

# Metody rozwiązywania równań nieliniowych

## Rozwiązywanie równań nieliniowych

Ogólnie równanie o jednej niewiadomej  $x$  można przedstawić w postaci

$$f(x)=0, \quad x \in R, \quad (1)$$

gdzie  $f$  jest wystarczająco regularną funkcją. Naszym celem nie jest znalezienie wzorów analitycznych na rozwiązanie powyższego równania, lecz podanie skutecznego algorytmu iteracyjnego obliczania tego rozwiązania (zakładamy, że rozwiązanie nie da się wyrazić skończonym wzorem).

Warto zwrócić uwagę na dwa problemy:

- czy proces iteracyjny jest zbieżny,
- jeśli tak, to jak szybko proces jest zbieżny.

Zwykle, jeżeli przybliżenie początkowe szukanego pierwiastka  $\mathbf{r}$  równania (1) jest dostatecznie blisko  $\mathbf{r}$ , to kolejne przybliżenia otrzymywane w procesie iteracyjnym są do niego zbieżne.

Jeżeli informacje o funkcji są skąpe, to najpierw stosujemy metodę zbieżną, niezależnie od wartości początkowych (np. metodę bisekcji, zbieżną liniowo), aż do otrzymania dobrego przybliżenia początkowego. Następnie przechodzimy do kolejnej, szybszej i efektywniejszej metody (w zależności od tego, ile razy obliczana jest wartość funkcji  $f$  i/lub jej pochodna).

## Zastosowanie:

- teoria dyfrakcji światła  $x - \operatorname{tg} x = 0$ ,
- równanie Keplera  $x - a \sin x = b$ ,
- zera wielomianów.

## Postawienie zagadnienia

Dla danej funkcji  $f: R \rightarrow R$  znaleźć wartości  $x$ , dla których  $f(x) = 0$ . Wartość początkową  $x_0$  przyjmujemy jako przybliżenie pierwiastka  $r$ , kolejne przybliżenia wyznaczamy za pomocą funkcji iteracyjnej  $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ .

## Ogólnie:

$x_{i+1} = \Phi_i(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n+1})$  – metoda  $n$ -punktowa

jeżeli funkcja  $\Phi_i$  jest stacjonarna tzn. nie zależy od  $i$ ,

stosujemy oznaczenie  $\Phi$

## Metody:

- metoda bisekcji
- metoda Newtona (stycznych)
- metoda siecznych
- reguła falsi

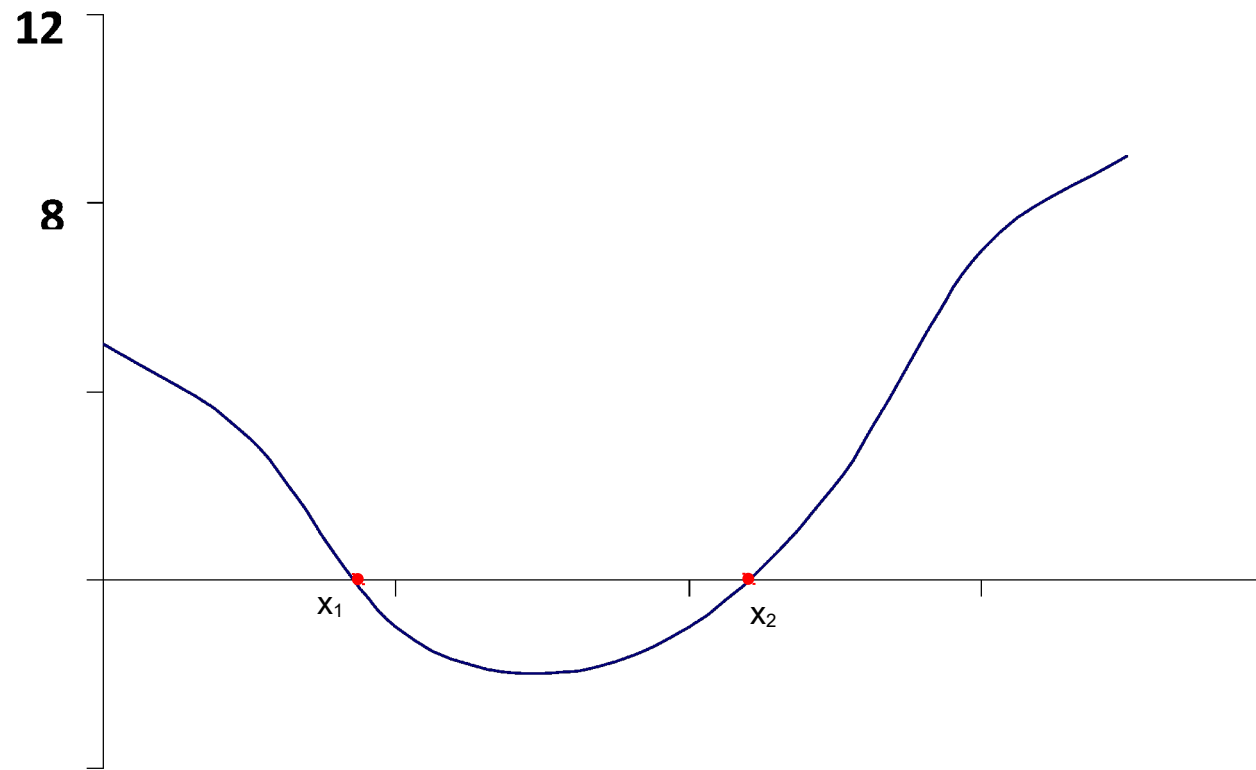
## Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego

Jeżeli funkcja  $f \in C[a, b]$  i ponadto przyjmuje różne znaki na końcach przedziału  $[a, b]$ , tzn.  $f(a)f(b) < 0$ , to funkcja  $f$  musi mieć zero w przedziale  $[a, b]$ .

Jest to konsekwencja własności Darboux funkcji ciągłych:

## Własność Darboux

Funkcja ciągła  $f$  w przedziale  $[a, b]$  przyjmuje w nim wszystkie wartości zawarte między  $f(a)$  i  $f(b)$ .



Jeżeli ponadto znak pochodnej w tym przedziale jest stały, to funkcja ma w nim dokładnie jeden pierwiastek.



**Wykładnik zbieżności metody** jest to największa liczba  $p$ ,  $p \geq 0$  taka, że dla dostatecznie dużych  $k$  jest

$$|x^* - x_{k+1}| \leq C |x^* - x_k|^p,$$

gdzie  $x^*$  to pierwiastek równania  $f(x) = 0$ , natomiast  $C$  to nieujemna stała, zwykle zależna od funkcji  $f$ , tzw. *stała asymptotyczna błędu*.

Jeżeli  $p = 1$  to mówimy o **zbieżności liniowej**, jeżeli  $p \geq 1$  to mówimy o **zbieżności ponadliniowej**.

**Metoda bisekcji** (zwana również metodą połowienia przedziału) korzysta z własności Darboux.

Jeżeli  $f(a)f(b) < 0$ , to obliczamy  $s = \frac{a+b}{2}$ .

Jeżeli  $f(s) = 0$ , to znaleźliśmy pierwiastek, jeśli nie, to:

- sprawdzamy czy  $f(a)f(s) < 0$ . Jeżeli tak, to funkcja  $f$  ma zero w przedziale  $[a, s]$ , wtedy pod  $b$  podstawiamy  $s$ .
- W przeciwnym razie jest  $f(a)f(s) > 0$ , wtedy funkcja  $f$  ma zero w przedziale  $[s, b]$ , zatem pod  $a$  podstawiamy  $s$ .

W obu przypadkach nowy przedział, dwa razy krótszy od poprzedniego, zawiera zero funkcji  $f$ , zatem postępowanie można powtarzamy, aż do otrzymania zadowalającego przybliżenia.

Metoda bisekcji pozwala na wyznaczenie jednego zera funkcji  $f$ , a nie wszystkich zawartych w przedziale  $[a, b]$ .

Błędy zaokrągleń powodują jednak, że otrzymanie zerowej wartości  $f(s)$  jest mało prawdopodobne i dlatego równość  $f(s)=0$  nie może być stosowana jako kryterium zakończenia obliczeń. Trzeba dopuścić pewną tolerancję, przykładowo żeby  $|f(s)| < 10^{-5}$ .

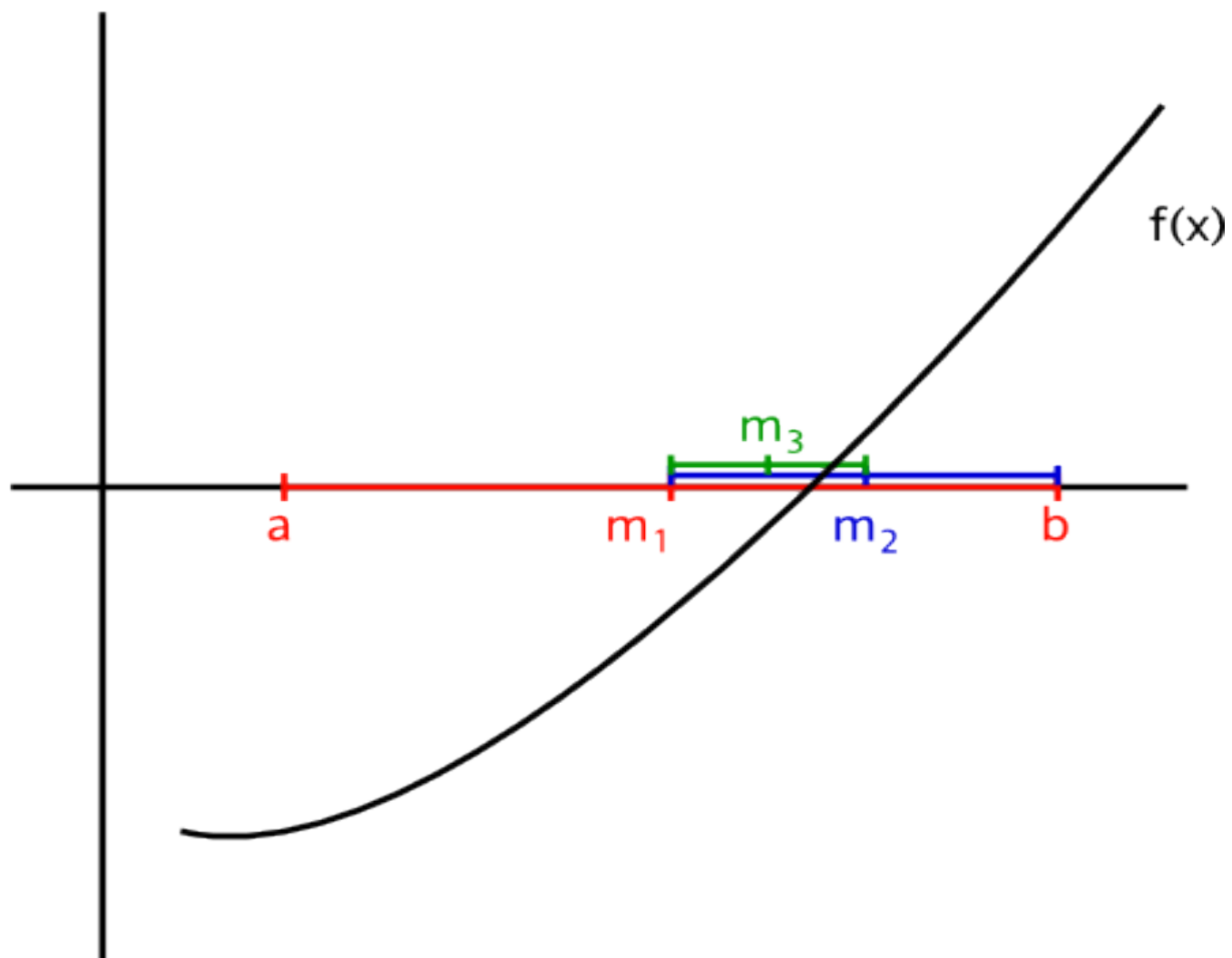
## Uwagi dotyczące algorytmu bisekcji

1. Do badania znaków na końcach przedziału należy używać funkcji `signum` (znak), a nie nierówności  $f(a)f(s) < 0$ ,

unikniemy wtedy zbędnego mnożenia i ewentualnych błędów zaokrągleń.

2. Program może uwzględniać trzy kryteria zakończenia obliczeń:

- maksymalną liczbę kroków dopuszczoną przez użytkownika (dla bezpieczeństwa),
- wartość funkcji dostatecznie bliską zeru,
- odległość między dwoma kolejnymi rozwiązaniami dostatecznie bliską zeru (dostatecznie mały błąd).



wyznaczanie przybliżeń pierwiastka  $r$

## Opis metody bisekcji

**Krok 1:** dzielimy przedział  $[a, b]$  na połowę, tzn.  $s_1 = \frac{a+b}{2}$

**Krok 2:** jeżeli  $f(s_1) = 0$  to  $s_1$  jest szukany pierwiastkiem równania i metodę kończymy

**Krok 3:** jeżeli  $f(s_1) \neq 0$  to wybieramy ten z przedziałów  $[a, s_1]$  lub  $[s_1, b]$  w którym funkcja zmienia znak

**Krok 4:** Powtarzamy kroki 1-3 dopóki nie otrzymamy żądanej dokładności  $\varepsilon$ , za szukane przybliżenie przyjmujemy środek wyznaczonego przedziału.

Faktycznie w tej metodzie można z góry określić maksymalną liczbę iteracji zapewniającą żadaną dokładność  $\varepsilon$ .

## Analiza błędu

Stosując metodę bisekcji otrzymujemy ciąg zstępujących

przedziałów  $[a_i, b_i]$ ,  $i=0,1,2,\dots$ , takich że  $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$

W celu wyznaczenia liczby kroków wystarczy rozwiązać



równanie  $\frac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$  .

Najlepszym przybliżeniem jest środek przedziału  $s = \frac{a_n + b_n}{2}$  ,

a błąd tego przybliżenia wynosi  $|r - s| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$  .

Metoda bisekcji jest dosyć wolna, zbieżna liniowo,  $p=1$  .

## Przykład

Wykonać dwa kroki algorytmu bisekcji w celu znalezienia przybliżenia pierwiastka równania  $f(x)=x^3-x+1$  w przedziale  $[-2,2]$ .

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość funkcji w końcach przedziału:  $f(-2)=-5$ ,  
 $f(2)=7$  ( $f(-2)*f(2)<0$ )

**Krok 1:** Dzielimy przedział na połowy  $s_1=(-2+2)/2=0$

**Krok 2:** obliczamy wartość  $f(s_1)=f(0)=1$  ( $f(s_1)<>0$ )

**Krok 3:** wybór podprzedziału: mamy teraz dwa przedziały  $[-2,0]$  i  $[0,2]$ . Wybieramy ten, na którego końcach znaki są różne:

$$f(-2)*f(0) = -5*1=-5 < 0 , \quad f(0)*f(2)= 1*7 = 7 > 0$$

Zatem pierwiastek leży w przedziale  $[-2,0]$ .

**Krok 4:** sprawdzamy kryterium kończenia obliczeń – u nas liczba kroków ma być 2, zatem powtarzamy algorytm od początku:

**Krok 1:** Dzielimy przedział na połowy  $s_2=(-2+0)/2=-1$

**Krok 2:** obliczamy wartość  $f(s_2)=f(-1)=1$  ( $f(s_2) \neq 0$ )

**Krok 3:** wybór podprzedziału: mamy teraz dwa przedziały  $[-2,-1]$  i  $[-1,0]$ . Wybieramy ten, na którego końcach znaki są różne:

$$f(-2)*f(-1) = -5*1=-5 < 0 , \quad f(-1)*f(0)= 1*1 = 1 > 0$$

Zatem pierwiastek leży w przedziale  $[-2,-1]$ .

**Krok 4:** sprawdzamy kryterium kończenia obliczeń, krok =2,  
zatem przybliżenie szukanego pierwiastka to

$$x^*=(-2-1)/2=-3/2$$

**Przykład 2** Rozwiązując równanie  $x^2-5=0$  wyznaczyć dwa kolejne przybliżenia wartości  $\sqrt{5}$  metodą bisekcji, przedział początkowy  $[a, b]=[0, 5]$ . Podać interpretację graficzną.

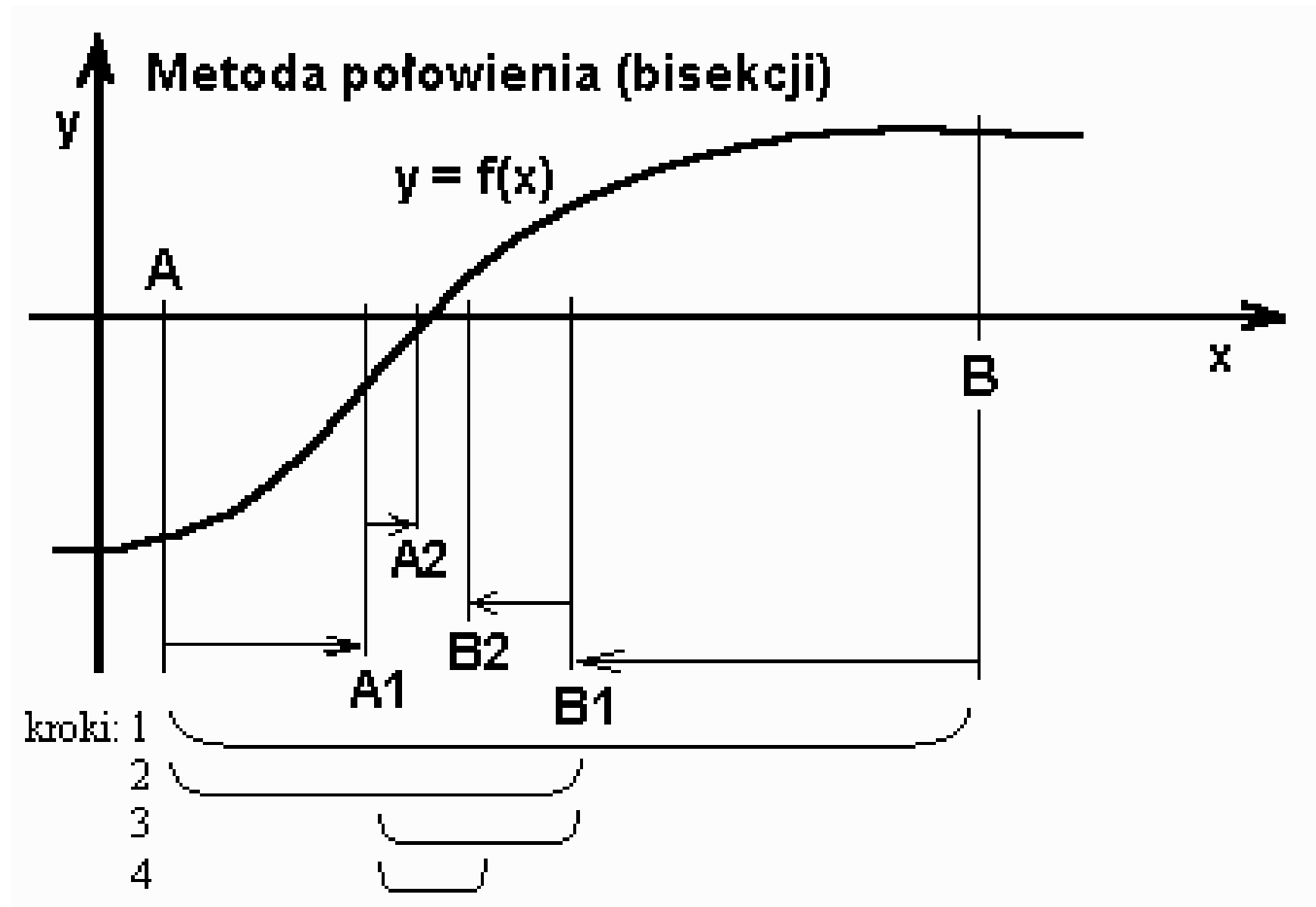
## Algorytm

```
double f(double x);  
//zwraca wartość funkcji f(x), f(x)=0
```

---

```
bool bisect(double a, double b, double eps,  
double delta, int maxiter, double &r)  
{  
    double fa = f(a);  
    double fb = f(b);  
    double s, fs;  
    int iter = 0;  
    if (fabs(fa) < eps) {r = a; return true;}  
    if (fabs(fb) < eps) {r = b; return true;}
```

```
if (sign(fa) == sign(fb) ) return false;
do {
    s = 0.5 * (a + b);
    fs = f(s);
    if (sign(fa ) != sign( fs))
        { b = s; fb = fs; }
    else
        { a = s; fa = fs; }
    iter = iter + 1;
}
while ((fabs(fs) > eps) &&
      (fabs(b-a) > delta) && (iter < maxiter));
r = 0.5 * (a + b);
return true; }
```



**Metoda Newtona** (zwana również *metodą stycznych*)

algorytm iteracyjny wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji.

Metoda Newtona jest szybsza od metody bisekcji, gdyż jej zbieżność jest kwadratowa. Gdy przybliżenie początkowe  $x_0$  jest dostatecznie blisko pierwiastka  $r$ , wystarczy kilka kroków metody, by osiągnąć zadowalającą dokładność rozwiązania (*zbieżność lokalna*). Niestety, metoda ta nie zawsze jest zbieżna - bywa rozbieżna, kiedy punkt startowy jest zbyt daleko od szukanego pierwiastka równania.



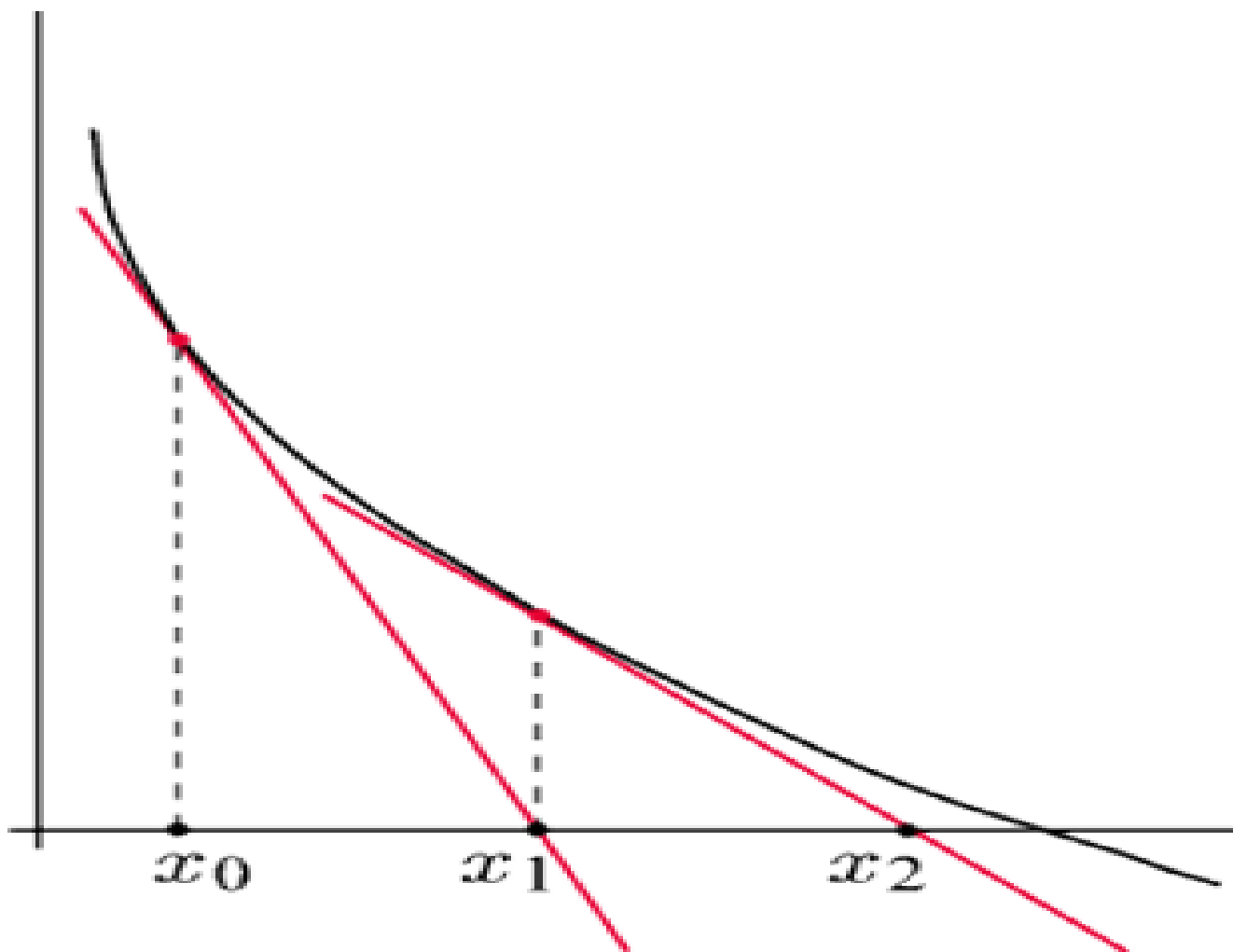
Metoda Newtona opiera się na linearyzacji funkcji  $f$ , tj. zastąpieniu jej funkcją liniową - styczną. Kolejne przybliżenia to odcięte punktu przecięcia tej stycznej z osią  $OX$ .

**Równanie stycznej w punkcie  $(x_n, f(x_n))$ :**

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Punkt przecięcia z osią  $OX$ :  $y = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$

$$\text{Stąd } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Wyznaczanie przybliżeń pierwiastka  $r$  metodą Newtona

**Metoda Newtona** zaczyna od przybliżenia  $x_0$  zera  $r$  i polega na stosowaniu formuły:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\dots$$

## **Opis metody Newtona**

**Krok 1:** wybieramy punkt  $x_0 \in [a, b]$

**Krok 2:** kolejne przybliżenia obliczamy ze wzoru

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots$$

## Algorytm

```
bool Newton(double x, double eps, double delta,
            int maxiter, double & r)
{
    int iter = 0; bool b;
    double xk, d, fp, fx = f(x);
    r = x;
if (fabs(fx)<eps) return 1;//x0 jest pierwiastkiem
do
{
    fp = fprim(x);//obliczamy pochodna
    if (fabs(fp) < eps) return 0;
    d = fx/fp;
    xk = x - d;  fx = f(xk);
```

```
    b = (fabs(fx) < eps);  
    x = xk;  iter = iter + 1;  
}  
while ((!b) && (fabs(d) >= delta) &&  
        (iter < maxiter));  
  
    if (b || fabs(d) < delta) /*petla sie skonczyla  
bo albo wartość funkcji w wyznaczonym punkcie  
jest bliska 0 albo odległość pomiędzy kolejnymi  
przybliżeniami jest dość mała */  
    {    r = x;  
        return 1;  
    }  
    else    return 0;  
}
```

## Zbieżność metody Newtona

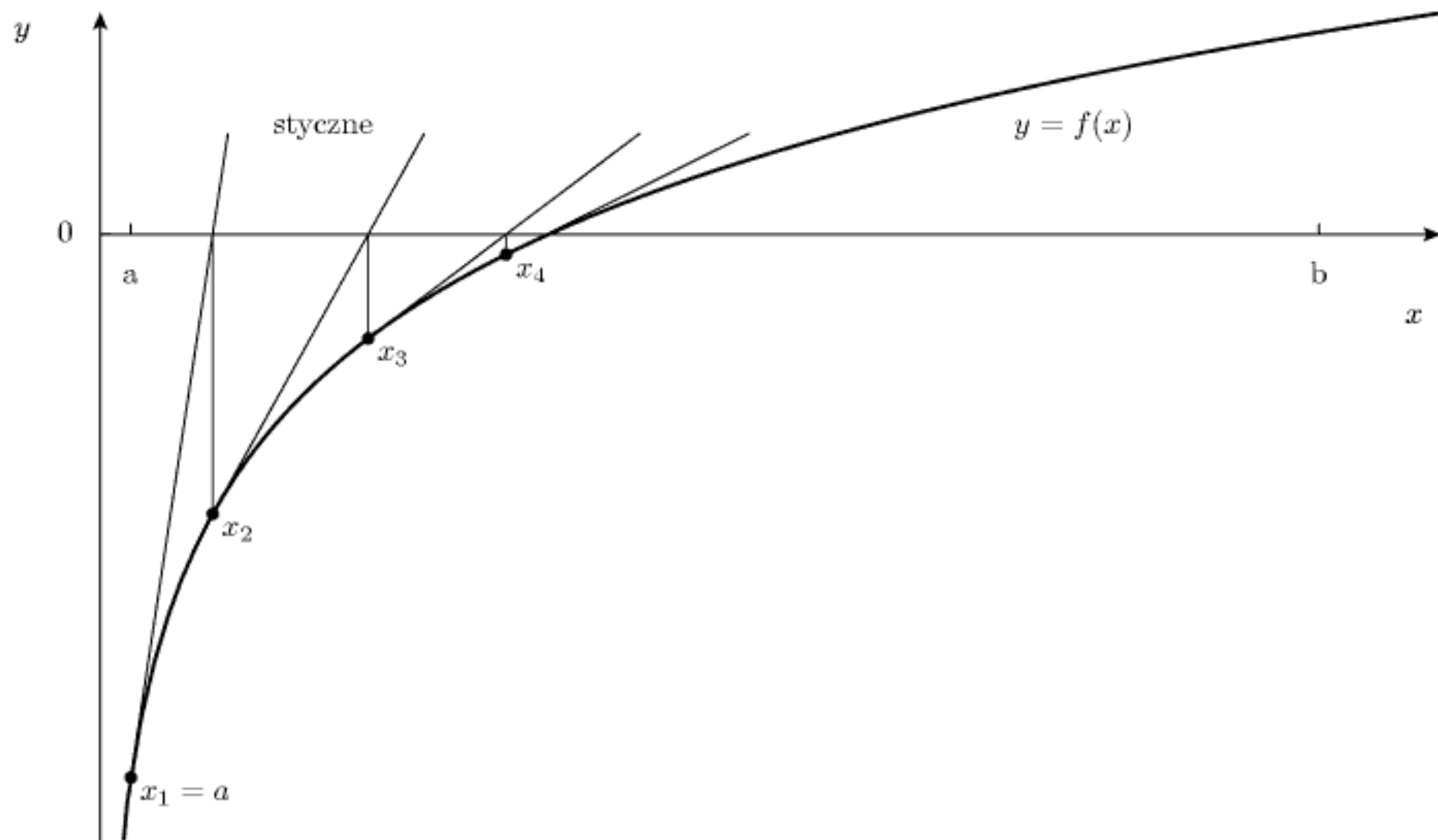
Metoda Newtona może nie być zbieżna, Jeżeli jest zbieżna, to jest zbieżna kwadratowo,  $p=2$ .

## Przykłady

1. Wykazać, że efektywna metoda obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby  $R$  dana jest wzorem

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{R}{x_n} \right)$$

2. Wykonać trzy kroki obliczeniowe wyznaczania pierwiastka równania  $x^2 - 9 = 0$  metodą bisekcji w przedziale  $[1, 10]$  oraz metodą Newtona, przyjmując  $x_0 = 10$ . Podać interpretację graficzną wyznaczania kolejnych przybliżeń.
3. Wykorzystując odpowiednie równanie kwadratowe wyznaczyć dwa kolejne przybliżenia wartości  $\sqrt{5}$  metodą Newtona, przyjmując  $x_0 = 5$ . Podać interpretację graficzną.
4. Korzystając z metody Newtona wyznacz  $\sqrt{5}$  z dokładnością  $\varepsilon_x = 0.01$





## Metoda siecznych (metoda Eulera)

metoda iteracyjna, oparta na podobnym pomysle linearyzacyjnym co metoda Newtona.

Ponieważ w praktyce pochodna funkcji  $f$  nie zawsze jest znana, to zamiast przybliżenia wykresu styczną, stosuje się przybliżenie sieczną, tj. pochodną zastępujemy ilorazem różnicowym

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

a kolejne przybliżenia wyznaczamy ze wzoru

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]}, \quad n = 1, 2, \dots$$

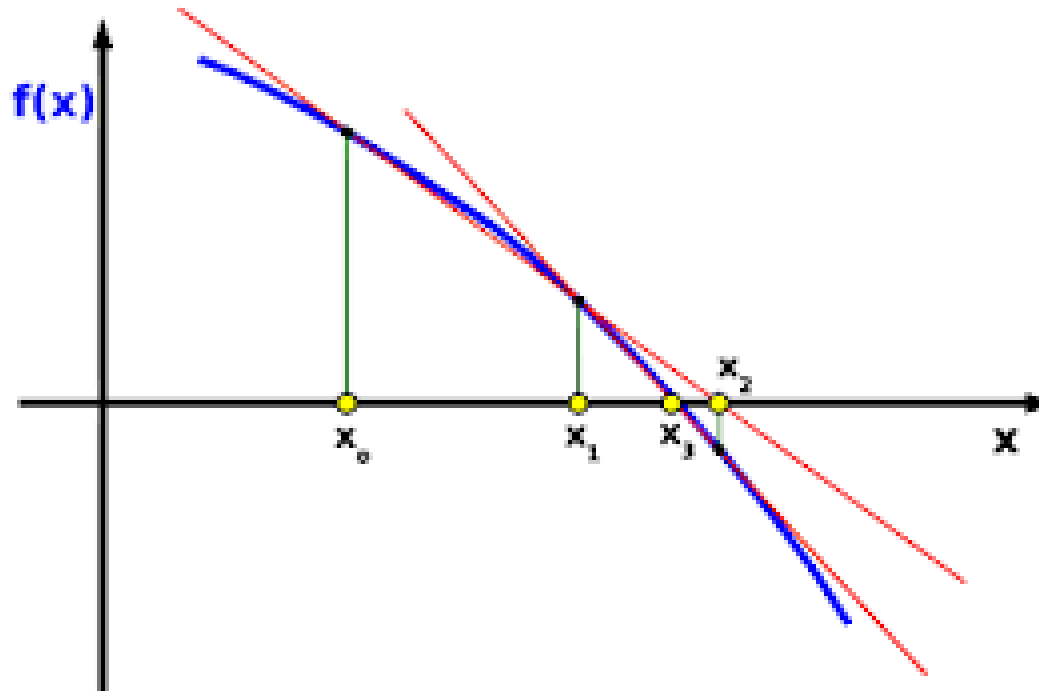
gdzie  $x_0, x_1$  to dwa kolejne przybliżenia pierwiastka.

Jako wariant metody Newtona, metoda siecznych jest również zbieżna lokalnie. Wykładnik zbieżności metody siecznych dla zer jednokrotnych i dostatecznie gładkich funkcji wynosi

$$p^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$$

## Interpretacja geometryczna

Przybliżenia to punkty przecięcia siecznej wyznaczonej przez punkty  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  oraz  $(x_n, f(x_n))$  z osią  $OX$ .



## Przykłady

1. Wyznacz dwa kolejne przybliżenia liczby  $\sqrt{3}$  metodą siecznych przyjmując jako dwa kolejne przybliżenia początkowe
  - a)  $x_0=1, x_1=2$
  - b)  $x_0=2, x_1=3$
2. Metodą siecznych wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f(x)=x^3+x^2-3x-3$  w przedziale  $[1,2]$  z dokładnością
  - a)  $|x_{k+1}-x_k| < \varepsilon_x=0,1$
  - b)  $|f(x_{k+1})| < \varepsilon_f=0,001$przyjmując  $x_0=a=1, x_1=b=2$ .

## Metoda regula falsi

Metoda regula falsi polega na konstruowaniu metodą siecznych dwóch monotonicznych, ograniczonych ciągów  $\{s_n\}$  i  $\{u_n\}$  spełniających warunek  $f(s_n)f(u_n) < 0$ .

**Krok 1:** stosując metodę siecznych otrzymujemy:

$$x_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f[s_n, u_n]}$$

**Krok 2:** jeżeli  $f(x_{n+1})=0$  kończymy algorytm i przyjmujemy  $x_{n+1}$  za szukany pierwiastek, w przeciwnym razie

- jeżeli  $f(s_n)f(x_{n+1})<0$  przyjmujemy

$$s_{n+1} = s_n$$

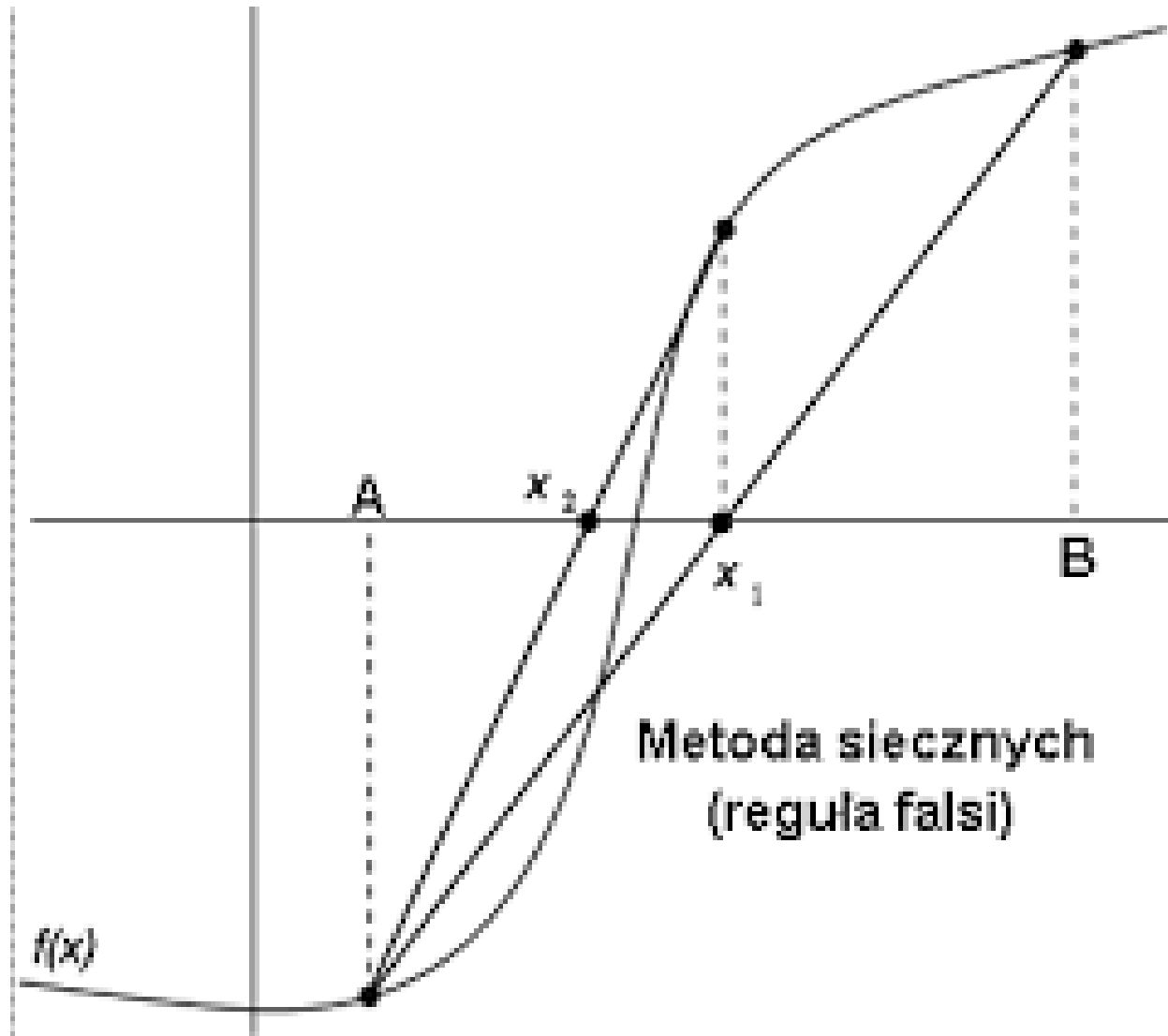
$$u_{n+1} = x_{n+1}$$

- jeżeli  $f(x_{n+1})f(u_n)<0$  przyjmujemy

$$s_{n+1} = x_{n+1}$$

$$u_{n+1} = u_n$$

**Krok 3:** Zastępujemy  $n$  przez  $n+1$  i wracamy do kroku pierwszego.



Metoda zawsze zbieżna, jeśli tylko dobrze wybrano przedział początkowy. Wolna zbieżność  $p=1$  (metoda liniowa) .

Opisana w hinduskim tekście Vaishali Ganit (III w. p.n.e.)

## Przykłady

1. Zapisać odpowiednie równanie kwadratowe i wykorzystując je wyznaczyć dwa kolejne przybliżenia wartości  $\sqrt{5}$  metodą regula falsi, przyjmując przedział początkowy  $[s_0, u_0] = [0, 4]$  .



2. Wykonaj dwa kroki metody *regula falsi* w celu przybliżenia zera funkcji  $f(x)=x^2-3$  przyjmując  $s_0=1, u_0=2$ .
3. Metoda regula falsi wyznacz pierwiastek równania  $x^2-2=0$  z dokładnością  $\varepsilon_x=0,1$  przyjmując  $s_0=-1, u_0=2$ .
4. Wyznacz przy pomocy metody regula falsi dwa kolejne przybliżenia  $x_1, x_2$  pierwiastka funkcji  $f(x)=2-1/x$  przyjmując  $s_0=1/4, u_0=1$