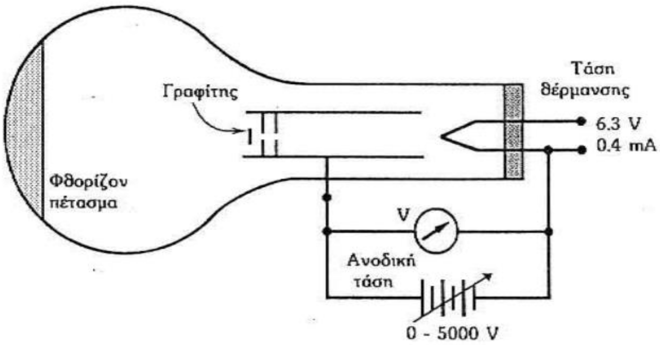
Περίθλαση Ηλεκτρονίων

Κλάιντι Τσάμη

Εισαγωγή:

Η εργαστηριακή άσκηση που ακολουθεί αποτελεί μια σημαντική προσπάθεια να διερευνήσουμε την κυματική φύση του ηλεκτρονίου, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο κυματικό φαινόμενο της περίθλασης και τη χρήση του ως εργαλείο για την απόδειξη της φύσης αυτής. Θα προσπαθήσουμε δηλαδή να κατανοήσουμε πώς το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται ως μια κυματική οντότητα και πώς αυτή η κυματική φύση επηρεάζει την αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον. Μέσα από αυτήν την προσέγγιση, έχουμε την ευκαιρία να διεισδύσουμε στα βαθύτερα επίπεδα της φυσικής πραγματικότητας και να ανακαλύψουμε τα μυστικά που κρύβονται πίσω από τη μικροσκοπική και εκπληκτικά σύνθετη κατασκευή του κόσμου μας.

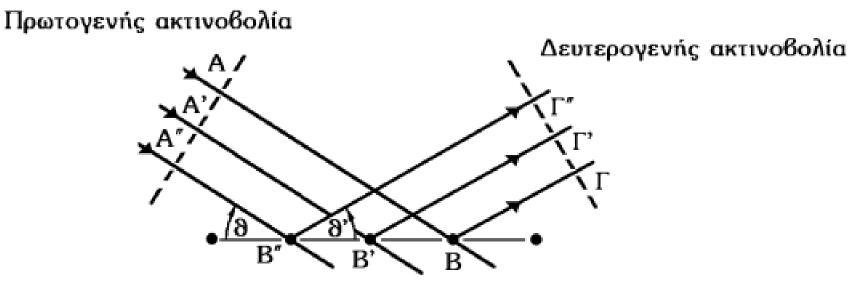
Για να επιτύχουμε τον στόχο μας, χρησιμοποιούμε μια πειραματική διάταξη που αποτελείται από τρεις βασικούς πυλώνες (Εικόνα 1): Έναν σωλήνα περίθλασης, ένα χαμηλής τάσης τροφοδοτικό για την θέρμανση ενός νήματος το οποίο θα εκτοξεύει ηλεκτρόνια προς τον σωλήνα, και ένα υψηλής τάσης τροφοδοτικό για την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων. Η περίθλαση πραγματοποιείται σε λεπτή σκόνη γραφίτη. Ακριβώς απέναντι από την άνοδο, τοποθετείται ένα φθορίζον πέτασμα, όπου παρατηρούμε τη σκέδαση των ηλεκτρονίων. Τα αποτελέσματα εμφανίζουν δύο ομόκεντρους κύκλους, καθώς η δευτερογενής ακτινοβολία είναι κωνικής μορφής. Μέσω της ανάλυσης των αποτελεσμάτων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η διάμετρος των δακτυλίων στο φθορίζον πέτασμα είναι ανάλογη του αντίστροφου της τετραγωνικής ρίζας της τάσης επιτάχυνσης, αποδεικνύοντας με αυτόν τον τρόπο την κυματική φύση του ηλεκτρονίου.



Εικόνα 1: *Πειραματική διάταξη*

Θεωρία:

Για την μαθηματική ανάλυση του πειράματος θα χρειαστεί καταρχάς να μελετήσουμε την περίθλαση των ηλεκτρονίων στην λεπτή σκόνη του γραφίτη στον σωλήνα περίθλασης, διότι πρακτικά όλο το πείραμα βασίζεται κυρίως εκεί. Σύμφωνα με την κυματική για να πραγματοποιηθεί περίθλαση των ηλεκτρονίων θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φράγμα περίθλασης με σταθερά φράγματος ιδίας τάξης μεγέθους με το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου. Εφόσον το μήκος κύματος των κινουμενων ηλεκτρονίων είναι της τάξης μεγέθους του Å (Angstrom) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φράγμα περίθλασης με σταθερά της ιδίας τάξης μεγέθους, τέτοια τάξη μεγέθους έχουν οι κρύσταλλοι. Επειδή πριν την ανάμειξη της κυματικής φάσης των σωματιδίων η μελέτη των κρυστάλλων γινόταν μόνο με τις ακτίνες Χ, οι ίδιοι νόμοι θα ισχύουν και για την περίθλαση των ηλεκτρονίων. Ένας από τους βασικότερους νομούς είναι αυτός του Bragg.



Εικόνα 2: *Πρόσπτωση ακτινών Χ σε δικτυωτό επίπεδο*

Συγκεκριμένα σύμφωνα με τον νόμο αυτόν αν μια δέσμη ακτινών Χ μήκους κύματος **λ** προσπέσει σε έναν κρύσταλλο θα υπάρξει ανοικοδομητική συμβολή μόνο σε μια καθορισμένη γωνιά πρόσπτωσης για την οποία ισχύει η σχέση:

$$2 \cdot \mathrm{d} \cdot \sin(\theta) = \mathrm{n} \cdot \lambda \ \ (\mathbf{1})$$

Όπου:

d: Η απόσταση των δικτυωτών επίπεδων.

n: Ακέραιος αριθμός, ο οποίος δείχνει την τάξη ανακλάσεως.

θ: Η τυχαία γωνία πρόσπτωσης.

Φυσικά στην πειραματική διάταξη της εικόνας 1 όπως ειπώθηκε και παραπάνω δεν χρησιμοποιούμε κρύσταλλο αλλά λεπτή σκόνη γραφίτη, η οποία μικροσκοπικά αποτελείται από πολλούς μονοκρύσταλλους τυχαία προσανατολισμένους. Πρακτικά το μόνο που θα αλλάξει είναι το αποτέλεσμα που θα παρατηρήσουμε, καθώς ο κάθε μονοκρύσταλλος ξεχωριστά συμπεριφέρεται όπως ένας κρύσταλλος αλλά κάθε ένας από αυτούς που ικανοποιεί την εξίσωση του Bragg (Σχέση 1) βρίσκονται γύρω από την δέσμη ακτίνων Χ, σαν αποτέλεσμα έχουμε μια κωνική επιφάνεια και επειδή το φθορίζον πέτασμα είναι κάθετο στην διεύθυνση της προσπίπτουσας στο πέτασμα ακτινοβολίας θα παρατηρήσουμε τελικά έναν δακτύλιο.

Προχωρώντας παρακάτω στην μαθηματική ανάλυση σύμφωνα με τον επιστήμονα Louis de Broglie το μήκος κύματος των κινουμένων ηλεκτρονίων δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{p}} \ \ (\mathbf{1.1})$$

Φυσικά η σχέση αυτή ισχύει για μικρές ταχύτητες καθώς σύμφωνα με την θεωρία της σχετικότητας αν η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μεγάλη (συγκεκριμένα αν η ενέργεια τους είναι μεγαλύτερη από τα 10 keV) τότε θα πρέπει στην σχέση να αντικαταστήσουμε την ορμή με την σχετική ορμή του ηλεκτρονίου. Κάτι όμως που στην περίπτωση μας δεν ισχύει.

Επίσης για την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου το οποίο επιταχύνεται από ένα τροφοδοτικό τάσης V θα ισχύει το παρακάτω:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\upsilon^2 = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}} = \mathrm{eV} \implies \mathrm{p} = \sqrt{2\mathrm{meV}} \ \ (\mathbf{1.2})$$

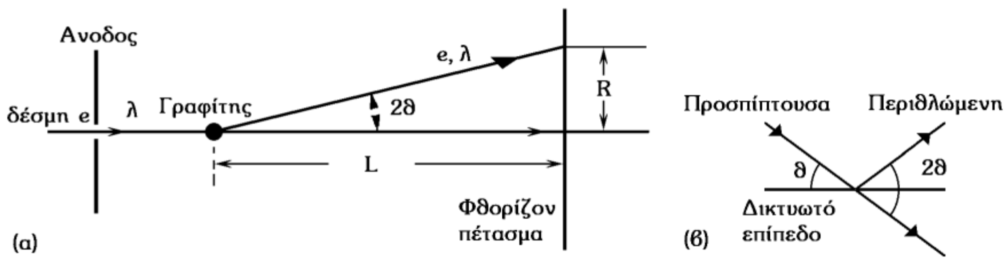
Οπού:

e: Το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Σύμφωνα με την σχέση (1.2) η σχέση (1.1) καταλήγει στην εξής παρακάτω μορφή:

$$(1.1) \overset{(1.2)}{\implies} \lambda = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2\mathrm{meV}}} \implies \lambda = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2\mathrm{meV}}} \ \ (\mathbf{1.3})$$

Ακόμη θα χρειαστεί να μελετήσουμε θεωρητικά και τον σωλήνα περίθλασης, συγκεκριμένα στην εικόνα 3 παρατηρούμε μια σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στον σωλήνα.



Εικόνα 3*: (α) Σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στον σωλήνα περίθλασης. (β) Περιοχή του γραφίτη.*

Σύμφωνα με το σχήμα α) της εικόνας 3 για την εφαπτομένη της γωνίας 2θ θα ισχύει ότι:

$$\tan(2\theta) = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} \ \ (\mathbf{1.4})$$

Επίσης αν θεωρήσουμε ότι η γωνιά 2θ είναι πολύ μικρή μπορούμε προσεγγιστικά να θεωρήσουμε ότι:

$$\tan(2\theta) \cong \sin(2\theta) \cong 2\sin(\theta) \ \ (\mathbf{1.5})$$

Επιπλέον ο νομός του Bragg (Σχέση 1) για $n = 1$ γίνεται:

$$\lambda = 2\mathrm{d}\sin(\theta) \ (\mathbf{1.6})$$

Σύμφωνα όμως με της 2 παραπάνω σχέσεις (1.3 και 1.5) θα ισχύει:

$$(1.6) \overset{(1.5)}{\implies} \lambda = \mathrm{d}\tan(2\theta) \overset{(1.4)}{\implies} \lambda = \mathrm{d}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} \Rightarrow \mathrm{R} = \lambda\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{d}} \ (\mathbf{1.7})$$

Φυσικά η σχέση αυτή αναφέρεται στην ακτίνα του δακτυλίου που εμφανίζεται στο φθορίζον πέτασμα, πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή με 2 θα έχουμε μια σχέση για την διάμετρο του δακτυλίου:

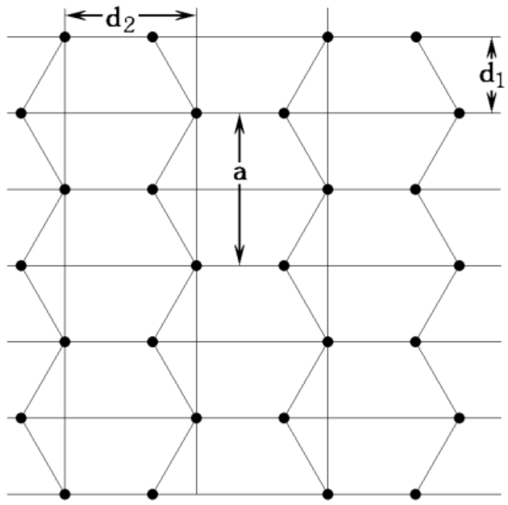
$$(1.7) \overset{\cdot 2}{\implies} \mathrm{D} = 2\mathrm{R} = \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{d}}\lambda \ \ (\mathbf{1.8})$$

Τέλος αν αντικαταστήσουμε το μήκος κύματος λ με την σχέση (1.3) καταλήγουμε τελικά στην παρακάτω σχέση για την διάμετρο:

$$(1.8) \overset{(1.3)}{\Longrightarrow} \mathbf{D} = \frac{\mathbf{2Lh}}{\mathbf{d}\sqrt{\boldsymbol{2em}}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{V}}} \quad (\mathbf{1.9})$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή (1.9) η διάμετρος του δακτυλίου στο φθορίζον πέτασμα είναι ανάλογη του αντιστρόφου της τετραγωνικής ρίζας της τάσης επιτάχυνσης. Δηλαδή για να αποδείξουμε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση θα πρέπει να δείξουμε την αναλογία αυτή μέσω των πειραματικών τιμών. **Αρά αυτό που θα πρέπει να κάνουμε πειραματικα είναι να πάρουμε διάφορες τιμές διαμέτρου και τάσης και να ελέγξουμε εάν οι τιμές αυτές ακολουθούν την παραπάνω αναλογία.**

Επιπλέον για την κυψελίδα του γραφίτη (Εικόνα 4) ισχύουν τα παρακάτω:



***Εικόνα 4**: Επίπεδο με άτομα γραφίτη.*

Καταρχάς η κυψελίδα του γραφίτη είναι σε σχήμα εξαγωνικού πρίσματος και τα άτομα βρίσκονται κατανεμημένα στην κορυφές του πρίσματος, η σταθερά του πλέγματος είναι ίση με: $\mathrm{a} = 2{,}4562 \pm 0.0001\ \text{Å}$ ενώ το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με: $\mathrm{c} = 6{,}6943 \pm 0.0007\ \text{Å}$. Από το σχήμα της εικόνας 4 προκύπτει πολύ ευκολά ότι αναμένουμε δυο ομάδες δικτυωτών επίπεδων με αποστάσεις d_1 και d_2 για αυτών τον λόγο θα παρατηρήσουμε 2 δακτυλίους στο φθορίζον πέτασμα ένα μικρότερο και ένα μεγαλύτερος. Φυσικά η αποστάσεις d_1 και d_2 υπάρχουν μέσα στην σχέση 1.9 και μάλιστα μπορούν να υπολογιστούν και να βρεθεί ποιος δακτύλιος προέκυψε από ποιο επίπεδο κάτι που θα γίνει παρακάτω.

Για την απόδειξη θα χρειαστεί να κάνουμε κάποιους μετασχηματισμούς στην σχέση 1.9 συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε ως:

$y = D = 2R$ και $x = \frac{1}{\sqrt{V}}$

Οπότε η σχέση γίνεται:

$$\mathrm{y} = \frac{2\mathrm{Lh}}{\mathrm{d}} \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{em}}} \mathrm{x} = \beta \mathrm{x} \ \ (\mathbf{2})$$

Επιπλέον επειδή ισχύει ότι

$\beta = \frac{y}{x} = \frac{\sigma\varepsilon\, m}{\sigma\varepsilon \frac{1}{\sqrt{V}}} = m \cdot V^{\frac{1}{2}}$, άρα καταλαβαίνουμε ότι το β έχει μονάδες το $m \cdot V^{\frac{1}{2}}$.

Τα σφάλματα των x και y σύμφωνα με την θεωρία θα είναι τα παρακάτω:

$$\sigma_x^2 = (\frac{\delta x}{\delta V})^2 \sigma_V^2 \Longrightarrow \sigma_x = \frac{\sqrt{V}}{2V^2}\sigma_V \quad \mathbf{(2.1)}$$

Και

$$\sigma_y^2 = (\frac{\delta y}{\delta V})^2 \sigma_D^2 \Longrightarrow \sigma_y = \sigma_V \quad \mathbf{(2.2)}$$

θα χρειαστεί λοιπόν να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ($\frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}}} - \mathrm{D}$) με τα πειραματικα μας δεδομένα, αν προκύψει ευθεία γραμμή τότε αποδεικνύεται η σχέση 1.9 και άρα συμπεραίνουμε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση.

Τέλος σύμφωνα με την θεωρία ελαχίστων τετραγώνων σχεδιάζοντας μια οποιαδήποτε γραφική παράσταση ($y_i \ - x_i$) χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα ενός πειράματος μας, μπορούμε σύμφωνα με την θεωρία να βρούμε την ευθεία ελάχιστων τετράγωνων:

$y = \alpha \cdot \mathrm{x} + \mathrm{c} \quad \mathbf{(2.3)}$ της γραφικής παράστασης ως εξής :

Καταρχάς θεωρούμε ως δ_i της αποκλίσεις τον σημείων από την ευθεία αυτή, σύμφωνα με την θεωρία η ζητούμενη ευθεία είναι εκείνη για την οποία το άθροισα S των τετραγώνων των αποκλίσεων

$$S = \sum \delta_i^2 = \sum [y_i - (a \ \cdot x_i + c)]^2 \quad \mathbf{(2.4)}$$

γίνεται ελάχιστο. Βρίσκοντας τα ελάχιστο της συνάρτησης αυτής και λύνοντας ως προς α και β προκύπτει ότι :

$$\alpha = \frac{\mathrm{n}\cdot\Sigma(\mathrm{x_i}\cdot\mathrm{y_i}) - (\Sigma\mathrm{x_i})\cdot(\Sigma\mathrm{y_i})}{\mathrm{n}\cdot\left(\Sigma\mathrm{x_i^2}\right) - (\Sigma\mathrm{x_i})^2} \quad \mathbf{(2.5)}$$

και

$$\mathrm{c} = \frac{\Sigma\mathrm{x_i^2}\cdot\Sigma(\mathrm{y_i}) - (\Sigma\mathrm{x_i})\cdot(\Sigma(\mathrm{x_i}\cdot\mathrm{y_i}))}{\mathrm{n}\cdot\left(\Sigma\mathrm{x_i^2}\right) - (\Sigma\mathrm{x_i})^2} \quad \mathbf{(2.6)}$$

Επειδή όμως υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ευθείας λόγο αβεβαιότητας στα πειραματικά μας δεδομένα αυτό σημαίνει και την ύπαρξη τυπικής απόκλισης στην τιμή των συντελεστών α και β, η οποία δίνετε από τους παρακάτω τύπους :

$$\sigma_\alpha = \mathrm{s_y} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n} \cdot (\Sigma\mathrm{x_i^2}) - (\Sigma\mathrm{x_i})^2}} \quad \mathbf{(2.7)} \quad \text{και} \quad \sigma_\mathrm{c} = \mathrm{s_y} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma\mathrm{x_i^2}}{\mathrm{n} \cdot (\Sigma\mathrm{x_i^2}) - (\Sigma\mathrm{x_i})^2}} \quad \mathbf{(2.8)}$$

Όπου:

$$\mathrm{s_y} = \sqrt{\frac{\Sigma\delta_\mathrm{i}^2}{\mathrm{n}-2}} = \sqrt{\frac{\sum[\mathrm{y_i} - \mathrm{a} \ \cdot \mathrm{x_i} - \beta]^2}{\mathrm{n}-2}} \quad \mathbf{(2.9)}$$

Πειραματικό μέρος:

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη όπως ειπώθηκε και παραπάνω αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στην εικόνα 1. Συγκεκριμένα η πειραματική διάταξη αυτή αποτελεί από έναν αερόκενο σωλήνα, τον σωλήνα περίθλασης, ένα τροφοδοτικό χαμηλής τάσης για την θέρμανση του νήματος και ένα τροφοδοτικό υψηλής τάσης για την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων. Πρακτικά μέσω του τροφοδοτικού υψηλής τάσης επιταχύνουμε τα ηλεκτρόνια τα οποία εκτοξεύονται από το θερμαινόμενο νήμα προς τον σωλήνα περίθλασης ο οποίος περιέχει την λεπτή σκόνη του γραφίτη και τελικά παρατηρούμε το αποτέλεσμα στο φθορίζον πέτασμα.

Τα όργανα της πειραματικής διάταξης είναι τα παρακάτω:

- Σωλήνας περίθλασης
- Τροφοδοτικό χαμηλής τάσης (6,3 Volts ac)
- Τροφοδοτικό υψηλής τάσης 0 – 5 kV
- Καλώδια σύνδεσης

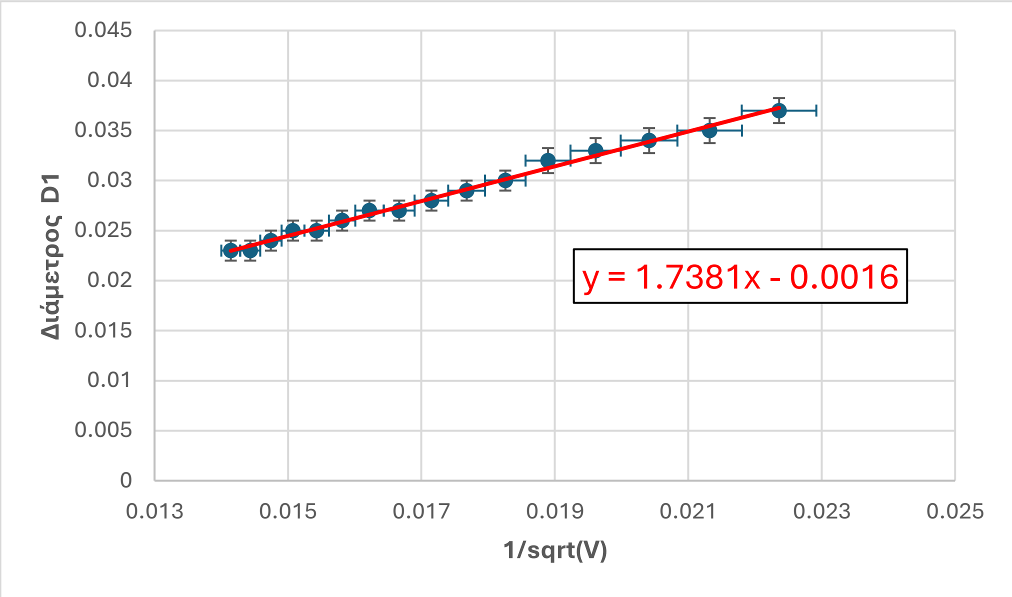
Αρχικά ρυθμίζουμε την τάση του υψηλού τροφοδοτικού στα 5 kV, παρατηρούμε στο φθορίζον πέτασμα τους 2 δακτυλίους και καταγράφουμε την διάμετρο τους και το πάχος το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως σφάλμα της διαμέτρου ($\sigma_{\mathrm{D}} = \pm \frac{\text{Πάχος}}{2}$). Έπειτα κατεβάζουμε την τάση με βήμα 0.2 kV και συνεχίζουμε της μετρήσεις. Παρακάτω πρώτα θα γίνει η απόδειξη της κυματικής φύσης του ηλεκτρονίου χρησιμοποιώντας τον μικρό δακτύλιο και έπειτα με τον μεγάλο, τα πειραματικα δεδομένα του μικρού δακτυλίου αποτυπώνονται στον πίνακα 1:

Μικρός δακτύλιος:

α/α	Τάση V (V)	y = Διάμετρος D1 (m)	Πλάτος (m)	Σφάλμα του D1 ($\pm$ Πλάτος/2)	x = 1/sqrt(V)	σ_x
1	5000	0.023	0.002	0.001	0.01414	0.00014
2	4800	0.023	0.002	0.001	0.01443	0.00015
3	4600	0.024	0.002	0.001	0.01474	0.00016
4	4400	0.025	0.002	0.001	0.01508	0.00017
5	4200	0.025	0.002	0.001	0.01543	0.00018
6	4000	0.026	0.002	0.001	0.01581	0.0002
7	3800	0.027	0.002	0.001	0.01622	0.00021
8	3600	0.027	0.002	0.001	0.01667	0.00023
9	3400	0.028	0.002	0.001	0.01715	0.00025
10	3200	0.029	0.002	0.001	0.01768	0.00028
11	3000	0.03	0.002	0.001	0.01826	0.0003
12	2800	0.032	0.0025	0.00125	0.0189	0.00034
13	2600	0.033	0.0025	0.00125	0.01961	0.00038
14	2400	0.034	0.0025	0.00125	0.02041	0.00043
15	2200	0.035	0.0025	0.00125	0.02132	0.00048
16	2000	0.037	0.0025	0.00125	0.02236	0.00056

Πίνακας 1: *Πειραματικά δεδομένα μικρού δακτυλίου.*

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω πειραματικα δεδομένα πάμε και σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση ($\frac{1}{\sqrt{V}} - D_1$) και έπειτα χρησιμοποιώντας της σχέσεις 2.5 και 2.6 βρίσκουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της γραφικής, η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε στην παρούσα εργασία χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Excel. Το διάγραμμα λοιπόν για τον μικρό δακτύλιο αποτυπώνεται στο παρακάτω σχήμα (Γραφική αναπαράσταση 1).



Γραφική αναπαράσταση 1: *Διάγραμμα (D1 - 1/sqrt(V)) Μικρού δακτυλίου.*

Όπως παρατηρούμε η ευθεία ελάχιστων τετράγωνων της γραφικής είναι η παρακάτω:

$$y = 1.7381x - 0.0016$$

Σφάλματα:

Καταρχάς γνωρίζουμε ότι το σφάλμα στης τιμές της διαμέτρου D1 βρίσκετε στον πίνακα 1 ($5^η$ στήλη) και υπάρχει καθώς η μέτρηση της διαμέτρου έγινε με χάρακα και υπήρχε μια μικρή αβεβαιότητα από που ξεκινάει και που τελειώνει η διάμετρος λόγο του πλάτους του δακτυλίου. Επιπλέον το σφάλμα του x βρέθηκε μέσω της σχέσης 2.1 οπού $\sigma_V = 0.1\ kV = 100V$ είναι το σφάλμα που εισάγει το ψηφιακό βολτόμετρο. Ακόμη από της σχέσεις 2.7, 2.8 και 2.9 μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα της τιμής του β (α στην ευθεία ελάχιστων τετράγωνων) αλλά και του c, για να το βρούμε απλά θα χρειαστούμε τον παρακάτω πίνακα (πίνακας 1.1).

n	Σxi^2	(Σxi)^2	α	c	Σ(yi-axi-b)^2
16	0.004935	0.0774	1.7381	- 0.0016	0.000165567

Πίνακας 1.1: *Τιμές για τον υπολογισμό των σφαλμάτων, ο πίνακας αυτός προέκυψε από τον πίνακα 1.*

Χρησιμοποιώντας της τιμές του πίνακα 1.1 και της σχέσεις 2.7, 2.8 και 2.9 εύκολα υπολογίζεται ότι το σ_α που πρακτικά είναι το σφάλμα του β θα ισούται με :

$\boldsymbol{\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \pm\, 0,349}$ ενώ το $\boldsymbol{\sigma_c = \pm\, 0.0061}$

Άρα τελικά: $\mathbf{y} = (\mathbf{1.7381 \pm\ 0,349}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{-0.0016 \pm\ 0.0061}\,)$

Τέλος σύμφωνα με την σχέση 2 θεωρήσαμε ότι:

$$\beta = \frac{2\mathrm{Lh}}{\mathrm{d}}\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{em}}} \Rightarrow \mathrm{d} = \frac{2\mathrm{Lh}}{\beta}\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{em}}}$$

Έχοντας ως δεδομένα την απόσταση L του γραφίτη με το φθορίζον πέτασμα ($\mathrm{L} = 13.5\ \mathrm{cm} = 0.135\ \mathrm{m}$), την σταθερά του Plank ($\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34}\mathrm{J}$), το φορτίο του ηλεκτρονίου ($\mathrm{e} = 1.6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$) και την μάζα του ηλεκτρονίου ($\mathrm{m} = 9.11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$) μπορούμε εύκολα από την σχέση αυτή να βρούμε την απόσταση του δικτυωτού επίπεδου που ευθύνεται για τον μικρό δακτύλιο, συγκεκριμένα:

$$\mathrm{d}_3 = \frac{2 \cdot 0.135 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34}}{1.7381 \cdot \sqrt{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}} = 1.905 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 1.905\ \mathrm{Å}$$

Το σφάλμα στην τιμή του d θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma_d^2 = \left(\frac{\delta d}{\delta \beta}\right)^2 \cdot \sigma_\beta^2 \Longrightarrow \sigma_d = \frac{2\mathrm{Lh}}{\beta}\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{em}}}\sigma_\beta = 1.905 \cdot 0{,}349 = 0.665$$

Άρα τελικά:

$\boldsymbol{d_3 = 1.905\ \pm 0.665}\ \mathrm{Å}$

Αρά σε αυτό το σημείο την εργαστηριακής άσκησης έχουμε αποδείξει την κυματική φύση του ηλεκτρονίου, καθώς όπως είδαμε παραπάνω η τιμές της διαμέτρου και του αντίστροφου της τετραγωνικής ρίζας ακολουθούν την αναλογία της σχέσης 1.9. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε παρακάτω είναι να μελετήσουμε και τα πειραματικα δεδομένα του μεγαλύτερου δακτυλίου και να διαπιστώσουμε τελικά από πιο επίπεδο εμφανίστηκε ο κάθε δακτύλιος ελέγχοντας τα δυο d. Οπότε ακολουθούμε ακριβώς την ιδιά διαδικασία και για τον μεγαλύτερο δακτύλιο.

Μεγαλύτερος δακτύλιος:

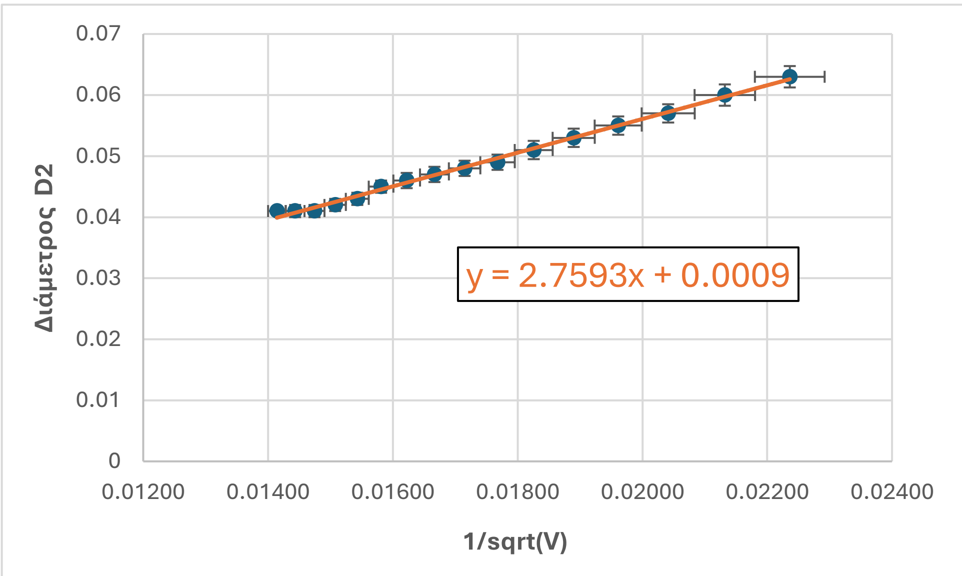
Τα πειραματικα δεδομένα του μεγαλύτερου δακτυλίου αποτυπώνονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1.3):

α/α	Τάση V (V)	y = Διάμετρος D2 (m)	Πλάτος (m)	Σφάλμα του D1 (± Πλάτος ⁄ 2)	x = 1/sqrt(V)	σ_x
1	5000	0.041	0.001	0.0005	0.01414	0.00014
2	4800	0.041	0.002	0.001	0.01443	0.00015
3	4600	0.041	0.002	0.001	0.01474	0.00016
4	4400	0.042	0.002	0.001	0.01508	0.00017
5	4200	0.043	0.002	0.001	0.01543	0.00018
6	4000	0.045	0.002	0.001	0.01581	0.00020
7	3800	0.046	0.0025	0.00125	0.01622	0.00021
8	3600	0.047	0.0025	0.00125	0.01667	0.00023
9	3400	0.048	0.0025	0.00125	0.01715	0.00025
10	3200	0.049	0.0025	0.00125	0.01768	0.00028
11	3000	0.051	0.003	0.0015	0.01826	0.00030
12	2800	0.053	0.003	0.0015	0.01890	0.00034
13	2600	0.055	0.003	0.0015	0.01961	0.00038
14	2400	0.057	0.003	0.0015	0.02041	0.00043
15	2200	0.06	0.035	0.0175	0.02132	0.00048
16	2000	0.063	0.035	0.0175	0.02236	0.00056

Πίνακας 1.3: *Πειραματικά δεδομένα* μεγαλύτερου *δακτυλίου.*

Με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 1.3 σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση (D2 - 1/sqrt(V)), (Γραφική αναπαράσταση 2) και με της ίδιες σχέσεις βρίσκουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, η οποία σύμφωνα με το excel είναι η παρακάτω:

$$\mathbf{y = 2.7593x + 0.0009}$$



Γραφική αναπαράσταση 2: *Διάγραμμα (D1 - 1/sqrt(V)) Μικρού δακτυλίου.*

Επιπλέον όπως και προηγουμένως θα χρειαστούμε τον παρακάτω πίνακα για τον υπολογισμό των σφαλμάτων (Πίνακας 1.3):

n	Σxi^2	(Σxi)^2	α	b	Σ(yi-axi-b)^2
16	0.004935	0.077403	2.7593	0.0009	3.27342E-06

Πίνακας 1.4: *Τιμές για τον υπολογισμό των σφαλμάτων,*
ο πίνακας αυτός προέκυψε από τον πίνακα 1.3

Σύμφωνα με τον πίνακα αυτόν και της σχέσεις 2.7, 2.8 και 2.9 προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$\boldsymbol{\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \pm\, 0{,}049}$ ενώ το $\boldsymbol{\sigma_c = \pm\, 0.000861}$

Τελικά η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{2.7593 \pm\ 0{,}049}\ ) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{0.0009 \pm\ 0.000861})$$

Επιπλέον σύμφωνα με την σχέση 2:

$$\mathrm{d}_4 = \frac{2 \cdot 0.135 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34}}{2{,}7593 \cdot \sqrt{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}} = 1.2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 1.2\ \text{Å}$$

Το σφάλμα στην τιμή του d θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma_\mathrm{d} = \frac{2\mathrm{Lh}}{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{em}}} \sigma_\beta = 1.2 \cdot 0.049 = 0.0588$$

Άρα τελικά:

$$\mathbf{d_4 = 1.2\ \pm 0.0588}\ \text{Å}$$

Σύμφωνα με την βιβλιογραφία τα d1 και d2 είναι ίσα με:

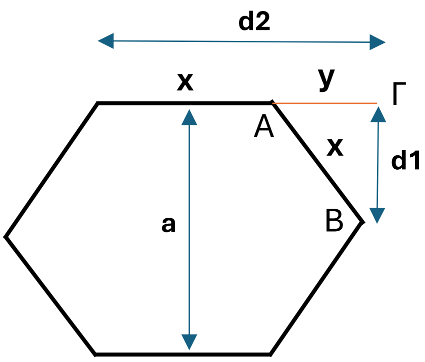
$\mathrm{d}_1 = 1.2281 \pm 0.0001\ \text{Å}$ και $\mathrm{d}_2 = 2.1271 \pm 0.0001\ \text{Å}$

οπότε καταλαβαίνουμε από της δυο τιμές του d που υπολογίσαμε ότι ο μεγαλύτερος δακτύλιος προέκυψε (σύμφωνα με την εικόνα 4) από το δικτυωτό επίπεδο με απόσταση d1 ενώ ο μικρότερος από αυτό με απόσταση d2.

Πέρα από της αποστάσεις d των δικτυωτών επιπέδων, παρατηρώντας την εικόνα 4 μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και την σταθερά a της κυψελίδας, η οποία θα ισούται με:
$\mathrm{a} = 2 \cdot \mathrm{d}_1 = 2 \cdot (1.2\ \pm 0.0588) = 2.4 \pm 0.1176\ \text{Å}$

Σύμφωνα με την βιβλιογραφία το a ισούται με $\mathrm{a} = 2.4562 \pm 0.0001\ \text{Å}$, η τιμή αυτή φυσικά είναι πολύ κοντά σε αυτήν που υπολογίσαμε.

Ακόμη μπορούμε να υπολογίσουμε και την πλευρά του κανονικού εξάγωνου της κυψελίδας, για να το κάνουμε αυτό ενεργούμε ως εξής:



Σχήμα 1*: Η βάση του εξαγωνικού πρίσματος της κυψελίδας του γραφίτη.*

Σύμφωνα με το σχήμα 1 θα ισχύει ότι:
$y = d2 - x$

Ένα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ θα ισχύει ότι:

$$x^2 = d1^2 + y^2 = d1^2 + (d2 - x)^2 = d1^2 + d2^2 - 2d2x + x^2 \Longrightarrow 2d2x = d1^2 + d2^2$$

$$x = \frac{d1^2 + d2^2}{2d2} = \frac{1.2^2 + 1.905^2}{2 \cdot 1.905} = 1.33045 \Longrightarrow \boldsymbol{x = 1.33045}$$

Και το σφάλμα του x θα προσδιοριστεί σύμφωνα με την θεωρία ως εξής:

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\delta x}{\delta d1}\right)^2 \cdot \sigma_{d1}^2 + \left(\frac{\delta x}{\delta d2}\right)^2 \cdot \sigma_{d2}^2 \Longrightarrow \sigma_x = \pm\sqrt{(\frac{d1}{d2})^2 \cdot \sigma_{d1}^2 + \left(-\frac{d1^2}{2d2^2} + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sigma_{d2}^2} =$$

$$= \pm\sqrt{(\tfrac{1.2}{1.905})^2 \cdot 0.0588^2 + \left(-\tfrac{1.2^2}{2 \cdot 1.905^2} + \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.665^2} = 0.204 \Longrightarrow \boldsymbol{\sigma_x = \pm 0.204}$$

Τελικά:

$$\boldsymbol{x = 1.33045 \pm 0.204}\ \text{Å}$$

Τέλος μπορούμε θεωρώντας γνωστές της σταθερές του πλέγματος να βρούμε από την κλίση μιας από της δυο ευθείες των πειραματικών μας δεδομένων για να βρούμε την σταθερά h του Planck, σύμφωνα λοιπόν με του μετασχηματισμούς είδαμε ότι:

$$\beta = \frac{2Lh}{d}\frac{1}{\sqrt{2em}} \Longrightarrow h = \frac{\beta d\sqrt{2em}}{2L}$$

αν στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσουμε για κλίση β την κλίση της ευθείας του μεγαλύτερου δακτυλίου με διάμετρο D2 θα έχουμε ότι:

$$h = \frac{\beta d\sqrt{2em}}{2L} = \frac{2.7593 \cdot 1.2 \cdot 10^{-10} \ \cdot \sqrt{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}}{2 \cdot 0.135} = 6.62596 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s}$$

η τιμή αυτή είναι πάρα πολύ κοντά στην πραγματική τιμή της σταθερά του Planck σύμφωνα με την βιβλιογραφία χωρίς καν να χρειαστούμε να βρούμε το σφάλμα της λόγο των τιμών β και d, για να υπολογίσουμε το σφάλμα ενεργούμε με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε το σφάλμα σ_x προηγουμένως.

Συμπέρασμα:

Συμπερασματικά, στην παραπάνω εργασία αποδείξαμε με επιτυχία την κυματική φύση του ηλεκτρονίου, καθώς τα πειραματικά δεδομένα που συγκεντρώσαμε συμφώνησαν με τις θεωρητικές προβλέψεις. Επιπλέον θεωρώντας γνωστές κάποιες σταθερές όπως την μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου βρήκαμε με μεγάλη ακρίβεια της απόστασης τον δικτυωτών επίπεδων του γραφίτη που ευθύνονται για τους δυο δακτύλιος προσδιορίζοντας μάλιστα και από πιο επίπεδο προέκυψε ο κάθε δακτύλιος. Η παραπάνω εργασία μας ανοίγει τον δρόμο για περαιτέρω έρευνες και εφαρμογές σε διάφορους τομείς της φυσικής και της τεχνολογίας, ενισχύοντας έτσι τη βάση γνώσεων μας προς την κατεύθυνση της κβαντικής μηχανικής. Τέλος, η επιτυχία αυτή αποδεικνύει τη σημαντικότητα της συνεργασίας μεταξύ θεωρητικής ανάλυσης και πειραματικής επιβεβαίωσης.