



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Departamento de Engenharia Mecatrônica

Engenharia Mecatrônica

Síntese de Controlador Polinomial: Sistema Quanser 2-DOF

Mateus Alves de Sales

Thiago Henrique de Faria Costa

Divinópolis

20 de junho de 2022

Resumo

O presente relatório tem por objetivo aproximar o sistema Quanser Aero 2-DOF Helicóptero por um modelo de segunda ordem, por meio da resposta em degrau, podendo o mesmo ser classificado como um sistema com múltiplas entradas e saídas (MIMO) e também como um sistema de apenas uma entrada e uma saída (SISO). Para estabilização do sistema diante de algumas condições pré estabelecidas, projetou-se e validou-se dois controladores, sendo um PID via síntese polinomial e o outro por abordagem polinomial tradicional. Tais controladores deram origem as funções de transferência que foram validadas por meio da realização de uma sequência de degraus. Após plotar as respostas dos controladores diante desses e fazer uma análise dos gráficos, notou-se que ambos os controladores atendem as condições iniciais de overshoot e tempo de acomodação pré estabelecidas. Concluiu-se também que a validação do modelo de segunda ordem do sistema indica que a resposta deste corresponde de maneira satisfatória à resposta do sistema real. Além disso, notou-se que o sistema possui erro de regime permanente nulo com ambos os controladores.

Palavras-chaves: Quanser, controlador, polinomial, PID, controle.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
2	Preliminares	2
2.1	Aproximação por um sistema de segunda ordem	2
2.2	Abordagem Polinomial	4
2.3	Síntese Controlador PID via Abordagem Polinomial	5
3	Helicóptero Sistema Quanser Aero 2-DOF	7
3.1	Modelagem Matemática	7
3.2	Condições iniciais	8
3.3	Resultados e Discussões	9
4	Conclusão	16
	Referências	17

1 Introdução

Para projetar sistemas de controle que permitam ser analisados de maneira mais profunda, parte-se de equações e modelos matemáticos que conseguem descrever a dinâmica de sistemas físicos, em que em sua maioria, são caracterizadas por equações diferenciais ordinárias de diversas ordens. Tais equações são obtidas por meio de um processo chamado modelagem, que possui uma dificuldade de obtenção relacionada a precisão do estudo que deseja-se realizar a cerca do comportamento do sistema. Uma das formas de obtenção de um modelo é através da resposta ao degrau (JUNIOR, 2017), em que no estudo aqui realizado permite a obtenção de parâmetros do transitório do sistema a fim de aproximá-lo por um sistema de segunda ordem.

O sistema a ser analisado é o Quanser Aero 2-DOF, que trata-se de um helicóptero composto por duas hélices, uma base e pelos motores responsáveis pelo acionamento das hélices (LOPES *et al.*, 2020). O sistema pode ser classificado como MIMO - múltiplas entradas e múltiplas saídas-, logo, o presente estudo visa primeiramente transformar o sistema em um sistema do tipo SISO - entrada singular e saída singular-, para que seja possível a aplicação das técnicas até aqui estudadas. Posteriormente, realiza-se uma aproximação por um modelo de segunda ordem, além de obter controladores polinomiais tradicionais e PID que garantem as especificações pré estabelecidas de máximo sobressinal e tempo de acomodação. O presente relatório é composto por Introdução - capítulo 1 -, no qual são introduzidos os assuntos tratados e os objetivos do estudo, Preliminares - capítulo 2 - em que é feita uma revisão bibliográfica das técnicas utilizadas, Sistema Quanser Aero 2-DOF - capítulo 3 -, em que apresenta-se a dinâmica, as condições iniciais do sistema, e os resultados e discussões obtidos e, por fim, Conclusão - capítulo 4 - a qual sintetiza-se os passos realizados no trabalho.

1.1 Objetivos

Para este estudo tem-se como objetivo analisar as variáveis do sistema Quanser Aero 2-DOF e suas variáveis, aproximar o sistema por um modelo de segunda ordem, projetar e validar dois controladores por síntese polinomial, sendo um do tipo PID, que assegurem as condições iniciais estabelecidas e por fim, analisar o comportamento do modelo.

2 Preliminares

Nesse capítulo faz-se uma revisão da bibliografia utilizada no desenvolvimento do estudo proposto.

2.1 Aproximação por um sistema de segunda ordem

Pode-se aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de segunda ordem subamortecido, dado por:

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}, \quad (2.1)$$

em que, K é o ganho estático do sistema, θ o atraso ou tempo morto, τ é a constante de tempo do sistema e ζ é o coeficiente de amortecimento (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

É possível obter o ganho estático K por meio das variações da saída e da entrada do sistema, como em:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad (2.2)$$

em que, Δy é a diferença entre o ângulo quando se aplica o degrau positivo de 10% e o ângulo inicial. Já Δu é a diferença do sinal de controle quando se aplica um degrau positivo de 10% e o valor inicial.

O modelo representado acima pode ser reescrito de maneira a desconsiderar o tempo morto, passando a ser descrito da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.3)$$

em que ω_n é a frequência natural do sistema. O Modelo 2.3 é descrito por três parâmetros, são eles: K , ζ e ω_n que podem ser encontrados a partir do desenvolvimento das relações da análise de resposta transitória do sistema, conforme a Figura 1.

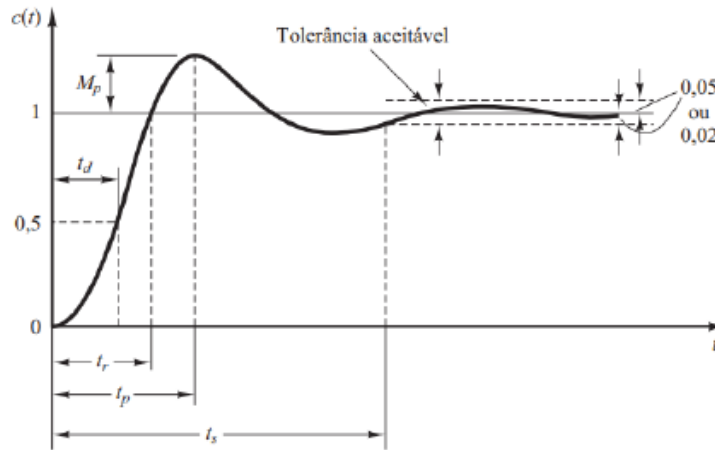


Figura 1 – Curva de resposta em degrau unitário

Na Figura 1, tem-se que t_d é o tempo morto, t_r é o tempo de subida, t_p é o tempo de pico, M_p o máximo sobressinal e t_s o tempo de acomodação (OGATA, 2010).

O tempo de subida é definido como o tempo necessário para a resposta do sistema sair de 0% e alcançar 100% do valor final. O mesmo pode ser descrito da seguinte maneira:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}. \quad (2.4)$$

Para sistemas subamortecidos, costuma-se adotar o intervalo de 0% a 90% do valor final.

O tempo de pico, que é o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico de sobressinal, é dado pela seguinte equação:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (2.5)$$

em que ω_d é a frequência natural amortecida (OGATA, 2010).

O máximo sobressinal (M_p), é o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do ponto de operação e pode ser dado por:

$$M_p = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right). \quad (2.6)$$

Já o tempo de acomodação pode ser determinado como o tempo gasto para a curva de resposta atingir e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final. Essa faixa possui magnitude descrita por uma porcentagem normalmente adotada como 2% ou 5%. Portanto, t_s pode ser representado das seguintes formas:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \forall (0 < \zeta < 0,9), \quad (2.7)$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \forall (0 < \zeta < 0,9), \quad (2.8)$$

em que 2.7 e 2.8 são utilizados para os critérios de 2% e 5%, respectivamente.

2.2 Abordagem Polinomial

Seja um sistema caracterizado pela equação de transferência:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad C(s) \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}. \quad (2.9)$$

Em que $G(s)$ é a função de transferência e $C(s)$ o controlador que tem como função estabilizar o sistema $G(s)$. A malha fechada deste sistema pode ser representada por:

$$G_{MF} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}, \quad (2.10)$$

que ao substituir a equação 2.9 em 2.10 tem-se:

$$G_{MF} = \frac{\frac{B(s)}{A(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}}{1 + \frac{B(s)}{A(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}} = \frac{\beta(s)B(s)}{\alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s)}, \quad (2.11)$$

Em que o denominador de 2.11 é a chamado de Identidade Diofantina:

$$D(s) = \alpha A(s) + \beta B(s). \quad (2.12)$$

Os polinômios $A(s)$ e $B(s)$ são dados por:

$$\begin{aligned} A(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \\ B(s) &= s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n, \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que os polinômios são co-primos e que $A(s)$ é mônico. Além disso, certificando que a Diofantina $D(s)$ é um polinômio estável de grau $\delta(D(s)) = (2n - 1)$, tem-se:

$$D(s) = d_0 s^{2n-1} + d_1 s^{2n-2} + \dots + d_{2n-2} s + d_{2n-1}. \quad (2.14)$$

É possível garantir que a identidade (2.12) admite uma única solução em que $\delta(\alpha(s)) = \delta(\beta(s)) = (n - 1)$ com

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha_0 s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} s + \alpha_{n-1}, \\ \beta(s) &= \beta_0 s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-2} s + \beta_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

dada por:

$$M = E^{-1}D. \quad (2.16)$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \cdots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_1 & \vdots & \ddots & \vdots & b_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-2} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

No caso, M é definida a partir das Equações (2.15), a matriz D é originária da Equação (2.12) e a matriz E é a Matriz de Sylvester, de dimensões $2n \times 2n$:

O controlador polinomial é obtido por:

$$C(s) = \frac{\beta_0 s + \beta_1}{\alpha_0 s + \alpha_1}. \quad (2.18)$$

2.3 Síntese Controlador PID via Abordagem Polinomial

Um processo cujo seu modelo de segunda ordem é dado por:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (2.19)$$

pode-se aplicar um controlador C(s) do tipo PID (Proporcional Integral Derivativo) para estabiliza-lo, de forma que tal controlador é representado pela equação:

$$C(s) = K \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{\beta_0 s^2 + \beta_1 s + \beta_2}{s}, \quad (2.20)$$

em que:

$$\beta_0 = K T_d; \quad \beta_1 = K; \quad \beta_2 = \frac{K}{T_i}. \quad (2.21)$$

Os termos β_0 , β_1 e β_2 são obtidos de modo que a dinâmica da Equação 2.10 seja definida por um caso específico da identidade Diofantina, Equação (2.14), dado por:

$$D(s) = s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0. \quad (2.22)$$

Igualando o denominador do processo com o polinômio 2.22 e realizando as devidas manipulações, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & (b_0 - b_1d_2) \\ b_1 & b_0 & -b_1d_1 \\ b_0 & 0 & -b_1d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 - a_1 \\ d_1 - a_0 \\ d_0 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

em que os termos b são advindos do numerador da planta, os termos a são do denominador, os termos d são obtidos na equação Diofantina e por fim os termos β são valores da função do controlador $C(s)$. Concedendo denominações às matrizes de 2.23 para reduzir o processo de obtenção do controlador a uma equação, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & (b_0 - b_1d_2) \\ b_1 & b_0 & -b_1d_1 \\ b_0 & 0 & -b_1d_0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_2 - a_1 \\ d_1 - a_0 \\ d_0 \end{bmatrix}; \quad (2.24)$$

$$\beta = A^{-1}B. \quad (2.25)$$

Por fim, destaca-se a estrutura do controlador PID industrial com filtro derivativo, representado pela Equação (2.26):

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{1+T_d s}{N}} \right). \quad (2.26)$$

3 Helicóptero Sistema Quanser Aero 2-DOF

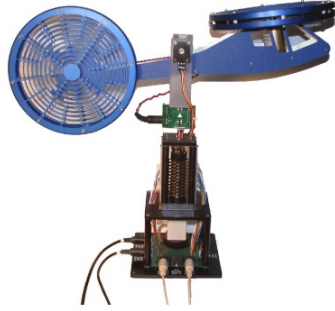


Figura 2 – Helicóptero Quanser 2DOF

O experimento do helicóptero Quanser Aero 2-DOF (2 graus de liberdade), ilustrado na Figura (2), consiste em um modelo de helicóptero de duas hélices acionadas por motores CC montado fixo em uma base. A hélice frontal possui a função de controlar o movimento de elevação do nariz sobre o eixo de passo e a hélice traseira controla o movimento de lado a lado do mesmo sobre o eixo de guinada. Os ângulos de passo (*roll*) e guinada (*pitch*) são determinados com o auxílio de encoders de alta precisão.

3.1 Modelagem Matemática

Para realizar a modelagem matemática do sistema, deve-se ressaltar que o objetivo do estudo em questão é controlar a posição angular da placa a partir do controle do fluxo de ar gerado pelo ventilador. Dessa forma, tem-se uma dinâmica definida pela Equação (3.1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1)$$

em que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{sp}}{J_p} & 0 & \frac{D_p}{J_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D_y}{J_y} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{K_{pp}}{J_p} & \frac{K_{py}}{J_p} \\ \frac{K_{yp}}{J_y} & \frac{K_{yy}}{J_y} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} V_p(t) \\ V_y(t) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Resolvendo a Equação (3.1):

$$\begin{cases} J_p \ddot{\theta}(t) + D_p \dot{\theta}(t) + K_{sp} \theta = \tau_p(t), \\ J_y \ddot{\psi}(t) + D_y \dot{\psi}(t) = \tau_y(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

sendo J_p o momento de inércia no eixo de passo, D_p a constante de atrito viscoso de passo, K_{sp} a rigidez em torno do eixo de inclinação, J_y o momento de inércia em relação ao eixo de guinada e D_y a constante de atrito viscoso de guinada.

Além disso, sabe-se que $\tau_p(t)$ e $\tau_y(t)$ são representados por:

$$\begin{aligned}\tau_p(t) &= K_{pp}V_p(t) + K_{py}V_y(t), \\ \tau_y(t) &= K_{yp}V_p(t) + K_{yy}V_y(t),\end{aligned}\tag{3.4}$$

em que K_{pp} é o ganho de torque de empuxo que atua no eixo de passo da hélice de passo, K_{py} é o ganho de torque de empuxo que atua no eixo de inclinação da hélice de guinada, K_{yp} é o ganho de torque de empuxo que atua no eixo de guinada da hélice de passo e K_{yy} é o ganho de torque de empuxo que age no eixo de guinada da hélice de guinada.

Como o objetivo é tratar um problema MIMO como SISO, deseja-se que a saída seja dada apenas pelo ângulo *pitch* do helicóptero, logo, $V_y(t) = 0$ e, como consequência, $\psi(t) = 0$. Sendo assim, a Equação (3.3) pode ser reescrita substituindo a Equação (3.4):

$$J_p\ddot{\theta}(t) + D_p\dot{\theta}(t) + K_{sp}\theta = K_{pp}V_p(t).\tag{3.5}$$

3.2 Condições iniciais

A Tabela (1) fornece os dados iniciais do sistema:

Variáveis	Significado	Valor
D_p	Constante de atrito viscoso de passo	$0.0071(N \cdot m \cdot s/rad)$
J_p	Momento de inércia sobre o eixo de passo	$0.0215(kg \cdot m^2)$
K_{pp}	Ganho de torque de empuxo que atua no eixo de passo da hélice de passo	$0.0011(N \cdot m/V)$
K_{sp}	Rigidez em torno do eixo de inclinação	$0.0374(N \cdot m \cdot s/rad)$
θ	Ponto de operação	$60(^{\circ})$

Tabela 1 – Dados do sistema

Nota-se que os valores fornecidos encontram-se em função de radianos, logo o ponto de operação deve ser transformado, segundo a Equação (3.6):

$$\frac{(60^{\circ} \cdot \pi)}{180} = 1,047 \text{ rad}.\tag{3.6}$$

Com a finalidade de encontrar o sinal de controle necessário para manter o sistema no ponto de operação desejado ($\theta = 60^{\circ}$), utiliza-se os parâmetros da Tabela (1) na Equação

(3.5).

$$V_p(t) = \frac{K_{sp}\theta}{K_{pp}}, \quad (3.7)$$

$$V_p(t) = 35,598 \text{ V.}$$

3.3 Resultados e Discussões

A fim de determinar a função de transferência do sistema, aplicou-se uma entrada via degrau de 10% do valor de $V_p(t)$, definido pela seguinte relação:

$$u_d = 1,1V_p(t) \approx 39,158 \text{ V.} \quad (3.8)$$

A resposta temporal do sistema à essa entrada degrau é ilustrada pela Figura (3). Além disso, plotou-se um zoom na resposta ao degrau para que os parâmetros do transitório do sistema, introduzidos na Seção (2.1), pudessem ser encontrados.

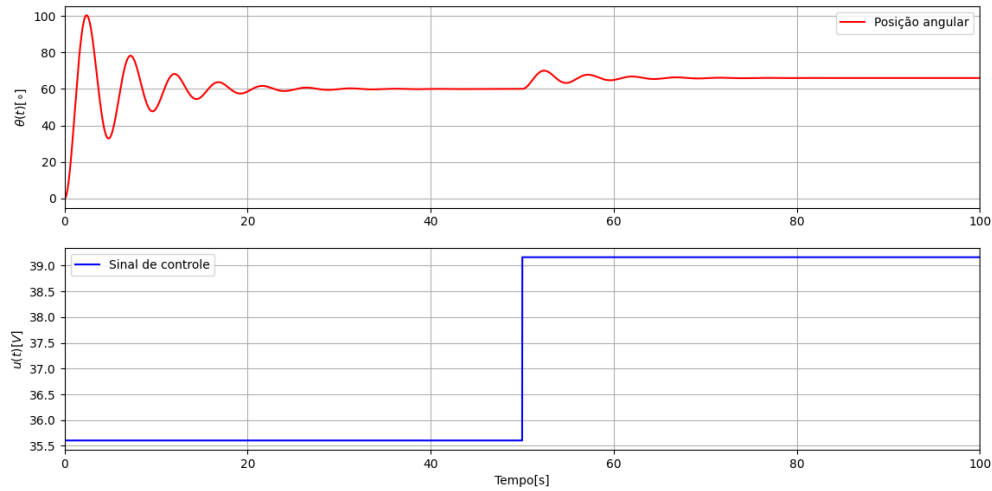


Figura 3 – Resposta ao degrau sistema em malha aberta

A partir da análise da Figura (4), os valores encontrados foram:

$$\begin{aligned} t_p &= 2.39 \quad , \quad t_r = 1,2831, \\ M_P &= 0,6705 \quad , \quad t_{s2} = 22,176s, \quad t_{s5} = 17,276s. \end{aligned} \quad (3.9)$$

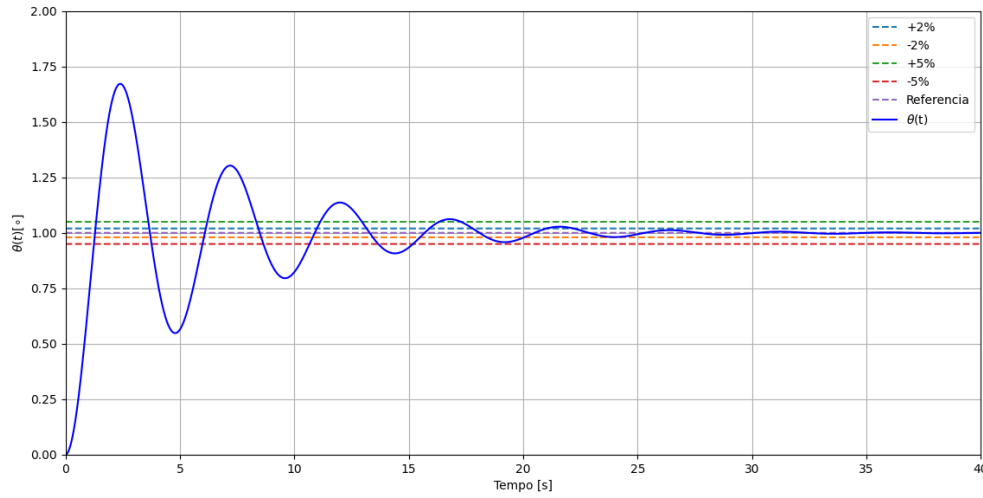


Figura 4 – Resposta a entrada por degrau - zoom.

Para encontrar o coeficiente de amortecimento (ζ), a frequência natural (ω_n) e o ganho estático (K), fez-se o uso das Equações (2.6) e (2.7). A partir da resolução do sistema de duas variáveis e duas equações proporcionado pelas equações citadas anteriormente, encontrou-se $\omega_n = 1,4293$ e $\zeta = 0,1261$. Após isso, obteve-se o valor de K a partir da Equação (2.2), no qual $\Delta u = 3,56$ e $\Delta y = 0,105$, e descobriu-se $K = 0,0295$.

Com as especificações do transitório obtidas, pode-se obter a equação de transferência do modelo a partir da Equação (2.3), passando a ser descrita por:

$$G(s) = \frac{0,0601}{s^2 + 0.3608s + 2.043}. \quad (3.10)$$

Com o propósito de avaliar o modelo de segunda ordem encontrado, aplicou-se diversos degraus positivos e negativos no mesmo e também no modelo da planta. O resultado é ilustrado pela Figura (5).

Nota-se que ambos os modelos são próximos, o que permite inferir que a aproximação de segunda ordem foi satisfatória.

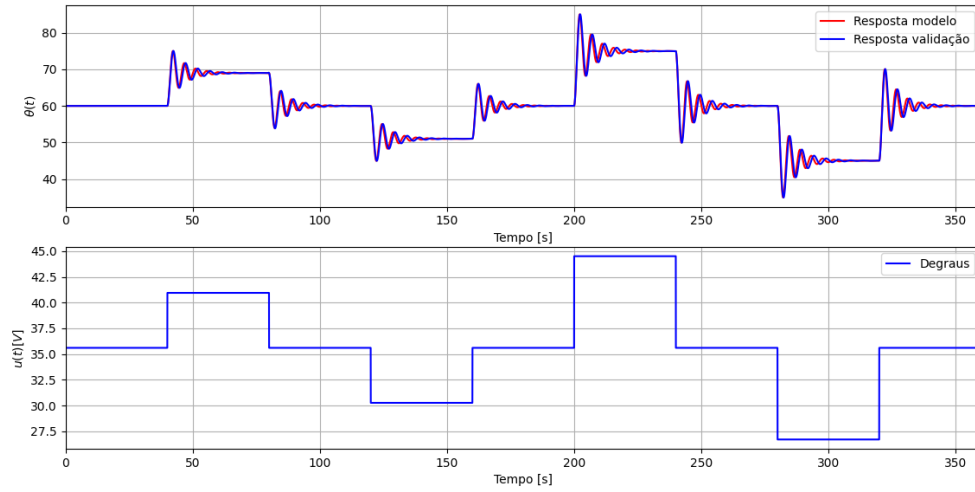


Figura 5 – Validação de modelo de segunda ordem

Após encontrar um modelo satisfatório, necessita-se definir um controlador ($C(s)$) que possa estabilizá-lo. Foi definido que o mesmo deveria manter o sistema com um *overshoot* máximo de 25% e um tempo de acomodação (t_s) máximo de 20 segundos. A partir da abordagem polinomial, evidenciada na Seção (2.2), é necessário definir inicialmente os parâmetros (ζ) e (ω_n) que atendem as especificações. Tal cálculo pode ser realizado a partir da manipulação das Equações (2.6) e (2.7).

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{-\ln OS}{\sqrt{\pi^2 + (\ln OS)^2}}, \\ \zeta &= 0,4037.\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{4}{\zeta \cdot t_s}, \\ \omega_n &= 0,4954.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Após isso, determinou-se o grau da Equação Diofantina e obteve-se $\delta D(s) = 3$. Logo, o controlador possuirá 3 polos, que podem ser descritos por $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{1^2 - \zeta^2}$ e $p_3 = -10p_1$, logo:

$$\begin{aligned}p_{1,2} &= -0,2 \pm 0,4532j, \\ p_3 &= -2.\end{aligned}$$

Com os polos desejados encontrados, determina-se a Equação Diofantina, conforme a Equação (2.14):

$$D(s) = s^3 + 2,4s^2 + 1,05s + 0,49.\tag{3.13}$$

Logo, a matriz D , definida em (2.17), é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 1,05 \\ 2,4 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Após isso, determina-se a Matriz de Sylvester, também estabelecida em (2.17):

$$E = \begin{bmatrix} 2,04 & 0 & 0,06 & 0 \\ 0,36 & 2,04 & 0 & 0,06 \\ 1 & 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Entretanto, para aplicar o resultado obtido na Matriz de Sylvester na matriz M , a mesma deve ser invertida, passando a ser descrita por:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.36075036 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16,64 & 0 & -33,99 & 12,26 \\ 0 & 16,64 & -6,00 & -31,82 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Com a matriz E^{-1} obtida, obtém-se a matriz M , definida em (2.17):

$$M = \begin{bmatrix} 2,039 \\ 1 \\ -61,15 \\ -28,84 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Os parâmetros que definem o controlador $C(s)$ são dados por:

$$\begin{aligned} \alpha 1 &= 2,039, & \alpha 0 &= 1, \\ \beta 0 &= -28,84, & \beta 1 &= -61,15. \end{aligned}$$

Substituindo os mesmos na expressão geral do controlador, definida pela Equação (2.18), encontra-se:

$$C(s) = \frac{-28,84s - 61,15}{s + 2,04}. \quad (3.18)$$

Por fim, ao fechar a malha com controlador em série com a planta, observou-se a necessidade de um ajuste de ganho para que fosse possível um segmento de referência unitária.

Tal ajuste, pode ser definido como o inverso do ganho (K) da malha fechada. Para encontrar esse valor, faz-se:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{MF}, \\ K &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(-1,733s - 3,676)}{s^3 + 2,4s^2 + 1,045s + 0,4908}, \\ K &= -7,4881. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Com isso, o ajuste de ganho do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{K}, \\ A &= -0,1335. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Com isso, a equação da malha fechada do sistema, com a inclusão do ganho, é dada por:

$$G_{mf} = \frac{0,2315s + 0,4908}{s^3 + 2,4s^2 + 1,045s + 0,4908}. \quad (3.21)$$

O diagrama da malha fechada de controle para aplicação no sistema real é descrito pela Figura (6):

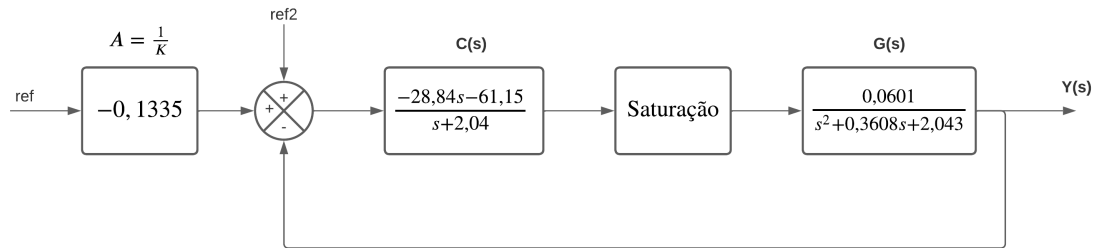


Figura 6 – Diagrama malha fechada - Controlador Polinomial

De maneira análoga e utilizando as mesmas especificações de *overshoot* e tempo de acomodação (t_s) definidas anteriormente, determinou-se um controlador PID para o sistema. A partir das Equações (3.10) e (3.13), obtém-se os parâmetros para resolução do PID:

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & b_0 &= 0,0601, \\ d_1 &= 2,4, & b_1 &= 0, \\ d_2 &= 1,05, & a_0 &= 2,043, \\ d_3 &= 0,4, & a_1 &= 0,3608. \end{aligned}$$

Em posse dos parâmetros, pode-se resolver o sistema definido pela Equação (3.22):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,06010431 \\ 0 & 0,06010431 & 0 \\ 0,06010431 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.03924964 \\ -0.99767191 \\ 0.49084577 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\beta_2 = 33,92851176, \quad \beta_1 = -16,59900903, \quad \beta_0 = 8,16656584. \quad (3.23)$$

Substituindo os valores encontrados em (3.23) na Equação (2.21), tem-se:

$$K = -16,59900903, \quad T_d = -2,04400827, \quad T_i = -2.03255681. \quad (3.24)$$

Como o PID ideal é representado por uma equação imprópria (grau do numerador é maior que o grau do denominador) que impede a validação do sistema real, escolheu-se o controlador PID industrial com filtro derivativo, representado pela Expressão (2.26), em que N foi escolhido como 8. Portanto, o controlador é dado por:

$$C(s) = \frac{-60,34s^2 + 29,5s - 16,6}{-0,5193s^2 - 2,033s}. \quad (3.25)$$

$$G_{MF-PID} = \frac{-3,627s^2 + 1,773s - 0,9977}{-0,5193s^4 - 2,22s^3 - 5,421s^2 - 2,38s - 0,9977}. \quad (3.26)$$

Por fim, fechou-se a malha com o controlador, Equação (3.26), e aplicou-se um degrau a mesma, obtendo como resposta o ilustrado pela Figura (7).

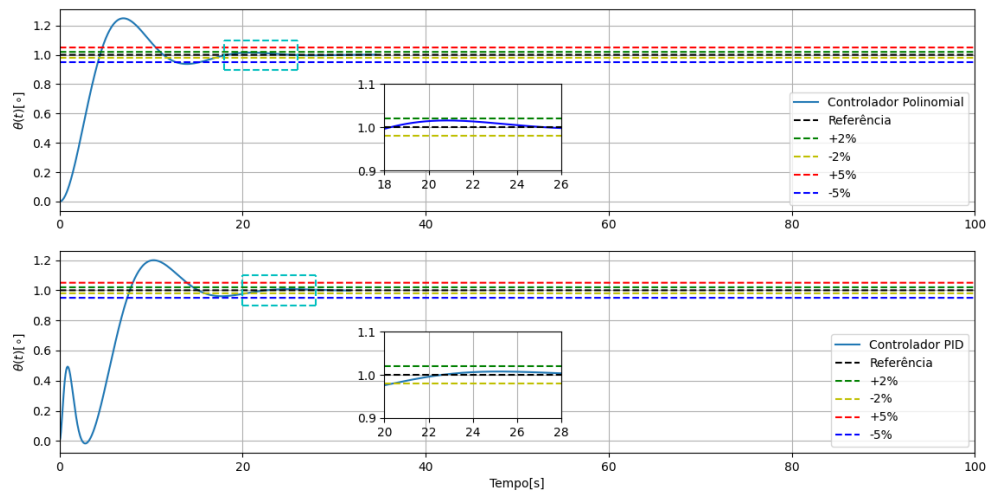


Figura 7 – Resposta ao degrau - controlador polinomial e PID

Nota-se, por meio de inferências gráficas, que ambos os controladores cumpriram com o objetivo de manter *overshoot* em no máximo 25% e tempo de acomodação (t_s) até 20 segundos. O controlador polinomial apresenta maior *overshoot* e menor tempo de acomodação, por outro lado, o controlador PID apresenta menor *overshoot* e maior tempo de acomodação. Para confirmar tais constatações, utilizou-se da função *stepinfo*, disponível na biblioteca *control* do Python, e obteve-se de maneira algébrica que o máximo *overshoot* foi $M_p = 24,90\%$ e $t_s = 17,02$ segundos para o caso do controlador polinomial. Já para o segundo caso, os valores encontrados foram $M_p = 19,96\%$ e $t_s = 20,43$ segundos.

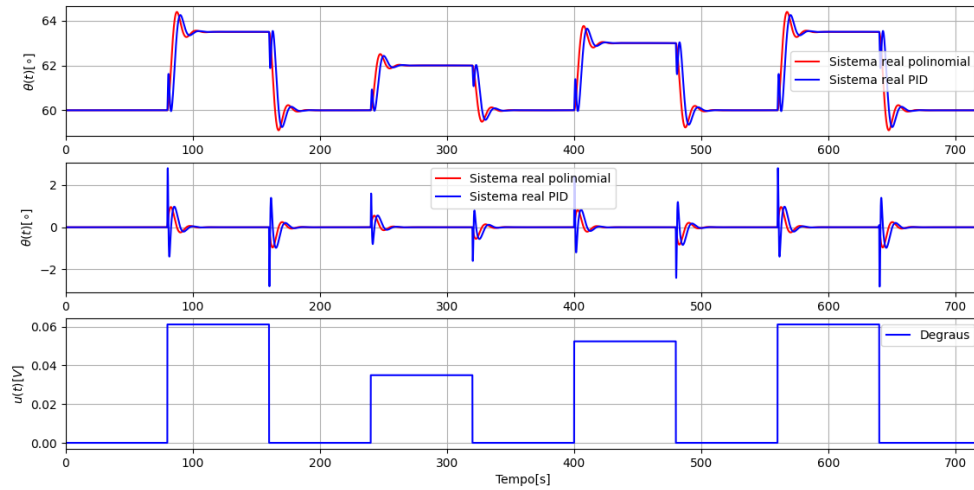


Figura 8 – Validação controladores polinomial e PID

Com vista a validar o sistema real, dado pela Equação (3.5), fechou-se a malha com os controladores projetados - polinomial representado pela curva em vermelho e PID pela curva em azul - e aplicou-se diversos degraus distintos. As respostas são ilustradas pela Figura (8). Nota-se que em ambos os casos há um erro de regime permanente nulo, já que os controladores são capazes de rejeitar perturbações e retornar à referência. Entretanto, o sistema representado pela malha fechada com controlador polinomial, Equação (3.21), só possui essa característica devido ao ajuste de ganho no qual foi submetido, conforme representado por seu diagrama (Figura (6)). Em termos de *overshoot* e tempo de acomodação, pode-se inferir que ambos os controladores projetados foram capazes de atender às especificações iniciais.

4 Conclusão

Pode-se concluir no estudo do sistema Quanser Aero 2-DOF Helicóptero que é possível aproximar a dinâmica do sistema para um modelo de segunda ordem. Tal aproximação é feita a partir da obtenção de certos parâmetros adquiridos de maneira gráfica na curva de resposta ao degrau. Com tal modelo em mãos, tornou-se viável validá-lo e realizar uma implementação de sua resposta em função do tempo, assim como a dinâmica real do sistema, com o objetivo de se realizar uma comparação. Como resultado dessa analogia, nota-se que o modelo corresponde de maneira satisfatória à dinâmica real.

Ao especificar condições de *overshoot* (M_p) máximo em 25% e tempo de acomodação (t_s) máximo em 20 segundos para a resposta da malha fechada do sistema, foi possível projetar dois controladores. O primeiro pelo método polinomial tradicional e o segundo por síntese de controlador PID polinomial. Em ambos os casos infere-se que são atendidas tais especificações, pois os valores de *overshoot* e tempo de acomodação foram 24,90% e 17,02 segundos para o polinomial e para o PID foram $M_p = 19,96\%$ e $t_s = 20,43$ segundos. Nota-se que no último houve uma extrapolação em 0,43 segundos que pode ser desprezada.

Por fim, realizou-se uma validação dos controladores obtidos via resposta a diversos degraus que corroborou com os resultados de especificação do sistema que foram enunciadas anteriormente. Além disso, percebeu-se que ambos os controladores possuem erro em regime permanente nulo, já que são capazes de seguir a referência. No caso do controlador PID, esse fato já era esperado, pois o mesmo possui um integrador em sua concepção. Para o controlador polinomial tradicional, isso ocorreu devido ao ajuste de ganho realizado no momento em que a malha foi fechada.

Referências

ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2. ed. [S.l.]: PID, 1995. Citado na página 2.

JUNIOR, F. C. B. *Modelagem de Funções de Transferência de Plantas Industriais em Malha Aberta e Fechada utilizando Algoritmos Genéticos*. 1. ed. [S.l.]: Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP), 2017. Citado na página 1.

LOPES, A. N.; ARCESE, L.; GUELTON, K.; CHERIFI, A. Sampled-data controller design with application to the quanser aero 2-dof helicopter. In: IEEE. *2020 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*. [S.l.], 2020. p. 1–6. Citado na página 1.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2010. Citado na página 3.