

NOT: Sınav süresi 60 dakikadır. Başarılar Dileriz. 21.11.2022

1. $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{pmatrix}$ matrisi ortogonal ($A^{-1} = A^T$) ise x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -3 E) -2

$$A^{-1} = A^T \Rightarrow A A^T = I_3 \Rightarrow \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & x \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} (-12 + 6x - 6) = 0 \Rightarrow x = 3$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $A+B=C=(c_{ij})$ için $\sum_{k=1}^3 c_{ik}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = C \Rightarrow \sum_{k=1}^3 c_{ik} = c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} = 7 + 2 + 5 = 14$$

3. $x+y=3$ denklem sistemiyle ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi kesinlikle doğrudur?
 $mx+my=k$

- X I. Bu sistemin daima sonsuz çözümü vardır.
✓ II. Bu sistemin sadece $k=3m$ durumunda sonsuz çözümü vardır.
X III. $k=3$ için sistemin çözümü yoktur.
✓ IV. $m=3$ için sistemin çözümünün olabilmesi için, $k=9$ olmalıdır.
X V. $m=2$ ve $k=2$ için sistemin bir tek çözümü vardır.

$$m=2, k=2 \text{ dir. } 2x+2y=2$$

$$0 \ 0 \ 2-2=0 \text{ sistem tutarsız}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ m & m & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-3m \end{pmatrix}$$

$k=3m=0$ ise sonsuz çözüm var.

$k=3$ ise $3(1-m)$ olacaktır $m=1$ ise sonsuz çözüm $m \neq 1$ ise tutarsız sistemdir.

$m=3$ için $k-9=0$ için sonsuz çözüm var.

4. A ve B matrisleri, $\det(A)=4$, $\det(B)=6$ olacak biçimde, 3×3 tipinde matrisler olsunlar. Bu durumda aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- X A) $\det\left(\frac{1}{2}A\right)=2$ B) $\det(B^{-1}A^T)=\frac{2}{3}$ C) $\det(A^2)=8$ D) $\det(A-B)=-2$ E) Hiçbiri

$$\left|\frac{1}{2}A\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot |A| = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2} \neq 2$$

$$|B^{-1}A^T| = |B^{-1}| |A^T| = |B|^{-1} |A| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

$$|A^2| = |A|^2 = 4^2 = 16 \neq 8$$

$$|A-B| \neq -2$$

5. $A_{n \times n}$ terslenebilir matris olmak üzere $[A: I_n]$ matrisi; elementer satır işlemleri yardımıyla $[I_n: A^{-1}]$ matrisine

satırca denk hale getirilebilir. Buna göre $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -3 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A) A^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & 23/2 & 7 \\ 16 & 13/2 & 4 \\ 4 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B) A^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & 23/2 & 7 \\ 16 & 13/2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C) A^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & 23 & 7 \\ 16 & 13 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D) A^{-1} = \begin{bmatrix} 19 & 23 & 4 \\ 16 & 13/2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E) A^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & 13/2 & 7 \\ 29 & 23/2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $A \in R^{3 \times 3}$ matrisi hem idempotent ($A^2 = A$) hem de regüler (A^{-1} mevcut) matris olsun. Buna göre $\det(2A) + \det(A^T) + 2\det(A^{-1}) - \det(A^2) = x$ ise x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

$$12A = 2^3 A, |A^T| = |A|, |A^{-1}| = |A|^{-1}, |A^2| = |A|^2 \Leftrightarrow |A|(|A|-1) = 0 \Leftrightarrow |A| = 1$$

$$8|A| + |A| + \frac{2}{|A|} - |A| = x$$

$$\Leftrightarrow 8 + \frac{2}{1} = x \Leftrightarrow x = 10$$

$|A| = 0$ olmaz
(A regüler)

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & x & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin determinanı 30 ise x aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 0

$$|A| = 2(-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & x-2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & x-2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & x-1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(x-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(x-1)(12-3) = 30$$

$$x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ rank} = 3$$

9. $A \in R^{n \times n}$ matrisi regüler (düzgün) olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi her zaman doğrudur.

- ✗ I. $\text{rank}(A) < n$ dir.
✗ II. $\det(A) > 0$ dir.
✓ III. A matrisi $n \times n$ tipindeki birim matrise denktir.
✗ IV. $\det(A) = 0$ dir.
✓ V. A matrisinin tersi vardır.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 & 23/2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 13/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -1 \end{cases}$ sisteminin asal (bağımlı) değişkenleri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) x_1, x_2, x_3, x_4 B) x_1, x_2, x_3 C) x_1, x_2 D) x_2, x_3, x_4 E) x_1, x_3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ esasları formunda}$$

olup
 x_1, x_3 asal değişken olabilir.