

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

*CAMPUS DIVINÓPOLIS*

GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECATRÔNICA

Vito Lucca Gonçalves de Lima e Silva

DESENVOLVIMENTO DE UMA PLANTA DIDÁTICA PARA  
ESTUDOS EM ANÁLISE DE VIBRAÇÕES COM DOIS GRAUS  
DE LIBERDADE



Divinópolis

2022



Vito Lucca Gonçalves de Lima e Silva

DESENVOLVIMENTO DE UMA PLANTA DIDÁTICA PARA  
ESTUDOS EM ANÁLISE DE VIBRAÇÕES COM DOIS GRAUS  
DE LIBERDADE

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentada ao Colegiado de Graduação em Engenharia Mecatrônica como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Engenheiro Mecatrônico.

Eixo de Formação: Estruturas e Dinâmica.

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Flávio Santos Patrício

Coorientador: Prof. Dr. Emerson de Souza Costa



Divinópolis

2022





Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
CEFET-MG / Divinópolis  
Curso de Engenharia Mecatrônica

Monografia intitulada “Desenvolvimento de Uma Planta Didática para Estudos em Análise de Vibrações com Dois Graus de Liberdade”, de autoria do(as) graduando(as) Vito Lucca Gonçalves de Lima e Silva, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

---

Prof. Dr. Lúcio Flávio Santos Patrício

---

Prof. Dr. Luiz Cláudio Oliveira

---

Prof. Me. Juliano de Barros Veloso e Lima

Divinópolis  
Dezembro de 2022



EU QUERO SABER COMO DEUS  
CRIOU ESTE MUNDO. NÃO ES-  
TOU INTERESSADO NESTE OU NA-  
QUELE FENÔMENO, NO ESPECTRO  
DESTE OU DAQUELE ELEMENTO.  
EU QUERO CONHECER OS PENSAS-  
MENTOS DELE, O RESTO SÃO DE-  
TALHES. A. EINSTEIN





# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por me mostrar a cada dia que existe um pensamento superior. Este que devemos buscar.

Aos meus pais Jurandir e Raquel, por me ensinarem a caminhar e compartilhar essa existência comigo. Sou privilegiado em ter vocês na minha vida.

Aos meus irmãos Vinivenci, Vita e Stela, por saber que a luta de um de nós sempre será a luta dos quatro.

À minha namorada e companheira Débora Sara, pelo carinho, pela paciência e pelo Amor. Sem você eu já teria desistido.

Ao Professor Dr. Lúcio Flávio Santos Patrício, pela ajuda e orientação durante o desenvolvimento desse trabalho, além das conversas e pela amizade.

Ao professor Dr. Emerson de Souza Costa, pelos ensinamentos, pelo carinho e pela amizade.

Agradeço, sobretudo, a todos os professores, pela coragem de exercer a mais difícil e mais importante profissão. Transferir o conhecimento não é sobre o que você fala, mas sobre como o outro te entende.

Aos amigos de curso Lucas Bueno, Thaís Pollarini, Vinícius Almeida e Thomás Henrique, por serem as melhores duplas de trabalho, e pela amizade.

Aos colegas e amigos da Turma 8, todos vocês fazem parte dessa caminhada.



Não existe verdadeira inteligência sem bondade.

Ludwig van Beethoven



## Resumo

A análise das vibrações em estruturas possui diversas aplicações na indústria. Com o aumento da implementação de dispositivos eletrônicos e equipamentos cada vez mais sofisticados, torna-se necessária novas soluções para mitigar problemas gerados pelas vibrações, uma vez que elas prejudicam equipamentos eletrônicos, máquinas, e ainda geram risco para operadores e para o processo em si. Entretanto, os estudos práticos para soluções nessa área não acompanham a crescente demanda industrial. Assim, o presente trabalho propôs o desenvolvimento de uma bancada didática para que as próximas gerações de discentes do CEFET-MG campus Divinópolis possam desenvolver experimentos em análise de vibrações com dois graus de liberdade. Com isso, terem a possibilidade de aproximar o estudo teórico da prática, para então elaborar soluções técnicas para problemas industriais.

Palavras-chave: Vibrações; Sistema *Shear Building*; Análise Modal; Planta Didática; Estudo Experimental.



## Abstract

There are several applications for vibration structures analysis in industry, since they harm electronic devices and machines and generate risk for operators and the process itself. Increasing electronic more sophisticated devices implementation demands mitigation of undesirable vibrations. However, practical solutions for these purposes are not keeping up with the growing industrial demand. Thus this paperwork proposed a didactic bench development so that the next student Generation of the CEFET Divinópolis *campus* - MG be able to develop vibration analysis experiments with two degrees of freedom. As a result, they have the possibility to bring the theoretical study closer to practice, to then elaborate technical solutions to industrial problems.

Keywords: Vibrations; Shear Building System; Modal Analysis; Didactic Plant; Study Experimental.





# Sumário

<b>Lista de Acrônimos e Notação</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definição do Problema	1
1.2 Motivação	2
1.3 Objetivos Gerais	3
1.4 Objetivos Específicos	3
<b>2 Fundamentos</b>	<b>5</b>
2.1 Revisão de Literatura	5
2.2 Estado da Arte	7
2.3 Fundamentação Teórica	7
2.3.1 Graus de Liberdade (GDL) de um sistema	7
2.3.2 Vibrações em sistemas livres com 1 GDL	8
2.3.3 Vibrações em sistemas livres com 2 GDL	8
2.3.4 Vibração em sistemas forçados	10
2.3.5 Shear Building	11
2.3.6 Modelagem Genérica de um sistema <i>Shear Building</i> de dois pavimentos	12
2.3.7 Análise Modal	15
2.3.8 Autovalores e Autovetores	15
2.3.9 FFT (Fast Fourier Transform)	16
<b>3 Elementos da bancada de testes</b>	<b>17</b>

3.1	Sensor MPU6050 . . . . .	17
3.2	Arduíno Nano . . . . .	18
3.3	Conexões e IHM (interface homem-máquina) . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Metodologia . . . . .</b>	<b>21</b>
4.1	Caracterização da Planta . . . . .	21
4.2	Descrição das atividades . . . . .	23
4.3	Fluxograma . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Resultados e Discussões . . . . .</b>	<b>25</b>
5.1	Validação do modelo de 1 GDL . . . . .	25
5.2	Caracterização e validação do modelo numérico de 2 GDL, via <i>software</i> . . . . .	27
5.2.1	Validação da estrutura do modelo de 2 GDL . . . . .	27
5.3	Modificação da planta física . . . . .	29
5.4	Resposta temporal real . . . . .	29
5.5	Modelo Matemático Genérico encontrado . . . . .	31
5.5.1	Aplicando os valores reais ao modelo numérico encontrado . . . . .	32
5.6	Solução por Autovalores e Autovetores . . . . .	32
5.7	Análise das frequências por FFT (Fast Fourier Transform) . . . . .	36
5.8	Conclusões . . . . .	37
5.9	Propostas para Trabalhos Futuros . . . . .	38
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>41</b>

## Lista de figuras

Figura 1.1 – Representação da vista frontal da estrutura com dois graus de liberdade. Fonte: Beards, 1996. . . . .	3
Figura 2.1 – Representação do movimento de um Pêndulo. (Adaptado de RAO, 2008).	8
Figura 2.2 – Representação de um modelo vibracional de 2GDL (Adaptado de HARTOG, 1947). . . . .	9
Figura 2.3 – Representações de um sistema <i>Shear Building</i> de 3GDL. (Fonte: researchgate.net). . . . .	12
Figura 2.4 – Representação de um sistema <i>Shear building</i> de 1GDL (Adaptado de RAO, 2008). . . . .	13
Figura 2.5 – Representação de um sistema <i>Shear building</i> de 2GDL (Adaptado de RAO, 2008). . . . .	13
Figura 2.6 – Sistema equivalente com 2 GDL. . . . .	14
Figura 2.7 – DLC (Diagrama de Corpo Livre) do sistema equivalente . . . . .	14
Figura 3.1 – Sensor MPU6050 . . . . .	17
Figura 3.2 – Arduíno Nano . . . . .	18
Figura 3.3 – Aquisição de Dados . . . . .	19
Figura 3.4 – Protoboard . . . . .	19
Figura 4.1 – Modelo 3D modelo do sistema com 1GDL (Fonte: RIBEIRO, 2015). . .	22
Figura 4.2 – Modelo 3D do sistema com 2GDL (Fonte: Elaborada pelo autor). . .	22
Figura 4.3 – Fluxograma das etapas para o desenvolvimento do trabalho. . . . .	24

Figura 5.1 – Reprodução da planta do ex-aluno Edson Ribeiro. ( <i>SolidWorks</i> ) . . . .	25
Figura 5.2 – Análise Modal - Vista em Perspectiva ( <i>SolidWorks</i> ) . . . . .	26
Figura 5.3 – Análise Modal - Vista Lateral - ( <i>SolidWorks</i> ) . . . . .	26
Figura 5.4 – Desenho planta com 2 GDL - ( <i>SolidWorks</i> ) . . . . .	27
Figura 5.5 – Análise modal para 2 GDL - Vista em perspectiva ( <i>SolidWorks</i> ) . . . .	28
Figura 5.6 – Análise modal para 2 GDL - Vista lateral ( <i>SolidWorks</i> ) . . . . .	28
Figura 5.7 – Planta física . . . . .	29
Figura 5.8 – Resposta temporal do sistema físico . . . . .	30
Figura 5.9 – Resposta temporal do sistema físico - Ampliada . . . . .	31
Figura 5.10–Resposta em frequência do sistema físico . . . . .	36

# Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Comparação das frequências naturais encontradas . . . . .	27
Tabela 5.2 – Comparação das frequências naturais encontradas . . . . .	31
Tabela 5.3 – Comparação dos resultados por Autovalores e Autovetores com os re- sultados por FFT . . . . .	37



## Lista de Acrônimos e Notações

GLD	Graus de Liberdade
ADV	Absorvedor Dinâmico de Vibração
IHM	Interface Home-Máquina
FEM	Método de Elementos Finitos
FFT	Transformada Rápida de Fourier

$\omega_n$	Frequência natural
$\omega$	Frequência
M	Matriz de massas
K	Matriz de rigidezes
$m_i$	Massas
$k_i$	Rigidezes
$c_i$	Coefficientes de amortecimento
t	Tempo
X	Amplitude
$x_i$	Deslocamentos
$\dot{x}_i$	Velocidades
$\ddot{x}_i$	Acelerações
f(t)	Força externa

$C_i$	Constantes
$x_h(t)$	Componente da solução homogênea do movimento forçado
$x_p(t)$	Componente da solução particular do movimento forçado
$det$	Determinante
$u_i$	Autovetores
$\omega_{n_i}$	Autovalores
$\phi_i$	Ângulos de fase



# Introdução

No presente Trabalho de Conclusão de Curso foram desenvolvidas a modelagem matemática e uma modelagem numérica, a partir de um modelo FEM (Método de Elementos Finitos), de um sistema para estudos de vibrações com dois graus de liberdade. O trabalho propôs a modificação da planta projetada com um grau de liberdade (GDL), desenvolvida em 2015 para o TCC do ex-aluno Edson Ribeiro. Assim, inicialmente foi realizado um estudo para comparar os resultados obtidos no trabalho do ex-aluno para o modelo com 1 GDL. A validação desse modelo foi feita a partir de análise numérica pelo método de elementos finitos, com a utilização do *software* SolidWorks. Com isso, foi desenvolvida uma análise da estrutura modificada (estrutura com 2 GDL proposta no trabalho). Esta análise foi usada para garantir que o modelo proposto pudesse ser representado por uma modelagem com 2 GDL. Com isso, o trabalho seguiu para as etapas de desenvolvimento da modelagem do sistema, partindo do princípio de que a estrutura se comporta como um sistema *Shear Building*. Na etapa seguinte foram feitas as modificação física da planta e a obtenção da modelo matemático final, considerando as rigidezes e as massas reais do sistema. Assim, foi possível realizar os ensaios, para compará-los com os resultados encontrados no modelo matemático e numérico desenvolvidos.

## 1.1 Definição do Problema

Vibração é a subdisciplina da dinâmica que lida com o movimento repetitivo (INMAN, 2007). Ela está presente em vários processos como, em máquinas e motores elétricos, compressores, na indústria automotiva e na indústria civil. Muitos equipamentos

são projetados para suportar esses problemas, porém, com uma extensa agenda de manutenção. Entre elas, a manutenção preditiva, que demanda um maior custo para prever possíveis falhas mecânicas, evitando danos aos operadores ou uma perda de desempenho na produção. Além disso, existem vários equipamentos sensíveis a estas vibrações, como os sistemas embarcados, que possuem sensores e dispositivos eletrônicos.

A vibração é um assunto clássico cujos princípios são conhecidos e estudados há muitos séculos (BALACHANDRAN, 2009). Porém, a demanda industrial por soluções para os problemas gerados por ela ainda é maior do que o número de estudos nessa área, visto que os principais conceitos não são amplamente abordados com mais de um grau de liberdade - GDL.

Geralmente, são necessárias  $n$  variáveis para especificar a posição de um sistema mecânico, diz-se que esse sistema tem  $n$  graus de liberdade (HARTOG, 1956). Os problemas relacionados às vibrações em estruturas reais podem ser solucionados com dois graus de liberdade, desde que elas estejam contidas em um plano, ou tenham seus maiores movimentos projetados neste. Sendo assim, a principal motivação deste trabalho é a proposta do desenvolvimento de uma estrutura didática para a introdução ao estudo da análise de vibrações com dois graus de liberdade, e com isso possibilitar o desenvolvimento de estudos práticos para soluções de problemas reais.

## 1.2 Motivação

Didaticamente, os estudos em análise de vibrações são iniciados pelo estudo em sistemas aproximados por um grau de liberdade. Porém, os sistemas físicos reais dificilmente serão bem aproximados por uma modelagem com um único grau de liberdade. Assim, a principal motivação deste trabalho é possibilitar o estudo prático de sistemas com dois graus de liberdade, para que possam ser encontradas soluções mais próximas das encontradas em problemas reais. Para isso, é desenvolvida uma planta com dois pavimentos, pelo princípio de um sistema *Shear Building* como pode ser visto na Figura 1.1.

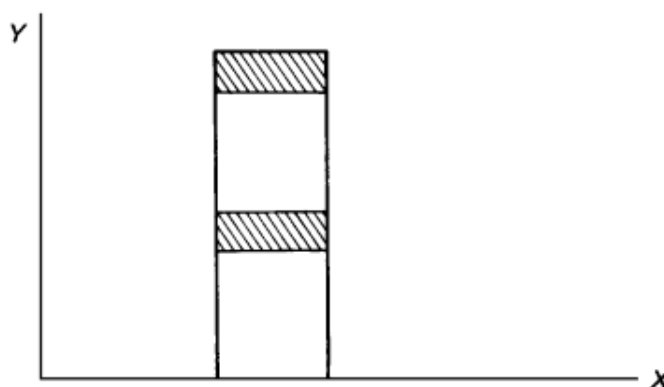


Figura 1.1 – Representação da vista frontal da estrutura com dois graus de liberdade.  
Fonte: Beards, 1996.

Ainda, com a construção da planta física será possível que soluções industriais, mais próximas das reais, sejam desenvolvidas para modelagem com dois graus de liberdade, ou mais. Dentre estas, podem ser destacadas o desenvolvimento de Absorvedores Dinâmicos de Vibração (ADVs) e o estudo para melhoramento da estrutura cristalina de materiais provenientes de processos de fabricação mecânica, em que se encontra o estado da arte.

## 1.3 Objetivos Gerais

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma planta didática para estudos de análise de vibrações com dois graus de liberdade.

## 1.4 Objetivos Específicos

- . aprofundar o trabalho de Ribeiro (2015);
- . propor um modelo *Shear Building* para estudos de caracterização de sistemas vibratórios e atenuação de vibração;
- . propor um modelo calibrado por *software*, a fim de possibilitar menor custo no desenvolvimento de uma planta didática real;
- . desenvolver um modelo matemático da planta;
- . desenvolver a solução pela técnica de Autovalores e Autovetores.



## Fundamentos

No texto a seguir são apresentados os estudos que fundamentam o presente trabalho. Inicialmente, foi feita uma revisão de literatura. Esta etapa teve como objetivo familiarizar o leitor com os conceitos e estudos desenvolvidos ao longo dos anos no campo das vibrações. Com isso, o texto seguiu para o estado da arte, com os principais trabalhos relacionados a vibrações e ao desenvolvimento de plantas para os estudos práticos nessa área. Por fim, são mostrados os principais conceitos utilizados para o desenvolvimento da modelagem matemática, modelagem numérica, do desenho para a simulação, dos preceitos analíticos e da construção física.

### 2.1 Revisão de Literatura

A principal causa dos fenômenos de vibração auto excitada é na verdade a excitação imposta pelo atrito entre as partes mecânicas do sistema (RANJBAR, 2016). Essa ideia é aceita desde os estudos sobre o atrito de Leonardo da Vinci, com a suposição de que o atrito independe da área de contato. Ou ainda, os estudos de Coulomb, em 1781, que previa a existência de uma força de atrito estático que faz com que um corpo permaneça parado, a menos que uma força a sobreponha. Os estudos avançaram assim com foco nas vibrações auto excitadas. Estas, por sua vez, explicam os fenômenos da ressonância, que são fundamentais para o desenvolvimento em várias áreas de aplicação real. Um exemplo é o desenvolvimento do sistema de frenagem de um auto-

móvel. Outro exemplo pode ser observado nos motores ou ainda em grandes estruturas da indústria civil, como pontes e grandes edifícios. Todo estudo de vibrações é abordado sobre o escopo da análise das frequências. Em especial, a Frequência Natural -  $\omega n$ . Esta, é a frequência que explica o fenômeno de ressonância citado anteriormente. Shimitz e Smith (2012) definem que as vibrações mecânicas podem ser classificadas em três categorias gerais. Estas são: vibração livre, vibração forçada e vibração auto excitada. A vibração livre, se trata de sistemas que vibram independentes da ação de uma força que gera essa vibração, como um peso preso a uma mola. Pelas características elásticas da mola, ao imputar uma força, esta gera uma oscilação natural daquele sistema. A vibração forçada depende de uma força externa atuante, como a vibração causada pelo desbalanceamento de um ventilador ou em um motor elétrico, por exemplo. Enquanto a vibração auto excitada ocorre quando a força que gera a vibração é imputada ao sistema próximo da frequência de ressonância do próprio sistema. Um exemplo clássico da vibração auto excitada é a ressonância causada por uma taça quando esta está sob influência de um som com frequência próximo a sua frequência natural. Outra característica de sistemas vibratórios é a abordagem de amortecimento. Esta, pode ser considerada uma força contrária ao movimento e que responde, linearmente, ao elemento de velocidade. Em muitos casos, a modelagem de sistemas físicos, para a análise de vibrações, se dá por três principais variáveis: a massa, a rigidez e o amortecimento. Até agora, as vibrações foram citadas como problemas para a indústria. Porém, existem estudos, estes com avanços recentes, que abordam a vibração como a solução em diversas áreas do desenvolvimento e refinamento tecnológico. Entre elas, pode ser citado o melhoramento microestrutural por técnicas que usam vibrações. O refinamento microestrutural de grãos tem sido relatado como um dos fatores mais importantes para melhorar a qualidade de grãos de materiais fundidos (Tamura et al, 2011). Outra aplicação em que as vibrações são usadas nas características do projeto são as peneiras industriais.

## 2.2 Estado da Arte

Embora existam muitos estudos para soluções em vibrações, como por exemplo, estudos com o uso de ADVs (Absorvedores Dinâmicos de Vibração), ainda são poucos os projetos que fomentam os estudos práticos nessa área, no meio acadêmico. Assim, a busca por artigos e outras publicações recentes na área de estudo do presente trabalho foi dividida em duas partes. A primeira, pela busca de artigos para a análise de vibrações com dois ou mais graus de liberdade. A segunda parte se deu pelo estudo do desenvolvimento de bancadas didáticas. Este estudo se deu inicialmente pelo projeto conceitual, abordando a estrutura física do projeto e seus principais modos de vibrar, observando a aplicação de algumas limitações, para garantir que a planta respondesse com 2 GDL. Alguns trabalhos recentes abordam a análise das vibrações em estruturas a partir de experimentos práticos. Ahmad *et al.* (2018) desenvolveram um trabalho para a análise de frequências com múltiplos graus de liberdade. Eles usaram alguns componentes de baixo custo como, acelerômetro e arduino. No experimento, eles obtiveram resultados bem próximos dos encontrados na teoria. Existem também grandes avanços no desenvolvimento de dispositivos que geram vibração para melhorar a característica de materiais desenvolvidos a partir de técnicas de fabricação, como soldagem e fundição. Oyedeji *et al.* (2020) desenvolveram um dispositivo capaz de gerar vibrações em diferentes graus de liberdade, a partir de uma plataforma. O equipamento aplica um sistema de acionamento com uma massa excêntrica. Assim, ela possui vantagens na variação dos parâmetros de vibração. O equipamento desenvolvido gerou com sucesso vibrações senoidais aleatórias de acelerações que variam de  $-5m/s^2$ . a  $8m/s^2$ . ao longo dos eixos principais, e acelerações angulares que variam de  $-40rad/s^2$ . a  $40rad/s^2$ . sobre os eixos de inclinação e rotação.

## 2.3 Fundamentação Teórica

### 2.3.1 Graus de Liberdade (GDL) de um sistema

Segundo RAO (2008) graus de liberdade de um sistema se caracterizam pelo menor número de coordenadas independentes que determinam completamente

as posições de todas as partes de um sistema em qualquer instante. Um pêndulo simples, por exemplo, pode ser caracterizado com apenas um grau de liberdade pela posição do ângulo  $\theta$ , Figura 2.1.

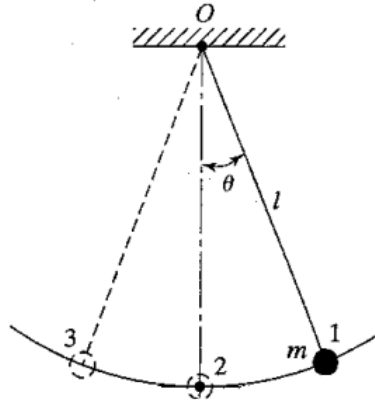


Figura 2.1 – Representação do movimento de um Pêndulo. (Adaptado de RAO, 2008).

### 2.3.2 Vibrações em sistemas livres com 1 GDL

Segundo HARTOG (1947), um sistema mecânico é dito de um grau de liberdade se este pode ser expressado em qualquer instante por uma única variável. BALACHANDRAM (2008) representou o movimento descrito acima pela equação diferencial ordinária a seguir.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (2.1)$$

Assim, quando o componente  $f(t)$  é nulo, implica que não há carga externa sendo aplicada ao sistema. Assim, o sistema é dito livre.

A partir da equação 2.1, se considerarmos  $f(t) = 0$  e  $c = 0$ , o sistema é dito livre sem amortecimento. Assim, a equação se torna

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (2.2)$$

### 2.3.3 Vibrações em sistemas livres com 2 GDL

A teoria de vibrações com 1GDL é muito útil em sistemas mecânicos. Principalmente, para explicar o fenômeno de ressonância, e o estudo das frequências naturais desses sistemas. Entretanto, para um estudo mais aprofundado é



necessário o desenvolvimento de sistemas a partir de 2 GDL. A representação mais usada para esses sistemas é feita por um modelo de massa-mola com duas massas, Figura 2.2. Onde  $m_1$   $m_2$  representam as massas do sistema;  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  representam as rigidezes;  $x_1$  e  $x_2$  representam os deslocamentos das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente.

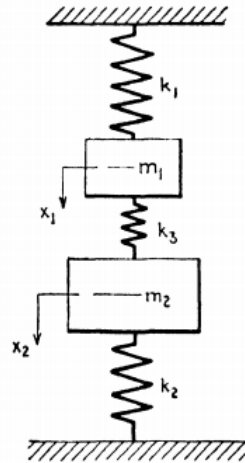


Figura 2.2 – Representação de um modelo vibracional de 2GDL (Adaptado de HARTOG, 1947).

Sistemas com  $n$  graus de liberdades precisam de  $n$  variáveis para serem completamente representados. Assim, para encontrar a solução de tais sistemas, também são necessárias  $n$  equações independentes. Dessa forma, a representação geral das forças em  $m_1$  do sistema livre e sem amortecimento, mostrado na Figura 2.5, pode ser descrita como:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - k_3x_2 = 0 \quad (2.3)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_3(x_1 - x_2) = 0 \quad (2.4)$$

As equações do movimento da massa  $m_2$  podem ser descritas por:

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_1 = 0 \quad (2.5)$$

## 2.3.4 Vibração em sistemas forçados

As vibrações em sistemas forçados podem ser representadas por uma estrutura excitada por uma força externa, em que esta força transfere energia para o sistema na forma de vibração. Quando esta força gera vibrações que coincidem com as frequências naturais da estrutura ocorre o fenômeno da ressonância. Este fenômeno amplifica a oscilação causada pelas vibrações, podendo gerar grandes problemas estruturais, como o desgaste excessivo e a fratura.

Nas vibrações forçadas o termo da direita é diferente de zero. Ou seja, existe uma carga externa sendo imputada ao sistema. Com isso tem-se,

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx = f(t) \quad (2.6)$$

Esta equação diferencial possui uma solução a partir de uma solução homogênea associada a uma solução particular.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.7)$$

Para o sistema não amortecido ( $c = 0$ ), e considerando  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , tem-se:

$$m\ddot{x}_2 + kx = F_0 \cos \omega t \quad (2.8)$$

A solução homogênea desta equação tem a forma

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t; \quad (2.9)$$

E a solução particular tem a forma

$$x_p(t) = X \cos \omega t \quad (2.10)$$

### 2.3.5 Shear Building

*Shear Building*, ou edifício de cisalhamento, é definido como um sistema simplificado a partir de alguns princípios que transformam um problema com infinitos graus de liberdade em um sistema com finitos graus de liberdade.

*"Um edifício de cisalhamento pode ser definido como uma estrutura na qual não há rotação da seção horizontal ao nível dos pavimentos. A este respeito, a deflexão do edifício terá muitas das características de uma viga em balanço, que é desviada apenas por forças de cisalhamento, daí o nome edifício de cisalhamento. Para aplicar tal sistema em um edifício, devemos supor que: (1) a massa total da estrutura está concentrada nos níveis dos pisos; (2) as vigas nos pisos são infinitamente rígidas em relação aos pilares; e (3) a deformação da estrutura é independente das forças axiais presentes nos pilares. Essas suposições transformam o problema de uma estrutura com um número infinito de graus de liberdade (devido à massa distribuída) para uma estrutura que tem apenas tantos graus quanto o número de massas aglomeradas nos níveis dos pisos. Uma estrutura de três andares modelada como um edifício de cisalhamento [...] terá três graus de liberdade, ou seja, os três deslocamentos horizontais aos níveis dos pisos. A segunda suposição introduz o requisito de que as juntas entre as vigas e as colunas são fixadas contra rotação. A terceira hipótese leva à condição de que as vigas rígidas permaneçam horizontais durante o movimento."*Paz, M. (1991)

Existem várias representações para o modelo *Shear Building*, onde as duas mais usadas são:

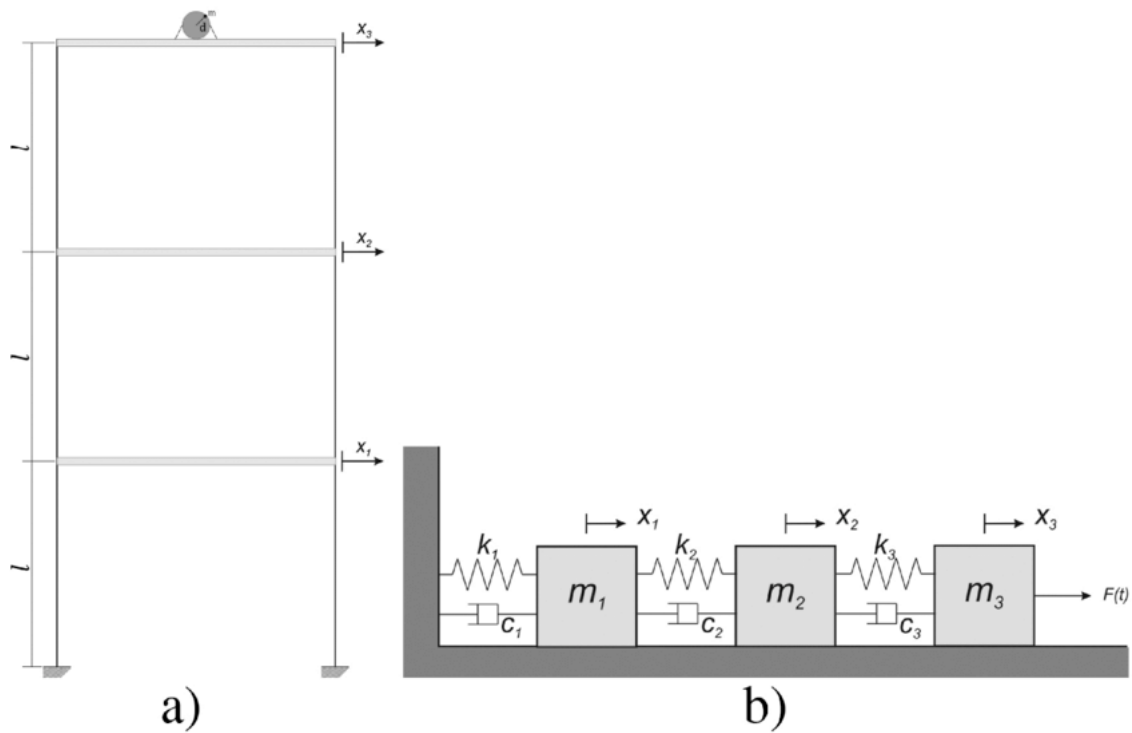


Figura 2.3 – Representações de um sistema *Shear Building* de 3GDL. (Fonte: researchgate.net).

Assim, um sistema de equações diferenciais para representar um modelo *Shear Building* para um edifício de  $n$  (onde  $n$  é a ordem das matrizes quadradas) andares tem a forma matricial abaixo:

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = f(t) \quad (2.11)$$

Onde  $[M]$  é a matriz de massa,  $[C]$  é a matriz de amortecimento,  $[K]$  a matriz de rigidez e  $f(t)$  o vetor de forças externas do sistema.

### 2.3.6 Modelagem Genérica de um sistema *Shear Building* de dois pavimentos

Podemos facilmente perceber que um sistema caracterizado por duas colunas elásticas, interligadas por suas extremidades, também são completamente determinados com apenas 1 GDL, Figura 2.4, em que o movimento total do sistema pode ser representado pelo movimento lateral da plataforma hachurada.

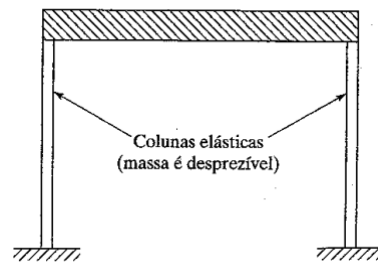


Figura 2.4 – Representação de um sistema *Shear building* de 1GDL (Adaptado de RAO, 2008).

Para representação de um sistema com dois graus de liberdade podemos estender o raciocínio citado anteriormente. Assim, uma possível representação para o sistema com 2 GDL pode ser visto na figura a seguir.

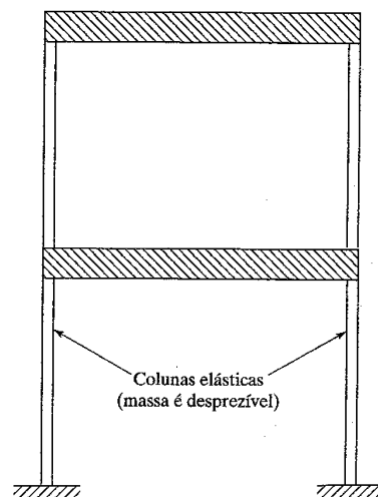


Figura 2.5 – Representação de um sistema *Shear building* de 2GDL (Adaptado de RAO, 2008).

É importante ressaltar que para o sistema acima garantir 2GDL não pode haver movimento relativo entre as colunas e as plataformas hachuradas em seus pontos de fixação.

As forças de uma estrutura *Shear Building* de dois pavimentos podem ser comparadas a um sistema massa-mola de 2 graus de liberdade, Figura 2.5.

O sistema representado na Figura 2.5 precisa ser expresso por duas coordenadas independentes para a descrição total do seu movimento. Ele pode ser comparado com o diagrama de um sistema massa-mola, como a seguir.

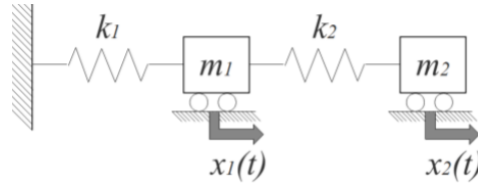


Figura 2.6 – Sistema equivalente com 2 GDL.

Em que  $x_1(t)$  representa o movimento do primeiro pavimento, e  $x_2(t)$  representa o movimento da segunda superfície hachurada, Figura 2.6.



Figura 2.7 – DLC (Diagrama de Corpo Livre) do sistema equivalente

A partir do Diagrama de Corpo Livre, Figura 2.7, é possível representar as forças atuantes no sistema, e assim obter as relações do movimento relativo aos dois graus de liberdade.

A dinâmica do sistema sem amortecimento, descrito na Figura 2.5 é dada pelas equações a seguir.

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2 = 0 \quad (2.12)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) = 0 \quad (2.13)$$

Assim, sua forma matricial se torna

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

### 2.3.7 Análise Modal

A Análise Modal pode ser descrita como um processo em que é possível descrever uma estrutura em termos de suas características naturais. Dentre estas podem ser destacadas as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as formas modais. A forma modal pode ser entendida como o estudo da resposta dinâmica das estruturas sob influências de vibrações em torno de suas frequências naturais. Desta forma, o estudo sob o aspecto da Análise Modal nos dá alguns parâmetros importantes a nível de projeto, como as frequências de ressonância. Segundo RAO (2009), o fenômeno da ressonância é alcançado quando a frequência de vibração externa imposta à estrutura coincide com a frequência natural da própria estrutura. Este fenômeno pode gerar vários problemas, como o desgaste excessivo, o que pode ocasionar uma fratura.

Para sistemas de 1 GDL podemos definir a frequência natural ( $\omega_n$ ) como:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}[rad/s] \quad (2.15)$$

onde  $m$  é a massa e  $k$  a rigidez do sistema. A equação 2.15 foi obtida na referência BALACHANDRAM, 2008.

### 2.3.8 Autovalores e Autovetores

Segundo INMAN (2006) os autovalores e autovetores podem ser usados para determinar a resposta temporal aplicado às condições iniciais pelo processo chamado análise modal. Essa técnica apresenta uma forma de resolver o problema de encontrar as equações que representam o movimento de um sistema vibracional de  $n$  graus de liberdade, em que a solução apresenta  $n$  equações linearmente independentes.

A técnica de autovalores e autovetores em vibrações parte da ideia de encontrar as raízes de uma matriz que relaciona as rigidezes e as massas do sistema, em que as raízes  $\omega$  são os autovalores que estão associados aos autovetores  $\mathbf{u}$ , Equação ??.

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

Para encontrar as raízes  $w$  é necessário encontrar o determinante da Equação ??.

$$\det(\mathbf{k} - w^2\mathbf{M}) = 0 \quad (2.17)$$

Em que,  $\mathbf{k}$  é a matriz da rigidezes,  $\mathbf{M}$  a matriz das massas e  $w$  as raízes a serem encontradas - que representam as frequências do sistema. Este problema se estende para sistemas de  $n$  GDL, onde cada  $n$  representa a ordem das matrizes quadradas  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{M}$ .

Assim, substitui-se as raízes encontradas para se achar o vetor  $\mathbf{x}(t)$  que representa a resposta temporal do sistema, Equação 2.18. Por fim, aplica-se os sistemas encontrados às condições iniciais para encontrar as amplitudes  $A_n$ .

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1\mathbf{u}_1\text{sen}(w_{n_1}t + \phi_1) + A_2\mathbf{u}_2\text{sen}(w_{n_2}t + \phi_2) \quad (2.18)$$

### 2.3.9 FFT (Fast Fourier Transform)

A FFT, em sistemas vibracionais, é um método em que é aplicado uma transformada que converte o sinal em componentes de frequências do próprio sinal. Ao aplicar uma FFT em um sistema vibratório espera-se encontrar as frequências de ressonância daquele sistema.



## Elementos da bancada de testes

A seguir será mostrado como foram obtidos os dados experimentais. Ao final do trabalho será indicado alguns experimentos como trabalhos futuros, utilizando alguns equipamentos que ainda não estão disponíveis no CEFET-MG, *campus V*.

### 3.1 Sensor MPU6050

O sensor MPU6050 é um dispositivo que possui as funções de acelerômetro, giroscópio e medidor de temperatura embutidos em um mesmo módulo, Figura 3.1. Para o trabalho foi utilizada somente a função acelerômetro.

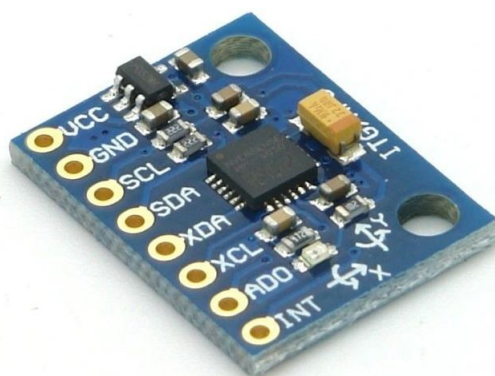


Figura 3.1 – Sensor MPU6050

## 3.2 Arduino Nano

Para a obtenção dos dados do sensor foi utilizado um Arduino modelo Nano, Figura 3.2

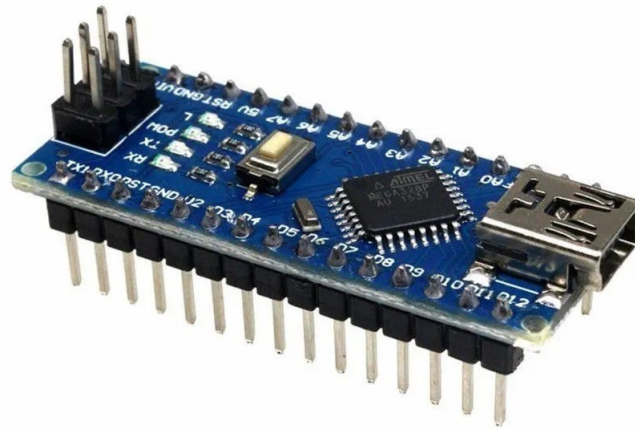


Figura 3.2 – Arduino Nano

## 3.3 Conexões e IHM (interface homem-máquina)

Assim, os dados foram mostrados na tela de um Notebook como mostrado na Figura 3.3, através de um código implementado na própria IDE (Integrated Development Environment) do arduino. Posteriormente, esses dados foram salvos em um arquivo *.txt* e plotado com o uso de um código feito na linguagem *Python*.

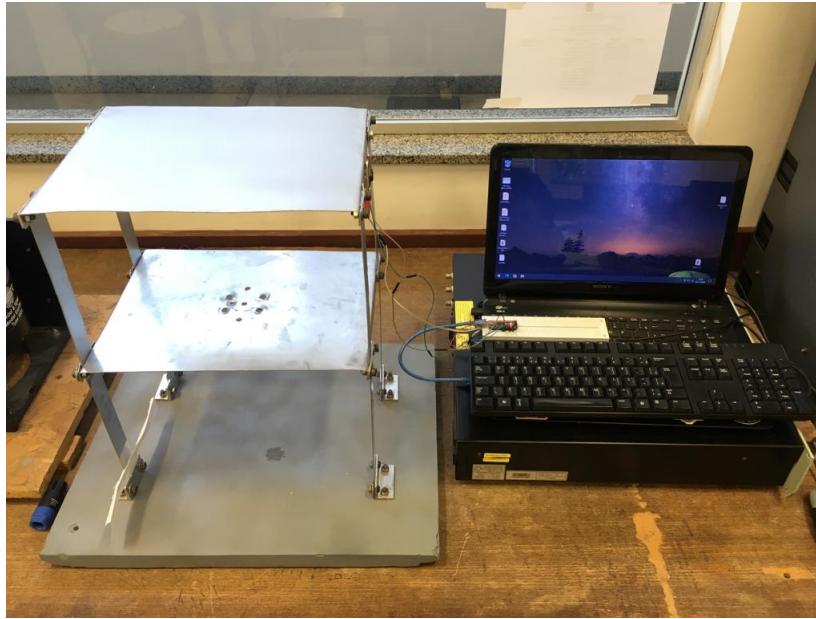


Figura 3.3 – Aquisição de Dados

Para fazer a transmissão entre o sinal obtido pelo sensor e o microcontrolador (Arduíno) foram utilizados *Jumpers*. Esses *Jumpers* foram conectados ao arduíno através de uma placa *protoboard* Figura 3.4, e por fim, foi utilizado um cabo Mini USB/USB para conectar o arduíno ao *notebook*.

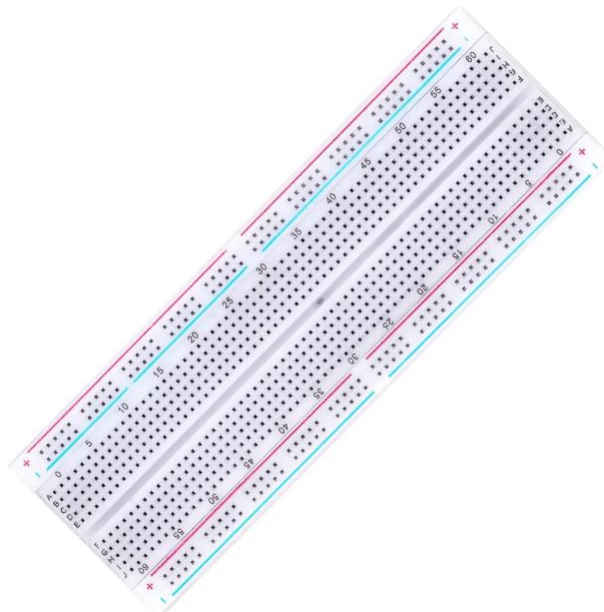


Figura 3.4 – Protoboard



## Metodologia

A metodologia adotada neste trabalho foi desenvolvida a partir do estudo da possível continuação do Trabalho de Conclusão de Curso de Ribeiro (2015). Dessa forma, o desenvolvimento deste trabalho seguiu as seguintes etapas. Ao início, foi realizada uma análise modal reconstitutiva do projeto do ex-aluno. Esta, foi usada para comparar os resultados obtidos no trabalho com os resultados obtidos no TCC do ex-aluno. A partir desse ponto, com a validação obtida pela comparação dos resultados, o trabalho seguiu para a caracterização e definição física da planta real para se obter o modelo com 2 GDL.

### 4.1 Caracterização da Planta

Nesta etapa foi iniciado o estudo da caracterização da planta, definindo o escopo do trabalho. A partir da planta do ex-aluno, Figura 4.1, foi realizada a modificação, seguindo o princípio do sistema *Shear Building*.

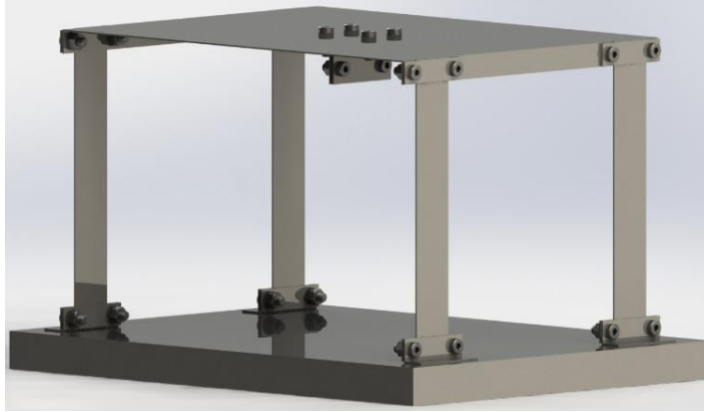


Figura 4.1 – Modelo 3D modelo do sistema com 1GDL (Fonte: RIBEIRO, 2015).

Assim, a ideia foi utilizar a estrutura para montar um segundo pavimento, e modelar a planta de tal forma que ela represente em duas plataformas os 2 GDL esperados, com pode ser visto na Figura 4.2.

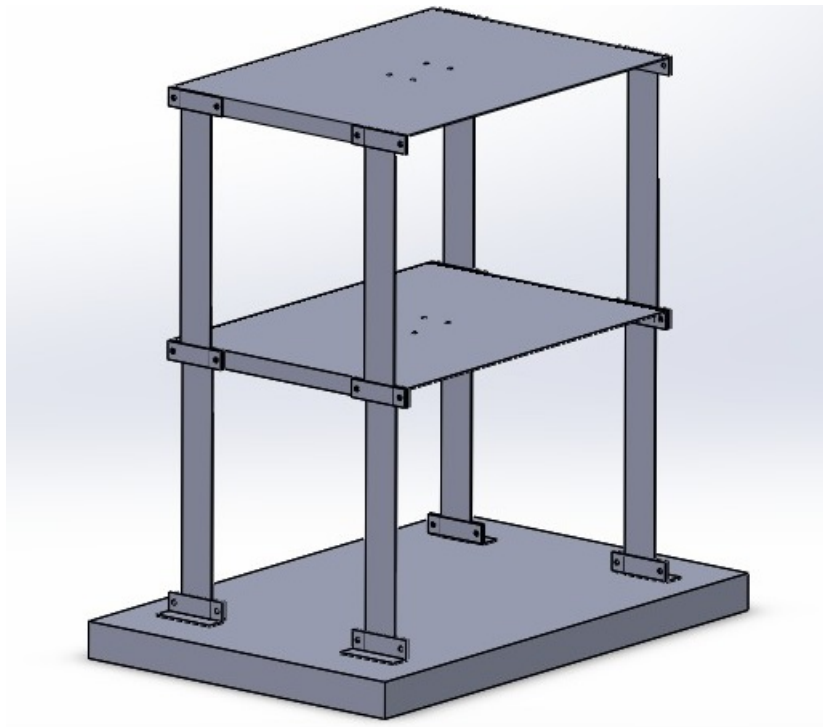


Figura 4.2 – Modelo 3D do sistema com 2GDL (Fonte: Elaborada pelo autor).

Com isso, o trabalho seguiu para a definição do modelo matemático genérico da planta.

Nessa etapa foi realizada a modelagem final do trabalho, considerando as rigidezes e as massas reais do sistema. Então, partiu-se para a construção da planta física obtendo por fim os valores reais. Com o dados experimentais obtidos na planta física foi possível fazer as comparações com o modelo matemático e numérico desenvolvidos, a fim de validar o projeto com 2 GDL. Por fim, foram realizados os ajustes finais na planta.

## 4.2 Descrição das atividades

A seguir são apresentadas as atividades da metodologia do trabalho.

- 1 Revisão Bibliográfica: revisar as técnicas e métodos utilizados no estudo de vibrações para um e dois graus de liberdade;
- 2 Desenvolvimento analítico: realizar o estudo conceitual e caracterização da planta com esboço e cálculos preliminares;
- 3 Desenho 3D: construir o desenho 3D da planta em software que possibilite análise modal;
- 4 Desenvolvimento matemático: encontrar o modelo matemático para a planta;
- 5 Estudo de materiais e construção: estudar o material usado e construção da planta física.
- 6 Instrumentação e testes iniciais: Desenvolver a instrumentação e realizar testes para fazer alguns ajustes;
- 7 Teste Experimental: realizar testes para avaliar experimentalmente os resultados e comparar com os resultados obtidos pelo modelo numérico;
- 8 Correções e ajustes: se necessário, realizar correções e ajustes na planta, seguindo o fluxograma a seguir;
- 9 Elaboração do manual: elaborar o manual com a indicação de alguns possíveis trabalhos práticos para a planta;

### 4.3 Fluxograma

A seguir é mostrado o Fluxograma simplificado da tarefas do trabalho. Todas as etapas da metodologia do trabalho foram revisadas a partir da solução do modelo matemático, como pode ser visto no fluxograma da Figura 4.3.

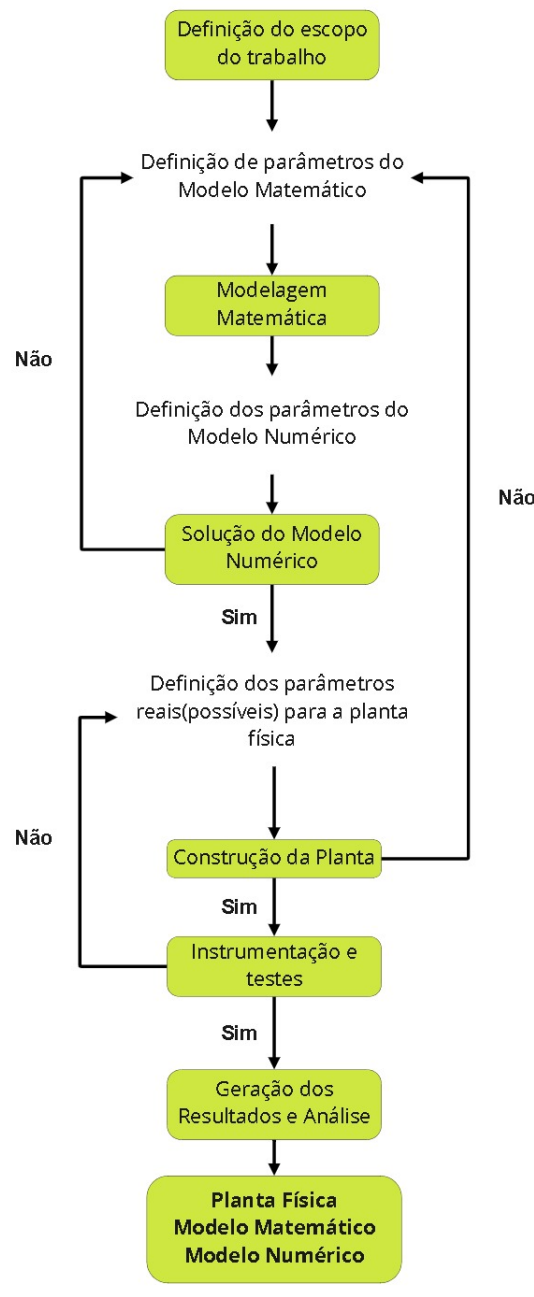


Figura 4.3 – Fluxograma das etapas para o desenvolvimento do trabalho.



## Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o Trabalho de Conclusão de Curso.

### 5.1 Validação do modelo de 1 GDL

O primeiro resultado obtido foi da comparação das frequências obtidas através da análise numérica realizada a partir da técnica de Analise Modal. O ex-aluno encontrou em seu trabalho, via simulação, uma frequência natural de 9.37Hz. Com esse dado foi realizada a construção do modelo 3D para realizar a comparação do resultado obtido pelo ex-aluno com o trabalho atual. O desenho 3D do sistema foi feito no *software SolidWoks*, Figura 5.1.

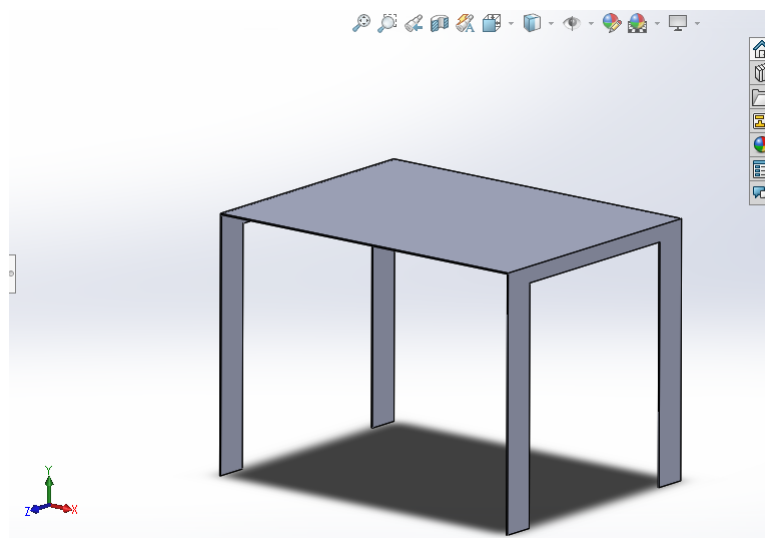


Figura 5.1 – Reprodução da planta do ex-aluno Edson Ribeiro. (*SolidWoks*)

Assim foi realizada a análise modal através do *software*. O resultado obtido para a frequência natural do sistema foi de 9.49Hz, Figura 5.2.

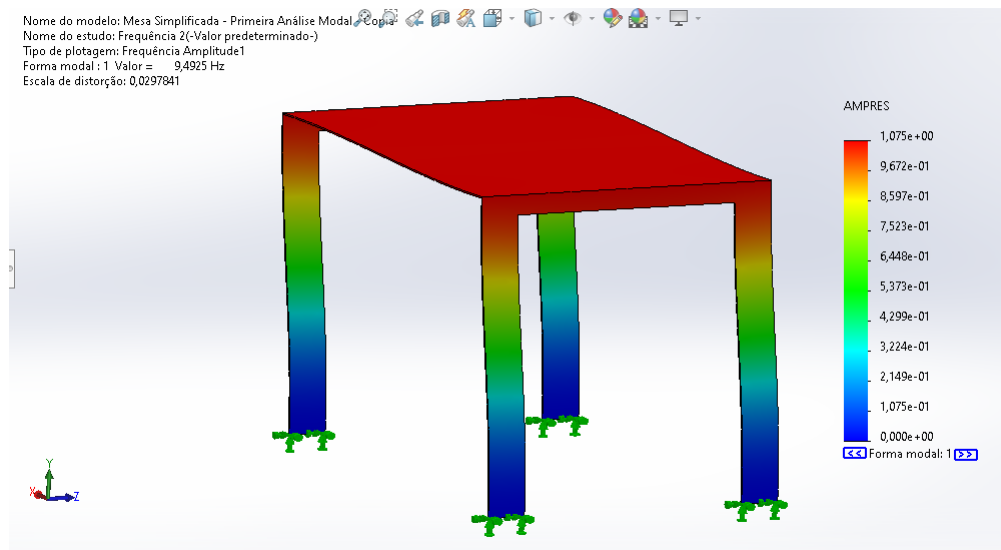


Figura 5.2 – Análise Modal - Vista em Perspectiva (*SolidWorks*)

Ainda, foi observado que a plataforma da estrutura não sofreu deformações significativas e deslocamento apenas lateral, características da modelagem pelo sistema de *Shear Building* de 1 GDL, Figura 5.3.

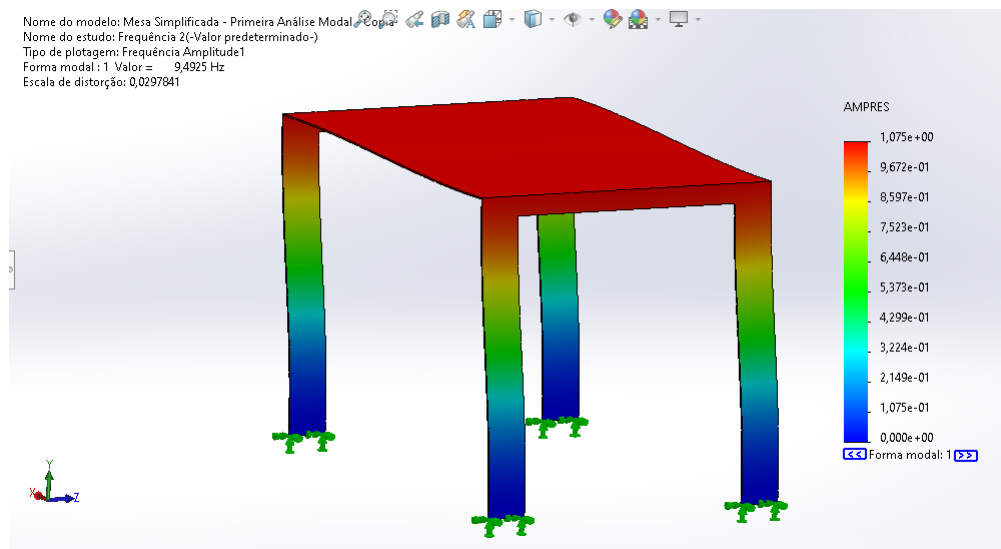


Figura 5.3 – Análise Modal - Vista Lateral - (*SolidWorks*)

A seguir, é mostrada a tabela com a comparação (Tabela 5.1), onde os resultados obtidos por Ribeiro (2015) são comparados com os resultados do presente trabalho.

Tabela 5.1 – Comparação das frequências naturais encontradas

Frequência Natural obtida pelo ex-aluno	Frequência Natural obtida para comparação
9.37 Hz	9.49 Hz

## 5.2 Caracterização e validação do modelo numérico de 2 GDL, via *software*

Com os resultados obtidos, foi possível seguir para o desenvolvimento da caracterização da planta com 2 GDL.

A partir da ideia geral para a modelagem de um sistema *Shear Building* de 2 GDL foi elaborado o desenho da Figura 5.4.

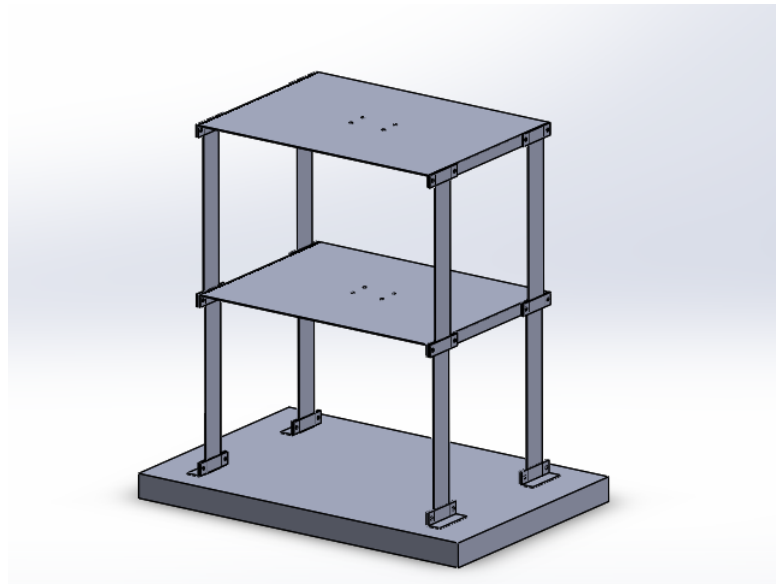


Figura 5.4 – Desenho planta com 2 GDL - (SolidWorks)

### 5.2.1 Validação da estrutura do modelo de 2 GDL

Assim, foi realizada a análise modal da estrutura com 2 GDL, Figura 5.5.

## 5.2. CARACTERIZAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO DE 2 GDL, VIA SOFTWARE

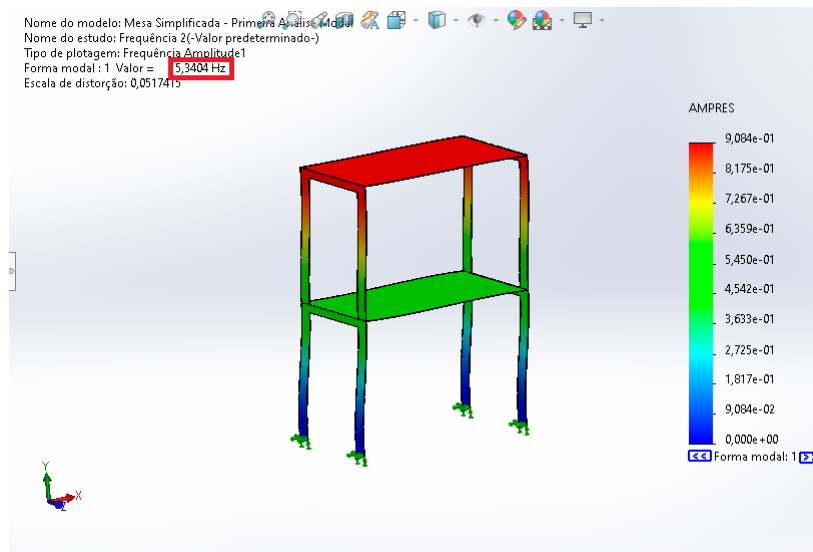


Figura 5.5 – Análise modal para 2 GDL - Vista em perspectiva (*SolidWorks*)

Com a simulação, foi possível observar que as duas plataformas não sofreram deformações significativas.

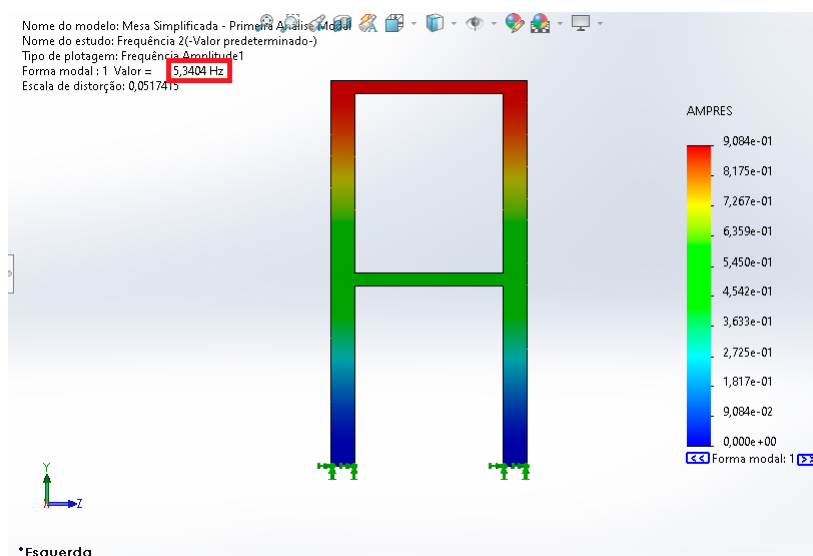


Figura 5.6 – Análise modal para 2 GDL - Vista lateral (*SolidWorks*)

Pela observação da vista esquerda, Figura 5.6 pode ser verificado que a estrutura possui movimento apenas lateral.

Pelas características observadas acima é constatado que o modelo numérico proposto viabiliza a continuação do projeto, partindo então para a modelagem matemática genérica do sistema.

### 5.3 Modificação da planta física

Após o estudo feito por simulação foi iniciada a construção física da planta. As dimensões seguiram exatamente o que foi usado para a análise numérica via *Solidworks*. A planta final pode ser vista na Figura 5.7

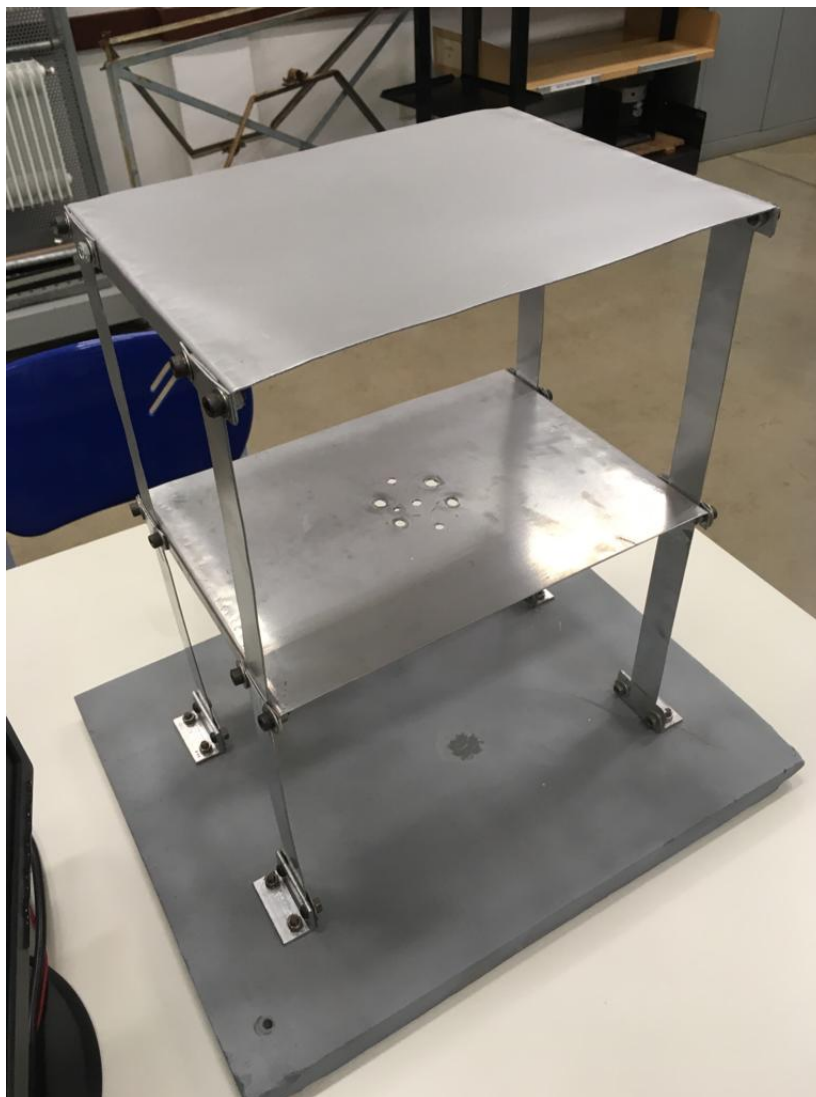


Figura 5.7 – Planta física

### 5.4 Resposta temporal real

A seguir serão mostrados os resultados obtidos com os experimentos práticos realizados na planta.

Nesta etapa não foi possível utilizar o Excitador Modal que se encontrava no *campus* pela falta de uma peça. Assim, a excitação da planta foi feita de

forma manual, observando algumas características para evitar a influência na análise das respostas obtidas.

Para analisar a frequência natural da planta foi dado um impulso manual e esperado que a resposta mostrasse um comportamento permanente. Esse tempo, após alguns ensaios foi estipulado em 10 segundos. Isso foi feito para evitar que a energia imputada na planta influenciasse na resposta obtida.

A curva de resposta temporal obtida pode ser vista na Figura 5.8.

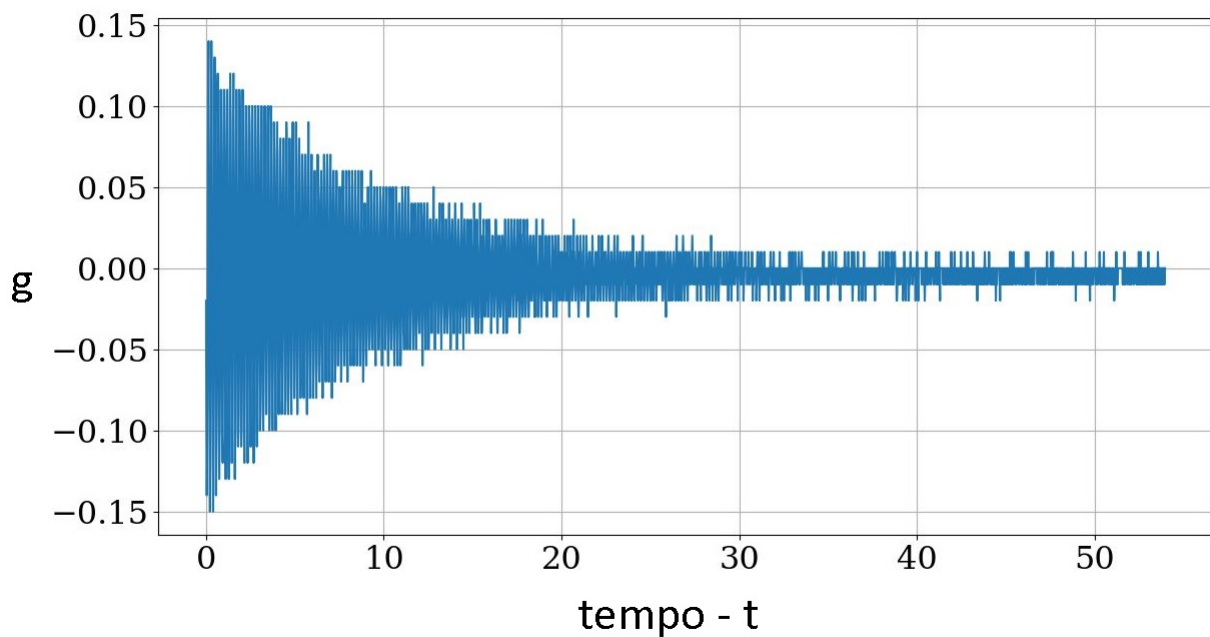


Figura 5.8 – Resposta temporal do sistema físico

Para verificar a frequência de oscilação do sistema o gráfico da resposta foi ampliado nos primeiros segundos, Figura 5.9.

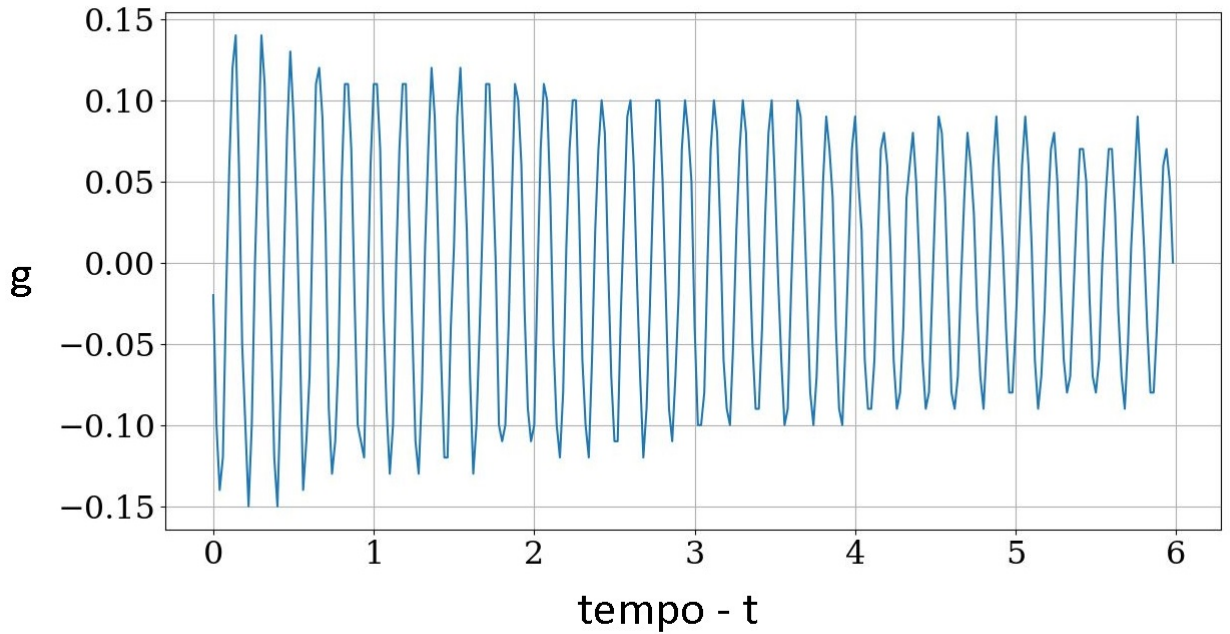


Figura 5.9 – Resposta temporal do sistema físico - Ampliada

Com a ampliação do gráfico foi possível verificar que a frequência do sistema está próximo a 5.9Hz. Este resultado é semelhante ao resultado obtido com a análise modal realizada por simulação, Figuras 5.5 e 5.6. A comparação dos resultados podem ser vistos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Comparação das frequências naturais encontradas

Frequência Natural obtida por simulação	Frequência Natural obtida da respotam real
5.34 Hz	5.9 Hz

## 5.5 Modelo Matemático Genérico encontrado

A partir do princípio de que a planta poderia ser representada por um sistema com 2 GDL partiu-se para o desenvolvimento da modelagem.

A modelagem foi iniciada a partir da comparação com um sistema massa-mola duplo, como indicado no subtópico 2.3.6. Assim, no desenvolvimento foram obtidas a duas equações a seguir.

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2 = 0 \quad (5.1)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + k_2x_2(t) = 0 \quad (5.2)$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  representam os movimentos laterais das plataformas do primeiro e do segundo andar, respectivamente.  $k_1$  e  $k_2$  representam as rigidezes das quatro hastes somadas para a primeira plataforma e para a segunda plataforma, respectivamente.  $m_1$  e  $m_2$  representam as massas concentradas na primeira e na segunda plataforma, respectivamente.

Estas duas equações representam a modelagem genérica do movimento do sistema, relacionando as massas (plataformas) e as molas (hastes) de cada elemento do sistema.

#### 5.5.1 Aplicando os valores reais ao modelo numérico encontrado

Para encontrar o modelo matemático final foi necessário obter os dados da planta física. Os valores encontrados para as rigidezes dos suportes foram de 249,5116N/m, considerando 4 suportes para cada pavimento os valores encontrados foram de  $k_1=k_2=998.0466$ N/m. Os valores das massas consideradas foi de  $m_1 = m_2 = 1.063177$ Kg.

Assim, substituindo os valores encontrados nas Equações 5.1 e 5.2, tem-se

$$1.063177\ddot{x}_1(t) + 1996.0932x_1(t) - 998.0466x_2 = 0 \quad (5.3)$$

$$1.063177\ddot{x}_2(t) - 998.0466x_1(t) + 998.0466x_2(t) = 0 \quad (5.4)$$

Na forma matricial, as Equações 5.3 e 5.4 tomam a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1.063177 & 0 \\ 0 & 1.063177 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1996.0932 & -998.0466 \\ -998.0466 & 998.0466 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.5)$$

## 5.6 Solução por Autovalores e Autovetores

No desenvolvimento da resposta temporal não amortecida pela técnica de Autovalores e Autovetores é necessário conhecer as equações associadas aos



elementos de massa e rigidez do sistema, Equação 5.5, além das condições iniciais de velocidade  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  e deslocamento  $x(t)$ .

Para as condições iniciais foram escolhidas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.0022 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para encontrar os autovalores  $\omega$ , desenvolve-se a Equação 2.17 aplicada ao problema.

$$\det \left( \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5.8)$$

Aplicando os valores das rigidezes e das massas tem-se

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1996.0932 & -998.0466 \\ -998.0466 & 998.0466 \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} 1.063177 & 0 \\ 0 & 1.063177 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.9)$$

Então chega-se em

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1996.0932 - 1.063177(\omega)^2 & -998.0466 \\ -998.0466 & 998.0466 - 1.063177(\omega)^2 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.10)$$

Desenvolvendo a Equação 5.10, chega-se aos autovalores  $\omega_1 = 17.605$  rad/s e  $\omega_2 = 46.0904$  rad/s. Estes valores representam os valores críticos do problema ou seja, as frequências naturais do sistema.

Aplicando os autovalores encontrados para se obter os sistemas de equações.

Para  $\omega = 17.605$

$$\begin{bmatrix} 1996.0932 - 1.063177(17.605)^2 & -998.0466 \\ -998.0466 & 998.0466 - 1.063177(17.605)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

Com isso, obtém-se as equações

$$1668.58a + 998.0466b = 0 \quad (5.12)$$

$$-998.0466a + 668.5b = 0 \quad (5.13)$$

Uma possível solução para esse sistema de equações é a solução que garante o vetor ser unitário. Ou seja,

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (5.14)$$

Isolando  $a$  na Equação 5.12 e substituindo na Equação 5.13 tem-se

$$(0.598)^2 + b^2 = 1 \quad (5.15)$$

Por fim, o primeiro autovetor encontrado é:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.86 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Analogamente para  $\omega = 46.0904$  chega-se em

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -0.96 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Derivando a Equação 2.18 obtém-se a equação da velocidade:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_1 \mathbf{u}_1 \cos(w_{n_1} t + \phi_1) + A_2 \mathbf{u}_2 \cos(w_{n_2} t + \phi_2) \quad (5.18)$$

Aplicando-se as condições iniciais de velocidade, Equação 5.6, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_1 \mathbf{u}_1 \cos(w_{n_1} * 0 + \phi_1) + A_2 \mathbf{u}_2 \cos(w_{n_2} * 0 + \phi_2) \quad (5.19)$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.86 \end{bmatrix} \cos(\phi_1) + A_2 \begin{bmatrix} -0.96 \\ 0.25 \end{bmatrix} \cos(\phi_2) \quad (5.20)$$

Da Equação 5.20 chega-se em

$$8.98A_1 \cos\phi - 44.25A_2 \cos\phi_2 = 0 \quad (5.21)$$

$$15.14A_1 \cos\phi + 11.52A_2 \cos\phi_2 = 0 \quad (5.22)$$

Para encontrar os valores dos ângulos  $\phi$  multiplica-se a Equação 5.21 por 3.89 e some-se com a Equação 5.22. Com isso tem-se

$$67.12A_1 \cos\phi = 0 \quad (5.23)$$

Então,

$$\cos\phi = 0 \quad (5.24)$$

Por fim

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad (5.25)$$

Substituindo  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$  nas Equações 5.21 e 5.22 encontra-se  $A_1 = 0.00484\text{m}$  e  $A_2 = -0.00784\text{m}$ .

Por fim, substituindo  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  na Equação 2.18 chega-se nas equações que representam o movimento do sistema, Equações 5.26 e 5.27.

$$x_1(t) = 0.0025\cos(17.605t) + 0.0075\cos(46.0904t) \quad (5.26)$$

$$x_2(t) = 0.0042\cos(17.605t) + 0.0019\cos(46.0904t) \quad (5.27)$$

## 5.7 Análise das frequências por FFT (Fast Fourier Transform)

A análise das frequências foram realizadas com a resposta do sistema real mostrado na Figura 5.8. A partir desse sinal obtido foi desenvolvido um código na linguagem *Python*. Assim, os resultados de amplitude e fase foram plotados, Figura 5.10.

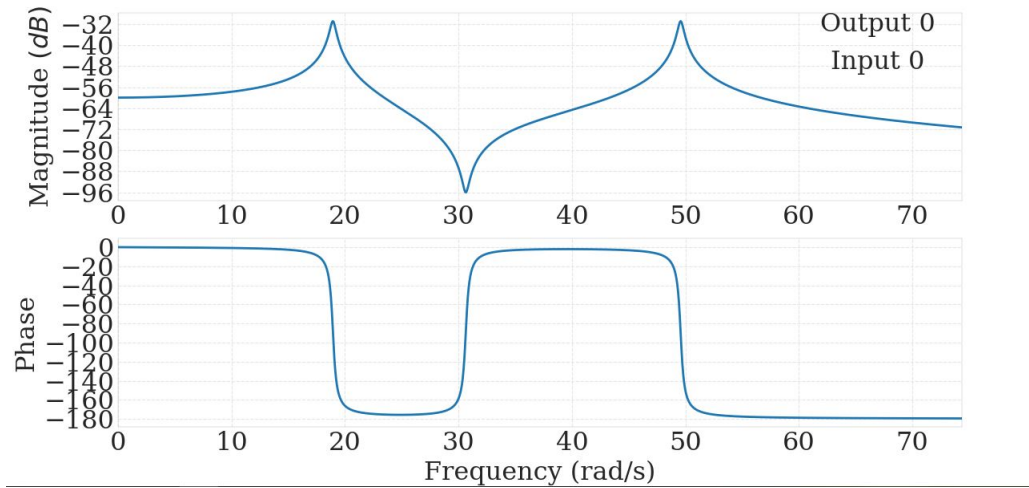


Figura 5.10 – Resposta em frequência do sistema físico

Através do programa foi encontradas as frequências de ressonância  $\omega_1 = 18.93585778$  e  $\omega_2 = 49.57471927$ . Ao comparar os resultados obtidos pelo método de Autovalores e Autovetores, Equações 5.26 e 5.27, com o resultado obtido pela FFT é notado que os valores para as frequências encontradas são semelhantes. A comparação das frequências encontradas pode ser vistas na Tabela 5.3

Tabela 5.3 – Comparação dos resultados por Autovalores e Autovetores com os resultados por FFT

	$\omega_1$	$\omega_2$
Aut. e Autovetores	17.6050 Rad/s	46.0904 Rad/s
FFT	18.9358 Rad/s	49.5747 Rad/s

## 5.8 Conclusões

O presente trabalho traçou o estudo e desenvolvimento de uma planta didática para análise de vibrações com dois graus de liberdade. Notou-se, durante o projeto, que os estudos em vibrações - embora possuam suas raízes na mecânica - são multidisciplinares, desde a elaboração conceitual da planta física até a concepção e levantamento dos resultados, abordando diferentes áreas do conhecimento.

A proposta inicial do trabalho foi desenvolver uma planta que respondesse como um sistema de dois graus de liberdade. Para isso, foi necessário construí-la de forma que o movimento de resposta a uma excitação externa se desse em sua maior parte apenas em um dos eixos, garantindo assim que uma planta de dois pavimentos, modelada pelo sistema *Shear Building*, respondesse como um sistema de 2 GDL. Assim, a utilização da planta desenvolvida por Riberio (2015) foi de grande ajuda para dar início à elaboração do trabalho, já que esta foi modelada pelo mesmo princípio e como um sistema de 1 GDL.

Dentre as formas estudadas para validar tal sistema foram usadas a análise numérica através do método FEM (Método de Elemento Finitos), a análise das frequências por FFT (Transformada Rápida de Fourier) e a obtenção da resposta pela técnica de Autovalores e Autovetores. Os resultados foram semelhantes na comparação com os três métodos utilizados.

A primeira validação realizada se deu a partir da comparação do resultado da primeira frequência natural encontrada pela simulação realizada por Riberio, com o resultado encontrado no presente trabalho, além de visualizar que o modo de vibrar não deformou a plataforma em mais de um eixo, garantindo as características de um modelo pelo sistema *Shear Building*. Essa

etapa foi importante pois a partir dela a ideia para desenvolver uma planta com 2 GDL foi simplificada para colocar mais um pavimento com as mesmas características de rigidez e peso do sistema com 1 GDL.

Assim, partiu-se para o desenvolvimento numérico via *software* e então a construção física da planta. Para o desenvolvimento numérico foi usado o software *SolidWorks*. Após a simulação foi notado que o primeiro modo de vibrar, em 5.34Hz, mostrou comportamento que garantia o modelo proposto. A etapa seguinte foi feito o desenvolvimento matemático para encontrar a equação matricial do sistema. Com ela foi possível desenvolver a solução do movimento pela técnica de Autovalores e Autovetores.

Por fim, a planta foi instrumentada e então foram obtidos os dados reais do sistema físico. A curva da resposta foi então submetida a análise das frequência por FFT e comparadas com as frequências encontradas pelos outros métodos. O método dos elementos finitos mostrou uma frequência um pouco menor. Este resultado era esperado devido as simplificações feitas no desenho 3D para que fosse possível realizar a análise, reduzindo massa do sistema, além de características físicas de fixação que não foram consideradas. Esse tipo de simplificação é necessário devido a alta demanda de processamento computacional para realizar esse tipo de simulação.

## 5.9 Propostas para Trabalhos Futuros

- Estudo da vibração causada por motores acoplados à planta ou próximo a ela;
- Estudo da relação de fase entre as frequências dos dois pavimentos;
- Realizar uma análise mais completa da resposta com a utilização de um Excitador Modal;
- Modificação na planta para desenvolver um ADV utilizando um dos pavimentos para compensar as vibrações do sistema;
- Análise individual da resposta de cada pavimento para comparação com a equação obtida neste trabalho;

- Analisar a resposta do sistema utilizando o ADV projetado por Ribeiro (2015) para o modelo com 1 GDL;
- Iniciar estudos sobre ADV's rotacionais;
- Implementação de um ADV ativo.





# Referências

- BALACHANDRAN. **Mechanical Vibrations**. [S.l.]: Cengage Learning, 2009.
- BEARDS, C. F. **Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems**. [S.l.]: Edward Arnold, 1995.
- BEAZLEY, David M. **Python essential reference**. [S.l.]: Addison-Wesley, 2009.
- CHOPRA, Anil K. **Dynamics of Structures**. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- DONALDSON, Bruce K. **Introduction to Structural Dynamics**. [S.l.]: Cambridge, 2006.
- GATTI, Paolo L. **APPLIED STRUCTURAL AND MECHANICAL VIBRATIONS**. [S.l.]: CRC Press, 2014.
- GAWRONSKI, Wodek K. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. [S.l.]: Springer, 2004.
- GÉRADIN M., Rixen D. J. **Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structure Dynamics**. [S.l.]: Wiley, 2015.
- HARTOG. **Mechanical Vibrations**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1947.
- INMAN. **Engineering Vibration**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007.
- MEIROVITCH, Leonard. **Computational methods in structural dynamics**. [S.l.]: Suthoff Noordhoff, 1980.

- OYEDEJI, O.I.; APALOWO, R.K.; DAHUNSI, O.A. Development of a Multi Degree-of-Freedom Vibration Exciter for Laboratory Applications. International Journal of Engineering e Manufacturing, 2020.
- PALAZZOLO, Alan. **Vibration Theory and Applications with Finite Elements and Active Vibration Control**. [S.l.]: Wiley, 2016.
- PREUMONT, André. **Vibration Control of Active Structures**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1968.
- RAO. **Structural Vibration: Analysis and Damping**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008.
- RAY W. CLOUGH, Joseph Penzien. **Dynamics of Structures**. [S.l.]: Computers Structures, Inc, 2003.
- RIBEIRO, E. R. O. **Caracterização e Construção de Uma Bancada Didática para Estudos em Absorvedores Dinâmicos de Vibrações**. [S.l.]: CEFET-MG, 2015.
- ROY R. CRAIG, Jr. **Structural Dynamics: An Introduction Computer Methods**. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc, 1981.
- SCHMITZ. **Mechanical Vibrations: Modeling and Measurement**. [S.l.]: Springer, 2012.
- SILVA, Clarence W. de. **Vibration: Fundamentals and Praticce**. [S.l.]: Taylor Francis Group, LLC, 2006.
- SILVA, REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL MARCELO ARAUJO DA. **Introdução à Dinâmica das Estruturas: Para Engenharia Civil**. [S.l.]: Blucher, 2013.
- SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. [S.l.]: Elsevier Editora Ltda, 2014.
- TAMURA, T.; MATSUKI, T.; MIWA, K. Refinement Factors of Mechanical Vibrations on Microstructure of Al-7 mass% Si Alloys. The Minerals, Metals Materials Society, 2011.

ZINGONI, Alphose. **Vibration Analysis and Structural Dynamics for Civil Engineers: Essentials and Group-Theoretic Formulations.**

[S.l.]: CRC, 2015.