Wybrane zastosowania analitycznych metod modelowania rozmytego i inteligencji obliczeniowej

Jacek Kluska

KIA

Motywacja

Zastosowania

- Sterowanie pojazdami, ABS, systemy nawigacji robotów, klimatyzatory, aparaty fotograficzne, kamery, windy, zmywarki, sprzęt AGD, pralki, odkurzacze, kuchenki do ryżu, GIS, OCR, ...
- Mikroprocesory (NLX230, AL220, 68HC12).

- WoS (1969-2014): *fuzzy modeling* – 1 864, *fuzzy control* – 10 766.
- H. Ying, *Fuzzy control and modeling. Analytical foundations and applications*. IEEE Press, New York 2000:
  "The fuzzy systems developed are mostly treated as (magic) black boxes with little analytical understanding and explanation."
- J. Kluska, *Analytical methods in fuzzy modeling and control*, (Kacprzyk J. Ed.), Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 241, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

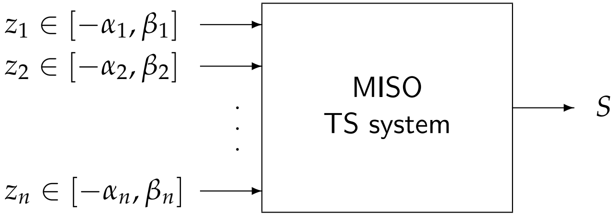
Plan

- System TSK z liniowymi funkcjami przynależności.
- Generator i macierz fundamentalna.
- Zupełność i niesprzeczność reguł, meta-reguły.
- Rekursja.
- Systemy TS z punktu widzenia logik wielowartościowych.
- Systemy TS z funkcjami przynależności 2-go rzędu.

Przykladowe zastosowania

- Projektowanie układów regulacji.
- Identyfikacja wieloliniowych systemów dynamicznych.
- Zastosowanie rozmytego przerzutnika JK.
- Rozwiązanie analityczne problemu nawigacji.
- Rozmyty system regułowy jako system wspomagania decyzji.
- Sprzętowe implementacje prostych systemów rozmytych.

System TSK

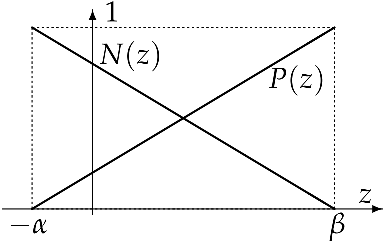


Rysunek: SE-TS o wielu wejściach i jednym wyjściu.

Liniowe funkcje przynależności

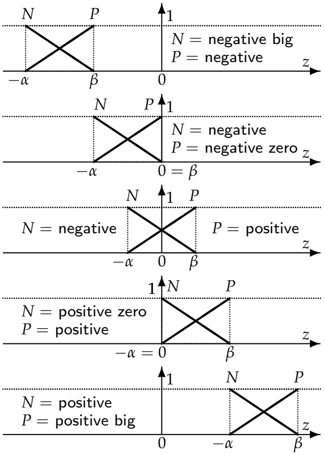
$$N_k\left(z_k\right) = \frac{\beta_k - z_k}{\alpha_k + \beta_k}, \tag{1}$$

$$P_k\left(z_k\right) = 1 - N_k\left(z_k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$



Rysunek: Funkcje przynależności zbiorów rozmytych.

Lingwistyczna interpretacja zbiorów rozmytych



Rysunek: 5 różnych interpretacji.

Nierozmyte wyjście systemu MISO P1-TS

- 2^n reguł

$$\text{Jeżeli } z_1 \text{ jest } A_{i_1} \text{ \& ... \& } z_n \text{ jest } A_{i_n}, \text{ to } S = q_{(i_1,\ldots,i_n)}, \qquad q_{(i_1,\ldots,i_n)} \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$A_{i_k} = \begin{cases} N_k, & \text{dla} \quad i_k = 0 \\ P_k, & \text{dla} \quad i_k = 1 \end{cases}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

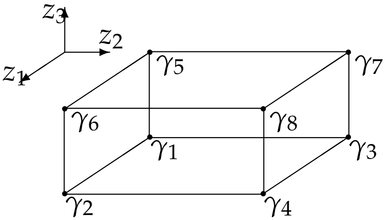
- Nierozmyte wyjście

$$S(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\sum_{v=1}^{2^n} \top \left(A_{i_1}(z_1), \ldots, A_{i_n}(z_n) \right)_v \cdot q_v}{\sum_{v=1}^{2^n} \top \left(A_{i_1}(z_1), \ldots, A_{i_n}(z_n) \right)_v}. \tag{5}$$

- $\top$ – *t-norma algebraiczna*,
- $v = 1 + \sum_{k=1}^{n} i_k 2^{n-k}$ dla $i_k \in \{0, 1\}$, $v \leftrightarrow (i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$.

Wejściowy zbiór uniwersalny

$$D^n = \times_{k=1}^{n} [-\alpha_k, \beta_k] , \tag{6}$$



Rysunek: Hiperprostokąt D^3.

Długość krawędzi i objętość D^n

$$L_k = \alpha_k + \beta_k \ , \qquad V_k = \prod_{i=1}^{k} L_i \ , \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{7}$$

Funkcja realizowana przez system P1-TS

Twierdzenie

Niech $f_0 : D^n \to \mathbb{R}$,

$$f_0(\mathbf{z}) = \sum_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n} \theta_{p_1,p_2,\ldots,p_n} z_1^{p_1} z_2^{p_2} \cdots z_n^{p_n} \,, \tag{8}$$

gdzie $\theta_{p_1,p_2,\ldots,p_n} \in \mathbb{R}$. *Dla dowolnej funkcji o postaci (8), istnieje system MISO P1-TS zerowego rzędu:*

$$S(\mathbf{z}) = f_0(\mathbf{z}) \,, \qquad \forall\ \mathbf{z} \in D^n$$

w którym wejścia z_k *mają przyporządkowane zbiory rozmyte (1)-(2) i system ten zdefiniowany jest przez* 2^n *reguł (3)-(4).*
Można znaleźć następniki reguł poprzez rozwiązanie 2^n *równań liniowych.*
Jednoznaczne rozwiązanie zawsze istnieje.

Generator i macierz fundamentalna systemu P1-TS

- **Generator**

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{z}\right) = \left[1, \ldots, z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n}, \ldots, z_1 \cdots z_n\right]^T \in \mathbb{R}^{2^n}, \quad p_k \in \{0, 1\}, \quad (9)$$

- **Macierz fundamentalna**

$$\mathbf{\Omega} = \left[\ \mathbf{g}\left(\gamma_1\right), \quad \ldots, \quad \mathbf{g}\left(\gamma_{2^n}\right)\ \right] \in \mathbb{R}^{2^n} \times \mathbb{R}^{2^n}, \quad (10)$$

- Wyjście nierozmyte

$$f_0\left(z_1, \ldots, z_n\right) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{g}\left(z_1, \ldots, z_n\right), \qquad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2^n}, \quad (11)$$

Wniosek

$$\mathbf{q}^T = \left[q_1, \ \ldots, \ q_{2^n}\right] = \left[f_0\left(\gamma_1\right), \ \ldots, \ f_0\left(\gamma_{2^n}\right)\right] = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{\Omega}, \quad (12)$$

Jak najprościej wyznaczyć wyjście systemu P1-TS ?

Twierdzenie

Wyjście systemu P1-TS

$$S(\mathbf{z}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{z}) \left(\mathbf{\Omega}^T\right)^{-1} \mathbf{q} = f_0(\mathbf{z}), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{\Omega}^T\right)^{-1} \mathbf{q}. \tag{14}$$

Dowód

$\det \mathbf{\Omega} = (V_n)^{2^{n-1}}$.

Co zrobić gdy mamy dużą bazę reguł ?

$$\mathbf{g}_0 = 1, \qquad \boldsymbol{\Omega}_0 = 1,$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ z_{k+1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{g}_k \in \mathbb{R}^{2^{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{15}$$

gdzie "$\otimes$" - iloczyn Kroneckera.

Lemat

$$\boldsymbol{\Omega}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_{k+1} & \beta_{k+1} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\Omega}_k \in \mathbb{R}^{2^{k+1} \times 2^{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{16}$$

Czego oczekujemy od eksperta ?

Wniosek

Przypuśćmy, że dana jest f_0 jak w (8). Warunek konieczny i wystarczający do tego, aby system P1-TS był równoważny z f_0 jest następujący:

$$q_v = f_0\left(\gamma_v\right), \quad \text{dla} \quad v = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{17}$$

- **Przy formułowaniu reguł, jedyną informacją wymaganą od eksperta są wartości nierozmytej funkcji w wierzchołkach hiperprostokąta D^n.**

Zupełność i niesprzeczność systemu reguł. Metareguły

1. System rozmytych reguł "If-then" jest *zupełny*, jeżeli reguły zawierają wszystkie możliwe poprzedniki w części "If", co daje 2^n reguł jak w (3)-(4).
2. System rozmytych reguł "If-then" jest *sprzeczny*, jeżeli istnieją co najmniej dwie reguły, które mają ten sam poprzednik, lecz różne następniki.
3. Gdy liczba reguł jest duża, możemy używać *metareguł*. *Metareguła* jest to taka reguła "If-then", która w części "If" nie ma warunku odnoszącego się do jakiejś zmiennej wejściowej (lub występuje stwierdzenie typu "z_k *jest dowolne*").

System zupełny i niesprzeczny

Przykład

a)

$z_1, \downarrow$ \ $z_2 \rightarrow$	N_2	P_2
N_1	q_1	q_3
P_1	q_2	q_4

$$\left.\begin{array}{l}
R_1 : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_1, \\
R_2 : \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_2, \\
R_3 : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2, \text{ then } S = q_3, \\
R_4 : \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2, \text{ then } S = q_4.
\end{array}\right\}$$

System niezupełny i niesprzeczny

Przykład

b)

$z_1, \downarrow$ / $z_2 \rightarrow$	N_2	P_2
N_1	q_1	$-$
P_1	q_2	q_4

$$\left.\begin{array}{l} R_1 : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_1, \\ R_2 : \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_2, \\ R_4 : \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2, \text{ then } S = q_4. \end{array}\right\}$$

System niezupełny i sprzeczny

Przykład

c)

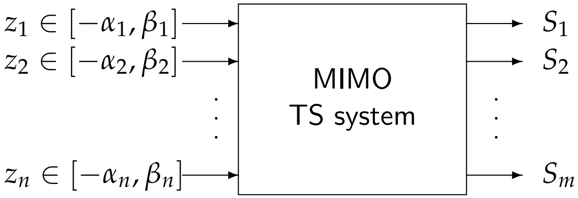
$z_1, \; z_2 \rightarrow$ $\downarrow$	N_2	P_2
N_1	q_1	q_1, q_3
P_1	q_2	$-$

$$\left.\begin{array}{l} R_1 : \text{If } z_1 \text{ is } N_1, \text{ then } S = q_1, \\ R_2 : \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_2, \\ R_3 : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2, \text{ then } S = q_3. \end{array}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} R_1' : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_1, \\ R_1'' : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2, \text{ then } S = q_1, \\ R_2 : \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2, \text{ then } S = q_2, \\ R_3 : \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2, \text{ then } S = q_3. \end{array}\right\}$$

Opis macierzowy systemu MIMO P1-TS



Rysunek: System MIMO P1-TS.

Reguły w postaci konwencjonalnej

- 2^n reguł rozmytych

$$
\begin{aligned}
R_1: &\quad \text{If } z_1 \text{ is } N_1 \text{ and } z_2 \text{ is } N_2 \text{ and } \ldots \text{ and } z_n \text{ is } N_n, \\
&\quad \text{then } S_1 = q_{1,1}, \ldots, S_m = q_{1,m}, \\
&\quad \vdots \\
R_v: &\quad \text{If } z_1 \text{ is } A_{i_1} \text{ and } z_2 \text{ is } A_{i_2} \text{ and } \ldots \text{ and } z_n \text{ is } A_{i_n}, \\
&\quad \text{then } S_1 = q_{v,1}, \ldots, S_m = q_{v,m}, \\
&\quad \vdots \\
R_{2^n}: &\quad \text{If } z_1 \text{ is } P_1 \text{ and } z_2 \text{ is } P_2 \text{ and } \ldots \text{ and } z_n \text{ is } P_n, \\
&\quad \text{then } S_1 = q_{2^n,1}, \ldots, S_m = q_{2^n,m},
\end{aligned}
$$

gdzie $A_{i_k} \in \{N_k, P_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i_k \in \{0, 1\}$, jak w (4).

Reguły w postaci macierzowej

$$\text{If} \quad [z_1, \ldots, z_n] \quad \text{is} \quad \mathbf{M}, \quad \text{then} \quad [S_1, \ldots, S_m] \quad \text{is} \quad \mathbf{Q}, \tag{18}$$

gdzie *macierz poprzedników reguł*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_{n-1} & N_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1} & \cdots & A_{i_{n-1}} & A_{i_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_1 & \cdots & P_{n-1} & P_n \end{bmatrix}_{2^n \times n} , \tag{19}$$

oraz $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n-1}}, A_{i_n}) \in \{N_1, P_1\} \times \ldots \times \{N_{n-1}, P_{n-1}\} \times \{N_n, P_n\}$,
macierz następników reguł

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_j, \cdots, \mathbf{q}_m] = \begin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,j} & \cdots & q_{1,m} \\ q_{2,1} & \cdots & q_{2,j} & \cdots & q_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2^n,1} & \cdots & q_{2^n,j} & \cdots & q_{2^n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2^n \times m}. \tag{20}$$

Obliczanie wyjścia systemu MIMO P1-TS

Twierdzenie

Dany jest system MIMO P1-TS za pomocą jednej reguły w postaci macierzowej (18)-(20). Macierz wyjść nierozmytych $S(\mathbf{z}) = [S_1, \ldots, S_m]$ *można obliczyć następująco*

$$\mathbf{S}(\mathbf{z}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{z}) \left(\mathbf{\Omega}^T\right)^{-1} \mathbf{Q}, \tag{21}$$

gdzie Q *jest macierzą następników reguł*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Theta}, \tag{22}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta} &= [\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_m] \in \mathbb{R}^{2^n \times m}, \\ \boldsymbol{\theta}_j &= \left[\theta_{j,00\ldots0}, \theta_{j,10\ldots0}, \theta_{j,01\ldots0}, \ldots, \theta_{j,11\ldots1}\right]^T \in \mathbb{R}^{2^n}, \qquad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{23}$$

Rekursja w systemach P1-TS: odwrotność macierzy fundamentalnej

Motywacja

- P1-TS: $\dim \mathbf{g} = 2^n$, $\dim \mathbf{\Omega} = 4^n$.

Lemat

Dla P1-TS prawdziwa jest rekursja

$$\mathbf{\Omega}_0 = 1,$$
$$\mathbf{\Omega}_{k+1}^{-1} = \frac{1}{L_{k+1}} \begin{bmatrix} \beta_{k+1} & -1 \\ \alpha_{k+1} & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{\Omega}_k^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{24}$$

Rekursja w systemach P1-TS: obliczanie wyjścia

Twierdzenie

Nierozmyte wyjście systemu P1-TS można wyrazić rekurencyjnie

$$\begin{aligned} S_n\left(q_1,\ldots,q_{2^n}\right) = {} & N_n\left(z_n\right) S_{n-1}\left(q_1,\ldots,q_{2^{n-1}}\right) \\ & + P_n\left(z_n\right) S_{n-1}\left(q_{2^{n-1}+1},\ldots,q_{2^n}\right), \qquad n = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

- $S_n\left(q_1,\ldots,q_{2^n}\right)$ – *wyjście systemu z wejściami* $\left(z_1,\ldots,z_n\right) \in D^n$ *z następnikami reguł* $\left[q_1,\cdots,q_{2^n}\right]^T$,
- $N_n\left(z_n\right)$ *i* $P_n\left(z_n\right)$ – *funkcje przynależności (1)-(2) dla* $z_n \in [-\alpha_n,\beta_n]$,
- $S_{n-1}\left(q_1,\ldots,q_{2^{n-1}}\right)$ – *wyjście systemu z wejściami* $\left(z_1,\ldots,z_{n-1}\right) \in D^{n-1}$ *i następnikami reguł* $\left[q_1,\cdots,q_{2^{n-1}}\right]^T$,
- $S_{n-1}\left(q_{2^{n-1}+1},\ldots,q_{2^n}\right)$ – *wyjście systemu z wejściami* $\left(z_1,\ldots,z_{n-1}\right) \in D^{n-1}$ *i następnikami reguł* $\left[q_{2^{n-1}+1},\ldots,q_{2^n}\right]^T$.

Przykład systemu P1-TS o sześciu wejściach - generator

Przykład

- $\underline{n = 6}$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_6 = [&1, z_1, z_2, z_1z_2, z_3, z_1z_3, z_2z_3, z_1z_2z_3, z_4, z_1z_4, z_2z_4, z_1z_2z_4,\\ &z_3z_4, z_1z_3z_4, z_2z_3z_4, z_1z_2z_3z_4, z_5, z_1z_5, z_2z_5, z_1z_2z_5, z_3z_5,\\ &z_1z_3z_5, z_2z_3z_5, z_1z_2z_3z_5, z_4z_5, z_1z_4z_5, z_2z_4z_5, z_1z_2z_4z_5,\\ &z_3z_4z_5, z_1z_3z_4z_5, z_2z_3z_4z_5, z_1z_2z_3z_4z_5, z_6, z_1z_6, z_2z_6,\\ &z_1z_2z_6, z_3z_6, z_1z_3z_6, z_2z_3z_6, z_1z_2z_3z_6, z_4z_6, z_1z_4z_6, z_2z_4z_6,\\ &z_1z_2z_4z_6, z_3z_4z_6, z_1z_3z_4z_6, z_2z_3z_4z_6, z_1z_2z_3z_4z_6, z_5z_6,\\ &z_1z_5z_6, z_2z_5z_6, z_1z_2z_5z_6, z_3z_5z_6, z_1z_3z_5z_6, z_2z_3z_5z_6,\\ &z_1z_2z_3z_5z_6, z_4z_5z_6, z_1z_4z_5z_6, z_2z_4z_5z_6, z_1z_2z_4z_5z_6,\\ &z_3z_4z_5z_6, z_1z_3z_4z_5z_6, z_2z_3z_4z_5z_6, z_1z_2z_3z_4z_5z_6]^T.\end{aligned}$$

Przykład systemu P1-TS o sześciu wejściach - metareguły

Przykład

M_1 : If z_1 is N_1 and z_3 is P_3 and z_4 is N_4, then $S = a$,

M_2 : If z_3 is P_3 and z_4 is P_4 and z_6 is N_6, then $S = b$,

M_3 : If z_1 is P_1 and z_2 is N_2 and z_4 is N_4 and z_5 is N_5, then $S = c$,

M_4 : If z_1 is N_1 and z_3 is N_3, then $S = 0$,

M_5 : If z_4 is P_4 and z_6 is P_6, then $S = 0$,

M_6 : If z_1 is P_1 and z_4 is N_4, and z_5 is P_5, then $S = 0$,

M_7 : If z_1 is P_1 and z_3 is N_3 and z_4 is P_4 and z_6 is N_6, then $S = 0$,

M_8 : If z_1 is P_1, and z_2 is P_2 and z_4 is N_4, then $S = 0$.

Wykorzystanie obliczeń symbolicznych

Na podstawie Twierdzenia o rekursji otrzymujemy

$$S_1(q_1, q_2) = \frac{\beta_1 - z_1}{\alpha_1 + \beta_1} q_1 + \frac{z_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} q_2,$$

$$S_2(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\beta_2 - z_2}{\alpha_2 + \beta_2} S_1(q_1, q_2) + \frac{\alpha_2 + z_2}{\alpha_2 + \beta_2} S_1(q_3, q_4),$$

$$S_3(q_1, \ldots, q_8) = \frac{\beta_3 - z_3}{\alpha_3 + \beta_3} S_2(q_1, q_2, q_3, q_4) + \frac{\alpha_3 + z_3}{\alpha_3 + \beta_3} S_2(q_5, q_6, q_7, q_8),$$

$$S_4(q_1, \ldots, q_{16}) = \frac{\beta_4 - z_4}{\alpha_4 + \beta_4} S_3(q_1, \ldots, q_8) + \frac{\alpha_4 + z_4}{\alpha_4 + \beta_4} S_3(q_9, \ldots, q_{16}),$$

$$S_5(q_1, \ldots, q_{32}) = \frac{\beta_5 - z_5}{\alpha_5 + \beta_5} S_4(q_1, \ldots, q_{16}) + \frac{\alpha_5 + z_5}{\alpha_5 + \beta_5} S_4(q_{17}, \ldots, q_{32}),$$

$$S_6(q_1, \ldots, q_{64}) = \frac{\beta_6 - z_6}{\alpha_6 + \beta_6} S_5(q_1, \ldots, q_{32}) + \frac{\alpha_6 + z_6}{\alpha_6 + \beta_6} S_5(q_{33}, \ldots, q_{64}).$$

System P1-TS jako układ działający zgodnie z logiką wielowartościową

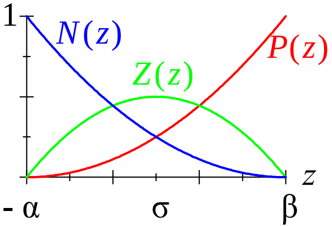
Przykład

Niech $z_k \in [0,1]$ dla $k = 1, \ldots, 6$ dla reguł z przykładu. Wyjście

$$S = \underbrace{a(1-z_1)z_3(1-z_4)}_{M_1} + \underbrace{bz_3z_4(1-z_6)}_{M_2} + \underbrace{cz_1(1-z_2)(1-z_4)(1-z_5)}_{M_3}.$$

M_1 : If z_1 is N_1 and z_3 is P_3 and z_4 is N_4, then $S = a$,
M_2 : If z_3 is P_3 and z_4 is P_4 and z_6 is N_6, then $S = b$,
M_3 : If z_1 is P_1, and z_2 is N_2 and z_4 is N_4 and z_5 is N_5, then $S = c$.

- Dla $a = b = c = 1$ system przetwarza informację wyrażoną w logice wielowartościowej: $\mathbf{z} \in [0,1]^6 \Rightarrow$ prosta interpretacja.



Rysunek: Funkcje z parametrem $\lambda = 1$; $(0 < \lambda \leqslant 1)$.

$$N(z) = \frac{(\alpha + \beta - \lambda(z + \alpha))(\beta - z)}{(\alpha + \beta)^2}, \tag{26}$$

$$Z(z) = 2\lambda \frac{(\beta - z)(z + \alpha)}{(\alpha + \beta)^2}, \tag{27}$$

$$P(z) = \frac{(\alpha + \beta + \lambda(z - \beta))(z + \alpha)}{(\alpha + \beta)^2}. \tag{28}$$

Generator i macierz fundamentalna dla systemu P2-TS

$$\mathbf{g}_0 = 1, \quad \mathbf{g}_k\left(z_1, \ldots, z_k\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{g}_{k-1}\left(z_1, \ldots, z_{k-1}\right) \in \mathbb{R}^{3^k}, \qquad (29)$$

Twierdzenie

Macierz fundamentalna dla systemu P2-TS z wejściami $\left(z_1, \ldots, z_k\right) \in D^k$*:*

$$\mathbf{\Omega}_0 = 1,$$

$$\mathbf{\Omega}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha_k & \sigma_k & \beta_k \\ \alpha_k^2 & \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \frac{\left(\alpha_k + \beta_k\right)^2}{\lambda_k}\right) & \beta_k^2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{\Omega}_{k-1}, \qquad (30)$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *gdzie* $\lambda_k \in (0, 1]$.

Macierz fundamentalna dla dwuwejściowego systemu P2-TS

Przykład

Dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *otrzymujemy*

$$\mathbf{\Omega}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & -\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2\alpha_2 & \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2^2 & \alpha_1^2\alpha_2^2 \\ 1 & \sigma_1 & -\alpha_1\beta_1 & -\alpha_2 & -\sigma_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2\beta_1 & \alpha_2^2 & \sigma_1\alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2^2\beta_1 \\ 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & -\alpha_2 & -\alpha_2\beta_1 & -\alpha_2\beta_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^2\beta_1 & \alpha_2^2\beta_1^2 \\ 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & \sigma_2 & -\alpha_1\sigma_2 & \alpha_1^2\sigma_2 & -\alpha_2\beta_2 & \alpha_1\alpha_2\beta_2 & -\alpha_1^2\alpha_2\beta_2 \\ 1 & \sigma_1 & -\alpha_1\beta_1 & \sigma_2 & \sigma_1\sigma_2 & -\alpha_1\beta_1\sigma_2 & -\alpha_2\beta_2 & -\sigma_1\alpha_2\beta_2 & \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \sigma_2 & \beta_1\sigma_2 & \beta_1^2\sigma_2 & -\alpha_2\beta_2 & -\alpha_2\beta_1\beta_2 & -\alpha_2\beta_1^2\beta_2 \\ 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_2 & -\alpha_1\beta_2 & \alpha_1^2\beta_2 & \beta_2^2 & -\alpha_1\beta_2^2 & \alpha_1^2\beta_2^2 \\ 1 & \sigma_1 & -\alpha_1\beta_1 & \beta_2 & \sigma_1\beta_2 & -\alpha_1\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 & \sigma_1\beta_2^2 & -\alpha_1\beta_1\beta_2^2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \beta_2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1^2\beta_2 & \beta_2^2 & \beta_1\beta_2^2 & \beta_1^2\beta_2^2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Rekursja w systemach P2-TS

Twierdzenie

Jeżeli $\Omega_0 = 1$ *oraz* Ω_n *jest macierzą fundamentalną systemu P2-TS z* n *wejściami,* $(n \geqslant 1)$*, to*

$$\boldsymbol{\Omega}_n^{-1} = \frac{1}{L_n^2} \begin{bmatrix} \beta_n \left(L_n - \alpha_n \lambda_n\right) & -L_n + \left(\alpha_n - \beta_n\right)\lambda_n & \lambda_n \\ 2\alpha_n \beta_n \lambda_n & 4\sigma_n \lambda_n & -2\lambda_n \\ \alpha_n \left(L_n - \beta_n \lambda_n\right) & L_n + \left(\alpha_n - \beta_n\right)\lambda_n & \lambda_n \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\Omega}_{n-1}^{-1}, \tag{32}$$

gdzie $L_n = \alpha_n + \beta_n$.

Kolejna rekursja dla systemów P2-TS

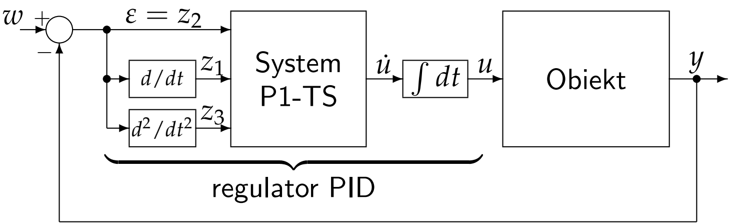
Twierdzenie

Nierozmyte wyjście systemu P2-TS można wyznaczyć rekursywnie

$$\begin{aligned} S_n\left(q_{0,\ldots,0,0},\ldots,q_{2,\ldots,2,2}\right) &= N_n\left(z_n\right) S_{n-1}\left(q_{0,\ldots,0,0},\ldots,q_{2,\ldots,2,0}\right) \\ &+ Z_n\left(z_n\right) S_{n-1}\left(q_{0,\ldots,0,1},\ldots,q_{2,\ldots,2,1}\right) \\ &+ P_n\left(z_n\right) S_{n-1}\left(q_{0,\ldots,0,2},\ldots,q_{2,\ldots,2,2}\right), \end{aligned} \tag{33}$$

$S_n\left(q_{0,\ldots,0,0},\ldots,q_{2,\ldots,2,2}\right)$ – *wyjście dla wejść* $\left(z_1,\ldots,z_n\right) \in D^n$ *i następników reguł* $\left[q_{0,\ldots,0,0},\ldots,q_{2,\ldots,2,2}\right]^T$,
$S_{n-1}\left(q_{0,\ldots,0,0},\ldots,q_{2,\ldots,2,0}\right)$ – *wyjście dla wejść* $\left(z_1,\ldots,z_{n-1}\right) \in D^{n-1}$ *i następników reguł* $\left[q_{0,\ldots,0,0},\ldots,q_{2,\ldots,2,0}\right]^T$,
$S_{n-1}\left(q_{0,\ldots,0,1},\ldots,q_{2,\ldots,2,1}\right)$ – *wyjście dla wejść* $\left(z_1,\ldots,z_{n-1}\right) \in D^{n-1}$ *i następników reguł* $\left[q_{0,\ldots,0,1},\ldots,q_{2,\ldots,2,1}\right]^T$,
$S_{n-1}\left(q_{0,\ldots,0,2},\ldots,q_{2,\ldots,2,2}\right)$ – *wyjście dla wejść* $\left(z_1,\ldots,z_{n-1}\right) \in D^{n-1}$ *i następników reguł* $\left[q_{0,\ldots,0,2},\ldots,q_{2,\ldots,2,2}\right]^T$.

SYSTEM P1-TS JAKO REGULATOR



Rysunek: Zamknięty układ regulacji rozmytej.

Obiekt

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = k_0 u(t), \quad y(0), \quad \dot{y}(0), \quad \xi > 0, \tag{34}$$

Cel: W układzie zamkniętym ma być

$$\boxed{y(t) = w_0 + (y(0) - w_0)\exp(-t\lambda) \text{ dla } w(t) = w_0,\ \lambda > 0,\ t \geqslant 0.} \tag{35}$$

Reguły systemu P1-TS gwarantujące pożądane zachowanie układu zamkniętego

Założenia:

$$\left(\varepsilon\left(t\right),\dot{\varepsilon}\left(t\right),\ddot{\varepsilon}\left(t\right)\right) \in \left[-\alpha_2,\beta_2\right] \times \left[-\alpha_1,\beta_1\right] \times \left[-\alpha_3,\beta_3\right],$$

$$k_p = 2\xi\omega_0\lambda k_0^{-1}, \qquad T_i = k_0\left(\omega_0^2\lambda\right)^{-1}, \qquad T_d = \lambda k_0^{-1}.$$

Tabela: "Optymalne" reguły dla systemu P1-TS pełniącego funkcję regulatora PID.

$\dot{\varepsilon}\left(t\right),\varepsilon\left(t\right) \downarrow \quad \backslash \quad \ddot{\varepsilon}\left(t\right) \rightarrow$

	N_3	P_3
N_1, N_2	$-T_d\alpha_3 - T_i^{-1}\alpha_2 - k_p\alpha_1$	$T_d\beta_3 - T_i^{-1}\alpha_2 - k_p\alpha_1$
N_1, P_2	$-T_d\alpha_3 + T_i^{-1}\beta_2 - k_p\alpha_1$	$T_d\beta_3 + T_i^{-1}\beta_2 - k_p\alpha_1$
P_1, P_2	$-T_d\alpha_3 + T_i^{-1}\beta_2 + k_p\beta_1$	$T_d\beta_3 + T_i^{-1}\beta_2 + k_p\beta_1$
P_1, N_2	$-T_d\alpha_3 - T_i^{-1}\alpha_2 + k_p\beta_1$	$T_d\beta_3 - T_i^{-1}\alpha_2 + k_p\beta_1$

Znaleźć reguły rozmyte, modelujące system

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{i,j} z_i z_j + \cdots + a_{1,2,\ldots,n} z_1 z_2 \cdots z_n \\ \vdots \\ \dfrac{dz_n}{dt} = h_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i z_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} h_{i,j} z_i z_j + \cdots + h_{1,2,\ldots,n} z_1 z_2 \cdots z_n \end{cases} \tag{36}$$

Tabela: Dane uczące.

Chwila czasowa	z_1	z_2	$\cdots$	z_n
t_1	$z_1(t_1)$	$z_2(t_1)$	$\cdots$	$z_n(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
t_{K+1}	$z_1(t_{K+1})$	$z_2(t_{K+1})$	$\cdots$	$z_n(t_{K+1})$

Rozwiązanie problemu

Twierdzenie

W wyniku zastosowania procedury uczenia otrzymujemy system P1-TS:

$$\frac{dz_j}{dt} = \mathbf{g}^T(z_1, \ldots, z_n) \left(\sum_{k=1}^{K} \mathbf{g}_{t_k} \mathbf{g}_{t_k}^T \right)^{-1} \left[\mathbf{g}_{t_1}, \cdots, \mathbf{g}_{t_K} \right] \mathbf{d}_j \ ,$$

$$\mathbf{g}_{t_k} = \mathbf{g}\left(z_1(t_k), \cdots, z_n(t_k)\right), \quad \mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} \dfrac{z_j(t_2) - z_j(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \vdots \\ \dfrac{z_j(t_{K+1}) - z_j(t_K)}{t_{K+1} - t_K} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^K, \qquad (37)$$

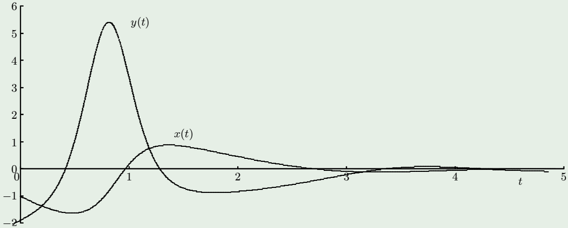
dla $j = 1, 2, \ldots, n$ *oraz* $k = 1, 2, \ldots, K$*, który jest równoważny (36) z błędem*

$$E_{\min} = \mathbf{d}_j^T \left(\mathbf{I} - \left[\mathbf{g}_{t_1}, \cdots, \mathbf{g}_{t_K} \right]^T \left(\sum_{k=1}^{K} \mathbf{g}_{t_k} \mathbf{g}_{t_k}^T \right)^{-1} \left[\mathbf{g}_{t_1}, \cdots, \mathbf{g}_{t_K} \right] \right) \mathbf{d}_j \qquad (38)$$

Przykład identyfikacji

Przykład

$$\dot{x}(t) = y(t), \qquad (39)$$
$$\dot{y}(t) = -6x(t) - 2y(t) - 4x(t)\,y(t).$$



Rysunek: Rozwiązanie równań (39) dla $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, $t \in [0,5]$.

Przykład identyfikacji - c.d.

Przykład

Na podstawie danych o trajektorii systemu ($K = 5928$), otrzymujemy model

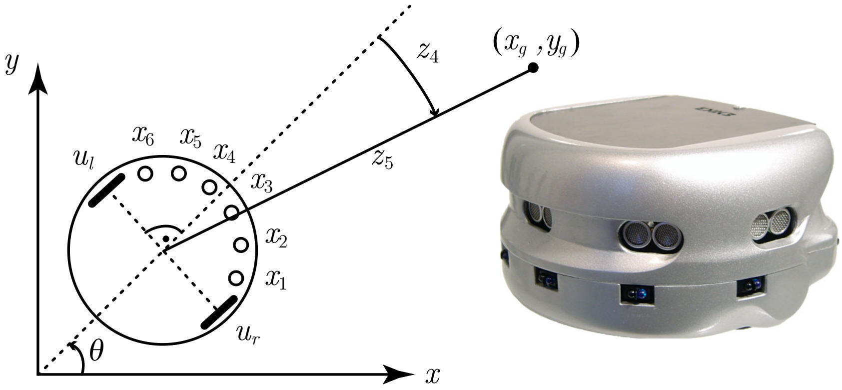
$$\text{If } [x, y] \text{ is } \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ P_1 & N_2 \\ N_1 & P_2 \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \text{ then } \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right] = \begin{bmatrix} -1.9997 & 0.7678 \\ -1.9984 & 5.8494 \\ 5.5459 & 34.5583 \\ 5.5280 & -37.0220 \end{bmatrix}.$$

równoważny układowi równań

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.0001 - 0.0015x(t) + 0.9995y(t) - 0.0010x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) &= 0.0019 - 6.0005x(t) - 2.0033y(t) - 3.9993x(t)y(t), \end{aligned} \tag{40}$$

- Błąd aproksymacji może być arbitralnie mały.
- Metoda przypomina procedurę Widrowa-Hoffa uczenia ADALINE.
- Warto wykorzystać RLS.

ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU NAWIGACJI DLA MAŁEGO ROBOTA MOBILNEGO



Rysunek: Robot dwukołowy

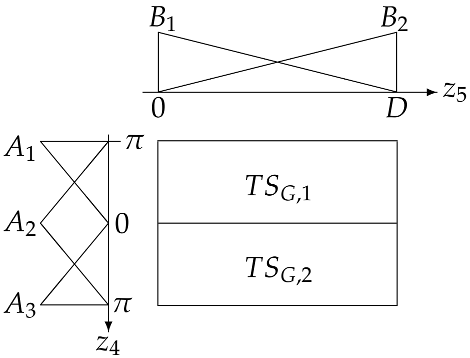
Analityczne rozwiązanie problemu nawigacji - c.d.

$$z_1 = \max(x_1, x_2)\,,\; z_2 = \max(x_5, x_6)\,,\; z_3 = \max(x_3, x_4)\,,\; z_i \in [0, a]\,. \tag{41}$$

$N_1(z_1)$ - **nie ma** przeszkody z **prawej** strony,
$N_2(z_2)$ - **nie ma** przeszkody z **lewej** strony,
$N_3(z_3)$ - **nie ma** przeszkody z **przodu**.
$P_i(z_i) = 1 - N_i(z_i), \qquad i = 1, 2, 3.$

Reguła	z_1 (z prawej)	z_2 (z lewej)	z_3 (z przodu)	Decyzja	(u_l^A, u_r^A)
R_1	N_1	N_2	N_3	jedź prosto	(C, C)
R_2	P_1	N_2	N_3	skręcaj w lewo	$(-C, C)$
R_3	N_1	P_2	N_3	skręcaj w prawo	$(C, -C)$
R_4	P_1	P_2	N_3	jedź prosto	(C, C)
R_5	N_1	N_2	P_3	skręcaj w lewo	$(-C, C)$
R_6	P_1	N_2	P_3	skręcaj w lewo	$(-C, C)$
R_7	N_1	P_2	P_3	skręcaj w prawo	$(C, -C)$
R_8	P_1	P_2	P_3	skręcaj w lewo	$(-C, C)$

Analityczne rozwiązanie problemu nawigacji - c.d.



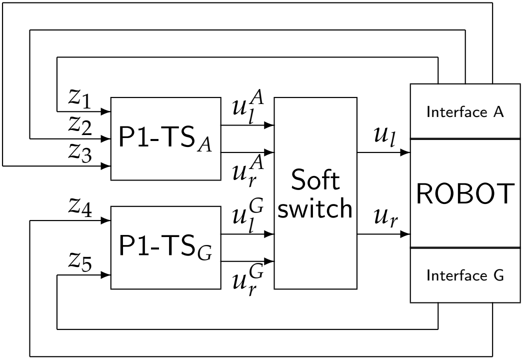
Rysunek: Funkcje przynależności w trybie pracy "jazda do celu".

A_1 - kąt z_4 jest **ujemny**, A_2 - kąt z_4 jest **bliski zeru**, A_3 - kąt z_4 jest **dodatni**, B_1 - odległość z_5 jest **mała**, B_2 - odległość x_5 jest **duża**.

Analityczne rozwiązanie problemu nawigacji - c.d.

Reguła	z_4 (kąt)	z_5 (odległość)	Decyzja	(u_l^G, u_r^G)
R_1	A_1	B_1	*skręcaj w lewo*	$(-C, C)$
R_2	A_2	B_1	*jedź powoli do przodu*	$(\eta C, \eta C)$
R_3	A_3	B_1	*skręcaj w prawo*	$(C, -C)$
R_4	A_1	B_2	*skręcaj w lewo*	$(-C, C)$
R_5	A_2	B_2	*jedź do przodu*	(C, C)
R_6	A_3	B_2	*skręcaj w prawo*	$(C, -C)$

Analityczne rozwiązanie problemu nawigacji - c.d.



Rysunek: Struktura systemu nawigacji dla małego robota mobilnego.

Analityczne rozwiązanie problemu nawigacji - c.d.

$$u_l^A = \frac{C}{a^3}\left(a^3 - 2a^2 z_1 - 2a^2 z_3 + 2az_1 z_2 + 2az_1 z_3 + 2az_2 z_3 - 4z_1 z_2 z_3\right), \tag{42}$$

$$u_r^A = \frac{C}{a^2}\left(a^2 - 2az_2 + 2z_1 z_2\right), \tag{43}$$

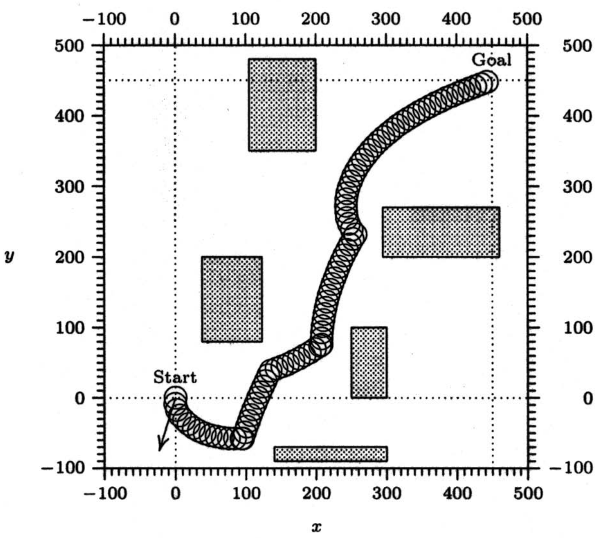
$$u_l^G = C\left(\eta + \frac{z_4 - \eta\,|z_4|}{\pi} + \frac{1-\eta}{D} z_5 - \frac{1-\eta}{\pi D}\,|z_4|\, z_5\right), \tag{44}$$

$$u_r^G = C\left(\eta - \frac{z_4 + \eta\,|z_4|}{\pi} + \frac{1-\eta}{D} z_5 - \frac{1-\eta}{\pi D}\,|z_4|\, z_5\right), \tag{45}$$

$$u_l = \rho u_l^A + (1-\rho)\, u_l^G, \qquad u_r = \rho u_r^A + (1-\rho)\, u_r^G, \tag{46}$$

gdzie $\rho \in [0,1]$ jest stałe lub $\rho = \max\left(x_1, \ldots, x_6\right)/a$.

Analityczne rozwiązanie problemu nawigacji - c.d.



Rysunek: Przykładowa trajektoria robota.

Podsumowanie

- Metodologia jest praktycznie użyteczna:
  - mamy jasną interpretację lingwistyczną rozpatrywanych modeli,
  - używamy minimalnej liczby ziorów rozmytych,
  - staramy się używać najprostszych ziorów rozmytych,
  - możemy używać kilkadziesiąt lub więcej zmiennych wejściowych (nowe procedury rekursywne),
  - teoria analityczna ma zastosowania (sterowanie, diagnostyka techniczna lub medyczna).
- Zaproponowane metody analityczne są ogólne i prostsze od znanych z literatury (por. Ying, Galichet, Hirota).
- Rozmyte systemy regułowe są łatwo interpretowalne.
- Twierdzenia o transformacji mogą być łatwo wykorzystane m.in. do:
  - modelowania pewnej klasy systemów ciągłych lub dyskretnych,
  - syntezy i analizy systemów logicznych działających w logice wielowartościowej lub binarnej.
- Czytelny jest związek między regulatorem rozmytym i klasycznym PID.

Inne zastosowania teorii analitycznej