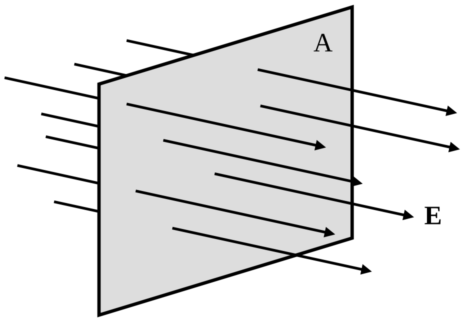
BÖLÜM 2

GAUSS KANUNU

2.1. ELEKTRİK AKISI

Elektrik akısı, bir yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısının bir ölçüsüdür. Kapalı yüzey içinde net bir yük bulunduğunda, yüzeyden geçen alan çizgilerinin net sayısı bu net yükle orantılıdır. Çizgi sayısı yükü çevreleyen yüzeyin şeklinden bağımsızdır.

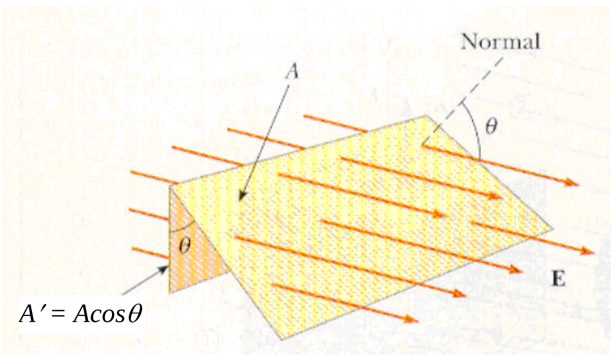


Şekil 2.1. Alana dik A yüzölçümlü bir düzlemden geçen düzgün bir elektrik alanının alan çizgileri.

Birim yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısı, elektrik alanının büyüklüğü ile orantılı olduğundan, Şekil 2.1'deki A yüzölçümünden geçen alan çizgilerinin sayısı EA ile orantılıdır. Elektrik alan şiddeti E ile alana dik A yüzölçümünün çarpımına Φ elektrik akısı denir.

$$\Phi = EA \tag{2.1}$$

E ve A'nın birimleri SI'ya göre alındığında, elektrik akısının birimi $N.m^2/C$ olur.



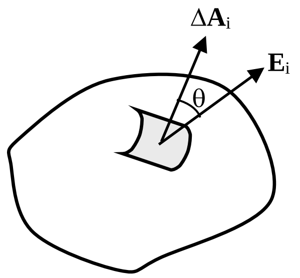
Şekil 2.2. Alanla θ açısı yapan bir A yüzölçümünden geçen düzgün elektrik alan çizgileri

Göz önüne alınan yüzey alana dik değilse, yüzeyden geçen alan çizgilerinin sayısı (akı) daha azdır. Şekilde A yüzölçümünden geçen alan çizgilerinin sayısı, alana dik A′ izdüşüm yüzölçümünden geçenlerinkine eşittir. A ve A′ yüzeylerinden geçen akılar aynı olduğundan istenilen akı için

$$\Phi = EA\cos\theta$$

bulunur.

Şekil 2.3'teki gibi daha genel bir durumda, yüzeyin çok sayıda ΔA yüzölçümlü küçük yüzey elemanlarına bölündüğünü düşünelim. Bu durumda, doğrultusu yüzeye dik i. yüzey elemanının yüzölçümü ΔA_i olmak üzere bu küçük yüzey elemanından geçen $\Delta\Phi_i$ elektrik akısı



Şekil 2.3. $\Delta\mathbf{A}_i$ yüzölçümlü küçük bir yüzey elemanı.

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i.\Delta\mathbf{A}_i = E_i\Delta A_i\cos\theta$$

ile verilir. Yüzeyden geçen toplam akıyı, bütün elemanların katkısını toplayarak buluruz. O halde elektrik akısının genel tanımı şöyledir:

$$\Phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \mathbf{E}_i.\Delta\mathbf{A}_i = \int_{\text{yüzey}} \mathbf{E}.d\mathbf{A}$$

Genelde Φ'nin değeri, hem elektrik alanının desenine hem de alınan yüzeye bağlıdır.

Kapalı bir yüzeyden (*Kapalı yüzey, uzayı iç ve dış bölgelere ayıran yüzey olarak tanımlanır. Örneğin, küre kapalı bir yüzey oluşturur.*) geçen net Φ_C akısı

$$\Phi_C = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \oint E_n dA$$

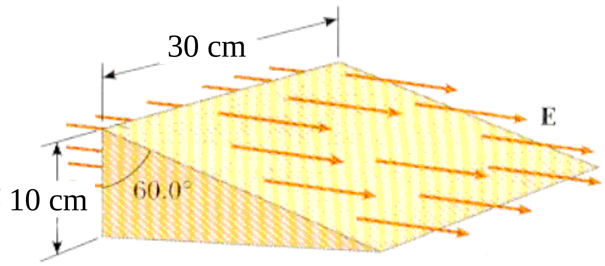
şeklinde ifade edilir. Burada E_n, elektrik alanının yüzeye dik bileşenleri olup, C alt indisi kapalı bir yüzeyi göstermektedir.

Örnek: Şekildeki gibi kapalı bir üçgensel kutunun yatay bir E = $7,8.10^4$ N/C'luk bir elektrik alanında bulunduğunu düşünelim.

a) Düşey dikdörtgen yüzeyden,

b) eğik yüzeyden,

c) kutunun tüm yüzeyinden geçen elektrik akısını hesaplayınız.



Çözüm:

a) $A_1 = 0,1.0,3 = 0,03 \text{ m}^2$

$\Phi_1 = EA\cos\theta = 7,8.10^4.0,03.\cos180 = -2340 \text{ N.m}^2/\text{C}$

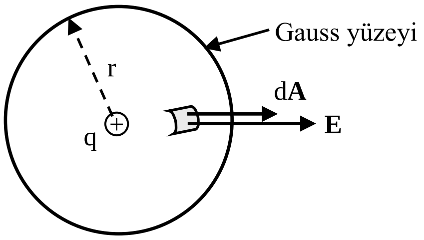
b) $A_2 = 0,2.0,3 = 0,06 \text{ m}^2$

$\Phi_2 = EA\cos\theta = 7,8.10^4.0,06.\cos60 = 2340 \text{ N.m}^2/\text{C}$

c) Kenar yüzeyler ve tabanın normaliyle E elektrik alanı dik olduğundan bu yüzeylerden geçen akı sıfırdır.

O halde toplam akı $\Phi = -2340 + 2340 = 0$ olur.

2.2. GAUSS KANUNU



Şekil 2.4. Bir q nokta yükünü saran r yarıçaplı küresel bir yüzey.

Şekildeki gibi r yarıçaplı bir kürenin merkezinde bulunan bir pozitif nokta yükün, bu küre yüzeyinde her yerde oluşturduğu elektrik alanının büyüklüğü $E = kq/r^2$ olur. Alan çizgileri ise, çap doğrultusunda dışarı doğrudur ve bu nedenle yüzeye her noktada diktir. Yani, **E** her noktada ΔA_i yüzölçümlü yüzey elemanını temsil eden $\Delta \mathbf{A}_i$ vektörüne paraleldir. Bu nedenle,

$$\mathbf{E}.\Delta\mathbf{A}_i = E_n \Delta A_i = E\Delta A_i$$

olur. Gauss yüzeyinden geçen net akı, E yüzey üzerinde sabit ve kq^2/r değerine sahip olduğu için

$$\Phi_C = \oint E_n dA = \oint E dA = E\oint dA$$

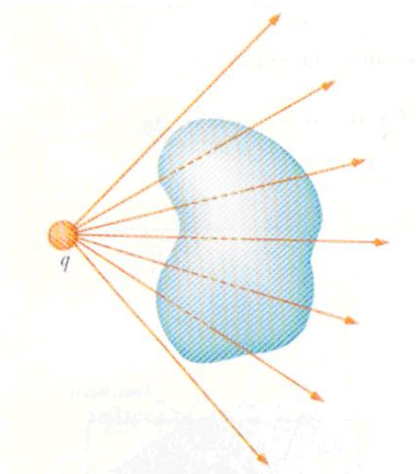
olur. Küresel bir gauss yüzeyinde $\oint dA = 4\pi r^2$ olduğundan gauss yüzeyinden geçen net akı

$$\Phi_C = \frac{kq}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

olur. Sonuç r'den bağımsız olduğu için küresel bir gauss yüzeyinden geçen net akı, yüzey içindeki q yüküyle net orantılıdır.

Herhangi kapalı bir yüzeyden geçen net akı, yüzeyin şeklinden bağımsızdır. O halde bir q nokta yükünü saran herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı q/ε_0'dır.

Rasgele biçimli kapalı bir yüzey dışında bulunan bir nokta yük durumunda, yüzeye giren ve çıkan elektrik alan çizgilerinin sayıları eşittir. Bundan dolayı, yük sarmayan kapalı bir yüzeyden geçen net elektrik akı sıfırdır.



Şekil 2.5. Kapalı bir yüzey dışında bulunan bir nokta yük.

Bir çok nokta yük veya sürekli yük dağılımı durumunda, bir çok yükün elektrik alanı, yüklerin elektrik alanlarının toplamıdır (üst üste binme ilkesi). Yani,

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3).d\mathbf{A}$$

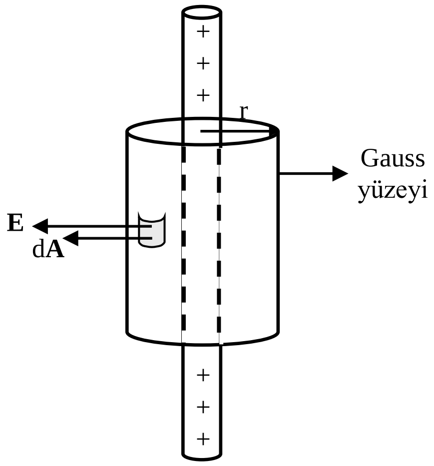
olur. Burada **E**, yüzeyin herhangi bir noktadaki toplam elektrik alanı, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ ise her bir yükün o noktadaki elektrik alanlarıdır.

Sonuç olarak, Gauss yasasına göre herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı

$$\Phi_C = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

ile verilir. Burada $q_{iç}$, gauss yüzeyi içindeki net yük, **E** gauss yüzeyinin (hem iç hem de dış yüklerden ileri gelen) herhangi bir noktasındaki elektrik alanıdır. Gauss yüzeyi her zaman yük dağılımıyla aynı simetriden olacak biçimde seçilmelidir.

Örnek: Birim uzunluk başına yük yoğunluğu sabit (λ = sabit) olan düzgün yüklü, sonsuz uzunlukta, çizgisel pozitif bir yükten r uzaklığındaki elektrik alanını bulunuz.



Çözüm:

Silindirin yan yüzeyinde her noktada **E**’nin büyüklüğü sabit olup yüzeye diktir. Gauss silindirinin taban yüzeyleri elektrik alanına paralel olduğundan bu yüzeylerden geçen akı sıfırdır.

Gauss yüzeyinin içinde kalan yük λl’dir.
λ boyca yük yoğunluğu, l ise silindirin uzunluğudur.

$$\Phi_C = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \oint E dA = E\oint dA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Silindirin yan yüzeyinin alanı $A = 2\pi r l$ olduğundan

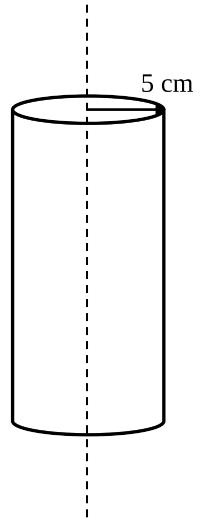
$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = 2k\frac{\lambda}{r}$$

2.3. ELEKTROSTATİK DENGEDEKİ İLETKENLER

Bakır gibi iyi bir elektriksel iletken, atomlara bağlı olmayan ve madde içinde serbestçe dolaşabilen elektronlara sahiptir. İletken içinde net bir yük hareketi olmadığından, iletken elektrostatik dengededir. Elektrostatik dengedeki aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. İletken içinde her yerde elektrik alanı sıfırdır.
2. Yalıtılmış bir iletkendeki herhangi bir yük fazlalığı, iletkenin tamamen yüzeyinde bulunur.
3. Yüklü bir iletkenin hemen dışındaki elektrik alanı iletkenin yüzeyine dik olup σ/ε_0 büyüklüğündedir. Burada σ, elektrik alanı hesaplanan noktadaki yüzeyce yük yoğunludur.
4. Düzgün biçimli olmayan bir iletkende, yüzeyce eğrilik yarıçapının en küçük olduğu sivri uçlarda, yükler toplanma eğilimi gösterir.

Örnek: Uzun doğrusal bir metal çubuğun yarıçapı 5 cm ve boyca yük yoğunluğu 30 nC/m'dir. Çubuk ekseninden a) 3 cm, b) 10 cm, c) 100 cm uzunluklarda elektrik alanını bulunuz.



Çözüm:

$$E\oint dA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

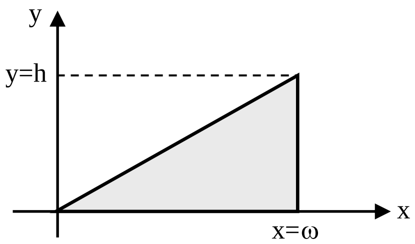
a) r = 3 cm $\quad E = 0$

b) r = 10 cm $\quad E = 2.9.10^9 \dfrac{30.10^{-9}}{0,1} = 5400$ N/C

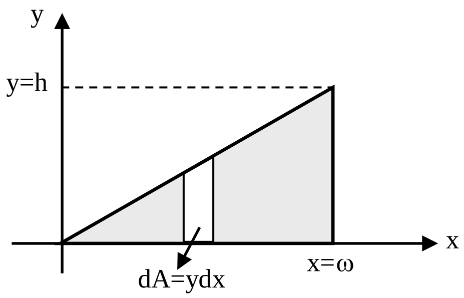
c) r = 100 cm $\quad E = 2.9.10^9 \dfrac{30.10^{-9}}{1} = 540$ N/C

Problemler

1. Bir elektrik alanı, *a* ve *b* sabit olmak üzere, **E** = az**i** + bx**k** ile veriliyor. Şekilde gösterilen üçgen yüzeyden geçen elektrik akısını bulunuz.



Çözüm:



$$\Phi = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \oint E_z dA$$

$$\Phi = \int_0^{\omega} bxy\,dx$$

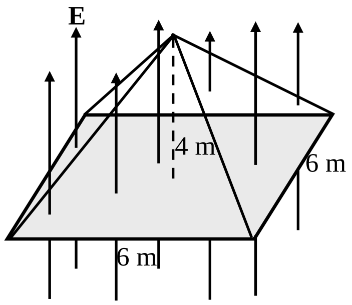
$$= \int_0^{\omega} \frac{bh}{\omega} x^2 dx$$

$$= \frac{bh}{\omega}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\omega} \right)$$

$$\frac{h}{\omega} = \frac{y}{x} \qquad y = \frac{h}{\omega} x$$

$$\Phi = \frac{1}{3} bh\omega^2$$

2. 6 m kenarlı kare tabanlı, 4 m yükseklikli bir piramit 52 N/C'luk düşey bir elektrik alanına konuluyor. Piramidin eğik dört yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını hesaplayınız.



Çözüm:

Tabandan geçen elektrik alan çizgilerinin sayısı piramidin eğik dört yüzünden geçen toplam elektrik akısına eşittir.

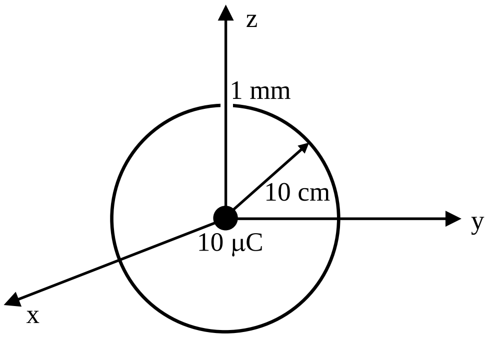
Tabanda geçen akı $\Phi = EA\cos\theta$

$\Phi = 52.36.(-1)$

$\Phi = -1872\ N.m^2/C$

Eğik dört yüzeyden geçen akı $\Phi = 1872\ N.m^2/C$

3. Merkezi kartezyen koordinat sisteminin orijininde bulunan 10 cm yarıçaplı, içi boş, yalıtkan bir kürenin merkezinde 10 μC'luk bir yük bulunmaktadır. Bu küreye z ekseni boyunca 1 mm yarıçaplı bir delik açılıyor. Bu delikten geçen elektrik akısını hesaplayınız.



Çözüm:

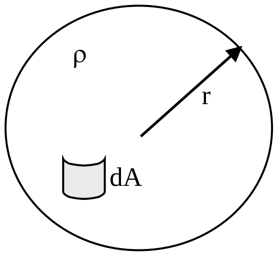
a) $E = k\dfrac{q}{r^2}$ $A = \pi d^2$

$$\Phi = EA = k\frac{q}{r^2}.\pi d^2$$

$$\Phi = 9.109.\frac{10.10^{-6}}{(0,1)^2}.\pi(0,001)^2$$

$$\Phi = 28,26\ Nm^2/C$$

4. Küresel simetrik bir yük dağılımı, *a* sabit olmak üzere ρ = *a*/r yük yoğunluğuna sahiptir. Elektrik alanını r'nin fonksiyonu olarak bulunuz.



Çözüm:

$$\Phi = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{iç} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \frac{a}{r} 4\pi r^2 dr$$

dA = $4\pi r^2$

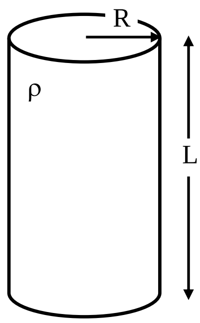
$$= 4\pi a\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^r\right)$$

$$q_{iç} = 2\pi a r^2$$

$$\Phi = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E.4\pi r^2 = \frac{2\pi a r^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{a}{2\varepsilon_0} = \text{sabit}$$

5. R yarıçaplı, ρ düzgün yük yoğunluklu uzun silindirik bir yük dağılımı için, r<R olmak üzere, ekenden r uzaklıkta elektrik alanını bulunuz.



Çözüm:

$$\Phi = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{iç} = \int_0^r \rho dV = \rho\pi r^2 L$$

$$\Phi = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E.2\pi rL = \frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

6. Kenar uzunluğu 50 cm olan bakır kare bir levha kendisine dik yönelmiş 8.10^4 N/C'luk elektrik alanına konuluyor.

a) Levhanın her bir yüzeyindeki yük yoğunluğunu,

b) Her bir yüzeydeki toplam yükü bulunuz.

Çözüm:

$$\Phi = \oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

a) $\sigma = E\varepsilon_0$

$\sigma = 8.10^4.8,85.10^{-12}$

$\sigma = 7,08.10^{-7}$ C/m^2 Bir yüzeyde pozitif ötekinde negatiftir.

b) $\sigma = \dfrac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma A$

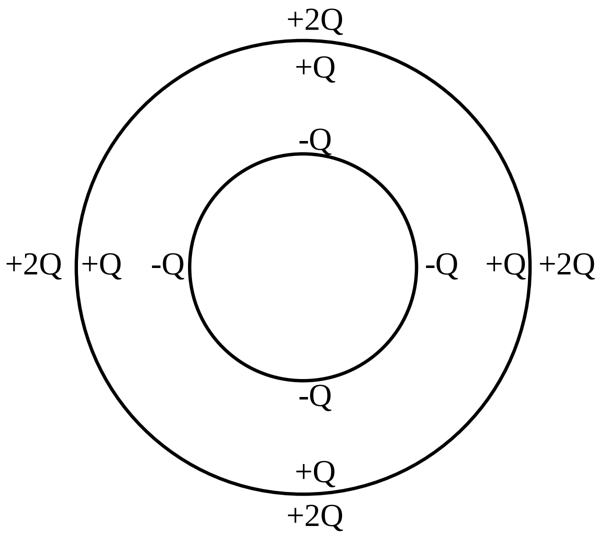
$Q = 7,08.10^{-7}.0,25$

$Q = 0,177.10^{-6}$ C $= 0,177$ μC

Bir yüzeyde pozitif ötekinde negatiftir.

7. İçi boş bir iletken bir küre, aynı merkezli olacak şekilde daha büyük iletken küresel bir kabuk içine konuluyor. İçteki kürese net –Q yükü, dıştaki kürede ise net +3Q yükü bulunmaktadır. Yükler elektrostatik dengededir. Gauss yasasını kullanarak her yerdeki yükleri ve elektrik alanını bulunuz.

Çözüm:



-Q yükü kürenin dış yüzeyi üzerindedir.

+Q yükü kabuğun iç yüzeyi üzerindedir.

+2Q yükü kabuğun dış yüzeyi üzerindedir

Kürenin içinde	$E = 0$
Küre ile kabuk arasında	$E = k\dfrac{Q}{r^2}$
Kabuk dışında	$E = k\dfrac{2Q}{r^2}$