SAKARYA ÜNİVERSİTESİ BİLİŞİM SİSTEMLERİ MÜH. BÖL. 2021–2022 ÖĞR. YILI BAHAR DÖNEMİ LİNEER CEBİR DERSİ DÖNEM SONU SINAVI	Tarih	30.05.2022	Test Puanı (1-8)	9	10
	Öğ No				
	Ad				
	Soyad				

Sınav Süresi 80 dakikadır. Her bir test sorusu 9 puandır. Doğru seçeneği yuvarlak içine alınız. 9 ve 10. sorular klasik olarak arka sayfaya çözülecektir.

CEVAP ANAHTARI

SORULAR $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ m & m\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}3\\ k\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}3\\ k-3m\end{smallmatrix}\right)$

1) $\begin{aligned} x+y&=3\\ mx+my&=k\end{aligned}$ denklem sistemiyle ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi **kesinlikle doğrudur**?

i. Bu sistemin daima sonsuz çözümü vardır.

✓ ii. Bu sistemin sadece $k=3m$ durumunda sonsuz çözümü vardır.

✓ iii. $k=3$ ve $m\neq 1$ için sistemin çözümü yoktur.

✓ iv. $m=3$ için sistemin çözümünün olabilmesi için, $k=9$ olmalıdır.

v. $m=2$ ve $k=2$ için sistemin bir tek çözümü vardır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&1\\2&3&3&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

matrisinin rankı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4

3) A matrisi reel sayılar üzerinde tanımlı 3x3 tipinde bir matristir. A matrisinin tersi alınabildiğine göre aşağıdakilerden hangisi **her zaman doğrudur**?

A) Rank $(A)=3$ B) Rank $(A)=1$ C) Det$(A)=3$

D) Det (A) = Rank (A)=3 E) Det (A)=1

4) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ formundaki bir lineer denklem sisteminde $[A|\mathbf{b}]$ artırılmış matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&m&m&m^2-m\\0&0&m^2+m&m+1\end{array}\right]$$

$\left.\begin{matrix}m^2+m=0\\ m+1=0\end{matrix}\right\}$ olmalı

$\Rightarrow m=-1$

matrisine denktir. Bu sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 0 D) -2 E) -1

5) A matrisi 3x3 tipinde bir reel matris olup determinant değeri 3 tür. Buna göre Ek(A) matrisinin determinantı kaç olur?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) 9 E) 27

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Ek(A) \Leftrightarrow Ek(A)=3.A^{-1}$

$|Ek(A)|=|3.A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=27.3^{-1}=9$ ✓

$(|kA|=k^n|A|$ özelliği$)$

6) $\mathbb{R}^3$ de verilen $\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}1\\1\\c\end{bmatrix}$ vektörleri hangi $c\in\mathbb{R}$ için lineer bağımlıdır.

$\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\-1&2&c\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&c-1\end{pmatrix}$

$c-1=0$ olmalı

A) 1 B) 2 C) 0 D) -1 E) -2

7) Aşağıdaki vektör kümelerinden kaç tanesi $\mathbb{R}^2$ için bir tabandır?

✓ $S_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}, S_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}, S_3=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\},$

$S_4=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$, ✓ $S_5=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}$

$P(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+4=0$

matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir? (Cayley-Hamilton Teoremi: Her kare matris kendi karakteristik polinomunu sağlar)

$P(A)=0 \Leftrightarrow A^2-2A+4I=0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}(2I-A)$

A) $A^{-1}=\frac{1}{2}(I-A)$ B) $A^{-1}=\frac{1}{3}(I-2A)$ C) $A^{-1}=\frac{1}{4}(I-A)$

D) $A^{-1}=\frac{1}{3}(2I-A)$ E) $A^{-1}=\frac{1}{4}(2I-A)$

9) $\left.\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3&=-3\\ 2x_1+x_2+5x_3&=2\\ -3x_1+6x_2+2x_3&=4\end{aligned}\right\}$

lineer denklem sistemini Cramer metodu ile çözünüz. (12p)

10) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ matrisinin

i. Özdeğerlerini hesaplayınız. (4p)

ii. Özvektörlerini bulunuz. (4p)

iii. A matrisi köşegenleştirilebilir mi?. Cevabınız evet ise $D=P^{-1}AP$ olacak biçimde D köşegen matrisini ve P matrisini bulunuz. (8p)

9. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad \underbrace{}_{A} \cdot \underbrace{}_{x} = \underbrace{}_{b}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 25$ (3)

$|A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 60$ (3), $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 55$ (3)

$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -25$ (3)

$x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{60}{25} = \dfrac{12}{5}$

$x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{55}{25} = \dfrac{11}{5}$

$x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{-25}{25} = -1$

10. i. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ (4)

$= (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$

ii. $\lambda_1 = 3$ için $(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = t,\ x_1 = t \quad V^3 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ (4)

$\lambda_2 = -1$ için $(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = t,\ x_1 = -t \quad V^1 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

iii: Farklı reel özdeğerlere sahip olduğu için köşegenleştirilebilir.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) (4)