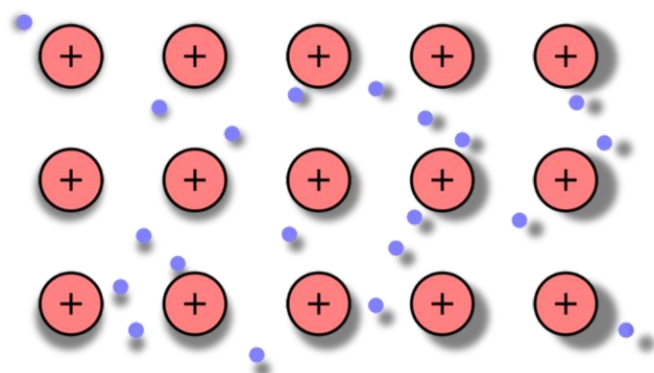


Θερμιονική Εκπομπή Ηλεκτρονίων

Κλάιντι Τσάμη



Εισαγωγή:

Η εργαστηριακή άσκηση που ακολουθεί πραγματοποιήθηκε με απώτερο σκοπό την μελέτη του φαινομένου της θερμιονικής εκπομπής, δηλαδή της εκπομπής ηλεκτρονίων από τα μέταλλα όταν αυτά θερμαίνονται σε υψηλές θερμοκρασίες. Πρακτικά αυτό που θα επιχειρήσουμε να κάνουμε είναι έχοντας θερμάνει ένα μέταλλο να παρατηρήσουμε πόσα ηλεκτρόνια διαφεύγουν από αυτό (μέσω της ανίχνευσης ηλεκτρικού ρεύματος) και έπειτα θα προσπαθήσουμε να βρούμε σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα την σχέση που συνδέει το ρεύμα συνάρτηση της θερμοκρασίας ώστε να διαβεβαιώσουμε ή να διαψεύσουμε αν η σχέση αυτή είναι ίδια με αυτή της βιβλιογραφίας. Η κατανόηση αυτού του φαινομένου μας εισάγει στην κβαντομηχανική και τη θεωρία των στερεών, ενώ έχει εφαρμογές σε πολλούς τομείς, από την ηλεκτρονική έως την ενεργειακή βιοχημεία. Συνεπώς, η εργαστηριακή αυτή άσκηση αποτελεί ένα σημαντικό βήμα προς την κατανόηση των φυσικών αρχών που διέπουν τη συμπεριφορά των μετάλλων και τη χρήση τους σε πρακτικές εφαρμογές.

Θεωρία:

Για την μαθηματική ανάλυση του πειράματος θα χρειαστεί καταρχάς να μελετήσουμε τα μεταλλικά στερεά. Γνωρίζουμε από την βιβλιογραφία ότι γενικά σε ένα ιδανικό στερεό τα άτομα διατάσσονται με έναν κανονικό τρόπο στον χώρο καταλαμβάνοντας ισοδύναμες θέσεις σε μια τρισδιάστατη περιοδική δομή (κρυσταλλικό πλέγμα), στα μεταλλικά στερεά της θέσεις του κρυσταλλικού πλέγματος της καταλαμβάνουν θετικά ιόντα τα οποία έχουν χάσει τα ασθενικά συνδεδεμένα ηλεκτρόνια τους κατά την συσσωμάτωση τους στην διάρκεια σχηματισμού του κρυσταλλικού πλέγματος. Οπότε πρακτικά τα ηλεκτρόνια αυτά κινούνται ελεύθερα στο μέταλλο γι' αυτό και πραγματοποιείτε το συγκεκριμένο πείραμα καθώς τα ελεύθερα ηλεκτρόνια αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές. Αρχικά είχε ειπωθεί ότι τα ηλεκτρόνια αυτά είναι όμοια με τα άτομα ενός αερίου τα οποία βρίσκονται περιορισμένα σε ένα δοχείο με όρια τις επιφάνειες του μετάλλου. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή και την στατιστική συνάρτηση κατανομής του Maxwell – Boltzmann οι ενέργειες των συστατικών ενός κλασικού αερίου, δηλαδή των ηλεκτρονίων δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(E) = \frac{A}{e^{E/kT}} \quad (1)$$

όπου:

f(E): Το μέτρο της πιθανότητας του κάθε ατόμου να έχει ενέργεια E.

k : Η σταθερά του Boltzmann.

T : Η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου.

και

A : Σταθερά η οποία καθορίζεται από τον ολικό αριθμό των σωματιδίων του συστήματος.

Εύκολα αποδείχθηκε ότι το παραπάνω μοντέλο δεν είναι κατάλληλο για την περιγραφή των ιδιοτήτων των ηλεκτρονίων του μετάλλου και αυτό διότι τα ηλεκτρόνια δεν είναι κλασικά σωματίδια αλλά κβαντικά. Σύμφωνα με την κβαντομηχανική ισχύουν η δυο παρακάτω υπόθεσης:

1. Όταν τα ηλεκτρόνια είναι χωρικά περιορισμένα η ενέργειες τους κατανέμονται με ασυνεχή τρόπο. Το ίδιο ισχύει και στα κρυσταλλικά πλέγματα των στερεών με την μόνη διαφορά ότι σε αυτά η μεγάλη πυκνότητα των διαθέσιμων ενεργειακών σταθμών δίνει την έννοια της ενεργειακής ζώνης.
2. Επειδή για τα ηλεκτρόνια ισχύει η απαγορευτική αρχή του Pauli, πρακτικά η αρχή αυτή περιορίζει σημαντικά τον τρόπο κατανομής των ηλεκτρονίων στις ενεργειακές στάθμες απαγορεύοντας τα ηλεκτρόνια να βρίσκονται σε κάποια στάθμη όλα μαζί. Οπότε τα ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν ανά δυο της χαμηλότερες στάθμες και συνεχίζουν σε ολοένα και υψηλότερες μέχρι να κατανεμηθούν όλα. Η μέγιστη ενεργειακή στάθμη που καταλαμβάνετε με τον τρόπο αυτών στην θερμοκρασία του απολυτού μηδενός ονομάζεται ενέργεια Fermi (E_F).

Σύμφωνα με την παραπάνω απαγορευτική αρχή καταλαβαίνουμε ότι η θερμοκρασία μπορεί να προκαλέσει διεγέρσεις μόνο σε συγκεκριμένα ηλεκτρόνια τα οποία είναι αυτά στις ανώτερες ενεργειακές στάθμες, αφού αυτά στις χαμηλότερες βλέπουν της ανώτερες στάθμες πλήρεις και δεν μπορούν να διεγερθούν λόγω της απαγορευτικής αρχής. Συγκεκριμένα μπορεί να προκληθεί διέγερση στις στάθμες με ενεργειακή απόσταση από την ενέργεια Fermi (E_F) όχι πολύ μεγαλύτερη του kT . Αποδεικνύεται λοιπόν ότι η κατανομή των ενεργειών των ηλεκτρονίων ακολουθεί την στατιστική Fermi – Dirac όπου το μέτρο της πιθανότητας του κάθε ατόμου να έχει ενέργεια E δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (1.1)$$

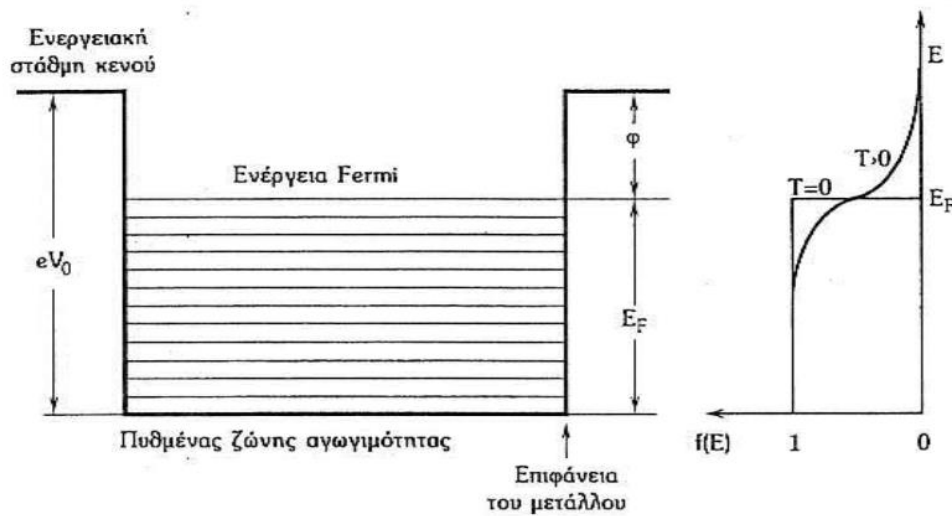
Αξίζει να σημειωθεί ότι η μονάδα στον παρανομαστή παίζει ρόλο μόνο στις χαμηλές θερμοκρασίες και μάλιστα διαφοροποιεί σε μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα της σχέσης (1.1) από αυτά της (1). Σε μεγάλες θερμοκρασίες ή σε μικρές πυκνότητες ηλεκτρονίων ή απαγορευτική αρχή δεν παίζει πια ρόλο και έτσι η δυο σχέσεις δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Ως μικρές θερμοκρασίες θεωρούνται αυτές μέχρι και την θερμοκρασία τήξης των μετάλλων.

Έργο εξόδου ϕ

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστεί να ορίσουμε άλλο ένα σημαντικό μέγεθος. Όπως ειπώθηκε και παραπάνω το υποθετικό αέριο ηλεκτρονίων βρίσκεται περιορισμένο σε ένα δοχείο με όρια τις επιφάνειες του μετάλλου, στην πραγματικότητα το φράγμα δυναμικού που αποτελούν οι επιφάνειες του μετάλλου δεν είναι αδιαπέραστο αλλά έχει ένα πεπερασμένο ύψος V_0 από τον πυθμένα της ζώνης αγωγιμότητας (Εικόνα 1). Δηλαδή τα πιο ενεργειακά ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας που για απόλυτη θερμοκρασία ίση με $T = 0$ έχουν ενέργεια ίση με την ενέργεια Fermi E_F χρειάζονται ένα επιπλέον πόσο ενέργειας για να μπορέσουν να διαφύγουν από το φράγμα δυναμικού και να κινηθούν ελεύθερα στο κενό.

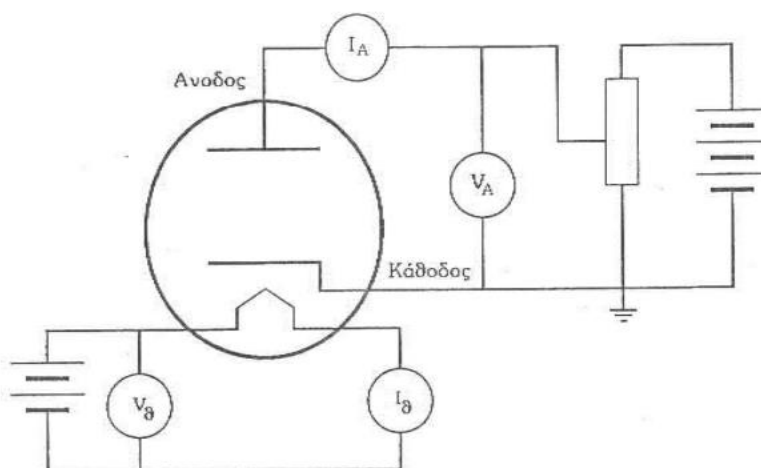
$$\phi = eV_0 - E_F \quad (1.2)$$

Το έργο αυτό ϕ ονομάζεται έργο εξόδου και θεωρείτε ότι έχει καθορισμένη τιμή για κάθε μέταλλο.



Εικόνα 1: Ενεργειακές καταστάσεις των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας σε ένα μέταλλο.

Για την μελέτη του φαινομένου της θερμιονικής εκπομπής καταλληλότερες διάταξης είναι οι ηλεκτρονικές λυχνίες κενού. Οι απλούστερες λυχνίες (δίοδοι) έχουν μόνο δύο ηλεκτρόδια (κάθοδος και άνοδος) μεταξύ των οποίων εφαρμόζεται εξωτερικά μια κατάλληλη διαφορά δυναμικού. Την κάθοδο αποτελεί ένα δύστηκτο μέταλλο το οποίο όταν θερμανθεί σε θερμοκρασία T ελευθερώνει ηλεκτρόνια τα οποία κατευθύνονται προς την άνοδο. Μετρώντας το ρεύμα στην άνοδο μπορούμε πρακτικά να μετρήσουμε την θερμιονική εκπομπή του μετάλλου της διάταξης όπου συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης θα πάρουμε τελικά και την χαρακτηριστική καμπύλη της λυχνίας στην θερμοκρασία T .



Εικόνα 2: Κύκλωμα διόδου λυχνίας για την μελέτη της θερμιονικής εκπομπής.

Επιπλέον όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ της καθόδου και της ανόδου γίνει αρκετά μεγάλη το ρεύμα σταθεροποιείται καθώς συλλέγονται όλα τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την κάθοδο. Το ρεύμα αυτό ονομάζεται ρεύμα κόρου I_K και εξαρτάται ισχυρά από την θερμοκρασία T της καθόδου και σύμφωνα με τον Richardson δίνεται από την παρακάτω σχέση (Σχέση Richardson):

$$I_K = Af(T)e^{-b/T} \quad (1.3)$$

Όπου:

A και **b** σταθερές, χαρακτηριστικές της καθόδου της λυχνίας.

f(T) = Tⁿ (1.4), ένας ορός μικρού βαθμού που εξαρτάτε από την θερμοκρασία.

Η ένταση του ρεύματος κόρου υπολογίστηκε αρχικά χρησιμοποιώντας την κλασική στατιστική Maxwell – Boltzmann και βρέθηκε ίση με:

$$I_K = en \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} T^{1/2} e^{-eV_0/kT} \quad (1.5)$$

Όπου:

e και **m**: Το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου.

n: Η ηλεκτρική πυκνότητα του μετάλλου (αριθμός ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου).

eV₀: Το ενεργειακό ύψος του φράγματος δυναμικού στην επιφάνεια.

Αν συγκρίνουμε την σχέση 1.5 με την 1.4 παρατηρούμε ότι το b έχει πάρει την παρακάτω μορφή:

$$b = eV_0/k$$

Όμως όπως είδαμε και παραπάνω τα ηλεκτρόνια δεν είναι απλά σωματίδια αλλά κβαντικά, δηλαδή η σωστή κατανομή για τα ηλεκτρόνια είναι αυτή της στατιστικής Fermi – Dirac, οπότε η σχέση του Richardson παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$I_K = \frac{4\pi emk^2}{h^3} T^2 e^{-\varphi/kT} \quad (1.6)$$

Όπου:

h: Η σταθερά του Planck.

Στην συγκεκριμένη πειραματική εργασία θα ελέγχουμε την ισχύ της σχέσης 1.6, αυτό θα γίνει κάνοντας το διάγραμμα του $y = \ln(I_K/T^2)$ συνάρτηση του $x = 1/T$ και αυτό διότι:

$$(1.6) \Rightarrow \frac{I_K}{T^2} = \frac{4\pi emk^2}{h^3} e^{-\frac{\varphi}{kT}} \xrightarrow{\varepsilon = \frac{4\pi emk^2}{h^3}} \frac{I_K}{T^2} = \varepsilon \cdot e^{-\frac{\varphi}{kT}} \Rightarrow \ln\left(\frac{I_K}{T^2}\right) = \ln\left(\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varphi}{kT}}\right) = \ln(\varepsilon) + \ln\left(e^{-\frac{\varphi}{kT}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{I_K}{T^2}\right) = \ln(\varepsilon) - \frac{\varphi}{k} \frac{1}{T} \Rightarrow \ln\left(\frac{I_K}{T^2}\right) = \ln(\varepsilon) - \frac{\varphi}{k} \frac{1}{T} = \beta + \alpha \frac{1}{T} \rightarrow (y = \beta + \alpha x)$$

Όπου:

$$\varepsilon = \frac{4\pi emk^2}{h^3} \quad (1.7), \quad \beta = \ln(\varepsilon) \quad (1.8) \quad \text{και} \quad \alpha = -\frac{\varphi}{k} \quad (1.9)$$

Από την κλήση της ευθείας μπορούμε με εύκολες πράξεις σύμφωνα με την σχέση (1.9) να βρούμε το έργο εξόδου ϕ (το οποίο σύμφωνα με την βιβλιογραφία στα διαφορά μέταλλα παίρνει τιμές από 2 έως 5.5 eV).

Τέλος σύμφωνα με την θεωρία ελαχίστων τετραγώνων σχεδιάζοντας μια οποιαδήποτε γραφική παράσταση ($y_i - x_i$) χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα ενός πειράματος, μπορούμε σύμφωνα με την θεωρία να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετράγωνων:

$$y = \alpha \cdot x + \beta \quad (2) \quad \text{της γραφικής παράστασης ως εξής :}$$

Καταρχάς θεωρούμε ως δ_i της αποκλίσεις τον σημείων από την ευθεία αυτή, σύμφωνα με την θεωρία η ζητούμενη ευθεία είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα S των τετραγώνων των αποκλίσεων

$$S = \sum \delta_i^2 = \sum [y_i - (a \cdot x_i + \beta)]^2 \quad (2.1)$$

γίνεται ελάχιστο. Βρίσκοντας τα ελάχιστο της συνάρτησης αυτής και λύνοντας ως προς a και β προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum (x_i \cdot y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{n \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (2.2)$$

και

$$\beta = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum (y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum (x_i \cdot y_i))}{n \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (2.3)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε από την θεωρία ότι όταν σε μια σχέση (έστω τυχαίο παράδειγμα $y = V + I + r$ (2.4)) εμπεριέχονται μέσα σε αυτήν τιμές η οποίες έχουν κάποιο σφάλμα (έστω ότι σφάλματα έχουν η τιμές των V , I και r) το τελικό σφάλμα στην τιμή του y δηλαδή το σ_y θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2 \cdot \sigma_V^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial I}\right)^2 \cdot \sigma_I^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 \cdot \sigma_r^2 \quad (2.5)$$

Πειραματικό μέρος:

Η πειραματική διάταξη της εργαστηριακής άσκησης αυτής αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στην εικόνα 2 και αποτελείται από τα εξής όργανα:

- Δίοδος λυχνία.
- Τροφοδοτικό συνεχούς χαμηλής τάσης 0 – 5 V.
- Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0 – 300 V.
- Δυο βολτόμετρα και δυο αμπερόμετρα.
- Καλώδια σύνδεσης.

Πρακτικά στην πειραματική διάταξη πραγματοποιείτε η εξής διαδικασία, καταρχάς η κάθοδος θερμαίνεται έμμεσα από ένα λεπτό νήμα βολφραμίου το οποίο είναι συνδεδεμένο στην πηγή της μεταβλητής συνεχούς τάσης (0 - 5 V) και έτσι υπάρχει δυνατότητα μεταβολής της θερμοκρασίας τις καθόδου. Επιπλέον η μέτρηση της θερμοκρασίας T της καθόδου θα προσδιοριστεί μέσω της μεταβολής της αντίστασης του νήματος με την θερμοκρασίας, σύμφωνα με την βιβλιογραφία η αντίσταση ενός μετάλλου μεταβάλλεται με την θερμοκρασίας με γραμμικό τρόπο:

$$R(\theta) = R_0(1 + \alpha \cdot \theta) \quad (2.7)$$

Όπου:

α : Θερμικός συντελεστής της αντίστασης του μετάλλου, για το βολφράμιο ($\alpha = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$).

θ : Η θερμοκρασία του σε ($^{\circ}\text{C}$).

και R_0 : Η αντίσταση στους 0°C .

Μετατρέποντας την θερμοκρασία θ σε Kelvin ($\theta(\text{K}) = \theta^{\circ}\text{C} + 273$) της σχέσης 2.7 καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο με τον οποίο θα υπολογίσουμε την θερμοκρασία T της καθόδου:

$$T = \frac{R(\theta) - R_0}{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot R_0} + 273 \quad (2.8)$$

Επειδή πειραματικά η τιμή της αντίστασης R_0 στους 0°C μετρήθηκε ίση με 6.5Ω η παραπάνω σχέση θα πάρει την μορφή:

$$\begin{aligned} T &= \frac{R(\theta) - R_0}{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot R_0} + 273 = \frac{R(\theta) - 6.5}{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot 6.5} + 273 = \frac{R(\theta)}{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot 6.5} - \frac{6.5}{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot 6.5} + 273 = \\ &= 34.19 \cdot R(\theta) + 50.7 \Rightarrow T = 34.19 \cdot R(\theta) + 50.7 \quad (2.9) \end{aligned}$$

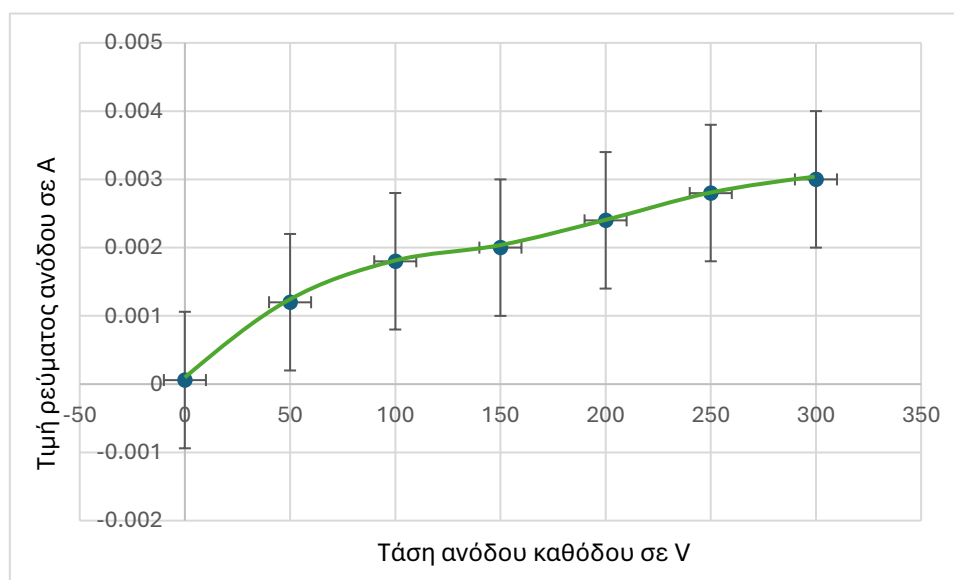
Χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου

Αρχικά λοιπόν θα χρειαστεί να σχεδιάσουμε την χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου, πειραματικά αυτό που πάμε και κάνουμε είναι έχοντας ενεργοποίηση όλη την πειραματική διάταξη βάζουμε μια σταθερή τάση στην κάθοδο ίση με $V_{\text{καθόδου}} = (\text{Τάση θέρμανσης μεταλλού}) = 4 \text{ V}$, μετράμε μέσω ενός αμπερομέτρου το ρεύμα της καθόδου όπου για τάση 4 V ισούται με $I_{\text{καθόδου}} = 125 \text{ mA} = 0.125 \text{ A}$ και έπειτα ξεκινώντας από την τιμή 0 έως την τιμή 300 V στην τάση ανόδου – καθόδου (V_{AK}) με βήμα τα 50 V καταγράφουμε της τιμές του ρεύματος ανόδου I_A . Θα πρέπει να προσέξουμε ότι αρχικά θα χρειαστεί να αφήσουμε λίγα λεπτά την κάθοδο να θερμανθεί έχοντας βάλει την τιμή της τάσης $V_{\text{καθόδου}}$, ενώ για κάθε μέτρηση $V_{\text{AK}} - I_A$ θα πρέπει πάλι να περιμένουμε λίγο χρόνο πριν την καταγραφή των πειραματικών δεδομένων. Τα πειραματικά δεδομένα αυτά παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα 1:

α/α	$V_{\text{καθόδου}} \text{ (V)}$	$I_{\text{καθόδου}} \text{ (A)}$	$V_{AK} \text{ (V)}$	$I_A \text{ (A)}$
1	4	0.125	0	0.00006
2	4	0.125	50	0.0012
3	4	0.125	100	0.0018
4	4	0.125	150	0.002
5	4	0.125	200	0.0024
6	4	0.125	250	0.0028
7	4	0.125	300	0.003

Πίνακας 1: Πειραματικά δεδομένα τάσης V_{AK} και I_A κρατώντας σταθερή την τάση $V_{\text{καθόδου}}$.

Θα μπορέσουμε να παρατηρήσουμε την χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου εάν σχεδιάσουμε το διάγραμμα ($I_A - V_{AK}$), στο διάγραμμα αυτό (Διάγραμμα 1) καταρχάς προστέθηκαν τα σφάλματα των τιμών της τάσης και του ρεύματος τα οποία αποδίδονται στα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν (αναλογικό βολτόμετρο και αμπερόμετρο) με τιμές: $\sigma_{V_{AK}} = \pm 10 \text{ V}$ και $\sigma_{I_A} = \pm 0.001 \text{ A}$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το ρεύμα της ανόδου παίρνει την μέγιστη της τιμή όταν η τάση γίνει ίση με 300 V (αυτό φυσικά ισχύει αν υποθέσουμε ότι επειδή η τιμή του ρεύματος για τις τιμές 250 και 300 V είναι πολύ κοντά η μια με την άλλη για μεγαλύτερες τιμές τάσης η διαφορά των τιμών όλο και θα μικραίνει άρα το ρεύμα έχει σταθεροποιηθεί, κάτι που θα παρατηρούσαμε εάν είχαμε παραπάνω πειραματικά δεδομένα) την μεγιστοποίηση αυτή την περιμέναμε σύμφωνα με την θεωρία καθώς τότε συλλέγονται όλα τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την κάθοδο, το ρεύμα αυτό ονομάζεται όπως ειπώθηκε και παραπάνω ρεύμα κόρου I_K . Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για τιμή τάσης $V_{AK} = 300 \text{ V}$ το ρεύμα της ανόδου γίνεται ίσο με το ρεύμα κόρου I_K .



Διάγραμμα 1: Χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου, διάγραμμα ($I_K - V_{AK}$).

Εξάρτηση του ρεύματος κόρου από την θερμοκρασία

Εφόσον είδαμε παραπάνω ότι για τιμή τάσης ανόδου – καθόδου V_{AK} ίση με 300 V το ρεύμα της ανόδου πλησιάζει το ρεύμα κόρου I_K , για να μπορέσουμε να βρούμε την εξάρτηση του ρεύματος κόρου από την θερμοκρασία θα πρέπει πειραματικά έχοντας σταθερή την τιμή της τάσης V_{AK} στά 300 V και αλλάζοντας την τιμή της τάσης της καθόδου $V_{καθόδου}$ (άρα και της θερμοκρασία του μετάλλου) να καταγράφουμε κάθε φορά τα ρεύματα κόρου, δηλαδή το ρεύμα της ανόδου. Συγκεκριμένα στην τάση $V_{καθόδου}$ θα δώσουμε τιμές από 2.5 V έως τα 5 V με βήμα 0,25 V και ταυτόχρονα θα πρέπει να μετράμε μέσω του αμπερομέτρου την τιμή του ρεύματος της καθόδου όπου μέσω του νόμου του Ohm να μπορέσουμε να βρούμε την αντίσταση της καθόδου η οποία θα μας βοηθήσει υπολογίστηκα παρακάτω. Τα πειραματικά δεδομένα που αντλήσαμε από την παραπάνω διαδικασία αποτυπώνονται χαρακτηριστικά στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2).

α/α	νκαθόδου (V)	ικαθόδου (A)	V_{AK} (V)	I_K (A)
1	2.5	0.1	300	0.00001
2	2.75	0.105	300	0.00002
3	3	0.11	300	0.0001
4	3.25	0.113	300	0.00038
5	3.5	0.118	300	0.00085
6	3.75	0.122	300	0.0014
7	4	0.126	300	0.0032
8	4.25	0.13	300	0.0058
9	4.5	0.133	300	0.0082
10	4.75	0.137	300	0.0125
11	5	0.141	300	0.02

Πίνακας 2: Πειραματικά δεδομένα τάσης $V_{καθόδου}$ και του ρεύματος κόρου I_K κρατώντας σταθερή την τάση V_{AK} .

Όπως ειπώθηκε παραπάνω στην συγκεκριμένη πειραματική εργασία θα ελέγξουμε την ισχύ της σχέσης 1.6 όπου αυτό θα γίνει κάνοντας το διάγραμμα του $y = \ln(I_K/T^2)$ συνάρτηση του $x = 1/T$. Σύμφωνα με την σχέση 2.9 ($T = 34.19 \cdot R(\theta) + 50.7$) άρα για να βρούμε της τιμές του T θα πρέπει πρώτα να βρούμε της τιμές της αντίστασης $R(\theta)$. Αυτό θα γίνει από τον νόμο του ohm όπου:

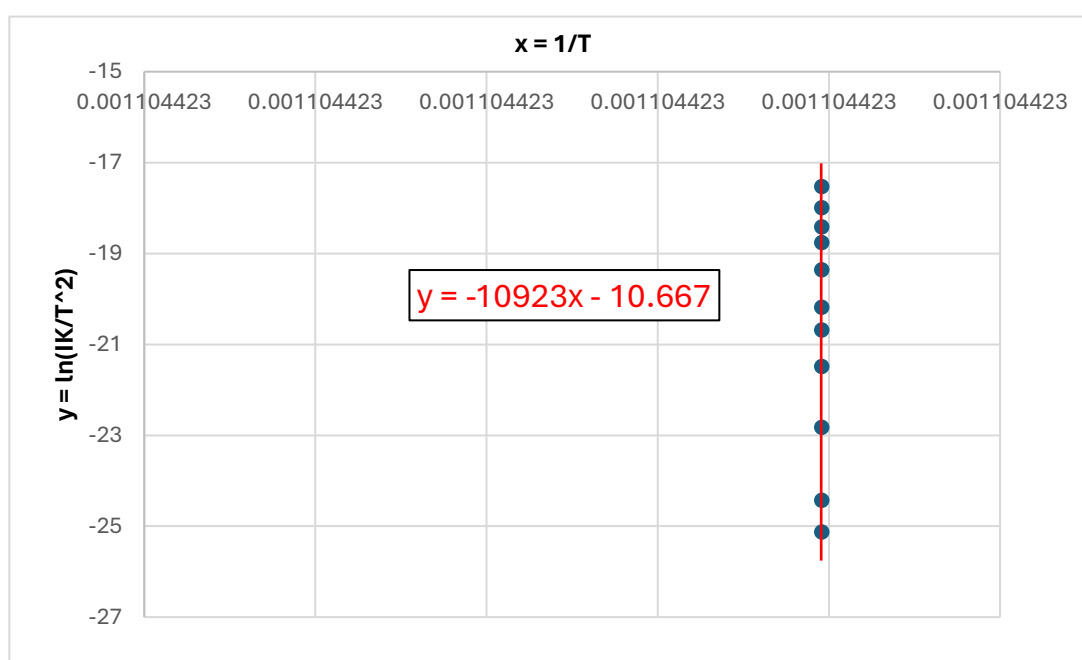
$$R(\theta) = \frac{V_{καθόδου}}{I_{καθόδου}} \quad (3)$$

Εάν κάνουμε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς δηλαδή για κάθε μέτρηση υπολογίσουμε το $R(\theta)$, το T, το $1/T$ και το $\ln(I_K/T^2)$ θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3) τον οποίον θα χρειαστούμε για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση ($1/T - \ln(I_K/T^2)$).

α/α	$R(\theta) = V_{\text{καθόδου}} / I_{\text{καθόδου}}$	T	$x = 1/T$	$y = \ln(I_K/T^2)$
1	25	905.45	0.001104423	-25.12978958
2	26.1905	946.1524	0.001104423	-24.4366424
3	27.2727	983.1545	0.001104423	-22.82720449
4	28.7611	1034.0407	0.001104423	-21.49220342
5	29.6610	1064.8102	0.001104423	-20.68713832
6	30.7377	1101.6221	0.001104423	-20.18814716
7	31.7460	1136.0968	0.001104423	-19.36146858
8	32.6923	1168.4500	0.001104423	-18.76676148
9	33.8346	1207.5045	0.001104423	-18.42048524
10	34.6715	1236.1197	0.001104423	-17.99889075
11	35.4610	1263.1113	0.001104423	-17.52888712

Πίνακας 3: Δεδομένα για την σχεδίαση της γραφικής παράστασης ($1/T - \ln(I_K/T^2)$).

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα και της σχέσεις 2.2 και 2.3 μπορούμε να σχεδιάσουμε την γραφική αναπαράσταση ($1/T - \ln(I_K/T^2)$) και μάλιστα να βρούμε την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων που ορίζουν τα δεδομένα αυτά, φυσικά όπως και προηγούμενος η διαδικασία αυτή έγινε μέσω του excel το οποίο εμφάνισε το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 2).



Διάγραμμα 2: Διάγραμμα ($1/T - \ln(I_K/T^2)$) σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 3.

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα η ευθεία ελάχιστων τετραγώνων που σχηματίζουν τα δεδομένα της γραφικής είναι η παρακάτω:

$$y = -10923 \cdot x - 10.667 \quad (4)$$

Σφάλματα

Σύμφωνα με το παράδειγμα που δόθηκε στην θεωρία (σχέση 2.5) μπορούμε να υπολογίσουμε τα σφάλματα όλων των τιμών του πίνακα 3, καταρχάς τα σφάλματα των τιμών της τάσης και του ρεύματος της καθόδου όπως και του ρεύματος κόρου τα οποία αποδίδονται στα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν (αναλογικό βολτόμετρο και αμπερόμετρο) είναι ίσα με: $\sigma_{V_{\text{καθόδου}}} = \pm 0.05 \text{ V}$, $\sigma_{I_{\text{καθόδου}}} = \pm 0.0025 \text{ A}$ και $\sigma_{I_k} = \pm 0.00001 \text{ A}$. Τα σφάλματα λοιπόν των τιμών R , T , x και y σύμφωνα με της σχέσεις 4, 2.9, $x = 1/T$ και $y = \ln(I_k/T^2)$ μπορούν να υπολογιστούν από της παρακάτω σχέσεις: Για το σφάλμα του σ_R θα ισχύει:

$$\bullet \quad \sigma_R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V_{\text{καθόδου}}}\right)^2 \cdot \sigma_{V_{\text{καθόδου}}}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I_{\text{καθόδου}}}\right)^2 \cdot \sigma_{I_{\text{καθόδου}}}^2} =$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{I_{\text{καθόδου}}}\right)^2 \cdot \sigma_{V_{\text{καθόδου}}}^2 + \left(\frac{V_{\text{καθόδου}}}{I_{\text{καθόδου}}^2}\right)^2 \cdot \sigma_{I_{\text{καθόδου}}}^2}$$

$$\bullet \quad \sigma_T = \pm \frac{\partial T}{\partial R} \cdot \sigma_R = \pm 34.19 \cdot \sigma_R$$

$$\bullet \quad \sigma_x = \pm \frac{\partial x}{\partial T} \cdot \sigma_T = \pm \frac{1}{T^2} \cdot \sigma_T$$

Και

$$\bullet \quad \sigma_y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial I_k}\right)^2 \cdot \sigma_{I_k}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)^2 \cdot \sigma_T^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{I_k}\right)^2 \cdot \sigma_{I_k}^2 + \left(-2 \frac{1}{T}\right)^2 \cdot \sigma_T^2}$$

Σύμφωνα με της παραπάνω σχέσεις, τα σφάλματα $\sigma_{V_{\text{καθόδου}}}$, $\sigma_{I_{\text{καθόδου}}}$ και σ_{I_k} και της τιμές του πίνακα 3, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 4):

α/α	σ_R	σ_T	σ_x	σ_y
1	0.80039053	27.3653522	3.3379E-05	1.0018252
2	0.78460999	26.8258156	2.9966E-05	0.5032052
3	0.768639473	26.2797836	2.7188E-05	0.1133931
4	0.775030878	26.4983057	2.4782E-05	0.0576132
5	0.757922796	25.9133804	2.2855E-05	0.050074
6	0.751467285	25.6926665	2.1171E-05	0.0471889
7	0.744460344	25.4530991	1.972E-05	0.0449168
8	0.737014553	25.1985276	1.8457E-05	0.043166
9	0.738790973	25.2592634	1.7324E-05	0.0418549
10	0.730409327	24.9726949	1.6343E-05	0.0404129
11	0.721847254	24.6799576	1.5469E-05	0.0390812

Πίνακας 4: Σφάλματα των τιμών του πίνακα 3.

Φυσικά το ίδιο μπορεί να γίνει και με της τιμές α και β της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων ($y = ax + \beta$) όπου έπειτα από εύκολες μαθηματικές πράξεις προκύπτουν η παρακάτω δυο σχέσεις:

$$\sigma_{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \sigma_y^2 + \left(\frac{-y + \beta}{x^2}\right)^2 \sigma_x^2}$$

Και

$$\sigma_{\beta} = \pm \sqrt{\sigma_y^2 + \alpha^2 \sigma_x^2}$$

Σύμφωνα με το excel οι τιμές αυτές είναι ίσες με:

α/α	σ_{α}	σ_{β}
1	907.1027194	1.066107522
2	455.6272934	0.600294862
3	102.6721792	0.317887142
4	52.16646272	0.276760902
5	45.33993848	0.25461671
6	42.72756427	0.2360177
7	40.67022634	0.220036378
8	39.08488253	0.206172362
9	37.897717	0.193801491
10	36.59201863	0.183036896
11	35.38623763	0.173428213

Πίνακας 5: Σφάλματα των τιμών α και β της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων.

Εάν πάρουμε τον μέσο όρο των τιμών αυτών προκύπτουν τα παρακάτω σφάλματα:

$$\sigma_{\alpha} = \pm 163.206 \text{ και } \sigma_{\beta} = \pm 0.3389$$

Οπότε τελικά η ευθεία θα ισούται με:

$$y = (-10923 \pm 163.206) \cdot x + (-10.667 \pm 0.3389) \quad (4)$$

Σύμφωνα με την σχέση (1.9) να βρούμε το έργο εξόδου ϕ το οποίο θα ισούται με:

$$\phi = -\alpha \cdot k = -(-10923) \cdot 8.62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} = 0.94156 \text{ eV} \Rightarrow \phi = 0.94156 \text{ eV}$$

$$\text{ενώ το σφάλμα του έργου θα ισούται με: } \sigma_{\phi} = \pm \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \cdot \sigma_{\alpha} = \pm k \cdot \sigma_{\alpha} = \pm 8.62 \cdot 10^{-5} \cdot 163.206 = \pm 0.01407 \Rightarrow \sigma_{\phi} = \pm 0.01407$$

Άρα τελικά το έργο εξόδου ϕ του μετάλλου της καθόδου ισούται με :

$$\phi = 0.94156 \pm 0.01407 \text{ eV}$$

Σύμφωνα με την βιβλιογραφία στα διαφορά μέταλλα το έργο εξόδου ϕ όπως ειπώθηκε και παραπάνω παίρνει τιμές από 2 έως 5.5 eV, η τιμή που υπολογίσαμε είναι κάτω από τα 2 eV και για αυτό μπορεί να ευθύνονται πολλά πράγματα όπως τυχαία σφάλματα, σφάλματα δικά μας αλλά και του συστήματος τα οποία μπορεί εν άγνοια μας να επηρέασαν τα πειραματικά δεδομένα. Παρόλα αυτά η τιμή αυτή δεν έχει τεράστια απόκλιση από αυτή της βιβλιογραφίας γι' αυτό και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πέτυχαμε τον στόχο της συγκεκριμένης πειραματικής εργασίας.

Συμπέρασμα

Η μελέτη της θερμιονικής εκπομπής ενός μετάλλου αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο έρευνας που απευθύνεται σε επιστήμονες και μηχανικούς οι οποίοι ενδιαφέρονται για τις ηλεκτρονικές ιδιότητες των υλικών. Μέσα από την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων, καταφέραμε να προσδιορίσουμε με σχετικά μεγάλη ακρίβεια την τιμή της τάσης ανόδου - καθόδου για την οποία η άνοδος αποκτά το ρεύμα κόρου και υπολογίσαμε επιπλέον με σχετικά μεγάλη ακρίβεια και το έργο εξόδου ϕ του μετάλλου που χρησιμοποιήθηκε στην πειραματική διάταξη. Τα αποτελέσματα αυτά αναδεικνύουν τη σπουδαιότητα της έρευνας μας στην κατανόηση των θερμικών ιδιοτήτων των υλικών και της συμπεριφοράς τους υπό διάφορες συνθήκες. Η ικανότητά μας να αναλύουμε και να ερμηνεύουμε τα πειραματικά δεδομένα μας επιτρέπει να προχωρήσουμε σε μια πιο βαθιά κατανόηση των μηχανισμών που διέπουν τη θερμική συμπεριφορά των υλικών.