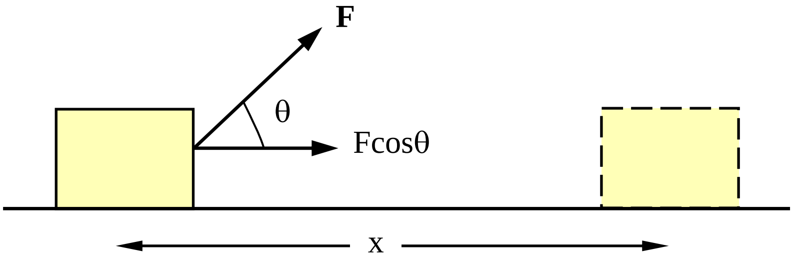
5. BÖLÜM

İŞ VE ENERJİ

5.1. SABİT KUVVETİN YAPTIĞI İŞ



Şekil 5.1. Bir cisim **x** kadar yerdeğiştirme yaparsa **F** kuvvetini yaptığı iş (Fcosθ)x'dir.

Şekil 5.1.'de görüldüğü gibi, sabit bir **F** kuvvetinin etkisi altında doğrusal bir yol boyunca hareket eden bir parçacığı göz önüne alalım. Cismin yerdeğiştirmesi **x**, **F**'nin **x** ile yaptığı açı θ'dır.

Sabit kuvvet tarafından yapılan iş, kuvvetin yerdeğiştirme doğrultusundaki bileşeni ile yerdeğiştirmenin büyüklüğünün çarpımına eşittir.

F'nin **x** doğrultusundaki bileşeni Fcosθ olduğundan, yapılan iş

$$W = (F\cos\theta)x \tag{5.1}$$

olarak verilir.

Bu tanıma göre **F** kuvveti cisim üzerinde şu şartlar altında iş yapar:

1) Cisim yerdeğiştirmelidir.

2) **F**’nin **x** doğrultusundaki bileşeni sıfırdan farklı olmalıdır.

İşi, **F** ile **x** vektörlerinin skaler çarpımı olarak ifade etmek daha uygundur:

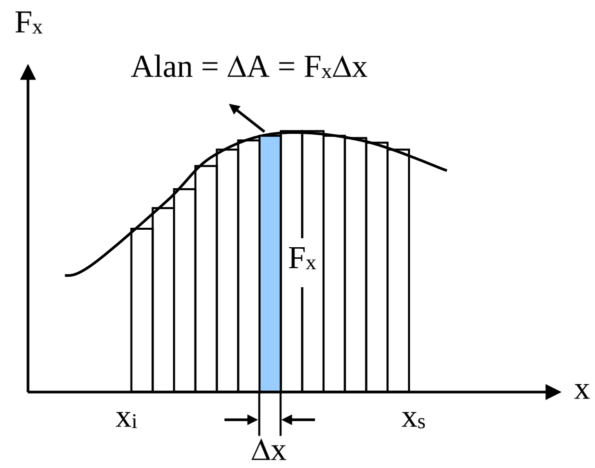
$$\mathbf{W} = \mathbf{F}.\mathbf{x} = Fx\cos\theta \qquad (5.2)$$

İşin işareti **F**’nin **x**’e göre yönüne bağlıdır. Uygulanan kuvvet, yerdeğiştirmeyle aynı yönde olduğu zaman kuvvetin yaptığı iş pozitif, zıt yönlü olduğu zaman ise iş negatiftir. Buna örnek, bir cisim pürüzlü bir yüzeyde kaydığında sürtünme kuvvetinin yaptığı iştir.

İş skaler bir niceliktir ve boyutu kuvvet çarpı uzunluktur $[M][L]^2[T]^{-2}$. Dolayısıyla işin SI sistemindeki birimi N.m olur. ***N.m***’nin diğer adı ***joule (J)***’dür. cgs birim siteminde ise iş birimi ***erg*** olarak tanımlanan ***dyn.cm***’dir.

$$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$$

5.2. DEĞİŞKEN BİR KUVVETİN YAPTIĞI İŞ: BİR BOYUTLU DURUM



Şekil 5.2. Küçük bir Δx yerdeğiştirmesi için F_x kuvvetinin yaptığı iş $F_x\Delta x$'dir.

Şekildeki gibi, değişken bir kuvvetin etkisi altında x ekseni boyunca $x = x_i$'den $x = x_s$'ye kadar yerdeğiştiren bir cisim küçük bir Δx yerdeğiştirmesi yaptığında, kuvvetin x bileşeni (F_x) bu aralıkta sabit kalır. O halde, bu küçük yerdeğiştirme için kuvvetin yaptığı iş

$$\Delta W = F_x \Delta x \qquad (5.3)$$

olur. Bu, şekildeki taralı dikdörtgenin alanıdır. F_x'in x ile değişen eğrisinin çok sayıda bu tip aralıklardan oluştuğunu varsayarak, x_i'den x_s'ye olan yerdeğiştirme için yapılan toplam iş, bu alanların toplamına eşit olur:

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x \qquad (5.4)$$

Yerdeğiştirmeleri sıfıra yaklaştırarak bu toplamın limitini aldığımızda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx \tag{5.5}$$

integrali elde edilir. Bu belirli integral, sayısal olarak x_i ile x_s arasındaki x'e karşı F_x eğrisi altındaki alana eşittir. Dolayısıyla, cismin x_i'den x_s'ye yerdeğiştirmesi halinde F_x'in yaptığı iş

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx \tag{5.6}$$

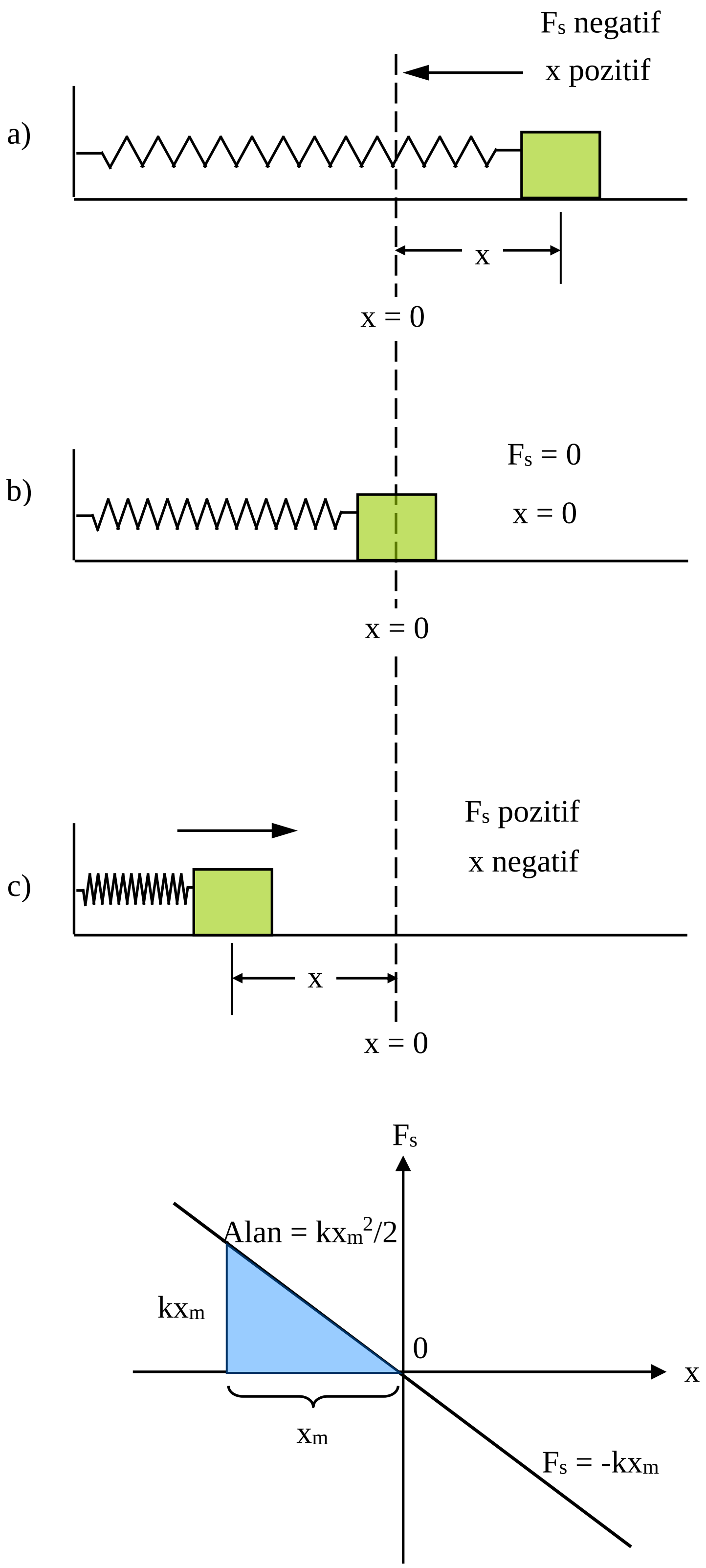
olarak ifade edilebilir. Cismin üzerine birden fazla kuvvet etki ederse yapılan net iş:

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_s} (\Sigma F_x) dx \tag{5.7}$$

olur.

5.2.1. Bir Yayın Yaptığı İş

Kuvvetin konumla değiştiği bir fiziksel sistem Şekil 5.3’teki gibi bir sistemdir.



Şekil 5.3. Kuvvetin konumla değiştiği fiziksel bir sistem olan yay ve kütle.

Pürüzsüz, yatay bir yüzey üzerindeki bir cisim, sarmal bir yaya bağlıdır. Yay, denge konumundan gerilir veya sıkıştırılırsa, cisim üzerine

$$F_s = - kx \tag{5.8}$$

ile verilen bir kuvvet uygular. Bu ifade ***Hooke kanunu*** olarak adlandırılır. Burada x, cismin x = 0 denge konumuna göre yerdeğiştirmesi, k ise yay sabiti olarak adlandırılan pozitif bir sabittir. Bu kanun sadece küçük yerdeğiştirmeler için geçerlidir. k'nın değeri yayın sertliğinin bir ölçüsüdür. Sert yayların k değerleri büyük, yumuşak yayların ise küçüktür. Eşitlik (5.8)'deki (-) işareti, yayın etkidiği kuvvetin daima yerdeğiştirme ile zıt yönlü olduğunu ifade eder. Yay kuvveti daima denge konumuna doğru etkidiği için geri çağırıcı kuvvet olarak adlandırılır.

Şekil 5.3c'de görüldüğü gibi bloğun x_m kadar sıkıştırıldığını ve serbest bırakıldığını varsayarak bloğun $x_i = -x_m$'den $x_s = 0$'a hareket ederken yay kuvvetinin yaptığı işi bulalım.

$$W_s = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = \int_{-x_m}^{0} (-kx)dx = \tfrac{1}{2} kx_m^2 \tag{5.9}$$

Yay kuvveti yerdeğiştirme ile aynı yönlü olduğu için yapılan iş pozitiftir.

Cisim, $x_i = 0$'dan $x_s = x_m$'ye giderken yay kuvvetinin yaptığı iş ise (Şekil 5.3a)

$$W_s = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = \int_{0}^{x_m} (-kx)dx = -\tfrac{1}{2} kx_m^2 \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla cisim x_i = -x_m'den x_s = x_m'ye giderken yay kuvvetinin yaptığı net iş sıfırdır.

Cisim x = x_i'den x = x_s'ye keyfi bir yerdeğiştirme yaparsa, yay kuvvetinin yaptığı iş

$$W_s = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = \int_{x_i}^{x_s} (-kx)dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_s^2 \qquad (5.11)$$

olarak verilir.

5.3. İŞ VE KİNETİK ENERJİ

Sabit bir $\mathbf{F}_x$ kuvvetinin, x doğrultusunda hareket eden m kütleli bir parçacığa etki ettiği bir durumda, Newton'un ikinci kanunu, $\mathbf{F}_x$ = m$\mathbf{a}_x$ geçerlidir. Parçacık x_i = 0 konumundan x_s = x konumuna yerdeğiştirirse, $\mathbf{F}_x$ kuvvetinin yaptığı iş

$$W = F_x x = (ma_x)x \qquad (5.12)$$

olur. Sabit ivmeyle hareket eden bir parçacık için

$$x = \frac{1}{2}(\upsilon_s+\upsilon_i)t \qquad\qquad a = (\upsilon_s-\upsilon_i)/t$$

eşitliklerini bu ifadede yerine yazarsak

$$W = m[(\upsilon_s - \upsilon_i)/t][½(\upsilon_s + \upsilon_i)t]$$

$$= \frac{1}{2} m[(\upsilon_s - \upsilon_i)(\upsilon_s + \upsilon_i)]$$

$$W = \frac{1}{2} m\upsilon_s^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 \qquad (5.13)$$

elde edilir.

Kütle ile hızın karesinin çarpımının yarısı, parçacığın kinetik enerjisi olarak tanımlanır.

O halde kütlesi m, sürati υ olan bir parçacığın kinetik enerjisi

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \qquad (5.14)$$

olarak tanımlanır. Kinetik enerji skaler bir nicelik olup, iş ile aynı birime sahiptir. O halde (5.13) eşitliğini

$$W = K_s - K_i = \Delta K \qquad (5.15)$$

olarak yazabiliriz. Yani,

Bir parçacık yerdeğiştirdiğinde, sabit **F** *bileşke kuvvetinin yaptığı iş, parçacığın kinetik enerjisindeki değişime eşittir.*

$W = \Delta K$ eşitliği ***iş-enerji teoremi*** olarak bilinir. Bu eşitlik kuvvet sabit olduğunda geçerlidir. Fakat kuvvetin değişken olduğu durum içinde elde edilebilir. Bir cisim üzerine etki eden bileşke kuvvet $\Sigma \mathbf{F}_x$ ise, $\Sigma \mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x$'dir. O halde yapılan iş

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_s} (\Sigma F_x)dx = \int_{x_i}^{x_s} ma_x dx \qquad (5.16)$$

olur. a ve υ, x'e bağlı olduğundan

$$a_x = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} \qquad (5.17)$$

yazılabilir. O halde

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_s} m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}dx = \int_{x_i}^{x_s} m\upsilon d\upsilon = \tfrac{1}{2}m\upsilon_s^2 - \tfrac{1}{2}m\upsilon_i^2 \qquad (5.18)$$

elde edilir. O halde en genel iş formülü

$$W = \int_{i}^{s} \mathbf{F}.d\mathbf{s} \qquad (5.19)$$

olarak ifade edilebilir.

Bu teoremden şu sonuçları çıkarabiliriz:

- Yapılan net iş pozitif olduğunda, parçacığın hızı artar ($K_s > K_i$)

- İş negatif olduğunda hız azalır ($K_s < K_i$)

Yani, bir parçacığın hızı ve kinetik enerjisi, bileşke dış kuvvet parçacık üzerinde sıfırdan farklı bir iş yaparsa değişir.

5.4. GÜÇ

Güç, enerji aktarma veya işin yapıldığı süreye oranı olarak tanımlanır. Bir cisme, bir dış kuvvet uygulandığında, Δt zaman aralığında bu kuvvetin yaptığı iş ΔW ise, bu süredeki ortalama güç, yapılan işin zaman aralığına oranı olarak tanımlanır:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (5.20)$$

İş enerji teoremine göre, cismin üzerinde yapılan bu iş, cismin enerjisini artırır. Bu yüzden güç, zaman içinde enerji aktarma hızıdır. Ani güç (P), Δt sıfıra yaklaşırken, ortalama gücün limit değeridir:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (5.21)$$

Bir cisme d**s** yerdeğiştirmesi yaptıran bir **F** kuvvetinin yaptığı iş $dW = \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ olarak tanımlanır. O halde ani güç

$$P = dW/dt = \mathbf{F}.(d\mathbf{s}/dt) = \mathbf{F}.\boldsymbol{\upsilon} \qquad (5.22)$$

olarak yazılabilir.

SI birim sisteminde güç birimi, ***Watt (W)*** olarak adlandırılan ***J/s***'dir.

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{kg.m^2/s^3}$$

$$1\ \mathrm{hp} = 746\ \mathrm{W}$$

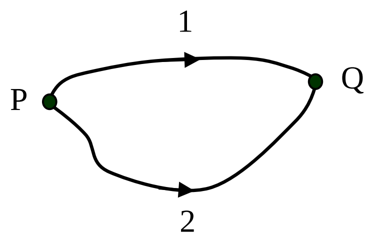
$$1\ \mathrm{kWh} = 3{,}6.10^6\ \mathrm{J}$$

1 kilowatt-saat (kWh), 1 saatte, sabit bir hızla 1 kW tüketilen veya dönüştürülen enerji miktarıdır.

5.5. KORUNUMLU VE KORUNUMSUZ KUVVETLER

5.5.1. Korunumlu Kuvvetler

İki nokta arasında hareket eden bir parçacık üzerine etki eden kuvvetin yaptığı iş, parçacığın bu noktalar arasında aldığı yoldan bağımsız ise kuvvet korunumludur. Yani, korunumlu bir kuvvetin yaptığı iş, yalnızca parçacığın ilk ve son konumlarına bağlıdır.



Şekil 5.4. Bir parçacık P'den Q'ya iki farklı yol boyunca hareket etmektedir. Parçacığın üzerine etkiyen korunumlu kuvvetin yaptığı iş, her iki yol boyunca aynıdır.

Şekilden de görüldüğü gibi,

$$W_{PQ}(1) = W_{PQ}(2) \tag{5.23}$$

ise kuvvet korunumludur. Korunumlu kuvvet ayrıca şu özelliğe sahiptir:

$$W_{PQ}(1) = - W_{QP}(2)$$

$$W_{PQ}(1) + W_{QP}(2) = 0 \tag{5.24}$$

Yani, bir parçacık üzerine etkiyen korunumlu kuvvetin yaptığı toplam iş, parçacık herhangi kapalı bir yol boyunca hareket edip ilk konumuna döndüğünde sıfırdır. Korunumlu kuvvetin bu özelliği (W=0), parçacığın harekete başladığı noktaya aynı kinetik enerji ile döneceğini ifade eder.

Korunumlu kuvvetlere örnek olarak kütle çekim kuvveti, elektrostatik kuvvet ve yaydaki geri-çağırıcı kuvvet verilebilir.

5.5.2. Korunumsuz Kuvvetler

İki nokta arasında hareket eden bir parçacık üzerinde kuvvetin yaptığı iş, gidilen yola bağlı ise kuvvet korunumsuzdur:

$$W_{PQ}(1) \neq W_{PQ}(2) \tag{5.25}$$

Bu şarta göre, bir kuvvet korunumsuz ise, herhangi bir kapalı yörünge boyunca hareket eden bir parçacık üzerinde bu kuvvetin yaptığı işin sıfır olması gerekmeyecektir. Yani korunumsuz bir kuvvet için

$$W_{PQ}(1) \neq - W_{QP}(2)$$

$$W_{PQ}(1) + W_{QP}(2) \neq 0 \tag{5.26}$$

elde ederiz.

Kinetik sürtünme kuvveti, korunumsuz kuvvete bir örnektir. Bir cisim, pürüzlü yatay bir yüzey üzerinde değişik yollar boyunca iki nokta arasında hareket ettirilirse sürtünme kuvvetinin yaptığı iş yola bağlı olur. İki nokta arasındaki herhangi belirli bir yol boyunca sürtünme kuvvetinin yaptığı negatif iş, sürtünme kuvveti ile yol uzunluğunun çarpımına eşit olacaktır. Farklı uzunluktaki yollar, farklı miktarda iş gerektirir.

5.6. POTANSİYEL ENERJİ

Potansiyel enerji, iş yapabilen veya kinetik enerjiye dönüştürebilen sistemin depoladığı enerji olarak düşünülebilir. Bu enerji, birbirine kuvvet uygulayan nesnelerin oluşturduğu bir sitemin düzenlenişi ile ilgilidir.

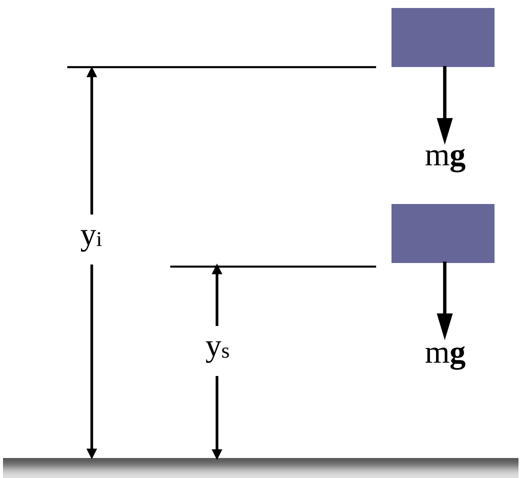
5.6.1. Kütle-Çekim Potansiyel Enerjisi

Bir cisim, yerçekiminin bulunduğu bir bölgede harekette ise, çekim kuvveti bu cisim üzerine iş yapabilir. Serbest düşen bir cisim durumunda, çekim kuvvetinin yaptığı iş, cismin düşey yerdeğiştirmesinin bir fonksiyonudur.

Bir cisim üzerine etkiyen mg kütle çekim kuvvetinin büyüklüğüyle cismin y yüksekliğinin çarpımına kütle çekimi potansiyel enerjisi denir ve U_g ile gösterilir.

$$U_g = mgy \tag{5.27}$$

Bu potansiyel enerji, kütle çekim kuvveti tarafından sistemin kinetik enerjisine dönüştürülür.



Şekil 5.5. Tuğla bir y_i yüksekliğinden bir y_s yüksekliğine düşerken kütle çekim kuvvetinin tuğla üzerinde yaptığı iş $mgy_i - mgy_s$ olur.

Şekil 5.5'teki gibi başlangıçta y_i yüksekliğinde bulunan m kütleli bir tuğlayı ele alalım. Tuğla aşağı doğru d kadar yer değiştirmeye uğradığında kütle çekim kuvvetinin yaptığı W_g işi

$$W_g = (m\mathbf{g}).\mathbf{d} = (-\,mg)\mathbf{j}.(y_s - y_i)\mathbf{j}$$

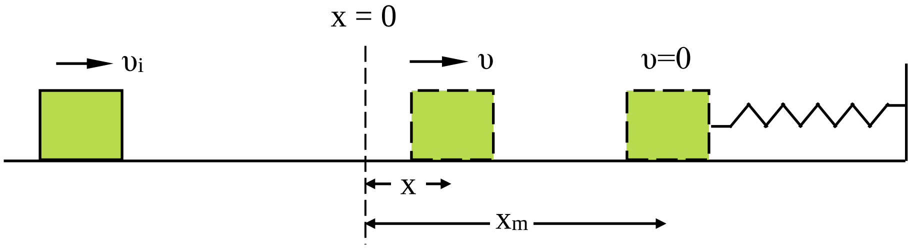
$$W_g = mgy_i - mgy_s \qquad (5.28)$$

olur. mgy niceliği sistemin U_g kütle çekim potansiyel enerjisi olduğuna göre

$$W_g = U_i - U_s = -\,\Delta U_g \qquad (5.29)$$

elde edilir. Yani çekim kuvvetinin yaptığı iş, potansiyel enerjinin ilk değeriyle son değerinin farkına eşittir.

5.6.2. Esneklik Potansiyel Enerjisi



Şekil 5.6. Sürtünmesiz yatay bir yüzey üzerinde kayan bir bloğun hafif bir yayla çarpışması.

m kütleli bir blok, sabit υ_i ilk hızıyla sürtünmesiz yatay bir yüzey üzerinde kaymakta ve hafif, sarmal bir yaya çarpmaktadır. Yay sıkışırken, blok üzerine sola doğru bir kuvvet uygular ($F_s = - kx$) ve sonunda blok durur. Blok+yay sisteminin ilk enerjisi, bloğun ilk kinetik enerjisidir. Blok, yayla çarpıştıktan sonra durduğunda kinetik enerjisi sıfır olur. Yay kuvveti, korunumlu olduğundan ve sistem üzerinde iş yapabilecek başka dış kuvvet bulunmadığından, sistemin toplam mekanik enerjisi sabit kalmalıdır. O halde, bloğun kinetik enerjisinden, yayda depo edilen potansiyel enerjiye bir enerji aktarımı vardır. Sonunda blok zıt yönde hareket eder ve ilk kinetik enerjisini yeniden kazanır.

$x = x_i$'den $x = x_s$'ye hareket eden yayın blok üzerinde yaptığı işi

$$W_s = ½kx_i^2 - ½kx_s^2$$

olarak yazabiliriz. Buradaki $½kx^2$ niceliği, yayda depo edilen esneklik potansiyel enerjisi olarak tanımlanır ve U_s sembolü ile gösterilir.

$$U = ½kx^2 \qquad (5.30)$$

5.7. KORUNUMLU KUVVETLER VE POTANSİYEL ENERJİ

Korunumlu bir kuvvetin yaptığı iş, yalnızca parçacığın ilk ve son koordinatlarının fonksiyonudur. Bu nedenle, bir U potansiyel enerji fonksiyonu tanımlayabiliriz. Buna göre yapılan iş, potansiyel enerjideki azalmaya eşit olmalıdır. Yani, parçacığı x-ekseni boyunca hareket ettiren korunumlu F kuvvetinin yaptığı iş

$$W_{ko} = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = -\Delta U = U_i - U_s \qquad (5.31)$$

olur. Yani, korunumlu kuvvetin yaptığı iş, potansiyel enerjideki değişimin negatife eşittir.

$$\Delta U = U_s - U_i = -\int_{x_i}^{x_s} F_x dx \qquad (5.32)$$

Parçacık bir konumdan diğerine hareket ederken, korunumsuz bir kuvvetin yaptığı iş yola bağlıdır. Hatta bu iş, parçacığın hızı ve öteki niceliklere bağlıdır. Dolayısıyla yapılan iş, parçacığın sadece ilk ve son koordinatının bir fonksiyonu değildir. Buradan, korunumsuz bir kuvvetle ilgili potansiyel enerji fonksiyonunun bulunmadığı sonucunu çıkarırız.

5.8. MEKANİK ENERJİNİN KORUNUMU

Bir parçacığa x ekseni boyunca sadece bir $\mathbf{F}_x$ korunumlu kuvveti etki ediyorsa iş-enerji teoremine göre kuvvetin yaptığı iş, parçacığın kinetik enerjisindeki değişime eşittir:

$$W_{ko} = \Delta K$$

Kuvvet korunumlu olduğu için

$$W_{ko} = - \Delta U$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece

$$\Delta K = - \Delta U$$

veya

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0 \qquad (5.33)$$

olur. Bu, mekanik enerjinin korunumu kanunudur ve

$$Ki + Ui = Ks + Us \qquad (5.34)$$

biçiminde de yazılabilir.

O halde, sistemin toplam mekanik enerjisi E'yi kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamı olarak tanımlarsak, mekanik enerjinin korunumu

$$E_i = E_s \qquad (5.35)$$

olarak ifade edilebilir.

Mekanik enerjinin korunumu kanunu, iş yapan kuvvet korunumlu bir kuvvet ise, bir sistemin toplam mekanik enerjisinin sabit kalacağını söyler. Bu, korunumlu bir sistemin kinetik enerjisi bir miktar artarsa (veya azalırsa), potansiyel enerjinin aynı miktarda azalması (veya artması) gerektiğini ifade eder.

5.9. KORUNUMSUZ KUVVETLER VE İŞ-ENERJİ TEOREMİ

Bir parçacık üzerinde tüm korunumsuz kuvvetlerin yaptığı iş W_{ksuz}, tüm korunumlu kuvvetlerin yaptığı iş W_{ko} ise, iş-enerji teoremini

$$W_{ksuz} + W_{ko} = \Delta K \qquad (5.36)$$

olarak yazabiliriz. $W_{ko} = -\Delta U$ olduğundan

$$W_{ksuz} = \Delta K + \Delta U = (K_s - K_i) + (U_s - U_i) \qquad (5.37)$$

olur. Yani, tüm korunumsuz kuvvetlerin yaptığı iş, kinetik enerjideki değişim ile potansiyel enerjideki değişimin toplamına eşittir.

Toplam mekanik enerji E = K + U ile verildiği için,

$$W_{ksuz} = (K_s+U_s) - (K_i+U_i) = E_s - E_i \qquad (5.38)$$

olarak ifade edilir. Yani, tüm korunumsuz kuvvetlerin yaptığı iş, sistemin toplam mekanik enerji değişimine eşittir.

5.10. KORUNUMLU KUVVETLERLE POTANSİYEL ENERJİ ARASINDAKİ BAĞINTI

$$W_{ko} = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = -\Delta U = U_i - U_s$$

eşitliğine göre korunumlu bir kuvvetin etkisi altında hareket eden bir parçacığın potansiyel enerjisindeki değişme, kuvvetin yaptığı işin negatifine eşittir. Sistem, sonsuz küçük bir dx yerdeğiştirmesine uğrarsa, potansiyel enerjisindeki sonsuz küçük dU değişmesini

$$dU = - F_x dx \qquad (5.39)$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla korunumlu kuvvet potansiyel enerji fonksiyonuna

$$F_x = - dU/dx \qquad (5.40)$$

eşitliğiyle bağlıdır. Yani, korunumlu kuvvet potansiyel enerjinin x'e göre türevinin negatifine eşittir.

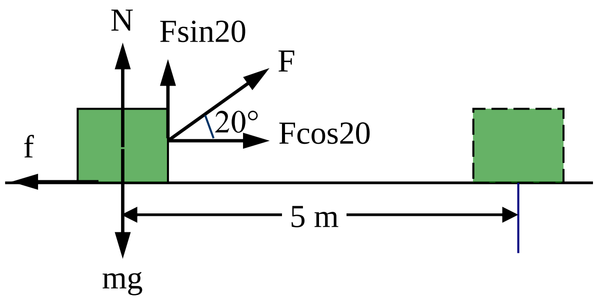
5.5. PROBLEMLER

Problem 1: Sabit Bir Kuvvetin Yaptığı İş

15 kg'lık bir blok yatay, pürüzlü bir yüzeyde yatayın üzerinde 20°'lik bir açıda etki eden 70 N'luk sabit bir kuvvetle çekilmektedir. Blok 5 m yer değiştirmekte olup, kinetik sürtünme katsayısı 0,3'tür.

a) 70 N'luk kuvvetin, sürtünme kuvvetinin, dik kuvvetin ve yerçekimi kuvvetinin yaptığı işi bulunuz.

b) Blok üzerine yapılan net iş nedir?



Çözüm:

a) $W_F = \mathbf{F}.\mathbf{x} = Fx\cos\theta$

$= 70.5.\cos 20 \quad \Rightarrow \quad W_F = 328{,}9 \text{ J}$

$W_f = \mathbf{f}.\mathbf{x} = fx\cos 180$ $\qquad$ $N + F\sin 20 = mg$

$= -fx = -\mu Nx$ $\qquad$ $N = mg - F\sin 20$

$= -\mu(mg - F\sin 20)x$

$= -0{,}3(15.9{,}8 - 70.\sin 20).5 \quad \Rightarrow \quad W_f = -184{,}6 \text{ J}$

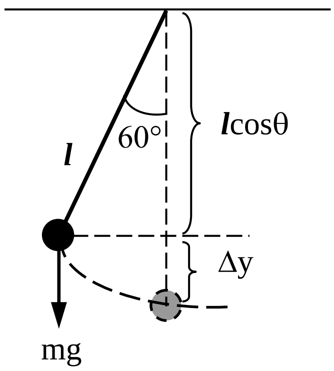
$W_N = \mathbf{N}.\mathbf{x} = Nx\cos 90 = 0$

$W_{mg} = \mathbf{mg}.\mathbf{x} = mgx\cos 90 = 0$

b) $W_{net} = W_F + W_f + W_N + W_{mg} = 328{,}9 - 184{,}6 = 144{,}3 \text{ J}$

Problem 2: Sabit Bir kuvvetin Yaptığı İş

Kütlesi 80 kg olan bir asker, bir ucu bir ağaç dalına bağlı 12 m'lik bir halatın diğer ucundan tutuyor. Asker, salınarak sonunda halatın düşeyle 60° açı yaptığı bir çıkıntıya ulaşabilecek şekilde halata hareket verebiliyor. Böyle bir harekette yerçekimi kuvvetine karşı yapılan iş ne kadardır?



Çözüm:

W = mg(Δy)

= mg(*l* - *l*cosθ)

= 80.9,8.12.(1- cos60)

= 9408 (1 - 0,5)

W = 4704 J

Problem 3: Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

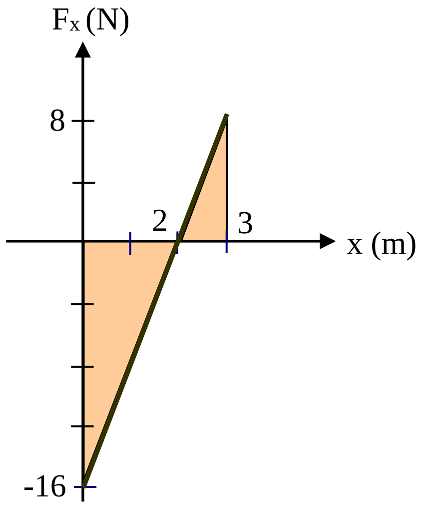
Bir parçacık üzerine etkiyen kuvvet $F_x = (8x - 16)$ N ile verilmektedir. Burada x metredir.

a) x = 0 ile x = 3 m arasında kuvvetin x'e göre grafiğini çiziniz.

b) Grafiğe göre, parçacık x = 0'dan x = 3 m'ye yerdeğiştirirse, bu kuvvetin yaptığı net iş ne olur?

Çözüm:

a)



$F_x = 8x-16$ N

x = 0 m $\quad$ $F_x = -16$ N

x = 3 m $\quad$ $F_x = 8$ N

$F_x = 0$ N $\quad$ x = 2 m

b) $W = [(-16).2]/2 + (8.1)/2 = -16 + 4$ $\qquad$ $W = -12$ J

Problem 4: Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

Bir cisme uygulanan kuvvet $F_x = 3x^3 - 5$ eşitliğine göre konumla değişmektedir. Cisim x = 4 m'den x = 7 m'ye hareket ederse bu kuvvetin cisim üzerinde yaptığı iş ne kadardır?

Çözüm:

$$W = \int_i^s F.dx = \int_4^7 (3x^3 - 5)dx = \tfrac{3}{4}x^4 - 5x\Big|_4^7$$

$$= [(3/4)7^4 - 5.7] - [(3/4)4^4 - 5.4]$$

$$= 1765{,}75 - 172$$

$$W = 1593{,}75 \text{ J} = 1{,}59 \text{ kJ}$$

Problem 5: Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

Hooke kanununa uyan bir yay, doğal uzunluğundan 10 cm gerilince 4 J'luk iş yapılıyorsa, 10 cm daha germek için fazladan ne kadar iş yapılmalıdır?

Çözüm:

$W = ½(kx^2)$

$4 = ½[k(0{,}1^2)]$

$8/0{,}01 = k$

$k = 800$ N/m

$\Delta W = ½(kx^2) - 4$

$\Delta W = ½[800(0{,}1)^2) - 4$

$\Delta W = 16 - 4$

$\Delta W = 12$ J

Problem 6: İş ve Kinetik Enerji

Başlangıçta durgun olan 40 kg'lık bir kutu, uygulanan sabit 130 N'luk yatay bir kuvvetle pürüzlü, yatay bir döşeme boyunca 5 m uzaklığa itilmektedir. Kutu ile döşeme arasındaki sürtünme katsayısı 0,3 ise;

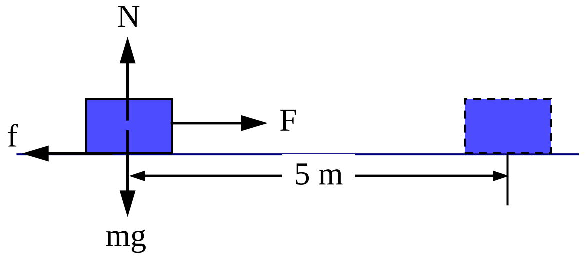
a) uygulanan kuvvetin yaptığı işi,

b) sürtünme kuvvetinin yaptığı işi,

c) kutunun kinetik enerjisindeki değişimi,

d) kutunun son hızını bulunuz.

Çözüm:



a) $W_F = F.x = 130.5 = 650$ J

b) $W_f = f.x = -\mu mgx = -0,3.40.9,8.5 = -588$ J

c) $\Delta K = W = W_F + W_f = 650 – 588 = 62$ J

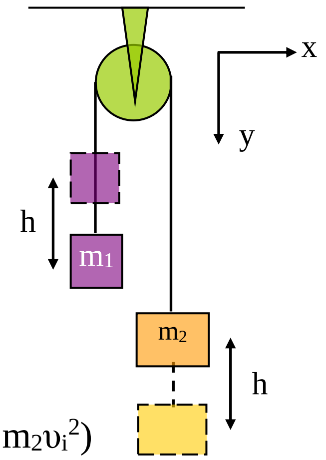
d) $W = \Delta K = ½m\upsilon_s^2 - ½m\upsilon_i^2$

$62 = ½.40.\upsilon_s^2$

$124/40 = \upsilon_s^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_s = 1,76$ m/s

Problem 7: İş ve Kinetik Enerji

Bir Atwood makinesi, hafif sabit bir makara ile üzerinden geçirilen esnemeyen hafif bir sicimden oluşur. Sicimin iki ucuna 0,2 kg ve 0,3 kg'lık kütleler asılmıştır. Kütleler iki tarafta durgun tutulur ve daha sonra serbest bırakılır. Sürtünme ihmal edildiğinde, her iki kütle 0,4 m hareket ederse her bir kütlenin hızı nedir?



Çözüm:

$W = \Delta K$

$W_1 + W_2 = \Delta K_1 + \Delta K_2$

$m_2gh - m_1gh = (\frac{1}{2}m_1\upsilon_s^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_i^2) + (\frac{1}{2}m_2\upsilon_s^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_i^2)$

$m_2gh - m_1gh = ½m_1\upsilon_s^2 + ½m_2\upsilon_s^2$

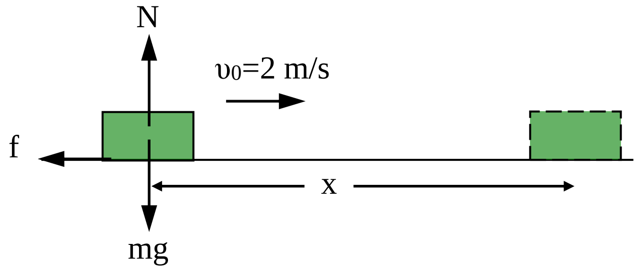
$gh(m_2 - m_1) = ½(m_1 + m_2)\upsilon_s^2$

$\upsilon_s = [2gh(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)]^{1/2}$

$\upsilon_s = [2.9,8.0,4(0,3 - 0,2)/(0,3 + 0,2)]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_s = 1,25$ m/s

Problem 8: İş ve Kinetik Enerji

Donmuş bir göl üzerindeki bir kızağa itilerek 2 m/s'lik bir ilk hız veriliyor. Kızak ile buz arasındaki kinetik sürtünme katsayısı 0,1'dir. Kızak duruncaya kadar gideceği uzaklığı bulmak için iş-enerji teoremini kullanınız.



Çözüm:

$W = \Delta K$

$f x \cos 180 = K_s - K_i$

$- \mu N x = ½ m_1 \upsilon_s^2 - ½ m_1 \upsilon_i^2$

$- \mu m g x = - ½ m_1 \upsilon_0^2$

$x = \upsilon_0^2 / 2\mu g$

$x = 2^2 / 2.0,1.9,8$

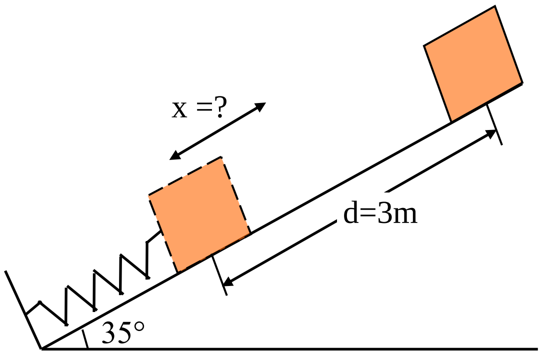
$x = 4/1,96$

$x = 2,04$ m

Problem 9: İş ve Kinetik Enerji

12 kg kütleli bir blok 35° eğimli sürtünmesiz bir eğik düzlemden aşağı doğru ilk hızsız olarak kaymakta ve k = 3.10^4 N/m'lik bir yayla durdurulmaktadır. Blok bırakıldığı noktadan, yayın karşı koymasıyla durduğu noktaya kadar toplam 3 m uzaklığa kaymaktadır. Blok durduğunda yay ne kadar sıkışmış olur?

Çözüm:



$W = \Delta K$

$W_K + W_Y = 0$

$mg\sin 35.d - \frac{1}{2}kx^2 = 0$

$mg\sin 35.d = \frac{1}{2}kx^2$

$x = (2mg\sin 35.d/k)^{1/2}$

$x = (2.12.9,8.\sin 35.3/3.10^4)^{1/2}$

$x = 0,116$ m

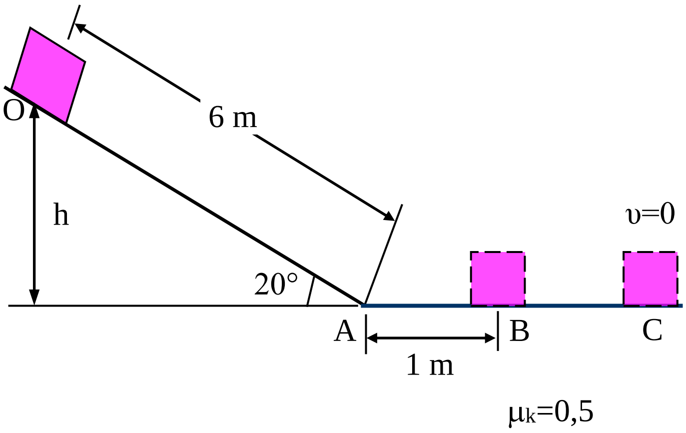
Problem 10: İş ve Kinetik Enerji

0,6 kg kütleli bir blok yatayla 20° açı yapan sürtünmesiz bir eğik düzlemden aşağı doğru 6 m kaymaktadır. Blok, daha sonra $\mu_k = 0,5$ olan pürüzlü yatay bir yüzeyde hareket etmektedir.

a) Eğik düzlemin sonunda bloğun hızı nedir?

b) Pürüzlü yüzeyde 1 m gittikten sonra bloğun hızı nedir?

c) Blok, duruncaya kadar bu yatay düzlemde ne kadar yol alır?



Çözüm:

a) $W = \Delta K$

$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$

$mgd\sin 20 = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$

$\upsilon_A^2 = 2gd\sin 20$

$\upsilon_A^2 = 2.9,8.6.0,342 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = 6,34$ m/s

b) $- fx = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$

$- \mu mgx = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$

$- 2\mu gx = \upsilon_B^2 - \upsilon_A^2$

$\upsilon_B^2 = 40,22 - 2.0,5.9,8.1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_B = 5,52$ m/s

c) $-fx = \frac{1}{2}m\upsilon_C^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$

$\mu mgd = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$

$d = \upsilon_A^2 / 2\mu g$

$d = 40,22 / 2.0,5.9,8 \quad \Rightarrow \quad d = 4,1$ m

Problem 11: Güç

1500 kg'lık bir araba düzgün olarak durgun halden 3 s'de 10 m/s'lik bir hıza ivmelenmektedir.

a) Bu süre içinde yapılan işi bulunuz.

b) İlk 3 s'de motorun verdiği ortalama gücü bulunuz.

c) t = 2. s'de motorun verdiği ani gücü bulunuz.

Çözüm:

a) $W = \Delta K$

$W = ½m\upsilon_s^2 - ½m\upsilon_i^2$

$W = ½m\upsilon_s^2$

$W = ½.1500.10^2 \quad \Rightarrow \quad W = 75\ kJ$

b) $P = \Delta W/\Delta t = 7{,}5.10^4/3 \quad \Rightarrow \quad P = 25\ kW$

c) $P = F.\upsilon = ma\upsilon = ma^2t \qquad a = \upsilon/t = 10/3 = 3{,}33\ m/s^2$

$P = 1500.(3{,}33)^2.2$

$P = 100000/3 \quad \Rightarrow \quad P = 33{,}3\ kW$

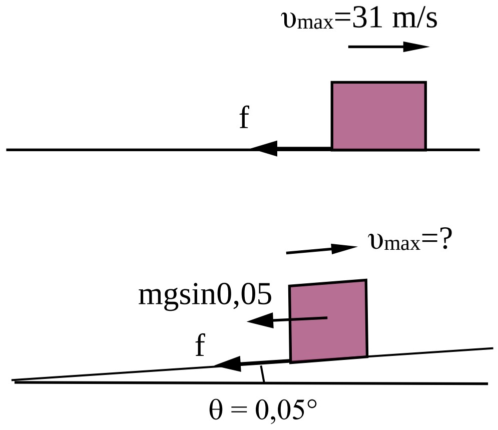
Problem 12: Güç

130 kW güçle çalışan 2500 N ağırlığındaki bir araba düz bir yolda 31 m/s'lik bir maksimum hıza ulaşmaktadır. Direnç kuvvetlerinin (sürtünme ve hava direnci) sabit kaldığı varsayıldığında

a) 20'de 1 eğimli (θ=1/20) eğik düzlemde arabanın maksimum hızı nedir?

b) Araba, 10 m/s ile seyrederse, 1/10 eğiminde çıkış gücü nedir?

Çözüm:



a) $P = f\upsilon$

$f = 130.10^3 / 31$

$f = 4,19.10^3$ N

$\Sigma F = f + mg\sin\theta$

$P = (f + mg\sin\theta)\upsilon$

$\upsilon = P / (f + mg\sin\theta)$ Küçük açıların sinüsü kendine eşittir.

$\upsilon = 130.10^3 / (4,19.10^3 + 2500.0,05)$

$\upsilon = 30,1$ m/s

b) $P = (f + mg\sin\theta)\upsilon$

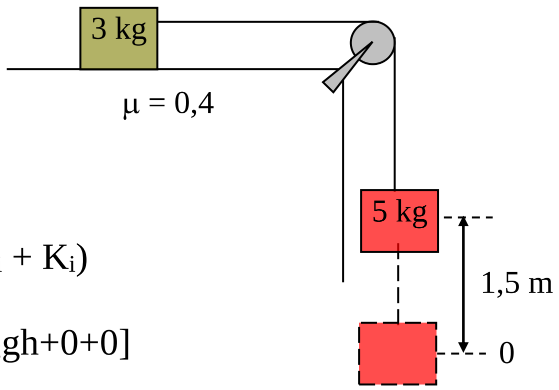
$P = (4,19.10^3 + 2500.0,1).10$

$P = 44400$ W

$P = 44,4$ kW

Problem 13: Korunumsuz Kuvvetler ve İş-Enerji Teoremi

Şekildeki 3 kg'lık cisimle yüzey arasındaki sürtünme katsayısı 0,4'tür. Kütleler durgun halden harekete başlar. 5 kg'lık kütle 1,5 m'lik bir düşey uzaklığa indiğinde sürati nedir?



Çözüm:

$W_{ksuz} = E_s - E_i = (U_s + K_s) - (U_i + K_i)$

$- fh = [0+\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon^2] - [m_2gh+0+0]$

$- \mu m_1gh = \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 - m_2gh$

$- 17,64 = - 73,5 + 2,5\upsilon^2 + 1,5\upsilon^2$

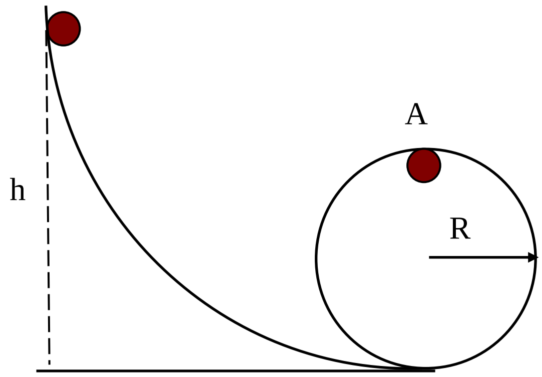
$56,01 = 4\upsilon^2$

$\upsilon^2 = 14$

$\upsilon = 3,74$ m/s

Problem 14: Mekanik Enerjinin Korunumu

Bir boncuk şekildeki yörüngede sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Boncuk, h = 3,5R yüksekliğinden bırakılırsa, A'daki sürati ne olur? Kütlesi 5 g ise üzerine etkiyen dik kuvvetin büyüklüğü nedir?



Çözüm:

$E_i = E_s$

$K_i + U_i = K_s + U_s$

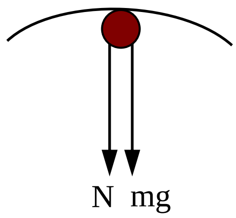
$0 + mgh = ½ m\upsilon_s^2 + mg(2R)$

$3,5Rg = ½\upsilon_s^2 + 2Rg$

$3Rg = \upsilon_s^2$

$\upsilon_s = (3Rg)^{1/2}$

$N + mg = m\upsilon^2/R$



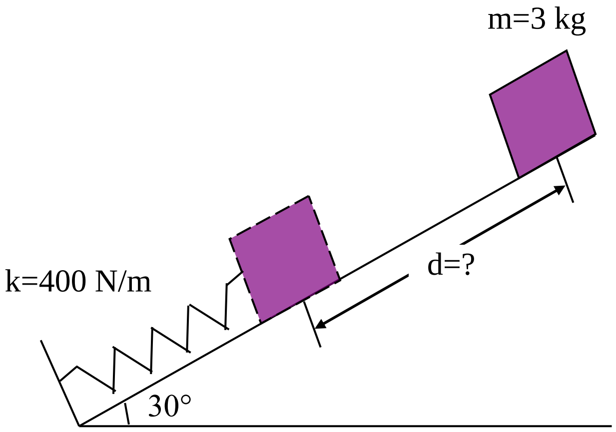
$N = 5.10^{-3}(3R.9,8/R - 9,8)$

$N = 147.10^{-3} - 49.10^{-3}$

$N = 98.10^{-3}$ N

Problem 15: Bir Yayda Depolanan Potansiyel Enerji

3 kg'lık bir kütle, 30°'lik bir eğik düzlemde durgun halden harekete başlar ve bir d uzaklığı kadar kayarak şekildeki gibi kütlesi ihmal edilebilir gerilememiş bir yaya değer. Kütle 0,2 m kadar daha kayar ve kuvvet sabiti 400 N/m olan yayı sıkıştırarak bir anlık durur. Kütle ile yay arasındaki ilk d uzaklığını bulunuz.



Çözüm:

$E_s = E_i$

$K_s + U_s = K_i + U_i$

$0 + mgsin30(d+0,2) - ½kx^2 = 0 + 0$

$mgsin30(d+0,2) = ½kx^2$

$3.9,8.0,5.(d+0,2) = ½.400.(0,2)^2$

$14,7d + 2,94 = 8$

$14,7d = 5,06$

$d = 0,344$ m

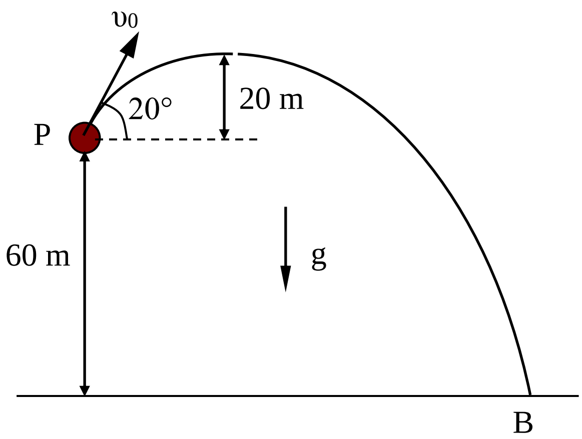
Problem 16: Mekanik Enerjinin Korunumu

Şekildeki gibi 0,5 kg kütleli bir parçacık yatay bileşeni 30 m/s olan υ_0 ilk hızıyla P'den atılır. Parçacık P'nin 20 m üzerinde bir maksimum yüksekliğe çıkar. Enerjinin korunumunu kullanarak

a) υ_0'ın düşey bileşenini,

b) parçacığın P'den B'ye hareketi esnasında, üzerine etki eden yerçekimi kuvvetinin yaptığı işi,

c) parçacık B'ye ulaştığında hız vektörünün yatay ve düşey bileşenlerini bulunuz.



Çözüm:

a) $E_i = E_s$

$K_i + U_i = K_s + U_s$

$\frac{1}{2}m\upsilon_{0y}^2 - mgh = 0$

$\upsilon_{0y}^2 = 2gh$

$\upsilon_{0y} = (2.9,8.20)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{0y} = 19,8$ m/s

b) $W_g = \Delta K_{PB} = mgh$

$W_g = 0,5.9,8.60 \quad \Rightarrow \quad W_g = 294$ J

c) $\upsilon_{0x} = \upsilon_{sx} = 30$ m/s

$\Delta K_{PB} = \frac{1}{2}m\upsilon_{sy}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{0y}^2 = 294$

$\upsilon_{sy}^2 - \upsilon_{0y}^2 = 588/0,5$

$\upsilon_{sy}^2 = 1176 + 392 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{sy} = 39,6$ m/s

$\upsilon = 30\mathbf{i} - 39,6\mathbf{j}$ m/s

Problem 17: Korunumlu Kuvvetlerle Potansiyel Enerji Arasındaki İlişki

İki boyutlu bir kuvvetin potansiyel enerji fonksiyonu $U = 3x^3y - 7x$ biçimindedir. (x, y) noktasına etkiyen kuvveti bulunuz.

Çözüm:

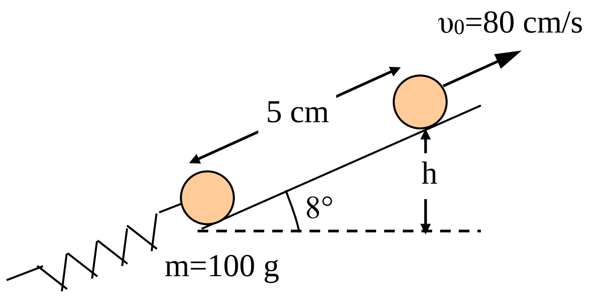
$F_x = -\partial u/\partial x = -9x^2y + 7$

$F_y = -\partial u/\partial y = -3x^3$

$\mathbf{F} = (-9x^2y + 7)\mathbf{i} + (-3x^3)\mathbf{j}$

Problem 18: Mekanik Enerjinin Korunumu

Bir yaylı atış makinesinin yayı çekilerek 100 g'lık bir top fırlatılıyor. Oyun tahtası yatayın üzerinde 8° eğimlidir. Yay, denge konumundan 5 cm çekilerek sıkıştırılıyor ve sonra serbest bırakıldığında topa 80 cm/s'lik bir sürat veriyor. Yayın kuvvet sabitini bulunuz. Fırlatıcının kütlesini ve sürtünme etkisini ihmal ediniz.



Çözüm:

$E_i = E_s$

$K_i + U_i = K_s + U_s$

$\frac{1}{2}kx^2 = mgh + \frac{1}{2}m\upsilon^2$

$\frac{1}{2}.k.(0{,}05)^2 = 0{,}1.9{,}8.0{,}05\sin 8 + \frac{1}{2}.0{,}1.(0{,}8)^2$

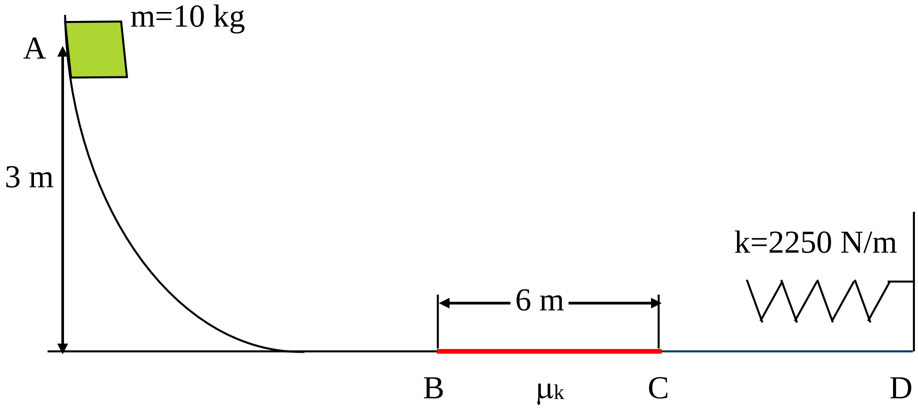
$1{,}25.10^{-3}k = 6{,}82.10^{-3} + 32.10^{-3}$

$k = 38{,}82 / 1{,}25 \qquad \Rightarrow \qquad k = 31{,}1$ N/m

Problem 19: Bir Yayda Depolanan Potansiyel Enerji

10 kg'lık bir blok, şekildeki gibi bir ABCD rayı üzerindeki A noktasından bırakılır. Ray 6 m uzunluğundaki BC kısmı dışında sürtünmesizdir. Blok, raydan aşağı doğru kayarak k = 2250 N/m olan bir yaya çarpar ve yayı denge konumuna göre 0,3 m sıkıştırarak bir an duruyor. Rayın BC kısmı ile blok arasındaki kinetik sürtünme katsayısı nedir?

Çözüm:



$W_{ksuz} = E_s - E_i$

$- f.d_{BC} = (0 + ½kx^2) – (mgh + 0)$

$- \mu mgd = ½kx^2 – mgh$

$- \mu.10.9,8.6 = ½.2250.(0,3)^2 – 10.9,8.3$

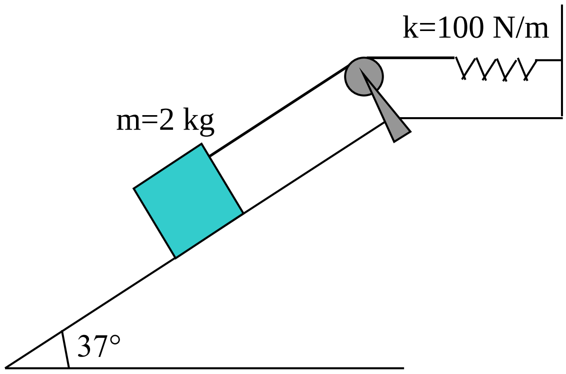
$- 588\mu = 101,25 – 294$

$588\mu = 192,75$

$\mu = 0,327$

Problem 20: Korunumsuz Kuvvetler ve İş-Enerji Teoremi

Sürtünmeli bir eğik düzlem üzerinde bulunan 2 kg'lık bir blok, kütlesi ihmal edilebilen 100 N/m'lik bir yaya bağlanmıştır. Yay gerilmemiş durumda iken, blok ilk hızsız olarak bırakılır. Makara sürtünmesizdir. Blok duruncaya kadar eğik düzlemde aşağı doğru 20 cm hareket eder. Blok ile düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısını bulunuz.



Çözüm:

$W_{ksuz} = E_s - E_i$

$W_{ksuz} = (K_s + U_s) – (K_i + U_i)$

$- f.d = (0 - mgx\sin 37 + ½kx^2) – (0 + 0)$

$- \mu mgx\cos 37 = ½kx^2 – mgx\sin 37$

$- \mu mg\cos 37 = ½kx – mg\sin 37$

$- \mu.2.9,8.0,8 = ½.100.0,2 – 2.9,8.0,6$

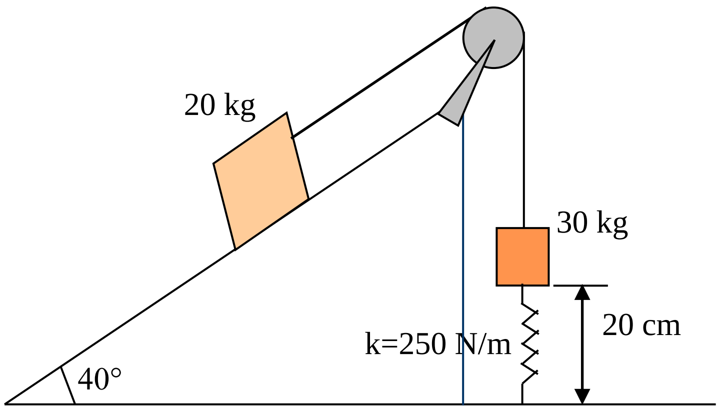
$- 15,68\mu = 10 – 11,76$

$15,68\mu = 1,76$

$\mu = 0,113$

Problem 21: Mekanik Enerjinin Korunumu

20 kg'lık bir blok, sürtünmesiz bir makaradan geçen bir iple 30 kg'lık bir bloğa bağlanmaktadır. 30 kg'lık blok şekildeki gibi 250 N/m kuvvet sabitli kütlesi ihmal edilebilir bir yaya bağlıdır. Sistem, şekilde gösterildiği gibi olduğunda yay gergin değildir. Eğik düzlem sürtünmesizdir. 20 kg'lık blok eğik düzlemden aşağı doğru 20 cm çekilmekte, bu arada 30 kg'lık blok yerden 40 cm yukarıdadır ve durgun halden serbest bırakılmaktadır. 30 kg'lık blok yerden 20 cm yukarıdayken, yani yay gergin değilken, her bir bloğun süratini bulunuz.



Çözüm:

$K_i + U_i = K_s + U_s$

$0 + 0 + mgx + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + mgx\sin 40$

$30.9{,}8.0{,}2 + \frac{1}{2}.250.(0{,}2)^2 = \frac{1}{2}.30.\upsilon^2 + \frac{1}{2}.20.\upsilon^2 + 20.9{,}8.0{,}2.\sin 40$

$58{,}8 + 5 = 25\upsilon^2 + 25{,}2$

$38{,}1 = 25\upsilon^2$

$\upsilon = 1{,}24$ m/s