

# Συχνотική Απόκριση Φίλτρων

## Κλάιντι Τσάμη

### Περίληψη:

Η εργαστηριακή άσκηση αποτελεί μια σημαντική διαδικασία που ενισχύει την κατανόηση των βασικών αρχών φίλτρων αποκοπής συχνοτήτων. Μέσω της πρακτικής εφαρμογής της θεωρίας σε πειραματικό πλαίσιο, ερευνήσαμε τις λειτουργίες του υψηλοπερατού και χαμηλοπερατού φίλτρου, καθιστώντας σαφές πώς επηρεάζουν τη διαμόρφωση σημάτων. Η επιτυχημένη ολοκλήρωση αυτής της άσκησης ενδυναμώνει τις γνώσεις μας και μας παρασύρει σε ένα επίπεδο εξειδίκευσης, εφοδιάζοντάς μας με τα απαραίτητα εφόδια για την καλύτερη κατανόηση και εφαρμογή των αρχών της ηλεκτρονικής στον τομέα των επικοινωνιών.

### Εισαγωγή:

Η εργαστηριακή άσκηση αυτή έγινε με κύριο σκοπό την εμβάθυνση και την πειραματική κατανόηση σημαντικών εννοιών στον τομέα των φίλτρων αποκοπής συχνοτήτων. Μέσα από την πρακτική εφαρμογή και την ανάλυση πειραματικών δεδομένων, στοχεύσαμε στην επίτευξη μιας σφαιρικής κατανόησης του πώς τα φίλτρα αυτά επηρεάζουν τα σήματα και πώς συμβάλλουν στη διαχείριση του φάσματος συχνοτήτων. Μέσα από τη σύγκριση μεταξύ δύο διαφορετικών φίλτρων, του υψηλοπερατού και του χαμηλοπερατού, ερευνήσαμε τη λειτουργία τους και την επίδρασή τους στα εισερχόμενα σήματα. Η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί σημαντικό βήμα προς την κατανόηση των βασικών αρχών που διέπουν τη χρήση φίλτρων στον ευρύ και συναρπαστικό κόσμο των επικοινωνιών.

### Θεωρία:

Για την μαθηματική μελέτη της εργαστηριακής άσκησης αυτής χρειάζονται κάποιες βασικές θεωρίες και εξισώσεις η οποίες αναγράφονται και αριθμούνται παρακάτω.

Καταρχάς, εάν σε ένα κύκλωμα έχουμε συνδέσει πολλές αντιστάσεις σε σειρά, το ρεύμα που διαπερνά κάθε αντίσταση είναι το ίδιο, αυτό διότι το ρεύμα έχει μόνο μία διαδρομή. Η συνολική αντίσταση στο κύκλωμα αυτό θα είναι το άθροισμα των αντιστάσεων. Για παράδειγμα, εάν στο κύκλωμα συνδέονται σε σειρά  $n$  αντιστάσεις, τότε η συνολική αντίσταση θα ισούται με:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (1)$$

Από την άλλη εάν οι  $n$  αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα τότε για την συνολική αντίσταση θα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.1)$$

### Νόμος του Ohm:

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm η τάση στα άκρα ενός κυκλώματος ισούται με το γινόμενο της τιμής της αντίστασης επί την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Δηλαδή:  $V = I \cdot R$  (2)

Επιπλέον, επειδή πρόκειται να συγκριθούν πειραματικές τιμές με θεωρητικές (ονομαστικές), απαιτείται η χρήση μιας σχέσης για την απόκλιση των τιμών αυτών. Αυτή η σχέση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\% \text{ απόκλιση} = \frac{\text{ονομ. τιμή} - \text{πειρ. τιμή}}{\text{ονομ. τιμή}} \quad (3)$$

### Χαμηλοπερατά φίλτρα

Τα φίλτρα αυτά επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων χαμηλής συχνότητας, μέχρι τη συχνότητα αποκοπής ( $f_c$ ) και αποκόπτουν τις υψηλότερες.

$$0 < f < f_c$$

### Υψηλοπερατά φίλτρα

Τα φίλτρα αυτά επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων με συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής ( $f_c$ ) αποκόπτοντας τις χαμηλότερες.

$$f > f_c$$

### Απολαβή τάσης

Σύμφωνα με θεωρία η σχέση που μας δίνει την απολαβή τάσης είναι η παρακάτω:

$$A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad (4)$$

Ενώ σε Decibel δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$A_v(dB) = 20 \log_{10} \left( \frac{V_{out}}{V_{in}} \right) \quad (5)$$

### Συνάρτηση μεταφοράς

Ως συνάρτηση μεταφοράς για ένα σύστημα με δύο ακροδέκτες εισόδου και εξόδου, στο οποίο εφαρμόζεται μια ημιτονοειδής τάση, ορίζεται ο λόγος του μιγαδικού ανύσματος της τάσης εξόδου προς το μιγαδικό άνυσμα της τάσης εισόδου για κάθε κυκλική συχνότητα  $\omega$  (rad/s).

$$TF(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| < \theta = |A_v| < \theta \quad (6)$$

Σύμφωνα με την θεωρία για τα χαμηλοπερατά φίλτρα η συνάρτηση μεταφοράς έχει την μορφή:

$$TF(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (7)$$

Οπού,  $f_c$  η συχνότητα αποκοπής

Ενώ στα υψηλοπερατά φίλτρα η συνάρτηση μεταφοράς παίρνει την μορφή:

$$TF(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{f_c}{f}} \quad (8)$$

Ακόμη, η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  συνδέεται με την συχνότητα  $f$  μέσω του παρακάτω τύπου:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (9)$$

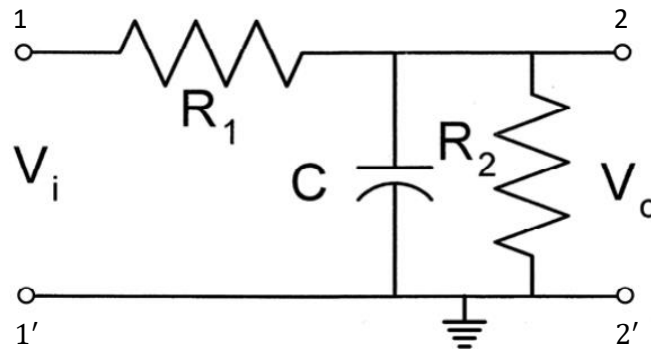
### Πειραματική διαδικασία:

Τα βασικά ηλεκτρονικά εξαρτήματα που θα χρειαστούν για την υλοποίηση της εργαστηριακής ασκήσεως είναι τα παρακάτω:

- Πηγή εναλλασσόμενης τάσης ( $V_i = 2 \cdot V_{p-p}$ )
- Παλμογράφος
- Πλακέτα διασύνδεσης (breadboard)
- Πολύμετρο
- Αντιστάτες  $1\text{ k}\Omega$ ,  $1.5\text{ k}\Omega$
- Πυκνωτή  $C = 100\text{ nF}$
- Και διάφορα καλώδια για την διασύνδεση των εξαρτημάτων αυτών

### Χαμηλοπερατό φίλτρο

Καταρχάς για να μελετήσουμε πειραματικά ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θα πρέπει να φτιάξουμε πρώτα το κύκλωμα του φίλτρου. Το κύκλωμα του συγκεκριμένου πειράματος θα αποτελείτε από 2 αντιστάσεις, μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης και έναν πυκνωτή. Συγκεκριμένα το κύκλωμα είναι αυτό της παρακάτω εικόνας (Εικόνα 3), όπου  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1.5\text{ k}\Omega$  και  $C = 100\text{ nF}$ .



Εικόνα 3

Η διασύνδεση των στοιχείων του κυκλώματος γίνεται ως εξής: Καταρχάς συνδέουμε το ένα άκρο της πηγής με την αντίσταση  $R_1$  και το ελεύθερο άκρο της αντίστασης με το πυκνωτή, ενώ την γείωση της πηγής με το ελεύθερο άκρο του πυκνωτή. Έπειτα συνδέουμε την αντίσταση  $R_2$  παράλληλα με τον πυκνωτή. Τέλος από τον παλμογράφο θα χρειαστούμε και τα 2 channels, το channel 1 θα συνδεθεί στα άκρα 1 και 1' ενώ το channel 2 θα συνδεθεί στα άκρα 2 και 2'.

Αυτό που θα κάνουμε είναι εφόσον έχουμε βρει την συχνότητα αποκοπής του φίλτρου του κυκλώματος θα δίνουμε στην πηγή εναλλασσόμενης τάσης κάποιες τιμές συχνοτήτων και για κάθε τιμή θα καταγράφουμε από τον παλμογράφο την τάση εξόδου  $V_{out}$  και την φάση μεταξύ της κυματομορφής της τάσης εισόδου και εξόδου. Με αυτόν τον τρόπο, σχηματίζοντας τα αντίστοιχα διαγράμματα  $(f-A_v)$  και  $(f-\theta)$  χρησιμοποιώντας πειραματικές τιμές θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε την επίδραση του φίλτρου στην τάση εισόδου και να οδηγηθούμε σε συγκεκριμένα συμπεράσματα.

Για να βρούμε την συχνότητα αποκοπής  $f_c$ , θα πρέπει να λύσουμε θεωρητικά το κύκλωμα συγκεκριμένα θα ισχύει το εξής:

Για την συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου σύμφωνα με την σχέση (6)

$$TF(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{I \cdot R_{out}}{I \cdot R_{in}} = \frac{R_{out}}{R_{in}}$$

όπου:

$$R_{out} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 c}$$

$$R_{in} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 c}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} TF(j\omega) &= \frac{R_{out}}{R_{in}} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 c}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 c}} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 c}}{\frac{R_1(1 + j\omega R_2 c) + R_2}{1 + j\omega R_2 c}} = \frac{R_2(1 + j\omega R_2 c)}{(R_1(1 + j\omega R_2 c) + R_2)(1 + j\omega R_2 c)} \\ &= \frac{R_2}{R_1(1 + j\omega R_2 c) + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 c} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega R_1 R_2 c}{R_1 + R_2}} \end{aligned}$$

Το οποίο είναι της μορφής:

$$TF(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Με:

$$\omega_c = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

Αρά από την σχέση (9) για την συχνότητα αποκοπής θα ισχύει ότι:

$$f_c = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{10^3 + 1.5 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{2.5 \cdot 10^3}{1.5 \cdot 10^{-1} \cdot 2\pi} = 2640 \text{ Hz} = 2.64 \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow f_c = \mathbf{2.64 \text{ kHz}}$$

Αυτό που θα κάνουμε πειραματικά τώρα είναι να δίνουμε διάφορες τιμές συχνότητας στην πηγή εναλλασσόμενης τάσης και να καταγράφουμε από τον παλμογράφο την τάση εξόδου  $V_{out}$  και την φασή μεταξύ της τάσης εισόδου  $V_{in}$  και εξόδου  $V_{out}$ . Με την διαδικασία αυτή προέκυψε ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 1). Το  $V_{in}$  υπολογίζεται και αυτό μέσω παλμογράφου και είναι σταθερό συγκεκριμένα ισχύει ότι:

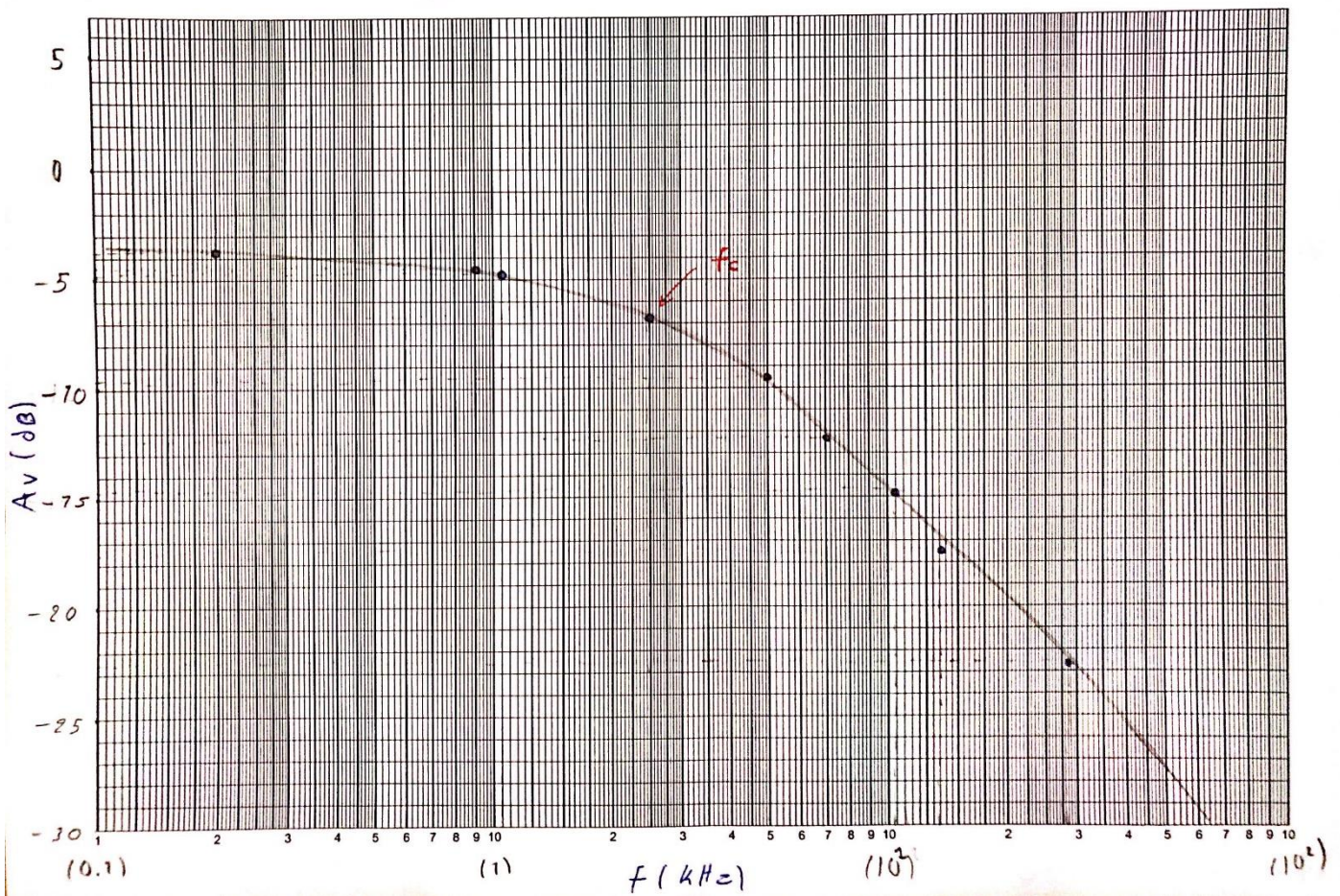
$$V_{in} = \frac{V_{p-p}}{2} = \frac{1.96}{2} = 0.98 \text{ V} \Rightarrow \mathbf{V_{in} = 0.98 \text{ V}}$$

Ενώ η τάση απολαβής βρέθηκε για κάθε τιμή συχνότητας από την σχέση (5) μέσω excel, εφόσον βρίσκουμε από τον παλμογράφο το  $V_{out}$  και το  $V_{in}$  είναι σταθερό.

$\alpha/\alpha$	f (Hz)	Vout (V)	Vin	Av	$\theta$
1	200	0.62	0.98	-3.976688	-0.56
2	900	0.58	0.98	-4.555962	-19.2
3	1300	0.56	0.98	-4.860761	-27.84
<b>4</b>	<b>2640</b>	<b>0.44</b>	<b>0.98</b>	<b>-6.955468</b>	<b>-35.6</b>
5	5000	0.32	0.98	-9.721522	-57.32
6	7000	0.24	0.98	-12.2203	-61.87
7	11200	0.175	0.98	-14.96376	-75.58
8	15500	0.13	0.98	-17.54565	-79.53
9	29000	0.072	0.98	-22.67787	-84.46

Πίνακας 1

Για να αποτυπώσουμε σωστά τα δεδομένα θα πρέπει η γραφικές παράστασης να είναι ημιλογαριθμικές. Συγκεκριμένα το διάγραμμα (f-Av) που προκύπτει από τις τιμές συχνότητας και τις τιμές της τάσης απολαβής είναι το παρακάτω (Εικόνα 4).

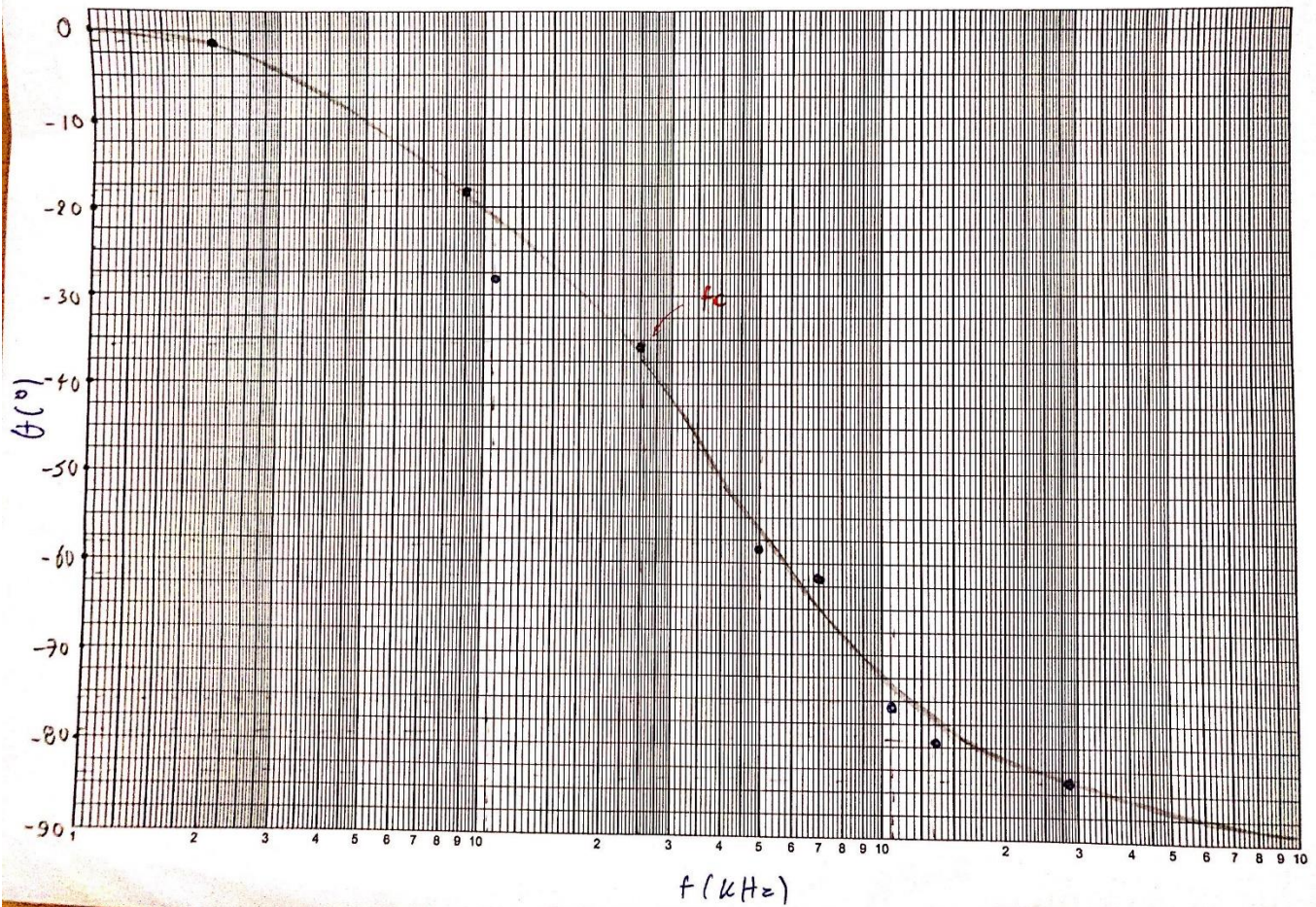


Εικόνα 4

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι για τιμές συχνότητας μικρότερες από την συχνότητα αποκοπής η απολαβή τάσης τείνει προς το 0. Αν παρατηρήσουμε την σχέση (5) τιμή 0 για την απολαβή τάσης έχουμε όταν  $V_{out} = V_{in}$ , ενώ για συχνότητες μεγαλύτερες από την συχνότητα αποκοπής παρατηρούμε ότι η τάση απολαβής μικραίνει και αυτό φυσικά ισχύει αν παρατηρήσουμε την σχέση όταν το  $V_{out} < V_{in}$ . Πρακτικά αυτό που συμβαίνει είναι ότι όταν εφαρμόζουμε ένα σήμα στο κύκλωμα, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται. Η ταχύτητα φόρτισης εξαρτάται από τη συχνότητα του σήματος. Χαμηλές συχνότητες έχουν τη δυνατότητα να φορτίσουν τον πυκνωτή πιο εύκολα, ενώ υψηλές συχνότητες βρίσκουν δυσκολία στο να περάσουν και, συνεπώς, φιλτράρονται.

Το ίδιο θα παρατηρήσουμε και στο διάγραμμα  $(f-\theta)$  (Εικόνα 5), δηλαδή αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η φάση μεταξύ του  $V_{out}$  και  $V_{in}$  είναι κοντά στο 0 για τιμές συχνότητας μικρότερες από την συχνότητα αποκοπής, αυτό συμβαίνει γιατί όπως δείξαμε πιο πάνω για τιμές συχνότητας στο εύρος αυτό ισχύει ότι  $V_{out} = V_{in}$ . Ενώ για τιμές μεγαλύτερες από την συχνότητα αποκοπής η φάση όλο και μεγαλώνει.

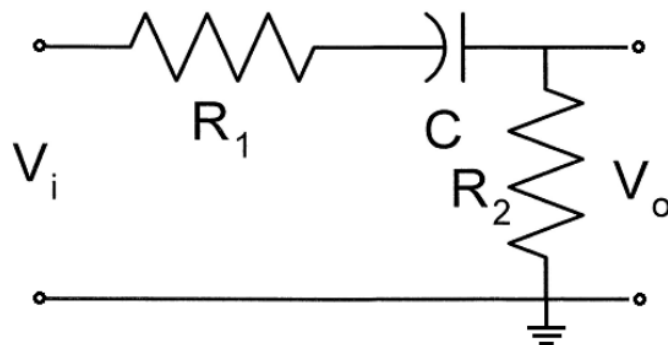




Εικόνα 5

### Υψηλοπερατό φίλτρο

Για να μελετήσουμε πειραματικά και το χαμηλοπερατό φίλτρο θα πρέπει να φτιάξουμε πρώτα το κύκλωμα του φίλτρου. Το κύκλωμα του συγκεκριμένου φίλτρου θα αποτελείτε από τα ίδια ηλεκτρικά στοιχεία απλά με διαφορετική σύνδεση. Συγκεκριμένα το κύκλωμα είναι αυτό της παρακάτω εικόνας (Εικόνα 6), όπου  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1.5 \text{ k}\Omega$  και  $C = 10 \text{ nF}$ .



Εικόνα 6

Για να βρούμε την συχνότητα αποκοπής  $f_c$ , θα πρέπει να λύσουμε θεωρητικά το κύκλωμα συγκεκριμένα θα ισχύει το εξής:

Για την συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου σύμφωνα με την σχέση (6) ομοίως θα ισχύει

$$TF(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{I \cdot R_{out}}{I \cdot R_{in}} = \frac{R_{out}}{R_{in}}$$

όπου:

$$R_{out} = R_2, R_{in} = R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega c}$$

Οπότε

$$TF(j\omega) = \frac{R_{out}}{R_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega c}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega(R_1 + R_2)c}}$$

Το οποίο είναι της μορφής:

$$TF(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}}$$

Με:

$$\omega_c = \frac{1}{(R_1 + R_2)c}$$

Αρά από την σχέση (9) για την συχνότητα αποκοπής θα ισχύει ότι:

$$f_c = \frac{1}{(R_1 + R_2)c} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{(1 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 10^3) \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi} = \frac{10^5}{5\pi} = \frac{100000}{15.70796} = 6.36 \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow f_c = 6.36 \text{ kHz}$$

Ομοίως αυτό που θα κάνουμε πειραματικά είναι να δίνουμε διάφορες τιμές συχνότητας στην πηγή εναλλασσόμενης τάσης και να καταγράφουμε από τον παλμογράφο την τάση εξόδου  $V_{out}$  και την φαση μεταξύ της τάσης εισόδου  $V_{in}$  και εξόδου  $V_{out}$ . Με την διαδικασία αυτή προέκυψε ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 2) για το 2<sup>ο</sup> φίλτρο. Το  $V_{in}$  υπολογίζεται και αυτό μέσω παλμογράφου και είναι σταθερό συγκεκριμένα ισχύει ότι:

$$V_{in} = \frac{V_{p-p}}{2} = \frac{2.08}{2} = 1.04 \text{ V} \Rightarrow V_{in} = 1.04 \text{ V}$$

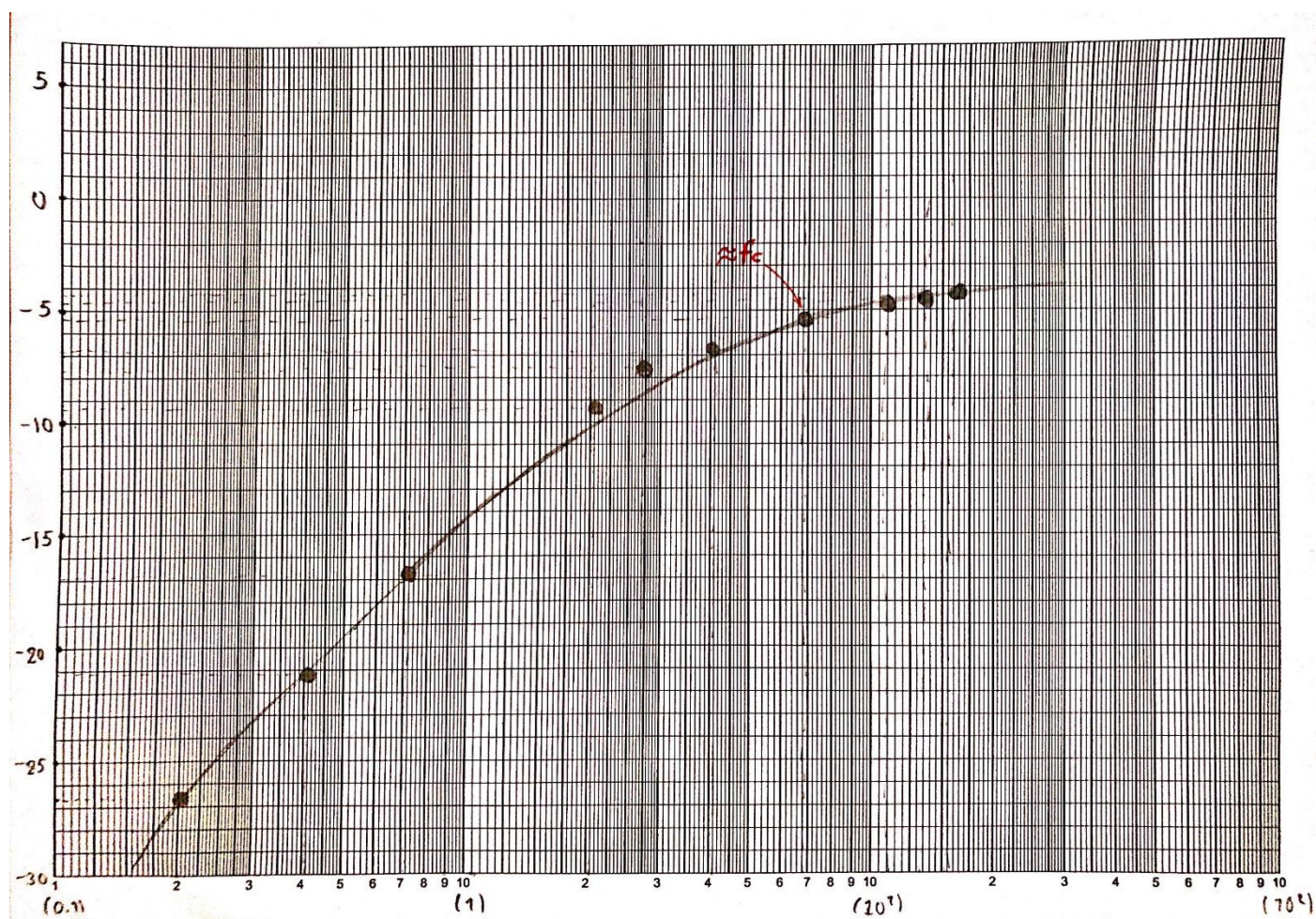
Ενώ ομοίως η τάση απολαβής βρέθηκε για κάθε τιμή συχνότητας από την σχέση (5) μέσω excel, εφόσον βρίσκουμε από τον παλμογράφο το  $V_{out}$  και το  $V_{in}$  είναι σταθερό.



$\alpha/\alpha$	f (Hz)	Vout (V)	Vin	Av	$\theta$
1	200	0.04825	1.04	-26.6707	84.8
2	408	0.091	1.04	-21.1598	83.2
3	705	0.147	1.04	-16.9943	75.2
4	2040	0.352	1.04	-9.40981	53.9
5	2890	0.432	1.04	-7.63099	44.7
6	4150	0.469	1.04	-6.91721	35.3
<b>7</b>	<b>6980</b>	<b>0.56</b>	<b>1.04</b>	<b>-5.37691</b>	<b>22.6</b>
8	12000	0.59	1.04	-4.92363	13
9	14520	0.595	1.04	-4.85033	10.5
10	17600	0.6	1.04	-4.77764	7.7

Πίνακας 2

Το διάγραμμα (f-Av) που προκύπτει από της τιμές συχνότητας και της τιμές της τάσης απολαβής είναι το παρακάτω (Εικόνα 7).



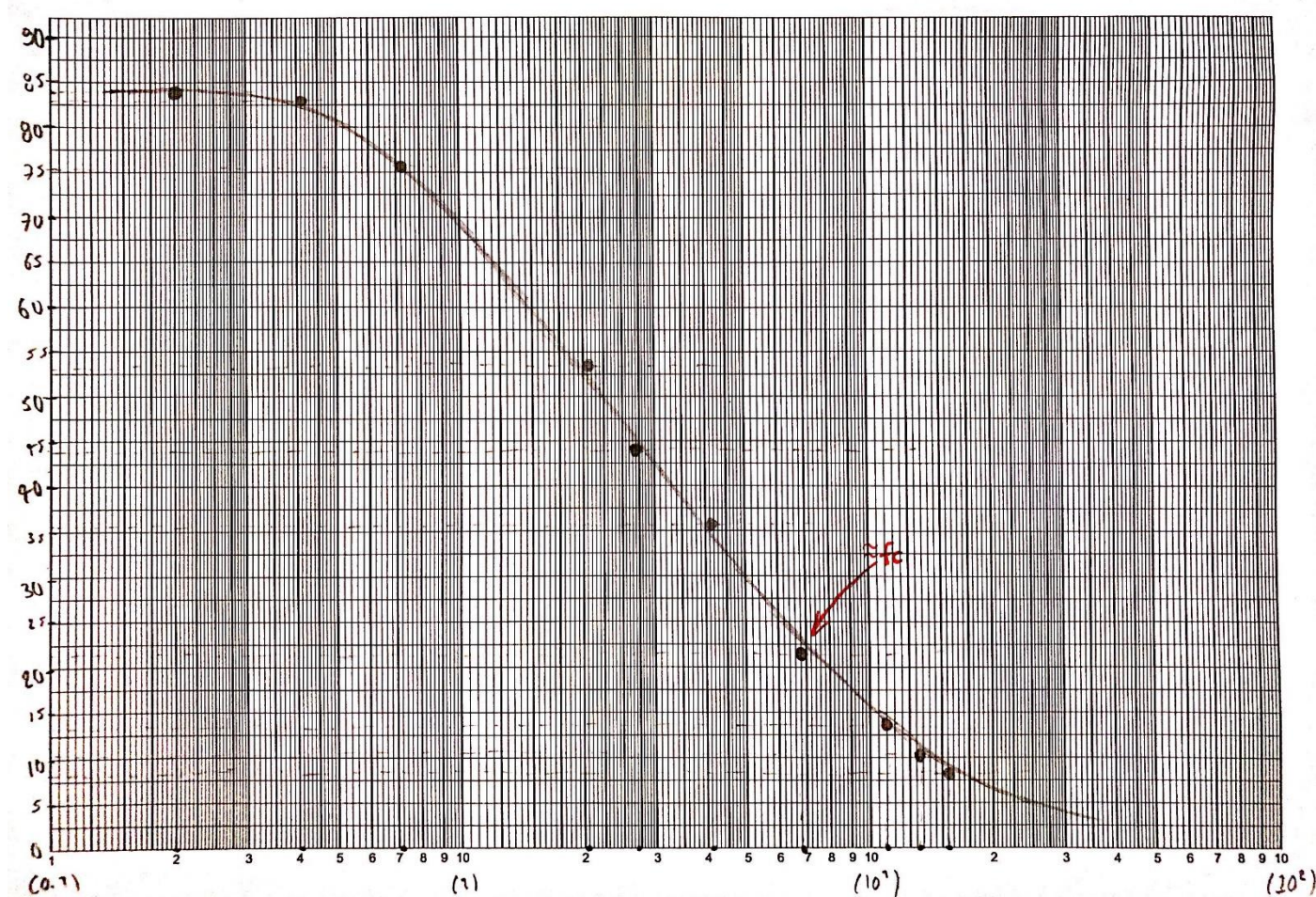
Εικόνα 7

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι για τιμές συχνότητας μεγαλύτερες από την συχνότητα αποκοπής η απολαβή τάσης τείνει προς το 0. Αν παρατηρήσουμε την σχέση (5) τιμή 0 για την απολαβή τάσης έχουμε όταν  $V_{out} = V_{in}$ , ενώ για συχνότητες μικρότερες από την συχνότητα αποκοπής παρατηρούμε ότι η τάση



απολαβής μικραίνει και αυτό φυσικά ισχύει αν παρατηρήσουμε την σχέση όταν το  $V_{out} < V_{in}$ . Πρακτικά αυτό που συμβαίνει είναι ότι όταν εφαρμόζεις ένα σήμα, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται, αλλά αυτή τη φορά ο αντιστάτης περιορίζει την ταχύτητα φόρτισης του πυκνωτή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να περνάνε μόνο οι γρήγορες αλλαγές στο σήμα, που αντιστοιχούν σε υψηλές συχνότητες, ενώ οι αργές αλλαγές, δηλαδή οι χαμηλές συχνότητες, αντιστοιχούν σε φορτίσεις και εκφορτώσεις που δεν προλαβαίνουν να συμβούν κατά τη διάρκεια της κοντινής περιόδου.

Το ίδιο θα παρατηρήσουμε και στο διάγραμμα (f-θ) (Εικόνα 8), δηλαδή αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η φάση μεταξύ του  $V_{out}$  και  $V_{in}$  είναι κοντά στο 0 για τιμές συχνότητας μεγαλύτερες από την συχνότητα αποκοπής, αυτό συμβαίνει γιατί όπως δείξαμε πιο πάνω για τιμές συχνότητας στο εύρος αυτό ισχύει ότι  $V_{out} = V_{in}$ . Ενώ για τιμές μικρότερες από την συχνότητα αποκοπής η φάση όλο και μεγαλώνει.



Εικόνα 8

### Συμπεράσματα:

Στην εργαστηριακή άσκηση, μελετήσαμε πειραματικά δύο διαφορετικά φίλτρα, το υψηλοπερατό και το χαμηλοπερατό. Με χρήση πειραματικών τιμών και μαθηματικών αναλύσεων, κατανοήσαμε τον τρόπο λειτουργίας τους. Με τις πειραματικές τιμές και τις μαθηματικές αναλύσεις, αποδείξαμε την αποτελεσματικότητα και τη λειτουργία αυτών των φίλτρων. Τα αποτελέσματά μας επιβεβαίωσαν τις

θεωρητικές αναλύσεις, ενισχύοντας την κατανόησή μας για τον τρόπο που τα φίλτρα αυτά επηρεάζουν τα σήματα. Η εργαστηριακή αυτή διαδικασία ενίσχυσε τις γνώσεις μας σχετικά με την εφαρμογή των φίλτρων σε ηλεκτρονικά κυκλώματα και τη σημασία τους στη αποκοπή συχνοτήτων στον κόσμο των επικοινωνιών.