Rozmyte systemy ekspertowe
- przykłady

Jacek Kluska

Politechnika Rzeszowska

USE (przykład hipotetyczny)

- Uniwersum wejściowe: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ - pacjenci.
- Każdy pacjent ma przyporządkowane 3 rozmyte atrybuty:
- $Z(x) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$ - stopień zaawansowania choroby u pacjenta
- $N(x) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$ - stopień niewydolności nerek u pacjenta
- $W(x) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0.2 \\ 0.9 \\ 0.8 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$ - stopień niewydolności wątroby u pacjenta

USE - system reguł i wyznaczenie relacji rozmytej dla pierwszej reguły

- Uniwersum wyjściowe: $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ - dawkowanie leku w ciągu doby: [rano, w południe, wieczorem]=[100,50,75] mg.
- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [1, 0, 1] \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 0, 1] \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 1, 1] \end{cases}$
- Implikacja: $p * \longrightarrow q = 1 \wedge (1 - p + q)$

$$R_1(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right) * \longrightarrow [1, 0, 1]$$

$$R_1(x, y) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} * \longrightarrow [1, 0, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

USE - system reguł i wyznaczenie relacji rozmytej dla drugiej reguły

- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [1, 0, 1] \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 0, 1] \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 1, 1] \end{cases}$
- Implikacja: $p* \longrightarrow q = 1 \wedge (1 - p + q)$

$$R_2(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix} \right) * \longrightarrow [0, 0, 1]$$

$$R_2(x, y) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} * \longrightarrow [0, 0, 1] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

USE - system reguł i wyznaczenie relacji rozmytej dla trzeciej reguły

- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [1, 0, 1] \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 0, 1] \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 1, 1] \end{cases}$
- Implikacja: $p * \longrightarrow q = 1 \wedge (1 - p + q)$

$$R_3(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.9 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right) * \longrightarrow [0, 1, 1]$$

$$R_3(x, y) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} * \longrightarrow [0, 1, 1] = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 1 \\ 0.3 & 1 & 1 \\ 0.4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

USE - wyznaczenie globalnej relacji rozmytej dla wszystkich reguł

- $[y_1, y_2, y_3]$ - dawkowanie: rano, w południe, wieczorem
- t-norma: $a \otimes b = 0 \vee (a + b - 1)$

$$R(x,y) = R_1(x,y) \ \top \ R_2(x,y) \ \top \ R_3(x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 1 \\ 0.3 & 1 & 1 \\ 0.4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

USE - Pytanie skierowane do systemu ekspertowego i wyznaczenie odpowiedzi rozmytej

- Jakie dawkowanie leku wynika z systemu reguł dla pacjenta $x = x_1$?

$$A'(x) = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

- Wyznaczenie odpowiedzi rozmytej:

$$B'(y) = \sup_x \left\{ A'(x) \top R(x,y) \right\} = \sup_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sup_x \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

USE - Wyznaczenie odpowiedzi wyostrzonej

- System ma 3 wyjścia:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 50 & 75 \end{bmatrix}$$

- Konkluzja rozmyta:

$$B'(y) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Interpretacja wnioskowania rozmytego:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 & 50 & 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 5 & 75 \end{bmatrix}$$

- Dawkowanie: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 75 & 0 & 75 \end{bmatrix} \text{[mg]}}}$

- System reguł TSK:

$$\begin{cases} R_1 : P_1(x) * \longrightarrow [100, 0, 75] \leftrightsquigarrow Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [1, 0, 1] \\ \\ R_2 : P_2(x) * \longrightarrow [0, 0, 75] \leftrightsquigarrow Z \wedge N * \longrightarrow [0, 0, 1] \\ \\ R_3 : P_3(x) * \longrightarrow [0, 50, 75] \leftrightsquigarrow Z \wedge W * \longrightarrow [0, 1, 1] \end{cases}$$

- Pytanie: $x = x_0$. Odpowiedź:

$$y_i^* = \frac{\sum_j y_{i,j} P_j(x_0)}{\sum_j P_j(x_0)}$$

- $P_j(x_0)$ - stpopień dopasowania (odpalenia) poprzednika j-tej reguły dla wejścia x_0.

System Takagi-Sugeno-Kanga - przykład, c.d.

$$P_1\left(x_1\right) = val_{x_1}\left\{\begin{bmatrix}0.9\\0.7\\0.6\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}0.9\\0.6\\0.1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}0.8\\0.1\\0.2\end{bmatrix}\right\} = 0.8$$

$$P_2\left(x_1\right) = val_{x_1}\left\{\begin{bmatrix}0.9\\0.7\\0.6\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}0.1\\0.4\\0.9\end{bmatrix}\right\} = 0.1$$

$$P_3\left(x_1\right) = val_{x_1}\left\{\left(\begin{bmatrix}0.9\\0.7\\0.6\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}0.2\\0.9\\0.8\end{bmatrix}\right)\right\} = 0.2$$

- System reguł TSK: $\begin{cases} R_1 : P_1(x) * \longrightarrow [100, 0, 75] \\ R_2 : P_2(x) * \longrightarrow [0, 0, 75] \\ R_3 : P_3(x) * \longrightarrow [0, 50, 75] \end{cases}$
- Pytanie: $x = x_1$. Odpowiedź:
- $y_1^* = \dfrac{\sum_j y_{1,j} P_j(x_0)}{\sum_j P_j(x_0)} = \dfrac{100 * 0.8 + 0 * 0.1 + 0 * 0.2}{0.8 + 0.1 + 0.2} = 72.7$
- $y_2^* = \dfrac{\sum_j y_{2,j} P_j(x_0)}{\sum_j P_j(x_0)} = \dfrac{0 * 0.8 + 0 * 0.1 + 50 * 0.2}{0.8 + 0.1 + 0.2} = 9.1$
- $y_3^* = \dfrac{\sum_j y_{3,j} P_j(x_0)}{\sum_j P_j(x_0)} = \dfrac{75 * 0.8 + 75 * 0.1 + 75 * 0.2}{0.8 + 0.1 + 0.2} = 75.0$
- Dawkowanie: $\begin{bmatrix} 75 & 0 & 75 \end{bmatrix}$ [mg]

System Mamdaniego (SE-M) - przykład

Następniki reguł mogą być rozmyte, chociaż tu nie są.

- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [1, 0, 1] \\ \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [0, 0, 1] \\ \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [0, 1, 1] \end{cases}$
- Pytanie: $x = x_0$. Odpowiedź:

$$B'(y) = \sup_x \left\{ A'(x) \wedge R(x, y) \right\}$$

- gdzie

$$R(x, y) = R_1(x, y) \vee R_2(x, y) \vee R_3(x, y)$$

$$R_j(x, y) = P_j(x) \wedge Q_j(y)$$

SE-M: wyznaczenie relacji pierwszej

- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [1, 0, 1] \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 0, 1] \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 1, 1] \end{cases}$
- Implikacja: $* \longrightarrow = \wedge$

$$R_1(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right) \wedge [1, 0, 1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \wedge [1, 0, 1] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

SE-M: wyznaczenie relacji drugiej

- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [1, 0, 1] \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 0, 1] \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 1, 1] \end{cases}$
- Implikacja: $* \longrightarrow = \wedge$

$$R_2(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix} \right) * \longrightarrow [0, 0, 1]$$

$$R_2(x, y) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge [0, 0, 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

SE-M: wyznaczenie relacji trzeciej

- System reguł: $\begin{cases} R_1 : Z \wedge \overline{N} \wedge \overline{W} * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [1, 0, 1] \\ R_2 : Z \wedge N * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 0, 1] \\ R_3 : Z \wedge W * \longrightarrow [y_1, y_2, y_3] = [0, 1, 1] \end{cases}$
- Implikacja: $* \longrightarrow = \wedge$

$$R_3(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.9 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right) * \longrightarrow [0, 1, 1]$$

$$R_3(x, y) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \wedge [0, 1, 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

SE-M: wyznaczenie relacji globalnej

- Operator łączenia reguł: $\vee$

$$
\begin{aligned}
R(x,y) &= R_1(x,y) \vee R_2(x,y) \vee R_3(x,y) \\
&= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Wyznaczenie wyostrzonej odpowiedzi SE-M

- System ma 3 wyjścia:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 50 & 75 \end{bmatrix}$$

- Konkluzja rozmyta:

$$\begin{aligned} B'(y) &= \sup_x \left\{ A'(x) \wedge R(x,y) \right\} \\ &= \sup_x \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Interpretacja wnioskowania rozmytego:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 & 50 & 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 10 & 60 \end{bmatrix}$$

- Dawkowanie: $\begin{bmatrix} 75 & 0 & 50 \end{bmatrix}$ [mg]