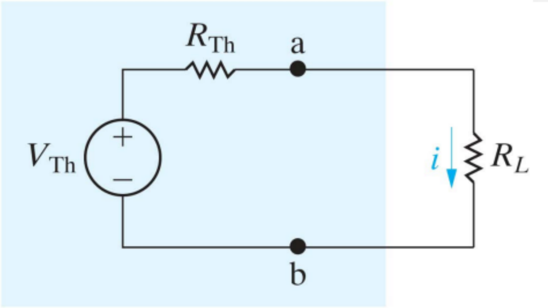
Από την άλλη εάν οι n αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα τότε για την συνολική αντίσταση θα ισχύει ότι:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_n}} \quad (1.1)$$

Νόμος του Ohm:
Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm η τάση στα άκρα ενός κυκλώματος ισούται με το γινόμενο της τιμής της αντίστασης επί την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Δηλαδή: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{R}$ (2)

Θεωρία προβλήματος μέγιστης μεταφοράς ισχύος:



Εικόνα 1

Γενικά σε ένα κύκλωμα (Εικόνα 1) το οποίο αποτελείτε από μια τάση V και συνολική αντίσταση R_{th} η ισχύς που αποτίθεται στην αντίσταση φορτιού θα ισούται με:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{i^2} \cdot \boldsymbol{R_L} = \left(\frac{\boldsymbol{V_{Th}}}{\boldsymbol{R_{Th}}+\boldsymbol{R_L}}\right)^{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{R_L} \quad (3)$$

Για να βρούμε για ποιο $\boldsymbol{R_L}$ η ισχύς γίνεται μέγιστη ενεργούμε ως εξής:

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left(\frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2 \cdot R_L \cdot (R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right) = 0 \Longrightarrow (R_{Th} + R_L)^2 = 2 \cdot R_L \cdot (R_{Th} + R_L)$$

$$\Longrightarrow R_{Th} + R_L = 2 \cdot R_L \Longrightarrow \boldsymbol{R_L} = \boldsymbol{R_{Th}}$$

Ενώ η μέγιστη ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο θα ισούται με:

$$p_{max} = I^2 \cdot R_L = \frac{V_{Th}^2}{(2 \cdot R_{Th})^2} R_{Th} = \frac{V_{Th}^2}{R_{Th}} \Longrightarrow \boldsymbol{p_{max}} = \frac{\boldsymbol{V_{Th}^2}}{\boldsymbol{R_{Th}}} \quad (\mathbf{4})$$

Τέλος για την απόδοση α θα ισχύει ότι:

$$(3) \Longrightarrow p_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 \cdot R_L$$

Ενώ $p = i^2 (R_{Th} + R_L) = \frac{V_{Th}^2}{R_{Th}+R_L}$

Η απόδοση του συστήματος μεταφοράς δίνεται από το λόγο της ισχύος εξόδου p_{out} προς την ισχύ εισόδου p_{in}, δηλαδή από την ισχύ που λαμβάνει το φορτίο p_L προς την ισχύ που προσφέρει η πηγή P.

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{p_L}}{\mathrm{p}} = \frac{\left(\frac{\mathrm{V_{Th}}}{\mathrm{R_{Th}} + \mathrm{R_L}} \right)^2 \cdot \mathrm{R_L}}{\frac{\mathrm{V_{Th}^2}}{\mathrm{R_{Th}} + \mathrm{R_L}}} = \frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{R_{Th}} + \mathrm{R_L}} \Longrightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{R_L}}{\mathbf{R_{Th}} + \mathbf{R_L}} \quad (\mathbf{5})$$

Επιπλέον, επειδή πρόκειται να συγκριθούν πειραματικές τιμές με θεωρητικές (ονομαστικές), απαιτείται η χρήση μιας σχέσης για την απόκλιση των τιμών αυτών. Αυτή η σχέση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

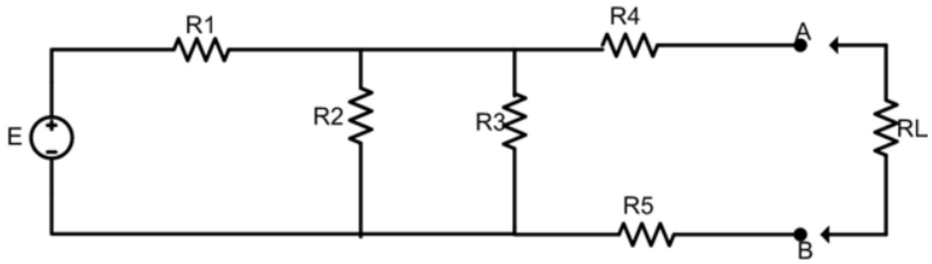
$$\% \boldsymbol{απόκλιση} = \frac{\boldsymbol{ονομ.\ τιμή} - \boldsymbol{πειρ.\ τιμή}}{\boldsymbol{ονομ.\ τιμή}} \quad (6)$$

Πειραματική διαδικασία:

Τα βασικά ηλεκτρονικά εξαρτήματα που θα χρειαστούν για την υλοποίηση της εργαστηριακής ασκήσεις είναι τα παρακάτω:

- Πηγή τάσης
- Μπαταριά 3 V
- Πλακέτα διασύνδεσης (breadboard)
- Πολύμετρο
- Αντιστάτες (2 x 3.3 kΩ, 2 x 1 kΩ , 1.5 kΩ)
- Κιβώτιο αντιστάσεων
- Και διάφορα καλώδια για την διασύνδεση των εξαρτημάτων αυτών

1) Στο πρώτο μέρος της εργαστηριακής άσκησης θα μελετήσουμε το πρόβλημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος στο παρακάτω κύκλωμα (Εικόνα 3).



Εικόνα 3

Καταρχάς πάμε και ωμομετρούμε τους αντιστάτες για να βεβαιωθούμε ότι έχουμε επιλέξει τους σωστούς ($R_1 = R_2 = 3.3\ k\Omega, R_3 = R_5 = 1\ k\Omega, R_4 = 1.5\ k\Omega$), έπειτα πάμε και τους συνδέουμε πάνω στο breadboard όπως φαίνεται στην εικόνα 3. Έπειτα συνδέουμε στο κύκλωμα επίσης όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην εικόνα την πηγή τάσης Ε με τιμή $V = 10V$.
Ως πρώτη πειραματική μέτρηση στο κύκλωμα θα επιχειρήσουμε να μετρήσουμε την ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin του κυκλώματος. Αυτό γίνεται πολύ απλά αν βραχυκυκλώσουμε την τάση της πηγής και ωμομετρήσουμε με το πολύμετρο την αντίσταση του κυκλώματος από τα άκρα Α και Β. Η τιμή που εμφάνισε το πολύμετρο στην μέτρηση αυτή είναι ίση με: $\boldsymbol{R_{th} = 3.08\ k\Omega}$

Για να επιβεβαιώσουμε την τιμή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά την R_{th} του κυκλώματος. Για να το κάνουμε αυτό ενεργούμε ως εξής:
Καταρχάς η R_1 με την R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένες οπότε σύμφωνα με την σχέση (1.1) θα ισχύει ότι:
$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3} = 0.303 + 0.303 = 0.606 \Longrightarrow R_{12} = \frac{1}{0.606} = 1.65\ k\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{R_{12} = 1.65\ k\Omega}$$

Το ίδιο ισχύει και για της αντιστάσεις $R_3\ και\ R_4$:
$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.5} = 1 + 0.66 = 1.66 \Longrightarrow R_{34} = \frac{1}{1.66} = 0.6\ k\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{R_{12} = 0.6\ k\Omega}$$

Τέλος οι αντιστάσεις $R_{12}, R_{34}\ και\ R_5$ είναι συνδεδεμένες σε σειρά άρα το R_{th} του κυκλώματος θα ισούται με:
$$R_{th} = R_{12} + R_{34} + R_5 = 1.65 + 0.6 + 1 = 3.25\ k\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{R_{th,\theta\varepsilon\omega\rho} = 3.25\ k\Omega}$$

Η δυο τιμές αυτές είναι πολύ κοντά η μια με την άλλη και συγκεκριμένα η απόκλιση τους σύμφωνα με την εξίσωση 6 θα ισούται με:

$$\% \boldsymbol{\alpha\pi}ό\boldsymbol{\kappa\lambda\iota\sigma\eta}(\boldsymbol{R_{th}}) = \frac{3.25 - 3.08}{3.25} \cdot 100 = \frac{0.17}{3.25} \cdot 100 = 0.052 \cdot 100 = \mathbf{5.2}\ \%$$

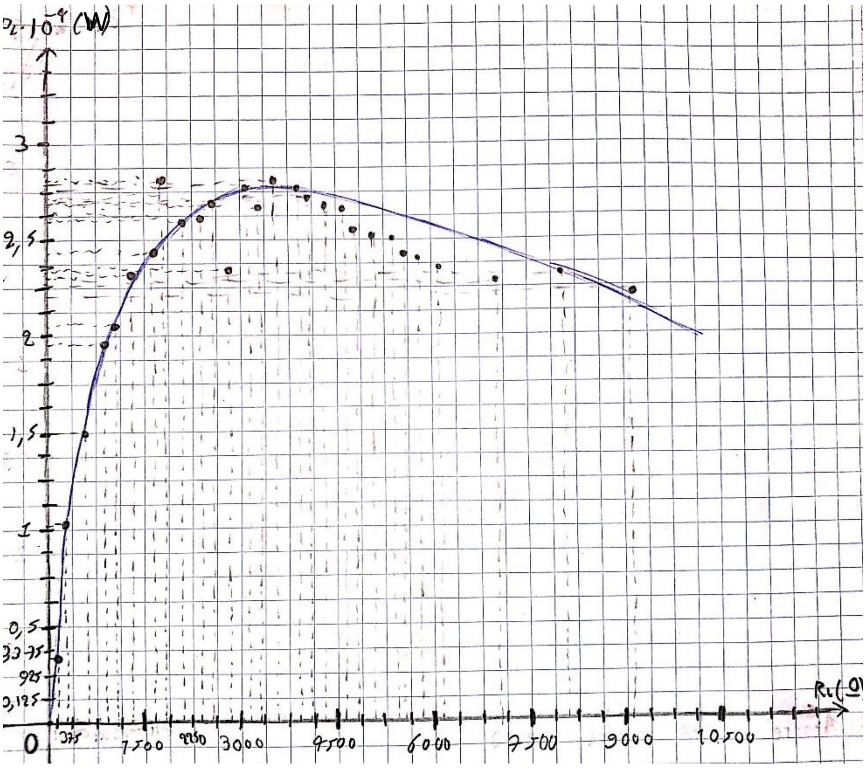
Αμέσως μετά πριν ξανασυνδέσουμε την πηγή τάσης στο κύκλωμα την μετράμε από το πολύμετρο για να δούμε αν η τιμή της ισούται με τα 10 V. Η τιμή που έδειξε το πολύμετρο για την πειραματική τιμή της τάσης V ισούται με: $\boldsymbol{V_{\pi,\pi\eta\gamma ής}} = \mathbf{9.8}\ \boldsymbol{V}$

Τέλος αυτό που θα κάνουμε για να μελετήσουμε το θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος στο κύκλωμα αυτό είναι να πάμε και να συνδεσουμε στα άκρα A,B του κυκλώματος ένα κιβώτιο αντιστάσεων R_L και να μετρήσουμε την τάση V_L σε αυτό για διάφορες τιμές αντίστασης R_L. Συγκεκριμένα η τιμές αυτές θα κυμαίνονται από 100 Ω με βήμα 250 Ω έως την τιμή $2 \cdot R_{th} = 2 \cdot 3.08 = 6.16\ k\Omega$ και μετά με βήμα 1 kΩ έως την τιμή $3 \cdot R_{th} = 3 \cdot 3.08 = 9.24\ k\Omega$. Την τιμή της τάσης V_L θα την μετρησουμε από το πολύμετρο στα άκρα την αντίσταση R_L. Αν κάνουμε της πειραματικές μετρήσεις αυτές προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

A/A	R_L (Ω)	V_L (V)	P_L (W)	a (%)
1	100	0,06	0,000036	3,144654088
2	350	0,19	0,000103143	10,20408163
3	600	0,3	0,00015	16,30434783
4	850	0,41	0,000197765	21,62849873
5	1100	0,48	0,000209455	26,31578947
6	1350	0,56	0,000232296	30,47404063
7	1600	0,63	0,000248063	34,18803419
8	1850	0,72	0,000280216	37,52535497
9	2100	0,74	0,000260762	40,54054054
10	2350	0,79	0,000265574	43,27808471
11	2600	0,84	0,000271385	45,77464789
12	2850	0,82	0,00023593	48,06070826
13	3100	0,92	0,000273032	50,1618123
14	3350	0,95	0,000269403	52,09953344
15	3600	0,99	0,00027225	53,89221557
16	3850	1,02	0,000270234	55,55555556
17	4100	1,05	0,000268902	57,10306407
18	4350	1,07	0,000263195	58,54643338
19	4600	1,1	0,000263043	59,89583333
20	4850	1,12	0,000258639	61,16015132
21	5100	1,14	0,000254824	62,34718826
22	5350	1,16	0,000251514	63,46381969
23	5600	1,18	0,000248643	64,51612903
24	5850	1,2	0,000246154	65,50951848
25	6100	1,22	0,000244	66,44880174
26	7100	1,28	0,000230761	69,74459725
27	8100	1,39	0,000238531	72,45080501
28	9100	1,43	0,000224714	74,71264368

Πίνακας 1

Στον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 1) παρατηρούμε ότι με την αύξηση της αντίστασης R_L αυξάνει και η τάση V κάτι αναμενόμενο σύμφωνα με τον νομό του Ohm, εξίσωση (2), αφού το V και το R είναι ανάλογα μεγέθη. Από την άλλη η ισχύς P_L αυξάνει μέχρι μια μέγιστη τιμή p_{max} και μετά μειώνεται. Η μέγιστη τιμή αυτή όπως αποδείχθηκε στην θεωρία ισχύει όταν $R_L = R_{Th}$, ενώ την αύξηση και την μείωση μπορεί να την καταλάβει κανείς μαθηματικά από την εξίσωση (3). Τέλος η απόδοση α παρατηρούμε σύμφωνα με τον πίνακα ότι αυξάνει και όσο μεγαλώνει η τιμή της R_L τόσο αυτή προσεγγίζει το 100%. Της μεταβολές αυτές μπορούμε να της παρατήσουμε και μέσω διαγραμμάτων. Συγκεκριμένα αν σχεδιάσουμε το διάγραμμα της ισχύς P_L συνάρτηση της αντίστασης R_L θα παρατηρήσουμε αυτήν την αύξηση της τιμής έως το p_{max} και μετά την σταδιακή μείωση της, συγκεκριμένα το διάγραμμα θα είναι το παρακάτω (Εικόνα 4):

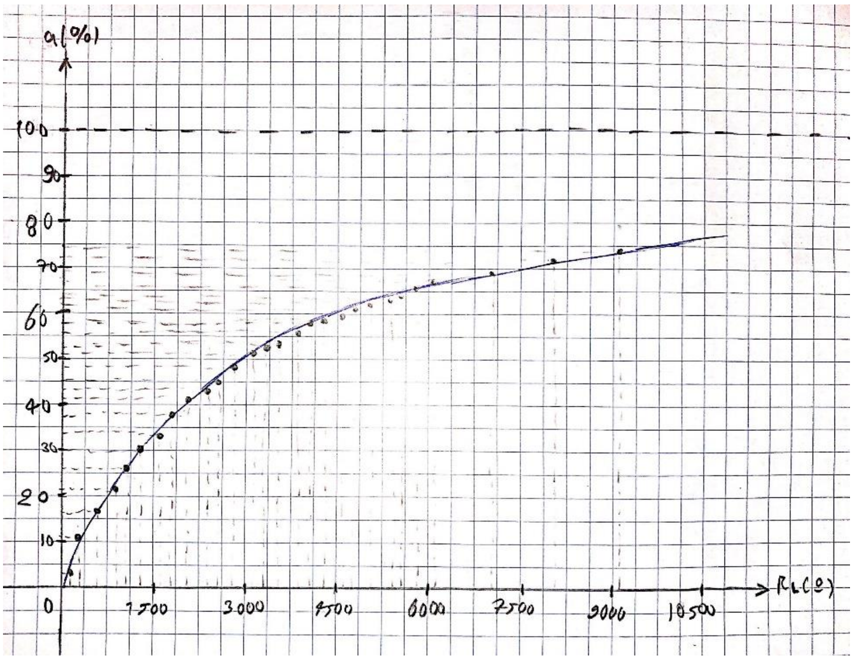


Εικόνα 4

Όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο διάγραμμα η ισχύς φτάνει έως μια τιμή p_{max} η οποια κυμαίνεται κοντά στο $2.750 \cdot 10^{-4}$ W και μετά αρχίζει και μειώνεται. Γενικά όπως αποδείχθηκε μέγιστη μεταφορά ισχύος p_{max} θα έχουμε όταν $R_L = R_{Th}$, στον πίνακα 1 η πιο κοντινή τιμή R_L στην πειραματική τιμή της R_{Th} βρίσκεται στην γραμμή 13 όπου $R_L = 3100\ \Omega$. Για την τιμή αυτή το $P_L = p_{max} = 0{,}000273032$ W ενώ το $\alpha = 50{,}1618123\ \%$, κάτι που περίμενα αφού σύμφωνα με την εξίσωση (5):

$$a = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} = \frac{R_L}{2R_L} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ ή } 50\%$$

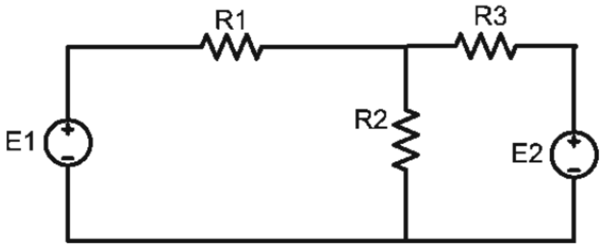
Αν σχεδιάσουμε και το διάγραμμα **α** συνάρτηση του R_L θα έχουμε το εξής (Εικόνα 5):



Εικόνα 5

Το οποίο διάγραμμα εξακριβώνει τα παραπάνω λεγόμενα.

2) Στο δεύτερο μέρος της εργαστηριακής άσκησης θα μελετήσουμε το παρακάτω κύκλωμα (Εικόνα 6) και θα επιχειρήσουμε σε αυτό να αποδείξουμε το θεώρημα της επαλληλίας για την τάση πάνω στην αντίσταση R_2 και το ρεύμα που την διαρρέει.



Εικόνα 6

Ομοίως με το πρώτο μέρος πάμε και ωμομετρούμε της αντιστάσεις και της τοποθετούμε στο breadboard ακριβώς όπως φαίνεται στην εικόνα 6. Έπειτα πριν πάμε και συνδεσουμε της 2 τάσεις Ε1 και Ε2 μετράμε πρώτα της τιμές τους μέσω του πολύμετρο. Η τιμή της τάσης Ε1 θεωρητικά θα πρέπει να είναι 12V, ρυθμίζοντας την πηγή στην τιμή αυτή μετράμε με το πολύμετρο την πειραματική της τιμή, η τιμή αυτή που εμφάνισε το πολύμετρο ρυθμίζοντας την πηγή κοντά στα 12V είναι ίση με : $\boldsymbol{V_{E1,\pi} = 12.3\ V}$. Μετράμε με το πολύμετρο και την τιμή της τάσης της μπαταρίας η οποία θεωρητικά είναι 3V, η τιμή που εμφάνισε το πολύμετρο ισούται με $\boldsymbol{V_{E2,\pi} = 2.93\ V}$. Τέλος πάμε και συνδέουμε την πηγή τάσης Ε1 και την μπαταριά στο κύκλωμα. Όπως ειπώθηκε παραπάνω θα επιχειρήσουμε σε αυτό να αποδείξουμε το θεώρημα της επαλληλίας για την τάση πάνω στην αντίσταση R_2 και το ρεύμα που την διαρρέει. Άρα θα χρειαστεί να υπολογίσουμε πειραματικά άλλα και θεωρητικά τα V_2 ,V_2' $και$ V_2'' όπως και τα I_2 ,I_2' $και$ I_2''. Πειραματικά για να το κάνουμε αυτό απλά πάμε και συνδέουμε το πολύμετρο παράλληλα με την αντίσταση R_3 για να υπολογισουμε την τάση V_2, αν το κάνουμε αυτό η τιμή που εμφανίζει το πολύμετρο ισούται με :

$\boldsymbol{V_2 = 5.32\ V}$

Για να βρούμε την τάση V_2' αυτό που θα πρέπει να κάνουμε σύμφωνα με την θεωρία είναι να πάμε και να βραχυκυκλώσουμε την μπαταριά (E2) και να μετρήσουμε με τον ίδιο τρόπο την τάση, αν το κάνουμε αυτό η τιμή που εμφανίζει το πολύμετρο είναι $\boldsymbol{V_2' = 4.58\ V}$.

Τέλος για να βρούμε την V_2'' απλά βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσης (E1), το πολύμετρο εμφανίζει αν κάνουμε την διαδικασία αυτή την τιμή: $\boldsymbol{V_2'' = 0.72\ V}$

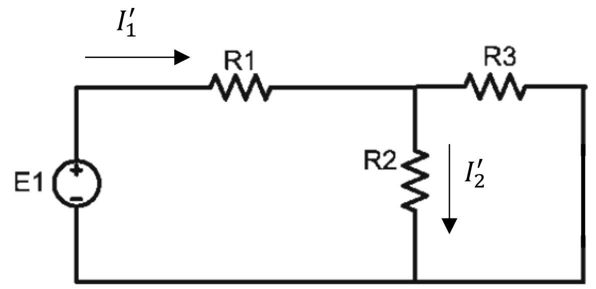
Για της πειραματικές τιμές των ρευμάτων I_2 , I_2' $και$ I_2'' κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία, δηλαδή αρχικά συνδέουμε το πολύμετρο ως αμπερόμετρο σε σειρά στην R_3 και με την ίδια λογική μετράμε τα ρεύματα. Δηλαδή την πρώτη φορά με όλες της τάσης συνδεδεμένες, την δεύτερη με την E2 βραχυκυκλωμένη και τέλος με την E1 βραχυκυκλωμένη. Αν ακολουθήσουμε αυτήν την διαδικασία η τιμές των ρευμάτων που θα εμφανίσει το πολύμετρο είναι η εξής:

$\boldsymbol{I_2 = 5.38\ mA}$

$\boldsymbol{I_2' = 4.65\ mA}$

$\boldsymbol{I_2'' = 0.73\ mA}$

Για να βρούμε θεωρητικά της τιμές αυτές και να επαληθεύσουμε το θεώρημα ενεργούμε ως εξής:
Βήμα 1ο βραχυκυκλώνουμε την μπαταριά E2:



Το ρεύμα I_2' θα εισουτε με :

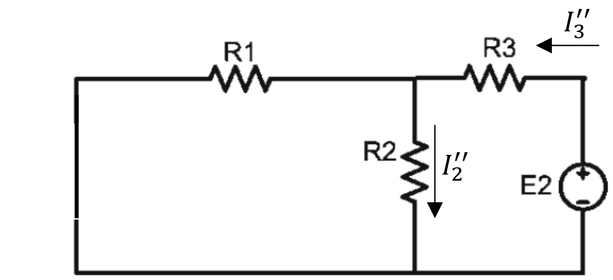
$$I_2' = \frac{R_3}{R_3 + R_2} \cdot I_1' =$$

$$= \frac{V_{E1}(R_3 + R_2)}{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2}$$

$$= \frac{V_{E1} \cdot R_3}{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} = \frac{12 \cdot 1.5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} =$$

$$= 4.5 \cdot 10^{-3} = 4.5\ mA \Rightarrow \boldsymbol{I_2' = 4.5\ mA}$$

Βήμα 2ο βραχυκυκλώνουμε την μπαταρία E1:



Το ρεύμα $\mathrm{I_2''}$ θα εισουτε με :

$$\mathrm{I_2'' = \frac{R_1}{R_2 + R_1} \cdot I_3'' =}$$

$$\mathrm{= \frac{V_{E2}(R_2 + R_1)}{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2 + R_1} =}$$

$$\mathrm{= \frac{V_{E1} \cdot R_1}{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} = \frac{3 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 0.75 \cdot 10^{-3}}$$

$$\mathrm{= 0.75\ mA} \Rightarrow \mathbf{I_2' = 0.75\ mA}$$

Τέλος το ρεύμα $\mathrm{I_2}$ θα ισούται με: $\mathrm{I_2 = I_2' + I_2'' = 4.5 + 0.75 = 5.25\ mA} \Rightarrow \mathbf{I_2 = 5.25\ mA}$

Γνωρίζοντας και της πειραματικές άλλα και της θεωρητικές τιμές μπορούμε να βρούμε ευκολά την απόκλιση των τιμών αυτών από την σχέση (6). Συγκεκριμένα θα ισχύει ότι:

$$\%\ \boldsymbol{απόκλιση}(\boldsymbol{V_2}) = \frac{5.25-5.32}{5.25}\cdot 100 = -\frac{0.07}{5.25}\cdot 100 = -0.0133\cdot 100 = \boldsymbol{-1.33}\ \%$$

$$\%\boldsymbol{απόκλιση}(\ \boldsymbol{V_2'}) = \frac{4.5-4.58}{4.5}\cdot 100 = -\frac{0.08}{4.5}\cdot 100 = -0.0177\cdot 100 = \boldsymbol{-1.7}\ \%$$

$$\%\boldsymbol{απόκλιση}(\ \boldsymbol{V_2''}) = \frac{0.75-0.72}{0.75}\cdot 100 = \frac{0.03}{0.75}\cdot 100 = 0.04\cdot 100 = \boldsymbol{4}\ \%$$

Και για τα ρεύματα :

$$\%\boldsymbol{απόκλιση}(\boldsymbol{I_2}) = \frac{5.25-5.38}{5.25}\cdot 100 = -\frac{0.13}{5.25}\cdot 100 = -0.025\cdot 100 = \boldsymbol{-2.5}\ \%$$

$$\%\boldsymbol{απόκλιση}(\boldsymbol{I_2'}) = \frac{4.5-4.65}{4.5}\cdot 100 = -\frac{0.15}{4.5}\cdot 100 = -0.033\cdot 100 = \boldsymbol{3.3}\ \%$$

$$\%\ \boldsymbol{απόκλιση}(\ \boldsymbol{I_2''}) = \frac{0.75-0.73}{0.75}\cdot 100 = \frac{0.02}{0.75}\cdot 100 = 0.0266\cdot 100 = \boldsymbol{2.66}\ \%$$

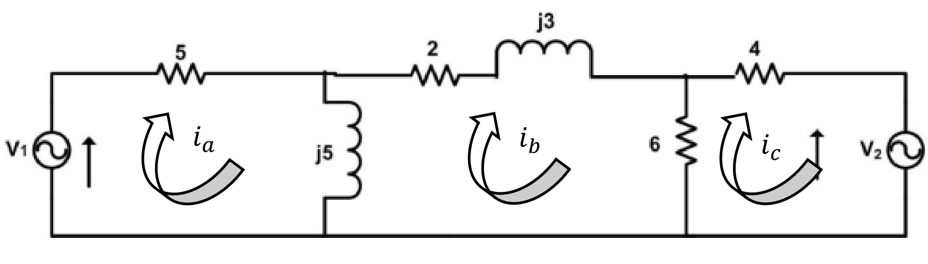
Οι παραπάνω αποκλίσεις είναι σχετικά μικρές, μπορούμε να θεωρήσουμε λοιπόν ότι επαληθεύσαμε ικανοποιητικά το θεώρημα της επαλληλίας για την τάση πάνω στην R_2 και το ρεύμα που την διαρρέει.

Συμπέρασμα:

Συνοψίζοντας, στην εργαστηριακή άσκηση μας αναλύσαμε εκτενώς το πρόβλημα της μέγιστης μεταφοράς ισχύος και επιβεβαιώσαμε πειραματικά τη θεωρία χρησιμοποιώντας διαγράμματα. Στο δεύτερο μέρος της άσκησης, αποδείξαμε πειραματικά το θεώρημα της επαλληλίας, βρίσκοντας πειραματικές τιμές που απέκλιναν ελάχιστα από τις θεωρητικές. Αυτή η εμπειρική επιβεβαίωση συνεπάγεται ότι η θεωρία είναι ακριβής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα σε πρακτικές εφαρμογές. Αυτή η εργαστηριακή εμπειρία βοήθησε στην καλύτερη κατανόηση των βασικών αρχών της μέγιστης μεταφοράς ισχύος και του θεωρήματος επαλληλίας και ενίσχυσε τις δεξιότητές μας στην πρακτική εφαρμογή της θεωρίας.

Ασκήσεις:

1) Στην πρώτη άσκηση θα επιχειρήσουμε να βρούμε την πηγή V_1 στο παρακάτω κύκλωμα (Εικόνα 7) έτσι ώστε το ρεύμα στον κλάδο που περιέχει την V_2 να είναι μηδέν, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των βρόχων. Δίνεται ότι $V_2 = 20 < 0^0$.



Εικόνα 7

Σύμφωνα με την μέθοδο τον βροχών για το κύκλωμα αυτό θα ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & j5+8+j3 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Από το οποίο συνεπάγονται η εξής εξισώσεις:

$$(5+j5)\cdot i_a - j5\cdot i_b + 0\cdot i_c = V_1 \Rightarrow \boldsymbol{(5+j5)\cdot i_a - j5\cdot i_b = V_1}\ (1)$$

Και

$$(-j5)\cdot i_a + (j5+8+j3)\cdot i_b + -6\cdot i_c = 0 \xRightarrow{i_c=0} \boldsymbol{-j5\cdot i_a + (j5+8+j3)\cdot i_b = 0}\ (2)$$

Και

$$0\cdot i_a - 6\cdot i_b + 10\cdot i_c = -V_2 \xRightarrow{i_c=0} i_b = \frac{V_2}{6} = \frac{20\cdot cos(\omega t)}{6} = 3.33\cdot cos(\omega t) \Rightarrow \boldsymbol{i_b = \frac{20}{6}\cdot cos(\omega t)}$$

$$(2) \Rightarrow i_a = \frac{(j5+8+j3)}{j5} i_b = \frac{(j5+8+j3)}{j5}\cdot\frac{20}{6}\cdot cos(\omega t) = \frac{20(j5+8+j3)}{6\cdot j5} cos(\omega t)$$

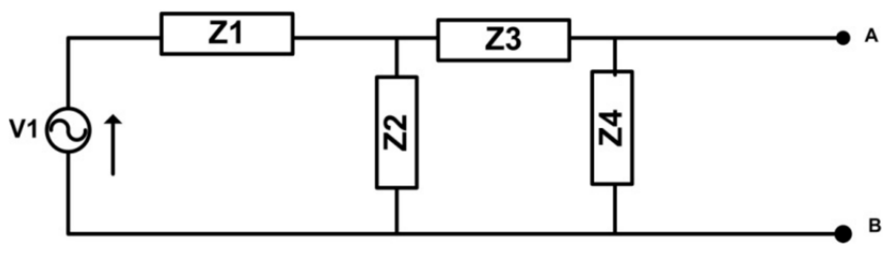
$$\Rightarrow \boldsymbol{i_a = \frac{20(j5+8+j3)}{6\cdot j5} cos(\omega t)}$$

Τέλος σύμφωνα με τον νόμο του Ohm θα ισχύει ότι:

$$V_1 = i_a\cdot z_{11} = \frac{20(j5+8+j3)}{6\cdot j5} cos(\omega t)\cdot(5+j5) = \frac{20(j5+8+j3)\cdot(5+j5)}{6\cdot j5} cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_1 = \frac{20(j5+8+j3)\cdot(5+j5)}{6\cdot j5} cos(\omega t)}$$

2) Στην δεύτερη άσκηση θα επιχειρήσουμε να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin ως προς τα άκρα AB του παρακάτω κυκλώματος (Εικόνα 8). Δίνεται ότι $V_1 = 55.8 < -17.4^o\ V, Z_2 = j5\ \Omega, Z_3 = 2 + j3\ \Omega\ και\ Z_4 = 6\ \Omega$.



Εικόνα 8

Για την R_{th} θα ισχύει ότι:

Καταρχάς τα z_1 και z_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα οπότε:

$$\frac{1}{z_{1.2}} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} = \frac{5\cdot j5}{5+j5} \Rightarrow \boldsymbol{z_{1.2} = \frac{5+j5}{5\cdot j5}}$$

Το ίδιο ισχύει και για τα z_3και z_4:

$$\frac{1}{z_{2.3}} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{2+j3} + \frac{1}{6} = \frac{12+6j3}{8+j3} \Longrightarrow \boldsymbol{z_{2.3}} = \frac{\mathbf{12+6}\boldsymbol{j}\mathbf{3}}{\mathbf{8+}\boldsymbol{j}\mathbf{3}}$$

Και επειδή τα $z_{1.2}$ και $z_{1.2}$ είναι σε σειρά:

$$R_{th} = z_{1.2} + z_{2.3} = \frac{5 \cdot j5}{5+j5} + \frac{12+6j3}{8+j3} \Longrightarrow \boldsymbol{R_{th}} = \frac{\mathbf{5} \cdot \boldsymbol{j}\mathbf{5}}{\mathbf{5+}\boldsymbol{j}\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{12+6}\boldsymbol{j}\mathbf{3}}{\mathbf{8+}\boldsymbol{j}\mathbf{3}}$$

Ενώ για την τάση V_{th} θα ισχύει ότι:

$$V_{th} = V_1 \cdot \frac{z_2}{z_1+z_2} = 55.8 \cdot cos(\omega t - 17.4) \cdot \frac{j5}{5+j5} = \left(\frac{55.8 \cdot j5}{5+j5}\right) \cdot cos(\omega t - 17.4)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{V_{th}} = \left(\frac{\mathbf{55.8} \cdot \boldsymbol{j}\mathbf{5}}{\mathbf{5+}\boldsymbol{j}\mathbf{5}}\right) \cdot \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\omega t} - \mathbf{17.4})$$