

Versuch 15 - Schiefe Ebene

PAP 1

26.9.2025

Teilnehmender Student: **Paul Saß**

Gruppe: 9

Kurs: Vormittags

Tutor/in : Sarah Placek

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Messverfahren	1
1.3	Grundlagen aus der Physik	1
1.3.1	Schiefe Ebene	1
1.3.2	Trägheitsmomente	2
1.3.3	Kinetische Energie	2
2	Durchführung	3
2.1	Versuchsaufbau	3
2.2	Aufgaben	3
3	Auswertung	4
3.1	Aufgabe I	4
3.1.1	Vollzylinder	4
3.1.2	Hohlzylinder	4
3.1.3	Auswertung der Messwerte	4
3.1.4	Bestimmung von a durch die Messung	5
3.1.4.1	Vollzylinder	5
3.1.4.2	Hohlzylinder	5
3.2	Aufgabe II	6
3.2.1	Vollzylinder	6
3.2.1.1	Translationsenergie	6
3.2.1.2	Rotationsenergie	6
3.2.1.3	Potentielle Energie	6
3.2.2	Hohlzylinder	7
4	Zusammenfassung und Diskussion	8
4.1	Beschleunigungen	8
4.2	Vergleich der Energien	8
4.2.1	Vollzylinder	8
4.2.2	Hohlzylinder	9

1. Einleitung

1.1 Motivation

In geschlossenen physikalischen Systemen gilt die Energierhaltung. Doch was genau das anschaulich bedeutet soll dieser Versuch unter anderem Vermitteln. In diesem Versuch ist das Ziel die Einwirkung von dem Trägheitsmoment auf das Beschleunigungsverhalten auf einer schiefen Ebene zu beobachten und daraus auf die Energierhaltung zu schließen. ZU beobachten ist das Phänomen im Alltag, beispielsweise beim Fahrradfahren. Dort wäre es interessant zu wissen, welche Geometrie der Felgen optimal ist, um die geringsten Geschwindigkeitseinbußen beim bergabfahren zu haben.

1.2 Messverfahren

Zuerst wurden Ebene und Körper vermessen um einen Überblick über die Größen zu gewinnen. Die Messung beinhaltete drei Körper, einen Vollzylinder aus Aluminium, einen Hohlzylinder aus Messing und einen Verbundzylinder mit Aluminiumhülle und Messingkern. Diese wurden die schiefe Ebene herabgerollt. Dabei wurde die Zeiten mittels Lichtschranken in quadratischen Längenabständen gestoppt. Daraus soll die Beschleunigung bestimmt werden.

Im zweiten Teil werden zwei der vier Lichtschranken an die flache Ebene, welche unten an die schiefe Ebene anschloss, gesetzt. Mithilfe dieses Aufbaus kann die Endgeschwindigkeit und daraus die kinetische Energie bestimmt werden.

Zur Zeitmessung waren vier Lichtschranken vorhanden, welche über den Hebel, welcher die Körper rollen ließ, automatisch aktiviert. Beim durchlaufen der Lichtschranken werden die Zeiten elektrisch gestoppt.

1.3 Grundlagen aus der Physik

1.3.1 Schiefe Ebene

Auf der schiefen Ebene wirken mehrere Kräfte gleichzeitig. Zuerst wirkt der parallel zur Ebene verlaufene Anteil der Gravitationskraft die Hangabtriebskraft F_{HA} . Der senkrechte Anteil wird genau durch die Normalkraft aufgehoben. Zusätzlich gibt es in der realen schiefen Ebene die Reibungskraft F_R . Diese erzeugt ein Drehmoment auf den Körper. Dabei gilt für das Drehmoment mit J als Trägheitsmoment und r als Radius des Körpers:

$$M = F_R \cdot r = J\dot{\omega} \quad (1.1)$$

Dabei beschreibt ω die Winkelgeschwindigkeit. Teilt man beide Seiten durch den Radius erhält man einen Ausdruck für die Reibungskraft. Da diese entgegen der Hangabtriebskraft wirkt ergibt sich ein negatives Vorzeichen:

$$F_{ges} = F_{HA} - F_R \quad (1.2)$$

Setzt man nun die Ausdrücke ein erhält man einen Ausdruck für die Beschleunigung a , dabei ist m die Masse des Körpers und α der Winkel der Ebene.

$$ma = mg \sin(\alpha) - J \frac{a}{r^2} \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg \sin(\alpha)}{m + \frac{J}{r^2}} \quad (1.4)$$

$$\Rightarrow a = \frac{mgh}{l(m + \frac{J}{r^2})} \quad (1.5)$$

Der Winkel ergibt sich aus der Höhe der Ebene h und der Länge der Ebene (Hypotenuse) l .

1.3.2 Trägheitsmomente

Für das Trägheitsmoment eines Körpers gilt allgemein:

$$\int_V \rho(r) \cdot r_{\perp}^2 dV \quad (1.6)$$

Dabei ist r_{\perp} der Abstand der Sekanten zur Rotationsrichtung, ρ die Dichte und V das Volumen. Aus dieser Gleichung lässt sich das Trägheitsmoment folgender rotationssymmetrischer Körper mit Masse m und Radius r bestimmen: **Vollzylinder**:

$$J_V = \frac{1}{2} m r^2 \quad (1.7)$$

Hohlzylinder:

$$J_H = \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2) \quad (1.8)$$

Dabei beschreibt r_2 den Außenradius und r_1 den Innenradius.

1.3.3 Kinetische Energie

Körper mit Masse m und Geschwindigkeit v oder Trägheitsmoment J und Rotationsgeschwindigkeit ω besitzen eine sogenannte kinetische Energie. Diese setzt sich aus der Translations- und Rotationsenergie zusammen. Die Translationsenergie ist die Energie, die ein Körper bei translatorischer Bewegung besitzt. Diese lässt sich berechnen durch:

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{s}{\Delta t} \right)^2 \quad (1.9)$$

Mit s als überschrittene Fläche in Δt Zeit.

Rotiert ein Körper um sich selbst, ergibt sich eine Drehbewegung um den Schwerpunkt, die Energie, die ein Körper dabei besitzt, wird durch folgende Gleichung beschrieben.

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \left(\frac{s}{r \Delta t} \right)^2 \quad (1.10)$$

Die Summe der Beiden nennt man dann kinetische Energie.

Bewegt sich ein Körper im Schwerfeld der Erde, so besitzt dieser eine potentielle Energie. Diese beschreibt die in einem Körper vorhandene Energie in Referenz zu einem anderen Punkt. Die Höhendifferenz beschreibt hier h .

$$E_{pot} = mgh \quad (1.11)$$

In dem Protokoll wird als Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

2. Durchführung

2.1 Versuchsaufbau

2.2 Aufgaben

3. Auswertung

3.1 Aufgabe I

3.1.1 Vollzylinder

Zuerst wird die theoretische Beschleunigung des Vollzylinders berechnet, dafür benötigt man das Trägheitsmoment um die Rotationsachse, dabei gilt für die Dichte $\rho_{Al} = 2,70 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Mit der Masse $m_V = (444 \pm 1) \text{ g}$ und dem Radius $r = (2,5000 \pm 0,0025) \text{ cm}$ ergibt sich nach Gleichung 1.7 für das Trägheitsmoment:

$$J_V = (1,388 \pm 0,004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Der Fehler für J_V wird berechnet durch:

$$\Delta J_V = \frac{1}{2} \sqrt{(r^2 \Delta m)^2 + (2mr \Delta r)^2} \quad (3.1)$$

Damit lässt sich aus Gleichung 1.5 die Beschleunigung des Körpers berechnen:

$$a_V = (1,06 \pm 0,03) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dabei gilt für den Fehler:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{J^2 \Delta m^2}{m^2 (J + mr^2)^2} + \frac{4J^2 \Delta r^2}{r^2 (J + mr^2)^2} + \frac{\Delta J^2}{(J + mr^2)^2} + \frac{\Delta h^2}{h^2} + \frac{\Delta l^2}{l^2}} \cdot a \quad (3.2)$$

3.1.2 Hohlzylinder

Die Rechnung erfolgt analog für den Hohlzylinder aus Messing. Dafür wird hier Gleichung ?? verwendet. Als Masse gilt $m = (442 \pm 1) \text{ g}$ und für die Radien $r_2 = (2,5025 \pm 0,0025) \text{ cm}$, $r_1 = (2,0350 \pm 0,0025) \text{ cm}$.

$$J_H = (2,299 \pm 0,006) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Für den Fehler gilt:

$$\Delta J_H = \sqrt{\frac{1}{4} \Delta m^2 (r_1^2 + r_2^2)^2 + \Delta r_1^2 m^2 r_1^2 + \Delta r_2^2 m^2 r_2^2} \quad (3.3)$$

Daraus kann erneut die Beschleunigung mit Gleichung 1.5 berechnet werden:

$$a_V = (0,86 \pm 0,03) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.1.3 Auswertung der Messwerte

Der Fehler wurde berechnet mithilfe des statistischen Fehlers σ_{stat} und dem systematischen Fehler Δt_{sys} :

$$\Delta t = \sqrt{(\sigma_{stat})^2 + (\Delta t_{sys})^2} \quad (3.4)$$

Zylinder	Schranke 1 $\overline{t_1}$ [s]	Schranke 2 $\overline{t_2}$ [s]	Schranke 3 $\overline{t_3}$ [s]	Schranke 4 $\overline{t_4}$ [s]
Vollzylinder	$0,4280 \pm 0,0010$	$0,7182 \pm 0,0011$	$0,9984 \pm 0,0011$	$1,2798 \pm 0,0011$
Hohlzylinder	$0,471 \pm 0,004$	$0,794 \pm 0,004$	$1,1088 \pm 0,0024$	$1,423 \pm 0,004$

Tabelle 3.1: Mittelwerte der Zeitmessungen

3.1.4 Bestimmung von a durch die Messung

3.1.4.1 Vollzylinder

Für die Fehlerbalken in Diagramm 1 gilt folgende Formel:

$$\Delta(t^2) = 2t\Delta t \quad (3.5)$$

Aus dem Diagramm lässt sich die Steigung der Tredgeraden ermitteln. Aus:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (3.6)$$

Folgt, dass die Steigung genau $\frac{2}{a}$ entsprechen muss. Für die Steigung gilt:

$$\varsigma = (2,018 \pm 0,029) \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$$

Der Fehler ist hier die Differenz der Steigung zu Steigung der Fehlergeraden. Aus m lässt sich dann a berechnen als:

$$a = (0,9910 \pm 0,0140) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Der Fehler wird berechnet durch:

$$\Delta a = \frac{2}{m^2} \Delta m \quad (3.7)$$

3.1.4.2 Hohlzylinder

Dieselben Überlegungen gelten für den Hohlzylinder. Die Werte wurden in Diagramm 2 aufgetragen.

Für die Steigung gilt:

$$\varsigma = (2,50 \pm 0,04) \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$$

Daraus folgt für die Beschleunigung:

$$a = (0,800 \pm 0,013) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.2 Aufgabe II

3.2.1 Vollzylinder

3.2.1.1 Translationsenergie

Um die translations Energie zu bestimmen wird die mittlere Zeit t_m zwischen den Lichtschranken an der Ebene nach der schiefen Ebene bestimmt. Dabei gilt der Fehler:

$$\Delta t_m = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2} \quad (3.8)$$

Anschließend wird das Mittel dieser Zeiten bestimmt, mit dem Fehler nach Gleichung 3.4.

$$\overline{t_{trans}} = (0,2358 \pm 0,0011) \text{ s}$$

Der Abstand zwischen beiden Lichtschranken beträgt $s = (30,0 \pm 0,5) \text{ cm}$. Daraus ergibt sich nach Gleichung 1.9:

$$E_{trans,voll} = (0,359 \pm 0,013) \text{ J}$$

Der Fehler berechnet sich durch:

$$\Delta E_{trans} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{s}{t_{trans}} \right)^2 \Delta m \right)^2 + \left(\frac{2sm}{(t_{trans})^2} \Delta s \right)^2 + \left(2 \left(\frac{s^2}{(t_{trans})^3} \right) \Delta t_{trans} \right)^2} \quad (3.9)$$

3.2.1.2 Rotationsenergie

Für die Rotationsenergie gilt nach Gleichung 1.10:

$$E_{rot,voll} = (0,179 \pm 0,007) \text{ J}$$

Für den Fehler gilt hier:

$$\Delta E_{rot} = \sqrt{\frac{s^2 [J^2 \Delta r^2 s^2 (t_{trans})^2 + J^2 \Delta (t_{trans})^2 r^2 s^2 + r^2 (t_{trans})^2 (J^2 \Delta s^2 + 0.25 \Delta J^2 s^2)]}{r^6 (t_{trans})^6}}$$

Um auf die gesamte kinetische Energie zu kommen werden beide Energien addiert

$$\Rightarrow \boxed{E_{kin,voll} = (0,538 \pm 0,015) \text{ J}}$$

Für den Fehler gilt hier:

$$\Delta E_{kin} = \sqrt{(\Delta E_{trans})^2 + (\Delta E_{rot})^2} \quad (3.10)$$

3.2.1.3 Potentielle Energie

Für die potentielle Energie wird die Auflagehöhe des Zylinders benötigt. Da unten an der schiefen Ebene ebenfalls eine Platte gleicher Bauart angebracht war, wurde der relative Abstand dieser zum Auflagepunkt des Zylinders auf $h_s = (14,2 \pm 1,0) \text{ cm}$ gemessen. Um auf die Höhe des

Schwerpunkts zu kommen muss nun noch der Radius des Vollzylinders addiert werden. Damit gilt für die Höhe des Schwerpunkts:

$$h_{SP} = (16,7 \pm 1,0) \text{ cm}$$

Dabei gilt für den Fehler:

$$\Delta h_{SP} = \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta h)^2} \quad (3.11)$$

Damit gilt nach Gleichung 1.11:

$$E_{pot,voll} = (0,73 \pm 0,04) \text{ J}$$

Für den Fehler gilt hier:

$$\Delta E_{pot} = \sqrt{(mg\Delta h)^2 + (gh\Delta m)^2} \quad (3.12)$$

3.2.2 Hohlzylinder

Die gleichen Rechenschritte werden analog für den Hohlzylinder verwendet, dabei ergibt sich:

- $\overline{t_{trans}} = (0,257 \pm 0,012) \text{ s}$
- $E_{trans,hohl} = (0,30 \pm 0,03) \text{ J}$
- $E_{rot,hohl} = (0,25 \pm 0,12) \text{ J}$
- $h_{SP} = (16,7 \pm 1,0) \text{ cm}$
- $E_{kin,hohl} = (0,55 \pm 0,13) \text{ J}$
- $E_{pot,hohl} = (0,72 \pm 0,04) \text{ J}$

4. Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Beschleunigungen

Im Folgenden wird V für den Vollzylinder und H für den Hohlzylinder verwendet.

Zuerst wurden die Lichtschranken in einem quadratisch ansteigendem Abstand aufgebaut. Daraus konnte jeweils eine Messreihe erstellt werden und mithilfe der Steigung der Geraden die Beschleunigung bestimmt werden:

$$a_{V1} = (0,9910 \pm 0,0140) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{H1} = (0,800 \pm 0,013) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Durch die Berechnung des Trägheitsmoments aus der gemessenen Masse und des Radius konnte die theoretische Beschleunigung berechnet werden.

$$a_{V2} = (1,06 \pm 0,03) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{H2} = (0,86 \pm 0,03) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Daraus ergibt sich für den Vollzylinder die Abweichung 2σ und für den Hohlzylinder von $1,8\sigma$. Diese Abweichungen sind aufgrund der geringen Fehler akzeptabel. Sie liegen beide innerhalb des 3σ Bereichs und können daher als Aussagekräftig betrachtet werden. Allgemein kann diese Messung also als Erfolgreich gewertet werden. Kritisch zu betrachten ist jedoch, dass die gemessenen Werte unter den berechneten liegen. Das deutet auf einen systematischen Fehler hin. Dieser liegt in etwa in der Rollreibung oder dem Luftwiderstand. Bei den Berechnungen wurde die Ebene als ideal betrachtet, was sie realistisch nicht ist. Dazu kommt, dass das Anheben der Weggrollsperr nicht instantan geschieht.

4.2 Vergleich der Energien

Anschließend wurden zwei Lichtschranken an die Ebene nach der schiefen Ebene verschoben. Damit konnte die Endgeschwindigkeit bestimmt werden und daraus die kinetische Energie. Aus der Höhe der Ruhelage der Zylinder konnte dann die potentielle Energie bestimmt werden.

4.2.1 Vollzylinder

Für die Energien des Vollzylinders gilt:

$$E_{Vkin} = (0,538 \pm 0,015) \text{ J}$$

$$E_{Vpot} = (0,73 \pm 0,04) \text{ J}$$

Im Idealfall sollten beide Übereinstimmen, da die Energieerhaltung gilt. Dies ist jedoch nicht ganz der Fall. Die Abweichung beträgt 5σ .

4.2.2 Hohlzylinder

Für die Energien des Hohlzylinders ergibt sich:

$$E_{kin,hohl} = (0,55 \pm 0,13) \text{ J}$$

$$E_{pot,hohl} = (0,72 \pm 0,04) \text{ J}$$

Hier ergibt sich ebenfalls eine Abweichung von 4σ .

Die hohen Abweichungen sind wie bei der Beschleunigung durch systematische Faktoren zu erklären. Einerseits spielen hier Rollreibung und Luftwiderstand eine Rolle, jedoch liegt die größte Fehlerquelle im Übergang zwischen schiefer und ebenener Ebene. Dort erfuhr der Zylinder einen sehr Ruckartigen schlag, wodurch Energie in den Tisch übergegangen ist. Dadurch wurde die Geschwindigkeit verlangsamt und die Energie verringert. Selbst wenn man den Übergang Stoßlos macht wirkt bei der Richtungsänderung eine Kraft, auch entgegen der Rollrichtung. Zusammenfassend lässt sich diese Messung mit dem Aufbau nicht verbessern. Aber zu bemerken ist, dass die kinetische Energie geringer ist als die potentielle, was auf den erwähnten Energieverlust hinweist.