



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Departamento da Engenharia Mecatrônica

Engenharia Mecatrônica

Modelagem Aproximada de Processos Industriais Subamortecidos: Sistema Fan Plate

Mateus Alves de Sales

Thiago Henrique de Faria Costa

Divinópolis

Janeiro/2022

Resumo

O processo de modelagem pode ser dividido em três classificações: caixa branca, caixa preta e caixa cinza. No presente estudo, é utilizado o processo de modelagem caixa preta via curva de resposta ao degrau para descrever o sistema *Fan Plate*. Com isso, objetivou-se obter uma função de transferência para o sistema subamortecido e implementar os resultados do modelo. Além disso, foi possível aproximar um sistema de segunda ordem superamortecido por um sistema de primeira ordem e, com os resultados, projetou-se controladores P e PI a partir dos métodos de Ziegler-Nichols e CHR. Planejou-se também avaliar a performance da resposta temporal do sistema em malha fechada. Além do mais, foi utilizada a aproximação de Padé para obter funções aproximadas de ordem 1, 3, 5 e 9 e compará-las entre si. Como resultado do estudo, notou-se a influência da massa total da placa no sistema, pois quando seu valor é de $0,100\text{ Kg}$ o comportamento é subamortecido e quando seu valor é de $0,005\text{ Kg}$, o comportamento é superamortecido. Vale destacar a relação entre a amplitude do degrau e a divergência dos valores de resposta do modelo de segunda ordem e resposta do sistema real, que mostrou ser diretamente proporcional. Por fim, ponderou-se a superioridade dos controladores PI, verificada através dos índices de performance IAE, ITAE e RMSE.

Palavras-chaves: Fan plate, caixa preta, subamortecido, superamortecido, controladores.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
2	Preliminares	2
2.1	Sistema de Primeira Ordem	2
2.2	Sistema Subamortecido	2
2.3	Sistema Superamortecido	4
2.4	Método de Ziegler-Nichols	4
2.5	Método CHR	5
2.6	Aproximação por Padé	6
3	Sistema Fan Plate	7
3.1	Descrição	7
3.2	Condições iniciais	8
3.3	Resultados e Discussões	9
3.3.1	Aproximação por um sistema de segunda ordem subamortecido	9
3.3.2	Aproximação por um sistema de segunda ordem superamortecido com atraso	11
4	Conclusão	18
	Referências	19

1 Introdução

O Processo de produzir um modelo matemático a partir de um sistema real é denominado modelagem. O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como uma união de diversas equações que retratam a dinâmica do sistema de maneira precisa ou razoavelmente bem (OGATA, 2011). Portanto, a modelagem matemática utiliza de modelos para facilitar o entendimento de um sistema, já que possibilitam que fatores não elementares do processo tenham seu estudo otimizado (AGUIRRE, 2007).

Um mesmo sistema pode ser descrito por vários modelos matemáticos distintos, devido a grande liberdade de interpretações e hipóteses que são aceitas sobre os mesmos. Por esse motivo, os sistemas são separados em diferentes modelos, sendo eles caixa branca, caixa preta e caixa cinza. Para o estudo aqui apresentado é utilizado somente o segundo modelo, em que é necessário conhecer apenas seus sinais de entrada e saída. Com isso, não possuindo preocupação com o funcionamento interno do sistema, os parâmetros da modelagem não possuem relação direta com as características do sistema real (BUNGE, 2008).

Nesse sentido, o estudo apresentado visa analisar e modelar um sistema *Fan Plate*, através da modelagem caixa preta, de acordo com sua dinâmica e parâmetros iniciais. Esse sistema é composto por uma ventoinha, que produz fluxo de ar e gera uma rotação na placa, o que forma um ângulo entre a mesma e a vertical.

1.1 Objetivos

Fazer a análise do sistema *Fan Plate*, programar a resposta temporal dos modelos de sistema não linear e obter uma função de transferência para o sistema subamortecido.

2 Preliminares

Nesse capítulo faz-se uma revisão da bibliografia utilizada no desenvolvimento do estudo proposto.

2.1 Sistema de Primeira Ordem

Para que um modelo possa ser descrito por uma ou mais constantes de tempo, deve-se considerar um sistema em malha aberta como de ajuste automático. Sendo assim, para que a aplicação da modelagem caixa preta via curva de resposta a entrada de degrau seja possível, a dinâmica do sistema pode ser aproximada por um modelo de primeira ordem (ASTROM; HAGGLUND, 1995), descrita como:

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}, \quad (2.1)$$

em que, K , θ e τ são respectivamente o ganho estático do sistema, o tempo morto e a constante de tempo do sistema. É possível obter o ganho estático K por meio das variações da saída e da entrada do sistema, como em:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad (2.2)$$

em que, Δy é a diferença entre a temperatura quando se aplica o degrau positivo de 15% e a temperatura inicial. Já Δu é a diferença do sinal de controle quando se aplica um degrau positivo de 15% e o valor inicial.

2.2 Sistema Subamortecido

Nesse caso, visando aplicar a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau, pode-se aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de segunda ordem subamortecido, dado por:

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}, \quad (2.3)$$

em que, K é o ganho estático do sistema, θ o atraso ou tempo morto, τ é a constante de tempo do sistema e ζ é o coeficiente de amortecimento (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

O modelo representado acima pode ser reescrito de maneira a desconsiderar o tempo morto, passando a ser descrito da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.4)$$

em que ω_n é a frequência natural do sistema. O Modelo 2.4 é descrito por três parâmetros, são eles: K , ζ e ω_n que podem ser encontrados a partir do desenvolvimento das relações da análise de resposta transitória do sistema, conforme a Figura 1.

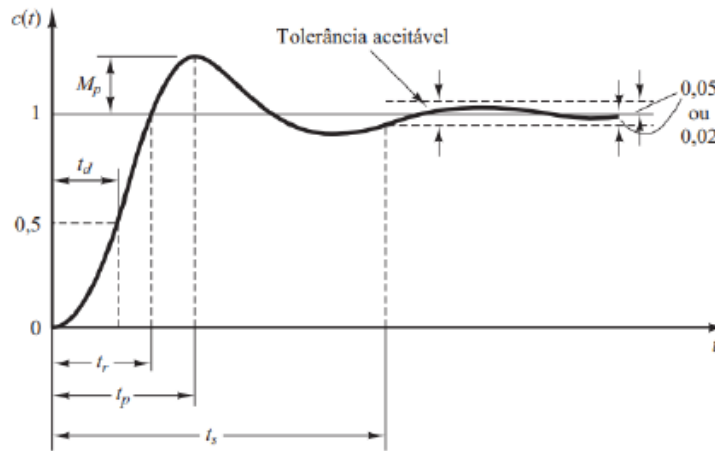


Figura 1 – Curva de resposta em degrau unitário

Na Figura 1, tem-se que t_d é o tempo morto, t_r é o tempo de subida, t_p é o tempo de pico, M_p o máximo sobressinal e t_s o tempo de acomodação (OGATA, 2011).

O tempo de subida é definido como o tempo necessário para a resposta do sistema sair de 0% e alcançar 100% do valor final. O mesmo pode ser descrito da seguinte maneira:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}. \quad (2.5)$$

Para sistemas subamortecidos, costuma-se adotar o intervalo de 0% a 90% do valor final.

O tempo de pico, que é o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico de sobressinal, é dado pela seguinte equação:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (2.6)$$

em que ω_d é a frequência natural amortecida (OGATA, 2011).

O máximo sobressinal (M_p), é o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do ponto de operação e pode ser dado por:

$$M_p = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right). \quad (2.7)$$

Já o tempo de acomodação pode ser determinado como o tempo gasto para a curva de resposta atingir e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final. Essa faixa possui magnitude descrita por uma porcentagem normalmente adotada como 2% ou 5%. Portanto, t_s pode ser representado das seguintes formas:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \forall (0 < \zeta < 0,9), \quad (2.8)$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \forall (0 < \zeta < 0,9), \quad (2.9)$$

em que 2.8 e 2.9 são utilizados para os critérios de 2% e 5%, respectivamente.

2.3 Sistema Superamortecido

Visando aplicar a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau, pode-se aproximar, também, a dinâmica do sistema por um modelo de segunda ordem superamortecido, dado por:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (2.10)$$

em que, K é o ganho estático do sistema, θ o atraso ou tempo morto, τ_1 e τ_2 são a constante de tempo do sistema.

2.4 Método de Ziegler-Nichols

Para a determinação de valores de ganho estático K , constante de tempo τ e tempo morto θ , Ziegler e Nichols propuseram regras baseadas nas características da resposta transitória de dada planta. O valor de τ pode ser encontrado através da distância entre os pontos AC ou AB (ASTROM; HAGGLUND, 1995). Já K e θ podem ser encontrados a partir do

gráfico da Figura 2. A aplicação do método de Ziegler Nichols tem como objetivo obter parâmetros a partir da reta tangente ao ponto de inflexão de um sistema sujeito a entrada de um degrau.

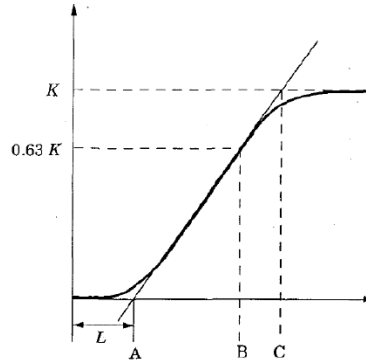


Figura 2 – Gráfico do metodo de Ziegler Nichols

Além disso, o método de Ziegler-Nichols é utilizado para sintonizar controladores do tipo P, PI e PID, conforme a Tabela 1, em que K_C é o ganho do controlador, T_I o tempo integrativo e T_D o tempo derivativo.

Controlador	K_C	T_I	T_D
P	$\tau/K\theta$	-	-
PI	$0,9\tau/K\theta$	$10\theta/2$	-
PID	$1,2\tau/K\theta$	2θ	$\theta/2$

Tabela 1 – Sintonização de controladores - Método de Ziegler-Nichols

2.5 Método CHR

O método CHR é baseado em dois critérios: a resposta mais rápida sem sobressinal e a resposta mais rápida possível com 20% de sobressinal (CHIEN, 1952). Considera-se o sistema se comportando como um sistema de primeira ordem com atraso, com ganho estático (K), constante de tempo (τ) e tempo morto (θ). A sintonização de controladores utilizando esse método pode ser descrita através da Tabela 2, em que K_C é o ganho do controlador, T_I o tempo integrativo e T_D , o tempo derivativo.

Controlador	K_C	T_I	T_D
P	$0,3\tau/K\theta$	-	-
PI	$0,6\tau/K\theta$	4θ	-
PID	$0,95\tau/K\theta$	$2,375\theta$	$0,421\theta$

Tabela 2 – Método CHR

2.6 Aproximação por Padé

Consiste em uma expansão assintótica a partir de uma série de Taylor que pode chegar mais rapidamente a uma convergência ou divergência para a série, rearranjando-a como uma divisão de duas expansões. O método nos permite obter mais informações do que a série pode nos fornecer a partir da própria série de potência.

$$f(x) = \sum_{n=0}^N f_n x^n, \quad (2.11)$$

em que N não tem de ser infinito. Os aproximantes de Padé em 2.10 são quocientes de dois polinômios que representam a expansão. Aproximantes dos quais, são definidos por dois números inteiros positivos representados por L (graus do numerador) e M (denominador) da função racional. Logo, podemos representar o aproximante de Padé da seguinte forma:

$$\frac{L}{M} = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \quad L, M \geq 0, \quad (2.12)$$

em que:

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots p_L x^L; \\ Q_M(x) &= 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots q_M x^M. \end{aligned} \quad (2.13)$$

É possível determinar $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ por meio de:

$$f(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}). \quad (2.14)$$

3 Sistema *Fan Plate*

Nesse capítulo são descritos o funcionamento do sistema, as condições iniciais aplicadas e os resultados obtidos.

3.1 Descrição

O sistema em estudo é conhecido como Sistema *Fan Plate* e é composto por uma ventoinha, uma placa de alumínio, um *cooler*, um *encoder* que mede o ângulo da placa e um *raspberry pi* para controle do sistema.

Ao rotacionar, o *cooler* promove um fluxo de ar capaz de girar a placa e formar, assim, um ângulo entre a mesma e o eixo vertical de referência. Com isso, faz-se a análise desse fluxo de ar com o objetivo de controlar a posição angular da placa. A Figura 3 mostra um esquema simplificado do sistema.

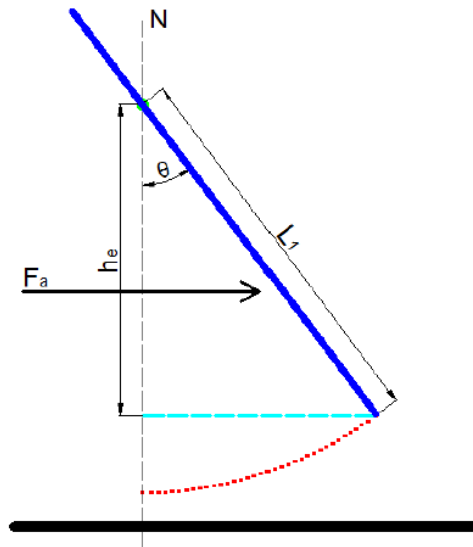


Figura 3 – Sistema *Fan Plate* - Simplificado

O sistema pode ser descrito a partir das relações abaixo que fornecem a equação diferencial do mesmo:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = K_1 \cos^2 x_1 u - (K_2 \sin x_1 + K_3 x_2), \quad (3.2)$$

$$y = x_1, \quad (3.3)$$

em que: x_1 a posição angular da placa, x_2 a velocidade angular, y a saída do sistema, u é a entrada do sistema e K_1 , K_2 e K_3 constantes descritas por:

$$K_1 = \frac{d_{cm} \rho_{ar} C_\alpha L_\alpha L_1}{2 m_t \left(\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)}, \quad (3.4)$$

em que: ρ_{ar} a densidade do ar; L_1 é o comprimento da placa abaixo do eixo de rotação; L_α é a largura da placa móvel; C_α o coeficiente de arrasto; m_t a massa total da placa e L_t , o comprimento da placa.

$$K_2 = \frac{g d_{cm}}{\left(\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)}, \quad (3.5)$$

em que g é a aceleração da gravidade.

$$K_3 = \frac{\mu d_{cm}^2}{m_t \left(\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)}, \quad (3.6)$$

em que μ é o coeficiente de atrito viscoso.

3.2 Condições iniciais

A Tabela 3 fornece os dados necessários para calcular os valores de K_1 , K_2 , K_3 e, também, o sinal de controle necessário para manter o sistema no ponto de operação desejado, que no caso desse estudo é 50° ou $0,873 \text{ rad}$.

Utilizando os valores da Tabela 3, tem-se que $K_1 = 0,9295$, $K_2 = 30,3011$ e $K_3 = 3,0888$.

Para calcular o valor do sinal de controle (u_0), pode-se manipular a Equação 3.2 da seguinte maneira:

$$u_0 = \frac{K_2 \sin x_1}{K_1 \cos^2 x_1}. \quad (3.7)$$

Variável	Valor
L_α	154 mm
L_1	155 mm
L_t	270 mm
d_{cm}	20 mm
m_t	0,100 Kg
ρ_{ar}	1,23 Kg/m ³
C_α	2,05 N
μ	5

Tabela 3 – Condições iniciais do sistema *Fan Plate*

Substituindo os dados calculados e considerando as condições de velocidade e aceleração angulares nulas na posição angular de operação, 0,873 rad, tem-se:

$$u_0 = 60,4375 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

3.3 Resultados e Discussões

3.3.1 Aproximação por um sistema de segunda ordem subamortecido

Ao iniciar o estudo, foi aplicado um degrau de 20% do sinal de controle u_0 , que representa o valor de $12,0875 \text{ m}^2/\text{s}^2$. O gráfico que representa o comportamento do sistema a essa entrada degrau pode ser visto na Figura 4.

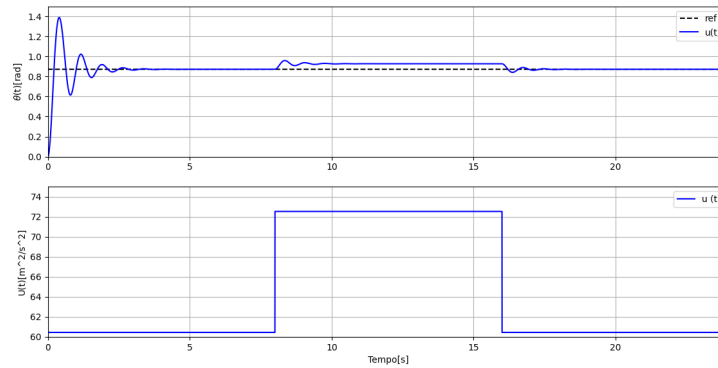


Figura 4 – Resposta temporal do sistema ao degrau aplicado

A Figura 5 apresenta a curva normalizada e os parâmetros do transitório do sistema. A partir disso, baseando-se nas Equações 2.5, 2.6 e 2.7, obtém-se os valores de $t_r = 0,1909$,

$t_p = 0,348$ e $M_p = 0,5877$. Já os valores do tempo de acomodação, são $t_s(2\%) = 2,498$ e $t_s(5\%) = 1,831$ e foram encontrados a partir das Equações 2.8 e 2.9.

Para obter a função de transferência do sistema, faz-se necessário o cálculo do ganho estático (K), coeficiente de amortecimento (ζ) e da frequência natural (ω_n). Para determinar o ganho estático, conforme 2.2, tem-se $\Delta y = 0,055rad$ e $\Delta u = 12,087m^2/s^2$. Logo, $K = 0,0045$. Ao aplicar os valores obtidos graficamente em 2.6 e 2.8, obtém-se que $\zeta = 0,17465$ e $\omega_n = 9,16848$. Ao encontrar todos os parâmetros necessários e aplicando-os em 2.4, tem-se:

$$G(s) = \frac{0,3738}{s^2 + 3,203s + 84,06}. \quad (3.8)$$

Além disso, plotou-se as curvas envoltórias que delimitam a curva de resposta ao degrau unitário aplicado. As curvas são representadas pela cor vermelha na Figura 5.

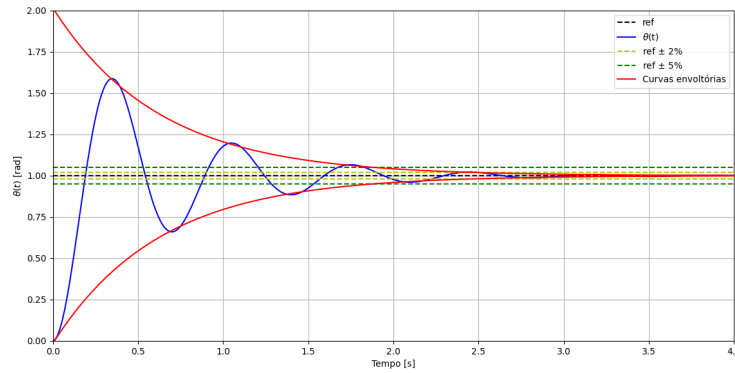


Figura 5 – Resposta temporal com as curvas envoltórias

Para validar o sistema, foi aplicado uma sequência de degraus diferente em um intervalo de 24s, conforme 6. Os degraus podem ser vistos no *subplot* inferior.

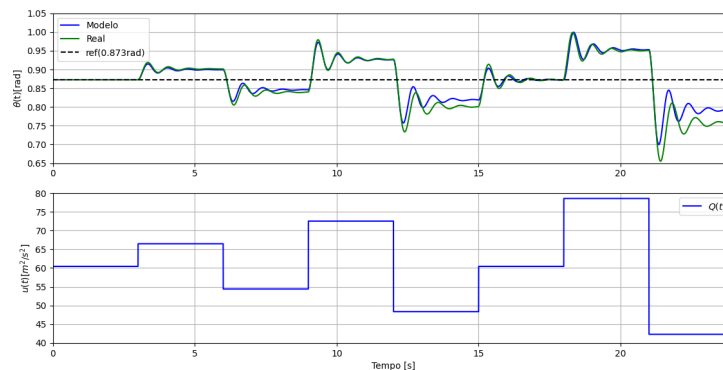


Figura 6 – Resposta temporal do modelo obtido e do sistema real

Com a Figura 6, infere-se que o modelo obtido descreve melhor a dinâmica real quando são aplicados degraus positivos, se comparados aos degraus negativos de mesma variação. Nota-se também que quanto maior a amplitude do degrau, maior a disparidade entre o sistema real e o modelo encontrado, com exceção do degrau $1,2u_0$, pois o modelo foi obtido a partir da resposta a esse degrau.

Por último, analisa-se as raízes do polinômio característico do modelo, descrito por 3.8. Encontrando as raízes do denominador dessa função de transferência, obtém-se que os polos do modelo são: $-1,6015+9,0275j$ e $-1,6015-9,0275j$. Com isso, pode-se dizer que o sistema é do tipo subamortecido, em que a resposta transitória é oscilatória, conforme ilustrado na Figura 6.

3.3.2 Aproximação por um sistema de segunda ordem superamortecido com atraso

Para esta seção, o sistema *Fan Plate* continua sendo o objeto de estudo, entretanto o ponto de operação passa a ser 43° , ou seja, $0,750rad$. Com isso, o sinal de controle passa a ser $2,0782m^2/s^2$. Tendo os valores da Tabela 3 como condições iniciais, a única alteração é no valor da massa, que passa a ser representado por $m_t = 0,005Kg$. Diante disso, os valores de K passam a ser: $K_1 = 18,5910$, $K_2 = 30,3011$ e $K_3 = 61,7761$.

A Figura 7 representa o comportamento do sistema:

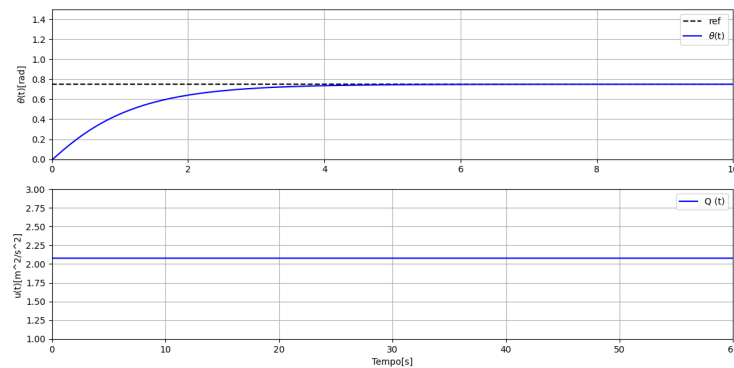


Figura 7 – Resposta temporal do sistema malha aberta sem degrau

Para obter um modelo de primeira ordem do sistema, plotou-se uma sequência de degraus positivos e negativos para, posteriormente, aplicar o Método de 3 Parâmetros de Ziegler-Nichols, conforme a Figura 8.

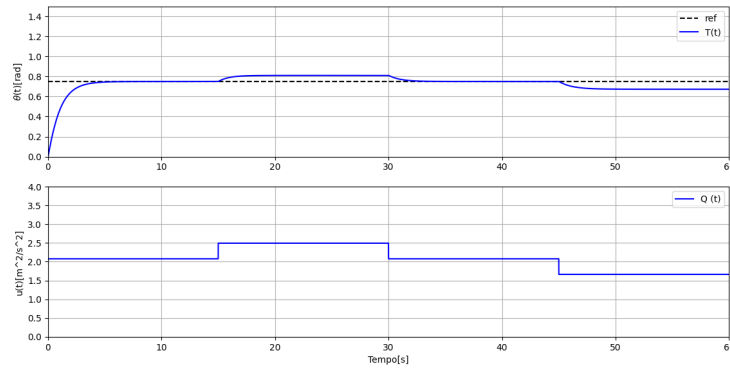


Figura 8 – Resposta temporal do sistema malha aberta com degrau

Para aplicar Ziegler-Nichols, faz-se necessário traçar a reta tangente a curva de resposta no degrau positivo escolhido. Essa reta, na cor vermelha da Figura 9, foi plotada a partir da análise gráfica da curva, em que foi retirado o coeficiente angular da mesma e a amplitude do degrau positivo. Após encontrar a reta tangente, obteve-se o ganho estático K , conforme a Equação 2.2, em que, $\Delta y = 0,0609$ e $\Delta u = 0,4156$. Dessa forma, tem-se que o valor de $K = 0,1466$. A Figura 9 representa a curva de resposta do sistema após aplicação do método.

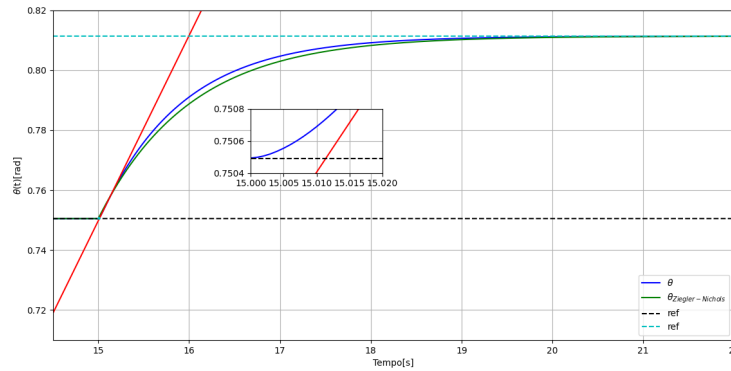


Figura 9 – Método Ziegler-Nichols - degrau positivo

Com todos os dados reunidos e com base na Equação 2.1 é possível escrever a equação geral para o modelo de primeira ordem da seguinte maneira:

$$G_2(s) = \frac{0,1466}{1,01s + 1}. \quad (3.9)$$

Ao aplicar o atraso de 0,15 segundos, a equação 3.9 é adaptada para:

$$G_2(s) = \frac{0,1466e^{-0,15s}}{1,01s + 1}. \quad (3.10)$$

Para aproximar o atraso do sistema por uma função linear, utilizou-se a aproximação por Padé, referenciado na seção 2.6. Tem-se então o gráfico das aproximações de ordem 1, 3, 5 e 9, descritas na Figura 10:

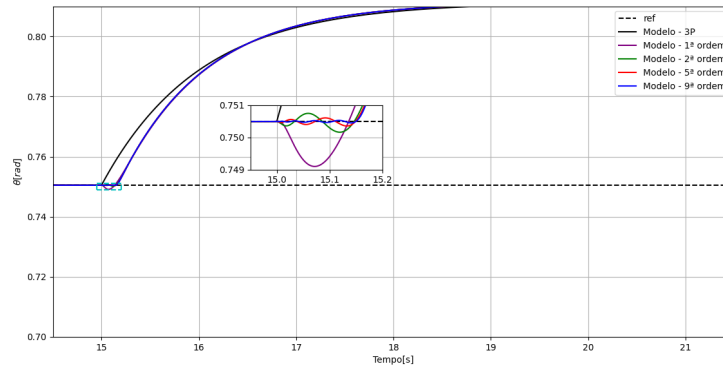


Figura 10 – Aproximação do atraso do sistema através do método de Padé

Conforme a Figura 10, pode-se afirmar que a melhor resposta é a de nona ordem, pois possui melhor aproximação ao atraso de 0,15 segundos e oscila menos no princípio do degrau, enquanto a aproximação de primeira ordem sequer atingiu o atraso desejado e oscilou de maneira expressiva no início do degrau. Com isso, pode-se dizer que a ordem é diretamente proporcional à qualidade da aproximação que se espera.

Com o objetivo de comparar a resposta temporal dos modelos com e sem atraso para a entrada degrau, utilizou-se a aproximação de quinta ordem:

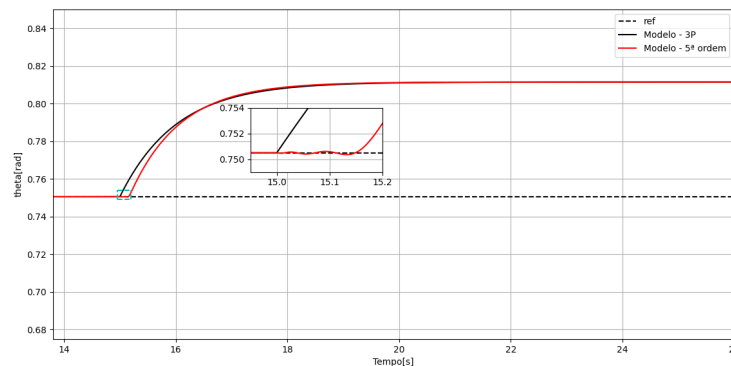


Figura 11 – Comparação do modelo com aproximação de quinta ordem

Como observado na Figura 11, as respostas diferem-se em razão do atraso aplicado. É possível inferir também que o modelo aproximado de quinta ordem é mais eficiente, pelo fato de gastar um tempo menor para atingir o ponto de operação.

Considerando a inclusão do atraso, foram projetados controladores do tipo P e PI usando os métodos de Ziegler-Nichols, conforme Seção 2.4 e CHR, com base na Seção 2.5.

Aplicando as fórmulas definidas nas Tabelas 1 e 2, encontrou-se a função de transferência para os controladores P e PI com os respectivos métodos:

$$G_{P-ZN}(s) = \frac{45,94}{1}, \quad (3.11)$$

$$G_{PI-ZN}(s) = \frac{20,67s + 41,35}{0,5s}, \quad (3.12)$$

$$G_{P-CHR}(s) = \frac{13,78}{1}, \quad (3.13)$$

$$G_{PI-CHR}(s) = \frac{16,54s + 27,57}{0,6s}. \quad (3.14)$$

Para o sistema em questão, tem-se o diagrama de controle, conforme Figura 12, no qual ref é a entrada de referência, u_0 o sinal de controle e um é uma entrada utilizada para denotar uma variação paramétrica da massa.

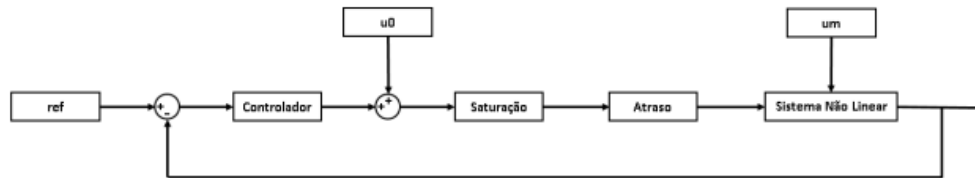


Figura 12 – Diagrama de controle

Com isso, deu-se início a simulação da resposta do sistema não linear em malha fechada, utilizando os controladores projetados em (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14). Em primeiro momento, fez-se a análise aplicando uma sequência de degraus na referência, definida por $r = [0,75 \ 0,9 \ 0,75 \ 0,6 \ 0,825 \ 0,9 \ 0,675 \ 0,75]$. A Figura 13 representa essa simulação:

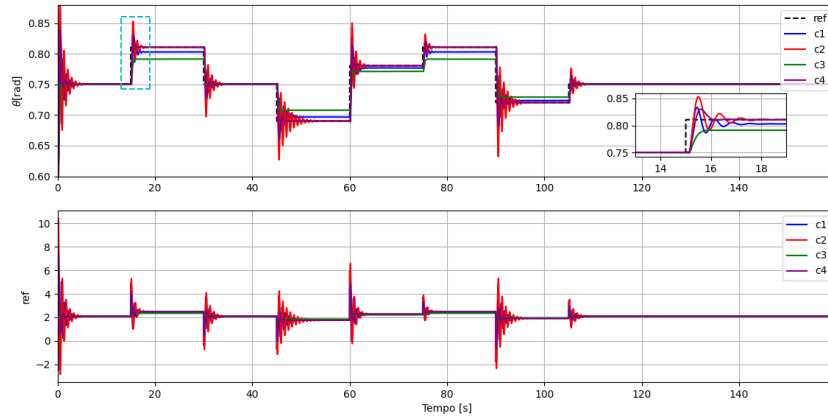


Figura 13 – Resposta temporal do *Fan Plate* em malha fechada para cada um dos 4 controladores obtidos

É possível notar através da Figura 13 que os controladores PI ($c2$ e $c4$), acompanham melhor a variação da referência do sistema e apresentam um erro estacionário nulo quando comparados aos controladores do tipo P ($c1$ e $c3$). Além disso, é possível observar que os controladores obtidos através do método de Ziegler-Nichols ($c1$ e $c2$) aplicam valores de entrada mais altos do que os controladores 3 e 4. É importante ressaltar que dentre os controladores P, o obtido através de Ziegler-Nichols é mais adequado por possuir menor erro estacionário. Já entre os controladores PI, o obtido pelo método CHR ($c4$) apresenta melhor desempenho qualitativo, por possuir menor oscilação e *overshoot*.

Realizando a análise dos controladores considerando o sistema em um processo de regulação do ponto de operação, conforme a Figura 14, observa-se novamente que os controladores PI ($c2$ e $c4$) apresentam melhor desempenho qualitativo se comparados aos controladores do tipo P ($c1$ e $c3$), já que conseguem fazer com que o sistema retorne ao ponto de operação mesmo após receber uma variação paramétrica da massa, ou seja, possuem um erro de rastreamento nulo.

Seguindo com a análise da resposta do sistema em malha fechada, coletou-se os parâmetros do transitório do sistema em cada um dos controladores projetados. Para isso, utilizou-se a resposta temporal obtida da aplicação do primeiro degrau da simulação apresentada na Figura 13.

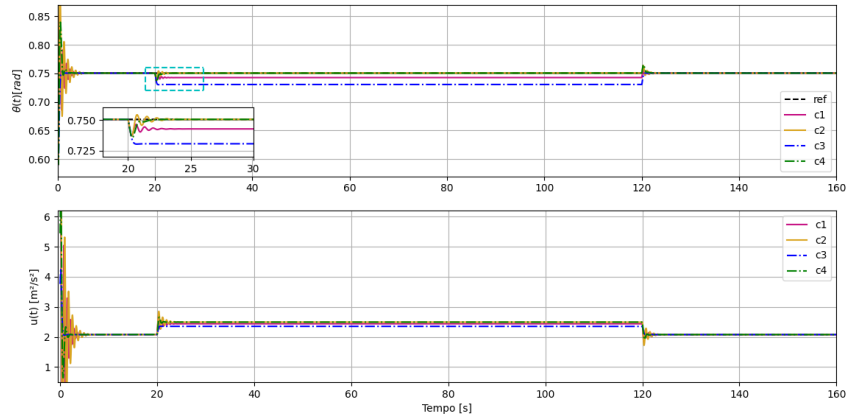


Figura 14 – Resposta temporal do *Fan Plate* em malha fechada para variações na massa da placa

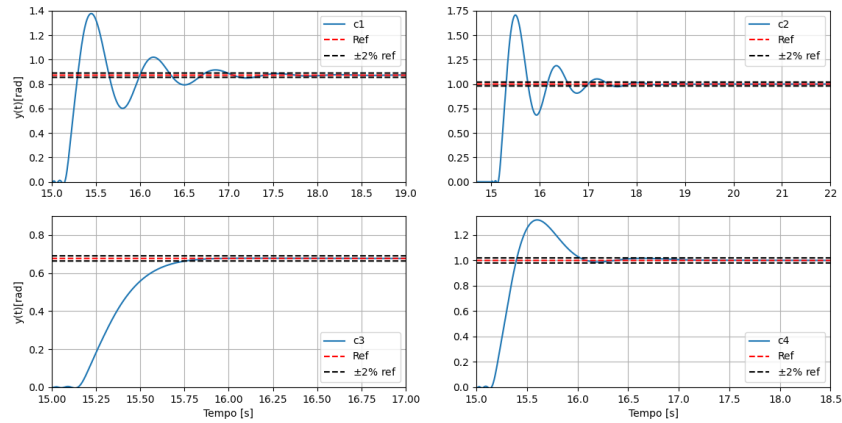


Figura 15 – Resposta temporal do *Fan Plate* em malha fechada para obtenção dos parâmetros do regime transitório

A Tabela 4 apresenta os parâmetros do transitório obtidos de maneira gráfica a partir da Figura 15. Para obter o tempo de acomodação, utilizou-se o critério de 2%, conforme a seção 2.2. Como o controlador proporcional obtido pelo método CHR (c3) apresenta um comportamento criticamente amortecido, não é possível obter os transitórios do mesmo. Vale ressaltar, que o valor do sobressinal máximo (M_p) é dado a partir da divisão entre o valor de b e a .

Controlador	1	2	3	4
Tempo de pico (t_p)	0,45	0,50	-	0,6
Tempo de subida (t_r)	0,29	0,31	-	0,39
Tempo de acomodação (t_s)	2,28	2,70	-	1,02
b	0,50	0,71	-	0,32
a	0,87	1	-	1
Sobressinal Máximo (M_p)	0,57	0,71	-	- 0,32

Tabela 4 – Valores do transitório do sistema.

Com vista a avaliar qualitativamente a performance do sistema em malha fechada para cada controlador, utilizou-se os índices de desempenho IAE, ITAE e RMSE. Para isso, aplicou-se os índices à duas condições: sequência de degraus (avaliando o seguimento de referência), conforme desenvolvido na Figura 13, e rejeição a alteração paramétrica da massa, conforme desenvolvido na Figura 14. As Tabelas 5 e 6 representam os valores obtidos para seguimento de referência e rejeição a perturbação, respectivamente.

Controlador	1	2	3	4
IAE	0.7151	0.5293	1.2824	0.2624
ITAE	0.7310	0.4472	1.5034	0.1940
RMSE	0.0107	0.0127	0.0139	0.0098

Tabela 5 – Índices de performance da resposta do sistema para seguimento de referência

Controlador	1	2	3	4
IAE	0.8805	0.1525	2.0460	0.0954
ITAE	0.9861	0.0183	2.4916	0.0056
RMSE	0.0092	0.0084	0.0169	0.0068

Tabela 6 – Índices de performance da resposta do sistema para rejeição a perturbação

Dos resultados obtidos na tabela 5, infere-se que os controladores PI (c2 e c4) apresentam, em sua maioria, melhor desempenho, com exceção do controlador 2 no método RMSE, em que o controlador 1 foi superior a ele. Além disso, é possível notar o controlador Proporcional-Integral obtido pelo método CHR (c4) apresenta melhor desempenho em todos os índices. Já na Tabela 6, observa-se que os controladores PI (c2 e c4) também apresentam melhor desempenho e o controlador quatro continua possuindo os melhores índices. Em uma análise geral, pode-se dizer que o controlador 4 é uma boa opção, por possuir os menores índices em ambas as situações analisadas, e que o controlador 3 pode ser considerado o pior entre os quatro, já que não apresentou superioridade em nenhum caso.

4 Conclusão

Com o trabalho finalizado, pode-se concluir que foi possível obter modelos a partir da modelagem caixa preta do sistema *Fan Plate*. Após essa modelagem, encontrou-se as respostas temporais em malha aberta juntamente com a dinâmica real do sistema, com o objetivo de realizar comparações analíticas. Além disso, foi possível analisar a influência da massa da placa no sistema, através de uma alteração no seu valor de 0,1Kg para 0,005Kg. Essa mudança fez com que o sistema que antes tinha um comportamento subamortecido passasse a comportar-se de maneira superamortecida. Nesse último modelo foi possível explorar a aplicação de atraso no sistema e as aproximação por Padé de diferentes ordens.

Em um segundo momento, fez análise da resposta temporal do sistema em malha fechada através da construção de controladores do tipo P e PI utilizando dos métodos de Ziegler-Nichols e CHR, com o objetivo de descrever seus comportamentos, através dos métodos IAE, ITAE e RMSE, em duas situações diferentes: seguimento de referência e rejeição a perturbação. Para ambas situações os controladores PI demostraram ser superiores, com destaque ao controlador 4, que foi melhor em todas as situações. Em contra-partida, o controlador 3 não é indicado, visto que seu desempenho foi o pior entre os quatro em todas as circunstâncias e métodos de análise.

Referências

AGUIRRE, L. A. *Introdução á identificação de sistemas: Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. 3. ed. [S.l.]: UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. Citado na página 1.

ASTROM; HAGGLUND. *PID Controllers: Theory, Design and Tunning*. 343 p. 2. ed. [S.l.: s.n.], 1995. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.

BUNGE, M. *Teoria e realidade.*[Tradução Gita K. Guisburg]. [S.l.]: São Paulo: Perspectiva, 2008. Citado na página 1.

CHIEN, C. H. R. *PID controller tuned using the CHR*. [S.l.: s.n.], 1952. Citado na página 5.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.