OLASILIK ve İSTATİSTİK

(G.ÇETİNEL ~ C.VURAL)

RASTLANTI DEĞİŞKENİ (RD)

BİR RASTLANTI DENEYİNE İLİŞKİN ÖRNEK UZAY İÇİNDEKİ HER ÇIKIŞA BİR RAKAM ATAYAN FONKSİYONA "RASTLANTI DEĞİŞKENİ" DENİR.

$\underset{\text{ADI}}{\underset{\downarrow}{X}}$ $\underset{\text{DEĞİŞKEN}}{\underset{\downarrow}{x_i}}$ $i = 0, 1, 2 \ldots$

$X \rightarrow$ BİR PARANIN İKİ ATIŞTA TURA GELME SAYISI

$$P[X = x_0] = 1/4$$
$$P[X = x_1] = 1/2$$
$$P[X = x_2] = 1/4$$

$$S = \{\underbrace{YY}, \underbrace{YT, TY}, \underbrace{TT}\}$$
$$S_X = \{0, 1, 2\}$$
$$0 \rightarrow \tfrac{1}{4}, \quad 1 \rightarrow \tfrac{1}{2}, \quad 2 \rightarrow \tfrac{1}{4}$$

OLASILIK KÜTLE FONKSİYONU (PMF)

$p_X(x)$ NOTASYONU İLE GÖSTERİLİR VE x REEL SAYISI İÇİN

$p_X(x) = P\{X = x\}$ ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR.

$X \rightarrow$ BİR PARANIN ÜÇ ATIŞTA GELEN TURA SAYISI İSE;

$P[X=0] = 1/8$ $\quad P[Y=0] = 1/2$

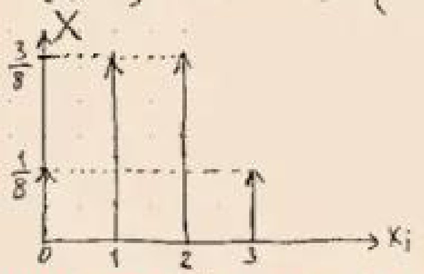
$P[X=1] = 3/8$ $\quad P[Y=1] = 3/8$

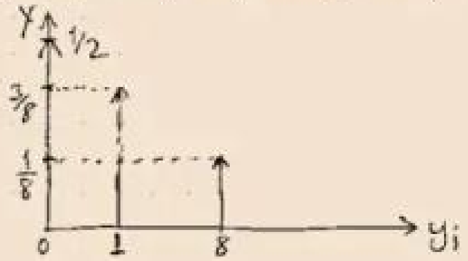
$P[X=2] = 3/8$ $\quad P[Y=8] = 1/8$

$P[X=3] = 1/8$

Y DEĞİŞKENİ = BİRİSİ TURA SAYISI İKİ KEZ GELİRSE 1 TL, 3 KEZ GELİRSE 8 TL KAZANMAKTADIR. $Y \rightarrow$ KAZANILAN PARA ...

$S = \{TTT, YYY, TYY, TTY, YYT, YTT, YTY, TYT\}$





ORTALAMA DEĞER ve MOMENTLER

ORTALAMA DEĞER

$$m_X = E[X] = \sum_{i=0} x_i \, p_X(x_i) \text{ ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR.}$$

$X \rightarrow$ 3 KEZ HAVAYA ATILAN BİR PARANIN TURA GELME SAYISI OLSUN.

$S = \{0, 1, 2, 3\}$

$$E[X] = 0.P[X=0] + 1.P[X=1] + 2.P[X=2] + 3.P[X=3]$$
$$= 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{3}{2} \text{ OLUR.}$$

NOT : S ÖRNEK UZAYI $B_1, B_2 \dots B_n$ ŞEKLİNDE AYRIK OLAYLARIN BİRLEŞİMİNDEN OLUŞAN TOPLAM OLASILIK TEOREMİNDE X'İN PMF'Sİ KOŞULLU PMF LER CİNSİNDEN YAZILABİLİR.

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P_X[x \mid B_i] \cdot P[B_i] \qquad E[X] = \sum_{i=1} x_i \cdot P[X = x_i]$$

$$E[X = x_i \mid B] = \sum_{i=1} x_i \cdot P[X = x_i \mid B]$$

ÖRNEK : BİR ÜRETİM HATTINDA İKİ TÜR CİHAZ VARDIR. T_1 CİHAZI α OLASILIKLA ÜRETİLİR VE r PARAMETRELİ GEOMETRİK DAĞILIMLA KISA BİR SÜRE ÇALIŞIR. T_2 CİHAZI $(1-\alpha)$ OLASILIKLA ÜRETİLİR VE ÖMRÜ s PARAMETRELİ GEOMETRİK DAĞILIMLA GÖSTERİLİR. X RD HERHANGİ BİR CİHAZIN ÖMRÜ OLSUN. X'İN PMF'SİNİ BULUNUZ.

$$P[X=k] = p \cdot q^{k-1}$$

$$P_{X \mid T_1}(x) = r \cdot (1-r)^{k-1} \qquad P_{X \mid T_2}(x) = s \cdot (1-s)^{1-k}$$

$$P_X(x) = P_{X \mid T_1}(x) \cdot P(T_1) + P_{X \mid T_2}(x) \cdot P(T_2)$$

$$= r \cdot (1-r)^{k-1} \cdot \alpha + s \cdot (1-s)^{1-k} \cdot (1-\alpha)$$

KOŞULLU ORTALAMA DEĞER

X AYRIK BİR R.D. OLSUN VE B OLAYININ MEYDANA GELDİĞİNİ VARSAYALIM. BU KOŞUL ALTINDA X'İN ORTALAMA DEĞERİ ŞÖYLE GÖSTERİLİR =

$$m_{X \mid B} = E[X \mid B] = \sum_{k=1} x_k \cdot P_X[x_k \mid B]$$

VARYANS

$\sigma_X \rightarrow$ STANDART SAPMA OLMAK ÜZERE BİR RD.NİN VARYANSI =

$VAR[X] = \sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$ ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR. ORTALAMA DEĞERDEN SAPMANIN BİR ÖLÇÜSÜDÜR.

KOŞULLU OLASILIK KÜTLE FONKSİYONU

X AYRIK BİR RD, $P_X(x)$ ONUN PMF'Sİ VE C OLASILIĞI SIFIRDAN FARKLI BİR OLAY OLSUN. X'İN KOŞULLU PMF'Sİ =

$$P_X[X \mid C] = P[X = x_i \mid C] = \frac{P[\{X = x_i\} \cap C]}{P[C]}$$

ÖRNEK : BİR SAATTE YELKOVAN DÖNMEKTE VE DAKİKALARIN ÜSTÜNDE SIRAYLA DURMAKTADIR. X R.D. YELKOVANIN DURDUĞU SAATLER OLSUN. $B = \{\text{İLK 4 SAAT}\}$ OLAYI ALTINDA X'İN KOŞULLU PMF'SİNİ BULUNUZ.

$S=\{1,2,\dots 60\}$ $B=\{\text{İLK 4 SAAT}\}=\{1,2,3,4\}$

$S_x=\{1,2,\dots,12\}$

$P[X=1]=P[X=2]=\dots=P[X=12]=\frac{1}{12}$

$$P[X=1\mid B]=\frac{P[X=1\cap B]}{P[B]}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}\cdot 4}=\frac{1}{4}$$

$$P[X=2\mid B]=\frac{1/12}{1/3}=\frac{1}{4}$$

$$P[X=5\mid B]=\frac{0}{1/13}=0 \Rightarrow P[X=12\mid B]$$

AYRIK RASTLANTI DEĞİŞKENLERİ

BERNOULLI RD : SONUCUNDA İKİ ÇIKIŞ OLAN DENEYLERİ MODELLEMEDE KULLANILIR. ÇIKIŞLARDAN BİRİ BAŞARI DİĞERİ BAŞARISIZLIK OLARAK DEĞERLENDİRİLİR. BAŞARI OLASILIĞI p, BAŞARISIZLIK OLASILIĞI $(1-p)$ İSE PMF =

$$P_X(x)=\begin{cases}1-p, & x=0\\ p, & x=1\\ 0, & x\neq 0,1\end{cases}$$

$E[X]=p$

$VAR[X]=p.q=p(1-p)$

GEOMETRİK RD : BERNOULLİ DENEYİNİN İLK BAŞARI ELDE EDİLİNCEYE KADAR TEKRARLANDIĞINI VARSAYALIM. İLK BAŞARININ HANGİ DENEMEDE OLUŞTUĞUNUN OLASILIĞINI HESAPLAMADA KULLANILIR.

$S_X=\{1,2,\dots,n\}$

$P[X=k]=p.q^{k-1}$

$E[X]=\frac{1}{p}$

$VAR[X]=\frac{q}{p^2}$

İKİ TERİMLİ RD : BERNOULLİ DENEYİNİ n KEZ TEKRARLADIĞIMIZI VARSAYALIM. İKİ TERİMLİ R.D., DENEY SONUCUNDA ÇIKAN TOPLAM BAŞARI SAYISININ OLASILIĞINI VERİR.

$S_x=\{0,1,2,\dots,n\}$

$E[X]=n.p$ $VAR[X]=n.p.q$

$P[X=k]=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$

NOT : İKİ TERİMLİ DAĞILIM İLE GEOMETRİK DAĞILIM ARASINDA ÇOK ÖNEMLİ BİR FARK VARDIR. İKİ TERİMLİ DAĞILIMDA DENEME SAYISI ÖNCEDEN BELLİ İKEN GEOMETRİK DAĞILIMDA BELLİ DEĞİLDİR.

NEGATİF İKİ TERİMLİ DAĞILIM : BERNOULLİ DENEYİNİN r KADAR BAŞARI ELDE EDİLİNCEYE KADAR TEKRARLANDIĞINI VARSAYALIM. NEGATİF İKİ TERİMLİ DAĞILIM r KADAR BAŞARI ELDESİ İÇİN YAPILAN DENEME SAYISINI HESAPLAMADA KULLANILIR.

$$S_X = \{r, r+1, \ldots\} \qquad E[X] = \frac{r}{p}$$

$$P_X[X=k] = \binom{k-1}{r-1} p^r \cdot q^{k-r} \qquad VAR[X] = r \cdot \frac{q}{p^2}$$

POISSON RD : ÖLÇEĞİ BÜYÜK ANCAK ÇOK NADİREN MEYDANA GELEN OLAYLARI MODELLEMEDE KULLANILIR. POISSON RD, BİRİM ZAMANDA MEYDANA GELEN OLAY SAYISININ OLASILIĞININ HESAPLANMASINDA KULLANILIR.

$\alpha \rightarrow$ BİRİM ZAMANDA MEYDANA GELEN ORTALAMA OLAY SAYISI OLSUN

POISSON OLASILIK FONSİYONU = $P[X=k] = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot e^{-\alpha}$, $k = 0,1,2\ldots$

ÖRNEK : OPTİK BİR HABERLEŞME SİSTEMİ 10^9 BİT/SN HIZINDA VERİ İLETİYOR. BU HABERLEŞME SİSTEMİNDE 1 BİTİN HATALI İLETİLME OLASILIĞI 10^{-9} DUR. 1 SN LİK BİR SÜREDE 5 VEYA DAHA FAZLA BİTİN HATALI GELME OLASILIĞI NEDİR?

$$P[X=k] = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$P[X \geq 5] = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$= 1 - P[X \leq 4]$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{1^k}{k!} e^{-1} = 0{,}0036$$

DÜZGÜN DAĞILIM : RASTLANTI DENEYİNDEKİ TÜM ÇIKIŞLARIN EŞİT OLASILIKLI OLMASI DURUMUNDA KULLANILIR.

$$S_X = \{1, 2, \ldots, L\} \qquad E[X] = \frac{L+1}{2}$$

$$P_X(x) = \frac{1}{L} \qquad VAR[X] = \frac{L^2-1}{12}$$

TOPLAM DAĞILIM FONKSİYONU (CDF)

X RD NİN TOPLAM DAĞILIM FONKSİYONU (CDF) $F_X(x)$ İLE GÖSTERİLİR VE AŞAĞIDAKİ EŞİTLİKLE TANIMLANIR:

$$F_X(x) = P[X \le x]$$

X → BİR BOZUK PARANIN 3 KEZ HAVAYA ATILMASI SONUCU ELDE EDİLEN TURA SAYISI OLSUN: ÇIKIŞLAR → {YYY, TTT, YTT, YYT, TTY, TYY, YTY, TYT}

$S_X = \{0,1,2,3\}$ .... $X < 0$ ...., $F_X(x) = 0$

$P[X=0] = 1/8$ .... $0 \le X < 1$ ...., $F_X(x) = \frac{1}{8}$

$P[X=1] = P[X=2] = \frac{3}{8}$ ...... $0 \le X < 2$ ...., $F_X(x) = P[X=0] + P[X=1] = \frac{1}{2}$

$P[X=3] = \frac{1}{8}$ .... $0 \le X < 4$ → $F_X(x) = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3] = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$ //

CDF 'NİN ÖZELLİKLERİ

1-) $0 \le F_X(x) \le 1$

2-) $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

3-) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

4-) $F_X(x)$ AZALMAYAN BİR FONKSİYONDUR. YANİ $a < b$ İSE $F_X(a) \le F_X(b)$

5-) $F_X(x)$ SAĞDAN SÜREKLİ BİR FONKSİYONDUR.

6-) $P[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$

7-) $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$

8-) $P[X > x] = 1 - F_X(x)$

ÖRNEK: BİR PARANIN 3 KEZ HAVAYA ATILDIĞINI VARSAYALIM. X RD 3 DENEMEDEKİ TOPLAM TURA SAYISINI GÖSTERSİN. X'İN CDF'SİNİ BULUP ÇİZİNİZ.

$S_X = \{0,1,2,3\}$

$F_X(x) = P[X \le x]$

$P[X=0] = P[X=3] = \frac{1}{8}$

$P[X=1] = P[X=2] = \frac{3}{8}$

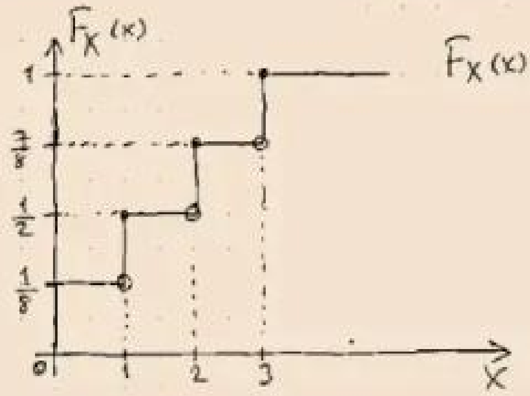
$-\infty < x < 0$ $\quad F_X(x) = 0$

$0 \le x < 1$ $\quad F_X(x) = \frac{1}{8}$

$1 \leq x < 2 \qquad F_X(x) = P[X=0] + P[X=1] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$2 \leq x < 3 \qquad F_X(x) = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] = 7/8$

$3 \leq x \qquad F_X(x) = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3] = 1$



$$F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3)$$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

NOT : CDF HEM AYRIK, HEM DE SÜREKLİ RD'LER İÇİN TANIMLIDIR.

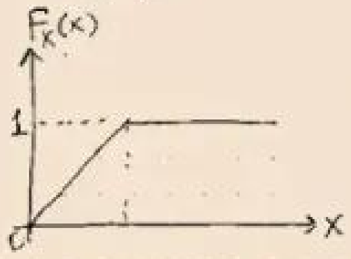
ÖRNEK : ANALOG BİR SAATİN YELKOVANI DÖNDÜRÜLÜP BIRAKILMAKTADIR. θ AÇIYI GÖSTERSİN ($0 \leq \theta < 2\pi$). X RD $= \frac{\theta}{2\pi}$ OLARAK TANIMLANSIN. X'İN CDF'SİNİ BUL VE ÇİZ.

$S_X = \{0, \ldots, 1\}$

$-\infty < x < 0 \quad , \quad F_X(x) = 0$

$0 \leq x < 1 \quad , \quad F_X(x) = P[X \leq x] = \frac{2\pi x}{2\pi} = x$

$1 \leq x \quad , \quad F_X(x) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$



NOT : ÖRNEKLERDEN GÖRÜLDÜĞÜ GİBİ AYRIK RD'YE İLİŞKİN CDF BASAMAK ŞEKLİNDE BİR FONKSİYON İKEN, SÜREKLİ RD'YE İLİŞKİN CDF GRAFİĞİ SÜREKLİ BİR EĞRİDİR.

CDF'DEN YARARLANILARAK BİR RD'NİN BİR ARALIKTA BULUNMA OLASILIĞI HESAPLANABİLİR.

1-) $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

2-) $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$

3-) $P[X > x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - F_X(x)$

ÖRNEK : X RD BİR PARANIN 3 KEZ ATILMASINDAKİ TURA SAYISI OLSUN.

$A = \{1 < X \leq 2\}$ $\quad B = \{0{,}5 \leq X \leq 2{,}5\}$ $\quad C = \{1 \leq X < 2\}$

YUKARIDAKİ OLAYLARIN OLASILIKLARINI CDF İLE HESAPLAYINIZ

$$P[1 < X \leq 2] = F_X(2) - F_X(1) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P[0{,}5 \leq X \leq 2{,}5] = F_X(2{,}5) - F_X(0{,}5) + P[X = 0{,}5]$$

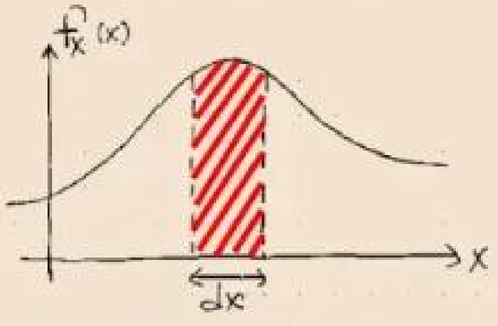
$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} + 0 = \frac{6}{8}$$

$$P[1 \leq X < 2] = \{F_X(2) - \underbrace{[F_X(2) - F_X(2^-)]}_{P[X=2]}\} - F_X(1) + \underbrace{[F_X(1) - F_X(1^-)]}_{P[X=1]}$$

OLASILIK - YOĞUNLUK FONKSİYONU (PDF)

CDF'NİN TÜREVİDİR VE ; $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$ EŞİTLİĞİYLE TANIMLANIR.

PDF X CİVARINDA dx GENİŞLİĞİNDE KÜÇÜK BİR ALANA DÜŞEN X RD'NİN OLASILIĞINI BELİRLEMEDE KULLANILIR.



NOT : AYRIK RD İÇİN PDF PMF'YE EŞİTTİR (PDF = PMF).

PDF'NİN ÖZELLİKLERİ

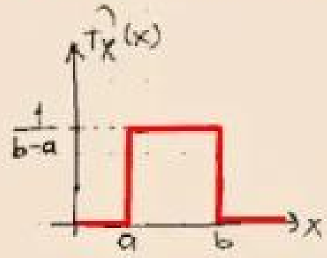
1-) $f_X(x) \geq 0$

2-) $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$

3-) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

4-) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

ÖRNEK : AŞAĞIDA DÜZGÜN RD NİN PDF'Sİ VERİLMİŞTİR. CDF'Yİ BUL VE ÇİZ.



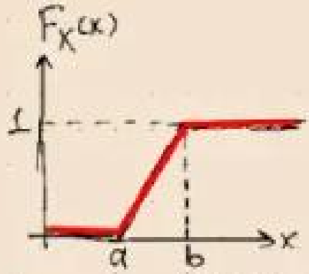
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , x < a \text{ ve } b < x \end{cases}$$

$-\infty < x < a \quad , F_X(x) = 0$

$a \le x < b \quad , F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$

$b \le x \quad , F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} f_X(x) dt}_{0} + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \underbrace{\int_b^{\infty} f_X(x) dt}_{0}$

$= \frac{t}{b-a}\Big|_a^b = 1$



ÖRNEK : LAPLACE DAĞILIMINA İLİŞKİN PDF $f_X(x) = C \cdot e^{-\alpha|x|}, -\infty < x < \infty$ İLE VERİLİYOR. $C = ?$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \longrightarrow$ (4. ÖZELLİK)

$\int_{-\infty}^{\infty} C \cdot e^{-\alpha|x|} \cdot dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} C e^{\alpha x} dx + \int_0^{\infty} C \cdot e^{-\alpha x} dx = 1$

$= \frac{C}{\alpha} e^{\alpha x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{C}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = 1$

$\frac{2C}{\alpha} = 1 \Rightarrow C = \frac{\alpha}{2}$

NOT : AYRIK RD'NİN PDF'Sİ TÜREV SÜREKLİ OLDUĞU İÇİN TANIMLIDIR. AYRIK RD'NİN CDF'Sİ SÜREKSİZ OLDUĞUNDA TÜREVİNİN HESAPLANAMAYACAĞI DÜŞÜNÜLEBİLİR. ANCAK BİRİM BASAMAK FONKSİYONUNUN TÜREVİNİ TANIMLAYARAK CDF'NİN TÜREVİ HESAPLANABİLİR.

TANIM =

$$\frac{du(x)}{dx} = \delta(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

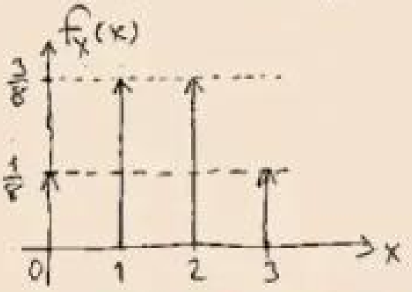
$$\int f_X(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

$$\int f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)$$

PARA ATMA DENEYİNDE ;

$$F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3)$$ BULUNMUŞTUR.

$$f_X(x) = \frac{1}{8}\delta(x) + \frac{3}{8}\delta(x-1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) + \frac{1}{8}\delta(x-3)$$ OLUR.



KOŞULLU CDF ve KOŞULLU PDF

X RD NİN B OLAYI ALTINDA CDF'Sİ =

$$F_X(x|B) = \frac{P[X \leq x | B]}{P[B]} = \frac{P[X \leq x \cap B]}{P[B]}$$ OLARAK TANIMLANIR.

KOŞULLU PDF İSE YUKARIDAKİ İFADENİN TÜREVİ ALINARAK HESAPLANABİLİR.

$$f_X(x|B) = \frac{d F_X(x|B)}{dx}$$

TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜNDEN YARARLANARAK KOŞULSUZ CDF'Yİ KOŞULLU CDF'LER CİNSİNDEN YAZABİLİRİZ.

$$F_X(x|B) = P[X \le x] = \sum_{i=1}^{n} P(X \le x_i | B)$$

$$F_X(x|B) = \sum_{i=1}^{n} F_X(x|B_i) P(B_i)$$

$$\hat{f}_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_X(x|B_i) P[B_i]$$

SÜREKLİ RD NİN ORTALAMA DEĞER ve VARYANSI

AYRIK RD İÇİN VERİLEN TANIMLARDA TOPLAM SEMBOLÜ İNTEGRAL İLE YER-DEĞİŞTİRİRSE SÜREKLİ RD İÇİN TANIMLAR ELDE EDİLİR. BU TANIMLAR AŞAĞI-DA VERİLMİŞTİR.

$$E[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$VAR[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X) f_X(x)\, dx \quad \text{VEYA}$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx\right]^2$$

* X RD NİN n. MOMENTİ =

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \hat{f}_X(x)\, dx$$

$y = g(x)$ 'İN ORTALAMA DEĞERİ

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

NOT : AYRIK RD İÇİN VERİLEN ORTALAMA DEĞER VE VARYANS ÖZELLİKLERİ SÜ-REKLİ RD İÇİN DE GEÇERLİDİR.

ÖRNEK : θ, $[0, 2\pi]$ ARALIĞINDA DÜZGÜN DAĞILIMLI BİR RD. a, w, t SABİT DEĞERLER OLMAK ÜZERE $y = a \cdot \cos(wt + \theta)$ OLARAK VERİLMEKTEDİR. Y 'NİN ORTALAMA DEĞERİ VE GÜCÜNÜ HESAPLAYINIZ.

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) f_\theta(\theta)\, d\theta \qquad E[Y] = \int_{0}^{2\pi} a \cos(wt + \theta) \frac{1}{2\pi}\, d\theta$$

$$= \frac{a}{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{2\pi}\sin(\omega t+\cancel{\theta}\,2\pi) - \frac{a}{2\pi}\sin(\omega t) = 0$$

$$E[Y^2] = \int_0^{2\pi}\left[a\cos(\omega t+\theta)\right]^2 \frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

GÜCE EŞİTTİR

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2\omega t + 2\theta)\right]\frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\cos(2\omega t+2\theta)\,d\theta}_{0}$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

ÖRNEK : ÜSTEL RD'NİN PDF'Sİ $f_X(x) = \lambda . e^{-\lambda x}$, $0 \le x < \infty$ İLE VERİLİYOR. $E[X]=?$

$$E[X] = \int_0^{\infty} x.\lambda.e^{-\lambda x}.dx \qquad \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$x = u$ $\qquad \lambda.e^{-\lambda x}.dx = dv$

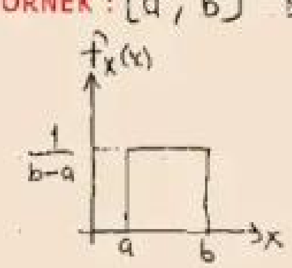
$dx = du$ $\qquad v = -\frac{\lambda}{\lambda}.e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}$

$$E[X] = -x.e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$= -x.e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$ ÇIKAR L'HOSPITAL UYGULANIR.

$$= \lambda.e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = -\lambda - \left(0+\frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda - \frac{1}{\lambda}$$

ÖRNEK : $[a, b]$ DÜZGÜN DAĞILIMLI X RD'NİN VARYANSINI BULUNUZ



$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[(X-m_x)^2]$$

$$= E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. YOL

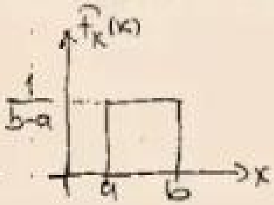
$$E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b - \left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2$$

ÖNEMLİ SÜREKLİ RD LER

DÜZGÜN DAĞILIM: DÜZGÜN DAĞILIM TÜM ÇIKIŞLAR EŞİT OLASILIKLI OLDUĞU ZAMAN KULLANILIR. HEM AYRIK HEM DE SÜREKLİ RD İÇİN TANIMLIDIR



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} , & 0 \leq x < b \\ 0 , & \text{AKSİ HÂLDE} \end{cases}$$

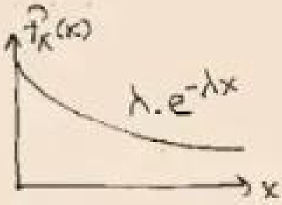
$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad VAR[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ÜSTEL DAĞILIM : ÜSTEL DAĞILIM ARD ARDA MEYDANA GELEN OLAYLAR ARASINDA GEÇEN SÜREYİ VE CİHAZ VEYA SİSTEMLERİN ÇALIŞMA SÜRELERİNİ MODELLEMEK İÇİN KULLANILIR.

λ PARAMETRELİ ÜSTEL DAĞILIM :

$$f_X(x) = \lambda . e^{-\lambda x} , \quad x \geq 0 \quad \lambda > 0$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad VAR[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$



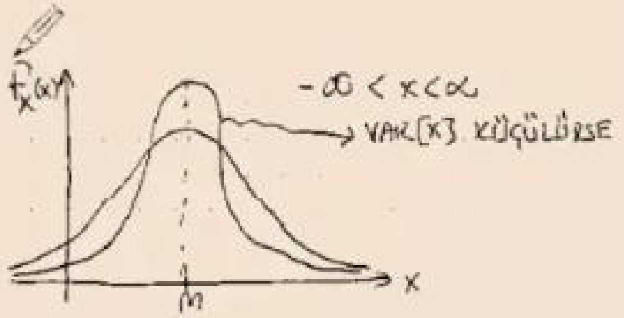
GAUSS DAĞILIMI (NORMAL DAĞILIM) DOĞADA MEYDANA GELEN OLAYLAR ÇOK SAYIDA PARAMETREYE BAĞLIDIR. PARAMETRELERİN HER BİRİNİN AYRI AYRI ETKİSİ GAUSS DAĞILIMI OLMAYABİLİR. ANCAK MERKEZİ LİMİT TEOREMİ DENİLEN BİR TEOREME GÖRE ÇOK SAYIDA PARAMETRENİN EFEKTİF ETKİSİNİN GAUSS DAĞILIMINA YAKINSADIĞI BELİRLENMİŞTİR.

$\sigma \rightarrow$ STANDART SAPMA

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$$

σ (SİGMA)

$$\sigma = \sqrt{VAR[X]}$$
$$m = E[X]$$



GAMA DAĞILIMI : = BİRBİRİNİ TAKİB EDEN VE NADİR GERÇEKLEŞEN OLAYLARIN İLK DEFA n KEZ TEKRARLANMASINA KADAR GEÇEN ZAMANI TANIMLAR.

$$f_X(x) = \frac{\lambda.(\lambda x)^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \quad ,,, \quad \alpha>0 \,,\ \lambda>0$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad VAR[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

ÖZEL DURUMLAR

1-) $\alpha = m \Rightarrow$ m-ERLANG DAĞILIMI (m POZİTİF TAMSAYI)

$$f_X(x) = \frac{\lambda.e^{-\lambda x}(\lambda x)^{m-2}}{(m-1)!}$$

2-) $\alpha = \frac{k}{2}$ VE $\alpha = \frac{1}{2}$ İSE $\Rightarrow$ Kİ KARE DAĞILIMI

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{(k-2)}{2}}.e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{k/2}.\Gamma(k/2)}$$

NOT : GAMA FONKSİYONU

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}.e^{-x}.dx$$ OLARAK TANIMLANIR.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(m+1) = m!$$

m-ERLANG DAĞILIMI m ADET BAĞIMSIZ ÜSTEL DAĞILIMDAN OLUŞUR. Kİ-KARE DAĞILIMI 0 ORTALAMALI BİRİM VARYANSLI k ADET GAUSS DAĞILIMININ TOPLAMINDAN OLUŞUR.

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi .1}} e^{-\frac{1}{2.1}(x-0)^2}$$

ÖRNEK : X RD'NIN PDF'Sİ AŞAĞIDA VERİLMİŞTİR.

a) $c = ?$

b) $F_X(x)$'İ BULUNUZ VE ÇİZİNİZ.

$$f_X(x) = \begin{cases} c.x(1-x^2) & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{AKSİ HÂLDE} \end{cases}$$

a: $\int_{-\infty}^{\infty} cx(1-x^2) = 1$

$$\int_0^1 cx(1-x^2) = 1 \quad = \left(\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$\underline{c = 4}$

b: $-\infty < x < 0 \quad , F_X(x) = 0$

$$0 \le x \le 1 \quad , F_X(x) = \int_0^x 4x(1-x^2)\,dx$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{4x^4}{4}\right)\Big|_0^x = 2x^2 - x^4$$

$$1 < x \quad , F_X(x) = \int_0^1 4x(1-x^2)\,dx = 1$$

ÖRNEK : BİR TOPLUMDA SİGARA İÇENLERİN ORANI %60'TIR. BU TOPLUMDAN RASTGELE 10 KİŞİLİK BİR GRUP SEÇİLMEKTEDİR.

a) 3 KİŞİNİN SİGARA İÇME OLASILIĞI NEDİR?

b) EN AZ 2 KİŞİNİN SİGARA İÇME OLASILIĞI NEDİR?

a: $P[X=k] = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k} \xrightarrow[\substack{p=0{,}6 \\ k=3}]{n=10} \binom{10}{3}(0{,}6)^3(0{,}4)^7 \approx 0{,}043$

ÖRNEK : A KUTUSUNDA 2 BEYAZ, B KUTUSUNDA 2 KIRMIZI, C KUTUSUNDA 2 BEYAZ VE 2 KIRMIZI, D KUTUSUNDA 3 BEYAZ 1 KIRMIZI ŞEKER BULUNMAKTADIR. KUTULARIN EŞİT OLASILIKLI OLDUĞUNU KABUL EDEREK ;

a) SEÇİLEN ŞEKERİN KIRMIZI OLMA OLASILIĞINI BULUNUZ.

b) SEÇİLEN ŞEKERİN KIRMIZI OLDUĞU BİLİNİYORSA D KUTUSUNDAN GELMİŞ OLMA OLASILIĞI NEDİR?

a:

A	B	C	D
2B	2K	2B 2K	3B 1K

$$P[A] = P[B] = P[C] = P[D] = \frac{1}{4}$$

$$P[K]=P[K|A].P[A]+P[K|B].P[B]+P[K|C].P[C]+P[K|D].P[D]$$

$$=0.\frac{1}{4}+1.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$$

b: $$P[D|K]=\frac{P[D\cap K]}{P[K]}=\frac{P[K|D]\,P[D]}{P[K]}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}}=\frac{1}{7}$$

ÖRNEK : BİR X RD'NİN PDF'Sİ AŞAĞIDA VERİLİYOR

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & ,\ 0\le x<8\ ,\ x \text{ TAMSAYI}\\ 0 & ,\ \text{AKSİ HÂLDE}\end{cases}$$

a) $P[2\le x\le 5]$, $P[x\le 6]$ =?

b) CDF'Yİ BULUNUZ VE ÇİZİNİZ.

a: $P[X=0]=P[X=1]=\ldots\ldots=P[X=\overset{7}{\cancel{8}}]=\frac{1}{8}$

$$P[2\le x\le 5]=P[X=2]+P[X=3]+P[X=4]+P[X=5]=4.\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[X\le 6]=P[X=0]+P[X=1]+\ldots+P[X=6]=7.\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

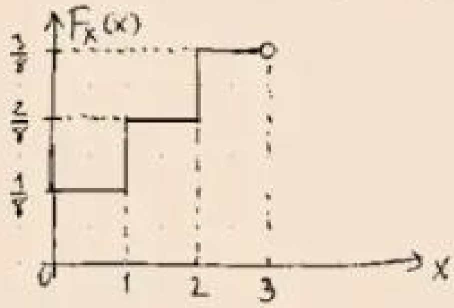
b:

$-\infty<x<0$, $F_X(x)=0$

$0\le x<1$, $F_X(x)=P[X=0]=1/8$

$1\le x<2$, $F_X(x)=P[X=0]+P[X=1]=2/8$

$2\le x<3$, $F_X(x)=P[X=0]+P[X=1]+P[X=2]=\frac{3}{8}$



GAUSS DAĞILIMI

R.D OLASILIK-YOĞUNLUK FONKSİYONU = $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

σ^2 = VARYANS (VAR[X])
m = ORTALAMA DEĞER (E[X])

GAUSS R.D. TOPLAM DAĞILIM FONKSİYONU (CDF)

$$P[X \le x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \cdot dx =$$

$t = \frac{x-m}{\sigma}$ DÖNÜŞÜMÜ UYGULANIRSA ; $dt = \frac{1}{\sigma} \cdot dx \quad dx = \sigma \cdot dt$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} \cdot dt$$

ÜSTTEKİ DENKLEM ÇÖZÜLEMEYECEĞİNDEN DOLAYI STANDART GAUSS DAĞILIMINA DÖNÜŞTÜRÜLÜR.. $m=0$ VE $\sigma^2=1$ OLAN GAUSS DAĞILIMINA "STANDART GAUSS DAĞILIMI" DENİR.

NOT : SINAVDA GAUSS DEMEYİP $X \sim N[0,5]$ DENİLİRSE GAUSSTAN ÇÖZÜLÜR.

GAUSS DAĞILIMINA GÖRE $X \sim N[m, \sigma^2]$ STANDART GAUSS DAĞILIMI

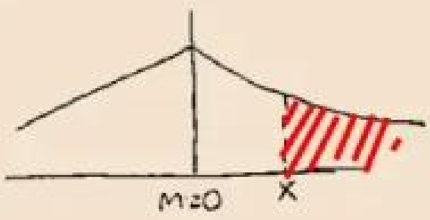
NORMAL GAUSS DAĞILIMININ CDF'Si :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} \cdot dt$$

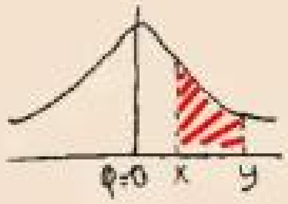
STANDART GAUSS DAĞILIMI :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \cdot dt$$

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİNDE Φ FONKSİYONU YERİNE $Q(x)$ KULLANILIR.



$$P[X \le x \le Y] = \Phi(y) - \Phi(x) = Q(x) - Q(y)$$



NOT : SIKLIK OLARAK GAUSS DAĞILIMINA İLİŞKİN HESAPLAR YAPILIRKEN, VERİLEN DAĞILIM ÖNCE "STANDART GAUSS DAĞILIMINA" DÖNÜŞTÜRÜLÜR. DAHA SONRA HESAPLAMALAR TABLO YARDIMIYLA STANDART GAUSS DAĞILIMI ÜZERİNDEN YAPILIR.

ÖRNEK : X RASGANTI DEĞ. NİN $X \sim N[3,4]$ OLDUĞU VARSAYILSIN. AŞAĞIDAKİ OLASILIKLARI $\varphi(x)$ CİNSİNDEN HESAPLAYINIZ.

a) $P[X \geq 3] = ?$

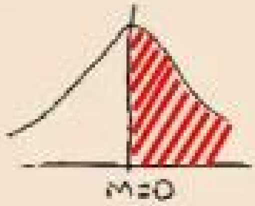
b) $P[11 \leq X \leq 20] = ?$

a:

$x=3 \quad m=3 \quad \sigma^2=4 \quad \sigma=2$

$t = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{3-3}{2} = 0$

$P[X \geq 0] = \frac{1}{2}$

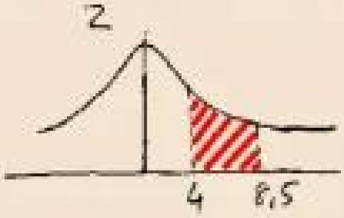


b:

$t = \frac{x-3}{2} \quad x=11 \quad t = \frac{11-3}{2} = 4$

$P[4 \leq X \leq 8{,}5]$

$t = \frac{x-3}{2} \quad x=20 \quad t = \frac{20-3}{2} = 8{,}5$



$\varphi(4) - \varphi(8{,}5)$

ÖRNEK : 800 ÖĞRENCİNİN BOYLARININ ORTALAMASI 66 İNÇ, STANDART SAPMASI 5 İNÇ OLAN NORMAL DAĞILIMLI OLDUĞUNU VARSAYIN.

$m = 66 \qquad (\text{STANDART SAPMA})^2 = \text{VARYANS} \qquad \sigma^2=25 \quad \sigma=5$

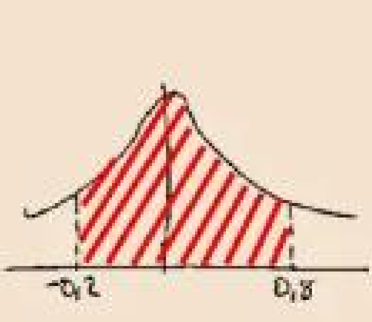
a) $P[65 \leq H \leq 70] = ?$

b) $P[H \geq 72] = ?$

a:

$t = \frac{x-m}{\sigma} \qquad t = \frac{65-66}{5} = -0{,}2$

$t = \frac{x-m}{\sigma} \qquad t = \frac{70-66}{5} = 0{,}8$



$P[-0{,}2 \leq H \leq 0{,}8] \qquad \varphi(-0{,}2) - \varphi(0{,}8) =$

$1 - \varphi(0{,}2) - \varphi(0{,}8) = 0{,}3674$

NOT : $\varphi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$0{,}3674 \cdot 800$ = KAÇ ÖĞRENCİ OLDUĞUNU BULMAK İÇİN b:

$\frac{72-66}{5} = 1,2 \quad \phi(1,2) = 0,112$ ÖĞRENCİ SAYISI: $0,112 \cdot 800$

RASTLANTI DEĞİŞKENİNİN FONKSİYONLARI

$X \xrightarrow{g(x)} Y$ 1. ADIM = Y'NİN CDF'SİNİ BULMAK.

$f_X(x) \longrightarrow f_Y(y)$ 2. ADIM = Y'NİN CDF'SİNİN TÜREVİNİ ALARAK PDF'SİNİ BULMAK.

ÖRNEK : $Y = ax+b$ OLSUN. $f_Y(y)$'yi $f_X(x)$ CİNSİNDEN BULUN.

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[ax+b \le y] \Rightarrow P\left[X \le \frac{(y-b)}{a}\right]$$

1 -) $a > 0$ İSE :

$$F_Y(y) = P\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left\{F_Y(y)\right\} =$$

$$= \frac{d}{dy}\left\{F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right\} = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

2 -) $a < 0$ İSE :

$$F_Y(y) = P\left[X \ge \frac{y-b}{a}\right] = 1 - P\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left\{F_Y(y)\right\} = \frac{d}{dy}\left(1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = \frac{-1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

İKİ DENKLEM TEK DENKLEM İÇİNDE YAZILIRSA ;

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

ÖRNEK : $Y = X^2$ OLAN $f_Y(y)$'yi $f_X(x)$ CİNSİNDEN BULUNUZ.

1. ADIM =

$$F_Y(y) = X^2 \quad P[Y \le y] \rightarrow P[X^2 \le y] = \underbrace{P[-\sqrt{y} \le X}_{1-P[X \le -\sqrt{y}] \text{ ALMADIK}} \le \sqrt{y}]$$

$$F_Y(y) = P[X \le \sqrt{y}] - P[X \le -\sqrt{y}]$$

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

2. ADIM =

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left\{F_Y(y)\right\} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \quad y \geq 0$$

$$f_Y(y) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx_1}\right|} \cdot f_X(x_1) + \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx_2}\right|} \cdot f_X(x_2) \ldots + \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx_n}\right|} \cdot f_X(x_n)$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x)|} \cdot f_X(x_i)$$

MESELA $Y = X^2$ İÇİN ;

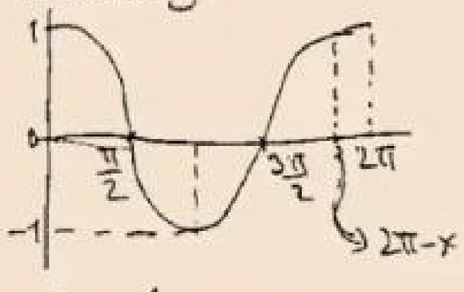
$$g(x) = X^2 \quad g'(x) = 2x \quad x = \sqrt{y}\,, \quad x = -\sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left\{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right\}$$

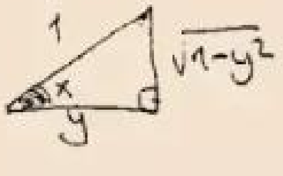
ÖRNEK : $Y = \cos X \quad X = [0, 2\pi] \quad f_Y(y) = ?$

$$g(x) = \cos x \quad g'(x) = -\sin x$$

$X = \arccos y$



$$f_Y(y) = \frac{1}{|g(x)|} \cdot f_X(x_i) = \frac{1}{|-\sin x|} \cdot f_X(x_1) + \frac{1}{|-\sin x|} \cdot f_X(2\pi - x)$$



$$\sin x = \sqrt{1-y^2}$$

OLASILIKTA KULLANILAN BAZI EŞİTSİZLİKLER

MARKOV ve CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ

MARKOV EŞİTSİZLİĞİ : $P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a} \quad x > 0$ OLDUĞUNU SÖYLER. SADECE BİR ÜST SINIRI BELİRLER.

ÖRNEK : BİR ANASINIFI ÖĞRENCİLERİNİN BOY ORTALAMASI 110 cm. ANA SINIFINDAKİ BİR ÇOCUĞUN BOY ORTALAMASININ 120' DEN BÜYÜK OLMA OLASILIĞINI BULUN-

$P[X \geq 120] \leq \frac{E[X]}{a}$ $\quad E[X] = 110 \quad a = 120$ cm $\quad \frac{E[X]}{a} = \frac{110}{120}$

$P[X \geq 120] \leq 0{,}92$

CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ : BİR R.D. NİN ORTALAMA DEĞERİ $E[X]$ VE VARYANSI $VAR[X] = \sigma^2$ BİLİNDİĞİNİ VARSAYALIM.

$$P[|X-m| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

$$P[|X-m| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

ÖRNEK : ÇOK KULLANICILI BİR HABERLEŞME SİSTEMİNDE ORTALAMA CEVAP SÜRESİ 15 sn, STANDART SAPMASI 3 sn DİR. CEVAP SÜRESİNİN ORTALAMADAN 5 sn FAZLA OLMA OLASILIĞI NEDİR?

$$P[X-m \geq a] = P[X-15 \geq 5] \leq \frac{\sigma^2}{a^2} = \frac{9}{25}$$ (STANDART SAPMA)$^2 = \sigma^2$ $= (3)^2 = 9$

NOT : 5 sn AZ OLMA OLASILIĞI DENSEYDİ $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

NOT : X R.D. NIN ORTALAMA DEĞERİ m VE VARYANSI σ^2, $a = (1,\sigma)$ DEĞERİ İÇİN ; CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ :

$$P[X-m \leq k.\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

ÖRNEK : BİR Y R.D. NIN BAŞARI OLASILIĞI 0,25 OLAN İKİ TERİMLİ DAĞILIMINA SAHİP OLDUĞU BİLİNMEKTEDİR. CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ KULLANARAK n'İN AŞAĞIDAKİ DEĞERİ ARTMASI DURUMUNDA $P\left[\left|\frac{y}{n} - 0{,}25\right| \geq 0{,}05\right]$ OLASILIĞI İÇİN BİR ÜST SINIR BELİRLEYİNİZ.

a) $n = 100$ b) $n = 500$ c) $n = 1000$

a:

$$\sigma^2 = VAR[X] = n.p.q = 100 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 18{,}75$$

$$P[|Y/100 - 0{,}25| \geq 0{,}05] \Rightarrow P[|Y-25| \geq 5] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

$a = 5$

$$P[|Y-25| \geq 5] \leq \frac{18{,}75}{25} = 0{,}75$$

b: $\sigma^2 = VAR[X] = n.p.q = 500 . 0{,}25 . 0{,}75 = 93{,}75$

$P[|Y/500 - 0{,}25| \geq 0{,}05] \Rightarrow P[|Y-125| \geq 25] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

$a = 25$

$P[|Y-125| \geq 25] \leq \frac{93{,}75}{625} = 0{,}15$

c: $\sigma^2 = VAR[X] = n.p.q = 1000 . 0{,}25 . 0{,}75 = 187{,}5$

$P[|Y/1000 - 0{,}25| \geq 0{,}05] \Rightarrow P[|Y-250| \geq 50] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

$a = 50$

$P[|Y-250| \geq 50] \leq \frac{187{,}5}{2500} = 0{,}075$

ÇIKACAK KARAKTERİSTİK FONKSİYON

BİR X R.D. NİN KARAKTERİSTİK FONKSİYONU

$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega x}]$

$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) . e^{j\omega x} . dx$ ———— SÜREKLİ R.D. İÇİN

$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P[X=k] . e^{j\omega k}$ ———— AYRIK R.D. İÇİN

NOT : $\Phi_X(\omega)$ İFADESİ $f_X(x)$ 'İN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ. O HALDE ;

$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) . e^{-j\omega x} . d\omega$

$P[X=k] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \Phi_X(\omega) . e^{-j\omega k} . d\omega \quad k = 0 \pm 1, \pm 2$

ÖRNEK : GEOMETRİK VE ÜSTEL R.D. NİN KARAKTERİSTİK FONKSİYONUNU BUL.

a) GEOMETRİK $\quad p.q^{k-1}$

$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega k}] = \sum_{k=0}^{\infty} p . q^{k-1} . e^{j\omega k} = p \sum_{k=0}^{\infty} (q . e^{j\omega})^k$ SERİ

$p . \frac{1}{1 - q . e^{j\omega}}$

b: $\Phi_X(\omega) = \int_0^{\infty} \lambda . e^{-\lambda x} . e^{j\omega x} . dx = \lambda \int_0^{\infty} (e^{-\lambda} . e^{j\omega})^x \, dx$

$f_X(x) = \lambda . e^{-\lambda x} \quad x > 0$

"KARAKTERİSTİK FONKSİYONLARDAN YARARLANARAK BİR R.D. NİN ÇEŞİTLİ DERECEDEN MOMENTLERİ HESAPLANIR."

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) . e^{j\omega x} . dx$$ SERİYE AÇILIRSA :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left\{ 1 + j\omega x + \frac{(j\omega x)^2}{2!} \cdots \right\} dx$$

HER İKİ TARAFIN ω' YE GÖRE TÜREVİ ALINIP $\omega = 0$ YAZILIRSA

$$\frac{d}{d\omega} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) . j . x . dx = j . E[X]$$

$$E[X] = \frac{1}{j} \frac{d}{d\omega} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

GENEL OLARAK :

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n} . \frac{d^n}{d\omega^n} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

ÖRNEK : ÜSTEL DAĞILIMLI X R.D. NİN ORTALAMA DEĞERİNİ VE VARYANSINI BULUNUZ.

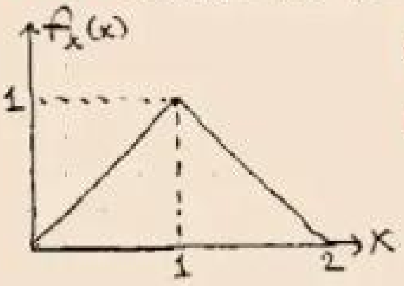
$$\Phi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega} \qquad E[X] = \frac{1}{j} . \frac{d}{d\omega} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

$$= \frac{1}{j} . \frac{d}{d\omega} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{j} . \frac{j}{(\lambda - j\omega)^2} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \frac{1}{j^2} . \frac{d^2}{d\omega^2} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{j^2} . \frac{2(\lambda - j\omega) . j}{(\lambda - j\omega)^4} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{j} \frac{2\lambda}{\lambda^4}$$

ÖDEV: SÜREKLİ BİR X R.D.'NİN PDF'İ VERİLMİŞTİR:



a) X'İN KARAKTERİSTİK FONKSİYONUNU BULUNUZ.

b) $E[X]$ VE $VAR[X]$'İ KARAKTERİSTİK FONKSİYONDAN YARARLANARAK BULUNUZ.

Eski Dünya, Yeni Dünya, bütün akvâmı beşer,
Kaynıyor kum gibi, tûfan gibi, mahşer mahşer.
Yedi iklîmi cihânın duruyor karşında da,
Ostralya'yla beraber bakıyorsun: Kanada!
Çehreler başka, lisanlar, deriler rengârenk;
Sâde bir hâdise var ortada: Vahşetler denk.
Kimi Hindû, kimi yamyam, kimi bilmem ne belâ...
Hani, tâûna da züldür bu rezil istilâ!
Ah, o yirminci asır yok mu, o mahlûku asîl,
Ne kadar gözdeki murdâr ise hakkıyla sefil

a:

$$f_X(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \end{cases}$$

$$\Phi_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,e^{j\omega x}\,dx$$

$$=\int_0^1 x e^{j\omega x}dx+\int_1^2 (2-x)e^{j\omega x}dx$$

$$=\frac{x}{j\omega}e^{j\omega x}\Big|_0^1-\frac{1}{j\omega}\int_0^1 e^{j\omega x}dx+\frac{2-x}{j\omega}e^{j\omega x}\Big|_1^2+\frac{1}{j\omega}\int_1^2 e^{j\omega x}dx$$

$$\frac{1}{j\omega}e^{j\omega x}-\frac{1}{(j\omega)^2}(e^{j\omega}-1)+(0-\frac{1}{j\omega}e^{j\omega})+\frac{1}{(j\omega)^2}(e^{2j\omega}-e^{j\omega})$$

$$\Phi_X(\omega)=\left(\frac{e^{j\omega}-1}{j\omega}\right)^2$$

b: $$E[X]=\frac{1}{j}\frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=0}$$

$$E[X]=\frac{1}{j}\,\frac{(je^{j\omega}\cdot j\omega)-(j(e^{j\omega}-1))}{(j\omega)^2}\cdot\frac{e^{j\omega}-1}{j\omega}$$

$$=\frac{j\omega(e^{2j\omega}-e^{j\omega})-e^{2j\omega}+2e^{j\omega}-1)}{(j\omega)^2}\Big|_{\omega=0}=\frac{0}{0}$$ GELDİĞİ İÇİN L'HOSPİTAL UYGULANIR:

$$= \frac{2je^{2jw} - je^{jw} + (2je^{2jw} - je^{jw}) + w(4j^2 e^{2jw} - j^2 e^{jw}) - 4je^{2jw} + 2je^{jw}}{6j^2 w}\Bigg|_{w=0}$$

$= \frac{0}{0}$ GELDİĞİ İÇİN TEKRAR L' HOSPİTAL UYGULANIRSA:

$$= \frac{4je^{2jw} - je^{jw} + (4je^{2jw} - je^{jw}) + (4je^{2jw} - je^{jw}) + w(8j^2 e^{2jw} - j^2 e^{jw}) - 8je^{2jw} + 2je^{jw}}{6j}\Bigg|_{w=0}$$

$$= \frac{4-1+4-1+4-1+0(8j-5)-8+2}{6} = \frac{3+3+3-8+2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{j^2}\frac{d^2}{dw^2}\Phi_X(w)\Big|_{w=0}$$

$$\frac{1}{j^2}\frac{d}{dw^2}\left(\frac{j^2 w e^{2jw} - j^2 w e^{jw} - je^{2jw} + 2je^{jw} - j}{(jw)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{j^2}\frac{(j^2 e^{2jw} + 2j^3 w e^{2jw} - j^2 e^{jw} - j^3 w e^{jw} - 2j^2 e^{2jw} - 2j^2 e^{jw}) j^3 w^3 + 3j^4 w^2 (jwe^{2jw} - jwe^{jw} - e^{2jw} + 2e^{jw} + 1)}{j^6 w^6}$$

$$= \frac{(e^{2jw} + 2jwe^{2jw} - e^{jw} - jwe^{jw} - 2e^{2jw} + 2e^{jw}) jw + 3(jwe^{2jw} - jwe^{jw} - e^{2jw} + 2e^{jw} + 1)}{j^4 w^2}\Bigg|_{w=0} = \infty$$

$$VAR[X] = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

$$= \infty - \frac{1}{4} = \infty$$

MOMENT ÇIKARTAN FONKSİYON

R.D.NİN AYRIK OLDUĞU VE NEGATİF OLMADIĞI PROBLEMLERDE Z DÖNÜŞÜMÜ VE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ KULLANMAK DAHA UYGUNDUR. MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON;

$G_N(z) = E\{z^n\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_N(k) \cdot z^k$ İLE VERİLİR. BURADA n POZİTİF DEĞERLER ALAN BİR R.D. BİR KARAKTERİSTİK FONKSİYONDA YAPILAN İŞLEMLERE BENZER İŞLEMLER YAPILARAK;

$$P_N(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} G_N(z)\Big|_{z=0}$$ ELDE EDİLİR

hakan paçal

$$E[N] = \frac{d}{dz} G_N(z)\Big|_{z=1} = G_N'(1)$$

$$VAR[N] = G''_N(1) + G'_N(1) - \left[G'_N(1)\right]^2$$

$$\frac{d^2}{dz^2} G_N(z)\Big|_{z}$$

ÖRNEK : POISSON R.D. NİN ORTALAMA DEĞER VE VARYANSINI MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON YARDIMI İLE BULUNUZ.

$$G_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_N(k) . z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \right) . z^k = e^{-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} . z^k \right)$$

$$= e^{-\alpha} \left(1 + \alpha . z + \frac{\alpha^2 . z^2}{2!} \ldots \right)$$

$$= e^{-\alpha} . e^{\alpha z} = e^{\alpha(z-1)}$$

$$E[N] = \frac{d}{dz} e^{\alpha(z-1)} \Big|_{z=1} = \alpha . e^0 \Big|_{z=1} = \alpha$$

$$G''_N(1) = \alpha^2 . e^0 \Big|_{z=1} = \alpha^2$$

$$VAR[N] = G''_N(1) + G'_N(1) - \left[G'_N(1)\right]^2 = \cancel{\alpha^2} + \alpha - \cancel{\alpha^2} = \alpha$$

RASTLANTI DEĞİŞKEN ÇİFTİ

R. DENEYLERİNİN ÇOĞU BİRDEN FAZLA R.D. İÇERİR. BU BÖLÜMDE DAHA ÖNCE TEK R.D. İÇİN VERİLEN İFADELER İKİ R.D. DURUMUNA GENİŞLETİLECEKTİR.

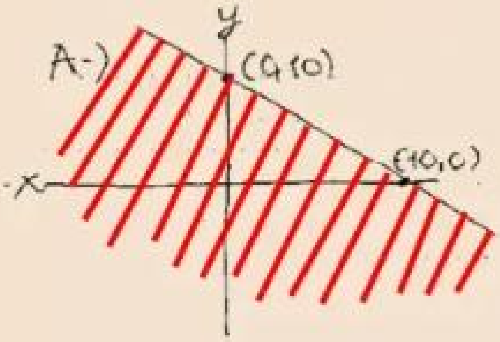
ÖRNEK : ÖĞRENCİLERİN İSİMLERİNİN YAZILI OLDUĞU BİR ÇUVALDAN RASTGELE BİR İSİM SEÇİLSİN. X ÖĞRENCİ İSMİ OLSUN. $H(X)$ SEÇİLEN ÖĞRENCİNİN BOYU, $W(X)$ SEÇİLEN ÖĞRENCİNİN AĞIRLIĞI OLSUN.

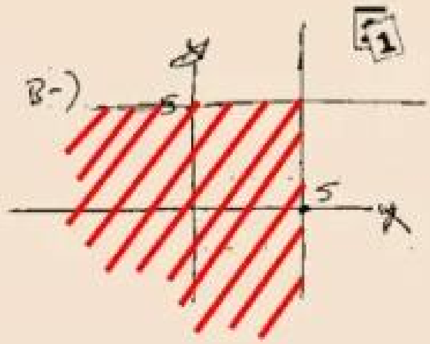
EĞER (H, W) ÇİFTİNİ İÇEREN OLAYLARLA İLGİLENİLİYORSA, ÖRNEĞİN B OLAYI:

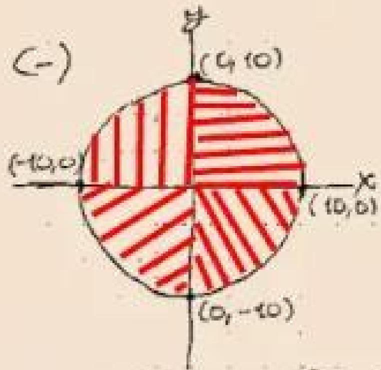
$B = \{ H \leq 183 , W \leq 82$ İSE BU BİR R.D. ÇİFTİDİR.

(X, Y), R.D. ÇİFTİNİ İÇEREN OLAYLARLA İLGİLENEN KOŞULLARLA BELİRLENİR VE DÜZLEM ÜZERİNDE BÖLGELER ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR.

$A = \{ X + Y \leq 10 \}$ $B = \{ \min(X, Y) \leq 5 \}$ $C = \{ X^2 + Y^2 \leq 100 \}$







NOT : ARTIK $P[X,Y]$ DENİLİRSE $X \cap Y$ OLUR.

$B = \{ X\{A_1\} \cap Y\{A_2\} \}$ İSE

$P[B] = P[\{ X_1 \leq A_1 \} \cap \{ y \leq A_2 \}] = P[X\{A_1\}, Y\{A_2\}]$

1 -) AYRIK RASTLANTI DEĞİŞKENLERİ

(X,Y), $S_{X,Y}$ $\{ (x_j, y_k) \; j=1,2,\ldots\ldots \; k=1,2\ldots \}$ KÜMELERİNDE TANIMLI R.D. OLSUN. (X,Y) R.D. LERİNİN ORTAK PMF LERİ $\{X=x \cap Y=y\}$ OLAYININ OLASILIKLARINI BELİRLER.

$P_{X,Y}(x,y) = P[\{X=x\} \cap \{Y=y\}] = P[X=x, Y=y]$ ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR.

$S_{X,Y}$ KÜMESİNDE HERHANGİ BİR B OLAYININ OLASILIĞI $P[X,Y \in B] =$

$\sum_{x_j}^{\infty} \sum_{y_k}^{\infty} P_{X,Y}(x_j, y_k)$ TOPLAM OLASILIĞI İLE KARŞILANIR. TÜM ÖRNEK UZAYI TOPLAYAN BİR OLAY İÇİN

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{X,Y}(x_j, y_k) = 1$$ OLACAKTIR.

ÖRNEK : BİR RASTLANTI DENEYİ İKİ ZARIN AYNI ANDA ATILMASI VE ÇIKAN SAYILARIN KAYDEDİLMESİ OLSUN $P[\min(X,Y)=3]$ OLAYININ OLASILIĞI NEDİR?

$P_{X,Y}(3,4)$, $P_{X,Y}(3,5)$, $P_{X,Y}(3,6)$, $P_{X,Y}(3,3)$, $P_{X,Y}(4,3)$

$P_{X,Y}(5,3)$, $P_{X,Y}(6,3)$

$P_{X,Y}(3,4) = \frac{1}{36}$ TOPLAM OLASILIK $= \frac{7}{36}$

2 -) MARJİNAL PDF

(X,Y) R.D. ÇİFTİNİN ORTAK DAVRANIŞI $P_{X,Y}[X,Y]$ İLE BELİRLENİR.

$P_{X,Y}[X,Y]$ BİLİNİYORKEN SADECE X VEYA SADECE Y'NİN OLASILIĞI MARJİNAL PDF İLE BELİRLENEBİLİR.

$$P_X(x_j) = P[X = x_j]$$
$$= P[X = x_j,\ Y = \text{HERHANGİ BİR DURUM}]$$
$$= P[\{X = x_j,\ Y = y_1\} \cup \{X = x_j,\ Y = y_2\} \cup \dots \cup \{X = x_j,\ Y = y_k\}]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_{X,Y}[x_j, y_k] \quad \text{(HER BİR } x_j \text{ DEĞERİ BULUNUR)}$$

BENZER ŞEKİLDE

$$P[Y = y_k] = \sum_{j=1}^{\infty} P_{X,Y}(x_j, y_k)$$

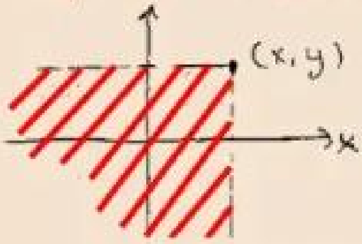
NOT : MARJİNAL PDF TEK BİR R.D NİN PDF'SİNİN SAĞLADIĞI TÜM ŞARTLARI SAĞLAR.

ÖRNEK : X VE Y R.D. NİN ORTAK PDF'LERİ TABLODA VERİLMİŞTİR.

X \ Y	1	2
1	3/8	1/8
2	1/8	3/8

$$P[X=1] = P_{X,Y}[X=1, Y=1] + P_{X,Y}[X=1, Y=2] = \frac{4}{8}$$
$$P[Y=1] = P_{X,Y}[X=1, Y=1] + P_{X,Y}[X=2, Y=1] = \frac{4}{8}$$

3 -) X ve Y ' NİN ORTAK CDF



$F_{X,Y}(x,y) = P[X \le x,\ Y \le y]$ ŞEKLİNDE TANIMLANIR VE GÖSTERİLDİĞİ GİBİ YORUMLANABİLEN BİR DİKDÖRTGEN ŞEKLİNDEDİR.

ORTAK CDF ÖZELLİKLERİ

1-) $x_1 \le x_2$ VE $y_1 \le y_2$ İSE $F_{X,Y}(x_1, y_2) \le F_{X,Y}(x_2, y_2)$

↳ ORTAK CDF AZALMAYAN BİR FONKSİYONDUR.

2-) $F_{X,Y}(x_1, -\infty) = F_{X,Y}(-\infty, y_1) = 0 \quad F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$

3-) $F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x) \qquad F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y)$

4-) $P[x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2] = F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_1, y_2)$
$- F_{X,Y}(x_2, y_1) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$

$F_{X,Y}(2,2) = ?$ (YUKARDAKİ ÖRNEK'E GÖRE)

$F_{X,Y}(2,1) = P[X \leq 2,\ Y \leq 1] = P[X=1, Y=1] + P[X=2, Y=1]$
$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$F_{X,Y}(2,2) = P[X \leq 2, Y \leq 2] = P[X=1, Y=1] + P[X=1, Y=2] + P[X=2, Y=1] +$
$+ P[X=2, Y=2] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

5-) ORTAK CDF KUZEY VE DOĞU YÖNÜNDE SÜREKLİDİR.

ÖRNEK : X VE Y R.D. NİN CDF'Sİ VERİLMİŞTİR.
a) MARJİNAL CDF'SİNİ BULUN.
b) $A = \{X \leq 1,\ Y \leq 1\}$ OLASILIĞINI BULUN.
c) $D = \{1 \leq X \leq 2,\ 2 \leq Y \leq 5\}$ OLAYININ OLASILIĞINI BULUN.

X VE Y NIN CDF'Sİ =

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y}), & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{AKSİ HALDE} \end{cases}$$

a:

$F_{X,Y}(x, \infty) = \lim_{y \to \infty}$

$$F_{X,Y}(x, \infty) = \lim_{y \to \infty} (1 - e^{-\alpha x}) . (1 - \underbrace{e^{-\beta y}}_{0}) = 1 - e^{-\alpha x} = F_X(x)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{(1 - \overbrace{e^{-\alpha x}}^{0})}_{1} (1 - e^{-\beta y}) = 1 - e^{-\beta y} = F_Y(y)$$

b:

$P[X \leq 1, Y \leq 1] = F_{X,Y}(1,1) = (1 - e^{-\alpha . 1}).(1 - e^{-\beta . 1}) = (1-e^{-\alpha})(1-e^{-\beta})$

c: $F_{X,Y}(2,5) - F_{X,Y}(2,2) - F_{X,Y}(1,5) + F_{X,Y}(1,2)$

$$= (1-e^{-2\alpha}).(1-e^{-5\beta}) - (1-e^{-2\alpha})(1-e^{-2\beta}) - (1-e^{-\alpha})(1-e^{-5\beta}) +$$
$$+ (1-e^{-\alpha})(1-e^{-2\beta})$$

ORTAK PDF

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2 F_{X,Y}(x,y)}{dx.dy}$$

ORTAK PDF NİN ÖZELLİKLERİ

1-) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

2-) $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv = 1$

3-) $P[x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$

4-)
$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \end{aligned}} \longrightarrow \text{MARJİNAL PDF'LER}$$

ÖRNEK : X VE Y R.D.'NİN ORTAK-PDF AŞAĞIDA VERİLMİŞTİR. ORTAK CDF'LERİ = ?

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{AKSİ HALDE} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

$x < 0,\ y < 0 \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = 0$

$0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1 \Rightarrow F_{X,Y} = \int_0^x\int_0^y dx\,du = \int_0^x (x|_0^y)\,dv = \int_0^x y\,du$

$= yu|_0^x = yx$

* $0<x<1,\ y\geq 1 \Rightarrow F_{X,Y}(x,y)=\int_0^x\int_1^1 dv\,du=\int_0^x du = x$

* $0<y<1 \quad x\geq 1 \quad F_{X,Y}(x,y)=\int_0^1\int_0^y dv\,du = y$

ÖRNEK : X VE Y R.D.'NİN ORTAK PDF AŞAĞIDA VERİLMİŞTİR.
a) C SABİTİNİ BULUNUZ
b) MARJİNAL PDF'LERİ HESAPLAYINIZ.

a: İNTEGRAL SINIRLARI BELİRLENİP DENKLEMDE YERİNE KONULUR=

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c e^{-x} e^{-y}, & 0\leq y\leq x<\infty \\ 0, & \text{AKSİ HÂLDE} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty\int_0^x c e^{-x} e^{-y}\,dy\,dx=\int_0^\infty c e^{-x}\left[-e^{-y}\Big|_0^x\right]dx=c\int_0^\infty e^{-x}\left[1-e^{-x}\right]dx = 1$$

$$= c\int_0^\infty (e^{-x}-e^{-2x})\,dx = c\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty\right] = c\left[1-\frac{1}{2}\right]=\frac{c}{2}=1$$

$c=2$ //

$$f_X(x)=\int_0^x 2e^{-x}e^{-y}\,dy = 2e^{-x}\left[-e^{-y}\Big|_0^x\right]=2e^{-x}(1-e^{-x})$$

ORTAK GAUSS DAĞILIMI

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\,dy$$

$$=\frac{e^{\frac{-x^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2-2\rho xy+\rho^2x^2-\rho^2x^2}{2(1-\rho^2)}}\,dy$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2 \cdot \boxed{1}}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(y-\rho x)^2-\rho^2 x^2}{2(1-\rho^2)}} \, dy$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \, dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= N[0,1]$$

SONUÇ = İKİ R.D.'NİN ORTAK GAUSS DAĞILIMI VARSA, MARJİNALLERİNİN DE ORTAK GAUSS DAĞILIMI VARDIR.

ORTAK MOMENTLER, KORELASYON ve KOVARYANS

TANIM= X VE Y'NİN jk. ORTAK MOMENTİ $E[X^j Y^k]$ ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR VE AŞAĞIDAKİ EŞİTLİKLERLE TANIMLANIR:

$$E[X^j Y^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & X \text{ VE } Y \text{ SÜREKLİ İSE} \\ \sum_i \sum_n x_i^j y_n^k P_{X,Y}(x_i, y_n), & X \text{ VE } Y \text{ AYRIK İSE} \end{cases}$$

ÖZEL DURUMLAR:

$j=0$ İSE Y'NİN MOMENTLERİ ELDE EDİLİR.

$k=0$ İSE X'İN MOMENTLERİ ELDE EDİLİR.

$j=k=1$ İSE X VE Y'NİN KORELASYONU ELDE EDİLİR.

$E[XY]=0$ İSE X VE Y DİKTİR.

ORTAK MERKEZİ MOMENT

X VE Y'NİN jk. ORTAK MERKEZİ MOMENTİ $E\left[(X-\underbrace{E[X]}_{m_x})^j (Y-\underbrace{E[Y]}_{m_y})^k\right]$

ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR VE AŞAĞIDAKİ EŞİTLİKLERLE TANIMLANIR.

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^j (y-m_y)^k f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & X \text{ VE } Y \text{ SÜREKLİ İSE..} \\ \sum_i \sum_n (x_i-m_x)^j (y_n-m_y)^k P_{X,Y}(x_i, y_n), & X \text{ VE } Y \text{ AYRIK İSE..} \end{cases}$$

ÖZEL DURUMLAR:

$j=2,\ k=0$ İSE $VAR[X]$ ELDE EDİLİR.

$j=0,\ k=2$ İSE $VAR[Y]$ ELDE EDİLİR.

$j=k=1$ İSE $E[(X-m_x)(Y-m_y)]$ ELDE EDİLİR VE BU İFADEYE X VE Y NİN "KOVERYANSI" DENİR.

KORELASYON ve KOVARYANS ARASINDAKİ İLİŞKİ

$$E[(X-m_x)(Y-m_y)]=E[XY+m_xm_y-m_yX-m_xY]$$

$$=E[XY]-E[m_yX]-E[m_xY]+E[m_xm_y]$$

$$=E[XY]-m_yE[X]-m_xE[Y]+m_xm_y$$

$$=E[XY]-m_xm_y+m_xm_y-m_ym_x$$

$$E[(X-m_x)(Y-m_y)]=E[XY]-m_xm_y$$

$$\boxed{COV(X,Y)=E[XY]-m_xm_y}$$

BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLERİN KOVARYANSI

$$E[(X-m_x)(Y-m_y)]=\iint(x-m_x)(y-m_y)f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint(x-m_x)(y-m_y)f_x(x)f_y(y)\,dx\,dy$$

$$=\left[\int(y-m_y)f_y(y)dy\right]\cdot\left[\int(x-m_x)f_x(x)dx\right]$$

$$=\left[\int y.f_y(y)dy-\int m_yf_y(y)dy\right]\cdot\left[\int x.f_x(x)dx-\int m_xf_x(x)dx\right]$$

$$=[m_y-m_y]\cdot[m_x-m_x]=0$$

$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

KORELASYON KATSAYISI

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{COV}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$\boxed{-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1}$$ OLUR İSPATI =

$$E\left[\left\{\frac{(X-E[X])}{\sigma_X} \mp \frac{(Y-E[Y])}{\sigma_Y}\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\frac{(X-E[X])^2}{\sigma_X^2} \mp 2\frac{(X-E[X])(Y-E[Y])}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(Y-E[Y])^2}{\sigma_Y^2}\right]$$

$$= 1 \pm 2\rho_{X,Y} + 1$$

$$2 \pm 2\rho_{X,Y} = 2(1 \pm \rho_{X,Y}) \geq 0 ///$$

KORELASYON KATSAYISI İKİ R.D.'NİN ARASINDAKİ İLİŞKİYİ AÇIKLAR. İKİSİ AYNI YÖNLÜ İLİŞKİDEYSE POZİTİF, TERS İSE KATSAYI NEGATİFTİR. SIFIR İSE İLİŞKİSİZDİR.

ÖRNEK : X VE Y ORTAK R.D.'NİN ORTAK PDF'Sİ VERİLMİŞTİR. $E[XY]=?$ $\mathrm{COV}[X,Y]=?$ $\rho_{X,Y}=?$ HESAPLAYINIZ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y}2, & 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0, & \text{AKSİ HÂLDE} \end{cases}$$

$$f_X(x) = 2e^{-x}(1-e^{-x}), \quad x \geq 0$$

$$f_X(y) = 2e^{-2y}, \quad 0 \leq y$$

$$E[XY] = \iint x.y\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{x} xy2e^{-x}e^{-y}\,dy\,dx = 1$$

$$E[X] = \int x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x2e^{-x}(1-e^{-x})\,dx = \frac{3}{2}$$

$$E[Y] = \int y f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} y2e^{-2y}\,dy = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X-\frac{3}{2}\right)^2\right] = \frac{5}{4} \qquad \mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_Y^2 = E\left[\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1/4}{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

KOŞULLU OLASILIK ve KOŞULLU ORTALAMA DEĞER

$$P[Y\in A \mid X=x] = \frac{P[Y\in A \cap X=x]}{P[X=x]}, \quad P[X=x] > 0$$

BU KOŞULLU OLASILIĞIN ALACAĞI ŞEKLİ X R.D.'NİN TÜRÜ BELİRLER.

X AYRIK R.D. İSE ,

X=x ALTINDA Y'NİN KOŞULLU PMF'Sİ :

$$P_X[Y \mid x] = P[Y=y \mid X=x] = \frac{P[Y=y, X=x]}{P[X=x]}$$

TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜ :

$$P[Y\in A \mid X=x_k] = \sum_{y_j \in A} P_Y(y_j \mid x_k)$$

X VE Y BAĞIMSIZ İSE ;

$$P_Y(y \mid x) = P_Y(y)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(x_j, y_k) &= P_Y(y_k \mid x_j) . P(x_j) \\ P(x_j, y_k) &= P_X(x_j \mid y_k) . P(y_k) \end{aligned}}$$

$$\boxed{P[Y\in A] = \sum_{x_k} P[Y\in A \mid X=x_k] . P[X=x_k]}$$

Y SÜREKLİ İSE ;

$$F_X(y \mid x_k) = \frac{P[Y\le y, X=x_k]}{P[X=x_k]} \qquad f_Y(y \mid x_k) = \frac{d}{dy} F_Y(y \mid x_k)$$

$$P[Y\in A \mid X_k] = \int f_Y(y \mid x_k)\,dy$$

ÖRNEK : BİR TÜMDEVREDEKİ TOPLAM HATA SAYISI α PARAMETRELİ POISSON R.D. DİR. HERHANGİ BİR HATANIN BELİRLİ BİR Γ BÖLGESİ İÇİNDE BULUNMA OLASILIĞI p DİR. VE HERHANGİ BİR HATANIN KONUMU DİĞERİNDEN BAĞIMSIZDIR. Γ BÖLGESİ İÇİNE DÜŞEN HATA SAYISI Y R.D. Y'NİN PMF'Sİ=?

TOPLAM HATA SAYISI $X=k$ İSE

$$P_Y(Y=j \mid X=k) = \begin{cases} 0, & j>k \\ \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}, & j\le k \end{cases}$$

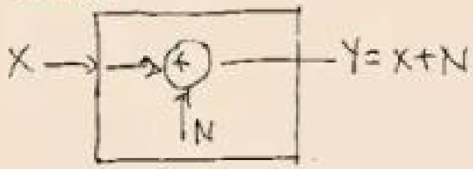
$$P_Y(Y=j) = \sum_{k=0}^{\infty} P_Y(Y=j \mid X=k) . P_X[X=k]$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{(k-j)!\,j!} p^j (1-p)^{k-j} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha p)^j e^{-\alpha}}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{[(1-p)\alpha]^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{(\alpha p)^j . e^{-\alpha}}{j!} e^{(1-p)\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha p)^j}{j!} e^{-\alpha p}$$

ÖRNEK :



$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} = N[0,1]$$

$f_Y(y \mid X=1) = ?$

$f_X(y \mid X=-1) = ?$

$P[X=1 \mid Y>0] = ?$

$$F_Y(y \mid X=1) = P[Y\le y \mid X=1] = P[X+N \le y \mid X=1]$$
$$= P[N+1 \le y] = P[N \le y-1]$$

$$= \int_{-\infty}^{y-1} f_N(n)\, dn = \int_{-\infty}^{y-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} . dn$$

$$F_Y[y \mid X=-1] = \int_{\infty}^{y+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} . dn$$

$$\underline{\text{Sonuç}} = \left.\begin{array}{l} X=1 \ \text{ise} \ Y, N[1,1] \\ X=-1 \ \text{ise} \ Y, N[-1,1] \end{array}\right\}$$

$$P[X=1 \mid Y>0] = \frac{P[Y>0 \mid X=1] . P[X=1]}{P[Y>0]}$$

$$P[Y>0] = P[Y>0 \mid X=1] . P[X=1] + P[Y>0 \mid X=-1] . P[X=-1]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} . dy \times \left(\frac{1}{3}\right) + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2}} . dy \times \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= [1 - Q(1)] \times \frac{1}{3} + Q(1)] \frac{2}{3} = 0{,}386$$

$$P[X=1 \mid Y>0] = \frac{(1-Q(1))/3}{(1+Q(1))/3} = 0{,}726$$

$\underline{X \text{ SÜREKLİ}}$

$$F_Y(y \mid x < X \leq x+h) = \frac{P[Y \leq y,\ x < X \leq x+h]}{P[x < X \leq x+h]}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} \int_{x}^{x+h} f_{X,Y}(x', y')\, dx'\, dy'}{\int_{x}^{x+h} f_X(x')\, dx'}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x, y')\, dy'\, h}{f_X(x) . h} \Rightarrow F_Y(y \mid x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x, y')\, dy'}{f_X(x)}$$

KOŞULLU PDF

$$f_Y(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

KOŞULLU OLASILIKLAR, KOŞULLU PDF CİNSİNDEN HESAPLANABİLİR.

$$P[Y \in A \mid X = x] = \int_{y \in A} f_Y(y \mid x)\, dy$$

$$P[Y \in A] = \int_{-\infty}^{\infty} P[Y \in A \mid X = x] \cdot f_X(x)\, dx$$

ÖRNEK : t KADAR BİR SÜREDE BİR DURAĞA GELEN MÜŞTERİ SAYISI βt PARAMETRELİ POISSON DAĞILIMI İLE İFADE EDİLİYOR. HER BİR MÜŞTERİYE HİZMET İÇİN GEÇEN SÜRE ÜSTEL DAĞILIMA SAHİPTİR. BELİRLİ BİR MÜŞTERİYE HİZMET SÜRESİ ESNASINDA GELEN MÜŞTERİ SAYISI N OLSUN. N'İN PMF'Sİ =?

$$P(X=k) = \frac{(\beta t)^k}{k!} \cdot e^{-\beta t}$$

$$f_T(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

$$P[N=k] = \int_0^{\infty} P[N=k \mid T=t]\, f_T(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t} \cdot \alpha e^{-\alpha t} \cdot dt$$

$$= \frac{\alpha \beta^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot dt$$

$$= \frac{\alpha \beta^k}{k!(\alpha+\beta)^{k+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} r^k \cdot e^{-r} \cdot dr}_{\Gamma(k+1) = k!} = \frac{\alpha \beta^k}{k!(\alpha+\beta)^{k+1}} \cdot k!$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^k$$

$X=x$ ALTINDA Y'NİN KOŞULLU ORTAMASI ;

$E[Y|X=x]$ ŞEKLİNDE GÖSTERİLİR. AYRIK VE SÜREKLİ DURUM İÇİN ŞU ŞEKİLDE HESAPLANIR :

$$E[Y|x]=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y|x)\, dy\ , & \text{SÜREKLİ}\\[2ex] \displaystyle\sum_{y_j} y_j\, P_Y(Y=y_j \mid X=x)\ , & \text{AYRIK}\end{cases}$$

<u>ÖNEMLİ BİR ÖZELLİK</u>

BİR RD'NİN ORTALAMASI :

$$E[Y]=E\big[\underbrace{E[Y|X]}\big]$$

$$\xrightarrow{\text{SÜREKLİ}} \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|x]\, f_X(x)\, dx$$

$$\xrightarrow{\text{AYRIK}} \sum_{x_k} E[Y|x_k]\, P_X(X=x_k)$$

SÜREKLİ DURUM İÇİN İSPAT :

$$E\big[E[Y|X]\big]=\int_{-\infty}^{\infty} E[Y|x]\, f_X(x)\, dx$$

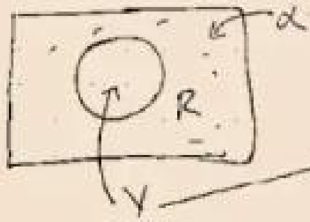
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y|x)\cdot f_X(x)\, dy\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\right] dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \underline{\underline{E[Y]}}$$

R BÖLGESİNDEKİ HATA SAYISI Y RD İLE GÖSTERİLSİN.



$$P_Y(Y=j) = \frac{(\alpha p)^5}{j!} e^{-\alpha p}$$

α PARAMETRELİ POISSON DAĞILIMI

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E[Y|X=k] . P[X=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} pk . \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\lambda} = p . \sum_{k=0}^{\infty} k . \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$= p E[X]$$

$$= p\alpha$$

İKİ RD NİN FONKSİYONU

X VE Y RD'LERİNİN ORTAK PDF'LERİ $f_{X,Y}(x,y)$; a, b, c VE d KATSAYILAR OLMAK ÜZERE

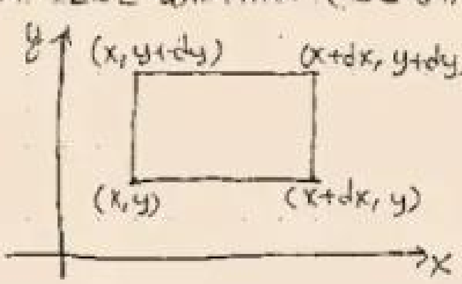
$$\boxed{\begin{aligned} U &= aX + bY \\ W &= cX + dY \end{aligned}}$$

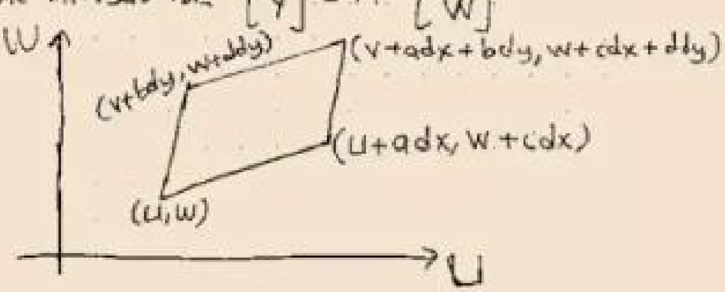
ŞEKLİNDE TANIMLANAN U VE W RD'LERİNİN ORTAK PDF $f_{U,W}(u,w)$'Yİ $f_{X,Y}(x,y)$ CİNSİNDEN HESAPLAMAK İSTİYORUZ.

VEKTÖR MATRİS NOTASYONUNDA;

$$\begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$ GÖSTEREBİLİRİZ.

A TEKİL OLMAYAN $(\det(A) \neq 0)$ BİR MATRİS İSE $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$





$$f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = f_{U,W}(u,w).|A|$$

$$f_{U,W}(u,w) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\left|\frac{|A|}{dxdy}\right|}$$

$$|A| = |ad-bc|.dxdy = |det(A)|.dxdy$$

$$f_{U,W}(u,w) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\left|\frac{det(A).dxdy}{dxdy}\right|} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{|det(A)|} = \frac{f_{X,Y}\left(A^{-1}.\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}\right)}{|det(A)|}$$

ÖRNEK : X VE Y ORTAK GAUSS DAĞILIMINA SAHİP OLSUN

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ŞEKLİNDE TANIMLANAN V VE W 'NIN ORTAK PDF'Sİ =?

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{V-W}{\sqrt{2}} \qquad Y = \frac{V+W}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{1} = \frac{f_{X,Y}\left(\frac{v-w}{\sqrt{2}}, \frac{v+w}{\sqrt{2}}\right)}{1}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}$$

$$f_{V,W}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{v-w}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{v-w}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{v+w}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{v+w}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{v^2}{2(1+\rho)} + \frac{w^2}{2(1-\rho)}}$$

$$V = aX + bY \qquad W = cX + dY \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} \\ \frac{dW}{dx} & \frac{dW}{dy} \end{bmatrix}$$

DÖNÜŞÜMÜN GENELLEŞTİRİLMESİ

$$V = g_1(x, y)$$

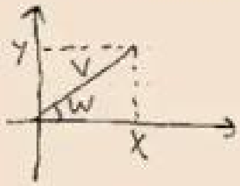
$$W = g_2(x, y)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \boxed{f_{V,W}(v,w) = \frac{1}{\det(J)} f_{X,Y}(h_1(v,w), h_2(v,w))}$$

ÖRNEK : $f_{X,Y}(x,y) \qquad R = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$X = V\cos(w)$$

$$Y = V\sin(w)$$



$$J = \begin{bmatrix} \cos(w) & -V\sin(w) \\ \sin(w) & V\cos(w) \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = V\cos^2(w) + V\sin^2(w) = V$$

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{1}{|V|} f_{X,Y}(V\cos(w), V\sin(w))$$

ÖRNEK : $V = \cos(\theta) X + \sin\theta Y$

$W = -\sin(\theta) X + \cos(\theta) Y$ $\quad f_{V,W}(v,w) = ?$

$$J = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \det(J) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$\sin\theta /$ $V = \cos(\theta) X + \sin(\theta) Y$

$\cos\theta /$ $W = -\sin(\theta) X + \cos(\theta) Y$

ORTAK GAUSS DAĞILIMI

$f_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{X,Y}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) \cdots \right.}$$

$$\left. \cdots \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

BU MERKEZİ (m_1, m_2) OLAN ÇAN ŞEKLİNDE BİR YÜZEYDİR.

Bu $\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{X,Y}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2 = C$ İSE BU EŞİTLİĞİ SAĞLAYAN TÜM (x,y) DEĞERLERİ İÇİN $f_{X,Y}(x,y)$ SABİT OLUR.

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(1-\rho_{X,Y}^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_1^2} \cdot \left[x - \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) - m_1\right]^2}$$

$$= N\left[m_1 + \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2),\ (1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_1^2\right]$$

—— o ——

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-m_1)(Y-m_2)] = E\left[E[(X-m_1)(Y-m_2) \mid Y]\right]$$

$$E[(X-m_1)(Y-m_2) \mid Y=y] = (y-m_2)\,E[\,X-m_1 \mid Y=y]$$

$$= (y-m_2)\left(E(X \mid Y=y) - m_1\right)$$

$$= (y-m_2)\left[\rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right]$$

$$E[(X-m_1)(Y-m_2) \mid Y] = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y-m_2)^2$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\left[E[(X-m_1)(Y-m_2) \mid Y]\right]$$

$$= \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}E[(Y-m_2)^2]$$

$$= \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\sigma_2^2 = \rho_{X,Y}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2$$

=SON=

HAKAN PAÇAL
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
ELEKTRİK - ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ