

LİNEER CEBİR ARA SINAVI

NOT: Sınav süresi 50 dakikadır. Başarılar Dileriz. 22.11.2023

1. $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{pmatrix}$ matrisi ortogonal ($A^{-1} = A^T$) ise x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -3 E) -2

$$AA^T = AA^T \Leftrightarrow A \cdot A^T = I$$

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & x \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -12 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \checkmark$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ olmak üzere $f(A)$ matris polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(A) = 10(A + I)$ B) $f(A) = (A + I)$ C) $f(A) = 2(A + I)$

D) $f(A) = 5(A + I)$ E) $f(A) = 4(A + I)$

$$f(A) = 2A^3 + 3A^2 + A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 + 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= 10 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 10 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 10(A + I) \checkmark$$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ sistemi tutarsız ise a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) -2 C) -3 D) 2 E) 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & a-3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & a-3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8+5a}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{8+5a}{5} = 0 \text{ ise sistem tutarsızdır.} \\ a = -2 \checkmark$$

4. A ve B matrisleri, $\det(A) = 4$, $\det(B) = 6$ olacak biçimde, 3×3 tipinde matrisler olsunlar. Bu durumda aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\det\left(\frac{1}{2}A\right) = 2$ B) $\det(B^{-1}A^T) = \frac{2}{3}$ C) $\det(A^2) = 8$ D) $\det(A - B) = -2$ E) Hiçbiri

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2}A\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 |A| \\ &= \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2} \neq 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} |B^{-1}A^T| &= |B|^{-1} |A| \\ &= \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} |A^2| &= |A|^2 = 4^2 = 16 \\ &\neq 8 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} |A-B| &\neq |A| - |B| \\ &\neq 4 - 6 \\ &\neq -2 \end{aligned} \right\}$$

5. $A_{n \times n}$ terslenebilir matris olmak üzere $[A; I_n]$ matrisi; elementer satır işlemleri yardımıyla $[I_n; A^{-1}]$ matrisine

satırca denk hale getirilebilir. Buna göre $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 3 \\ -2 & 1/2 & -1 \\ -2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$ B) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 3 \\ 2 & 1/2 & -1 \\ -2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$ C) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 3 \\ -2 & 1/2 & -1 \\ 2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$

D) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 3 \\ -2 & 1/2 & -1 \\ -2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$

E) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 3 \\ -2 & -1/2 & -1 \\ -2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow |A^2| = |A| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \rightarrow |A| = 0 \text{ (} A^{-1} \text{ mevcut yani } |A| \neq 0 \text{ olmalı)} \\ \rightarrow |A| = 1 \rightarrow |A| = 1$$

6. $A \in R^{3 \times 3}$ matrisi hem idempotent ($A^2 = A$) hem de regüler (A^{-1} mevcut) matris olsun. Buna göre $\det(2A) + \det(A^T) + 2\det(A^{-1}) - \det(A^2) = x$ ise x aşağıdakilerden hangisidir?

$$2^3|A| + |A| + 2|A|^{-1} - |A| = x \Rightarrow 8|A| + 2|A|^{-1} = x \Rightarrow 8 \cdot 1 + 2 \cdot (1)^{-1} = x \Rightarrow x = 10 \checkmark$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 10

7. $\det \begin{bmatrix} 1 & a & a & 3 \\ a & 1 & 3 & a \\ a & 3 & 1 & a \\ 3 & a & a & 1 \end{bmatrix} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & 3 \\ 0 & 1-a^2 & 3-a^2 & -2a \\ 0 & 3-a^2 & 1-a^2 & -2a \\ 0 & -2a & -2a & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & 3-a^2 & -2a \\ 3-a^2 & 1-a^2 & -2a \\ -2a & -2a & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & 3-a^2 & -2a \\ 2 & -2 & 0 \\ -2a & -2a & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & 4-2a^2 & -2a \\ 2 & 0 & 0 \\ -2a & -4a & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4-2a^2 & -2a \\ -4a & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$-12 + 16a^2 - 8a^2 = 0 \Rightarrow 8a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2 \checkmark$$

A) $\{2\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{-1, 2\}$ D) $\{1, -2\}$ E) $\{2, -2\}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı aşağıdakilerden hangisidir?

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ rank}(A) = 3$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

9.

- I. İkinci satırdan birinci satırın iki katını çıkarmak ($R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$). determinant değişmez $= |A| = 5$
- II. Üçüncü satıra birinci satırın beş katını eklemek ($R_3 \leftarrow R_3 + 5R_1$). " " $= |A| = 5$
- III. İkinci sütunun 2 katını almak ($C_2 \leftarrow 2C_2$). determinant 2 katına çıkar: $= 2 \cdot 5 = 10$
- IV. İkinci satır ile üçüncü satırın yerini değiştirmek ($R_2 \leftrightarrow R_3$). işaret değiştirir: $-10 \checkmark$

$A_{3 \times 3}$ matrisinin determinanı 5 tir. A matrisine yukarıdaki satır(sütun) işlemleri sırasıyla uygulanırsa elde edilen matrisin determinanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 40 B) 10 C) 5 D) -5 E) -10

10. A ve B $n \times n$ tipinde iki kare matris olsunlar.

- I. $AB = A$ ise B birim matristir. (olmayabilir)
- II. $AB = AC$ ise $B = C$ dir. (olmayabilir)
- III. $AB = 0$ ise A veya B sıfır matrisi olmalıdır. (olmayabilir)
- IV. $A(B+C) = AB+AC$ dir. \checkmark

Yukarıdaki ifadelerden hangileri kesin doğrudur?

A) I ve II B) I, II ve III C) II ve IV D) Sadece IV E) Hiçbiri