Versuch 12 - Trägheitsmoment

PAP 1

12.12.2024

Teilnehmender Student: **Paul Saß**

Gruppe: 9

Kurs: Vormittags

Tutor/in :

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Motivation

Die Gravitationskonstante g bestimmt ohne Zweifel unserr Leben. Sie bestimmt, wie schnell Objekte nahe der Erdoberfläche richtung Erde beschleunigt werden. Diese konstante ist ausschlaggebend für viele Esenzielle berechnungen, beispielsweise in der Mechanik. Es lässt sich unter anderem die Fluchtgeschwindigkeit der Erde berechnen welche den Grundstein für die Raumfahrt legt. Deshalb ist eine exakte Messung dieser konstante von großer Bedeutung und dieser Versuch vermittelt, mit welchen Methoden dieser exakt bestimmt werden kann.

1.2 Messverfahren

Es wurde ein Pendel an einer Aufhängung mit einer vertikalen und einer horizontalen Skala befestigt. Zunächst wird die Länge des Pendels bestimmt und die Periodendauer grob bestimmt. Dafür wurde das Pendel 5 mal 20 Perioden geschwungen und die Zeit bestimmt. Daraus lässt sich, jedoch ungenau, g bestimmen.
Mithilfe dieser Periodendauer konnte die Anzahl an Schwingungen bestimmt werden, ab welchen die Reaktionszeit vernachlässigbar wird. Anschließend wurde dese Anzahl an Schwingungen gemessen und die abnahme der Amplitude abgelesen. Daraus lassen sich die Dämpfungsfaktoren des Pendels bestimmen und anschließend g mit hoher Genauigkeit berechnen.

1.3 Grundlagen aus der Physik

1.3.1 Klassisches Fadenpendel

In einem klassischen Fadenpendel enspricht die Tangentialbeschleunigung genau dem Tangentialanteil der Gravitationskraft. Für kleine Auslenkungen gilt hier $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Teilt man die erhaltene Gleichung durch l als Fadenlänge ergibt sich mit φ als Winkelauslenkung die Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{1.1}$$

Für die Lösung dieser gilt eine harmonische Schwingung mit Eigenfrequenz $\omega = \frac{g}{l}$. Damit gilt für die Periodendauer T_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.2}$$

Damit gilt für g:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \tag{1.3}$$

1.3.2 Physikalisches Pendel

Im physikalischen Pendel lassen sich die bremsenden Faktoren nicht mehr vernachlässigen. Ebenfalls gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$ nicht mehr. Die Periodendauer ist nun abhängig von der Amplitude. Es ensteht eeine Verlängerung der Periodendauer:

$$T^2 = T_0^2(1 + \frac{\varphi_0^2}{8}) \tag{1.4}$$

Hierbei ist φ_0 der Winkel ab dem die lineare Näherung aufgrund von hohen Auslenkungen nicht mehr angenommen werden kann. Dieser berechnet sich durch:

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{2\overline{x}}{l}\right) \tag{1.5}$$

Wobei $\overline{x}$ die mittlere Aplitude ist und l die Pendellänge.

1.3.3 Dämpfung durch Reibung

Die Funktion der Ampliduden $x(t)$ mit Ausgangsamplitude x_0 enhält den Dämpfungskoeffizienten δ. Dieser gibt die Dämpfung durch die entstehende Reibung an.

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \tag{1.6}$$

Davon lässt sich der Einfluss auf die Periodendauer ermitteln. Dabei ist ω_0 die Frequenz des Pendels ohne Reibung.

$$T_2 = T_1(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2}) \tag{1.7}$$

1.3.4 Trägheitsmoment

In einem physikalischen Pendel spielt das Drehmoment der Kugel und das des Fadens eine entscheidende Rolle. Dafür wird der Faden als Zylinder mit Höhe l' betrachtet. Damit ergibt sich unter zuhilfenahme des Steinerschen Satzes das Gesamtdrehmoment:

$$J = J_{Kugel} + J_{Faden} + m_K l^2 \tag{1.8}$$

Mithilfe des Trägheitsmoments kann die Periodendauer des realen Pendels bestimmt werden.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{1.9}$$

Dafür benötigt man allerdings die Winkelrichtgröße D für diese gilt:
$M = -D\varphi$ mit M als Drehmoment. Dafür wird zuerst wieder $\sin(\varphi) \approx \varphi$ genähert, welches nach obiger Gelichung zum Schluss korigiert wird. DAnn lässt sich D berechnen.

$$D = m_K g l \left(1 - \left(\frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{2m_K}\right)\right) \tag{1.10}$$

Setzt man diese ganzen Korrekturen zusammen ergibt sich mit dem einsetzen der Trägheitsmomente eine abschließende Gleichung für g:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2}\left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{2m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \tag{1.11}$$

2. Durchführung

2.1 Versuchsaufbau

2.2 Aufgaben

3. Auswertung

3.1 Aufgabe I

Mithilfe der ersten Messreihe wird g nach Gleichung 1.2 berechnet. Dabei gilt für T_0 der genauere Fehler von $\Delta T_0 = 0,018$ s als Abweichung des Mittelwerts der fünf Messungen:

$$g = (9{,}83 \pm 0{,}13)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Der Fehler wurde wie folgt berechnet:

$$\Delta g = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2l}{T_0^3}\Delta T_0\right)^2} \tag{3.1}$$

3.2 Aufgabe II

Zuerst wird aus Diagramm 1 die Zahl der Schwingung bei halber maximal Amplitude $n_{1/2}$ bestimmt. $t_{1/2}$ kann aus $n_{1/2}$ bestimmt werden durch:

$$t_{1/2} = n_{1/2} \cdot T_0 \tag{3.2}$$

$$\Delta t_{1/2} = \Delta n_{1/2} \cdot T_0 \tag{3.3}$$

Danach lässt sich nach:

$$\delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \tag{3.4}$$

die Dämpfungskonstante δ bestimmen:

$$\delta = (1,57 \pm 0,23) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Dabei gilt für den Fehler:

$$\Delta\delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}^2}\Delta t_{1/2} \tag{3.5}$$

3.2.1 Bestimmung der Massen

Für die Masse allgemein gilt mit ρ als Dichte und V als Volumen:

$$m = \rho V \tag{3.6}$$

Damit gilt für die Kugel mit ρ_K als Dichte von Eisen:

$$m_k = (176 \pm 8)\mathrm{g}$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta m_K = 4\pi r^2 \rho_K \tag{3.7}$$

Und für den Faden genähert als Zylinder mit Höhe l':

$$m_F = (0,2264 \pm 0,0004)\mathrm{g}$$

$$\Delta m_K = \pi r^2 \rho_K \tag{3.8}$$

3.2.2 Bestimmung Frquenz ohne Reibung

Die Eigenfrequenz des Pendels kann nach Gleichung 1.1 bestimmt werden mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

$$\omega_0 = (3,24)\text{Hz}$$

3.2.3 Berechnung φ_0

Aus Tabelle 4 kann der Mittelwert der Amplituden mit Fehler bestimmt werden:

$$\overline{x} = (5,2 \pm 0,6)\text{cm}$$

Dafür gilt für den Fehler mit Ablesefehler Δa und statistischer Abweichung σ:

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\sigma^2 + (\Delta a)^2} \tag{3.9}$$

Daraus kann mit Gleichung 1.5 φ_0 berechnet werden.

$$\varphi_0 = (0,110 \pm 0,006)\text{rad}$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta\varphi_0 = \sqrt{\left(\frac{l}{\overline{x}^2 + l^2} \cdot \Delta\overline{x}\right)^2 + \left(\frac{\overline{x}}{\overline{x^2 + l^2}} \cdot \Delta l\right)^2} \tag{3.10}$$

3.2.4 Berechnung von g

Abschließen lässt sich daraus unter Berücksichtigung aller Korrekturen die Gravitationsbeschleunigung g mit Gleichung 1.11 berechnen.

$$g = (9{,}834 \pm 0{,}013)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dabei gilt für die Fehlerbestimmung:

$$\Delta g^2 = \left(\left(\frac{4\pi^2}{T_0^2}\left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) - \frac{16\pi^2 r^2}{5l^2 T_0^2}\right) \cdot \Delta l\right)^2 \tag{3.11}$$

$$+ \left(\frac{16\pi^2 lr}{5T_0^2 l^2} \cdot \Delta r\right)^2 + \left(\frac{-4\pi^2 l}{6T_0^2 m_K} \cdot \Delta m_F\right)^2 \tag{3.12}$$

$$+ \left(\frac{4\pi^2 l m_F}{6T_0^2 m_K^2} \cdot \Delta m_K\right)^2 + \left(\frac{8\pi l\delta}{T_0^2 \omega_0^2} \cdot \Delta\delta\right)^2 \tag{3.13}$$

$$+ \left(\frac{-8\pi^2 l\delta^2}{T_0^2 \omega_0^3}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 l\varphi_0}{T_0^2} \cdot \Delta\varphi_0\right)^2 \tag{3.14}$$

4. Zusamenfassung und Diskussion

4.1 Methode 1

Als Referenz wird hier der Heidelberger Ortswert von $g_H = 9,80984$. Der Fehler wird nicht betrachtet, da die Größenordnungen mit unseren Messwerten in keinerlei Vergleichbarkeit stehen. Mithilfe des Messens der Periodendauer einer Schwingung konnte die Gravitationsbeschleunigung g bestimmt werden:

$$\boxed{g = (9{,}83 \pm 0{,}13)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

Dafür wurde das Pendel 5 mal 20 mal geschwungen und die Gesamtzeit gemessen aus diesen konnte dann die gemittelte Zeit für eine Periode bestimmt werden.
Das Problem bei dieser Messung ist, dass die Ungenauigkeit durch die Reaktionszeit stark ins Gewicht fällt. Das vefälscht einerseits den Messwert, jedoch erhöht sich dadurch auch der Fehler, wodurch eine Abweichung von $0,18\ \sigma$ festgestellt werden konnte. Die Messugng ist kritisch zu betrachten, da die reine Abweichung keine genau Aussage zulässt. Die Abweichung ist hier nicht gerade klein, weshalb die Messung zwar als erfolgreich jedoch nich als ausreichend exakt angesehen wird.

4.1.1 Methode 2

Bei der zweiten Methode wurde zuerst die benötigte Anzahl an Schwingungen berechnet um die Reaktionszeit vernachlässigbar zu machen. Danach wurde etwa 600 Schwingungen durchgeführt und die Amplitude nach jeweils 20 Schwingungen bestimmt. Darraus ergibt sich die Dämpfung δ. Es wurden ebenfalls Trägheitsmoment der Kugel und des Fadens berücksichtigt, sowie die nicht-linearität der Auslenkung.
Nach Berücksichtigung dieser Korrekturen ergibt sich für g:

$$\boxed{g = (9{,}835 \pm 0{,}013)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

Es ist eine Abweichung zum Literaturwert von $2,2\ \sigma$ festzustellen. Unter Berücksichtigung aller eingerechneten Faktoren hätte die Abweichung kleiner sein müssen. Da jedoch zwischen beiden gemessenen Werten eine Abweichung von $0,015\ \sigma$ vorliegt, ist auf einen systematischen Fehler zu schließen. Zu vermuten ist, dass durch die Vielzahl an Messungen einerseits der Dämpfungskoeffizient ungenau bestimmt wurde, da die Messwerte gegen Ende der Reihe nicht mehr als linear auf der logarithmischen Skale betrachtet werden könenn. Andererseits sorgt die gleiche Fehlerquelle für eine Fehlmessung der Gesamtzeit. Da die Amplituden stärker als erwartet abgenommen haben, lässt sich erschließen, dass auch die Periodendauern gegen Ende der Messung unerwartet kurz geworden sind. Da zu bestimmung von g jeweils durch T_0^2 geteilt wird sind beide Werte gleichermaßen von der Fehlmessung betroffen was die gleichmäßige Abweichung erklären würde.

Abschließend lässt sich sagen, dass die Messung einerseits gut gelungen ist, da beide Werte gut miteinander übereinstimmenm, es jedoch einen gravierenden Fehler in der Zeitmessung gab, weshalb weide werte systematisch vom Literaturwert abweichen.