BÖLÜM 1

VEKTÖRLER

KAYNAKLAR

- Sears ve Zemansky'nin ÜNİVERSİTE FİZİĞİ; Cilt 1

Tarih / Date : ..../......./..........

1.1 Vektörler ve Vektörel Toplam

Bir fiziksel büyüklük tek bir sayı ile tanımlandığından ona skaler nicelik adını veririz. Bunun tersine bir vektörel nicelik hem ne kadar veya ne derece büyük olduğunu belirleyen bir büyüklük hemde uzayda belirli bir yön özelliğine sahiptir.

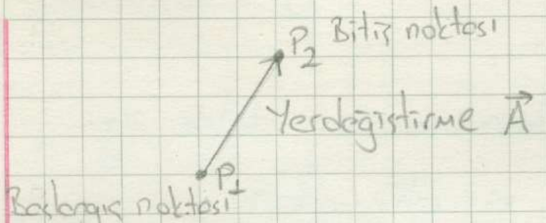
Vektörleri ve bunların toplanmasını daha iyi anlamak için en basit vektörel nicelik olan yer değiştirme ile işe başlayalım. Yer değiştirme basit anlamda bir noktanın konumunun değişmesidir. Burada nokta deyince bir parçacık veya küçük bir cisim anlıyoruz. Şekil 1.1 a'da P_1 noktasından P_2 noktasına konum değişikliği P_1'den P_2'ye doğru çizilmiş ve okun ucu P_2'de olan bir çizgi ile gösteriyoruz. Yer değiştirme vektörel bir niceliktir; zira parçacığın sadece ne kadar uzağa gittiği değil hangi yöne gittiğini de belirtmek zorundayız.

Yer değiştirme gibi bir vektörel niceliği üzerinde bir ok işareti olan tek bir harfle, şekil 1.1a'daki $\vec{A}$ gibi gösterebiliriz.

Bir vektörü daima ucunda bir ok ucu olan çizgi olarak çizeriz. Şekil 1.1 b'de parçacık P_1 noktasından P_2 noktasına giderken eğri bir yol izlemesine rağmen yer değiştirme vektörü daima $\vec{A}$ vektörü ile gösterilir. Burada yer değiştirmenin gidi-

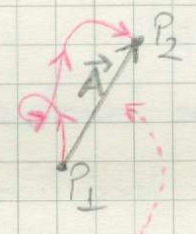
KeshinColor

len toplam mesafeyle doğrudan ilişkili olmayacağına dikkatinizi çekeriz. Şayet parçacık P_2 noktasından geçip de tekrar P_1 noktasına geri dönerse gidilen tüm yol dikkate alınmaksızın yer değiştirme Şekil 1.1 c'deki gibi sıfır olacaktır.



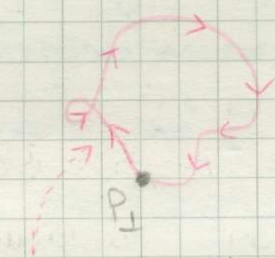
El yazısıyla yazılma: $\vec{A}$

(a)



Yerdeğiştirme eyleminde sadece başlangıç ve bitiş noktaları esastır; gidilen yol dikkate alınmaz.

(b)



Eğer bir nesne başladığı noktaya dönüp geri gelirse, toplam yer değiştirme gidilen mesafeden bağımsız olarak sıfır (0) olur.

(c)

Şekil 1.1: Yer değiştirme bir vektörel niceliktir. Bir yerdeğiştirme gidilen yol kavisli bile olsa her zaman bir başlangıç noktasından bir bitiş noktasına doğru çizilmiş bir çizgi parçasıdır.

Tarih / Date : ..../......./...........

Şekil 1.2 a'da görüldüğü gibi noktasal bir parçacığın $\vec{A}$ yerdeğiştirmesinden sonra ikinci bir $\vec{B}$ yerdeğiştirmesi yaptığını düşünelim. Şekilde gösterildiği gibi sonuçta bu parçacık sonki ilk noktada başlayan tek bir $\vec{C}$ yerdeğiştirmesi yapmıştır. $\vec{C}$ ile gösterilen yer değiştirmeye $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ yer değiştirmelerin vektörel toplamı veya bileşkesi deriz. Bu ilişkiyi sembolik olarak;

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (1.1)$$

gösteririz.

Eğer $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ yerdeğiştirmelerinin önce $\vec{B}$ ve daha sonra $\vec{A}$ gelmek üzere sıralaması değiştirilirse, şekil 1.2 b'de görüldüğü gibi sonuç gene aynıdır. Böylece;

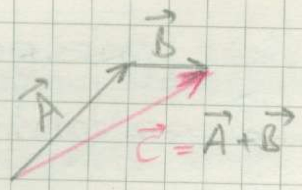
$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{ve} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (1.2)$$

eşitliği bulunur. Bu durum vektörel toplamın değişme özelliğidir.

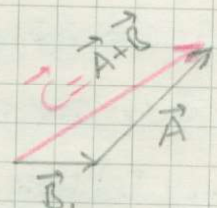
Şekil 1.2 c'de vektörel toplamın değişik bir yolu gösterilmektedir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri kuyrukları aynı noktada olmak üzere çizildiklerinde, $\vec{C}$ vektörü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin iki kenarını oluşturduğu bir paralel kenarın köşegeni durumundadır.

KoshinColor

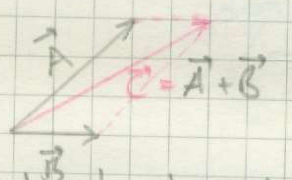
Tarih / Date : ..../......./...........



iki vektörü, ikincinin kuyruk ucunu birincinin baş tarafına yerleştirerek toplayabiliriz.
(a)



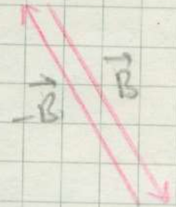
Toplama yapılırken vektörlerin sırasını değiştirmekte aynı sonucu verir.
(b)



Vektörlerden bir ikizkenar dörtgen oluşturarak da toplama yapabiliriz.
(c)

Şekil 1.2: iki vektörü toplamanın üç yolu. (b) şıkkında gösterildiği gibi, vektörel toplamada sıranın önemi yoktur. Vektörel toplama komütatif yol izler.

Vetör $-\vec{B}$, $\vec{B}$ ile aynı büyüklükte ama tam tersi yönünde dır. Şekil 1.3'te gösterilmiştir.

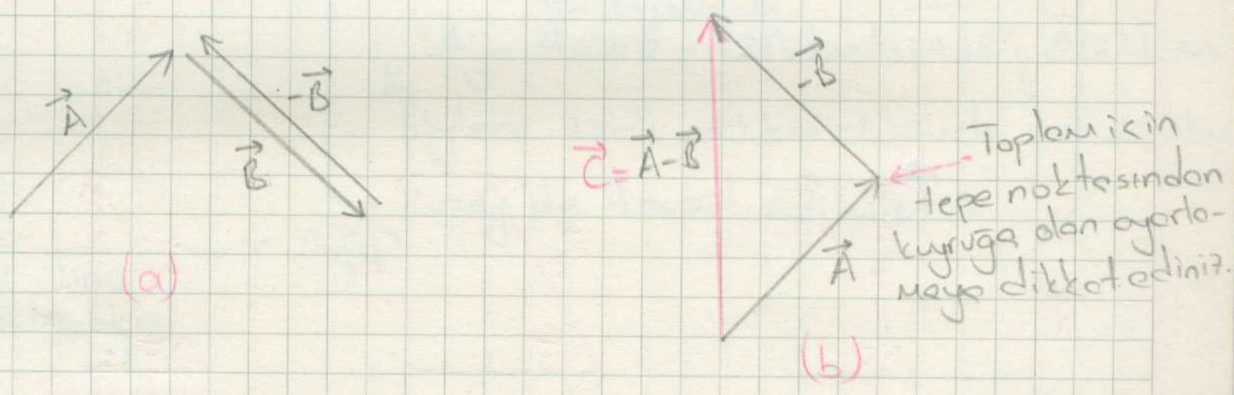


Şekil 1.3: $\vec{B}$ ve $-\vec{B}$ aynı büyüklükte fakat ters yöndedir.

Böylece $-\vec{B}$ vektörü ile toplamak $\vec{B}$ vektörünü çıkartmak ile aynı şeydir. Bu özelliği iki vektörün farkını bulmak için kullanırız. Örneğin $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ olsun. Böylece

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad \text{(Vektörlerin Çıkartılması)}$$

yani, $\vec{C}$ fark vektörünü $-\vec{B}$ vektörü ile $\vec{A}$ vektörünü toplayarak buluruz. Şekil 1.4 bunun geometrik olarak nasıl yapıldığını gösteriyor.



Şekil 1.4: (a) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $-\vec{B}$ vektörleri. (b) $\vec{B}$ vektörünü $\vec{A}$ vektöründen çıkartmak için, $-\vec{B}$ ile $\vec{A}$'yı toplayınız.

1.2: Vektörlerin Bileşenleri

Vektörün herhangi bir bileşeni eksene olan iz düşümüdür. Örneğin Şekil 1.5a'daki A_x $\vec{A}$ vektörünün x-ekseni üzerindeki bileşeni A_y ise y-ekseni üzerindeki bileşenidir. Bir vektörün eksenler üzerine iz düşümlerini bulmaya vektörü bileşenlere ayırmak denir. Şekil 1.5 b'de görüldüğü gibi A_x ve A_y pozitiftir. Çünkü $\vec{A}$ vektörü her iki eksenin pozitif tarafına uzanır. Şekil 1.5 a'daki $\vec{A}$ vektörünün bileşenleri

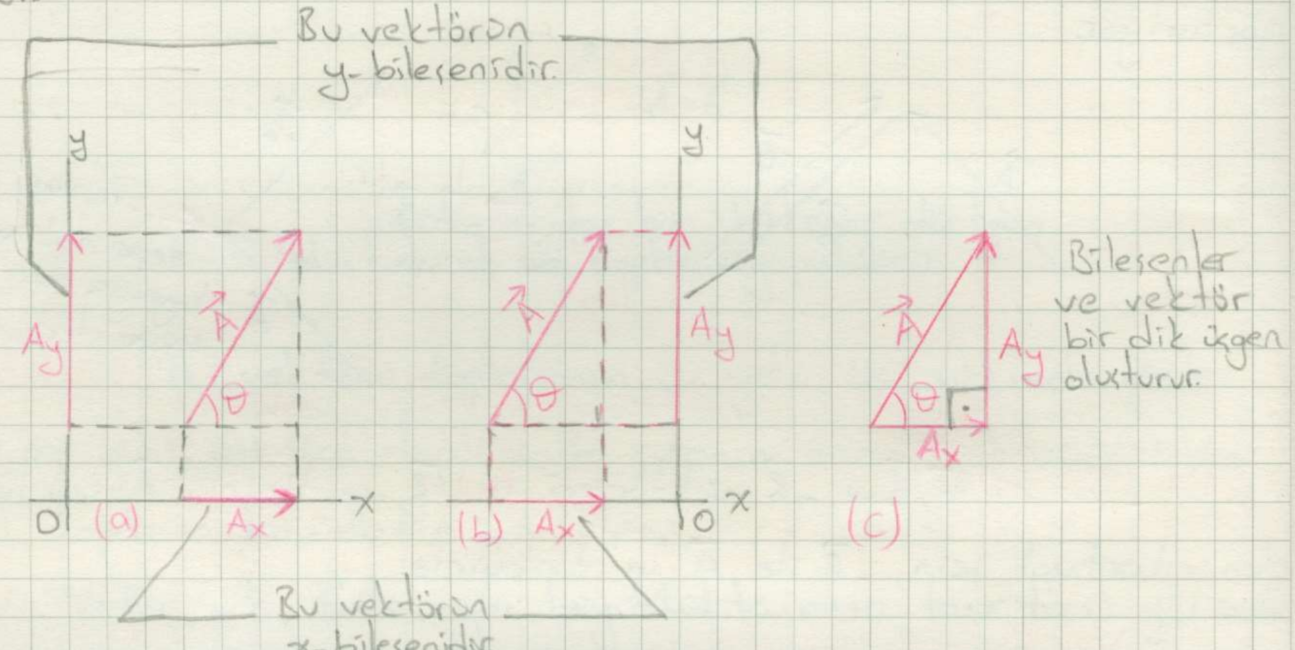
$$A_x = A\cos\theta \qquad (1,3)$$
$$A_y = A\sin\theta$$

Tarih / Date : ..../......./..........

Burada θ açısı $\vec{A}$ vektörünün pozitif x-ekseniyle yaptığı açı ve A'da $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğüdür. Şekil 1,5 c'de $\vec{A}$ ve onun xy bileşenlerinin bir dik üçgen oluşturduğunu gösterir. Böylece;

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{ve} \quad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad (1,4)$$

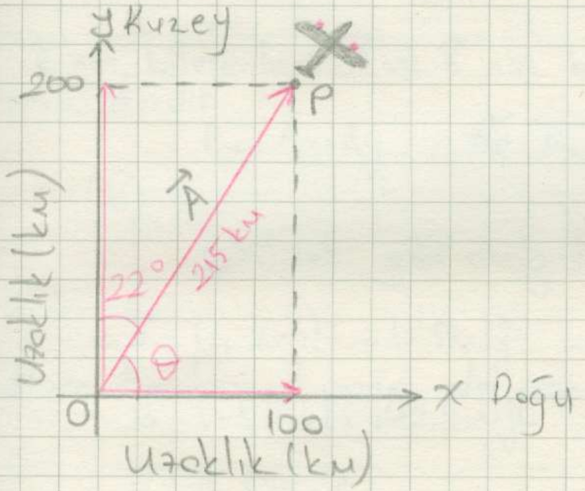
olur.



Şekil 1.5: (a) $\vec{A}$ vektörünün A_x ve A_y bileşenleri. (b) Büyüklüğü ve yönü değiştirilmedikçe, vektör kaydırıldığında, vektörün bileşenleri değişmez. (c) Vektör ve bileşenleri, hipotenüsü vektörün büyüklüğü kadar olan bir dik üçgen oluştururlar.

KeshinColor

Örnek 1: Bulutlu bir günde, bir havaalanından ayrılan küçük bir uçak, daha sonra kuzeyden doğuya doğru 22°'lik bir açıda ve 215 km uzakta tespit ediliyor. Uçak tespit edildiğinde, havaalanından ne kadar doğuda ve ne kadar kuzeyde bulunmaktadır?



Çözüm

$\theta = 90 - 22 = 68°$

$A_x = A\cos\theta = (215\,km)\cos 68° = 81\,km$

$A_y = A\sin\theta = (215\,km)\sin 68° = 200\,km$

Böylece uçak 81 km Doğuda ve 200 km Kuzey'de tespit edilmiştir.

1.3: Birim Vektör

Bir birim vektör, bir yönü olan ve büyüklüğü tam bir (1) olan bir vektördür. Birimsizdir ve boyutsuzdur. Tek görevi yönü belirlemektir. Pozitif x, y ve z eksenleri yönündeki birim vektörler $\hat{i}$, $\hat{j}$ ve $\hat{k}$ olarak gösterilir ki burada "^" vektörlerde tepeye konulan ok (→) yerine kullanılır. (Bknz. şekil 1.6). İki boyutta bir $\vec{A}$ vektörü birim vektörler cinsinden,

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (1,5)$$

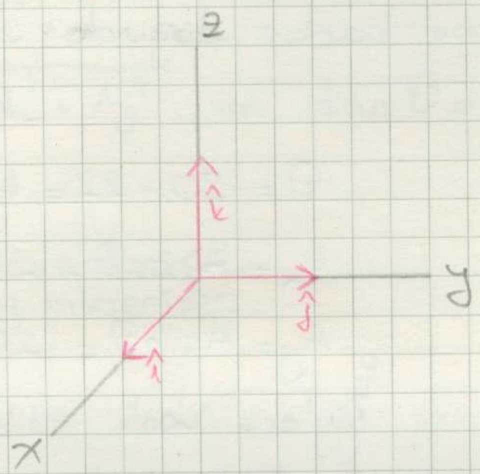
olarak yazılır. $A_x\hat{i}$ ve $A_y\hat{j}$ niceliklerine $\vec{A}$ vektörünün vektör bileşenleri denir. A_x ve A_y nicelikleri ise sayısaldır ve bunlara $\vec{A}$ vektörünün sayısal bileşenleri denir. $\vec{A}$'nın büyüklüğü ise:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (1,6)$$

Üç boyuttaki bir $\vec{A}$ vektörü

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \qquad (1,7)$$

olarak ifade edilir.



Şekil 1,6: $\hat{i}, \hat{j}$ ve $\hat{k}$ birim vektörleri sağ ele göre koordinat sistemindeki yönleri belirler.

1.4: Vektörleri Bileşenleri Yoluyla Toplama

$\vec{R}$ vektörü bileşenlerine ayrılmış $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı ise $\vec{R}$ vektörünün x ve y bileşenleri

$$R_x = A_x + B_x \quad ; \quad R_y = A_y + B_y \quad (\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}\text{'nin bileşenleri}) \quad (1,8)$$

olarak verilir. Şekil 1,7'de $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı grafiksel olarak gösterilmiştir. Bileşke $\vec{R}$ vektörünün pozitif x-ekseniyle yaptığı açı $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$ olarak verilir. $\vec{R}$ vektörü bileşenleri cinsinden;

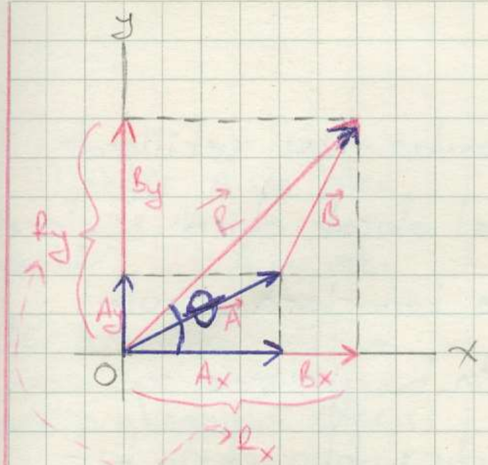
$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} \qquad (1,9)$$

olarak ifade edilir. $\vec{R}$'nin büyüklüğü ise;

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (1,10)$$

olur.

Tarih / Date : ..../......./...........



Şekil 1.7: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin vektörel toplamını (bileşkesini) bileşenleri kullanarak bulmak.

$\vec{R}$'nin bileşenleri $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin bileşenlerinin toplamlarıdır.

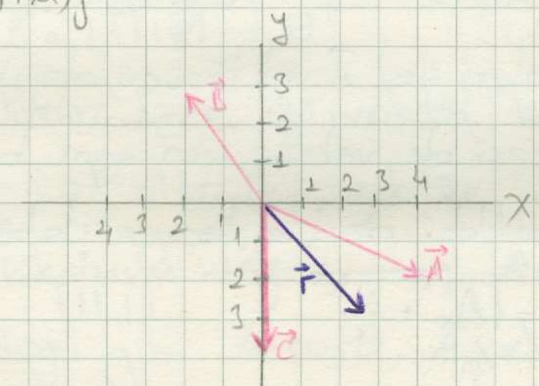
$$R_y = A_y + B_y \quad ; \quad R_x = A_x + B_x$$

Örnek 2: Şekildeki gibi aşağıdaki üç vektör gösterilmiştir:

$$\vec{A} = (4,2m)\hat{i} - (1,5m)\hat{j}$$

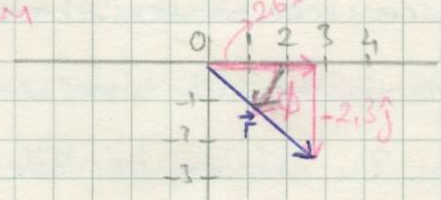
$$\vec{B} = (-1,6m)\hat{i} + (2,9m)\hat{j}$$

$$\vec{C} = (-3,7m)\hat{j}$$



Bu vektörlerin, şekildede gördüğünüz gibi $\vec{r}$ toplamı nedir?

Çözüm



$$r_x = A_x + B_x + C_x = 4,2m - 1,6m + 0 = 2,6m$$

$$r_y = A_y + B_y + C_y = -1,5m + 2,9m - 3,7m = -2,3m$$

$$r = (2,6m)\hat{i} - (2,3m)\hat{j}$$

* Büyüklük ve açı kullanarakta bu soruyu cevaplayabiliriz:

$$r = \sqrt{(2,6m)^2 + (-2,3m)^2} \approx 3,5m \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2,3m}{2,6m}\right) = -41^\circ$$

Tarih / Date : ..../......../............

1.5. Vektörler ve Fizik Yasaları

Şimdiye kadar, koordinat sistemi kullanılan tüm şekillerde, x ve y eksenleri kitabın kenarlarına paralel olarak alındı. Böylece, bir $\vec{A}$ vektörü varsa, bileşenleri A_x ve A_y'de kenarlara paralel oldular (Şekil 1.7a'da olduğu gibi). Eksenlerin bu yönlerde seçilmesinin tek nedeni bunun "uygun" olduğundandır; daha derin bir neden de yoktur. Bunun yerine, koordinat sistemini, Şekil 1.7b'de olduğu gibi, bir ϕ açısı kadar döndürebilirdik (fakat $\vec{A}$ vektörünü değil), ki bu durumda bileşenlerin yeni değerleri olurdu; bunlara A'_x ve A'_y diyelim. Sonsuz sayıda böyle ϕ açıları olacağından, $\vec{A}$ vektörünün sonsuz sayıda böyle çifter bileşenleri olur.

Bu durumda, "doğru" bileşen çifti hangisidir? Yanıt hepsidir, çünkü her çift (kendi eksenleri ile) $\vec{A}$ vektörünü, değişik biçimlerde tam olarak ifade eder; hepsi de vektör için aynı büyüklüğü ve yönü verir. Şekil 1.7 ile alttaki denklemler yazılabilir:

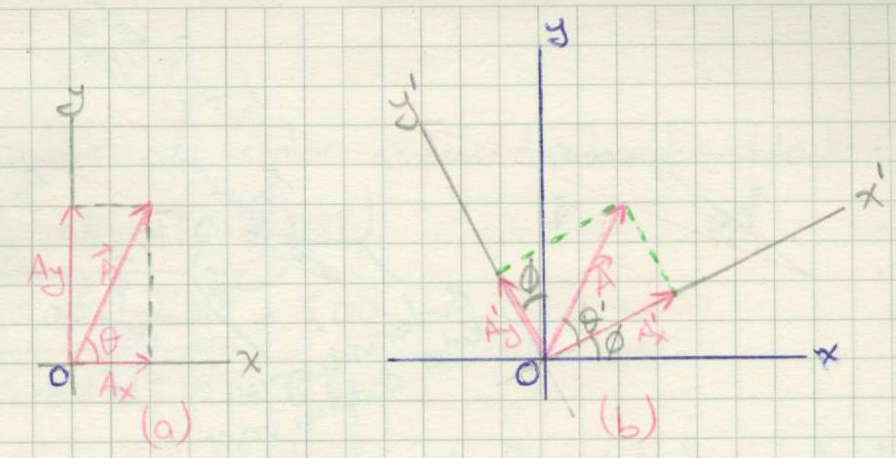
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{A_x'^2 + A_y'^2} \qquad (1,11)$$

$$\theta = \theta' + \phi \qquad (1,12)$$

Koordinat sistemimizi böyle özgürce seçebilmemizin altında yatan neden, vektörler arasındaki ilişkilerin, koordinat merkezinin konumuna ve yönlenmesine bağlı olmamasıdır. Bu durum, fizikte bazı bağıntılar içinde geçerlidir; hepside seçilecek koordinat sisteminden bağımsızdır. Buna bir de vektörler dilinin basitliğini ve zenginliğini ekleyiniz, fizik yasalarının bu biçimde ifade edildiğini anlarsınız;

Keskin Color

Şekil 1.7:
a) Vektör $\vec{A}$ ve bileşenleri. (b) Aynı vektör, koordinat sisteminin eksenleri ϕ açısı kadar döndürülmüş.



1.6. Vektörlerin Çarpılması

Vektörlerde çarpım iki şekilde gerçekleşir. Ama hiç biri normal sayısal çarpım gibi değildir.

1.6.1. Skaler Çarpım

Şekil 1.8a'daki $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin skaler çarpımı

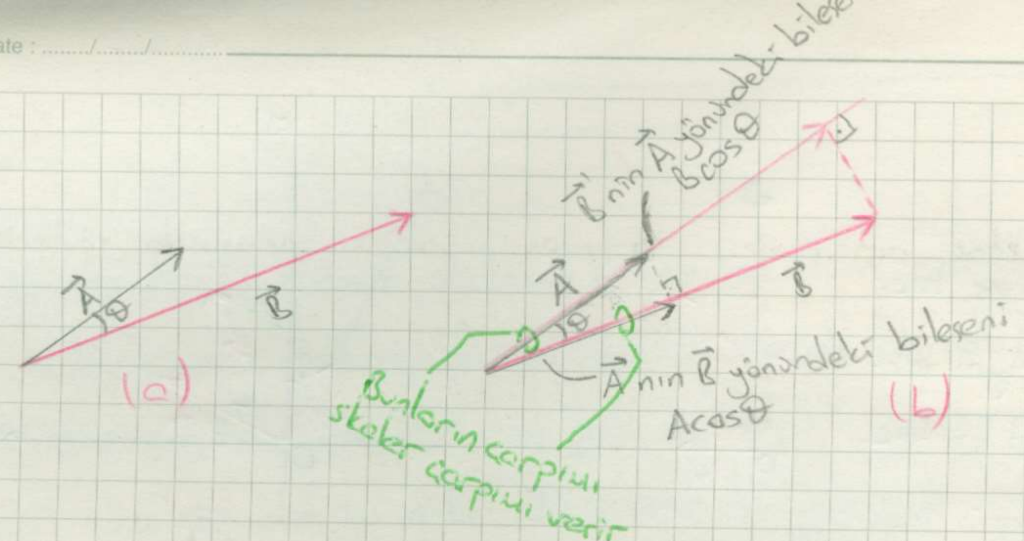
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (1.13)$$

olarak tanımlanır. Eğer iki vektör birbirine dik ise skaler çarpım sıfır (0) olur. İki vektör birbirine paralel ise skaler çarpım maksimum değeri olan $A\cdot B$ değerini alır. Şekil 1.8b'de görüldüğü gibi $A\cdot\cos\theta$, $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü yönündeki bileşeninin sayısal değeridir; $\vec{A}$ vektörünün tepesinden, $\vec{B}$ vektörüne çizilen dikmenin bu bileşeni verdiğini not ediniz. Benzer biçimde $\vec{B}$ vektörünün bileşeni olan $B\cos\theta$, $\vec{A}$ vektörü yönündeki bileşenidir.

Bileşenlerin vurgulanması için Denklem 1.13 aşağıda olduğu gibi yazılabilir:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A\cos\theta)B = A(B\cos\theta) \qquad (1.14)$$

Tarih / Date : ..../......./..........



Şekil 1.8: (a) Aralarındaki açı θ olan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri. (b) Her vektörün diğer vektör yönünde bir bileşeni vardır

Skaler çarpımda yer değiştirme kuralı geçerlidir ve şu yazılabilir:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \qquad (1,15)$$

Eğer iki vektör, birim vektör gösterimi ile verilmişse, skaler çarpım şöyle yazılır:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}) \qquad (1,16)$$

Burada dağıtma kuralını uygulayabiliriz: Birinci vektörün her bir bileşeni, diğer vektörün bileşenleri ile tek tek çarpılır. Bunu uygularsak sonucu şöyle buluruz:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (1,17)$$

Örnek 3:

$\vec{A}=3{,}0\hat{i}-4{,}0\hat{j}$ ve $-2{,}0\hat{i}+3{,}0\hat{k}$ arasındaki θ açısı nedir? (Dikkat: Vektör hesabı yapabilen hesap makinelerinde aşağıda anlatılan bir çok adım gösterilmez, ama, eğer siz bu adımları en azından burada gösterildiği kadarıyla yaparsanız daha çok öğrenirsiniz.)