KEVAP ANAHTARI

TC. BİLGİSAYARVE BİLİŞİM FAKÜLTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİK MÜHENDİSLİĞİ 2023-2024 GÜZ DÖNEMİ ARA SINAVI	Sınav Tarihi	21.11.2023	Notu
	Öğr. No		
	Öğr. Adı Soyadı		
	İmza		

SORULAR

1. a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|-x}\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{[\![x]\!]^2-9}}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz. **(20 puan)**

b) $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$ üzerinde tanımlı $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ fonksiyonunun tersi olan fonksiyonu bulunuz. **(10 puan)**

2. a) $x[\![x]\!]^{[x]}=x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. **(10 puan)**

b) $2\cos^2 x+\left(4-\sqrt{2}\right)\cos x-2\sqrt{2}=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. **(10 puan)**

3. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^2}$ limitini hesaplayınız. **(15 puan) (L'Hospital kuralını kullanmayınız)**

b) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\sin\left(x^2-4\right)}{(x+2)\left(\operatorname{sgn}(x+2)+[\![x]\!]\right)}$ limitini hesaplayınız. **(10 puan)**

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}, & x<\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\\ a, & x=\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\\ \dfrac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2}, & x>\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\end{cases}$ olarak veriliyor. f fonksiyonu $x=\dfrac{\pi}{2}$ noktasında sürekli olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz. **(25 puan)**

NOT: Nereden geldiği belli olmayan cevaplar dikkate alınmayacaktır. **Süre:** 70 dakika
BAŞARILAR

1. Sorv:

a) $|x|-x=0 \Rightarrow |x|=x$ olmamalı. $x<0$ dır.

$[\![x]\!]^2-9>0$ olmalı.

$[\![x]\!]\geq 3$ veya $[\![x]\!]<-3$ olmalı

$x\geq 4$ veya $x<-3$ olmalı.

$x<0$ olduğu için $x\geq 4$ olamaz.

$-\infty<x<0 \cap -\infty<x<-3$:

Tanım kümesi $-\infty<x<-3$ veya $\boxed{(-\infty,-3)}$ olacaktır. ✓

b) $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=y=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x} \to y\in[1,\infty)$

$f^{-1}:[1,\infty)\to[0,\infty)$ $e^x=t$ dersek

$t^2-2yt+1=0$

$t_{1,2}=\dfrac{2y\mp\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\mp\sqrt{y^2-1}$

$t=y-\sqrt{y^2-1}$ olamaz. Çünkü $x\geq 0$ $t=e^x\geq 1$

$\Rightarrow y-\sqrt{y^2+1}\geq 1 \Rightarrow (y-1)^2\geq y^2-1 \Rightarrow y\leq 1$. Sadece $y=1$ için geçerli. Aksi halde geçersiz.

$t=y+\sqrt{y^2-1}$ olmalı.

$e^x=y+\sqrt{y^2-1} \Rightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$

Yani $\boxed{f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$ ✓

2. Soru:

a) $x \cdot [\![x]\!]^{[\![x]\!]} = x$, $x \neq 0$ dır.

$x=0$ olursa 0^0 olacaktır.

$x \neq 0$ ise $[\![x]\!]^{[\![x]\!]} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in [1,2)}$

3. Soru:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1 + 1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{x^2} + \frac{2\cdot \sin^2(x/2)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-2 \cdot \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}}_{1} \cdot \frac{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}{x^2} + 2 \underbrace{\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}}_{1} \frac{(x/2)^2}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\cdot \sin^2 x}{4x^2} + \frac{2\cdot x^2}{4\cdot x^2} \right) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 0$$ ✓

4. Soru: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x + \sin^2 x)}{3\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1+\sin x + \sin^2 x}{3(1+\sin x)} = \frac{1+1+1^2}{3(1+1)} = \frac{1}{2}$$

Dolayısıyla $\boxed{a = \frac{1}{2} \text{ olmalı.}}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} b\frac{(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2} = b\cdot \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right)}{\left(\pi - 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right)^2}$$

$x - \frac{\pi}{2} = h$

$$= \lim_{h\to 0^+} b\cdot \frac{(1-\cos h)}{4h^2} = \lim_{h\to 0^+} b\cdot \frac{2\cdot \sin^2(h/2)}{4\cdot (h/2)^2}\cdot \frac{(h/2)^2}{h^2}$$

$$= \frac{b}{8} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = 4 \text{ olmalı.}}$$

□.

b) $\cos x = t$ dersek $2t^2 + (4-\sqrt{2})t - 2\sqrt{2} = 0$ olur.

$\Delta = b^2 - 4ac = (4-\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{2} > 0$ oldu için iki farklı reel kökü vardır.

$(t+2)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ eşitliğinden

$t_1 = -2$, $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olacaktır.

$t_1 = \cos x = -2$ olmayacağından

$t_2 = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur. Bu I ve IV. bölgelerdeki açılara karşılık gelir. $x = \frac{\pi}{4}$ veya $x = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\boxed{Ç.K = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$ olur.

b) $$\lim_{x\to -2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{(x+2)[\operatorname{sgn}(x+2) + [\![x]\!]]} = ?$$

$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)}\cdot (x-2) \cdot \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{\operatorname{sgn}(x+2) + [\![x]\!]}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to -2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)}}\cdot \underbrace{\lim_{x\to -2^-} (x-2)}\cdot \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{\operatorname{sgn}(x+2) + [\![x]\!]}$$

$$= (1)\cdot (-4) \cdot \frac{1}{-1+(-3)} = \frac{-4}{-4} = +1$$ ✓