МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Кафедра «Интеллектуальные информационные технологии»

Головко В.А., Войцехович Л.Ю.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ»

Нейросетевые методы аппроксимации и прогнозирования функции

для студентов специальности «Автоматизированные системы обработки информации»

БРЕСТ – 2009

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТРЕБОВАНИЯ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

Целью курсового проекта является исследование применения нейронных сетей в задачах аппроксимации и прогнозирования функций.

В задании дана функция, заданная в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, например:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + z^2, \\ \dot{y} &= x + 0{,}5 \cdot y, \\ \dot{z} &= x - z. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В курсовом проекте необходимо рассмотреть несколько вариантов нейронных сетей, которые могут быть применены для аппроксимации и прогнозирования функции (1.1). Всю работу можно разбить на ряд этапов:

1. Генерирование обучающей выборки. На первом этапе необходимо сгенерировать обучающую выборку, значения из которой будут использоваться для обучения, а также для проверки обобщающей способности сетей. По эталонным точкам требуется построить график функции (1.1) в трехмерном пространстве и его проекции на плоскости *XY*, *XZ* и *YZ*; графики зависимостей *X(t), Y(t)* и *Z(t).*
2. Проектирование нейронных сетей. На этапе проектирования нейронных сетей необходимо описать архитектуру и алгоритм обучения каждой из используемых сетей.
3. Разработка программного обеспечения. После этапа проектирования нейронных сетей необходимо разработать программное обеспечение, реализующее обучение этих сетей, а также отображение результатов их обучения.
4. Тестирование нейронных сетей. С помощью разработанного программного обеспечения требуется провести тестирование сетей, подбирая при этом их параметры таким образом, чтобы обеспечивалась минимальная погрешность аппроксимации и прогнозирования функции (1.1). Необходимо провести анализ нейронных сетей с точки рения точности выполнения ими поставленной задачи.

2. ГЕНЕРИРОВАНИЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ

Ввиду невозможности аналитического расчета системы (1.1) для ее решения необходимо использовать приближенные численные методы, которые позволяют для заданной последовательности $t_0, t_1, t_2, \ldots t_n$ и начальных условий $X(t_0), Y(t_0), Z(t_0)$, не определяя точного решения системы:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = \theta(t)$$

вычислить приближенные значения:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n,$$
$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n,$$
$$z_0, z_1, z_2, \ldots z_n,$$

совокупность которых и образует обучающую выборку.

Для численного решения системы (1.1) может использоваться метод Рунге-Кутта 4-го порядка. Метод позволяет решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка следующего вида:

$$\dot{X} = f(t, X, Y, \ldots),$$
$$\dot{Y} = g(t, X, Y, \ldots),$$
$$\ldots,$$

которые имеют решение:

$$X = X(t),$$
$$Y = Y(t),$$
$$\ldots,$$

где t - независимая переменная (например, время); X, Y и т.д. – искомые функции (зависимые от t переменные). Функции f, g и т.д. – заданы. Также предполагаются заданными и начальные условия, т.е. значения искомых функций в начальный момент времени.

Метод Рунге-Кутта заключается в рекуррентном применении следующих формул:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \ldots,$$

где

$$k_1 = f(t_k, X_k, Y_k, \ldots)\Delta t,$$
$$m_1 = g(t_k, X_k, Y_k, \ldots)\Delta t, \ldots,$$
$$k_2 = f(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_1}{2}, Y_k + \frac{m_1}{2}, \ldots)\Delta t,$$
$$m_2 = g(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_1}{2}, Y_k + \frac{m_1}{2}, \ldots)\Delta t, \ldots,$$
$$k_3 = f(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_2}{2}, Y_k + \frac{m_2}{2}, \ldots)\Delta t,$$
$$m_3 = g(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_2}{2}, Y_k + \frac{m_2}{2}, \ldots)\Delta t, \ldots,$$
$$k_4 = f(t_k + \Delta t, X_k + k_3, Y_k + m_3, \ldots)\Delta t,$$
$$m_4 = g(t_k + \Delta t, X_k + k_3, Y_k + m_3, \ldots)\Delta t, \ldots$$

В результате решения системы (1.1) методом Рунге-Кутта были получены эталонные значения *X(t)*, *Y(t)* и *Z(t)* на отрезке [0, 100] с шагом дискретизации $\Delta t = 0{,}1$. Для обучения нейронных сетей будем использовать 2/3 полученных значений, а на оставшихся значениях будет исследоваться обобщающая способность сетей.

Первые десять значений, полученные методом Рунге-Кутта, представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Обучающая выборка функции

t	*X (t)*	*Y (t)*	*Z (t)*
0.00000	0.10000000000000001	0.10000000000000001	1.00000000000000000
0.10000	0.18089644715720160	0.11964482493070674	0.91840650421893810
0.20000	0.24574769883562841	0.14775110057117946	0.85147637244613472
0.30000	0.29702356260137225	0.18324082868064104	0.79641410793938883
0.40000	0.33641348196009319	0.22519196876641021	0.75088534082397240
0.50000	0.36505690724770484	0.27277885698579341	0.71291050554931046
0.60000	0.38370337504346685	0.32522937515904637	0.68078693248612299
0.70000	0.39282560995452331	0.38179379007250974	0.65303116611736001
0.80000	0.39270174978286038	0.44172467741763971	0.62833855832391028
0.90000	0.38347314197414878	0.50424919271638946	0.60554033241769956
1.00000	0.36519501254258818	0.56857276002082391	0.58359544882926806

Для моделирования метода Рунге-Кутта может использоваться любое стандартное программное обеспечение.

По рассчитанным точкам необходимо построить следующие графики функции:

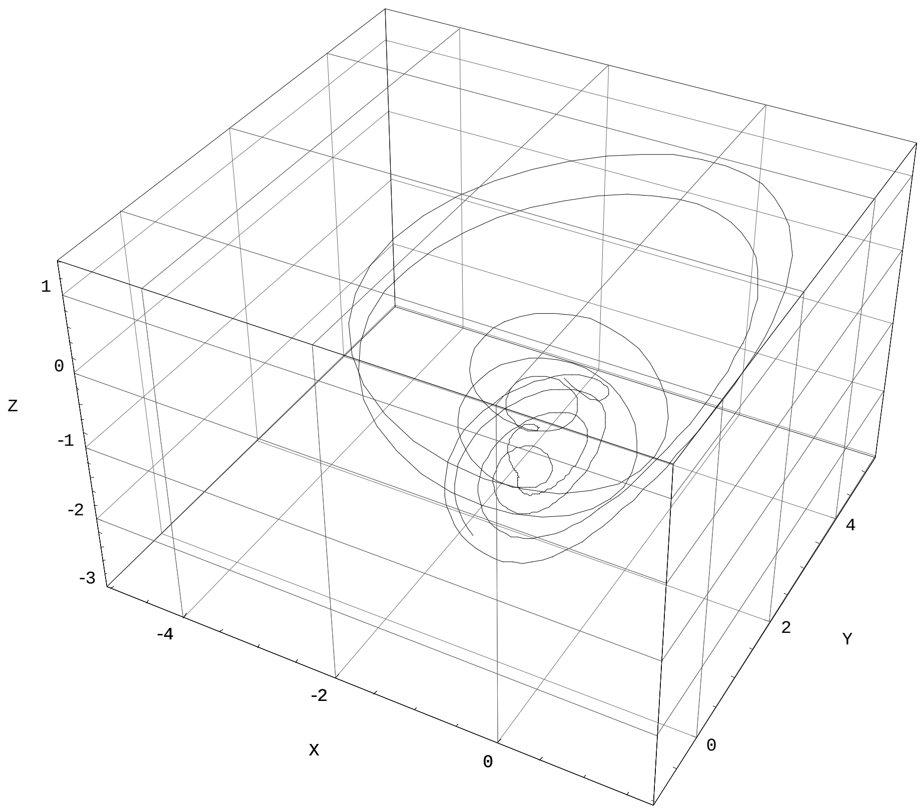

Рис. 2.1. График функции в трехмерном пространстве

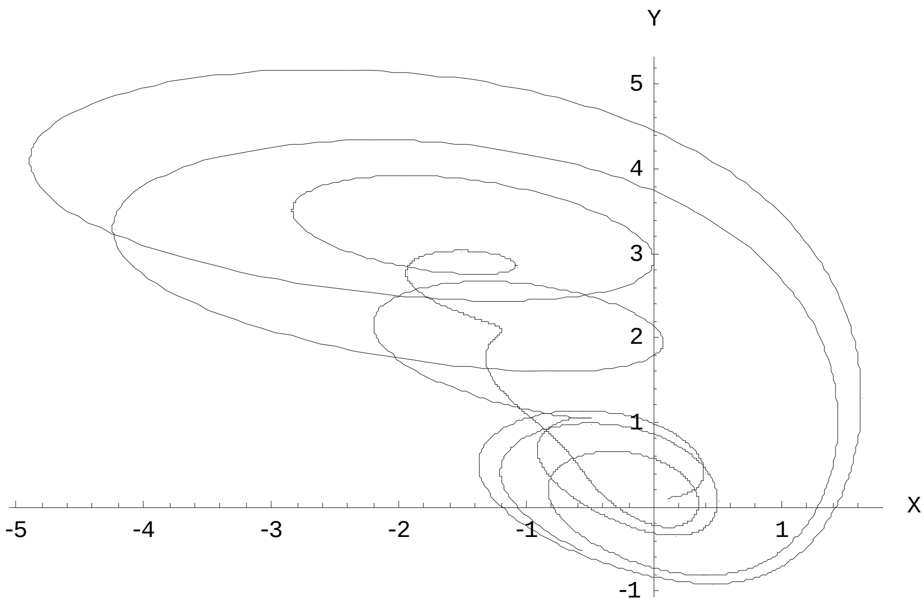

Рис. 2.2. Проекция функции на плоскость *XY*

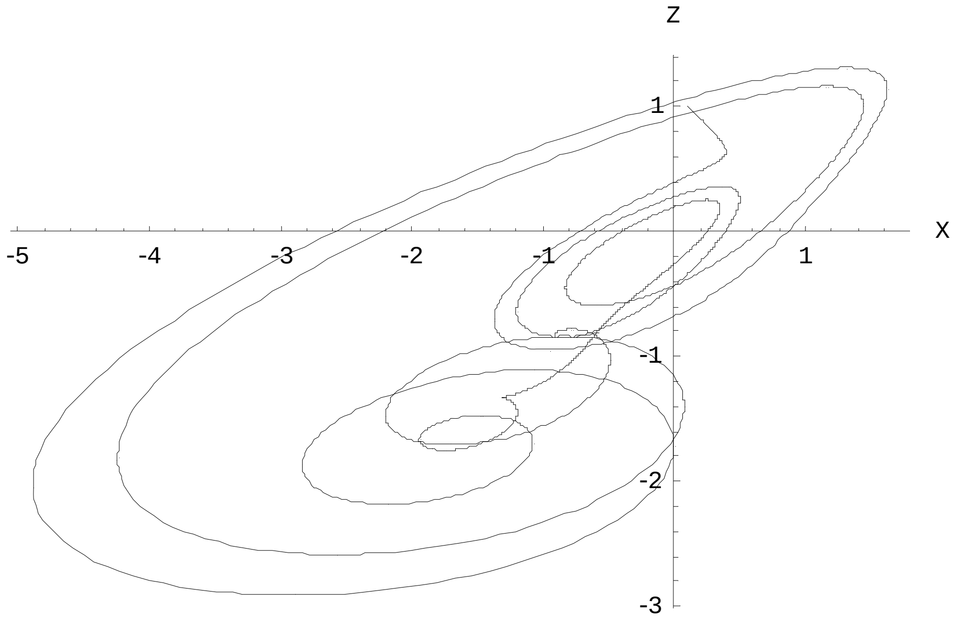

Рис. 2.3. Проекция функции на плоскость *XZ*

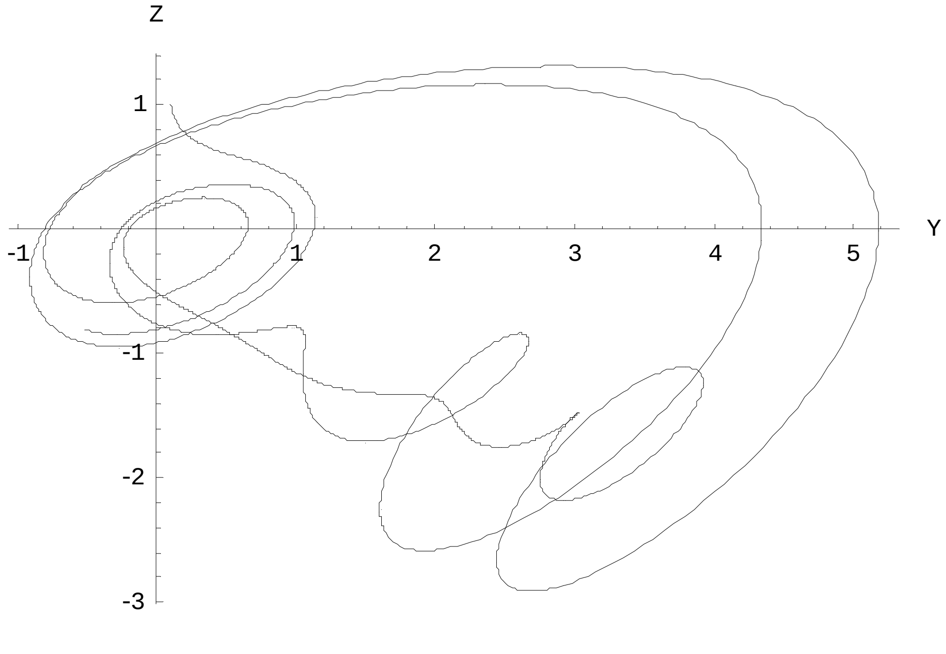

Рис. 2.4. Проекция функции на плоскость *YZ*

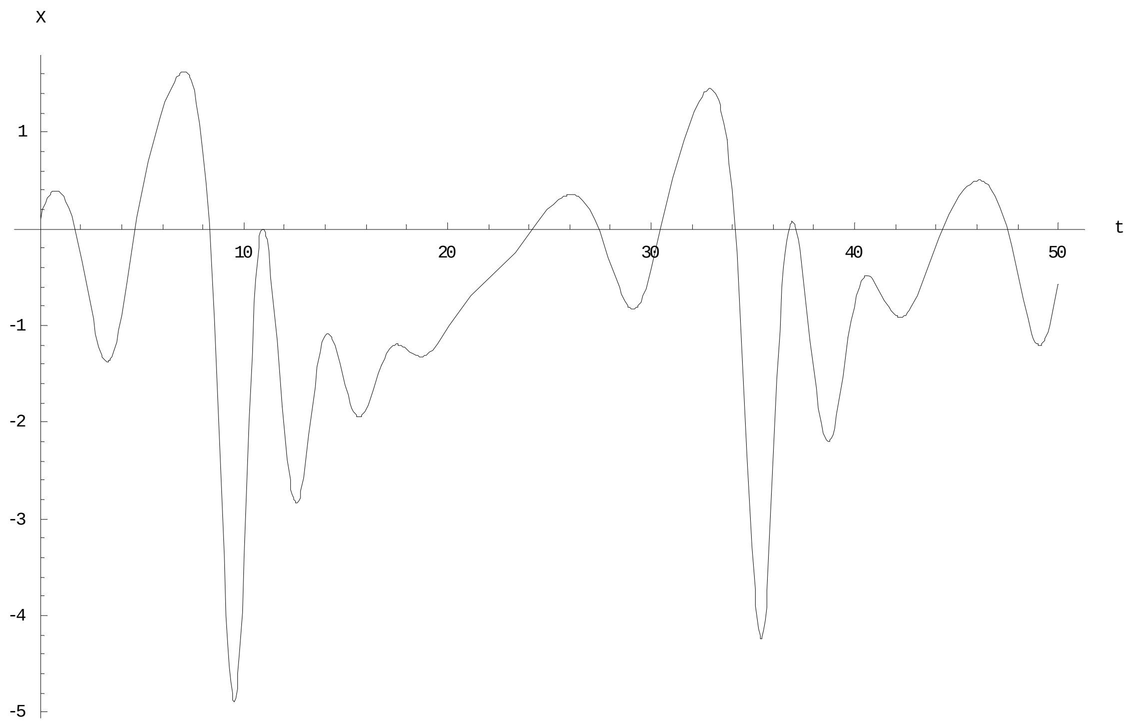

Рис. 2.5. Зависимость *X(t)*

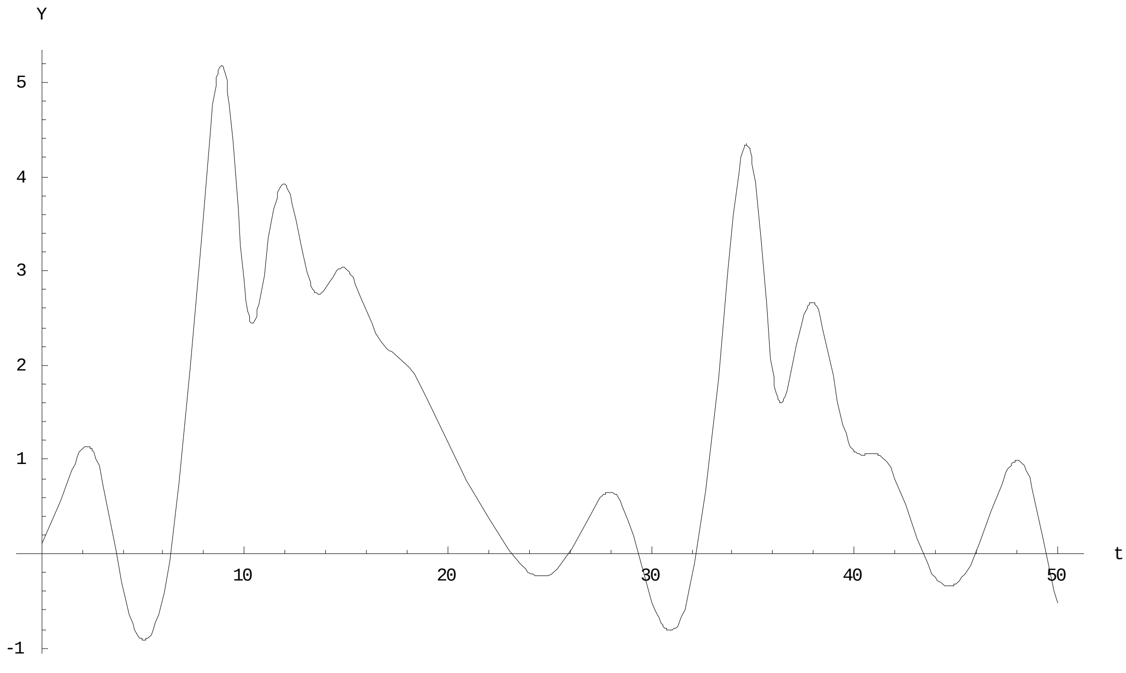

Рис. 2.6. Зависимость *Y(t)*

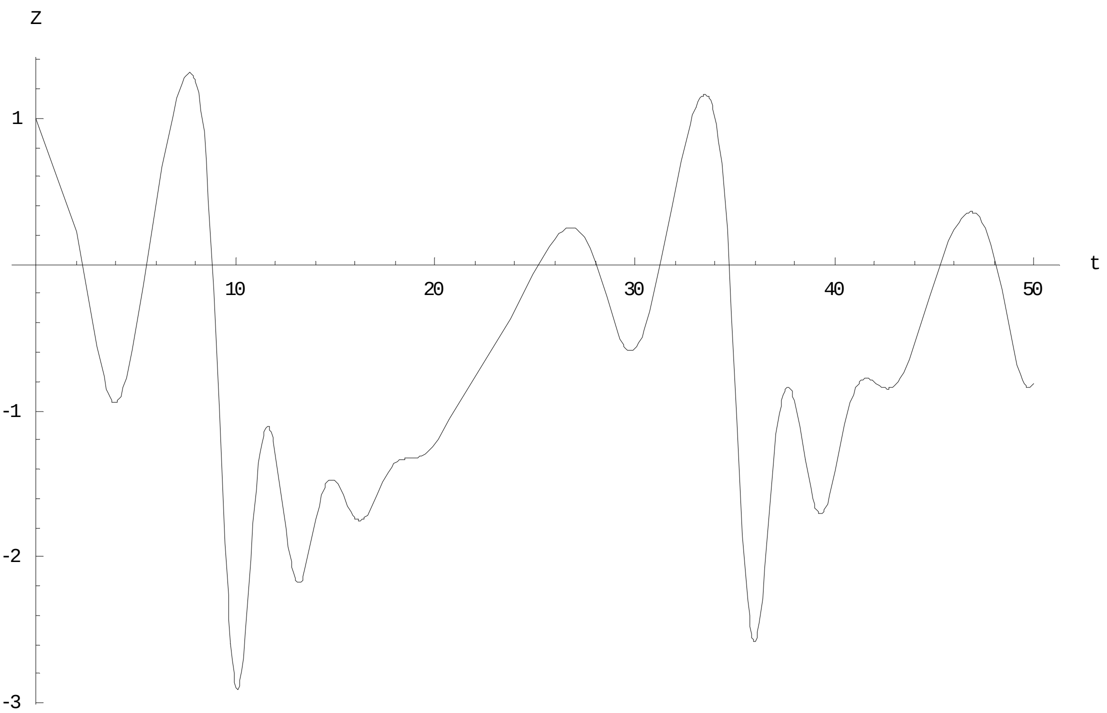

Рис. 2.7. Зависимость *Z(t)*

Таким образом, обучающая выборка сформирована, можно переходить к следующему этапу – проектированию нейронных сетей и алгоритмов обучения.

3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И АЛГОРИТМОВ ОБУЧЕНИЯ

Для решения поставленной задачи будем использовать многослойные нейронные сети, так как подобного рода сети наилучшим образом подходят для решения задач аппроксимации и прогнозирования функций.

В курсовом проекте необходимо рассмотреть следующие нейронные сети для аппроксимации и прогнозирования функции:

1. Многослойный персептрон с тремя нейронными элементами в распределительном и тремя нейронными элементами в выходном слое (рис. 3.1):

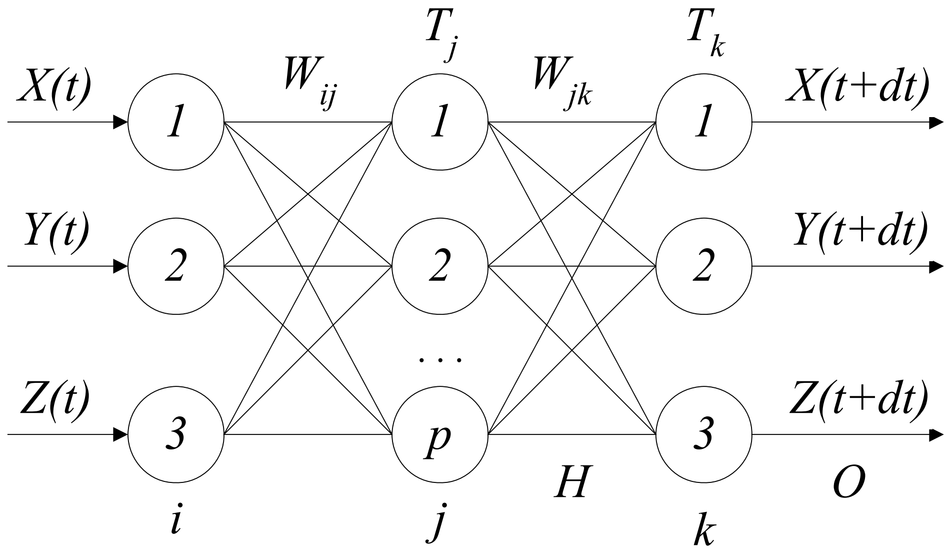

Рис. 3.1. Многослойный персептрон (3/*p*/3)

Число нейронов в скрытом слое *j* определяется экспериментально с целью достижения наилучших результатов аппроксимации и прогнозирования.

На вход сети подаются значения *X(t)*, *Y(t)* и *Z(t)*, а выходными значениями сети будут значения *X*, *Y* и *Z* в следующий момент времени – $X(t+\Delta t)$, $Y(t+\Delta t)$ и $Z(t+\Delta t)$.

2. Многослойный персептрон с шестью нейронными элементами в распределительном и тремя нейронными элементами в выходном слое (рис. 3.2):

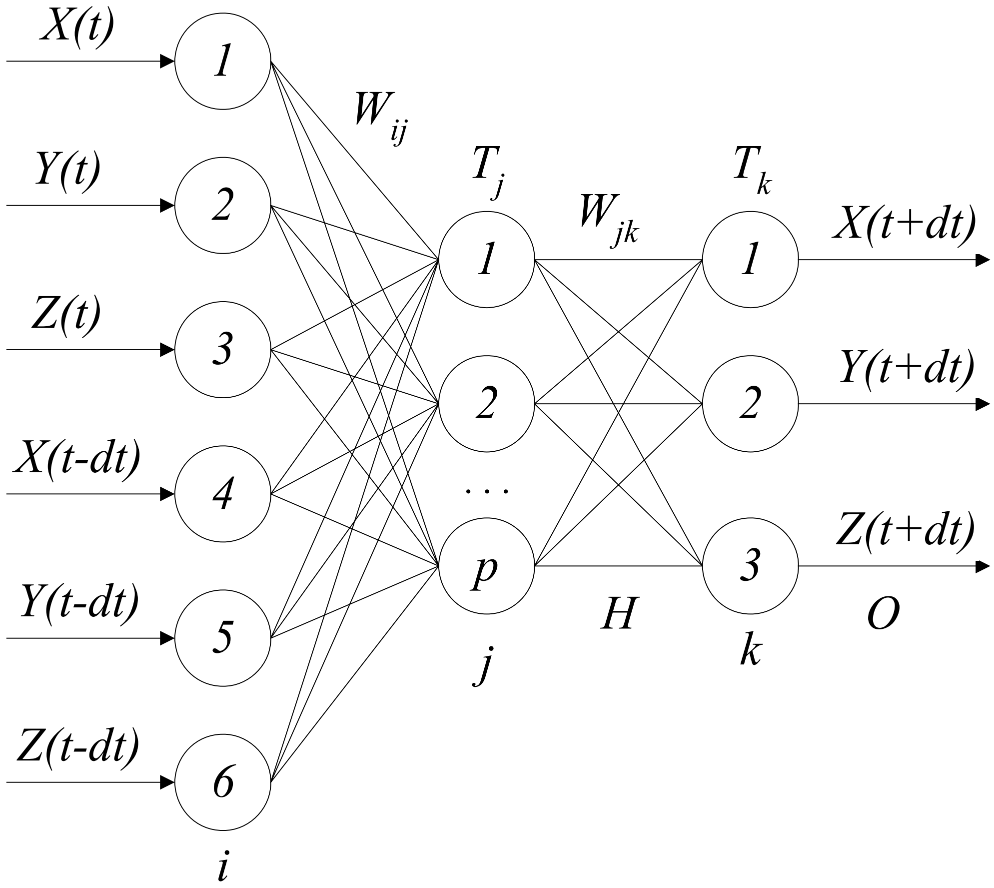

Рис. 3.2. Многослойный персептрон (6/*p*/3)

Здесь количество нейронных элементов в скрытом слое *j* также изначально неизвестно, оптимальное их количество определяется экспериментальным путем.

На вход сети помимо значений *X(t)*, *Y(t)* и *Z(t)* будем подавать значения *X(t-Δt)*, *Y(t-Δt)* и *Z(t-Δt)*. Такая форма обучения называется обучением с запаздыванием. На выходе сети будем получать значения *X*, *Y* и *Z* в момент времени *t+Δt*: *X(t+Δt)*, *Y(t+Δt)* и *Z(t+Δt)*.

3. Многослойный персептрон с *n* нейронными элементами в распределительном, *p* нейронами в скрытом и одним нейронным элементом в выходном слое (рис. 3.3):

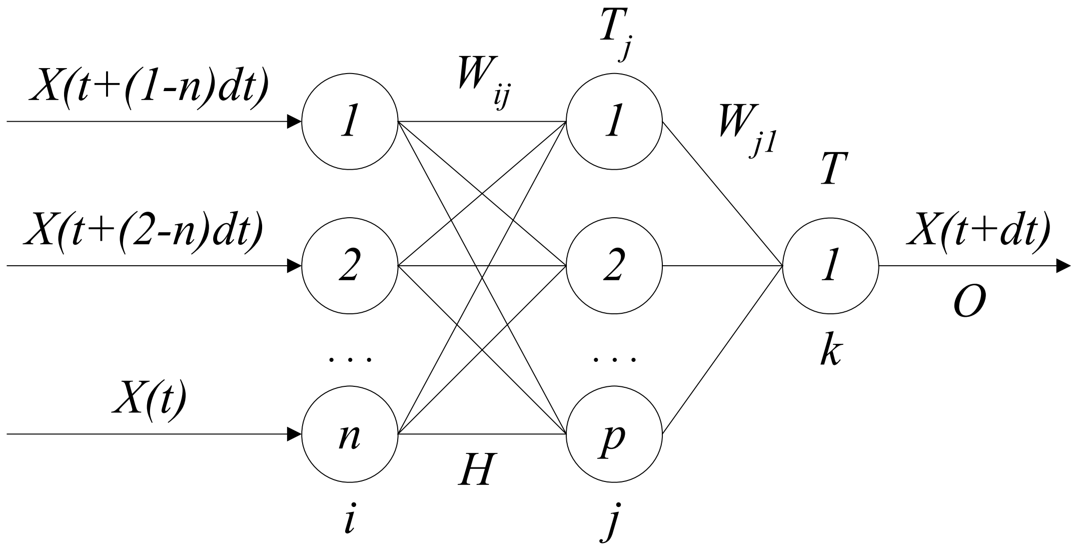

Рис. 3.3. Многослойный персептрон ($n/p/1$)

В курсовом проекте необходимо использовать три таких нейронных сети: для ряда $X(t)$, для ряда $Y(t)$ и для ряда $Z(t)$.

Число нейронов во входном слое, а также размерность промежуточного слоя подбираются так, чтобы погрешность аппроксимации и прогнозирования была минимальной.

Для обучения таких сетей используется метод «скользящего окна». Суть метода «скользящего окна» состоит в том, что в каждый момент времени на вход сети подаются значения временного ряда $A(t+(1-n)\Delta t)..A(t)$, при этом полученное на выходе значение сравнивается со значением $A(t+\Delta t)$, где n – размерность «окна».

4. ТЕСТИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью этого этапа курсового проекта является определение тех параметров нейронных сетей, которые не были определены на этапе проектирования. Для сетей MLP 3/*p*/3 и MLP 6/*p*/3 необходимо определить число нейронных элементов в скрытом слое, а для сети MLP *n*/*p*/1 еще и размерность входного слоя. Главным критерием, на основании которого будем определять эти параметры, является ошибка аппроксимации и прогнозирования функции (1.1), причем нейронная сеть должна обладать как достаточной точностью аппроксимации функции, так и приемлемой точностью прогнозирования. Точность аппроксимации и прогнозирования функции (1.1) нейронной сетью должна определяться как визуально по степени сходства оригинального графика функции и графика, построенного по выходным значениям нейронной сети, так и аналитически на основе расчета суммарной квадратичной ошибки.

Также на данном этапе необходимо провести сравнительный анализ полученных результатов, на основании чего определить нейронную сеть, которая наилучшим образом подходит для решения поставленной задачи.

Ниже приведен пример результатов визуальной аппроксимации и прогнозирования функции (1.1):

1. Многослойный персептрон (3/*p*/3):

Параметры обучения:

- Число нейронных элементов в скрытом слое p = 50;
- Обучающая выборка L = 334 на отрезке [0, 33.4];
- Желаемая ошибка сети E_m = 0,0001;
- Шаг обучения α = 0,01.

Нейронная сеть была обучена за 456823 итерации, при этом время обучения составило 44 минуты 18 секунд.

Результаты аппроксимации функции:

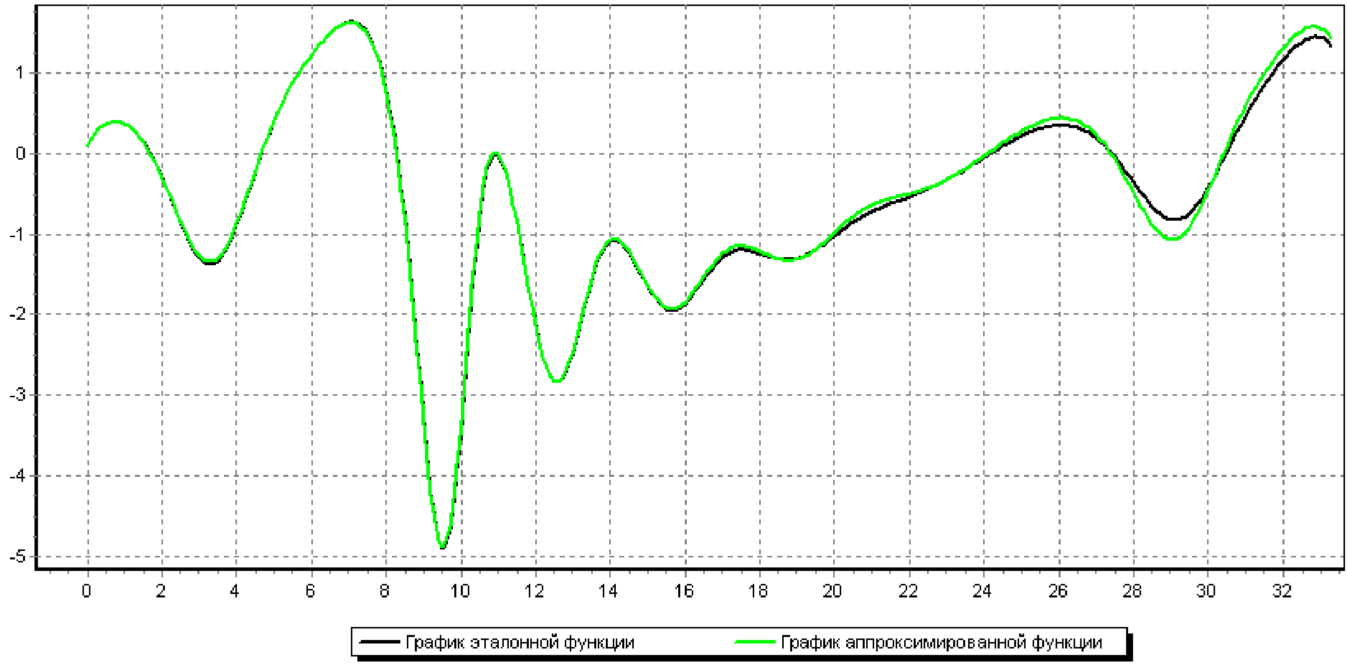

Рис. 4.1. Зависимость *X(t)*

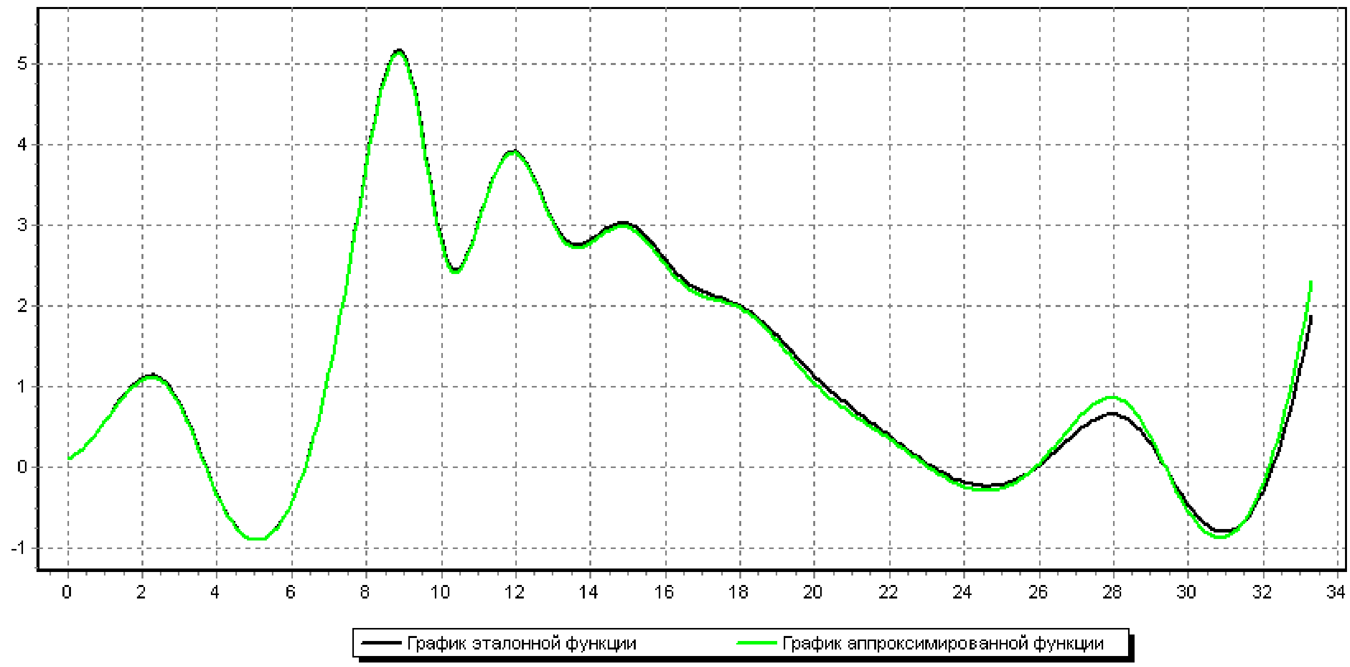

Рис. 4.2. Зависимость *Y(t)*

Рис. 4.3. Зависимость *Z(t)*

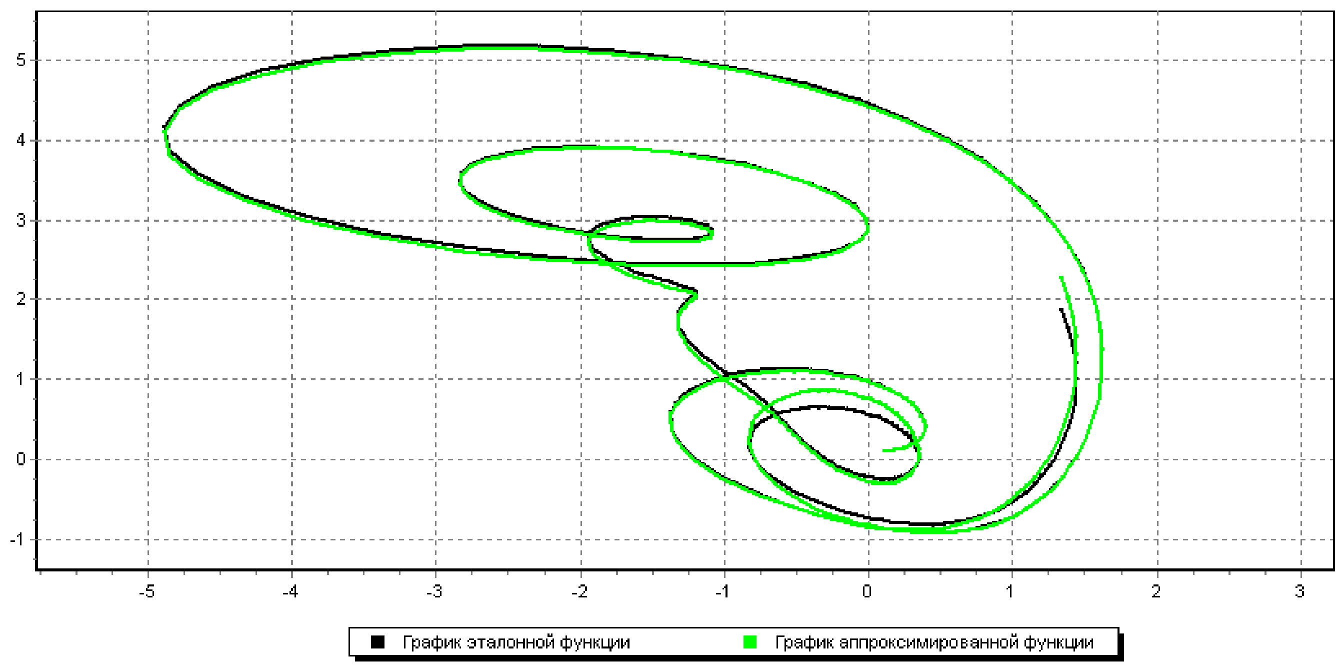

Рис. 4.4. Зависимость *Y(X)*

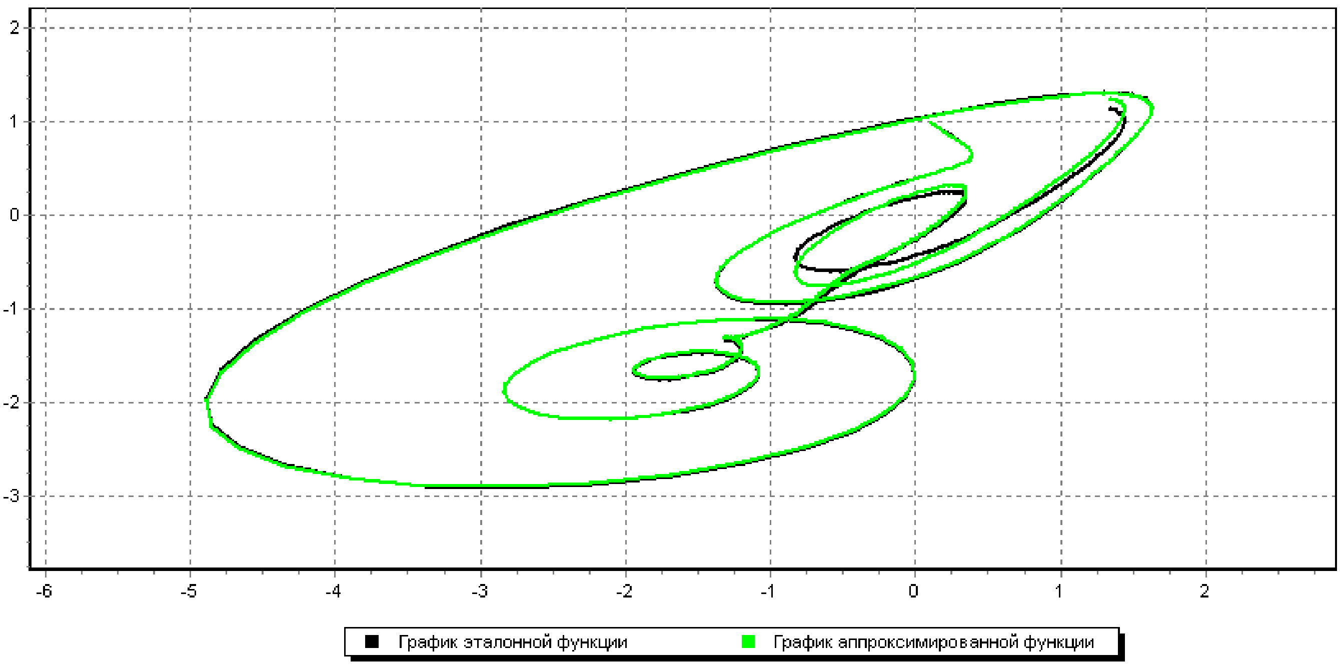

Рис. 4.5. Зависимость *Z(X)*

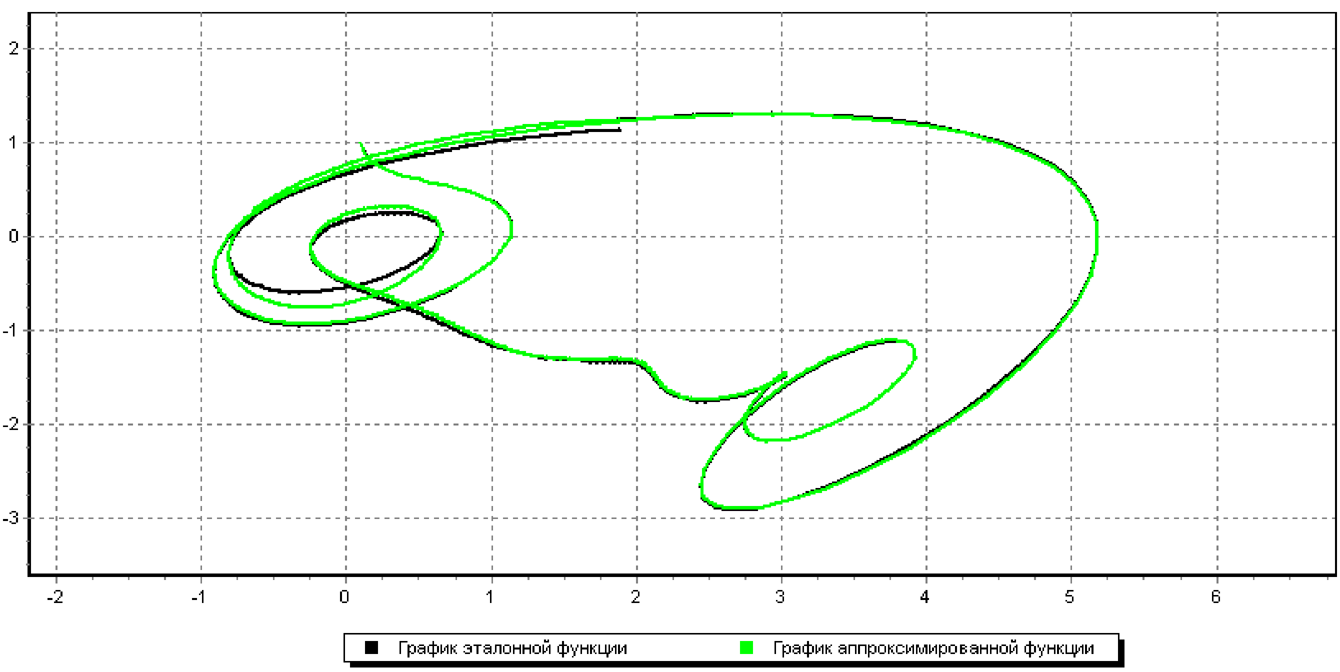

Рис. 4.6. Зависимость *Z(Y)*

Результаты прогнозирования функции:

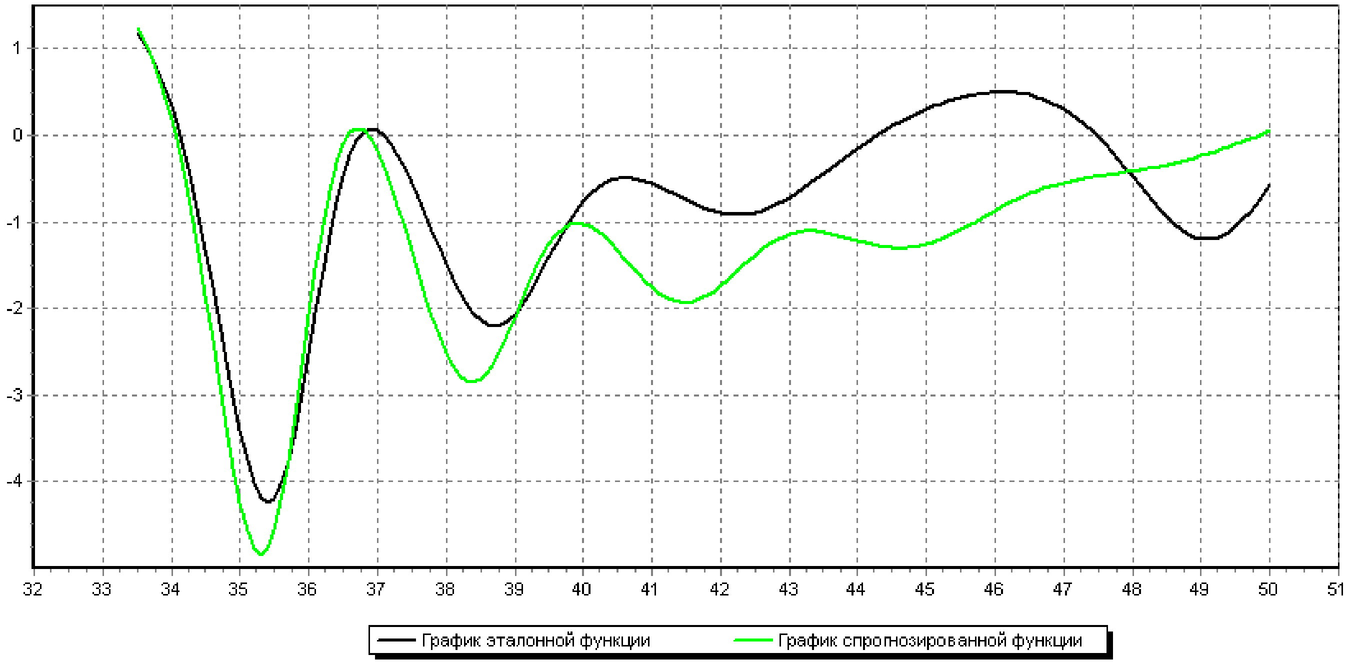

Рис. 4.7. Зависимость *X(t)*

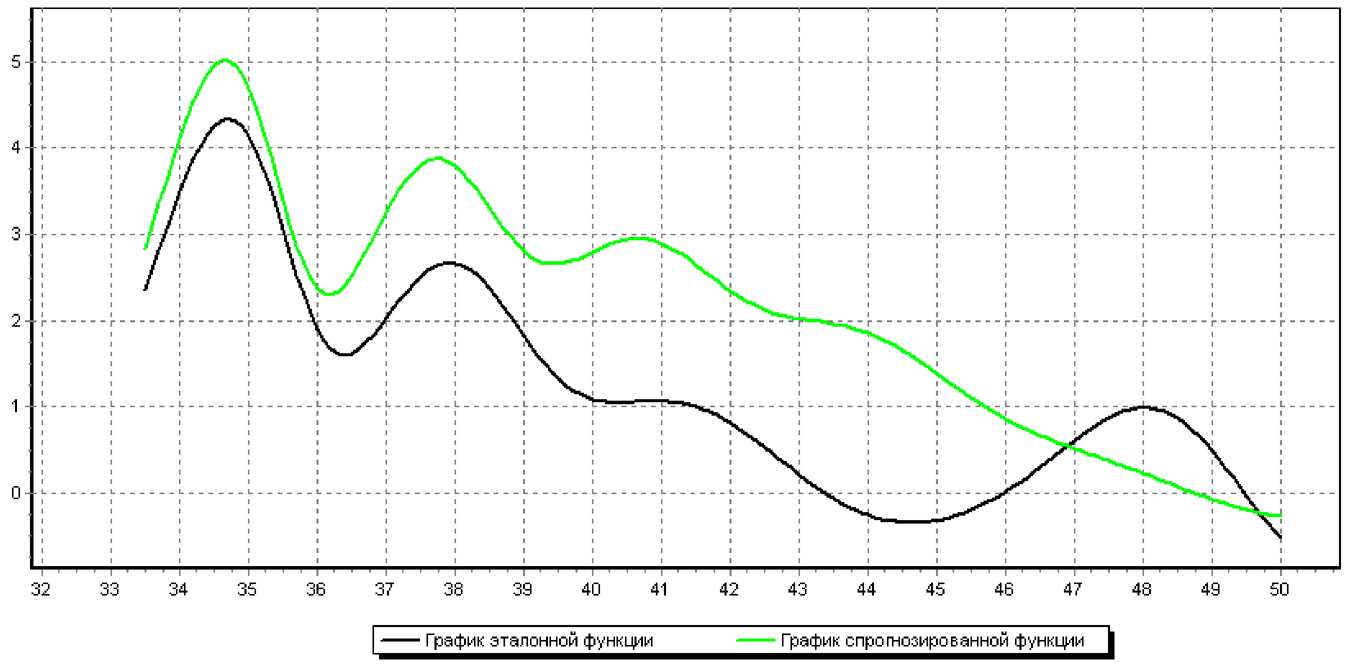

Рис. 4.8. Зависимость *Y(t)*

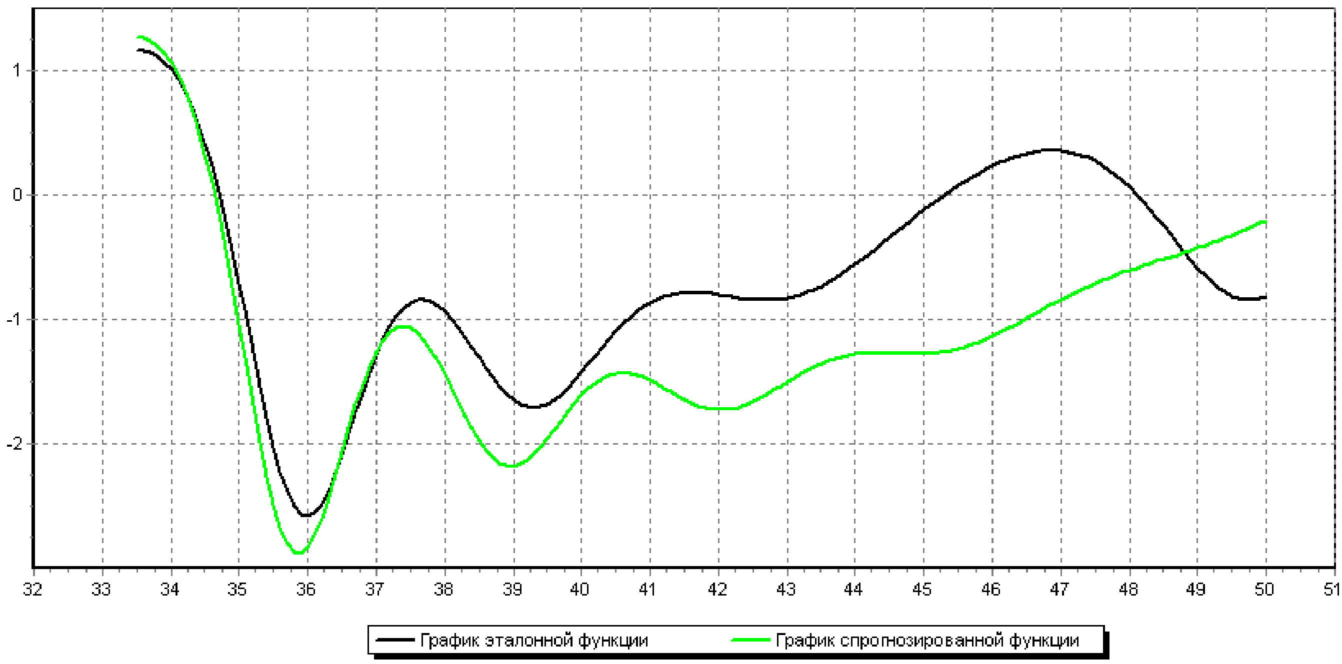

Рис. 4.9. Зависимость *Z(t)*

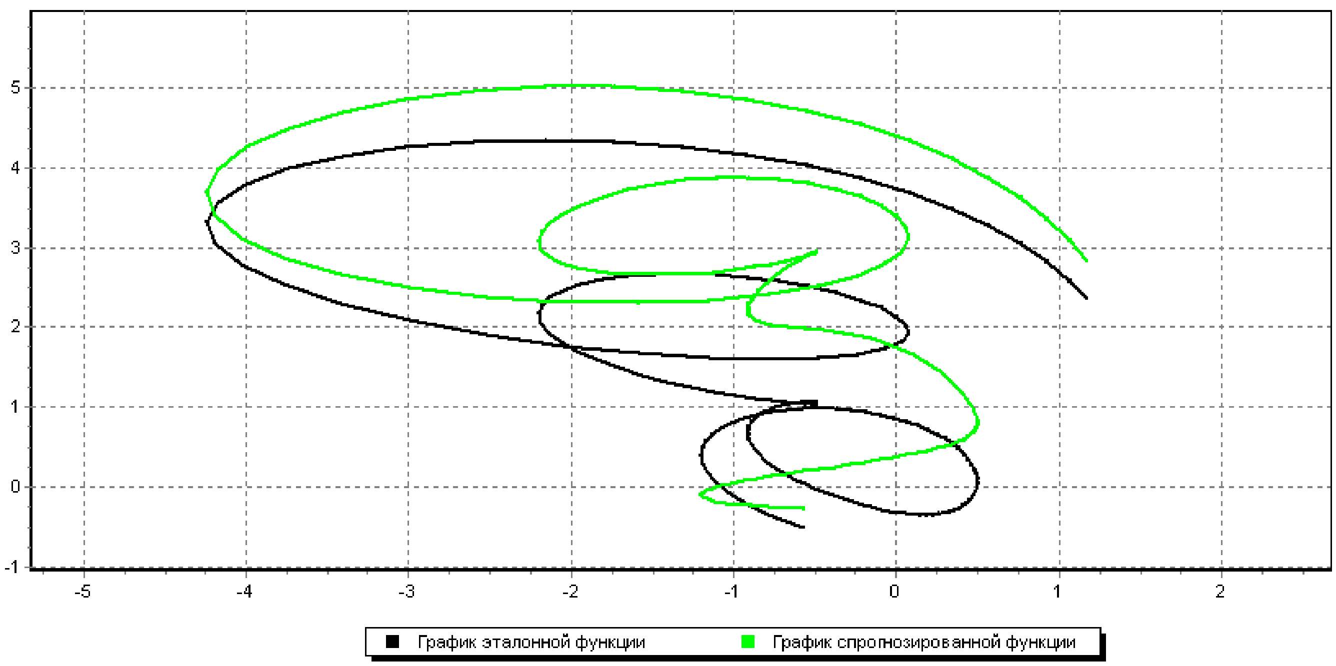

Рис. 4.10. Зависимость *Y(X)*

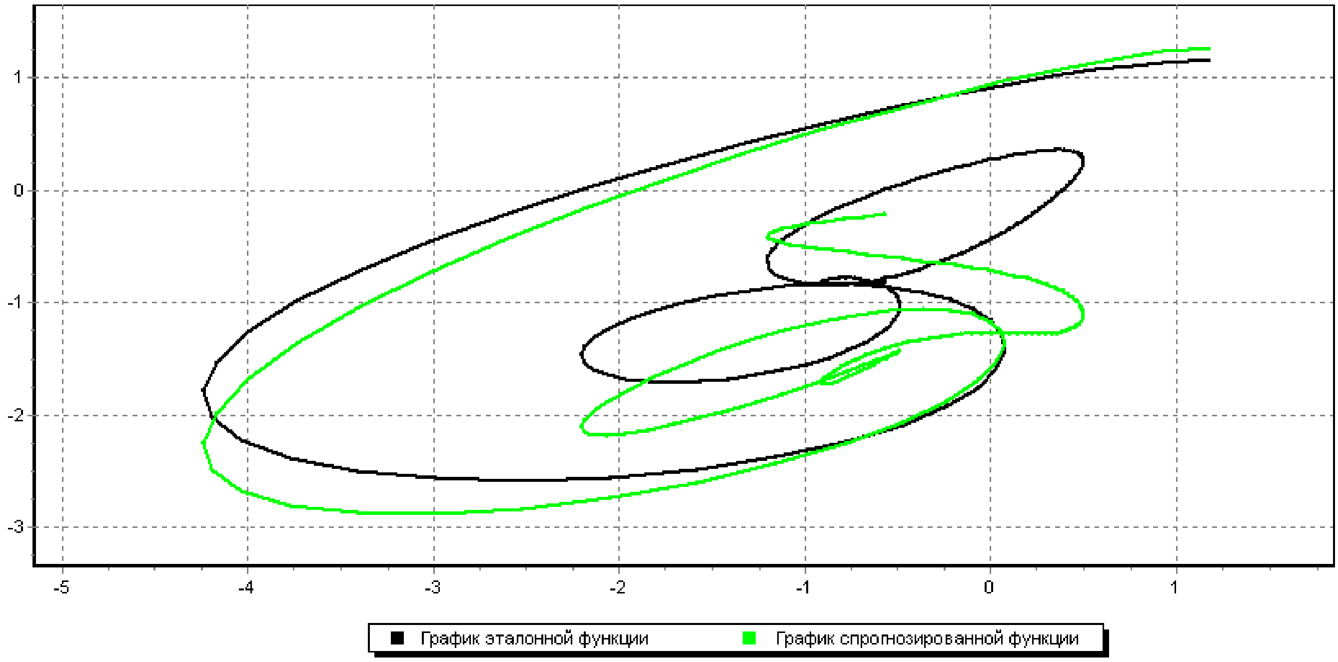

Рис. 4.11. Зависимость Z*(X)*

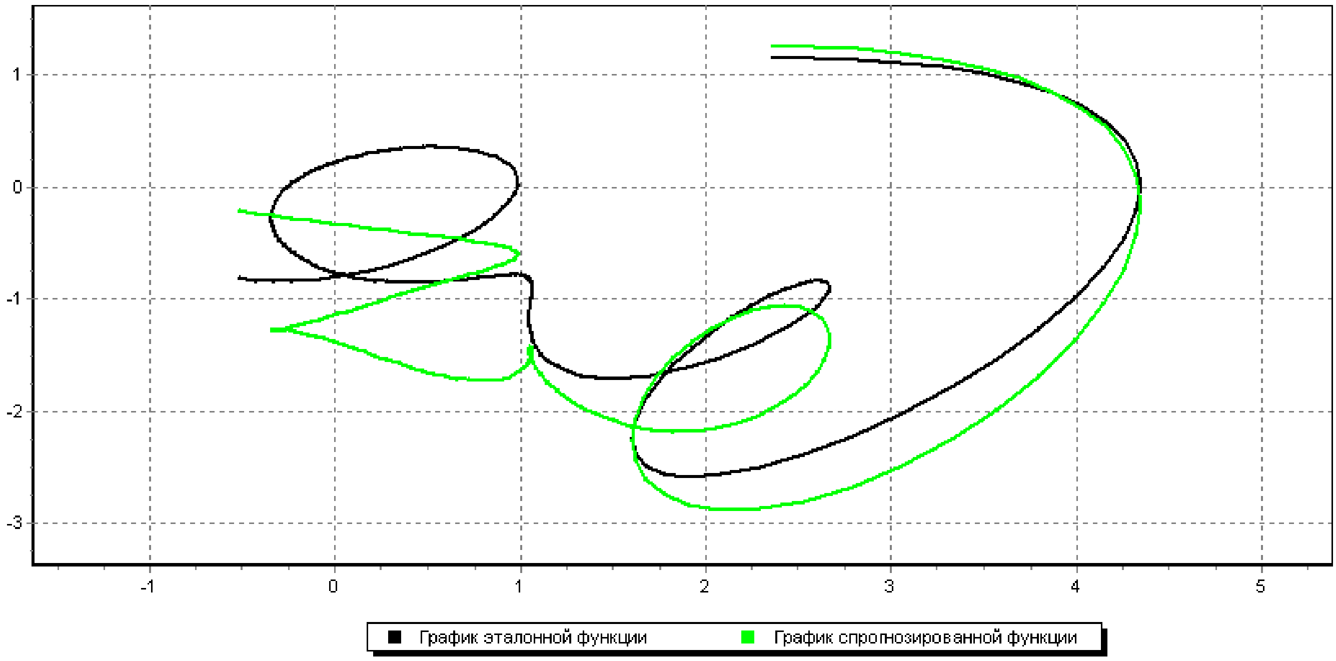

Рис. 4.12. Зависимость Z*(Y)*

Необходимо также провести аналитическую оценку полученных результатов на основе расчета суммарной квадратичной ошибки (4.1) и суммарного значения абсолютной ошибки (4.2).

$$E_s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}(y_j^k - e_j^k)^2 \qquad (4.1)$$

$$E_m = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left|y_j^k - e_j^k\right|}{(y_j^k + e_j^k)/2}\cdot 100 \qquad (4.2)$$

где p - количество образов, для которых производится сравнение результатов прогнозирования;

y_j^k - значение j-го нейрона выходного слоя для k-го образа;

e_j^k - эталонное значение j-го нейрона выходного слоя для k-го образа.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 - ОБРАЗЕЦ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра ИИТ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Методы и системы принятия решений»

Тема: «Нейросетевые методы аппроксимации и прогнозирования функции»

КП.АС22.051206 - 06 81 00

Листов

Выполнил:
студент 4-го курса
ФЭИС группы АС-22
Иванов И.И.

Проверил:
Головко В.А.

Брест 2008

см. файл *ТИТУЛЬНИК.doc*

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 - ОБРАЗЕЦ ОГЛАВЛЕНИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	КП.АС22.051206 - 06 81 00		
Разработал		Иванов И.И.			Нейросетевые методы аппроксимации и прогнозирования функции Пояснительная записка	Лит.	Лист: 3 / Листов: 66
Проверил		Головко В.А.				БГТУ	

см. файл *ОГЛАВЛЕНИЕ.doc*

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 - ОБРАЗЕЦ ЗАДАНИЯ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Факультет *ЭИС*

«Утверждаю»

Зав. кафедрой ________________

(подпись)

«*17*» *сентября* 200*8* год.

З А Д А Н И Е
по курсовому проектированию

Студенту *Иванову Иван Ивановичу*

1. Тема проекта *Нейросетевые методы аппроксимации и прогнозирования функции*
2. Сроки сдачи студентом законченного проекта *17.12.2008*
3. Исходные данные к проекту

1. Архитектура нейронных сетей
2. Алгоритм обучения
3. Система уравнений динамического процесса

4. Содержание расчетно-пояснительной записки (перечень подлежащих разработке вопросов)

Введение
1. Постановка задачи
2. Генерирование обучающей выборки
3. Проектирование нейронной сети и алгоритмов обучения
4. Разработка программных модулей
5. Тестирование и результаты исследования
6. Заключение
Список использованных источников

5. Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей и графиков)

6. Консультанты по проекту (с указанием разделов проекта)

Головко В.А.

7. Дата выдачи задания *17.09.2008*

8. Календарный график работы над проектом на весь период проектирования (с указанием сроков выполнения и трудоемкости отдельных этапов)

1. Генерирование обучающей выборки – 17.09 – 02.10

2. Проектирование нейронной сети и алгоритмов обучения – 03.10 – 29.10

3. Разработка программных модулей – 30.10 – 20.11

4. Тестирование и результаты исследования – 21.11 – 07.12

5. Оформление пояснительной записки – 08.12 – 16.12

Руководитель ________________________

(подпись)

Задание принял к исполнению *17.09.2008*

(дата и подпись студента)

см. файл *ЗАДАНИЕ.doc*

ПРИЛОЖЕНИЕ 4 - ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

1

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + yz$$
$$\dot{z} = 1 - y^2$$

2

$$\dot{x} = yz$$
$$\dot{y} = x - y$$
$$\dot{z} = 1 - xy$$

3

$$\dot{x} = yz$$
$$\dot{y} = x - y$$
$$\dot{z} = 1 - x^2$$

4

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x + z$$
$$\dot{z} = xz + 3y^2$$

5

$$\dot{x} = yz$$
$$\dot{y} = x^2 - y$$
$$\dot{z} = 1 - 4x$$

6

$$\dot{x} = y + z$$
$$\dot{y} = -x + 0.5y$$
$$\dot{z} = x^2 - z$$

7

$$\dot{x} = 0.4x + z$$
$$\dot{y} = xz - y$$
$$\dot{z} = -x + y$$

8

$$\dot{x} = -y + z^2$$
$$\dot{y} = x + 0.5y$$
$$\dot{z} = x - z$$

9

$$\dot{x} = -0.2y$$
$$\dot{y} = x + z$$
$$\dot{z} = x + y^2 - z$$

10

$$\dot{x} = 2z$$
$$\dot{y} = -2y + z$$
$$\dot{z} = -x + y + y^2$$

11

$$\dot{x} = xy - z$$
$$\dot{y} = x - y$$
$$\dot{z} = x + 0.3z$$

12

$$\dot{x} = y + 3.9z$$
$$\dot{y} = 0.9x^2 - y$$
$$\dot{z} = 1 - x$$

13

$$\dot{x} = -z$$
$$\dot{y} = -x^2 - y$$
$$\dot{z} = 1.7 + 1.7x + y$$

14

$$\dot{x} = -2y$$
$$\dot{y} = x + z^2$$
$$\dot{z} = 1 + y - 2z$$

15

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - z$$
$$\dot{z} = x + xz + 2.7y$$

16

$$\dot{x} = 2.7y + z$$
$$\dot{y} = -x + y^2$$
$$\dot{z} = x + y$$

17

$\dot{x} = -z$

$\dot{y} = x - y$

$\dot{z} = 3.1x + y^2 + 0.5z$

18

$\dot{x} = 0.9 - y$

$\dot{y} = 0.4 + z$

$\dot{z} = xy - z$

19

$\dot{x} = -x - 4y$

$\dot{y} = x + z^2$

$\dot{z} = 1 + x$

20-22

$\dot{x} = \sin(Ay) - z\cos(Bx);$

$\dot{y} = z\sin(Cx) - \cos(Dy);$

$\dot{z} = E\sin(x).$

a) $A = -1{,}5; B = 2; C = 0{,}5; D = -2; E = 1{,}5.$

b) $A = -0{,}5; B = 0{,}5; C = -1; D = -1{,}5; E = 2.$

c) $A = 1{,}5; B = 2; C = -2; D = -0{,}5; E = 1{,}5.$

23-25

$\dot{x} = y;$

$\dot{y} = -x^3 - Ky + B\sin(z);$

$\dot{z} = 1.$

a) $B = 7{,}5; K = 0{,}05.$

b) $B = 8; K = 0{,}01.$

c) $B = 7; K = 0{,}03.$

26-27

$\dot{x} = -y - z;$

$\dot{y} = x + a\,y;$

$\dot{z} = b + z(x - c).$

a) $a = b = 0{,}3; c = 6.$

b) $a = b = 0{,}1; c = 5.$

28-31

$T\dot{x} + x = Mz\exp(-z^2);$

$\dot{y} = x - z;$

$\dot{z} = y - \frac{z}{Q}.$

a) $Q = 10; M = 6; T = 1{,}5.$

b) $Q = 10; M = 8; T = 4.$

c) $Q = 10; M = 10; T = 3.$

d) $Q = 10; M = 4; T = 2.$

32-35

$\dot{x} = mx + y - xz;$

$\dot{y} = -x;$

$\dot{z} = -gz + l(x)x^2.$

$l(x) = 0,$ ïðè $x \le 0;$

$l(x) = 1,$ ïðè $x > 0.$

a) $m = 0{,}3; g = 0{,}7.$

b) $m = 1{,}2; g = 0{,}4.$

c) $m = 0{,}9; g = 0{,}6.$

d) $m = 0{,}6; g = 0{,}3.$

36-39

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)); \quad \dot{y} = x + y - z; \quad \dot{z} = -\beta y. \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{7}, & x \le -1; \\ -\frac{x}{7}, & -1 < x < 1; \\ \frac{2x-3}{7}, & x \ge 1. \end{cases}$$

a) $\alpha = 6{,}8; \beta = 10.$

b) $\alpha = 6{,}6; \beta = 10.$

c) $\alpha = 7; \beta = 10.$

d) $\alpha = 8; \beta = 10.$

40-41

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = -x^3 - Ky + B\sin z$

$\dot{z} = 1$

a) $B = 7.5, K = 0.05$

b) $B = 5, K = 0.01$

42-44

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = \gamma x - y - xz$$
$$\dot{z} = yx - bz$$

a) $\sigma = 10, \gamma = 28, b = \frac{8}{3}$

b) $\sigma = 10, \gamma = 10, b = 10$

c) $\sigma = 20, \gamma = 20, b = 4$

45-47

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = -Az + y^2 - x$$

a) $A = 2.017$

b) $A = 2.25$

c) $A = 2.5$

48

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2$$
$$y_{n+1} = bx_n$$
$$a = 1.4, b = 0.3$$

49

$$x = \cos 2t + \sin 2t + 0.5$$
$$y = \sin 2t - \cos 2t + 1$$

50

$$x = 3\cos 3t - 1.5\sin 3t$$
$$y = 1.5\cos 3t + \sin 3t$$

51

$$x = \frac{-5}{4} + \frac{13}{14}\cos 2t - 3\sin 2t$$
$$y = \frac{3}{2}t + 3\cos 2t + \frac{13}{14}\sin 2t$$

52

$$x = \cos t + 0.5\sin t + tgt$$
$$y = -\sin t + 0.5\cos t + 2$$

53

$$x = 3\cos 3t - 6\sin 3t$$
$$y = 2\cos 3t + 3\sin 3t$$

54

$$x = \cos t + \sin t + 1$$
$$y = -\sin t + \cos t$$

55

$$x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}$$
$$y = e^{-t}\cos t$$

56

$$x = (1 - t)\cos t - \sin t$$
$$y = (t - 2)\cos t + t\sin t$$

57

$$x(t) = \cos t + e^{-\sqrt{3}t}$$
$$y(t) = \frac{1}{2}(\cos t - e^{-\sqrt{3}t})$$

58

$$x(t) = e^t(2\cos t - \sin t)$$
$$y(t) = e^t(3\sin t + \cos t)$$

59

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$
$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

60

$$x(t) = -5e^{2t}\sin t$$
$$y(t) = e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$$

61

$$x(t) = e^t + \sin t$$
$$y(t) = e^t - \sin t$$

62

$$x_1(k) = \cos x_3$$
$$x_2(k) = \sin x_3$$
$$x_3(k) = \frac{k}{\sqrt{2}}$$
$$k = \overline{1...1000}$$