Guia Prática 02 – Aproximação Linear de Sistemas Físicos

Prof. Lucas S. Oliveira *

* *Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG, Campus Divinópolis, (lqsoliveira@cefetmg.br)*

Resumo: A modelagem caixa branca ou modelagem física do sistema consiste na avaliação das relações matemáticas e físicas do sistema, a fim de se obter um modelo matemático, normalmente descrito por uma equação diferencial que descreva o mais próximo possível a dinâmica do sistema a ser controlado. Neste guia de prática é proposto a linearização do sistema composto pelo reator químico. Ao final da atividade, espera-se obter um modelo local linear para o ponto de operação desejado.

Keywords: Identificação, modelagem, dinâmica não linear.

1. EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR

Numa análise de propriedade de uma função, um conceito fundamental é a expansão em série de Taylor de uma função. Seja $f = f(x)$ uma função arbitrária, contínua e suave. Nesse caso, ao aplicar a expansão em série de Taylor na função, $f(x)$, torna-se possível estudar o comportamento desta função em torno de um ponto fixo, digamos $x = x_0$. Obviamente, o valor da função para o ponto de operação desejado é dado por: $f(x_0)$. Desse modo, busca-se conhecer como o valor da função comporta-se quando o mesmo é pertubado por, $x = x_0+\xi$, em que $\xi = \partial x \equiv x-x_0$, ou seja, uma ***pequena*** quantidade em torno do ponto de operação (Dorf and Bishop, 2009; Ogata, 2010). Esse procedimento, pode ser representado conforme apresentado na Figura 1. Em que a reta indicada na Figura 1 é a reta tangente ao ponto x_0, o que pode ser descrito por:

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}, \tag{1}$$

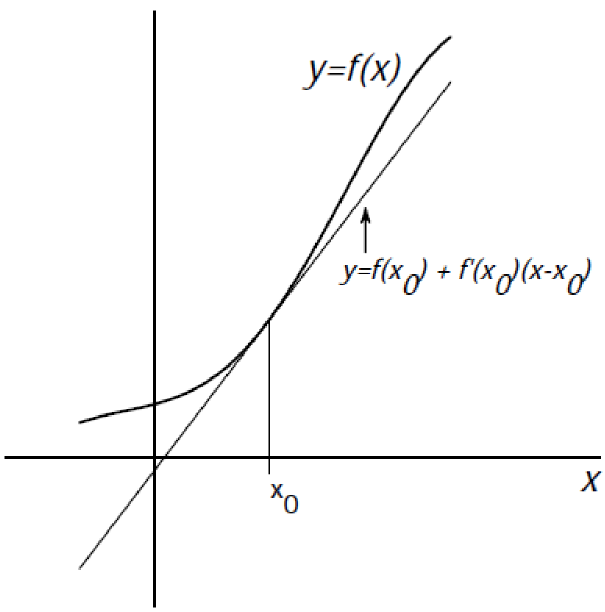

Figura 1. Representação gráfica da expansão em série de Taylor da função $f(x)$.

ou seja, como a derivada da função $f(x)$ no ponto $x = x_0$. Conforme pode-se verificar no gráfico da Figura 1, quando x é próximo de x_0 a reta tangente representa relativamente bem os valores de $f(x)$, isto é,

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

A aproximação apresentada em (2) pode ser melhorada, uma vez que adota-se trabalhar com derivadas de ordem superior, o que resulta na seguinte solução:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{d^2}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots \tag{3}$$

Já para funções que apresentam diversas variáveis de excitação, tal como,

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n). \tag{4}$$

A expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação x_{10}, x_{20}, $\cdots, x_{n0}$ é dada pelo mesmo princípio apresentado em (2), como segue:

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n) \simeq g(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0}) + \frac{\partial}{\partial x_1} g\Big|_{x=x_0} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial}{\partial x_2} g\Big|_{x=x_0} (x_2 - x_{20}) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} g\Big|_{x=x_0} (x_n - x_{n0}) \tag{5}$$

2. OBJETIVOS

São objetivos desse experimento:

- Definir o ponto de operação do sistema.
- Linearizar o modelo em torno do ponto de operação.
- Programar a resposta temporal do sistema linearizado e sistema de equações diferenciais.

3. SISTEMA EM ESTUDO

Considere o sistema de tanques que compõem o reator químico representado pelo diagrama da Figura 1, introduzido no guia de prática 01.

3.1 Parâmetros e Constantes Físicas do Sistema

Segue a descrição e apresentação das constantes e parâmetros físicos do sistema.

- $V = 10\ (m^3) \Longrightarrow$ volume do reator químico.
- $C = 4500\ (J/Kg \cdot {}^oC) \Longrightarrow$ capacidade térmica da solução.
- $F = 0\ a\ 3(m^3/s) \Longrightarrow$ Vazão volumétrica.
- $\theta_i = 20\ ({}^oC) \Longrightarrow$ Temperatura ambiente no local dos tanques.
- $h = 15\ (W/m^2 \cdot {}^oC) \Longrightarrow$ Coeficiente de convecção natural.
- $A_{ext} = 31.4\ (m^2) \Longrightarrow$ Superfície do tanque para troca de calor por convecção.
- $\rho_s = 1000\ (Kg/m^3) \Longrightarrow$ Massa específica da solução.

4. ATIVIDADES

Para o modelo caixa branca obtido após a conclusão do guia de prática 01, faça o que se pede:

(1) Cada dupla deverá escolher um ponto de operação para o sistema, dentre as opções:
Ponto de operação 00: $\theta = 35^oC$
Ponto de operação 01: $\theta = 40^oC$
Ponto de operação 02: $\theta = 45^oC$
Ponto de operação 03: $\theta = 50^oC$
Ponto de operação 04: $\theta = 55^oC$
Ponto de operação 05: $\theta = 60^oC$
Ponto de operação 06: $\theta = 65^oC$
Ponto de operação 07: $\theta = 70^oC$
Ponto de operação 08: $\theta = 75^oC$
Ponto de operação 09: $\theta = 80^oC$
Ponto de operação 10: $\theta = 85^oC$
e informar na página principal da turma (Microsoft Teams) o nome da dupla e o respectivo ponto de operação escolhido.

(2) Para o ponto de operação escolhido na questão anterior, calcule o sinal de controle necessário para levar o sistema para o ponto de operação desejado. Para tal, especifique a vazão volumétrica do sistema.

(3) Escreva um programa em python que apresente a resposta em malha aberta do modelo a partir da equação diferencial obtida no guia de prática 01 (note: deve-se plotar os dois estados do sistema juntamente com o sinal de controle). Nessa simulação, considere que o sistema encontra-se em equílibrio térmico com o ambiente, ou seja, $\theta(0) = \theta_i$.

(4) Avalie a resposta temporal obtida na questão anterior, e determine o tempo mínimo necessário para o sistema alcançar a condição de equilíbrio desejado.

(5) Obtenha uma aproximações linear para o sistema aplicando a expansão em série de Taylor, em que:
(a) aplica-se a expansão em série de Taylor truncada na primeira derivada.

(6) Acrescente ao código desenvolvido na questão (3) um trecho que gere um gráfico contendo a saída do sistema e a resposta do modelo linear obtido na questão anterior.

(7) Aplique a transformada de Laplace no sistema linearizado e apresente a função de transferência obtida. Apresente os cálculos.

(8) A fim de comparar a resposta do modelo linear (função de transferência) com a resposta obtida pela implementação da equação diferencial, qual procedimento deve ser adotado? Faça um diagrama esquemático que justifique a resposta.

(9) Toda questão deve ser devidamente justificada.

REFERÊNCIAS

Dorf, R. and Bishop, R. (2009). *Sistemas de Controle Modernos*. Livros Técnicos Científicos - LTC, 11 edition. 724p.

Ogata, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education, 5 edition. 809p.