Metoda Newtona

Metoda Newtona (zwana również *metodą Newtona-Raphsona* lub *metodą stycznych*) - iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji.

Rozwiązywanie równania nieliniowego

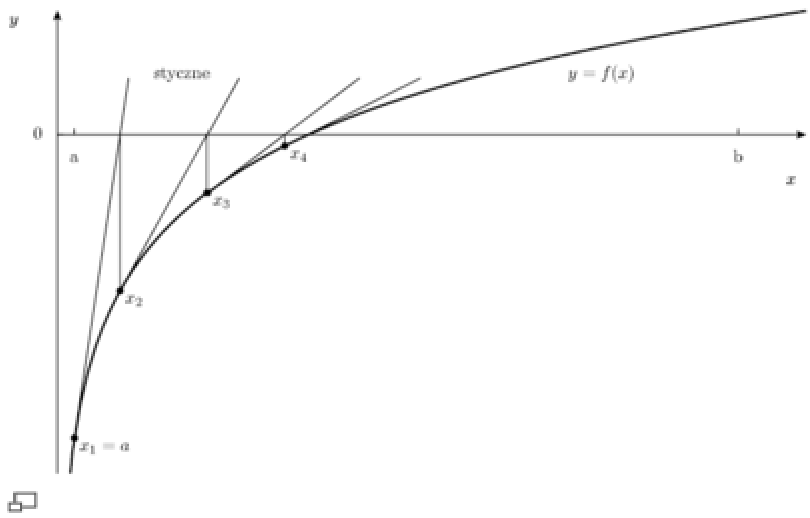
Zadaniem metody jest znalezienie pierwiastka równania zadanej funkcji ciągłej *f*:

$$\mathbb{R} \supset [a, b] \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

w przedziale [*a*,*b*]. A zatem znalezienie takiego $x^* \in [a, b]$, które spełnia następujące równanie:

$$f(x^*) = 0$$

Opis metody[edytuj]



Ilustracja działania metody Newtona, pokazane zostały 4 pierwsze kroki.

Metoda Newtona przyjmuje następujące założenia dla funkcji f:

1. W przedziale $[a, b]$znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.
2. Funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale.

W pierwszym kroku metody wybierany jest punkt startowy x_1(zazwyczaj jest to wartość $a, b, 0,$, lub 1), z którego następnie wyprowadzana jest styczna w $f(x_1)$. Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania (ozn. x_2).

Jeśli to przybliżenie nie jest satysfakcjonujące, wówczas punkt x_2 jest wybierany jako nowy punkt startowy i wszystkie czynności są powtarzane. Proces jest kontynuowany, aż zostanie uzyskane wystarczająco dobre przybliżenie pierwiastka

Kolejne przybliżenia są dane rekurencyjnym wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Szacowanie błędu

Błąd *k*-tego przybliżenia można oszacować poprzez nierówności (x* to dokładna wartość pierwiastka):

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{f(x_k)}{m}$$

lub

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{M}{2m}(x^* - x_{k-1})^2$$

gdzie stałe wyznacza się ze wzorów:

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

oraz

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Warunek stopu

Metoda Newtona wykonuje iteracyjnie obliczenia, aż do momentu gdy jej wyniki będą satysfakcjonujące. W praktyce stosowanych jest kilka kryteriów warunków stopu dla algorytmu (ε to przyjęta dokładność obliczeń):

1. **wartość funkcji w wyznaczonym punkcie jest bliska 0:** $|f(x_k)| \leqslant \epsilon$
2. **odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest dość mała:** $|x_{k+1} - x_k| \leqslant \epsilon$

3: szacowany błąd jest dostatecznie mały:
$$\frac{M}{2m}(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant \epsilon$$
4. kryterium mieszane (punkty 1 i 2 jednocześnie)

Zbieżność

Metoda Newtona-Raphsona jest metodą o **zbieżności kwadratowej** - rząd zbieżności wynosi 2 (wyjątkiem są zera wielokrotne dla których zbieżność jest liniowa i wynosi 1), zaś współczynnik zbieżności $\frac{M}{2m}$. Oznacza to, iż przy spełnionych założeniach błąd maleje kwadratowo wraz z ilością iteracji.

Metoda Newtona jest metodą rozwiązywania równań często używaną w solverach, ze względu na jej szybką zbieżność (w algorytmie liczba cyfr znaczących w kolejnych przybliżeniach podwaja się). **Wadą jej jest niestety fakt, iż wspomniana zbieżność nie musi zawsze zachodzić. W wielu przypadkach metoda bywa rozbieżna - przeważnie kiedy punkt startowy jest zbyt daleko od szukanego pierwiastka równania.**

Profesjonalne solvery wykorzystują stabilniejsze lecz mniej wydajne metody (jak np. metoda bisekcji) do znalezienia obszarów zbieżności w dziedzinie funkcji, a następnie używają metody Newtona-Raphsona do szybkiego i dokładniejszego obliczenia lokalnego pierwiastka równania. Dodatkowo solvery posiadają zabezpieczenia przed nadmierną ilością wykonywanych iteracji (przekroczenie ustalonej liczby iteracji jest równoznaczne z niepowodzeniem algorytmu w zadanym przedziale).

Przykład

Za pomocą metody Newtona można obliczyć pierwiastek $\sqrt{a}$ dla zadanej liczby $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{a} = x \iff a = x^2 \iff x^2 - a = 0$$

Funkcja *f(x)* ma postać:

$f(x) = x^2 - a$
$$f'(x) = 2x$$

Rekurencyjny wzór wynosi:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k}$$
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

Dla danych $a = 2$ i $x_0 = 1{,}5$ algorytm przebiega następująco:

$x_0 = 1{,}5$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5}) \approx 1,416666$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(1,416666 + \frac{2}{1,416666}) \approx 1,414214$$