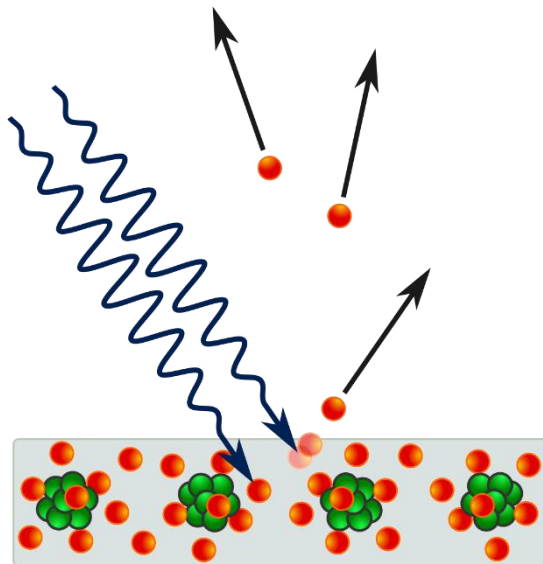


Μέτρηση της σταθεράς του Planck

Κλάιντι Τσάμη



Εισαγωγή:

Η εργαστηριακή άσκηση που ακολουθεί πραγματοποιήθηκε με απώτερο σκοπό τον προσδιορισμό της σταθεράς του Planck χρησιμοποιώντας ως μέθοδο προσδιορισμού το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ένα φυσικό φαινόμενο όπου η έκθεση μιας επιφάνειας ενός υλικού (συνήθως μετάλλου) σε φως προκαλεί την εκπομπή ηλεκτρονίων από την επιφάνεια του. Ουσιαστικά, όταν ένα φωτόνιο (κβάντο) χτυπά ένα υλικό, μπορεί να μεταδώσει αρκετή ενέργεια στα ηλεκτρόνια του υλικού, ώστε να τα απελευθερώσει από την επιφάνεια. Μελετώντας το φαινόμενο αυτό μέσω μιας κατάλληλης πειραματικής διάταξης και έχοντας κάνει την μαθηματική ανάλυση του φαινομένου και έχοντας αντλήσει τα κατάλληλα πειραματικά δεδομένα θα μπορέσουμε τελικά να προσδιορίσουμε την σταθερά αυτή με μεγάλη ακρίβεια. Χρειάζεται να τονιστεί ότι η σταθερά του Planck υπεισέρχεται σε πολλούς τύπους στην κβαντική φυσική γι' αυτό και ο προσδιορισμός της είναι μεγάλης σημασίας.

Θεωρία:

Για την μαθηματική ανάλυση του πειράματος θα χρειαστεί καταρχάς να μελετήσουμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Το φαινόμενο αυτό έχει 4 βασικά πειραματικά χαρακτηριστικά, πρώτων τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται απευθείας όταν προσπέσει ακτινοβολία κατάλληλης ενέργειας πάνω τους. Δεύτερον ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται κατά την διάρκεια του φαινομένου είναι ανάλογος της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Τρίτον, η κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων έχει συνεχές φάσμα και παίρνει τιμές από μηδέν έως μια μέγιστη τιμή T_{\max} , η μέγιστη τιμή αυτή δεν εξαρτάτε από την ένταση της δέσμης αλλά αυξάνετε γραμμικά με την συχνότητα ν της ακτινοβολίας. Τέλος υπάρχει μια χαρακτηριστική συχνότητα κατωφλίου ν_0 κάτω από την οποία το φαινόμενο δεν πραγματοποιείτε όσο μεγάλη και αν γίνει η ένταση της ακτινοβολίας. Η συχνότητα αυτή ν_0 εξαρτάτε μόνο από το υλικό.

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ήταν γνωστό από το τέλος του 19^{ου} αιώνα και δεν μπορούσε να εξηγηθεί σωστά μέσω της κλασικής φυσικής, το 1900 ο Planck στην προσπάθεια του να εξηγήσει την μορφή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος του μέλανος σώματος θεώρησε ότι η ενέργεια των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων κατά την εκπομπή ή την απορρόφηση τους από το μέλαν σώμα μεταβάλλεται κατά μικρές αδιαίρετες ποσότητες E τις οποίες ονόμασε κβάντα. Η ενέργεια αυτή E βρέθηκε ότι σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας ν δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$E = h \cdot \nu \quad (1)$$

Η σταθερά αναλογίας h ονομάστηκε σταθερά του Planck και σύμφωνα με την βιβλιογραφία ισούται με:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{ή} \quad h = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Το 1905 η ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου δόθηκε από το Albert Einstein ο οποίος επέκτεινε την ιδέα του Planck και συγκεκριμένα θεώρησε ότι το κάθε κβάντο είναι μια αυτόνομη οντότητα, ένα είδος σωματιδίου. Τα κβάντα του φωτός ονομάστηκαν φωτόνια. Πρακτικά σύμφωνα με την νέα αυτή ερμηνεία το κάθε φωτονίου δρώντας αυτόνομα μπορεί να δώσει όλη του την ενέργεια σε

ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο του υλικού και να προκαλέσει την εξαγωγή του. Για να συμβεί όμως αυτό θα πρέπει η ενέργεια του φωτονίου $h \cdot \nu$ να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το έργο w που απαιτείτε για την απόσπαση του συγκεκριμένου ηλεκτρονίου από το υλικό. Το ηλεκτρόνιο μετά την απόσπαση του θα έχει κινητική ενέργεια T ίση με το υπόλοιπο της ενεργείας του φωτονίου:

$$T = h\nu - w \quad (1.1)$$

Το έργο w αυτό διαφέρει όπως και είναι λογικό από ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρόνιο καθώς εξαρτάτε από την ενεργειακή κατάσταση τους μέσα στο υλικό, για παράδειγμα το w είναι μεγαλύτερο για ηλεκτρόνια τα οποία είναι ισχυρά συνδεδεμένα στα άτομα του υλικού και μικρότερο για ηλεκτρόνια στις εξωτερικές στοιβάδες του ατόμου. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο έργο που απαιτείτε για την διαφυγή από ένα μέταλλο των ηλεκτρονίων της στάθμης Fermi ονομάζεται έργο εξόδου ϕ το οποίο εξαρτάτε από το κάθε μέταλλο. Όταν $w = \phi$ η κινητική ενέργεια του εκπεμπόμενου ηλεκτρονίου γίνεται μέγιστη, δηλαδή η σχέση 1.1 παίρνει την εξής μορφή:

$$T_{\max} = h\nu - \phi \quad (1.2)$$

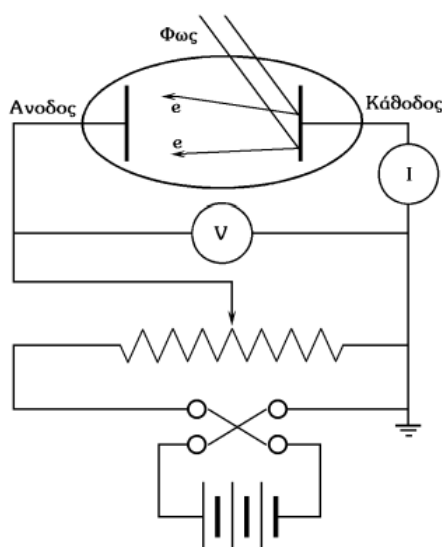
Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein. Εάν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα φωτονίου – ηλεκτρονίου θα διαπιστώσουμε ότι το φαινόμενο δεν είναι δυνατόν να συμβεί με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, το ηλεκτρόνιο αυτό θα πρέπει απαραίτητα να είναι συνδεδεμένο σε κάποιο άλλο σώμα το οποίο θα προσλάβει την ορμή ανάκρουσης.

Η χαρακτηριστική συχνότητα κατωφλίου ν_0 προκύπτει εάν στην σχέση 1.2 θεωρήσουμε ότι:

$$T_{\max} \geq 0 \Rightarrow h\nu - \phi \geq 0 \Rightarrow h\nu \geq \phi \Rightarrow \nu \geq \frac{\phi}{h} = \nu_0 \quad (1.3)$$

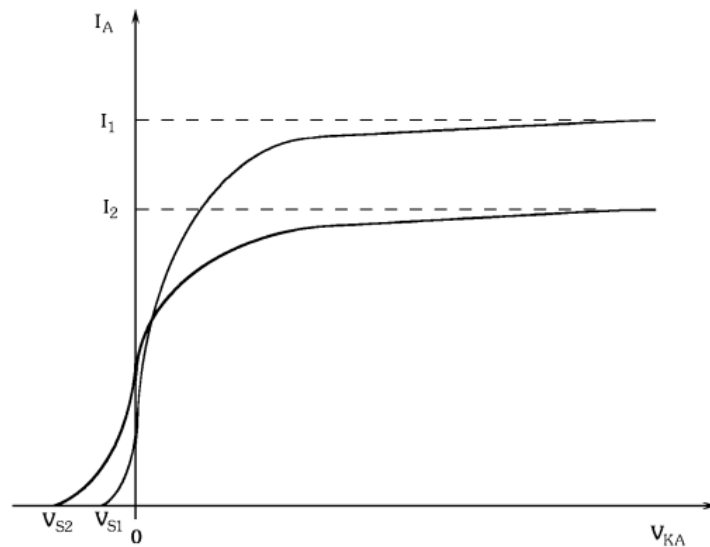
Επειδή είναι γνωστό από την βιβλιογραφία ότι το έργο εξόδου ϕ παίρνει συνήθως τιμές από 2 έως και 5 eV από την σχέση 1.3 καταλαβαίνουμε ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία πρέπει να έχει συχνότητα μεγαλύτερη από ($\frac{2}{h} = 0.5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$) για να προκαλέσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

Η καταλληλότερη διάταξη για να γίνει η μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είναι το φωτοκύτταρο (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Η συνδεσμολογία ενός φωτοκύτταρου για την μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Το φωτοκύτταρο αυτό αποτελείται από μια αερόκενη δίοδος, μια ηλεκτρονική λυχνία την κάθοδο της οποίας αποτελεί μια φωτοευαίσθητη μεταλλική επιφάνεια φτιαγμένη από χαλάζια, ένα υλικό το οποίο είναι διάφανο στο υπεριώδες. Αυτό που μπορούμε να προσδιορίσουμε πειραματικά με το φωτοκύτταρο είναι η ενέργεια των φωτοηλεκτρικών που εκπέμπονται για διάφορες συχνότητες. Όταν πάνω στην φωτοκάθοδο πέσει φως συχνότητας μεγαλύτερης από την συχνότητα κατωφλίου τότε η κάθοδος εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια, τα οποία με ορθή πόλωση δημιουργούν ανοδικό ρεύμα το οποίο και μετράμε με ένα ευαίσθητο ηλεκτρόμετρο. Το ανοδικό ρεύμα αυτό συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης ανόδου καθόδου V_{KA} μας δίνει την χαρακτηριστική καμπύλη της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Χαρακτηριστική καμπύλη της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Όπως παρατηρούμε και από την χαρακτηριστική καμπύλη για μεγάλες τιμές τάσης το ανοδικό ρεύμα σταθεροποιείται σε μια μέγιστη τιμή I η οποία αντιπροσωπεύει την ολική φωτοηλεκτρική εκπομπή ενώ για μικρές τιμές τάσης μειώνεται. Επιπλέον παρατηρούμε ότι ακόμη και για τάση $V_{KA} = 0$ V το ανοδικό ρεύμα εξακολουθεί να έχει κάποια θετική τιμή. Η εφαρμογή του επιβραδύνοντάς δυναμικού έχει σαν συνέπεια τα ηλεκτρόνια που φεύγουν από την κάθοδο με ενέργεια E_i να φτάνουν στην άνοδο με ενέργεια $E_f = E_i - eV$. Φυσικά τα ηλεκτρόνια με αρχική ενέργεια μικρότερη από eV δεν φτάνουν στην άνοδο. Για μια κρίσιμη τιμή V_S το ανοδικό ρεύμα θα μηδενιστεί, στην τιμή αυτή ακόμη και τα πιο ενεργειακά ηλεκτρόνια (με $E_i = T_{\max}$) δεν φτάνουν στην άνοδο, για το δυναμικό αυτό ισχύει:

$$eV_S = T_{\max} \quad (1.4)$$

Το δυναμικό αυτό V_S ονομάζεται δυναμικό αποκοπής και εξαρτάται μόνο από την συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση 1.4 η σχέση 1.2 γίνεται:

$$(1.2) \xrightarrow{(1.4)} eV_S = h\nu - \varphi \Rightarrow V_S = \frac{h}{e}\nu - \frac{\varphi}{e} \quad (1.5)$$

Από την σχέση αυτή (1.5) παρατηρούμε ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ του δυναμικού αποκοπής V_S και της συχνότητας ν της ακτινοβολίας. Η κλίση της ευθείας αυτής ισούται με h/e .

Πρακτικά έχοντας αντλήσει πειραματικά της τιμές της τάσης V_{KA} και του ανοδικού ρεύματος και έχοντας σχεδιάσει την γραφική αναπαράσταση τους, μπορούμε να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων των σημείων της γραφικής αυτής η κλίση της οποίας θα μας δώσει τελικά την σταθερά h του Planck. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί παρακάτω για τον υπολογισμό της σταθεράς.

Σύμφωνα με την θεωρία ελαχίστων τετραγώνων σχεδιάζοντας μια οποιαδήποτε γραφική παράσταση $(y_i - x_i)$ χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα ενός πειράματος μας, μπορούμε σύμφωνα με την θεωρία να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων:

$y = \alpha \cdot x + \beta$ (2.3) της γραφικής παράστασης ως εξής :

Καταρχάς θεωρούμε ως δ_i της αποκλίσεις τον σημείων από την ευθεία αυτή, σύμφωνα με την θεωρία η ζητούμενη ευθεία είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα S των τετραγώνων των αποκλίσεων

$$S = \sum \delta_i^2 = \sum [y_i - (a \cdot x_i + \beta)]^2 \quad (2.4)$$

γίνεται ελάχιστο. Βρίσκοντας τα ελάχιστο της συνάρτησης αυτής και λύνοντας ως προς a και β προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum (x_i \cdot y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{n \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (2.5)$$

και

$$\beta = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum (y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum (x_i \cdot y_i))}{n \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (2.6)$$

Επειδή όμως υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ευθείας λόγο αβεβαιότητας στα πειραματικά μας δεδομένα αυτό σημαίνει και την ύπαρξη τυπικής απόκλισης στην τιμή των συντελεστών a και β , η οποία δίνεται από τους παρακάτω τύπους :

$$\sigma_\alpha = s_y \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \quad (2.7) \quad \text{και} \quad \sigma_\beta = s_y \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \quad (2.8)$$

Όπου:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum [y_i - a \cdot x_i - \beta]^2}{n - 2}} \quad (2.9)$$

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε στην συγκεκριμένη πειραματική εργασία αποτελείτε από τα εξής όργανα:

1. Φωτεινή πηγή (Φασματική λυχνία υδραργύρου Hg).
2. Οπτική διάταξη για την λήψη μονοχρωματικής ακτινοβολίας (οπτικά φίλτρα).
3. Φωτοκύτταρο με κάθοδο από κάλιο.
4. Τροφοδοτικό της φωτεινής πηγής .
5. Τροφοδοτικό του φωτοκύτταρου.
6. Βολτόμετρο.

7. Ηλεκτρόμετρο , Keithley 610 C.
8. Καλώδια σύνδεσης.

Οι κύριες φασματικές γραμμές του Hg παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1):

| Χρώμα | λ (nm) | ν (10^{12} Hz) |
|--------------|----------------|-----------------------|
| Κόκκινο | 690,8 | 434,3 |
| Κίτρινο | 577,0 | 519,9 |
| Πράσινο | 546,1 | 549,3 |
| Κυανοπράσινο | 491,6 | 610,2 |
| Κυανό | 435,8 | 688,4 |
| Ιώδες | 404,7 | 741,3 |
| Υπεριώδες | 365,1 | 819,7 |
| Υπεριώδες | 312,5 | 960,0 |
| Υπεριώδες | 253,5 | 1183,4 |

Πίνακας 1: Φασματικές γραμμές
Hg.

Η οπτική διάταξη που αναλύει την πολυχρωματική ακτινοβολία από την φασματική λυχνία είναι μια συστοιχία οπτικών φίλτρων, η αλλαγή της συχνότητας γίνεται με την παρεμβολή του κατάλληλου φίλτρου μεταξύ της φασματικής λυχνίας και του φωτοκυττάρου. Τα οπτικά φίλτρα που διαθέτει η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε στην συγκεκριμένη πειραματική εργασία είναι οπτικά φράγματα διαπερατά σε ένα εύρος 1% περί τα μήκη κύματος 578 nm, 546 nm, 436 nm, 405 nm και 366 nm. Οπότε η διαθέσιμες συχνότητες παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2):

| Φίλτρο | Χρώμα | λ (nm) | ν (10^{12} Hz) |
|--------|-----------|----------------|-----------------------|
| 1 | Κίτρινο | 577,0 | 519,9 |
| 2 | Πράσινο | 546,1 | 549,3 |
| 3 | Κυανό | 435,8 | 688,4 |
| 4 | Ιώδες | 404,7 | 741,3 |
| 5 | Υπεριώδες | 365,1 | 819,7 |

Πίνακας 2: Μήκη κύματος των γραμμών του Hg που διέρχονται
από τα οπτικά φίλτρα.

Το τροφοδοτικό χαμηλών τάσεων περιέχει στο φωτοκύτταρο ορθή πόλωση από 0 έως +12 Volts και αντίστροφη πόλωση από 0 έως – 5 Volts, την τάση αυτή την μετράμε με ένα βολτόμετρο. Επιπλέον η μέτρηση του φωτορεύματος που είναι της τάξης του 10^{-11} έως 10^{-13} A γίνεται με ένα πολύ ευαίσθητο ηλεκτρόμετρο Keithley 610 C και λόγω της μεγάλης εσωτερικής αντίστασης του οργάνου απαιτείτε κάποιος χρόνος για την μέτρηση του ρεύματος μετά από κάθε αλλαγή της τάσης.

Πειραματική διαδικασία

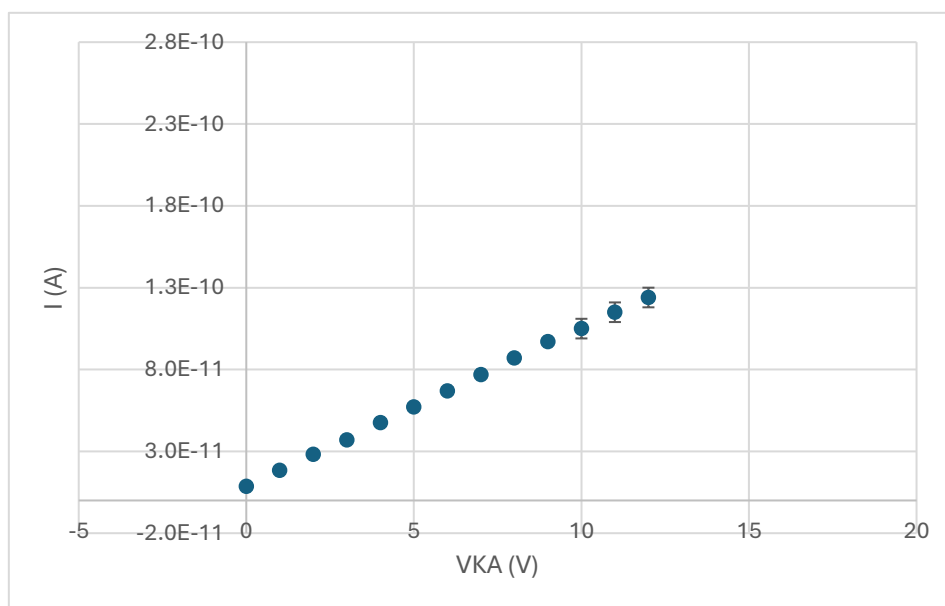
1^ο μέρος:

Αρχικά θα μελετήσουμε μόνο το μέρος της χαρακτηριστικής καμπύλης με θετικές τάσης και θα ελέγξουμε εάν όντως η καμπύλη αυτή σταθεροποιείται σε μια μέγιστη τιμή I όπως είδαμε στην θεωρία, αυτό θα το κάνουμε για ένα μόνο φίλτρο, χωρίς να έχει σημασία πιο από τα 5 φίλτρα επιλέχθηκε καθώς όποιο και να ήταν θα έπρεπε να μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή σε όλα η χαρακτηριστική καμπύλη θα πρέπει σύμφωνα με την θεωρία να σταθεροποιείται σε μια μέγιστη τιμή I . Άρα έχοντας ενεργοποίηση όλα τα όργανα της διάταξης και έχοντας τοποθετήσει κάποιο φίλτρο μεταξύ της φασματικής λυχνίας και του φωτοκυττάρου επιλέγουμε στο τροφοδοτικό χαμηλών τάσεων την ορθή πόλωση και δίνουμε τιμές τάσης από 0 έως τα 12 V με βήμα 1 V, σε κάθε βήμα καταγράφουμε το ανοδικό ρεύμα. Τα πειραματικά δεδομένα που αντλήθηκαν από την παραπάνω διαδικασία παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3):

| V (V) | I (A) | Κλίμακα | σ_I |
|-------|----------|---------|------------|
| 0 | 8.6E-12 | 0.1 | 2E-14 |
| 1 | 1.85E-11 | 0.3 | 6E-14 |
| 2 | 2.83E-11 | 0.3 | 6E-14 |
| 3 | 3.7E-11 | 10 | 2E-12 |
| 4 | 4.75E-11 | 10 | 2E-12 |
| 5 | 5.71E-11 | 10 | 2E-12 |
| 6 | 6.7E-11 | 10 | 2E-12 |
| 7 | 7.7E-11 | 10 | 2E-12 |
| 8 | 8.7E-11 | 10 | 2E-12 |
| 9 | 9.7E-11 | 10 | 2E-12 |
| 10 | 1.05E-10 | 30 | 6E-12 |
| 11 | 1.15E-10 | 30 | 6E-12 |
| 12 | 1.24E-10 | 30 | 6E-12 |

Πίνακας 3: Πειραματικά δεδομένα για την μελέτη του θετικού μέρους της χαρακτηριστικής καμπύλης.

Στον πίνακα αυτόν έχει καταγραφεί και η κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε στο ηλεκτρόμετρο για να μπορέσουμε να παρατηρήσουμε την τιμή του ρεύματος, εάν λοιπόν πάμε να σχεδιάσουμε την γραφική αναπαράσταση ($I - V_{KA}$) θα παρατηρήσουμε μόνο το μέρος της χαρακτηριστικής καμπύλης με θετικές τάσης. Το διάγραμμα αυτό αν χρησιμοποιήσουμε τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 3 είναι το παρακάτω (Διάγραμμα 1):



Διάγραμμα 1: Το μέρος της χαρακτηριστικής καμπύλης ενός φίλτρου με θετικές τάσης

Από την παραπάνω γραφική αναπαράσταση παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά δεν σταθεροποιούνται σε μια μέγιστη τιμή I αλλά το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι προσεγγίζουν ευθεία. Αυτό πρακτικά συμβαίνει καθώς η περιοχή (0 έως 12 V) είναι μια περιοχή χαμηλών τάσεων, εάν παρατηρήσουμε και από την εικόνα 2 για περιοχές μικρών τάσεων η χαρακτηριστική καμπύλη προσεγγίζει ευθεία. Για να βλέπαμε γραφικά την σταθεροποίηση σε μια μέγιστη τιμή I θα έπρεπε να κινηθούμε σε μια περιοχή υψηλότερων τάσεων V_{KA} . Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί ότι το σφάλμα στην τιμή του ρεύματος I ισούται με το 2% της κλίμακας (για παράδειγμα αν η κλίμακα είναι 0.1 τότε το σφάλμα θα είναι ίσο με $\sigma_I = \pm 0.002 \cdot 10^{-11} \text{ A} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ A}$) με τον τρόπο αυτών υπολογίστηκε το σφάλμα της τιμής του I στον πίνακα 3. Ενώ το σφάλμα στην τιμή του V θα είναι λόγο του ψηφιακού βολτομέτρου $\sigma_{VAK} = \pm 0.01 \text{ V}$.

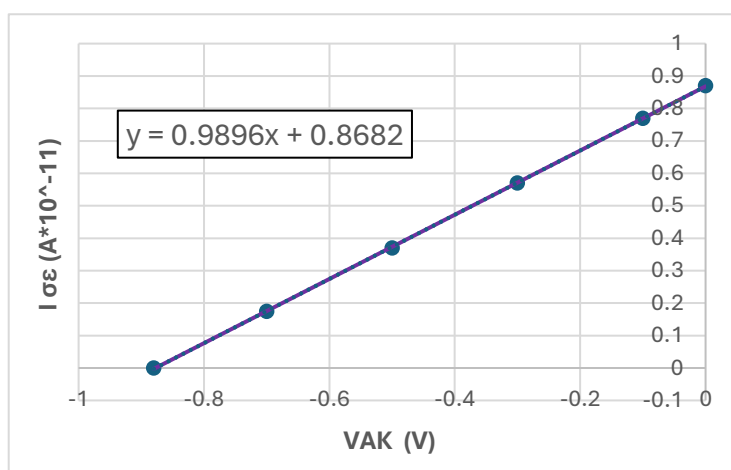
2ο μέρος:

Στο δεύτερο μέρος της πειραματικής διαδικασίας θα προσπαθήσουμε μελετώντας το μέρος της χαρακτηριστικής καμπύλης με αρνητικές τιμές τάσεως (δηλαδή στην αντίστροφη πόλωση του τροφοδοτικού) να υπολογίσουμε την σταθερά h του Planck. Πρακτικά αυτό που πάμε και κάνουμε είναι έχοντας τοποθέτηση κάποιο φίλτρο, ξεκινώντας από την τιμή τάσης 0 V έως και την τιμή τάσης για την οποία το ρεύμα I γίνεται ίσο με 0 (με όποιο βήμα θέλουμε) καταγράφουμε τα δεδομένα τάσης V_{KA} που δώσαμε και τα αντίστοιχα δεδομένα ρεύματος I που εμφάνισε το ηλεκτρόμετρο. Τα φίλτρα που τοποθετήθηκαν είναι κατά σειρά τα (Ιώδες, Κυανό, Πράσινο, Κίτρινο και Υπεριώδες). Με τα πειραματικά δεδομένα του κάθε φίλτρου σχεδιάζουμε την γραφική αναπαράσταση των δεδομένων ($I - V_{KA}$) και ταυτοχρονα εμφανίζουμε από το excel και την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων. Τα πειραματικά δεδομένα και οι γραφικές αναπαραστάσεις παρουσιάζονται παρακάτω για κάθε φίλτρο ξεχωριστά:

Ιώδες:

| V (V) | Ιώδες | | σ_I ($A \cdot 10^{-11}$) |
|-------|--------------------------|---------|-----------------------------------|
| | I ($A \cdot 10^{-11}$) | Κλίμακα | |
| 0 | 0.87 | 1 | 0.02 |
| -0.1 | 0.77 | 1 | 0.02 |
| -0.3 | 0.57 | 1 | 0.02 |
| -0.5 | 0.37 | 1 | 0.02 |
| -0.7 | 0.175 | 1 | 0.02 |
| -0.88 | 0 | 0.3 | 0.006 |

Πίνακας 4: Πειραματικά δεδομένα
ιώδες φίλτρου.



Διάγραμμα 2: Διάγραμμα ($I - V_{KA}$) από τα
πειραματικά δεδομένα του πίνακα 4 για το ιώδες
φίλτρο.

Η ευθεία ελάχιστων τετραγώνων της γραφικής είναι η παρακάτω:

$$y = 0.9896 \cdot 10^{-11} \cdot x + 0.8682 \cdot 10^{-11} \quad (3)$$

Σύμφωνα με της σχέσεις 2.7, 2.8 και 2.9 μπορούμε να βρούμε τα σφάλματα των τιμών α και β τα οποία θα είναι σύμφωνα με τον πίνακα 4.1 (που απορρέει άμεσα από τα δεδομένα του πίνακα 4) τα παρακάτω:

| n | α | β | $\Sigma(\chi_i^2)$ | $(\Sigma \chi_i)^2$ | $\Sigma[I - \alpha V - \beta]^2$ |
|---|----------|---------|--------------------|---------------------|----------------------------------|
| 6 | 0.9896 | 0.8682 | 1.6144 | 6.1504 | 12.314272 |

Πίνακας 4.1: Απαραίτητα
δεδομένα για τον υπολογισμό
των σφαλμάτων.

$\sigma_\alpha = 2.285$ και $\sigma_\beta = 1.185$, οπότε τελικά η ευθεία ελάχιστων τετραγώνων είναι η παρακάτω:

$$y = (0.9896 \cdot 10^{-11} \pm 2.285 \cdot 10^{-11}) \cdot x + (0.8682 \cdot 10^{-11} \pm 1.185 \cdot 10^{-11})$$

Το μόνο πρακτικά που μας ενδιαφέρει από την ευθεία αυτήν είναι η τάση V_s η οποία είναι η τιμή της τάσης V για την οποία το ρεύμα I μηδενίζεται. Την τάση αυτή θα την βρούμε εάν στην σχέση (3) μηδενίσουμε το $y(=I)$:

$$(3) \xrightarrow{y=0} x = V_s = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{0.9896}{0.8682} = -0.88 \Rightarrow V_s = -0.88 \text{ V}$$

Ενώ το σφάλμα στην τιμή του V_s θα δίνετε σύμφωνα με την θεωρία από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \sigma_{V_s} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 \cdot \sigma_\beta^2} = \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2 \cdot \sigma_\beta^2} \\ &= \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{0.8682}\right)^2 \cdot 2.285^2 + \left(\frac{0.9896}{0.8682^2}\right)^2 \cdot 1.185^2} = \pm 3.06 \end{aligned}$$

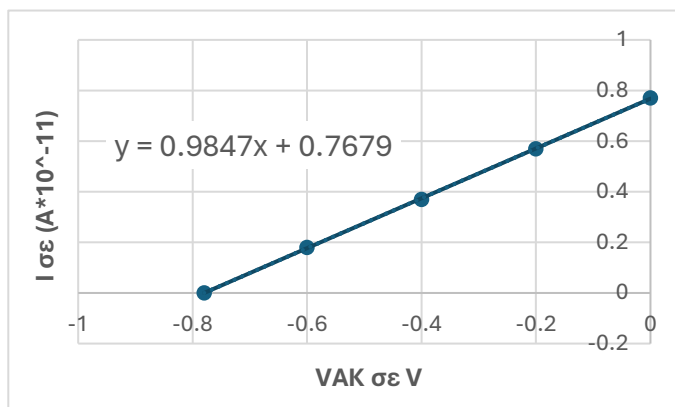
Άρα για το ιώδες φίλτρο: $V_s = -0.88 \pm 3.06 \cdot 10^{-11} \text{ V}$

Η ίδια διαδικασία θα ακολουθηθεί παρακάτω και για τα επόμενα φίλτρα:

Κυανό:

| V (V) | Κυανό | | $\sigma_I \text{ (A} \cdot 10^{-11})$ |
|-------|-------------------------|---------|---------------------------------------|
| | I (A $\cdot 10^{-11}$) | Κλίμακα | |
| 0 | 0.77 | 1 | 0.02 |
| -0.2 | 0.57 | 1 | 0.02 |
| -0.4 | 0.37 | 1 | 0.02 |
| -0.6 | 0.18 | 0.3 | 0.006 |
| -0.78 | 0 | 0.3 | 0.006 |

Πίνακας 5: Πειραματικά δεδομένα για το κυανό φίλτρο.



Διάγραμμα 3: Διάγραμμα ($I - V_{KA}$) από τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 5 για το κυανό φίλτρο.

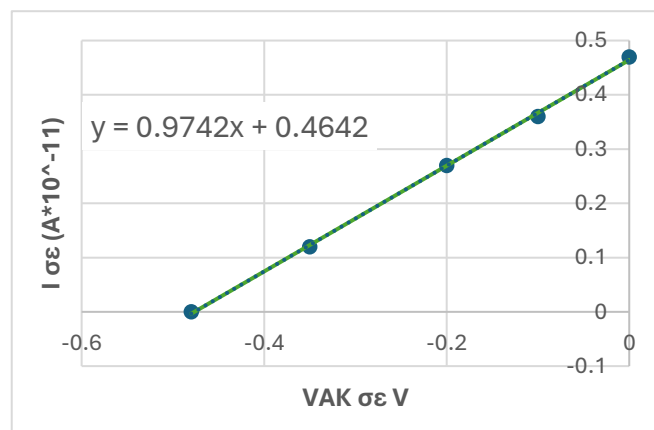
Με: $y = (0.9847 \cdot 10^{-11} \pm 2.918 \cdot 10^{-11}) \cdot x + (0.7679 \cdot 10^{-11} \pm 1.1125 \cdot 10^{-11})$ και

$V_s = -0.78 \pm 5.083 \cdot 10^{-11}$.

Πράσινο:

| V (V) | Πράσινο | | $\sigma_I \text{ (A} \cdot 10^{-11})$ |
|-------|-------------------------|---------|---------------------------------------|
| | I (A $\cdot 10^{-11}$) | Κλίμακα | |
| 0 | 0.47 | 1 | 0.02 |
| -0.1 | 0.36 | 1 | 0.02 |
| -0.2 | 0.27 | 0.3 | 0.006 |
| -0.35 | 0.12 | 0.3 | 0.006 |
| -0.48 | 0 | 0.3 | 0.006 |

Πίνακας 6: Πειραματικά δεδομένα για το πράσινο φίλτρο.



Διάγραμμα 4: Διάγραμμα ($I - V_{KA}$) από τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 6 για το πράσινο φίλτρο.

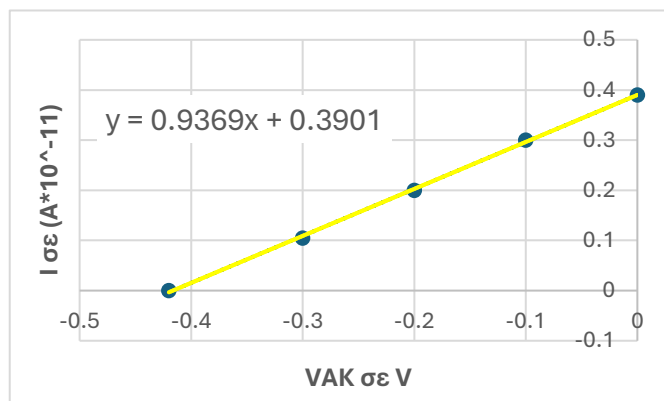
Με: $y = (0.9742 \cdot 10^{-11} \pm 5.102 \cdot 10^{-11}) \cdot x + (0.4642 \cdot 10^{-11} \pm 1.1646 \cdot 10^{-11})$ και

$V_s = -0.48 \pm 23.202 \cdot 10^{-11}$.

Κίτρινο:

| Κίτρινο | | | |
|---------|--------------------------|---------|---------------------------------------|
| V (V) | I (A*10 ⁻¹¹) | Κλίμακα | σ _I (A*10 ⁻¹¹) |
| 0 | 0.39 | 1 | 0.02 |
| -0.1 | 0.3 | 1 | 0.02 |
| -0.2 | 0.2 | 0.3 | 0.006 |
| -0.3 | 0.105 | 0.3 | 0.006 |
| -0.42 | 0 | 0.3 | 0.006 |

Πίνακας 7: Πειραματικά δεδομένα για το κίτρινο φίλτρο.



Διάγραμμα 5: Διάγραμμα ($I - V_{KA}$) από τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 7 για το κίτρινο φίλτρο.

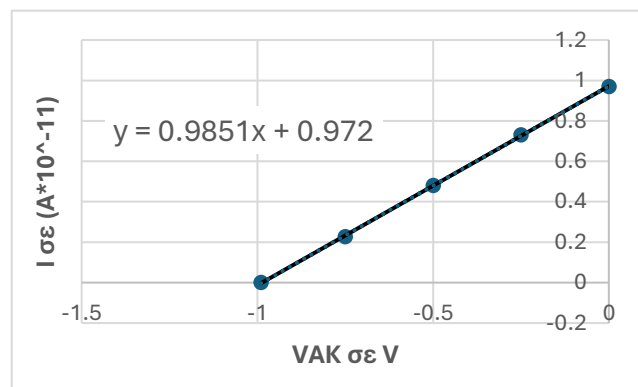
Με: $y = (0.9369 \cdot 10^{-11} \pm 5.1968 \cdot 10^{-11}) \cdot x + (0.3901 \cdot 10^{-11} \pm 1.03864 \cdot 10^{-11})$ και

$$V_s = -0.42 \pm 32.105 \cdot 10^{-11}.$$

Υπεριώδες:

| Υπεριώδες | | | |
|-----------|--------------------------|---------|---------------------------------------|
| V (V) | I (A*10 ⁻¹¹) | Κλίμακα | σ _I (A*10 ⁻¹¹) |
| 0 | 0.97 | 1 | 0.02 |
| -0.25 | 0.73 | 1 | 0.02 |
| -0.5 | 0.48 | 1 | 0.02 |
| -0.75 | 0.227 | 0.3 | 0.006 |
| -0.99 | 0 | 0.1 | 0.002 |

Πίνακας 8: Πειραματικά δεδομένα για το υπεριώδες φίλτρο.



Διάγραμμα 6: Διάγραμμα ($I - V_{KA}$) από τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 8 για το υπεριώδες φίλτρο.

Με: $y = (0.9851 \cdot 10^{-11} \pm 5.1968 \cdot 10^{-11}) \cdot x + (0.972 \cdot 10^{-11} \pm 1.03864 \cdot 10^{-11})$ και

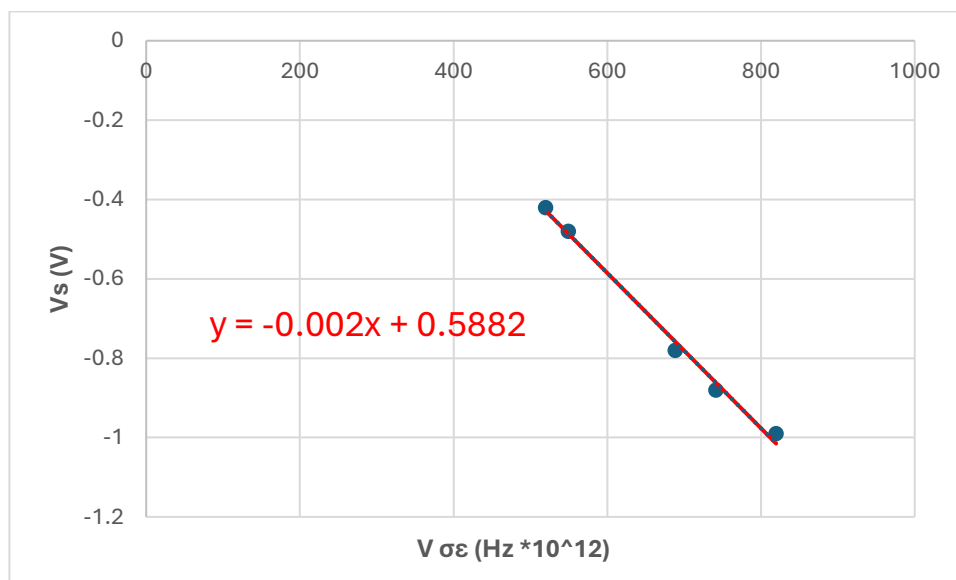
$$V_s = -0.42 \pm 32.105 \cdot 10^{-11}.$$

Τέλος αυτό που θα χρειαστεί να κάνουμε για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την σταθερά h του Planck σύμφωνα με την σχέση (1.5) είναι έχοντας βρει την τάση V_s για κάθε φίλτρο να πάμε και να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ($V_s - \nu$), δηλαδή των τιμών τάσης V_s συναρτησης της συχνότητας ν του κάθε χρώματος του φίλτρου. Με τον τρόπο αυτόν βρίσκοντας την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της γραφικής θα μπορέσουμε μέσω της κλίσης να βρούμε την σταθερά. Άρα τα δεδομένα τάσης και συχνότητων που αντλήσαμε από την παραπάνω διαδικασία παρουσιάζονται παρακάτω στον πίνακα 9:

| α/α | Φίλτρο | Συχνότητα ν | V_s (V) |
|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| 1 | Ιώδες | 741.3E+12 | -0.88 |
| 2 | Κυανό | 688.4E+12 | -0.78 |
| 3 | Πράσινο | 549.3E+12 | -0.48 |
| 4 | Κίτρινο | 519.9E+12 | -0.42 |
| 5 | Υπεριώδες | 819.7E+12 | -0.99 |

Πίνακας 9: Δεδομένα τάσης V_s και συχνότητας ν κάθε φίλτρου.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 9 μπορούμε να σχεδιάσουμε την γραφική αναπαράσταση ($V_s - \nu$) και μάλιστα να βρούμε και την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων των σημείων της γραφικής, σύμφωνα με το excel προέκυψε η παρακάτω γραφική απεικόνιση (Διάγραμμα 7) :



Διάγραμμα 7: Διάγραμμα ($V_s - \nu$) από τα δεδομένα του πίνακα 9 για κάθε φίλτρο.

Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της γραφικής είναι η παρακάτω:

$$y = -0.002 \cdot 10^{-12} \cdot x + 0.5882 = -2 \cdot 10^{-15} \cdot x + 0.5882$$

Για τα σφάλματα των α και β ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και μέσω του πίνακα 9.1 προέκυψε ότι:

$$\sigma_{\alpha} = \pm 0,000175 \cdot 10^{-12} \text{ και } \sigma_{\beta} = \pm 0,041658$$

| n | α | β | Σx_i^2 | $(\Sigma x_i)^2$ | $\Sigma([y_i - \alpha x_i - \beta]^2)$ |
|---|----------|---------|----------------|------------------|--|
| 5 | -0.002 | 0.5882 | 2267354.84 | 11013105.96 | 0.00594948 |

Πίνακας 9.1: Απαραίτητα δεδομένα
για τον υπολογισμό των σφαλμάτων
των τιμών α και β .

Οπότε τελικά:

$$y = (-2 \cdot 10^{-15} \pm 0,175 \cdot 10^{-15}) \cdot x + (0.5882 \pm 0,041658)$$

Σύμφωνα με την σχέση 1.5 ισχύουν τα παρακάτω:

$$a = \frac{h}{e} \Rightarrow h = \alpha \cdot e \quad (3.1) \quad \text{και} \quad \beta = -\frac{\varphi}{e} \Rightarrow \varphi = -\beta \cdot e \quad (3.2)$$

Οπότε για την σταθερά h θα ισχύει:

$$(3.1) \Rightarrow h = \alpha \cdot e = (-2 \cdot 10^{-15}) \cdot (-1.602 \cdot 10^{-19}) = 3.204 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\Rightarrow h_{\pi} = 3.204 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Με σφάλμα:

$$\sigma_h = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_{\alpha}^2} = \pm \sqrt{(e)^2 \cdot \sigma_{\alpha}^2} = \pm e \cdot \sigma_{\alpha} = \pm 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,175 \cdot 10^{-15} = \pm 0.28 \cdot 10^{-34}$$

Άρα:

$$h_{\pi} = 3.204 \cdot 10^{-34} \pm 0.28 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω τιμή είναι περίπου η μισή της πραγματικής σύμφωνα με την βιβλιογραφία ($h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$). Για αυτό μπορεί να ευθύνονται πολλά πράγματα όπως τυχαία σφάλματα, συστηματικά σφάλματα ή ακόμη και ανθρώπινα σφάλματα κατά την διάρκεια συλλογής των πειραματικών δεδομένων. Παρόλα αυτά η απόκλιση αυτή δεν είναι τεράστια σε μέγεθος γι' αυτό και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πέτυχαμε τον σκοπό της συγκεκριμένης εργαστηριακής άσκησης.

Επιπλέον μπορούμε να υπολογίσουμε και το έργο εξόδου φ του καλίου από την σχέση 3.2, συγκεκριμένα θα ισχύει ότι:

$$\varphi = -\beta \cdot e = -0.5882 \cdot (-1.602 \cdot 10^{-19}) = 0.942 \cdot 10^{-19} \Rightarrow \varphi = 0.942 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Με σφάλμα:

$$\sigma_{\varphi} = \pm e \cdot \sigma_{\beta} = \pm 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.041658 = \pm 0,067 \cdot 10^{-19}$$

Άρα:

$$\varphi = 0.942 \cdot 10^{-19} \pm 0,067 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Συμπέρασμα

Η πειραματική εργασία είχε ως κύριο στόχο τον προσδιορισμό της σταθεράς h του Planck μέσω του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Η τελική υπολογισθείσα τιμή εμφάνισε μια μικρή απόκλιση από την αναφερόμενη τιμή στη βιβλιογραφία. Ωστόσο, αυτή η απόκλιση δεν ήταν σημαντική, επομένως θεωρούμε ότι πέτυχαμε τον κύριο στόχο της εργασίας. Εκτός από τα αριθμητικά αποτελέσματα, η εργασία ενίσχυσε την κατανόησή μας για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και είδαμε πρακτικά πως με μια ειδική πειραματική διάταξη μπορούμε να μελετήσουμε και να αντλήσουμε δεδομένα από το φαινόμενο αυτό.