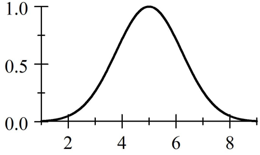
Uczący się system ekspertowy Takagi-Sugeno

Jacek Kluska
Politechnika Rzeszowska

Uczący się SE-TS

$$\begin{array}{rcl} x_1 \rightarrow & & \\ x_2 \rightarrow & \boxed{\begin{array}{c}\text{Uczący się SE-TS} \\ u = \left(\sum_{n=1}^{N} P_n u_n\right) / \left(\sum_{n=1}^{N} P_n\right)\end{array}} & \rightarrow \quad u \\ x_L \rightarrow & & \end{array}$$

Zał.: Funkcje przynależności są różniczkowalne, np.
$\mu\left(x; m, \sigma\right) = \exp\left(-\left(x - m\right)^2 / \sigma^2\right)$



Znany jest zbiór par uczących $\left\{\left(\underline{x}_1, d_1\right), \left(\underline{x}_2, d_2\right), \ldots, \left(\underline{x}_Q, d_Q\right)\right\}$.

Struktura danych

1. Zbiory rozmyte wejściowe:

$$x_1: \quad \mu_{11}(x_1; m_{11}, \sigma_{11}), \ldots, \mu_{1,J_1}(x_1; m_{1,J_1}, \sigma_{1,J_1}),$$

$$\vdots$$

$$x_L: \quad \mu_{L,1}(x_L; m_{L,1}, \sigma_{L,1}), \ldots, \mu_{L,J_L}(x_L; m_{L,J_L}, \sigma_{L,J_L}),$$

$\mu_{ij}(x_i; m_{ij}, \sigma_{ij})$, $\quad x_i \leftrightarrow i \in \{1, \ldots, L\}$, j - nr zbioru, $j \in \{1, \ldots, J_i\}$

2. N - reguł

$$\mu_{1,j_a}(x_1; m_{1,j_a}, \sigma_{1,j_a}) \times \ldots \times \mu_{L,j_b}(x_L; m_{L,j_b}, \sigma_{L,j_b}) * \longrightarrow u_1$$

$$\vdots$$

$$\mu_{1,j_c}(x_1; m_{1,j_c}, \sigma_{1,j_c}) \times \ldots \times \mu_{L,j_d}(x_L; m_{L,j_d}, \sigma_{L,j_d}) * \longrightarrow u_n, \quad \boxed{u_n \in R}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{1,j_e}(x_1; m_{1,j_e}, \sigma_{1,j_e}) \times \ldots \times \mu_{L,j_g}(x_L; m_{L,j_g}, \sigma_{L,j_g}) * \longrightarrow u_N$$

Parametry do uczenia

$$W = \{m_{11}, \ldots, m_{L,J_L}, \sigma_{11}, \ldots, \sigma_{L,J_L}, u_1, \ldots, u_N\},$$

$$\mathrm{card}(W) = 2(J_1 + \ldots + J_L) + N$$

Postawienie problemu i idea rozwiązania

Dla zadanej struktury SE i znanym zbiorze par uczących $\left\{\left(\underline{x}_1, d_1\right), \left(\underline{x}_2, d_2\right), \ldots, \left(\underline{x}_Q, d_Q\right)\right\}$, znaleźć algorytm uczenia, aby

$$E\left(k\right) = \frac{1}{2}\left[u\left(k\right) - d\left(k\right)\right]^2 \rightarrow \min, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Idea rozwiązania:

Zaprojektować rozmyto-neuronowy system ekspertowy T-S:

$$u = \frac{\sum_{n=1}^{N} P_n\left(\mu_{11}, \ldots, \mu_{L,J_L}\right) \cdot u_n}{\sum_{n=1}^{N} P_n\left(\mu_{11}, \ldots, \mu_{L,J_L}\right)}$$

uczony metodą spadku gradientu.

Sposób rozwiązania

$$w\,(k+1) = w\,(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial w}, \qquad \eta > 0.$$

$w \in W = \{m_{11}, \ldots, m_{L,J_L}, \sigma_{11}, \ldots, \sigma_{L,J_L}, u_1, \ldots, u_N\}$
Algorytm ogólny:

$$m_{ij}\,(k+1) = m_{ij}\,(k) - \eta_m \frac{\partial E}{\partial m_{ij}}, \qquad \eta_m > 0$$

$$\sigma_{ij}\,(k+1) = \sigma_{ij}\,(k) - \eta_\sigma \frac{\partial E}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad \eta_\sigma > 0$$

$$u_n\,(k+1) = u_n\,(k) - \eta_u \frac{\partial E}{\partial u_n}, \qquad \eta_u > 0$$

Problem cząstkowy:

$$\frac{\partial E}{\partial m_{ij}} = ?, \qquad \frac{\partial E}{\partial \sigma_{ij}} = ?, \qquad \frac{\partial E}{\partial u_n} = ?$$

Obliczenie pierwszego składnika

Niech: Q_{ij} - zbiór indeksów tych reguł, których poprzedniki P_n zawierają μ_{ij}.

$$\frac{\partial E}{\partial m_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial m_{ij}} = (u-d)\frac{\partial u}{\partial m_{ij}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial m_{ij}} = \sum_{q\in Q_{ij}}\left[\frac{\partial}{\partial P_q}\left(\frac{\sum_{q\in Q_{ij}} P_q u_q + \sum_{r\notin Q_{ij}} P_r u_r}{\sum_{q\in Q_{ij}} P_q + \sum_{r\notin Q_{ij}} P_r}\right)\frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}}\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial m_{ij}}\right]$$

Obliczenie pierwszego składnika - c.d.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial m_{ij}} &= \sum_{q \in Q_{ij}} \left[\left(\frac{u_q Mian - Licz \cdot 1}{Mian^2} \right) \frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial m_{ij}} \right] \\
&= \frac{1}{Mian} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial m_{ij}} \sum_{q \in Q_{ij}} \left[(u_q - u) \frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \mu_{ij}} \left(\mu_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{ij} \cdot \ldots \cdot \mu_{1,j_1} \right) = \frac{P_q}{\mu_{ij}} \\
\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial m_{ij}} &= 2 \frac{x_i - m_{ij}}{\sigma_{ij}^2} \mu_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{\partial E}{\partial m_i j} = \frac{2(u-d)}{\sum_n^N P_n} \frac{x_i - m_{ij}}{\sigma_{ij}^2} \textstyle\sum_{q \in Q_{ij}} (u_q - u) P_q}
$$

Obliczenie drugiego składnika

Q_{ij} - zbiór indeksów tych reguł, których poprzedniki P_n zawierają μ_{ij}.

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} = (u - d) \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} = \sum_{q \in Q_{ij}} \left[\frac{\partial}{\partial P_q} \left(\frac{\sum_{q \in Q_{ij}} P_q u_q + \sum_{r \notin Q_{ij}} P_r u_r}{\sum_{q \in Q_{ij}} P_q + \sum_{r \notin Q_{ij}} P_r} \right) \frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} \right]$$

Obliczenie drugiego składnika - c.d.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} &= \sum_{q \in Q_{ij}} \left[\left(\frac{u_q Mian - Licz \cdot 1}{Mian^2} \right) \frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} \right] \\
&= \frac{1}{Mian} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} \sum_{q \in Q_{ij}} \left[\left(u_q - u \right) \frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_q}{\partial \mu_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \mu_{ij}} \left(\mu_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{ij} \cdot \ldots \cdot \mu_{1,j_1} \right) = \frac{P_q}{\mu_{ij}} \\
\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} &= 2 \frac{\left(x_i - m_{ij} \right)^2}{\sigma_{ij}^3} \mu_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{\partial E}{\partial \sigma_i j} = \frac{2 \left(u - d \right)}{\sum_n^N P_n} \frac{\left(x_i - m_{ij} \right)^2}{\sigma_{ij}^3} \textstyle\sum_{q \in Q_{ij}} \left(u_q - u \right) P_q}
$$

Obliczenie trzeciego składnika

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial u_n} &= \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_n} \\
&= (u-d)\,\frac{\partial}{\partial u_n}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} P_n u_n}{\sum_{n=1}^{N} P_n}\right) \\
&= (u-d)\,\frac{P_n}{\sum_{n=1}^{N} P_n}
\end{aligned}
$$

Procedura numeryczna uczenia systemu ekspertowego

$\forall i \in \{1, \ldots, L\}, \forall j \in \{1, \ldots, J_L\}, \forall n \in \{1, \ldots, N\}$

Algorytm zmiany parametru m_{ij}:

$$\Delta m_{ij}(k) = 2\eta_m \frac{d(k) - u(k)}{\sum_{n=1}^{N} P_n(k)} \frac{x_i(k) - m_{ij}(k)}{\sigma_{ij}^2(k)} \sum_{q \in Q_{ij}} P_q(k) \left[u_q(k) - u(k)\right]$$

$$m_{ij}(k+1) = m_{ij}(k) + \Delta m_{ij}(k)$$

Algorytm zmiany σ_{ij}:

$$\Delta \sigma_{ij}(k) = 2\eta_\sigma \frac{d(k) - u(k)}{\sum_{n=1}^{N} P_n(k)} \frac{\left[x_i(k) - m_{ij}(k)\right]^2}{\sigma_{ij}^3(k)} \sum_{q \in Q_{ij}} P_q(k) \left[u_q(k) - u(k)\right]$$

$$\sigma_{ij}(k+1) = \sigma_{ij}(k) + \Delta \sigma_{ij}(k)$$

Algorytm zmiany u_n:

$$u_n(k+1) = u_n(k) + \eta_u \left[d(k) - u(k)\right] \frac{P_n(k)}{\sum_{n=1}^{N} P_n(k)}$$

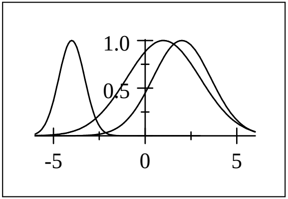
Przykład: Dwuwejściowy SE-TS

- Zbiory rozmyte wejściowe:
  $x_1 : \mu_{11}\left(x_1, m_{11}, \sigma_{11}\right), \mu_{12}\left(x_1, m_{12}, \sigma_{12}\right), \mu_{13}\left(x_1, m_{13}, \sigma_{13}\right),$
  $x_2 : \mu_{21}\left(x_2, m_{21}, \sigma_{21}\right), \mu_{22}\left(x_2, m_{22}, \sigma_{22}\right), \mu_{23}\left(x_2, m_{23}, \sigma_{23}\right),$
- Format reguł:
  $$\left(\mu_{11} \times \mu_{21}\right) * \longrightarrow u_1 \Leftrightarrow P_1\left(x_1 \times x_2\right) * \longrightarrow u_1$$
  $$\left(\mu_{11} \times \mu_{22}\right) * \longrightarrow u_2 \Leftrightarrow P_2\left(x_1 \times x_2\right) * \longrightarrow u_2$$
  $$\vdots$$
  $$\left(\mu_{13} \times \mu_{23}\right) * \longrightarrow u_9 \Leftrightarrow P_9\left(x_1 \times x_2\right) * \longrightarrow u_9$$

Przykład: Dwuwejściowy SE-TS - dane startowe

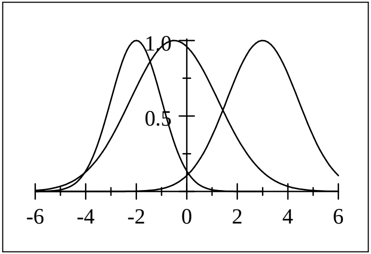
- Dane startowe: zbiory rozmyte dla x_1

$$\mu_{11} = \exp\left(-(x_1+4)^2/1\right),$$
$$\mu_{12} = \exp\left(-(x_1-1)^2/8\right),$$
$$\mu_{13} = \exp\left(-(x_1-2)^2/5\right)$$



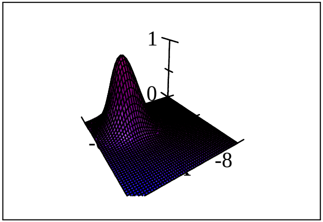
- Dane startowe: zbiory rozmyte dla x_2

$$\mu_{21} = \exp\left(-\left(x_2+2\right)^2/2\right),$$
$$\mu_{22} = \exp\left(-\left(x_2+0.5\right)^2/6\right),$$
$$\mu_{23} = \exp\left(-\left(x_2-3\right)^2/4\right)$$

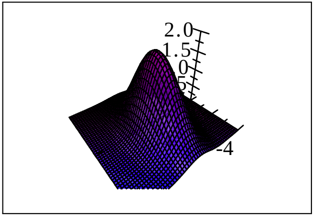


Przykład: Dwuwejściowy SE-TS - wizuaizacja reguł

- $R_1 = \mu_{11} * \mu_{21} * (1)$

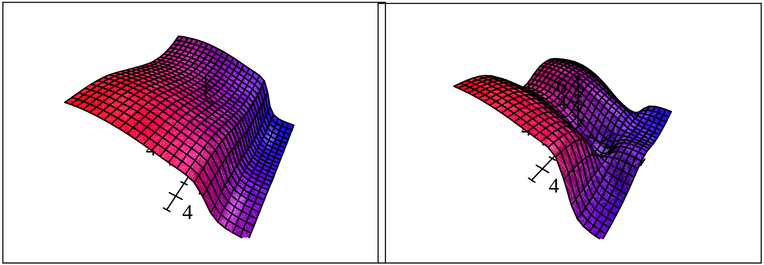


- $R_2 = \mu_{11} * \mu_{22} * (2)$



Przykład: Dwuwejściowy SE-TS - na czym polega uczenie

- $J_1 = 3, J_2 = 3, N = J_1 J_2 = 9,$
- Liczba parametrów do uczenia: $2\left(J_1 + J_2\right) + N = 21$



Przed uczeniem Po uczeniu

Przykład: Wahadło odwrócone na wózku

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{\left(p_2 \sin x_1 - p_3 x_2\right) p_1 - \left(x_2^2 \sin x_1 - p_5 x_4 + \frac{k}{ml} u\right) \cos x_1}{p_1 p_4 - \cos^2 x_1} \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\
\frac{dx_4}{dt} &= l \frac{\left(x_2^2 \sin x_1 - p_5 x_4 + \frac{k}{ml} u\right) p_4 - \left(p_2 \sin x_1 - p_3 x_2\right) \cos x_1}{p_1 p_4 - \cos^2 x_1}
\end{aligned}
$$

Przykład: Wahadło odwrócone na wózku - dane

x_1 - kąt odchylenia pręta, x_3 - odchylenie wózka (droga),
u - przyśpieszenie = **sterowanie**, ($k = 0.96$ - dla uproszczenia)

$p_1 = 1 + \frac{m_c}{m} = 36.0$, $m_c = 0.14$ -m. wózka, $m = 0.004$ -m. pręta $[kg]$

$p_2 = \frac{g}{l} = 32.7$, $g = 9.81$ $\left[m/s^2\right]$ -przyśp. ziem., $2l = 0.6$ $[m]$ -dł. pręta

$p_3 = \frac{c_1}{ml^2} = 27.0$, $c_1 = 0.00972$ $\left[kg \cdot m^2/s\right]$ -wsp. tłum. r. obr. pręta

$p_4 = 1 + \frac{J}{ml^2} = \frac{4}{3}$ J -mom. bezwł. pręta, $J = \frac{ml^2}{3}$

$p_5 = \frac{c_2}{ml^2} = 5.0$ c_2 -wsp. tłum. r. wózka, $c_2 = 0.0018$ $[kg/s]$

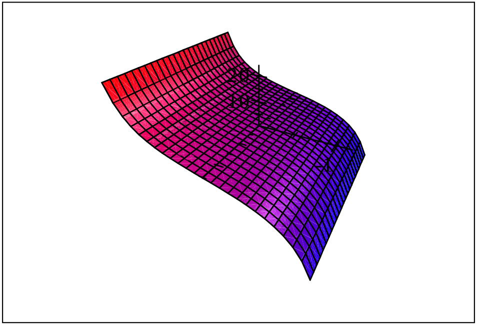
Przykład: Wahadło odwrócone na wózku - przypadek dwuwymiarowy

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{\left(p_2 \sin x_1 - p_3 x_2\right) p_1 - x_2^2 \sin x_1 \cos x_1 - \frac{k \cos x_1}{ml} u}{p_1 p_4 - \cos^2 x_1}
\end{aligned}
$$

Czy istnieje SE-TS generujący taki ciąg sterowania, dla którego ruch wahadła zanika bez oscylacji i z zadaną szybkością?
Tak. (Jest na to dowód formalny)

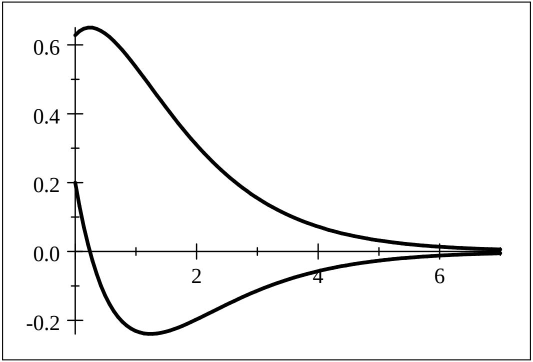
Przykład: Wahadło odwrócone na wózku - powierzchnia sterująca

Rezultat uczenia SE-TS



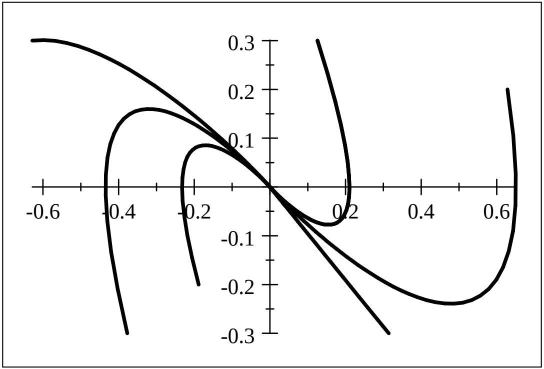
$$u = g\left(x_1, x_2\right)$$

Rezultat uczenia SE-TS



$x_1(0) = 0.2\pi, \; x_2(0) = 0.2$

Rezultat uczenia SE-TS



$$\left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right)\right), \quad t \in \left(0, 10\right).$$