Vizede Yok!

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

* m tane denklem ve n tane bilinmeyenden oluşan Lineer denklem sistemi;

$$\begin{aligned} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n}.x_n &= b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2n}.x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + \cdots + a_{mn}.x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

biçiminde ifade edilir.

(1) denklemini sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sıralı n-lilerin kümesi sistemin **çözüm kümesi** denir ve **Ç.K** ile gösterilir.

* $Ç.K \neq \emptyset$ ise (1) denklem sistemine **tutarlı denklem sistemi** denir.
* $Ç.K = \emptyset$ ise (1) denklem sistemine **tutarsız denklem sistemi** denir.

\# Tanım → m tane denklem ve n tane bilinmeyenden oluşan Lineer denklem sistemi;

$$\begin{aligned} a'_{11}.x_1 + a'_{12}.x_2 + \cdots + a'_{1n}.x_n &= b'_1 \\ a'_{21}.x_1 + a'_{22}.x_2 + \cdots + a'_{2n}.x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{m1}.x_1 + a'_{m2}.x_2 + \cdots + a'_{mn}.x_n &= b'_m \end{aligned} \qquad (2)$$

(1) denklem sistemi ve (2) denklem sisteminin çözüm kümeleri aynı ise (1) ve (2) denklem sistemlerine **"Denk sistemler"** denir.

!# Bir denklem sisteminde, aşağıdaki işlemlerin yapılması, denklem sisteminin çözüm kümesini değiştirmez:

I) Herhangi 2 denklemin yerini değiştirmek (like matrislerdeki)

II) Herhangi bir denklemin 0'dan farklı bir katını almak.

III) Herhangi bir denklemin bir katını başka bir denkleme eklemek

* Yapılacak iş bunları kullanarak bir denklem sistemlerini daha rahat çözebilmek için kolaylaştırmak.

·denklemlerin yerini değiştirmek as
·denklemin 0'dan

[Determinant'taki mertebe indirme tarafında hareket ettik.]

örnek $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ ise Ç.K = ?

$\sim : D_2 \to D_2 - D_1$ (denktir)

$$\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - 4x_2 = 6 \end{matrix} \overset{D_1 \leftrightarrow D_2}{\sim} \begin{matrix} x_1 - 4x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{matrix}$$

$\sim : D_2 \to D_2 - 2D_1$

$$\begin{matrix} x_1 - 4x_2 = 6 \\ 0x_1 + 11x_2 = -11 \end{matrix}$$

$x_2 = -1$
$x_1 = 2$

$$\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \overset{S_2 \to S_2 - S_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$2x_1 + 3x_2 = 1$
$x_1 - 4x_2 = 6$

$x_1 - 4x_2 = 6$
$2x_1 + 3x_2 = 1$

$\sim : S_2 \to S_2 - 2S_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 11 & -11 \end{array}\right)$$

$x_1 - 4x_2 = 6$
$11x_2 = -11$

Tanım →

$$\left.\begin{matrix} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{matrix}\right. \quad (1)$$

denklemi verilsin.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ → matrisine (1) denklem sisteminin **katsayılar matrisi** denir.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ → matrisine (1) denklem sisteminin **genişletilmiş katsayılar matrisi** denir.

Not

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1\\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + a_{m3}\, x_3 + \dots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemi verilsin.

$m \times n$ ↳ bilinmeyen sayısı
↳ denklem sayısı

Bunlar aynı şeyi ifade ediyor.

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}_{\boxed{m\times n}}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n
\end{pmatrix}_{n\times 1}
=
\begin{pmatrix}
b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m
\end{pmatrix}_{m\times 1}
$$

$$A.X = B$$

↳ Katsayılar matrisi

$[A \mid B]$ → Genişletilmiş katsayılar matrisi

Verilen lineer denklem sisteminin çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul ↳ çözüm kümesine

$$\text{rank}\, A = \text{rank}\, [A \mid B] = r$$

olmasıdır. (n - bilinmeyen sayısı olmak üzere)

1) $n=r$ ise sistemin tek çözümü vardır.

2) $n>r$ ise sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. → $n-r$ parametreye bağlı

↳ $n-r$ = parametre sayısı

$n>r$ sonsuz sayıda çözümü vardır

- Web'den Not ⇝ $|A| \neq 0$ olmak üzere $A.X = B$ sisteminde

$$
\begin{aligned}
A^{-1} / \; A.X &= B\\
A^{-1}.A.X &= A^{-1}.B\\
I.X &= A^{-1}.B\\
X &= A^{-1}.B
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

rank A = n   rank(A) = 0

* Rankın Özellikleri *

① $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ise $\text{rank}(A) \leq \min\{m,n\}$

② A, nxn tipinde köşegen matris ise köşegenindeki sıfırdan farklı eleman sayısı rankı verir.

③ Denk matrislerin rankı eşittir.

④ Sıfır matrisinin rankı sıfırdır.

⑤ Sıfır matrisinden farklı bir matrisin rankı en az 1'dir.

⑥ $\text{rank}(I_n) = n$

⑦ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

Not → A matrisinde herhangi bir satır/sütun tamamen sıfır ise $\det A = 0$

★ ⑧ $\det A \neq 0$ ise ve ancak böyle ise $\text{rank}(A) = n$'dir. $(A \in \mathbb{R}^{m \times n})$

⟺ Tersi de geçerli [$\text{rank}A = n$ ise $\det A \neq 0$]

㊉ n bilinmeyenli ve n-tane denklemden oluşan homojen lineer denklem sistemi verilsin;

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{x} = \underset{n \times 1}{0}$$

I. Durum $\text{rank}(A) = n$ ise;

- Çözüm kümesi tek elemanlıdır. (bilinmeyen sayısı = rank)
- $\det A \neq 0$'dır
- A^{-1} mevcuttur.

Bu sonuçlar birbirine denk.

II. Durum $\text{rank}(A) < n$ ise;

- Çözüm kümesi sonsuz çokluktadır. (parametre sayısı ↳ bilinmeyen − rank A)
- $\det A = 0$'dır
- A^{-1} yoktur.

Elemanlarının tamamı sıfır olan en az bir satır vardır. $\text{rank}A \neq n$ ise.

Denklem Çözüm Yöntemleri: ① Gauss Yok etme metotu ② " - Jordan Yok etme metotu ③ Ters matris yöntemi ④ Cramer yöntemi

29.

㊉ n bilinmeyenli ve n denklemden oluşan

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{x} = \underset{n \times 1}{b} \Rightarrow \boxed{x = A^{-1} \cdot b}$$

→ Ters matris yöntemiyle denklem çözme (KareseL denklem sisteminde kullanılabilir)

denklem sistemi verilsin

I. Durum $\det A \neq 0$ ise;

- $\text{rank}A = n$
- A^{-1} mevcut
- Tek çözüm var

II. Durum $\det A = 0$ ise;

- $\text{rank}A < n$
- Tersi yok
- Çözüm sonsuz çoklukta ($\text{rank}(A) = \text{rank}([A:B])$) veya boş küme ($\text{rank}A \neq \text{rank}[A:B]$)

! Boş küme olabilir çünkü sistem homojen denklem sistemi değil.

Soru

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ise ÇK = ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

sol taraf tamamen sıfır olduğundan yazmamıza gerek yok.

$$\underset{\substack{S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 - 2S_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\text{rank}A = 2 < 3$

3 − 2 = 1 parametreli sonsuz çoklukta çözüm vardır.

- $x_3 = t$ olsun
- $x_2 = -4t$
- $x_1 = 9t$

↳ $\text{ÇK} = \{(9t, -4t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$

* SAĞLAMASI → $t = 1$ için $(9, -4, 1)$

(Denklemlerde yerleştire yaz) Sağlıyorsa ✓

$9 - 8 - 1 = 0$ ✓
$18 - 20 + 2 = 0$ ✓
$9 - 12 + 3 = 0$ ✓
$9 - 16 + 7 = 0$ ✓

Çarşamba

- matris $m \times n$ [illegible] rank [illegible] olabilir
- rank $\leq m$ olur.

 # Tanım → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. A matrisi eşhalon forma dönüştürüldüğünde eşhalon formun sıfırdan farklı satır sayısına A'matrisinin rankı denir ve Rank(A) ile gösterilir.

örnek $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ise Rank(A) nedir?

$$\underset{\substack{S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - 3S_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 - S_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{S_2 \to S_2/-3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 2$

örnek $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ ise rank(A) = ?

$1 \leq \text{rank}(A) \leq 4$ olmalı

$$\underset{\substack{S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

① $S_3 \to S_3 - S_2$
$S_4 \to S_4 - S_2$

$$\sim$$

② $S_2 \to \frac{S_2}{-5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 2$

örnek $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=a \\ x-y+2z&=b \\ x-7y+4z&=c \end{aligned}\right\}$ Denklem sisteminin çözümünün olması için a,b,c arasında (I) nasıl bir bağıntı olmalıdır? Bu denklemin kaç çözümü olabilir? (II)

$-3b+3a$

$c-a-3b+3a$

$c-3b+2a$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 1 & -7 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{S_2\to S_2-S_1 \\ S_3\to S_3-S_1}]{①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 1 & b-a \\ 0 & -9 & 3 & c-a \end{array}\right)$$

Cevabı bulmak için bu adıma çok da gerek yok

$$\xrightarrow[S_3\to S_3-3S_2]{②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+2a \end{array}\right)$$

Sistemin çözümünün olması için; rank A = rank [A|B] olmalı

$$\xrightarrow[S_2\to \frac{S_2}{-3}]{③} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1/3 & b-a/-3 \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+2a \end{array}\right)}_{[A|B]}$$

(A)

→ rank A = 2

rank [A|B] 'nin de 2 olması için

(I) $\boxed{c-3b+2a=0}$ olmalı

(II) $3-2=1$ parametreli sonsuz çoklukta çözüm vardır.

8.12.21 – Çarşamba

● ELEMENTER MATRİSLER ●

Arada çarpım yok

e, herhangi bir elementer satır işlemi olsun. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ için eA ifadesi, A'ya elementer satır işleminin yapıldığını söyler.

$e_s e_{s-1} \cdots e_2 e_1 A$ → A ve B'yi çarp sonra elementer satır işlemleri uygula.

Özellik → $e(A.B) = (eA).B$ 'dir.

Özellik → $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ olsun

$(eA) = e(I_m.A) = (eI_m).A$ 'dır.

Tanım → e bir elementer satır işlemi olmak üzere eI_m ifadesine (matrisine) elementer matris denir.

e, matrisin 1. satırının 2 katını 2. satıra ekleyen bir elementer satır işlemi olsun.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow eA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{(I)}$$

Devamı var.

elementer matris

$(eI_3).A$

- $eI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$E.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

I II

$\boxed{eA = E.A}$

(Sözel bir ifade var, işlem yok.) → Bilgisayar ortamında sözel (I) ifadeyi değil sayısal (II) ifadeyi kullanabiliriz.

→ 2 matrisin çarpımı var. (Sayısal bir ifade)

⊛ **Sonuç** → $e_s e_{s-1} \cdots e_2 e_1$ elementer satır işlemlerine karşılık gelen elementer matrisler $E_s, E_{s-1}, \cdots, E_2, E_1$ olsun. Bu durumda;

$e_s e_{s-1} \cdots e_2 e_1 A = E_s . E_{s-1} \cdots . E_2 . E_1 . A$ 'dır.

α e bir elementer satır işlemi olmak üzere e'nin ters işlemi e^{-1} ise e'ye karşılık gelen elementer matris E olduğunda e^{-1} işlemine karşılık gelen matris E^{-1}'dir.

Not → A, keyfi bir matris olmak üzere A, sonlu sayıda elementer satır işlemleri yardımıyla (indirgenmiş) echolon matrise dönüştürülebilir.

Not → $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun. A'nın (çarpma işlemine göre) tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul, A'nın birim matrise denk olmasıdır. !

Not → Kabul ederim ki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisine sırasıyla $e_1, e_2, \cdots e_s$ işlemleri uygulandığında birim matris elde edilsin.

$e_s e_{s-1} e_{s-2} \cdots e_2 e_1 A = I_n$

$E_{s-1} . E_{s-2} . \cdots . E_2 . E_1 . A = I_n$

A'yı yalnız bıraktık

$A = E_1^{-1} . E_2^{-1} . \cdots . E_{s-1}^{-1} . E_s^{-1}$

düzenledik

$A = (E_s . E_{s-1} . E_{s-2} \cdots . E_2 . E_1)^{-1}$ → (Tersinin Tersi kendisi)

Her iki tarafın tersini aldık

$A^{-1} = E_s . E_{s-1} . \cdots E_2 . E_1$

Önemli

$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

$(A.B.C)^{-1} = C^{-1} . B^{-1} . A^{-1}$

$(A_1 . A_2 . \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} . \cdots . A_2^{-1} . A_1^{-1}$

örnek $A=\begin{pmatrix}4&5\\5&6\end{pmatrix}$ matrisinin (varsa) tersini elementer satır işlemleriyle bulunuz.

$$A=\begin{pmatrix}4&5\\5&6\end{pmatrix} \underset{S_2\to S_2-S_1}{\overset{e_1}{\sim}} \begin{pmatrix}4&5\\1&1\end{pmatrix} \underset{S_1\to S_1-4S_2}{\overset{e_2}{\sim}} \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{S_1\leftrightarrow S_2}{\overset{e_3}{\sim}} \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \underset{S_1\to S_1-S_2}{\overset{e_4}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ ⇝ Birim matris elde ettik. Yani A'nın tersi var.

Aynı işlemleri burada da yaptık.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \underset{S_2\to S_2-S_1}{\sim} \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} \underset{S_1\to S_1-4S_2}{\sim} \begin{pmatrix}5&-4\\-1&1\end{pmatrix} \underset{S_1\leftrightarrow S_2}{\sim} \begin{pmatrix}-1&1\\5&-4\end{pmatrix}$$

$$\underset{S_1\to S_1-S_2}{\sim} \begin{pmatrix}-6&5\\5&-4\end{pmatrix}$$ ⇝ A^{-1}'ni bulmuş olduk.

$A.A^{-1}=I_n$ $\quad \begin{pmatrix}4&5\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6&5\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$[\underbrace{A}_{I_2} \mid \underbrace{I_n}_{A^{-1}}]$ ⇝ Bu işlemlerin daha kısa versiyonu

A'yı birim yap

Aynı işlemleri buraya da uygulayarak I_n'i A^{-1} yap.

örnek $A=\begin{pmatrix}2&17\\1&9\end{pmatrix}$ matrisinin (varsa) tersini elementer satır işlemleri yardımıyla bulunuz.

I_2 yap $\xrightarrow{\text{Aynı işlemleri YAP}}$ A^{-1}'i bulacaksın

$$[A \mid I_2] = \left(\begin{array}{cc|cc}2&17&1&0\\1&9&0&1\end{array}\right) \underset{S_1\leftrightarrow S_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&9&0&1\\2&17&1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{S_2\to S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&9&0&1\\0&-1&1&-2\end{array}\right) \underset{S_1\to S_1+9S_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&9&-17\\0&-1&1&-2\end{array}\right)$$

$$\underset{S_2\to S_2-S_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&9&-17\\0&1&-1&2\end{array}\right)$$

$\underbrace{\quad}_{I_2}$ $\quad \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

sağlama ⇝ $A.A^{-1}=I_n$

$$\begin{pmatrix}2&17\\1&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&-17\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Doğru sonuçları bulmuşuz

ama unutmuş, o yazı...

Tanım → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. A matrisinde soldan sağa doğru gidildiğinde sıfırdan farklı ilk eleman 1 ve 1'in aşağısı tamamen sıfır ise bu matrise "**Eşholon matris**" denir.

Row Echelon Form

Tanım → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. A matrisinde soldan sağa doğru gidildiğinde sıfırdan farklı ilk eleman 1 ve bu 1'in hem aşağısı hem yukarısı sıfır ise bu matrise "**İndirgenmiş Eşholon Matris**" denir.

Reduced Row Echelon Form

Not → matriste ... altında sıfırdan farklı bir sayı varsa eşelon matris ol...

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pivot

indirgenmiş Eşelon matris

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eşholon matris

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivot pivot

Eşholon Değil

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

indirgenmiş Eşholon matris

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eşholon Değil

Not → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. Aşağıdaki işlemlerden her birine matris üzerinde yapılmış "**Elementer Satır İşlemleri**" denir.

1. A matrisinde herhangi iki satırın yerini değiştirmek.
2. A'nın herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak
3. A'nın herhangi bir satırının bir katını başka bir satıra eklemek.

Not → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. A üzerinde sonlu sayıda elementer satır işlemleri yapılarak B matrisi elde edilsin. Bu durumda **A ile B matrisleri satırca denktir** denir (EŞİT DEĞİL). **$A \sim B$** ile gösterilir.

~~veya satırca denktir~~

* **Not** → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. **A matrisine sonlu sayıda elementer satır işlemleri yapılarak A'ya denk olan bir eşholon matris elde edilebilir.**

☆ (Yani her matrisin denk olduğu bir eşholon matris VAR.)

Eliminasyon

- Gaus Yok Etme Metodu • Eşholon ile

Verilmiş bir lineer denklem sisteminin genişletilmiş katsayılar matrisini eşholon forma indirgeyerek denklemi çözme metoduna "Gaus Yok Etme metodu" denir.

- Gaus - Jordan Yok Etme Metodu • İndirgenmiş Eşholon ile

Verilmiş bir lineer denklem sisteminin genişletilmiş katsayılar matrisini indirgenmiş eşholon forma indirgeyerek denklemi çözme metoduna "Gaus - Jordan Yok Etme Metodu" denir.

örnek

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= 1 \\ x + 5y - 4z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

sistemini Gaus Yok Etme metodu ile çözünüz.

Amaç zor olan bir denklem sisteminin çözümünü daha kolay hale getirmek.

11

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x-y+2z&=3\\ x+3y+z&=5 \end{aligned}\right\}$$

① Denklem sistemini irdeleyiniz.
② Denklem sisteminin çözüm kümesini Gaus-Jordan yok etme metodu ile bulunuz.

[n = bilinmeyen (n=3)]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 1&-1&2&3\\ 1&3&1&5 \end{array}\right) \xrightarrow[S_3\to S_3-S_1]{S_2\to S_2-S_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&-2&1&2\\ 0&2&0&4 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3\to S_3+S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&-2&1&2\\ 0&0&1&6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_2\to S_2/-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&1&-1/2&-1\\ 0&0&1&6 \end{array}\right) \xrightarrow[S_2\to S_2+\frac{1}{2}S_3]{S_1\to S_1-S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&-5\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&6 \end{array}\right) \xrightarrow{S_1\to S_1-S_2} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-7\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&6 \end{array}\right)}_{[A|B]}$$

(A: katsayılar kısmı)

sonuç → $x=-7$, $y=2$, $z=6$

Bizim işimiz

Bu kısımla kesikli çizginin sağıyla işimiz yok. ⟶ Gaus-Jordan metodu sebebiyle bu kısmı indirgenmiş eşholon yapmaya çalıştık. Böyle yapınca çözüm çok daha kolay.

• rank A = rank [A ¦ B] = 3 = bilinmeyen (n)
↳ sistemin tek çözümü var. ÇK {(−7, 2, 6)}

⊛ **Çözüm**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&3\\ 1&-1&2&1\\ 1&5&4&4 \end{array}\right) \xrightarrow[S_3\to S_3-S_1]{S_2\to S_2-S_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&3\\ 0&-3&3&-2\\ 0&3&-3&1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3\to S_3+S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&3\\ 0&-3&3&-2\\ 0&0&0&-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[S_3\to -S_3]{S_2\to S_2/-3} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&3\\ 0&1&-1&2/3\\ 0&0&0&-1 \end{array}\right)}_{[A|B]}$$

(A: katsayılar kısmı)

$x+2y-z=3$
$y-z=2/3$
★ $0.x+0.y+0.z=-1$

sonuç → ⊛ genişletilmiş katsayılar matrisi yani ona denk olan sorudaki denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme'dir.

rank(A) ≠ rank [A ¦ B]
2 ≠ 3

Genelde Gauss ve Gauss - Jordan Yöntemlerini kullan.
Ters matris yöntemi sonucu birime dönüşmeme ihtimali de var.

• CRAMER YÖNTEMİ •

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1$$
$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = b_n$$

Denklem sistemi verilsin. Eğer çözüm kümesi tek elemanlı ise;

$$x_j = \frac{1}{\det A} . \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Katsayılar matrisinin Determinantı

↳ j. sütun

örnek

$$x_1 + 3x_2 = -1$$
$$4x_1 + 5x_2 = 3$$

sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -7 \neq 0$$

sistemin tek çözümü var

$$x_1 = \frac{1}{-7} . \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{-7} . \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

30

$-42 - 128 + 150$

Homojen Denklem Sistemleri

n bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n}.x_n = 0$$
$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2n}.x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + \cdots + a_{mn}.x_n = 0$$

biçiminde tanımlanan denklem sistemine "Homojen Denklem Sistemi" denir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$A.x = 0_{m\times 1}$$

Not → Homojen denklem sistemlerinin en az bir tane bilinmeyeni mevcuttur.

$$\underbrace{\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix}}_{\text{rank}A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right.}_{\text{rank}[A:B]}$$

→ rankA = rank[A:B]

* (n - bilinmeyen sayısı olmak üzere)

→ rankA = n ise sistem Aşikar çözüme sahip. [Çözüm kümesi tek elemanlı.]

→ rankA < n ise sistem sonsuz çoklukta çözüme sahip.

Homojen ve karesel olduğundan determinant ile çözdük. Karesel olmasaydı rankları çözerdik.

rank A = 3, det A ≠ 0 olmalı

Soru

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$mx_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 + x_3 = 0$$

homojen denklem sisteminin tek çözüme sahip olabilmesi için m aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

↳ m, 2 olsaydı denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü olurdu.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

1. satıra göre det. açılımı yapalım

$$1.(-2-0) + 2.(-1)^3.(m-2) + 1.(0-(-2)) \neq 0$$

$$\cancel{-2} - 2.(m-2) + \cancel{2} \neq 0 \rightarrow -2m + 4 \neq 0$$

$$2m \neq 4 \Rightarrow \boxed{m \neq 2}$$

Örnek

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - ax_3 = 0$$
$$-ax_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$-x_1 + ax_2 - x_3 = 0$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini a'ya göre irdeleyiniz.

* Önceki derslerde çözdüğümüz aynı türdeki sorulardan tek farkı Homojen denklem sistemi olması.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_2 \to S_2 - S_1 \\ S_3 \to S_3 + a.S_1 \\ S_4 \to S_4 + S_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

S4'ü a+1'e bölüp daha ileri gitmeyi a≠-1 durumu olmadıkça düşünme. Çünkü a=-1 olması durumunda sıfıra bölme ortaya çıkar.

• a = -1 ise;

rank A = 1 → sistemin 3-1 = 2 parametreli sonsuz çoklukta çözümü var.

• a ≠ -1 ise; (şimdi sıfıra bölünme durumu ortadan kalktığı için rank bulmayı, S4'ü a+1'e bölerek vs.) ilerletebiliriz. Aksi takdirde rank'ı 4 buluruz. Ki 3 bilinmeyen olduğundan rank A 4 olmamalı.)

$$\underset{\substack{S_3 \to S_3 - S_4 \\ S_3 \to S_3 + S_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{I) } S_3 \leftrightarrow S_2 \\ \text{II) } S_3 \leftrightarrow S_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ rank A = 3 → Sistemin tek çözümü var.

Kısa Sınavın Konusu → Homojen denklem sist. Özdeğer - Özvektör   Çarşamba -22 Dec 21-

• ÖZDEĞER - ÖZVEKTÖR •

* **Tanım:** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun. $Ax = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x var ise λ'ya A'nın özdeğeri, x'e ise λ özdeğerine karşılık özvektör denir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n &= \lambda.x_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n &= \lambda.x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n &= \lambda.x_n \end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

Homojen Denklem Sistemi

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda).x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n &= 0 \\ a_{21}.x_1 + (a_{22}-\lambda).x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda).x_n &= 0 \end{aligned}\right\} (\ast)$$

($\ast$) Denklem sisteminin 0 çözümünden başka çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir ve yeterlidir. Bu durumda;

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlayan λ'lara A'nın özdeğerleri denir.

\# $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0$
$\iff (A-\lambda)x = 0$
$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

\# **Tanım** → $p(\lambda) = \det(A - \lambda . I_n)$ polinomuna (A'nın boyutundan dolayı [n×n] en fazla n mertebeden) A'nın karakteristik polinomu denir. Karakteristik polinomun kökleri A'nın özdeğerleridir.

Örnek $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A'nın karakteristik polinomunu bulunuz.
b) A'nın özdeğerlerini bulunuz.
c) A'nın özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulunuz.

A'nın boyutu kadar polinomun mertebesi (derecesi) en fazla n kadar olabilir.

Ç a) $p(\lambda) = \det(\overset{2\times 2}{A} - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

$= \det \overbrace{\begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}}^{A-\lambda I_n} = (-4-\lambda).(5-\lambda) - (-18)$
$= -20 - \lambda + \lambda^2 + 18$
$\hookrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$

Ç b) $p(\lambda) = \overbrace{\lambda^2 - \lambda - 2}^{(\lambda-2).(\lambda+1)} = 0$ → (Karakteristik polinomun kökleri A'nın özdeğerini verir)
$\hookrightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$

Ç c) • $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler:

$Ax = \lambda x \rightarrow (A - \lambda I_2).x = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_2 \to S_2+S_1 \\ S_1 \to \frac{S_1}{-3}}}{\overset{\text{eşelona indirgenir}}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$n - r = 3 - 2 = 1$ parametreli

$x_1 + 2x_2 = 0$
$\hookrightarrow x_2 = t$
$x_1 = -2t$

Özuzay $\Big|_{\lambda=-1} = \left\{ t.\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} ; t \in \mathbb{R} \right\}$

→ üreteç

↳ özuzayın üreteci [span]

özvektör, üretecin bir katı olmalı

∝ eigenvalues → özdeğer
∝ eigenvector → özvektör

* ÖZDEĞERLERİN ÖZELLİKLERİ *

İz A → Köşegen matrisin asal köşegenindeki elemanlarının toplamı.

1.) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun. A'nın özdeğerlerinin toplamı A'nın izine ; çarpımı ise determinantına eşittir.

2.) Üçgensel matrislerin özdeğerleri, köşegenindeki elemanlarıdır.

3.) rank $A = r$ ise A'nın $n-r$ tane özdeğeri sıfırdır. $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$

→ rank $A = n \iff \det A \neq 0 \iff$ A reguler $\iff$ A'nın özdeğerleri sıfırdan farklı.

→ rank $A = r < n \iff \det A = 0 \iff$ A singuler $\iff$ A'nın $n-r$ tane özdeğeri sıfırdır.

4.) Karakteristik polinomları aynı olan matrislerin özdeğerleri de aynıdır.

5.) A ile A^T'nın karakteristik polinomları aynıdır.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det((A-\lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I) = P_{A^T}(\lambda)$$

→ Sonuç olarak A ile A^T'nın özdeğerlikleri aynıdır.

λ sbt bir sayı. Bu yüzden Transpozu kendisidir.

6.) $A^{n \times n}$ ile $B^{n \times n}$ matrisleri verilsin. $A \times B$ ile $B \times A$'nın özdeğerleri aynıdır.

Normalde bunlar birbirine eşit DEĞİL.

$B/\ A.B\,x = \lambda x$

λ bir reel sayıdır. Bu sebeple, bir matrisle çarpma yaparken yerleri değişebilir.

↳ sbt. A = A. sbt

$A \times B \neq B \times A$

$B.A.B\,x = B.\lambda.x$

$B.A\boxed{B\,x} = \lambda.B.x \longrightarrow Bx = x_1$ ($n \times n$, $n \times 1$, $n \times 1$)

$B.A.x_1 = \lambda x_1$ 'dir.

$A^{-1} = A^T$

7.) A, ortagonal bir matris ve λ da A'nın özdeğeri olsun. Bu durumda $\frac{1}{\lambda}$ da A'nın özdeğeridir.

Kabul edelim ki λ, A'nın bir özdeğeri olsun.

$$A^{-1}/\ Ax = \lambda x \Rightarrow x = A^{-1}.\lambda.x \underset{A^{-1}=A^T}{\Longrightarrow} A^T.x = \frac{1}{\lambda}.x$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{1}{\lambda}$, A^T'nun bir özdeğeridir. A ile A^T'un özdeğerleri aynı olduğundan $\frac{1}{\lambda}$ aynı zamanda A'nın bir özdeğeridir.

* A^{-1} mevcut $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A regüler $\Leftrightarrow$ karakteristik polinomun sabit terimi sıfırdan farklı $\Leftrightarrow P_A(0) \neq 0$

8.) λ, A matrisinin bir özdeğeri ise λ^k ($k \in \mathbb{N}$) değeri A^k'nın özdeğeridir.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^2 x = \lambda \underbrace{A x}_{\lambda x}$$
$$\Rightarrow A^2 x = \lambda^2 x$$
$$\Rightarrow A^3 x = \lambda^2 x . \underbrace{A}_{\lambda x}$$
$$\Rightarrow A^3 x = \lambda^3 x \quad \dashrightarrow \quad A^k x = \lambda^k x$$

ÇOK ÖNEMLİ ☆☆

☆ 9.) Cayley – Hamilton teoremi: Her matris, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür. ☆☆

Soru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times2}$ matrisi için Cayley–Hamilton teoremini uygulayınız.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda).(2-\lambda) - 6 \rightarrow 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4\boxed{1}$$

→ Cayley-Hamilton teoremine göre λ gördüğümüz yere A matrisini yazalım

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4.\boxed{I_2} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matris uzayının biri (1) Birim matristir.

• Sonuç → $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir matris ve karakteristik polinomu

$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}.\lambda^{n-1} + \dots + a_1.\lambda + \boxed{a_0}$ biçiminde → reel düzlem

olsun. Cayley – Hamilton teoremine göre,

$$A^n + a_{n-1}.A^{n-1} + \dots + a_1.A + a_0.I_n = 0 \quad \Big/ A^{-1}$$
$$A^{n-1} + a_{n-1}.A^{n-2} + \dots + a_1.I_n + a_0.A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = -\frac{1}{\underbrace{a_0}_{\text{karakteristik polinomun sabit}}}.(A^{n-1} + a_{n-1}.A^{n-2} + \dots + a_1.I_n)$$ elde edilir.

CAYLEY-HAMILTON TEOREMİ İLE MATRİSİN TERSİNİ BULMA

$$A^2 - 3A - 4I_2 = 0 \quad \Big/ A^{-1}$$
$$A - 3I_2 - 4A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{4}}.(A - 3I_2)$$

sbt

! Not → A'nın tersinin olması için karakteristik polinomunda sabit terimin sıfırdan farklı olması şart. $[P_A(0) \neq 0]$

→ Karakteristik polinomda sabit sayı yoksa (sbt=0) matrisin özdeğeri (λ)=0 A^{-1} yoktur ⇐ $\det A = 0$

* matris uzayının Bir(1)i Birim matristir.

A'nın tersini A'nın kuvvetleri cinsinden yazınız (Cayley-Hamilton) [sınavda daha çok böyle bir soru sorulur]

— Çarşamba —
29.12.21

Örnek $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ olduğuna göre A'nın tersini (varsa) A'nın kuvvetleri cinsinden yazınız.

① Determinantı kontrol et. $\det A = -2 \neq 0$

② $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (1-\lambda).\underbrace{[(1-\lambda).(-2-\lambda)]}_{(-2+\lambda+\lambda^2)}$$

$$= -2 + \lambda + \cancel{\lambda^2} + 2\lambda - \cancel{\lambda^2} - \lambda^3$$
$$= \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda - 2}$$

$$P(A) = -A^3 + 3A - 2.I$$
$$-A^3 + 3A - 2I = 0 \quad \Big/ A^{-1} \rightarrow -A^2 + 3 - 2A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = \frac{1}{2}.(-A^2 + 3I)$$

Tanım : $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun.

A, B'ye Benzer $\{\boxed{B = P^{-1}.A.P}$ $\Rightarrow$ $P.B.P^{-1} = A$ $[P = P_1^{-1}]$, $P_1^{-1}.B.P_1 = A\}$ B, A'ya benzer.

olacak biçimde P regüler matrisi varsa A ile B benzer matrislerdir denir.

• Benzerlik bağıntısı simetri özelliğine sahiptir.
• Benzerlik bağıntısı yansıma özelliğine sahiptir.
• Benzerlik bağıntısı geçişme özelliğine sahiptir.

Denklik Bağıntısı

Soru A ile B benzer iki matris ise $\det A = \det B$ olduğunu gösteriniz.

* Kabul edelim ki A ile B benzer iki matris olsun. Bu durumda $B = P^{-1}.A.P$ olacak biçimde P regüler matrisi mevcuttur.

$$\det B = \det(P^{-1}.A.P) = \det(P^{-1}).\det(A).\det(P)$$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$= \frac{1}{\det(P)}.\det(A).\det(P)$$

$$\rightarrow \boxed{\det B = \det A}$$

geçişme özelliği

Örnek A ile B benzer matrisler ise bunların karakteristik polinomları da aynıdır.

↳ So, A ve B'nin özdeğerleri de aynıdır.

$$P(\lambda) = \det(B - \lambda I)$$
$$= \det(P^{-1}.A.P - \lambda.P^{-1}.P)$$
$$= \det(P^{-1}.(A-\lambda I).P)$$
$$= \det(P^{-1}).\det(A-\lambda I).\det(P)$$
$$= \det(A-\lambda I) = P_A(\lambda)$$

* Dönemin son konusu

• Köşegenleştirme •

 # Tanım: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun. A bir köşegen matrise benzer ise A'ya **köşegenleştirilebilir matris** denir.

→ D bir köşegen matris olmak üzere;

$$D = P^{-1}.A.P$$

olacak biçimde P regüler matrisi varsa A'ya köşegenleştirilebilir matris denir.

BİLGİ → $\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x.(1,0) + y.(0,1);\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$= Sp\{(1,0),(0,1)\} = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(!) uzayın boyutu = üreteç sayısı

 # Teorem: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun. A matrisinin farklı özdeğerlerini $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özuzayları $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ ile gösterilir.

Φ_i kümesi A_i için bir (üreteç) taban olsun $\bigcup_{i=1}^{k} \Phi_i = \Phi$

↳ olmak üzere Φ kümesinde n-tane eleman varsa A matrisi köşegenleştirilebilir matristir.

Ayrıca Φ kümesinin elemanları sütun olarak alınarak elde edilen matris P matrisidir. A'nın özdeğerleri ise D köşegen matrisin köşegen elemanlarıdır.

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = P \qquad D = P^{-1}.A.P$$

↳ köşegen

$A = \left\{t.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ → özuzaylar spanlar tarafından üretilir.

üreteç ↳ Taban ↳ Boy

Ama P'ye yazma sıran önemli değil ← D matrisinin köşegen sırası ile üreten sırası aynı sırada olmalı [DİKKAT]

Örnek $A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -5 & -2 & 5\\ -5 & 0 & 3\end{pmatrix}$ (I) matrisi köşegenleştirilebilir mi? → Evet
(II) Eğer öyle ise $D = P^{-1}.A.P$ olacak biçimde P regüler matrisini ve D köşegen matrisini bulunuz.

(I) $$P_A(\lambda) = \det\underbrace{\begin{pmatrix}-2-\lambda & 0 & 0\\ -5 & -2-\lambda & 5\\ -5 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}}_{(A-\lambda I)} = (-2-\lambda).(-2-\lambda).(3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = -2 = \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$

• $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ için;

$(A-\lambda I).x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 5\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 5\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_3 = 0,\ \boxed{x_2 = k}$ ← serbest

$\boxed{x_3 = t},\ \boxed{x_1 = t}$

Özuzay$\Big|_{\lambda=-2} = \left\{\begin{pmatrix}t\\k\\t\end{pmatrix};\ t,k \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + k.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

A_{-2}

$= Span = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ★ ★

• $\lambda_3 = 3$ için;

$\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ -5 & -5 & 5\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ -5 & -5 & 5\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\substack{S_3 \to S_3+S_1\\ S_2 \to \frac{S_2}{-5}}}{\sim} \begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{x_1 = 0}$, $x_2 - x_3 = 0$ ↳ $\boxed{\begin{matrix}x_2 = t\\ x_3 = t\end{matrix}}$

(1) $S_1 \to \frac{S_1}{-5}$
(2) $S_2 \to S_2 - S_1$
(3) $S_2 \to \frac{S_2}{-1}$

↳ $A_3 = \left\{\begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{t.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}\right\}$

$= Span = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ★

Sonuç Span = n = 3 olduğundan A matrisi köşegenleştirilebilir.

(II) $D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3! farklı sıralama yapabilirsin

↳ ! D'nin köşegenlerine λ'ları hangi sırayla yazdıysan P'ye de o sırayla yerleştirmelisin.