Wstęp do logiki rozmytej

Zbiory rozmyte, logika rozmyta, operatory uogólnione

Jacek Kluska

Politechnika Rzeszowska

Zbiory zwykłe a zbiory rozmyte – Lotfi Zadeh 1965

Zbiór zwykły jest opisany funkcją charakterystyczną zbioru:
$\varkappa_A(x) : X \to \{0,1\}$, to znaczy

$$\varkappa_A(x) = \begin{cases} 1 & \iff \quad x \in A \\ 0 & \iff \quad x \notin A \end{cases}.$$

Zbiór rozmyty A w przestrzeni (uniwersum) X jest zbiorem par uporządkowanych:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\},$$

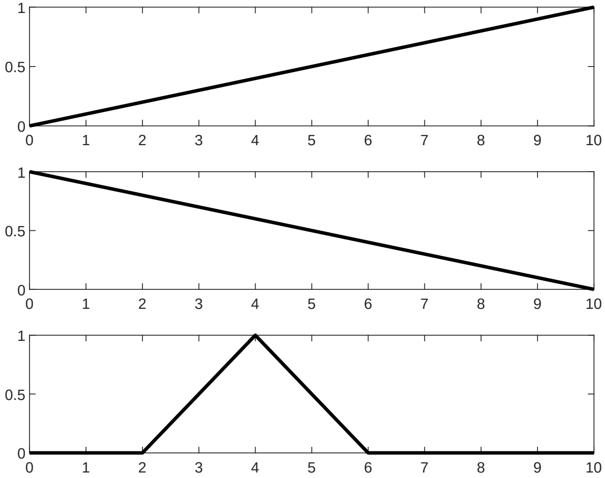
gdzie $\mu_A(x) : X \to [0,1]$. W sensie przynależności zb. rozmyty stanowi uogólnienie zbioru zwykłego.

Uwaga. W przestrzeni dyskretnej możemy pisać np.

- $A = \{x_1/\mu_A(x_1),\ x_2/\mu_A(x_2),\ \ldots, x_n/\mu_A(x_n)\}$, gdzie $x_1, \ldots, x_n \in X$,
- $A = [\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2),\ \ldots, \mu_A(x_n)]$.

Przykłady funkcji przynależności zbiorów rozmytych

trimf(x, [0 10 10]); trimf(x, [0 0 10]); trimf(x, [2 4 6]);).

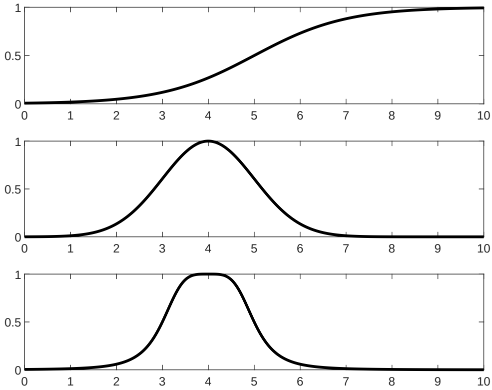


Przykłady funkcji przynależności zbiorów rozmytych – c.d.

$\left(1+\exp\left(-a\left(x-c\right)\right)\right)^{-1}$; sigmf(x, [a,c]);

$\exp\left(-\left(x-c\right)^{2}/\left(2\sigma^{2}\right)\right)$; gaussmf(x, [sigma, c]);

$\left(1+\left|\left(x-c\right)/a\right|^{2b}\right)^{-1}$; gbellmf(x, [a,b,c]);



Przykłady funkcji przynależności zbiorów rozmytych – c.d.

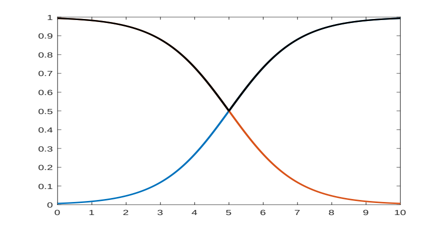
- Uniwersum wejściowe: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ - pacjenci. Każdy pacjent ma przyporządkowane 3 rozmyte atrybuty:
  $$Z(x) = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftrightarrow x_1 \\ \leftrightarrow x_2 \\ \leftrightarrow x_3 \end{array}$$ - stopień zaawansowania choroby u pacjenta

- $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x)$
- $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) = A(x) \wedge B(x)$
- $\overline{A}(x) = 1 - A(x)$

Przykład

- **SUMA**: $(A \cup \overline{A})(x)$ dla $A(x) = (1 + \exp(-a(x - c)))^{-1}$

A = sigmf(x, [1 5]); NOT_A=1-A;
plot(x, A, x, NOT_A, x, max(A,NOT_A), '-k', 'LineWidth',2);



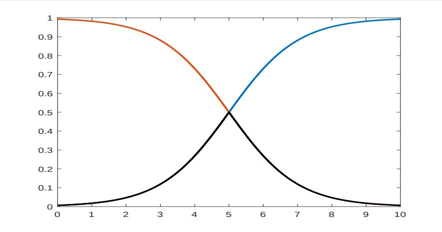
Operacje na zbiorach rozmytych – operacje Zadeha – c.d.

- $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x)$
- $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) = A(x) \wedge B(x)$
- $\overline{A}(x) = 1 - A(x)$

Przykład

- **PRZECIĘCIE**: $\left(A \cap \overline{A}\right)(x)$ dla $A(x) = (1 + \exp(-a(x - c)))^{-1}$

A = sigmf(x, [1 5]); NOT_A=1-A;
plot(x, A, x, NOT_A, x, min(A,NOT_A), '-k', 'LineWidth',2);



Normy trójkątne

Uogólniona koniunkcja (operacja AND): $\top : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
$\forall a, b, c, d \in [0,1]$ zachodzi:

1. $1 \top a = a$
2. $a \top b = b \top a$
3. $a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$
4. $a \leqslant b,\ c \leqslant d \Rightarrow a \top c \leqslant b \top d$

Przykład

- $\top = \top_1 : a \top_1 b = 0 \vee (a + b - 1) = a \otimes b$
- $\top = \top_2 : a \top_2 b = a \cdot b$
- $\top = \top_3 : a \top_3 b = a \wedge b$

Jedna z własności:
$a \top_1 b \leqslant a \top_2 b \leqslant a \top_3 b$

Ko-t-normy trójkątne

Uogólniona dysjunkcja (operacja OR): $\perp : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
$\forall a, b, c, d \in [0,1]$ zachodzi

1. $0 \perp a = a$
2. $a \perp b = b \perp a$
3. $a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$
4. $a \leqslant b,\ c \leqslant d \Rightarrow a \perp c \leqslant b \perp d$

Przykład

- $\perp = \perp_1 : a \perp_1 b = 1 \wedge (a + b) = a \oplus b$
- $\perp = \perp_2 : a \perp_2 b = a + b - a \cdot b$
- $\perp = \perp_3 : a \perp_3 b = a \vee b$

Jedna z własności:
$a \perp_1 b \geqslant a \perp_2 b \geqslant a \perp_3 b$

Negacja

Uogólniona negacja (operacja NOT): $n : [0,1] \to [0,1]$
$\forall a, b \in [0,1]$ zachodzi

1. $n(0) = 1$
2. $n(n(a)) = a$
3. $a > b \Rightarrow n(a) < n(b)$

Przykład

- $n(a) = 1 - a$ – najważniejsza
- $n(a) = |1 - a^p|^{1/p}$, $p > 0$, np. $n(a) = \sqrt{|1 - a^2|}$

Uogólnione prawa de Morgana

$$n(a \top b) = n(a) \perp n(b)$$
$$n(a \perp b) = n(a) \top n(b)$$

Pary *n*-dualne to takie, dla których zachodzą prawa de Morgana.
Np. n-dualne są (przy mocnej negacji $n(a) = 1 - a$):

- $(\top_1, \perp_1) = (\otimes, \oplus)$
- $(\top_2, \perp_2)$
- $(\top_3, \perp_3) = (\wedge, \vee)$

Tylko dla $(\top, \perp) = (\wedge, \vee)$
spełnione są następujące prawa, które zachodzą w logice Boole'a:

$$a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c)$$
$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$$

Wnioskowanie z przesłanek rozmytych

Zwykła **reguła odrywania** głosi, że jeżeli tezami systemu są wyrażenie o postaci $A \Rightarrow B$ oraz A, to do systemu wolno dołączyć wyrażenie B.
Schemat tej reguły zapisuje się następująco:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ \hline \qquad\quad B \end{array}$$

Problem polega na tym, że A i B mogą być rozmyte:

$$\begin{array}{l} A(x) \Rightarrow B(y) \\ A'(x) \\ \hline \qquad\qquad B'(y) \end{array}$$

przy czym $A'(x)$ nie może tylko częściowo pasować do $A(x)$.
Uogólniona reguła wnioskowania:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \left\{ A'(x) \top \left[A(x) * \rightarrow B(y) \right] \right\}$$

gdzie "$* \rightarrow$" – implikacja rozmyta.

Implikacja rozmyta

Co wiemy o implikacji zwykłej? $w(a, b)$

$a \setminus b$	0	1
0	1	1
1	0	1

$$a * \to b = n(a) \perp b$$

1. $a * \to b = n(a) \perp b$
2. $a * \to b = n(a) \perp (a \top b)$
3. $a * \to b = [n(a) \top n(b)] \perp b$
4. $a * \to b = [n(a) \top n(b)] \perp [n(a) \top b] \perp [a \top b]$

ad. 1.

- Niech $\perp = \vee$, wtedy $a * \to b = (1 - a) \vee b$ – imp. Dienesa
- Niech $\perp = \perp_1 = \oplus$, wtedy $a * \to b = 1 \wedge (1 - a + b)$ – imp. Łukasiewicza
- Niech $\perp = \perp_2$, wtedy $a * \to b = 1 - a + a \cdot b$ – imp. Reichenbacha
- ...