Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
Cinemática dos Mecanismos

Aula 2
Graus de Liberdade e Cadeias Cinemáticas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas
Instituto Politécnico – IPUC

Sumário da Aula

- Graus de Liberdade
  - Juntas
  - Corpos Rígidos
  - Tipos de Movimento
  - Juntas vs. DOF
  - Exemplos
- Cadeias Cinemáticas
  - Abertas e Fechadas
  - Mecanismos e Máquinas

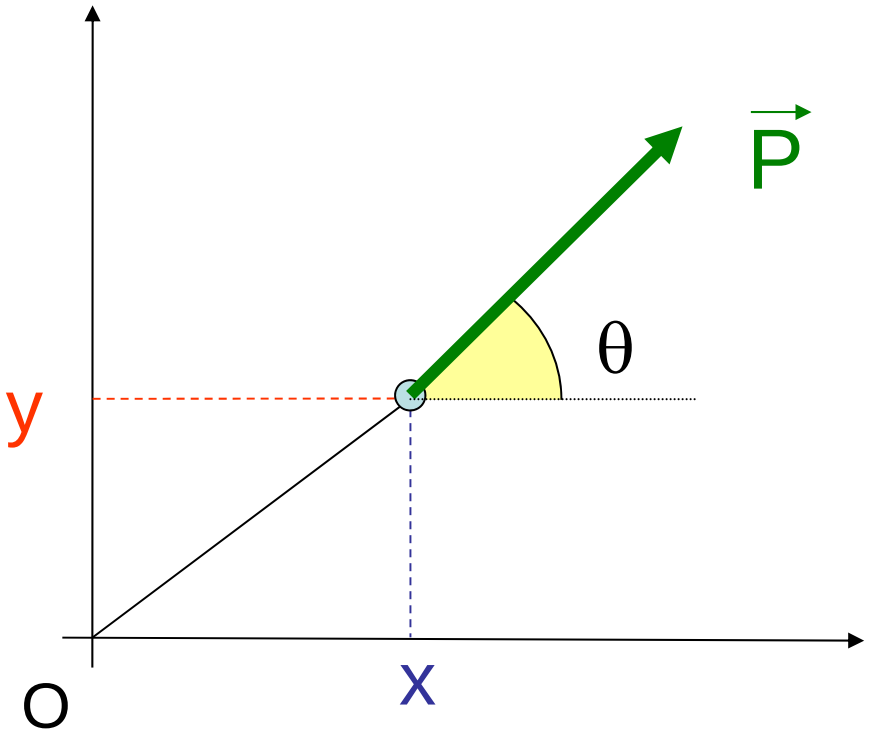
Graus de Liberdade

- GDL ou DOF (*Degree Of Freedom*)
- O que significa Grau de Liberdade?

Definição: é o número de parâmetros independentes que são necessários para se definir a posição de um corpo no espaço em qualquer instante.

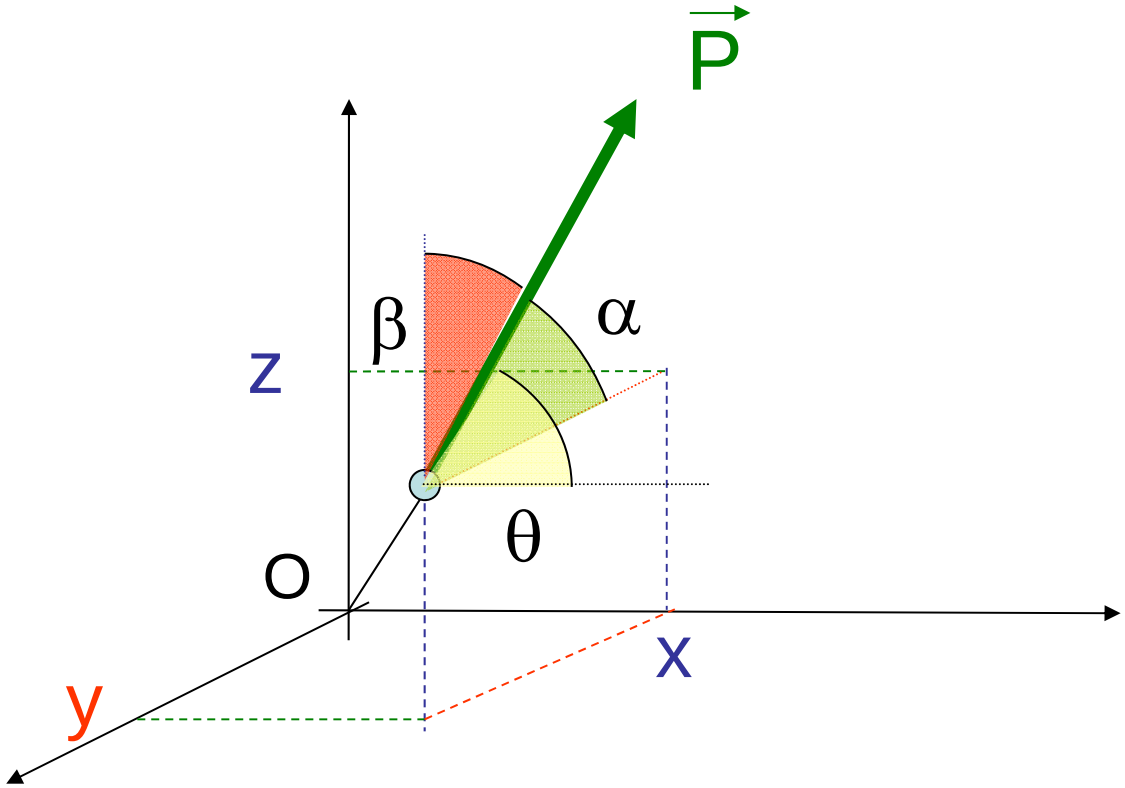
Graus de Liberdade

- No Plano: 3 GDL



Graus de Liberdade

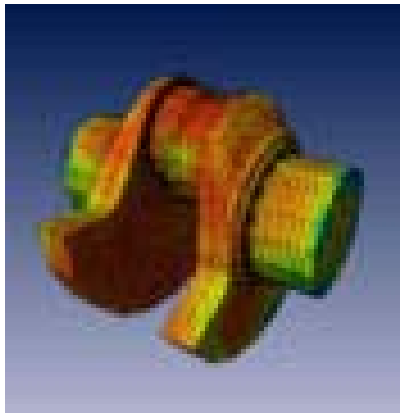
- No Espaço: 6 GDL

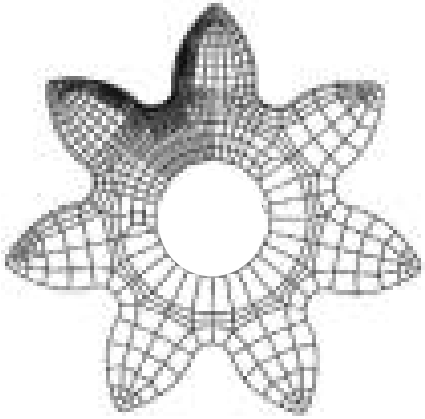


Graus de Liberdade

- Corpo Rígido

Definição: Corpo que não sofre deformações em nenhuma de suas direções

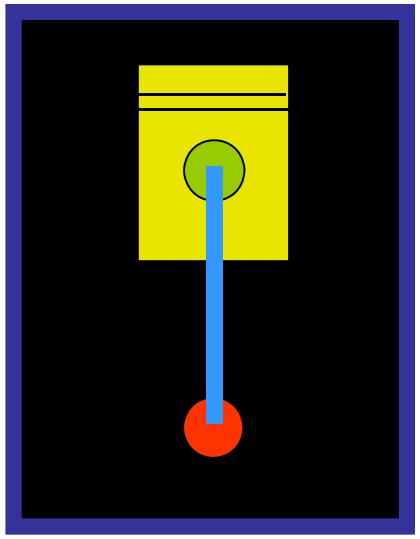




Graus de Liberdade

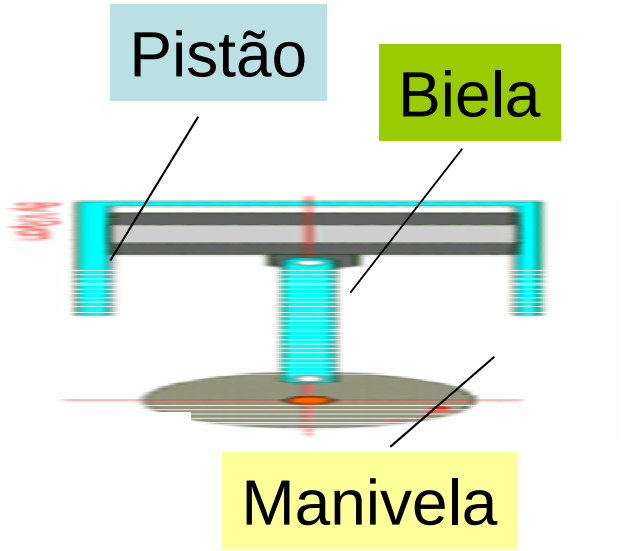
- Link

Definição: Corpo que une 2 juntas



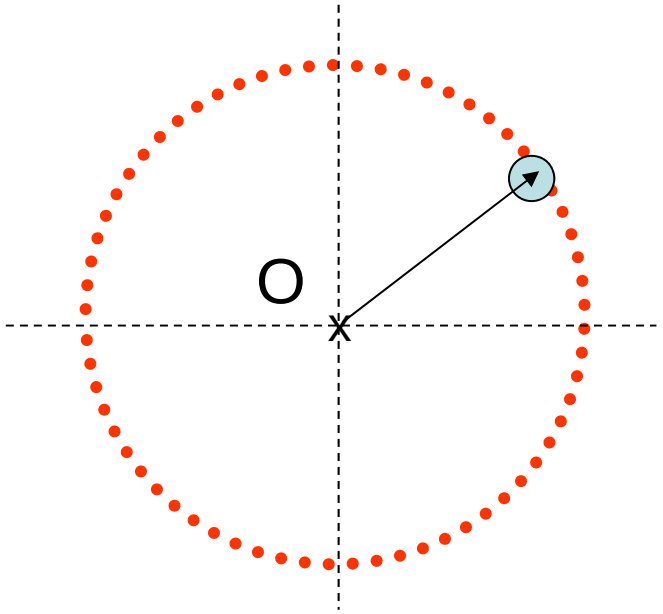
Graus de Liberdade

- Tipos de Movimento
  - Rotação Pura
  - Translação Pura
  - Movimento Complexo
    - Rotação + Translação



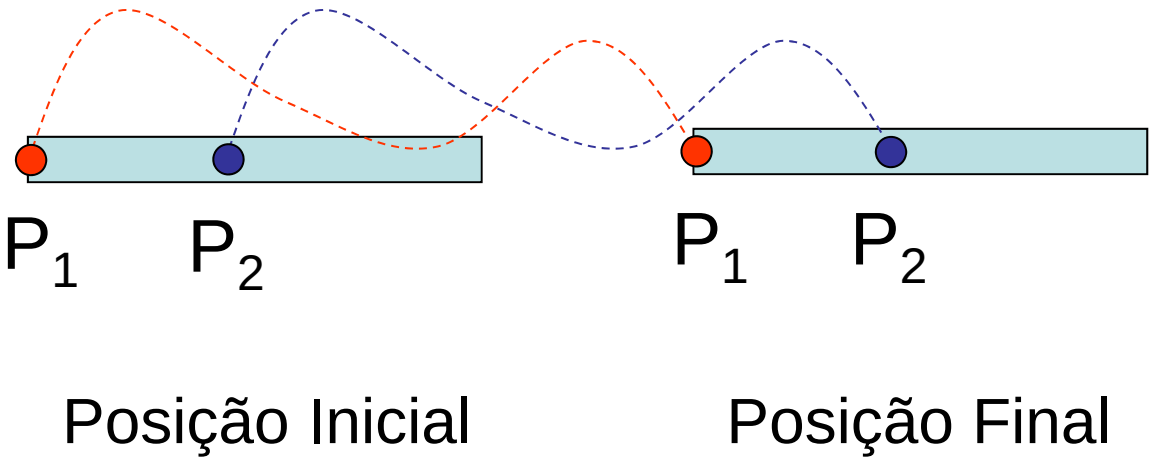
Graus de Liberdade

- Rotação Pura
  - Todos os pontos do corpo descrevem trajetórias circulares



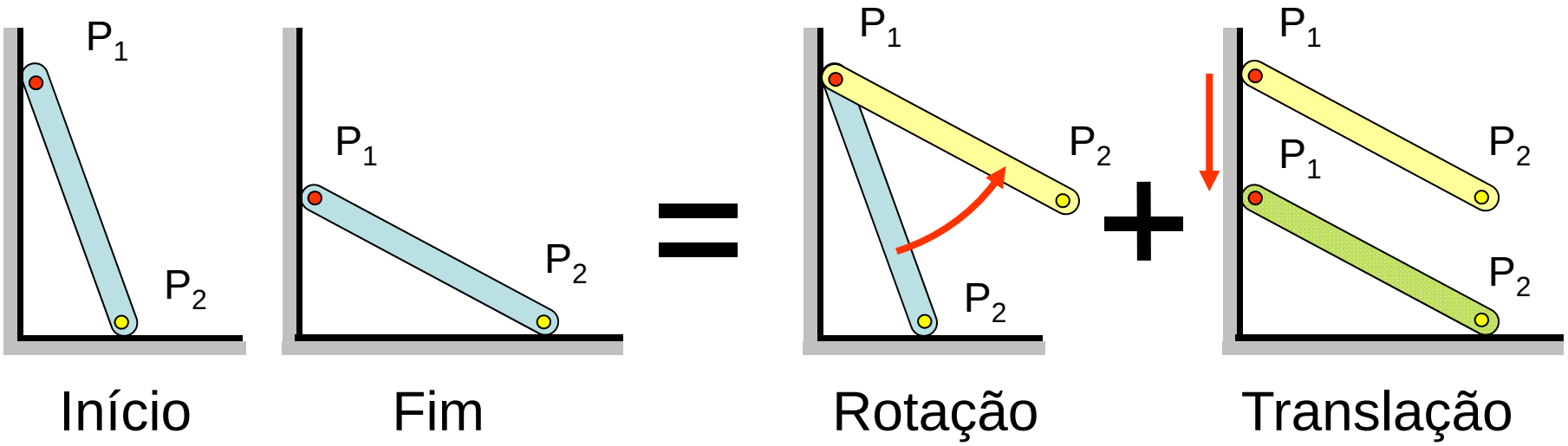
Graus de Liberdade

- Translação Pura
  - Todos os pontos do corpo descrevem trajetórias paralelas (curvas ou retas)



Graus de Liberdade

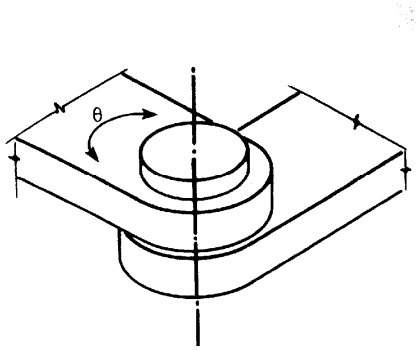
- Movimento Complexo
  - Pode ser descrito como a combinação de rotação e translação



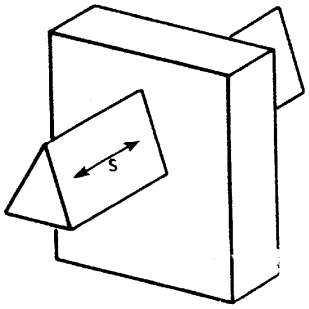
Graus de Liberdade

- Juntas *(Joints)*

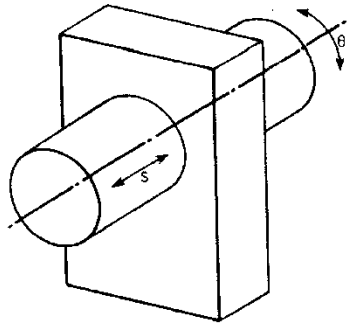
Definição: elemento que conecta 2 corpos e que permite a transmissão de força ou torque. Atuam como restrições geométricas.



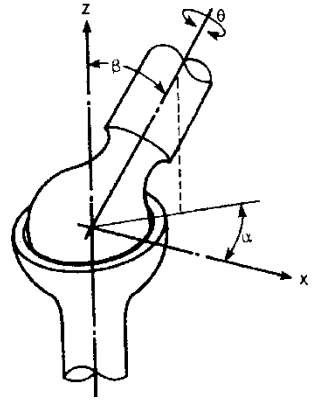
Rotacional



Prismática

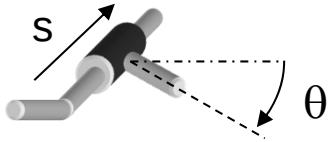
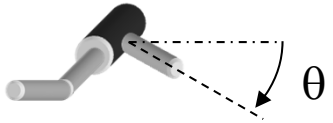
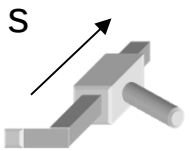
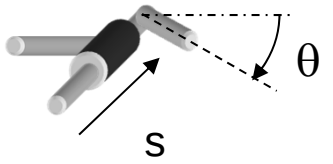


Cilíndrica

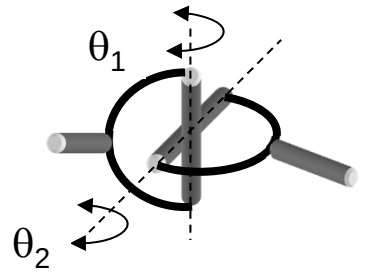
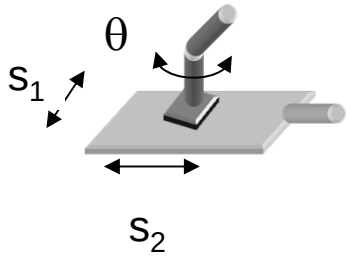


Esférica

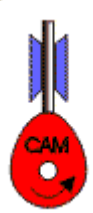
Juntas versus DOF

Tipo	Símbolo	Esquema	GDL	β
Helicoidal	**H**		**1**	θ
Rotação	**R**		**1**	θ
Prismática	**P**		**1**	**s**
Cilíndrica	**C**		**2**	θ **s**

Juntas versus DOF

Tipo	Símbolo	Esquema	GDL	β
Universal	**T**		**2**	$\theta_1\ \theta_2$
Plana	**E**		**3**	$\theta\ s_1\ s_2$
Esférica	**S**		**3**	$\theta\ \psi\ \phi$

Juntas versus DOF

Tipo	Símbolo	Esquema	GDL	β
Contato	**Co**		**1**	**Rotação SEM Escorrega-mento**
Engrenagem	**Eng**		**2**	**Rotação com Escorrega-mento**
Came - Seguidor	**CS**		**2**	**Translação com Escorrega-mento**

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares

- Critério de Kutzbach

$$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$$

- Onde:

  N: Número de GDLs

  B: Número de Total de Corpos (incluindo o solo)

  n_{J1}: Número de Juntas com 1 GDL

  n_{J2}: Número de Juntas com 2 GDLs

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares

- Critério de Kutzbach

$$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$$

- Se:

  N = 0 : Sistema Estático

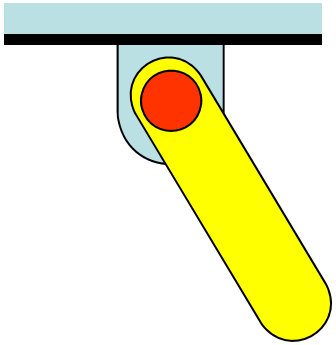
  N > 0 : Sistema com “N” graus de liberdade

  N < 0 : Sistema Hiperestático

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares - Exemplos

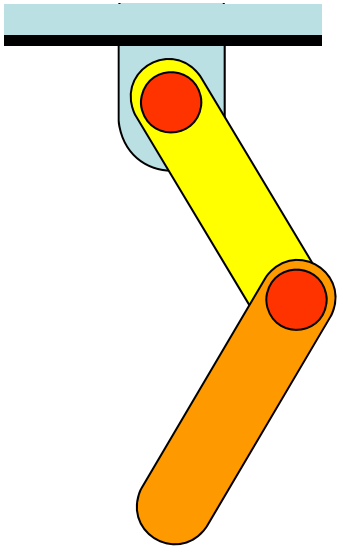
- Pêndulo Simples



$B = 2 \quad n_{J1} = 1 \quad n_{J2} = 0$

$N = 3.(2-1) – 2.(1) – (0) =$ 1 GDL

- Pêndulo Duplo



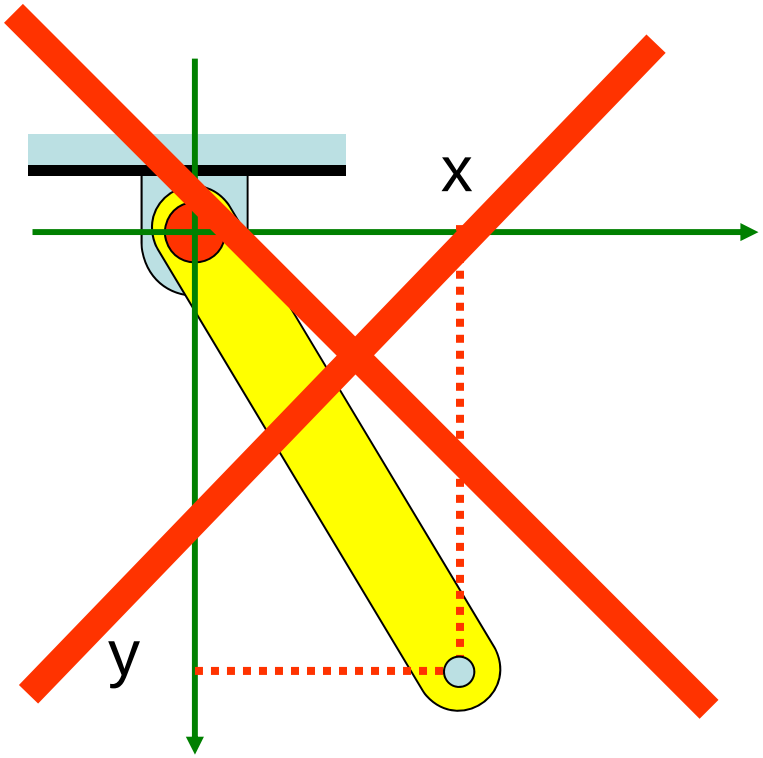
$B = 3 \quad n_{J1} = 2 \quad n_{J2} = 0$

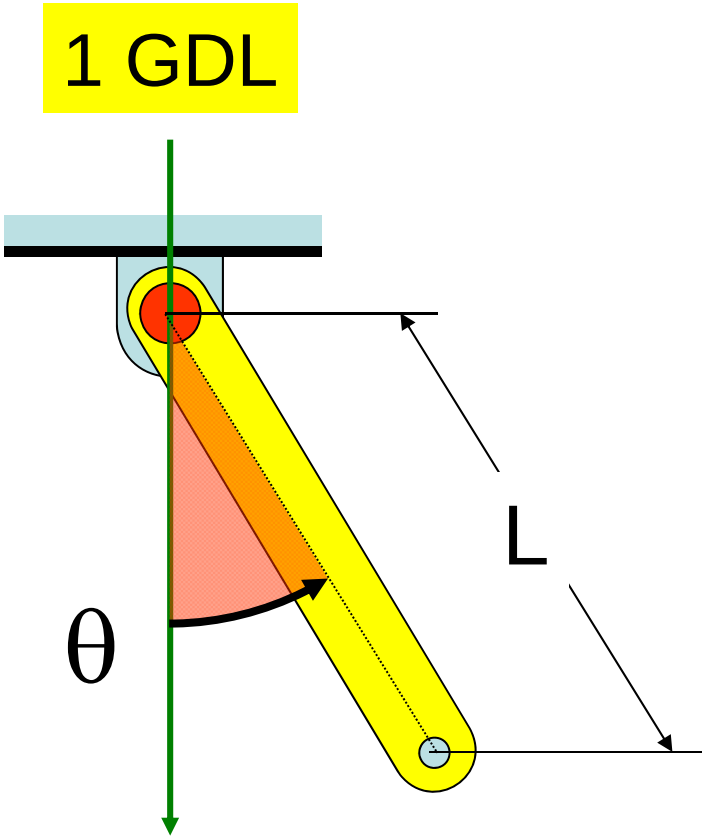
$N = 3.(3-1) – 2.(2) – (0) =$ 2 GDL

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Pêndulo Simples

- Quais são os GDLs?



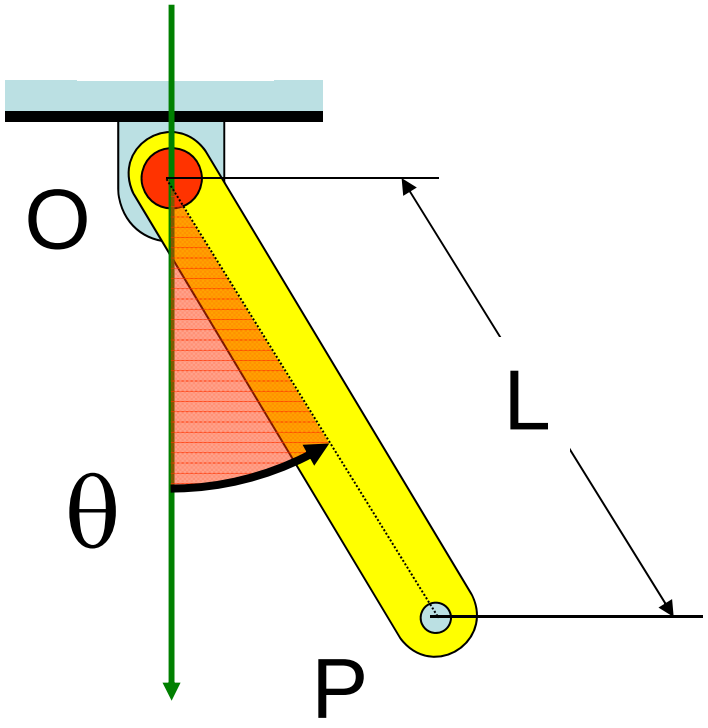


Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Pêndulo Simples

- Equações de Posição:

1 GDL



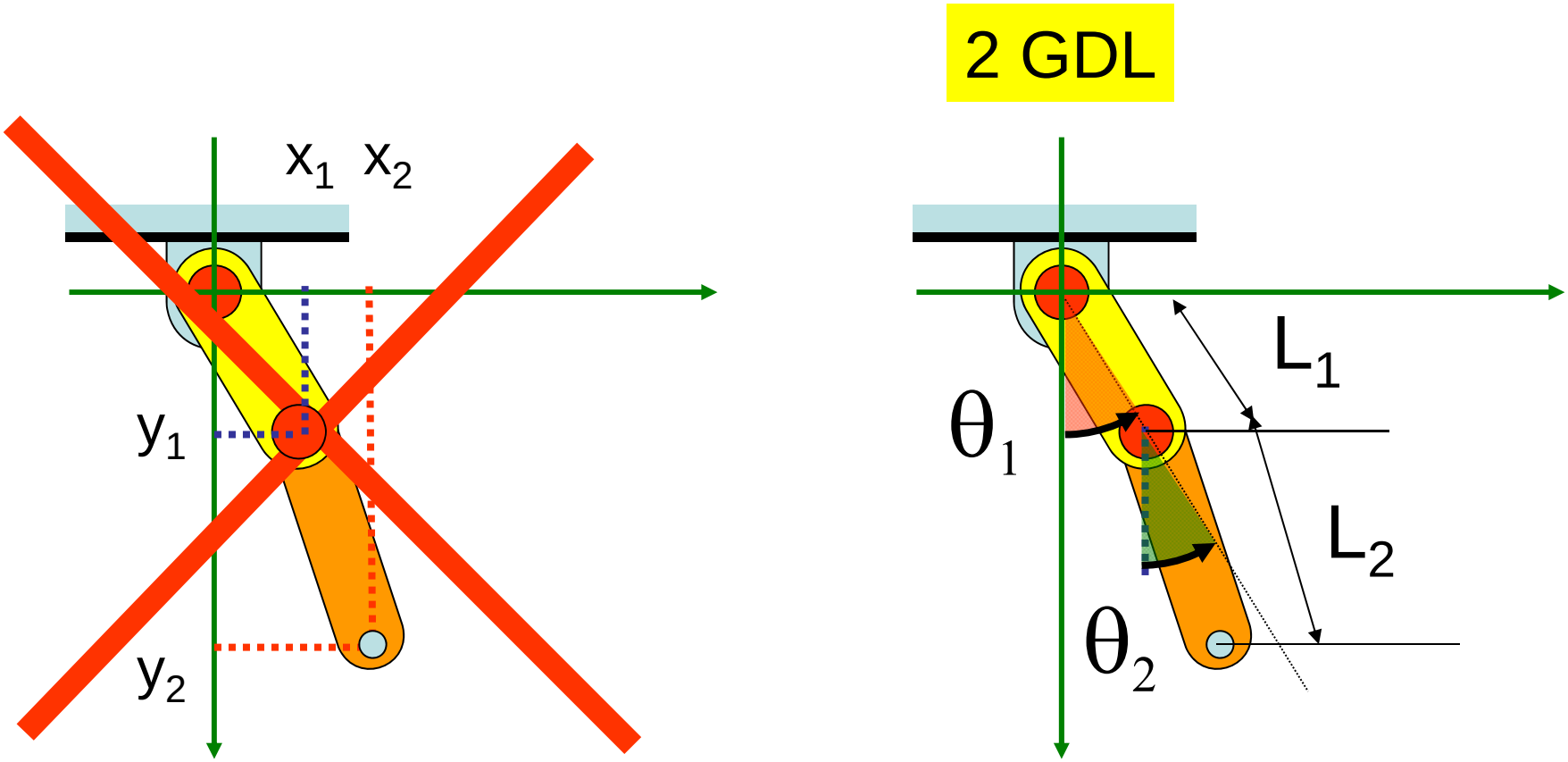
$$\vec{P} = L.e^{i\theta}$$

$$\vec{P} = L.(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Pêndulo Duplo

- Quais são os GDLs?

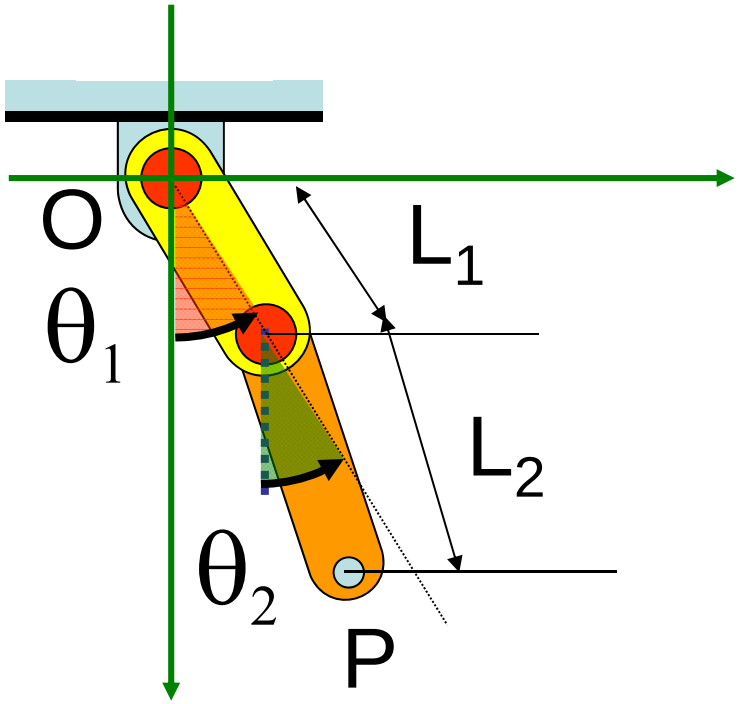


Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Pêndulo Duplo

- Equações de Posição:

2 GDL



$$\vec{P} = L_1.e^{i\theta_1} + L_2.e^{i\theta_2}$$

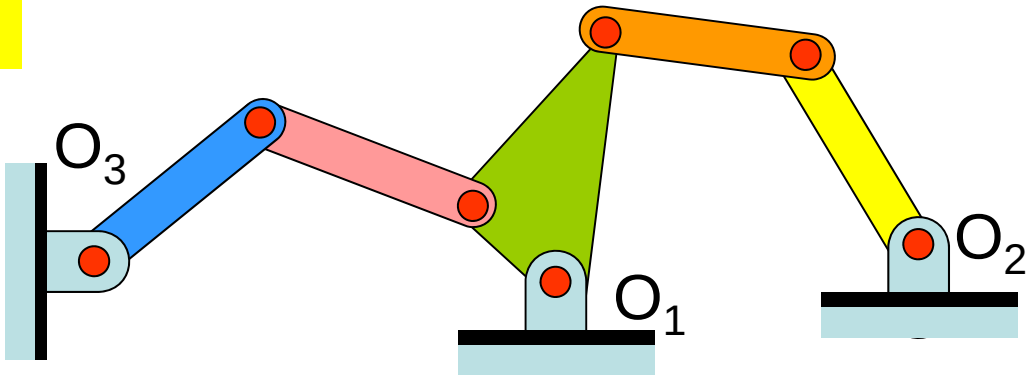
$$\vec{P} = L_1.(\sin\theta_1\,\vec{i} + \cos\theta_1\,\vec{j}) + L_2.(\sin\theta_2\,\vec{i} + \cos\theta_2\,\vec{j})$$

Graus de Liberdade

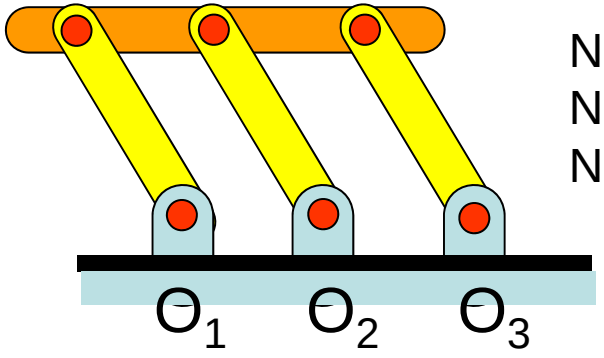
Mecanismos Planares – Observações

(1) Contagem do solo

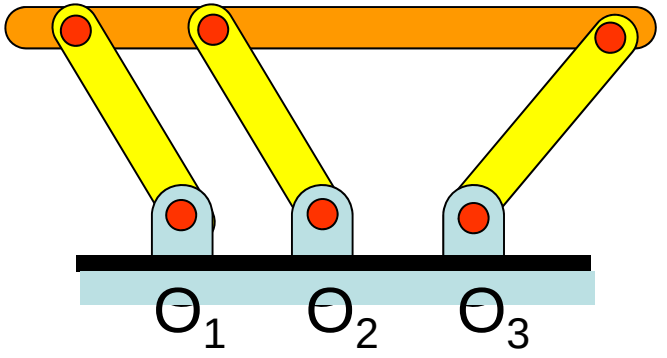
$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$
$N = 3.(6-1) - 2.(7) - 0$
$N = 1$



(2) Existem exceções ao Critério de Kutzbach



$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$
$N = 3.(5-1) - 2.(6) - 0$
$N = 0$, mas $N = 1$

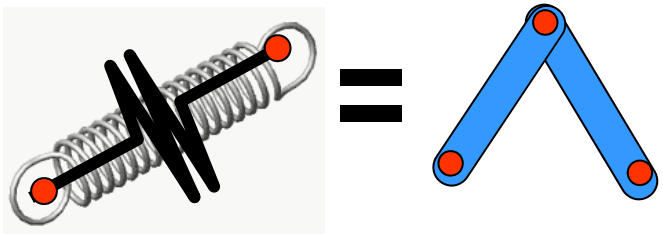


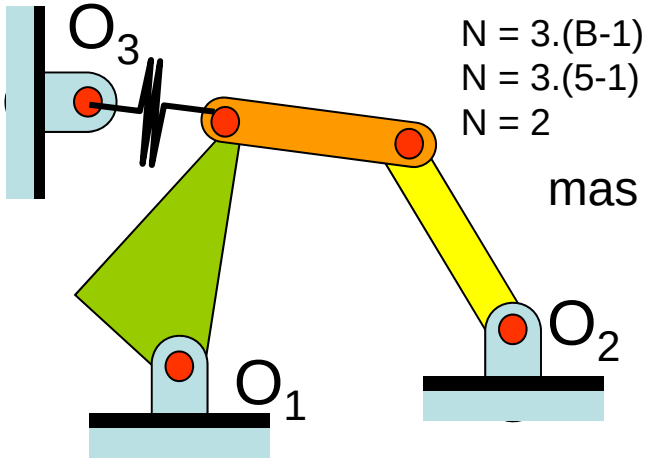
Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Observações

(3) Molas

$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$
$N = 3.(3-1) - 2.(3) - 0$
$N = 0$, mas pode ser $N = 1$
ou $N = 2$ (extrem. móveis)

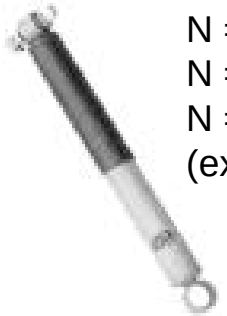




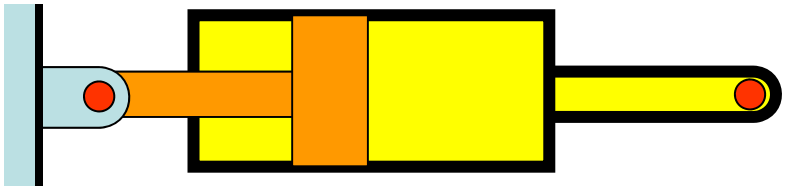
$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$
$N = 3.(5-1) - 2.(5) - 0$
$N = 2$

mas $N = 1$

(4) Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos



$N = 3.(B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$
$N = 3.(2-1) - 2.(1)$
$N = 1$, mas pode ser $N = 2$
(extremidades móveis)



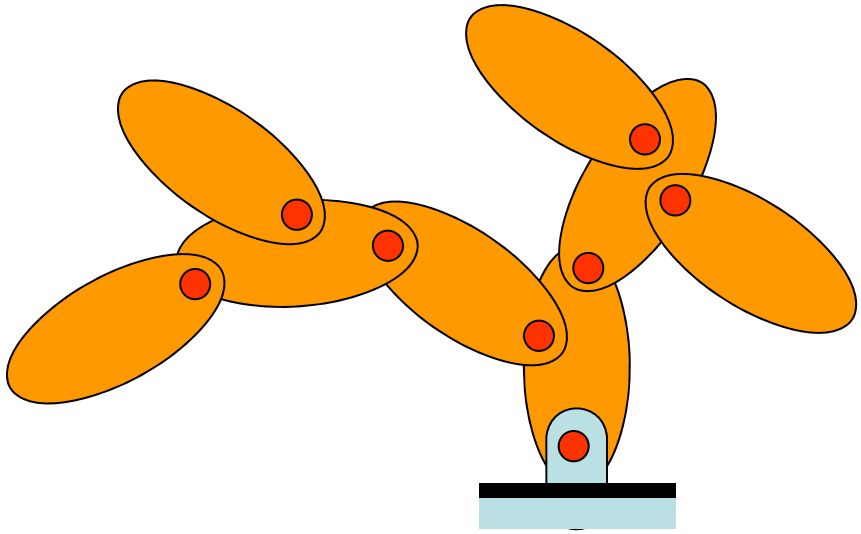
Sumário da Aula

- Graus de Liberdade
  - Juntas
  - Corpos Rígidos
  - Tipos de Movimento
  - Juntas vs. DOF
  - Exemplos
- Cadeias Cinemáticas
  - Abertas e Fechadas
  - Mecanismos e Máquinas

Cadeias Cinemáticas

Topologias

- Cadeias Abertas
  - A trajetória entre 2 corpos é única
  - Excluindo o solo, o número de corpos é igual ao número de juntas

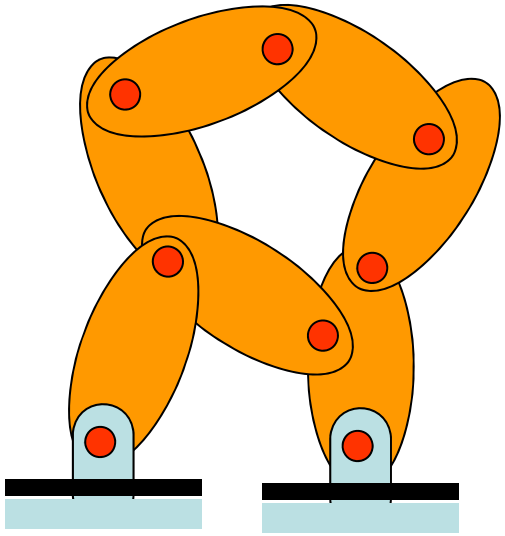


Cadeias Cinemáticas

Topologias

- Cadeias Fechadas
  - Loops

$$n_L = n_J - n_B$$



- Onde:

  n_L: Número de Loops

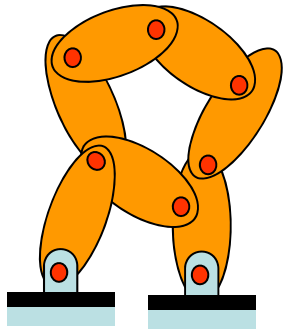
  n_J: Número de Juntas

  n_B: Número de Corpos (excluindo o solo)

Cadeias Cinemáticas

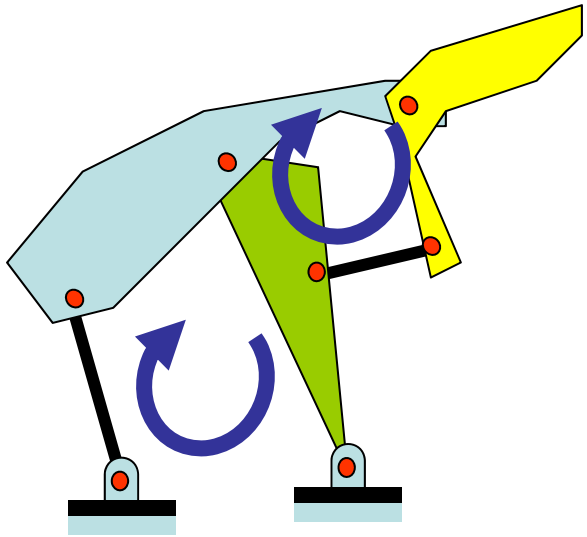
Topologias

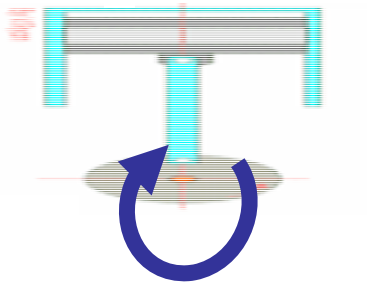
- Cadeias Fechadas - Exemplos



$$n_L = n_J - n_B$$

n_B: Número de Corpos exclui o solo!





Cadeias Cinemáticas

Topologias

- Cadeias Parcialmente Fechadas

Cadeias Cinemáticas

Graus de Liberdade

- Não considerando o solo:

$$N = 3.n_B - \sum_{i=1}^{n_J} (3 - f_i)$$

- Onde:

  N: Número de GDLs

  n_B: Número de Corpos (excluindo o solo)

  n_J: Número de Juntas

  f_i: GDL da junta i

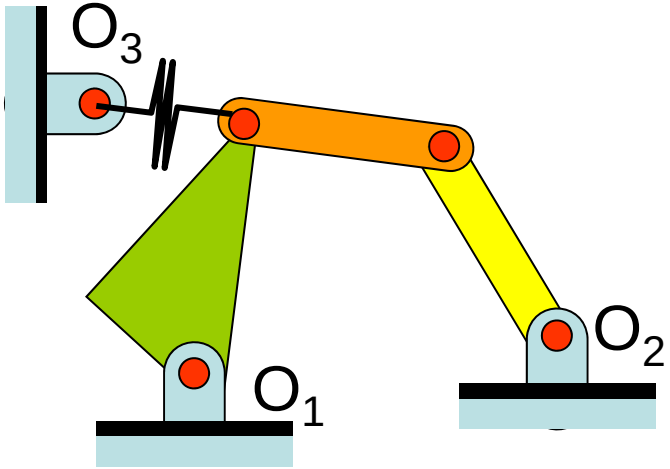
Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Exemplos

n_B: corpos (excl. solo)
f_i: nº GDL da junta i

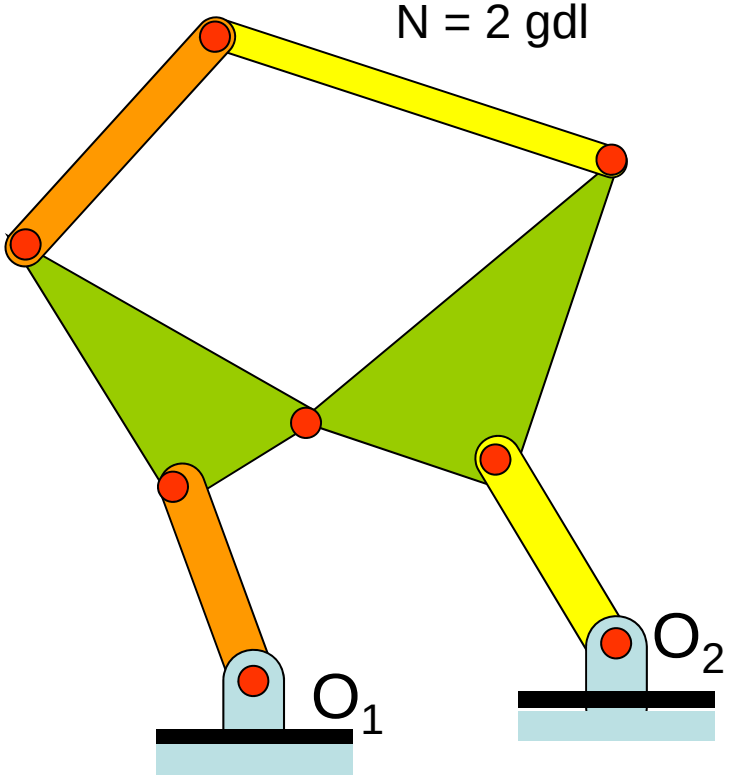
$$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$$

$N = 3.4 – [5.(3-1)]$
$N = 2$ gdl



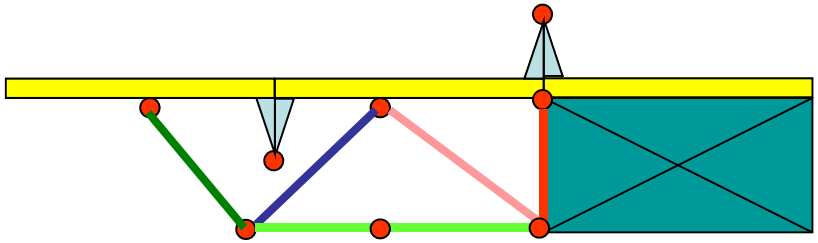
$$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$$

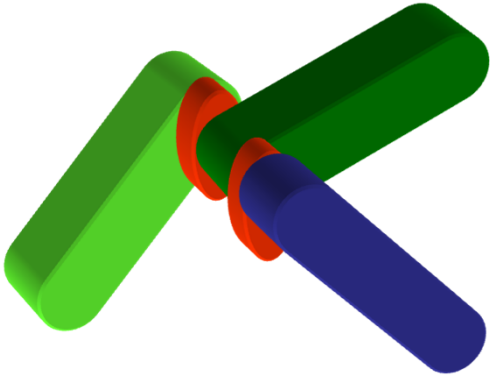
$N = 3.6 – [8.(3-1)]$
$N = 2$ gdl



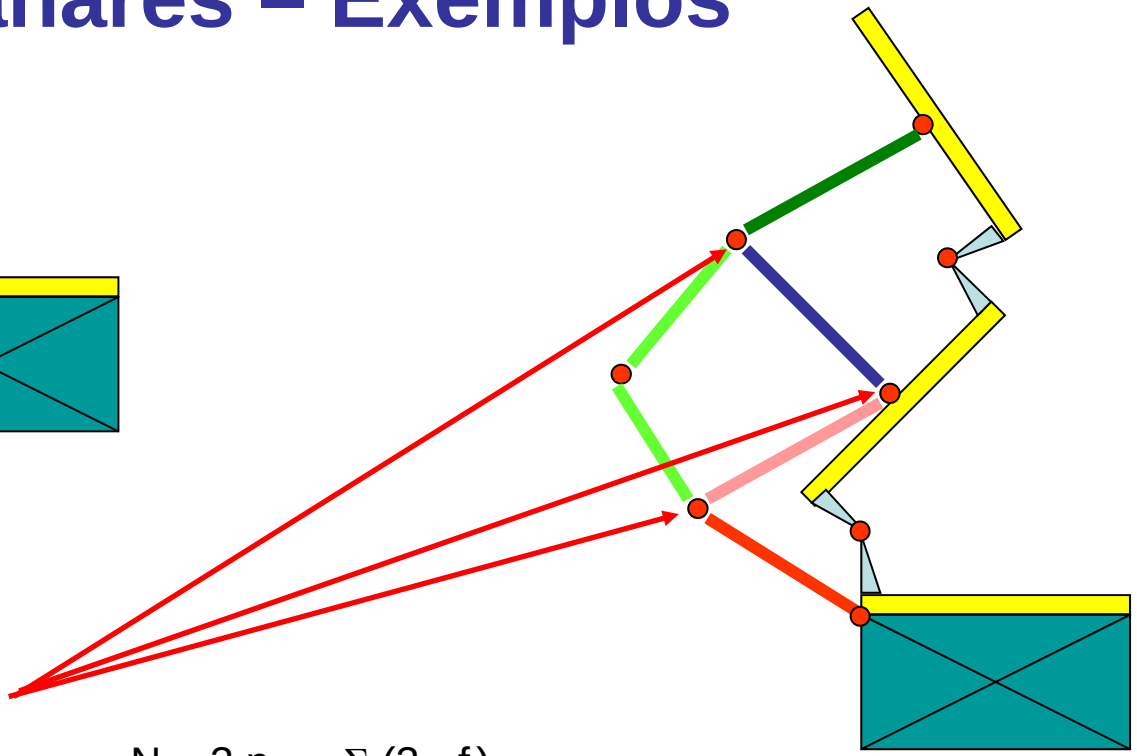
Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Exemplos





Juntas múltiplas:
n° juntas = n° corpos – 1
No caso acima:
$f_1 = n_B - 1 = 3 - 1 = 2$



$N = 3.n_B - \Sigma (3 - f_i)$
$N = 3.8 - [8.(3-1) + 1(3-1) + 1(3-1) + 1(3-1)]$
$N = 2$ gdl

Ou, no critério “antigo”, considerando o solo:

$N = 3.(n_B-1) - 2.n_{J1} - n_{J2}$
$N = 3.(9-1) - 2.(5 + 2 + 2 + 2) - 0$
$N = 2$ gdl

Graus de Liberdade

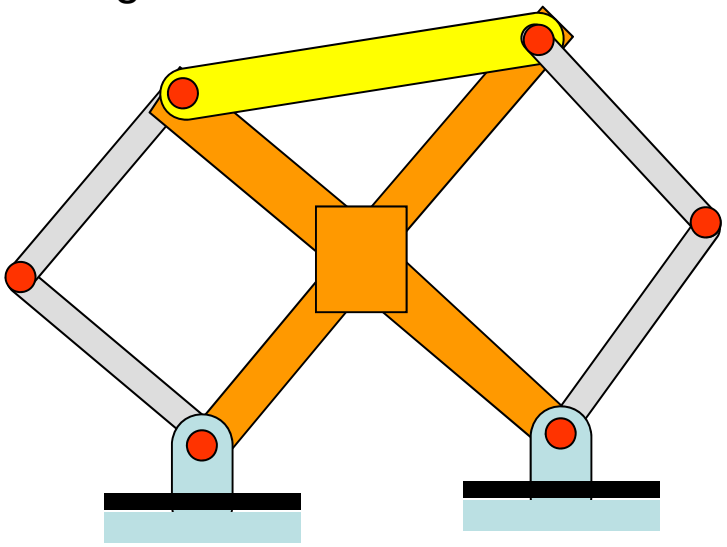
Mecanismos Planares – Exemplos

$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$

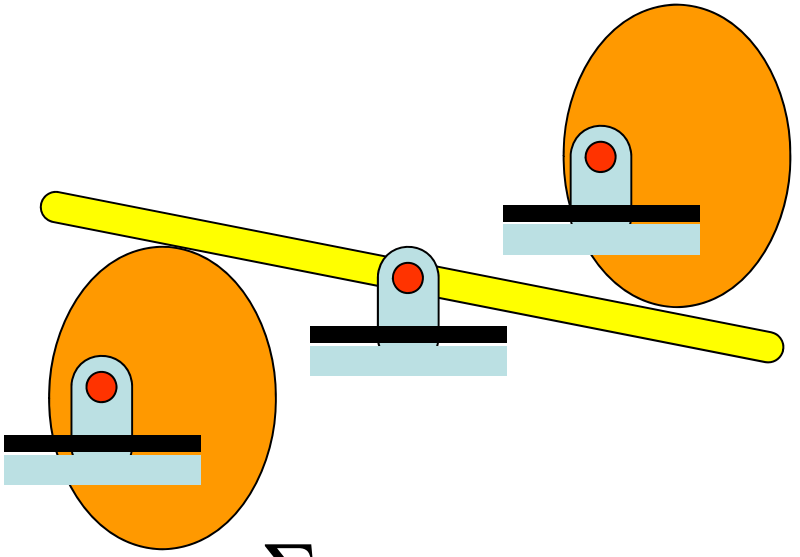
$n_B = 4$ pois a cruzeta limita o movimento e daí funcionará como solo, travando a peça amarela (tb virará solo)

$N = 3.4 - [6.(3-1)]$

$N = 0$ gdl



O_1 O_3



$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$

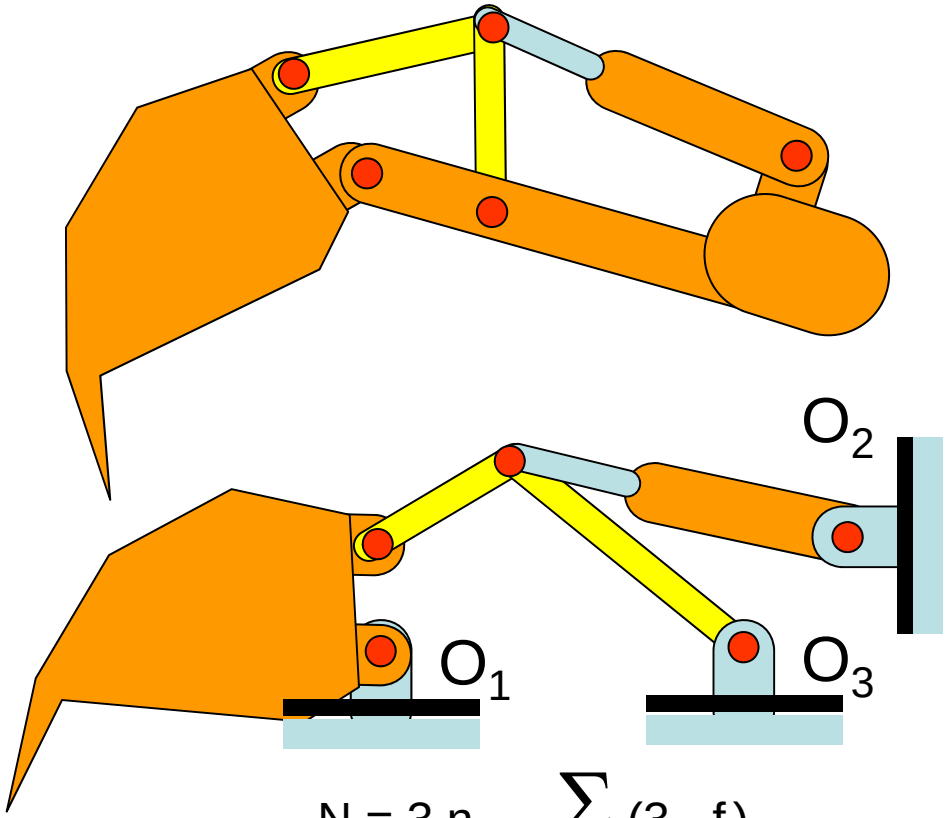
$N = 3.3 - [3.(3-1) + 2.(3-2)]$

$N = 1$ gdl (com contato)

$N = 3$ gdl (sem contato)

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Exemplos



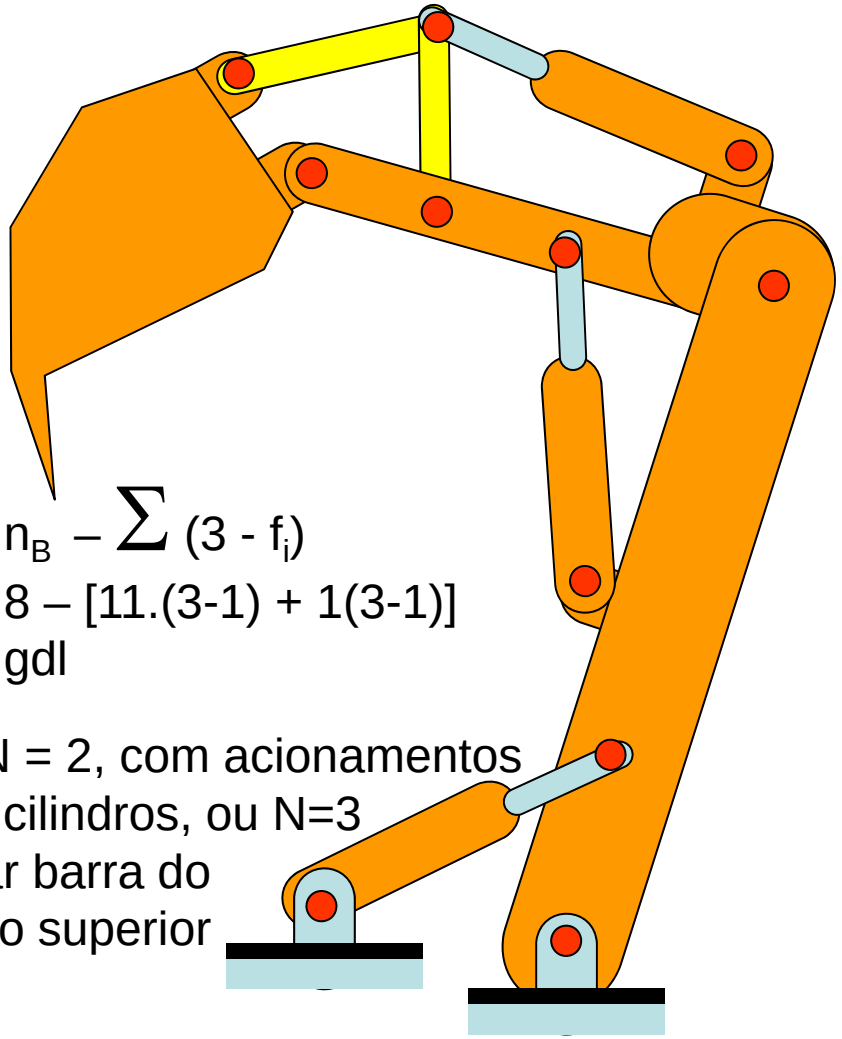
$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$

$N = 3.4 - [5.(3-1) + 1.(3-1)]$

$N = 0$ gdl (barra em O_3 trava)

Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Exemplos



$$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$$

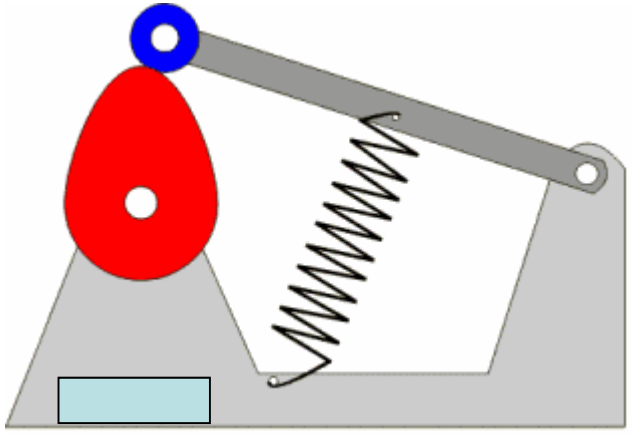
$$N = 3.8 - [11.(3-1) + 1(3-1)]$$

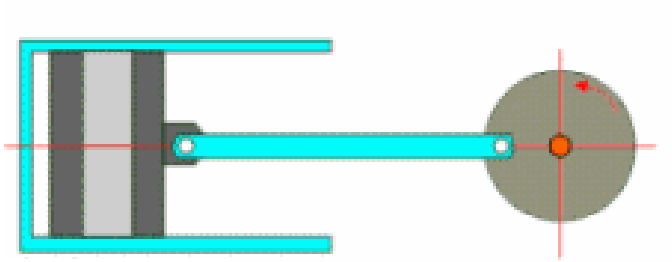
$$N = 0 \text{ gdl}$$

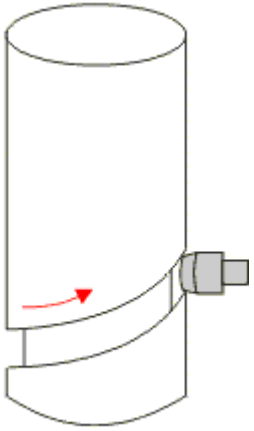
mas N = 2, com acionamentos dos 2 cilindros, ou N=3 se tirar barra do cilindro superior

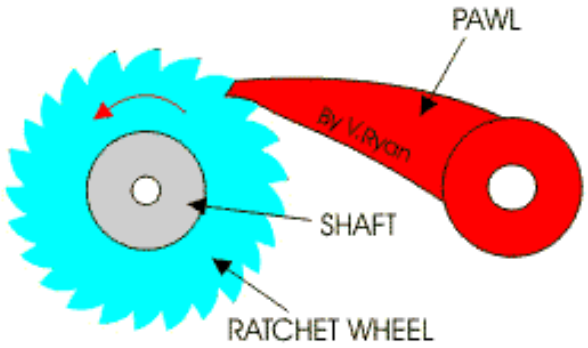
Graus de Liberdade

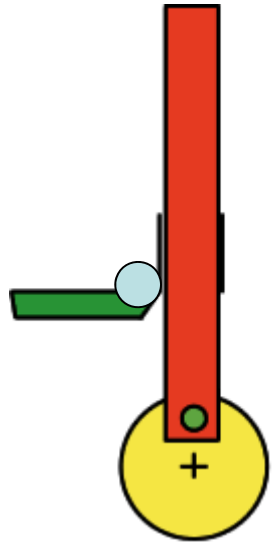
Mecanismos Planares – Exemplos





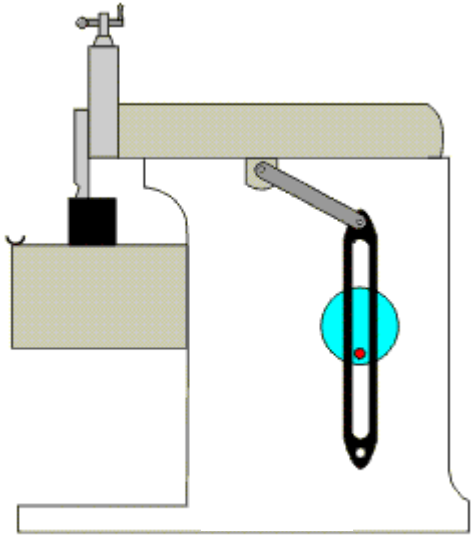


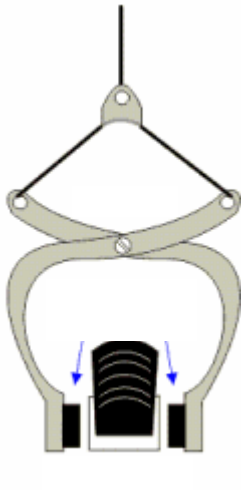


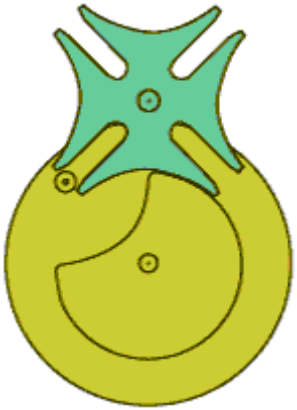


Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Exemplos

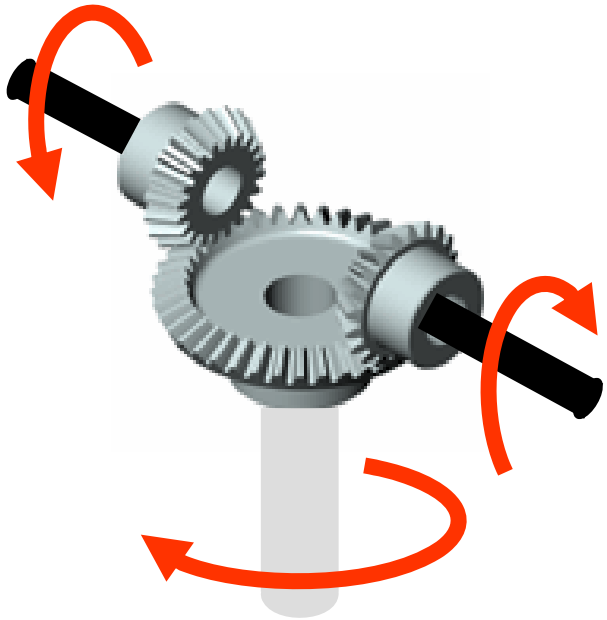


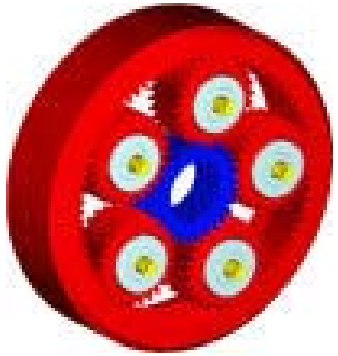




Graus de Liberdade

Mecanismos Planares – Exemplos

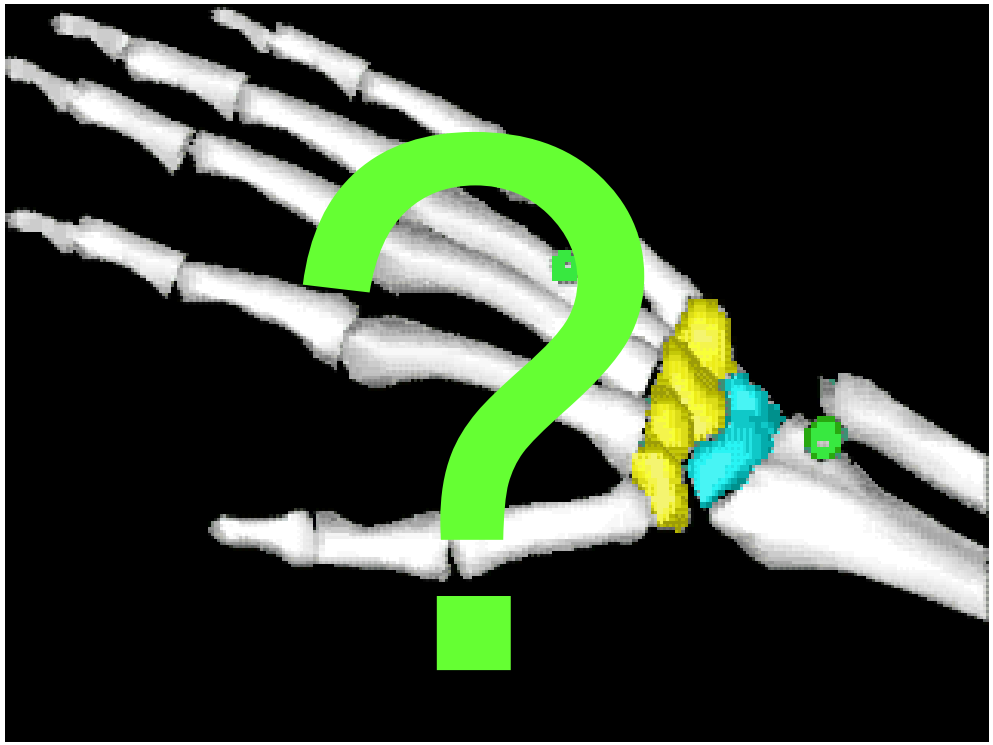




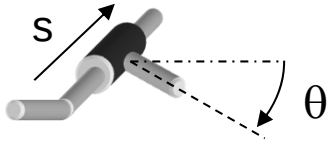
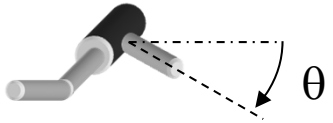
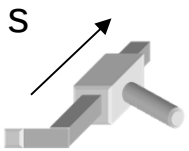
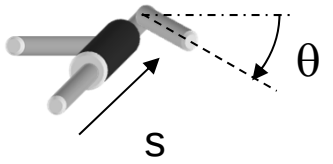
Graus de Liberdade

Pergunta da Aula Passada

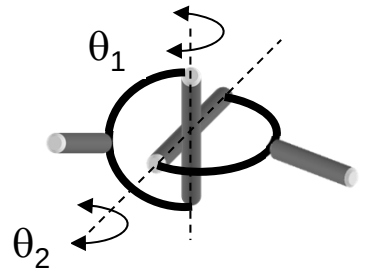
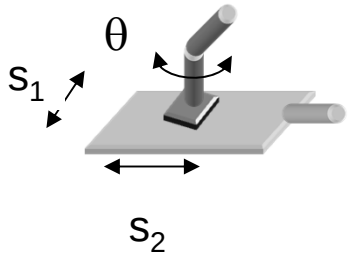
Quantos GDLs possui uma mão?



Juntas versus DOF

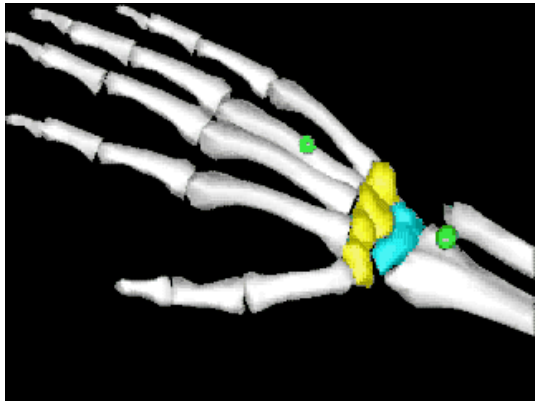
Tipo	Símbolo	Esquema	GDL	β
Helicoidal	**H**		**1**	θ
Rotação	**R**		**1**	θ
Prismática	**P**		**1**	**s**
Cilíndrica	**C**		**2**	θ **s**

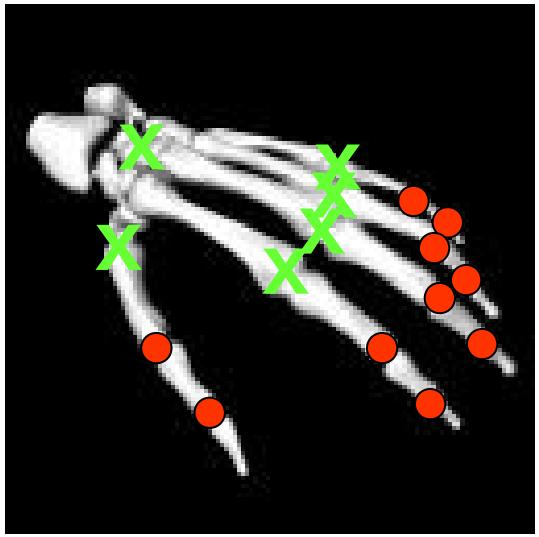
Juntas versus DOF

Tipo	Símbolo	Esquema	GDL	β
Universal	**T**		**2**	$\theta_1\ \theta_2$
Plana	**E**		**3**	$\theta\ s_1\ s_2$
Esférica	**S**		**3**	$\theta\ \psi\ \phi$

Graus de Liberdade

Pergunta da Aula Passada





$$N = 3.n_B - \sum (3 - f_i)$$

$n_B = 16$ (15 falanges + dorso)

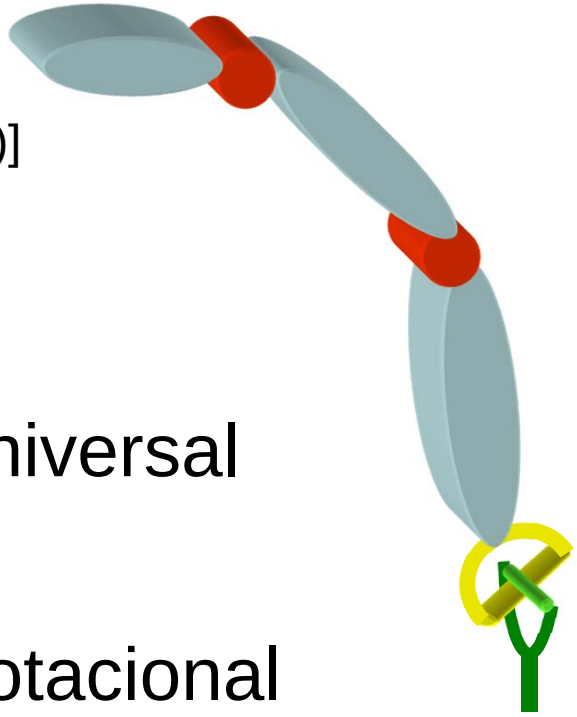
$f_i = 10$ (1gdl) + 6 (2gdl)

$N = 3.16 - [10.(3-1) + 6.(3-2)]$
$= 48 - [20+6] = 48 - 26$

N = 22 GDL

X Junta Universal

Junta Rotacional



Próxima Aula

- Mecanismos Simples
- Mecanismos Complexos

- Pergunta:

E o conjunto braço, ante-braço e mão, quantos GDLs possui?