Prognozowanie wartości dodanej brutto dla Szwecji

Klaudia Kozakiewicz

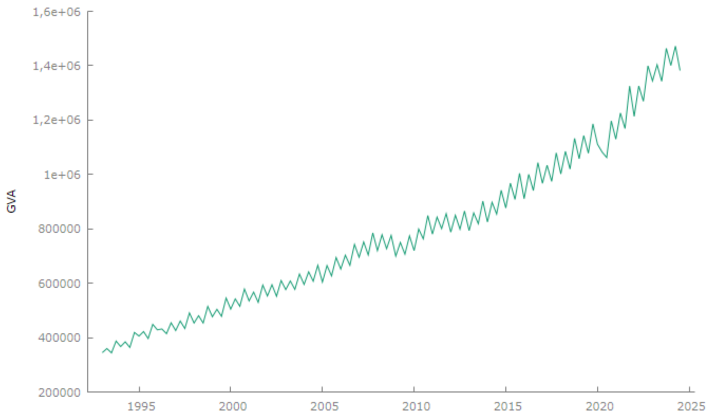
Spis treści

1. Wprowadzenie i analiza wstępna

Wartość dodana brutto (GVA – Gross Value Added) to istotna miara w ekonomii, która odzwierciedla wartość tworzoną przez poszczególne sektory gospodarki. Jest wytwarzana przez daną branżę lub sektor, obliczana jako produkcja (w cenach podstawowych) minus zużycie pośrednie (w cenach nabycia). Suma GVA dla wszystkich sektorów, powiększona o podatki od produktów i pomniejszona o subsydia, daje produkt krajowy brutto (PKB)[1].

Dane zaprezentowane w niniejszej analizie pochodzą ze strony. Obejmują one kwartalne wartości GVA dla Szwecji (w mln koron szwedzkich) od pierwszego kwartału 1993 roku do trzeciego kwartału 2024 roku, co daje 127 obserwacji. Dane te przedstawiają rozwój gospodarczy Szwecji na przestrzeni ostatnich 30 lat, umożliwiając analizę zarówno krótkookresowych wahań, jak i długoterminowych trendów.

Celem tej analizy jest modelowanie i prognozowanie zachowania GVA Szwecji w czasie przy pomocy modelu SARIMA.



Rysunek 1 Szereg czasowy wartości dodanej brutto dla Szwecji od pierwszego kwartału 1993 r. do trzeciego kwartału 2024 r.

Rysunek 1 przedstawia wykres szeregu czasowego wartości GVA dla Szwecji. Seria danych wykazuje wyraźny trend rosnący, co oznacza, że średnia nie pozostaje stała w czasie. Jest to cecha charakterystyczna niestacjonarnego szeregu czasowego. Dodatkowo, widoczna jest zwiększająca się amplituda wahań – zmienność GVA rośnie w miarę upływu czasu, co wskazuje na niestałą wariancję. Oznacza to, że rozproszenie wartości wokół trendu zmienia się, jest mniejsze na początku okresu i większe w ostatnich latach.

Dokonano analizy statystycznej szeregu danych w celu głębszego zrozumienie ich struktury:

---

[1] https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Glossary:Gross_value_added

Nazwa statystyki	Wartość statystyki
Średnia	781371,57
Mediana	749942,00
Odchylenie standardowe	293930,85
Współczynnik zmienności	0,376
Skośność	0,532
Kurtoza	-0,595

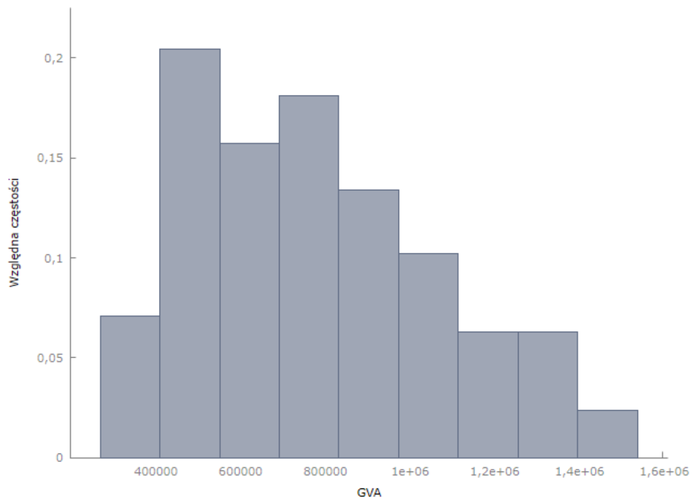
Średnia i mediana są do siebie zbliżone, co sugeruje względnie symetryczny rozkład danych, choć nie idealnie. Odchylenie standardowe wskazuje na znaczne rozproszenie danych wokół średniej. Współczynnik zmienności wyznaczany jest przy pomocy odchylenia standardowego oraz średniej arytmetycznej $V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%$. Jego wartość na poziomie 37,6% klasyfikuje zmienność jako przeciętną, zgodnie z umowną klasyfikacją[2]:

Wartość współczynnika	Klasyfikacja
$V \leq 25\ \%$	mała zmienność
$25\% < V \leq 45\%$	przeciętna zmienność
$45\% < V \leq 100\%$	silna zmienność
$V > 100\%$	bardzo silna zmienność

Skośność dodatnia wskazuje na prawostronną asymetrię, czyli więcej wartości poniżej średniej, a niewiele bardzo dużych. Kurtoza ujemna świadczy o tym, że rozkład jest spłaszczony względem rozkładu normalnego – mniejsze zagęszczenie wartości wokół średniej.

Rysunek 2 przedstawia histogram względnej częstości wartości GVA. Rozkład ten potwierdza wcześniejsze obserwacje – jest on prawostronnie asymetryczny. Zdecydowana większość obserwacji znajduje się po lewej stronie (niższe wartości GVA), a tylko nieliczne punkty reprezentują wysokie wartości. Oznacza to, że przez większość analizowanego okresu szwedzka gospodarka operowała na niższym poziomie GVA, który dopiero w ostatnich latach znacznie wzrósł.

[2] https://obliczeniastatystyczne.pl/wspolczynnik-zmiennosci



Rysunek 2 Wykres względnej częstości wartości dodanej brutto dla Szwecji

2. Testowanie stopnia integracji szeregu czasowego

Aby skutecznie modelować szereg czasowy wartości dodanej brutto (GVA), niezbędne jest określenie jego stopnia integracji, oznaczanego jako d. Mówiąc prościej, należy zbadać, ile razy trzeba obliczyć różnicę szeregu, aby uzyskać stacjonarność – czyli stabilność średniej, wariancji i kowariancji w czasie. Szereg stacjonarny jest warunkiem koniecznym do stosowania wielu modeli ekonometrycznych, takich jak SARIMA.

W analizie zastosowano test ADF (Augmented Dickey–Fuller), który pozwala sprawdzić, czy w szeregu występuje tzw. pierwiastek jednostkowy, wskazujący na niestacjonarność. Test przeprowadzono dla trzech wariantów szeregu: poziomów (y_t), pierwszych różnic (Δy_t), oraz drugich różnic ($\Delta^2 y_t$).

Pierwszym krokiem była estymacja równania pomocniczego:

$$\Delta y_t = \mu_t + \rho \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot \Delta y_{t-i} + e_t$$

Dla dwóch wariantów (z uwagi, że nie wiadomo, czy linia trendu jest stochastyczna, czy deterministyczna robimy test z wyrazem wolnym oraz test z wyrazem wolnym i trendem liniowym) uzyskano następujące wyniki (wg kryterium Bayesa–Schwarza):

Test	z wyrazem wolnym	z wyrazem wolnym i trendem liniowym
Statystyka testu	$\tau_c(1)$ = 2,938	$\tau_{ct}(1)$ = 3,373
Asymptotyczna wartość	p = 1	p = 1
Autokorelacja reszt I rzędu	-0,012	0,075

W obu przypadkach p–wartość wynosi 1, co oznacza, że z bardzo wysokim prawdopodobieństwem nie można odrzucić hipotezy zerowej H_0, zgodnie z którą szereg nie jest stacjonarny. Można wnioskować zatem, że szereg y_t nie jest stacjonarny i wymaga różnicowania.

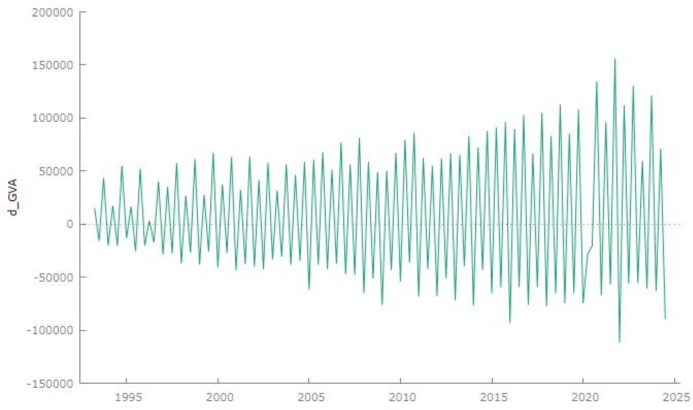
Kolejny krok to analiza pierwszych różnic danych. W tym celu należy wyznaczyć drugi model pomocniczy:

$$\Delta^2 y_t = \mu_t + \rho \cdot \Delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot \Delta^2 y_{t-i} + e_t$$

Po zróżnicowaniu szeregu znika trend, dlatego przeprowadzono test jedynie z wyrazem wolnym.

Test	z wyrazem wolnym
Statystyka testu	$\tau_c(1)$ = -2,025
Asymptotyczna wartość	$p = 0{,}276$
Autokorelacja reszt I rzędu	-0,040

Wartość asymptotyczna p = 0,276 jest większa od ustalonego błędu na poziomie 5% oznacza, że nadal nie można odrzucić H_0, zatem także pierwsze różnice są niestacjonarne.



Rysunek 3 Pierwsze różnice wartości dodanej brutto dla Szwecji

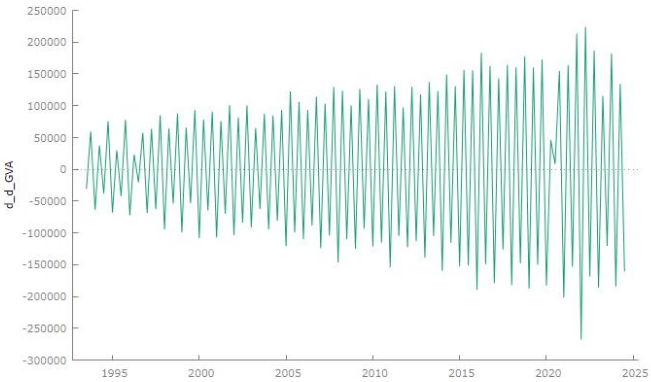
W trzecim etapie analizowano drugie różnice szeregu. Wyznaczono trzecie równanie pomocnicze:

$$\Delta^3 y_t = \mu_t + \rho \cdot \Delta^2 y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot \Delta^3 y_{t-i} + e_t$$

Dla tego modelu pomocniczego wyniki są następujące:

Test	z wyrazem wolnym (const)
Statystyka testu	$\tau_c(1)$ = -6,097
Asymptotyczna wartość	p = 6,963e-08
Autokorelacja reszt I rzędu	-0,073

Tym razem wartość p jest znacznie mniejsza od 0,05, co pozwala na odrzucenie hipotezy zerowej H_0 na poziomie istotności p = 0,05. Zatem druga różnica szeregu $\Delta^2 y_t$ jest stacjonarna, a szereg y_t jest zintegrowany rzędu drugiego, czyli: $\Delta^2 y_t \sim I(2)$. Oznacza to, że szereg y_t wymaga dwukrotnego różnicowania, aby spełniał założenia stacjonarności. W późniejszym etapie należy zatem budować model prognostyczny SARIMA dla szeregu o stopniu integracji $\boldsymbol{d = 2}$.

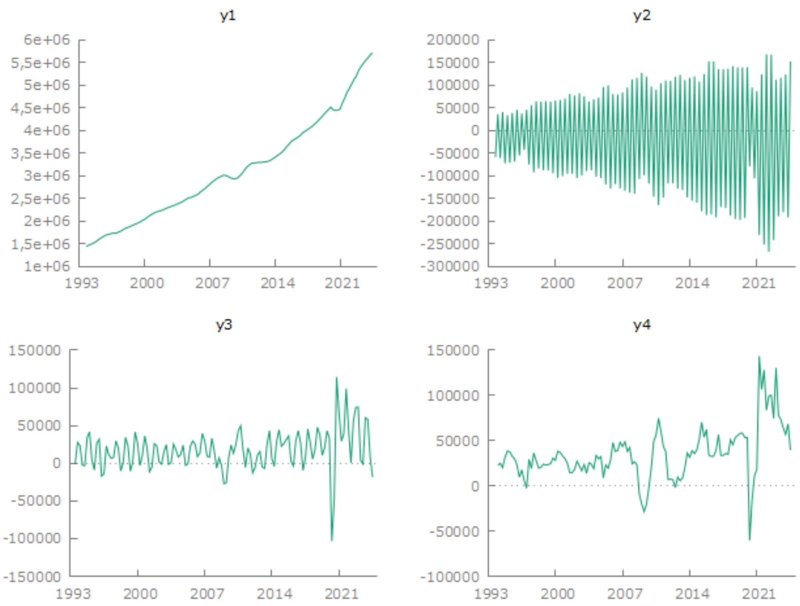


Rysunek 4 Drugie różnice wartości dodanej brutto dla Szwecji

3. Testowanie integracji sezonowej

Ta część analizy polega na wyznaczeniu rzędu integracji sezonowej D przy pomocy testu Hegy (Hylleberg, Engle, Granger, Yoo). Polega on na zbadaniu trzech hipotez, na których podstawie można dokonać wyboru odpowiedniego filtra (zmiennej stacjonarnej). Pierwszym krokiem jest utworzenie pomocniczych szeregów czasowych:

$$y_{1t} = y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3}$$
$$y_{2t} = -y_t + y_{t-1} - y_{t-2} + y_{t-3}$$
$$y_{3t} = y_t - y_{t-2}$$
$$y_{4t} = y_t - y_{t-4}$$



Rysunek 5 y1 – trend stochastyczny, y2 – odfiltrowane wahania półroczne, y3 – odfiltrowane wahania roczne, y4 – GVA bez trendu, wahań półrocznych i rocznych

Test Hegy służy do określenia, który z czterech szeregów jest statystycznie istotny. Szereg, który zostanie uznany za istotny, będzie użyty do filtracji sezonowości.
Przyjmuje się pomocniczo model bez restrykcji URSS:

$$y_{4t} = \mu_t + \pi_1 \cdot y_{1,t-1} + \pi_2 \cdot y_{2,t-1} + \pi_3 \cdot y_{3,t-2} + \pi_4 \cdot y_{3,t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot y_{4,t-i} + e_t$$

Wybór opóźnienia k jest istotny do przeprowadzenia dalszej części testu. Zwykle jest to 2 lub 3–krotność liczby okresów w roku. Nasze dane są danymi kwartalnymi, zacznijmy więc od $k = 8$. Dla tego modelu nie jest spełniony warunek autokorelacji reszt ponieważ wartość 0,100126 > 0,1. W związku z tym liczba opóźnień zostaje zwiększona do $k = 9$. Po tej zmianie, autokreacja reszt jest na poziomie poniżej 0,1 co pozwala przejść do wykonania testu Hegy.

Liczba zamiennych w modelu wynosi N = 114, dlatego uwzględnia się wartości testu dla n = 100. W tabeli zapisane są odczytane wartości krytyczne oraz statystyki.

Hipoteza zerowa	Statystyka t-Studenta	Wartość krytyczna
$H_A\colon\ \pi_1 = 0$	2,938	-2,88
$H_B\colon\ \pi_2 = 0$	2,452	-1,95

Na podstawie wartości statystyk t-Studenta, przekraczających odpowiednie wartości krytyczne, nie odrzuca się hipotez zerowych na poziomie istotności 0,05. Dla pierwszej hipotezy przyjmuje się zatem, że $\pi_1 = 0$. Analogicznie, w przypadku hipotezy B wartość statystyki również przekracza wartość krytyczną, co skutkuje przyjęciem hipotezy zerowej: $\pi_2 = 0$.

Dla zbadania trzeciej hipotezy konieczne jest skonstruowanie dodatkowego modelu z nałożoną restrykcją RRSS, tj. przy założeniu $\pi_3 = \pi_4 = 0$. Model przyjmuje wówczas postać:

$$y_{4t} = \mu_t + \pi_1 \cdot y_{1,t-1} + \pi_2 \cdot y_{2,t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot y_{4,t-i} + e_t$$

W celu interpretacji wyników przeprowadza się test restrykcji liniowych, porównując wartość statystyki F z wartością krytyczną odczytaną z tablic dla odpowiedniego rozkładu. Wzór na statystykę F przedstawia się następująco:

$$F = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{N-K}{r}$$

Gdzie K to liczba oszacowanych parametrów, r oznacza liczbę nałożonych restrykcji N stanowi wielkość próby, a $N-k$ jest liczbą liczba stopni swobody. Dla $F = 0{,}61 < 3{,}08$, brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej przy poziomie istotności 0,05. Potwierdza to również wartość $p = 0{,}545085$.

Na podstawie wyników testu nie odrzuca się żadnej z trzech hipotez H_A, H_B, H_C. W związku z tym należy zastosować zmienną stacjonarną $\Delta_4 y_4$ $(= y_{4t})$, czyli pełny filtr sezonowy. Do estymacji modelu SARIMA przyjmuje się zatem stopień integracji sezonowej $\boldsymbol{D = 1}$. W konsekwencji, należy wdrożyć pełny filtr sezonowy obejmujący różnicowanie zwykłe, dwuokresowe oraz okresowe. Taka konfiguracja stanowi najbardziej korzystne warunki dla uzyskania trafnych prognoz.

4. Oszacowanie modelu SARIMA

We wcześniejszych częściach pracy ustalono, że dane wymagają zastosowania drugiego rzędu różnicowania zwykłego $d = 2$ oraz pierwszego rzędu różnicowania sezonowego $D = 1$. Kolejnym krokiem jest wyznaczenie optymalnych rzędów składowych modelu SARIMA, tj. parametrów procesu autoregresyjnego: zwykłego p i sezonowego P, oraz procesu średniej ruchomej: zwykłego q i sezonowego Q.

Na początku przyjęto wartości początkowe dla wszystkich rzędów równe 2, tj. $p = q = P = Q = 2$. Po estymacji modelu $SARIMA(2,2,2) \times (2,1,2)_4$ zaobserwowano, że moduł jednego z pierwiastków części autoregresyjnej nie spełnia warunku stabilności (moduł ≤ 1). W odpowiedzi obniżono rząd składnika autoregresyjnego zwykłego do $p = 1$, pozostawiając pozostałe parametry bez zmian.

W nowym modelu $SARIMA(1,2,2) \times (2,1,2)_4$ stwierdzono, że moduł pierwiastka dla części MA również nie przekracza jedności, co wskazuje na niestabilność modelu. W rezultacie zredukowano rząd zwykłej średniej ruchomej do $q = 1$, a następnie – z powodu utrzymującego się problemu – do $q = 0$.

Czwarty zbudowany model $SARIMA(1,2,0) \times (2,1,2)_4$ spełnia już warunki dotyczące wartości modułów pierwiastków (wszystkie większe od 1), jednak analiza istotności statystycznej wykazała, że parametry sezonowej średniej ruchomej Θ_1 oraz Θ_2 są nieistotne (wysokie wartości p). W związku z tym stopniowo eliminowano te składniki, najpierw zmniejszając Q do 1, a następnie – z uwagi na nieistotność także parametru Θ_1 – przyjęto wartość $Q = 0$.

Nazwa	p, q, P, Q	Moduły > 1	Wszystkie parametry istotne	Wartość kryterium AIC
Model 1	2, 2, 2, 2	NIE	NIE	2714,216
Model 2	1, 2, 2, 2	NIE	NIE	2718,043
Model 3	1, 1, 2, 2	NIE	NIE	2717,259
Model 4	1, 0, 2, 2	TAK	NIE	2757,292
Model 5	1, 0, 2, 1	TAK	NIE	2755,748
Model 6	1, 0, 2, 0	TAK	TAK	2754,182

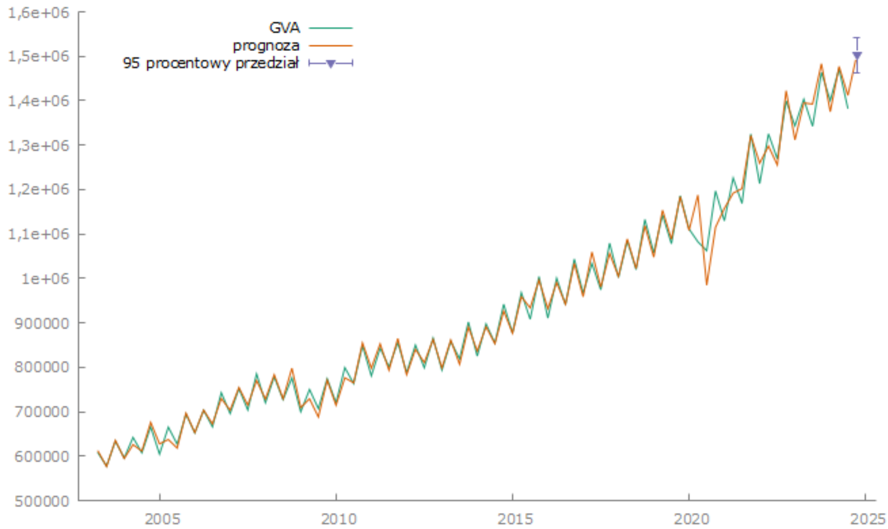
Spośród wszystkich testowanych modeli, model pierwszy charakteryzował się najniższą wartością kryterium informacyjnego AIC, jednak nie spełniał warunków stabilności oraz istotności parametrów. Z kolei model szósty, mimo nieco wyższej wartości AIC, spełnia wszystkie pozostałe wymagania – zarówno warunek stabilności (moduły pierwiastków > 1), jak i istotność statystyczną wszystkich parametrów modelu. Na tej podstawie za model najlepiej dopasowany uznaje się $\mathrm{SARIMA}(1, 2, 0) \times (2, 1, 0)_4$.

5. Wyniki prognoz

Dla prognozowania wartości zmiennej w czwartym kwartale 2024 roku wykorzystano dwa podejścia: prognozę dynamiczną oraz prognozę automatyczną (statyczną). Obie prognozy zostały oparte na modelu $\mathrm{SARIMA}(1, 2, 0) \times (2, 1, 0)_4$, a ich skuteczność oceniono zarówno na podstawie błędów ex ante, jak i dokładności ex post w oparciu o 23 wcześniejsze obserwacje.

W przypadku prognozy dynamicznej, uzyskano wartość prognozy równą 1 570 768,24 mln koron szwedzkich, przy czym prognoza odchyla się od swojej wartości prognozowanej średnio o ± 1 529 255,961 mln koron, co stanowi około 97,36% prognozowanej wartości. Tak wysoki poziom błędu jednoznacznie wskazuje na niską trafność prognozy, a jego przekroczenie dopuszczalnego progu 5% klasyfikuje ją jako niedopuszczalną do celów decyzyjnych.

Z kolei w przypadku prognozy automatycznej oszacowano wartość na poziomie 1 502 158,13 mln koron szwedzkich, przy znacznie niższym błędzie wynoszącym 20 064,49 mln koron, co świadczy o dużo lepszym dopasowaniu modelu.



Rysunek 6 Prognoza automatyczna dla czwartego kwartału 2024 r.

W celu pełniejszej oceny zastosowano miary dokładności prognoz ex post na podstawie 23 obserwacji:

Statystyka	Wartość statystyki
Średni błąd predykcji **ME**	-1845,1
Pierwiastek błędu średniokwadratowego **RMSE**	39698
Średni błąd absolutny **MAE**	29519
Średni błąd procentowy **MPE**	-0,15
Średni absolutny błąd procentowy **MAPE**	2,4505
Współczynnik Theila (w procentach) **U2**	0,47527
Udział obciążoności predykcji **UM**	0,0021603
Udział niedostatecznej elastyczności **UR**	0,085059
Udział niezgodności kierunku **UD**	0,91278

Ujemna wartość średniego błędu predykcji wskazuje na niewielkie średnie przeszacowanie prognozy. Statystyka RMSE informuje o tym, że wartości średnio odchylają się od prognoz o ± 39 698 mln koron.Średni błąd procentowy (MPE = -0,15%) jest bardzo bliski zeru, co oznacza, że prognoza jest praktycznie nieobciążona, a jego ujemny znak ponownie wskazuje na bardzo lekkie przeszacowanie. Średni absolutny błąd procentowy (MAPE = 2,45%) wskazują na bardzo dobrą trafność prognoz – zwłaszcza MAPE, która mieści się znacznie poniżej uznawanego progu 5%.

6. Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było przeprowadzenie analizy szeregów czasowych wartości dodanej brutto (GVA) dla Szwecji oraz wykonanie krótkookresowej prognozy przy użyciu programu Gretl. W wyniku przeprowadzonych testów diagnostycznych oraz analizy sezonowości zastosowano model SARIMA$(1,2,0)\times(2,1,0)_4$, który uwzględnia zarówno sezonowy, jak i niesezonowy charakter danych kwartalnych. Model został dopasowany zgodnie z wymaganiami testu Hegy, który wskazał konieczność pełnego różnicowania sezonowego. Na podstawie modelu wygenerowano dwie prognozy – dynamiczną oraz automatyczną – z których to prognoza automatyczna wykazała znacznie wyższą trafność. Wysokie dopasowanie modelu oraz niskie wartości błędów ex post potwierdzają jego przydatność w krótkookresowym prognozowaniu GVA dla gospodarki Szwecji.