Venerdì 03 Ottobre 2025

Analisi Matematica

Elementi di logica

Proposizione = "frase con un valore di verità"

Es: Una proposizione p può essere:

- p = "oggi è venerdì"
- p = "oggi piove"
- p = "2 è un numero dispari"
- p = "2 divide 6"

Connettivi logici: p, q due proposizioni

1) $p \wedge q$ ("p e q"): è vera quando p e q sono vere
2) $p \vee q$ ("p o q"): è vera se almeno una fra p e q è vera
3) $p \Rightarrow q$ ("p implica q"): è falsa quando p è vera e q falsa
4) $p \Leftrightarrow q$ ("p se e solo se q"): p è vera se e solo se q è vera
5) $\neg p$ ("non p"): è vera quando p è falsa

Tabella di verità

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Osservazione: $p \Leftrightarrow q$ quando p e q hanno la stessa tabella di verità

PROPOSIZIONE (LEGGI DI DE MORGAN): SIANO P E Q PROPOSIZIONI, ALLORA:

1) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

2) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

DIMOSTRAZIONE:

1)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

2)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

PROPOSIZIONE (DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO): Siano P e Q proposizioni, R una proposizione falsa.

1) $P \Rightarrow Q \iff \neg Q \Rightarrow \neg P$

2) $P \Rightarrow Q \iff (P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$

DIMOSTRAZIONE:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$
1	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	1	0	
0	0	1	1	1	1	

Un predicato é una proposizione che puó essere vera o falsa a seconda di una variabile ($p(x)$, $p(n)$, ...)

ES: $P(n) =$ "n é pari"

$p(x) =$ "$3^x \geq 9^{x+1}$"

Elementi di teoria degli insiemi

Cos'é un insieme? "Raccolta / famiglia di elementi"

NOTAZIONE: A, B, C, X, Y, Z INSIEMI

a, b, c, x, y, z ELEMENTI

SCRIVIAMO $a \in A$ se l'elemento a appartiene all'insieme A

$a \notin A$ se l'elemento a non appartiene all'insieme A

COME LI DEFINIAMO (INSIEMI)?

- ELENCO $A = \{a, b, c, d\}$
- SOTTOINSIEME DI UN INSIEME DATO CHE SODDISFI UN CERTO PREDICATO $B = \{x \in X : p(x)\}$

ES: $A = \{1,3,5,7\}$ $A = \{x \in \mathbb{N} : x$ É DISPARI $\wedge\ x \leq 8\}$

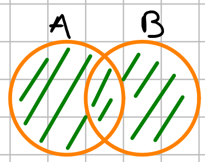
- $\emptyset$ É L'INSIEME VUOTO
- A É SOTTOINSIEME DI B, $A \overset{\substack{\text{SOTTOINSIEME} \\ \uparrow}}{\subseteq} B$ SE OGNI ELEMENTO DI A APPARTIENE ANCHE A B.
- $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

DEFINIZIONE: A UN INSIEME $P(A)$, DETTO L'INSIEME DELLE PARTI DI A, É L'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI A

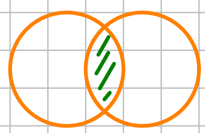
ES: $A = \{1,2,3\}$ $P(A) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$

OPERAZIONI FRA INSIEMI A, B INSIEMI

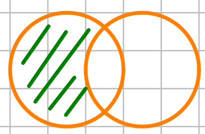
- $A \cup B$ ("A UNIONE B") $= \{x : x \in A \vee x \in B\}$



- $A \cap B$ ("A INTERSEZIONE B") $= \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



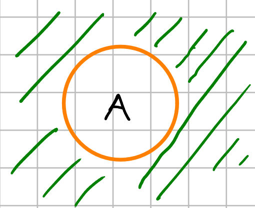
- $A \setminus B$ ("A DIFFERENZA B") $= \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



ES: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,5,2025\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,2025\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{5, 2025\}$

- COMPLEMENTARE: $A \subseteq X$, $A^c = \{x \in X : x \in A\}$



$\leftarrow A^c = A$ COMPLEMENTARE

ES: $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ É PARI$\} = \{0,2,4,6,8,\ldots\}$

$A^c = \{n \in \mathbb{N} : n$ É DISPARI$\} = \{1,3,5,7,9,\ldots\}$

PROPOSIZIONE (LEGGI DI DE MORGAN): $A, B \subseteq C$

1- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

DIMOSTRAZIONE: NO!

QUANTIFICATORI LOGICI: SIA $P(x)$ UN PREDICATO CHE DIPENDE DA $x \in X$

- $\exists$ "ESISTE": $\exists x \in X$ TALE CHE $P(x)$

  "ESISTE ALMENO UN x IN X TALE CHE $P(x)$ É VERA"

- $\forall$ "PER OGNI": $\forall x \in X \quad P(x)$

  "PER OGNI x CHE APPARTIENE AD X, $P(x)$ É VERO"

- $\exists!$ "ESISTE UN UNICO": $\exists! \, x \in X$ TALE CHE $P(x)$

  "ESISTE UN UNICO x IN X TALE CHE $P(x)$ É VERA"

es:

$\forall x \in \mathbb{R}$	$3x+1 \geq 0$	FALSO
$\forall x \in \mathbb{R}$	$3^x \geq 0$	VERO
$\exists x \in \mathbb{R}$	$3x+1 \geq 0$	VERO
$\exists! \, x \in \mathbb{R}$	$3x+1 \geq 0$	FALSO
$\exists x \in \mathbb{R}$	$3^x \geq 0$	VERO
$\exists! \, x \in \mathbb{R}$	$3^x \geq 0$	FALSO
$\exists x \in \mathbb{R}$	$x^2 = 1$	VERO
$\exists! \, x \in \mathbb{R}$	$x^2 = 1$	FALSO

NEGARE I QUANTIFICATORI

- LA NEGAZIONE DI: $\forall x \in X$ $P(x)$ É VERA

  É $\exists x \in X$ TALE CHE $P(x)$ É FALSA

- LA NEGAZIONE DI: $\exists x \in X$ TALE CHE $P(x)$ É VERA

  É $\forall x \in X$ $P(x)$ É FALSA

ES PER CASA: SIANO X, Y INSIEMI, NEGARE:

- $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ TALE CHE $P(x,y)$ É VERA
- $\exists x \in X$, $\forall y \in Y$ TALE CHE $P(x,y)$ É FALSA

- $\exists x \in X$, TALE CHE $P(x) \wedge Q(x)$ É VERA
- $\forall x \in X$, TALE CHE $\neg P(x) \wedge \neg Q(x)$ É VERA OPPURE $P(x) \wedge Q(x)$ É FALSA

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NATURALI

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ INTERI

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ RAZIONALI

$\mathbb{N} \to$ CONTARE, $\mathbb{Z} \to$ DEBITO, $\mathbb{Q} \to$ DIVIDERE QUANTITÁ IN PARTI

É SUFFICIENTE? NO!

TEOREMA: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, CIOÉ NON ESISTE ALCUN RAZIONALE TALE CHE IL SUO QUADRATO SIA 2.

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, CIOÉ $\exists x \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $x^2 = 2$ $\quad x = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
POSSIAMO SUPPORRE CHE p E q SONO PRIMI FRA LORO. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$, QUINDI p^2 PARI, MA ALLORA ANCHE p É PARI. INFATTI SE PER ASSURDO p FOSSE DISPARI, CIOÉ $p = 2k+1$ $k \in \mathbb{N}$, QUINDI $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k = 2(2k^2 + 2k) + 1$ QUINDI p^2 SAREBBE DISPARI, CHE NON PUÓ ESSERE.
$\exists m \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $p = 2m \Rightarrow (2m)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2m^2 = q^2$ QUINDI q^2 É PARI E QUINDI q É PARI, MA QUESTO É ASSURDO PERCHÉ p E q SONO PRIMI.

ALLINEAMENTO DECIMALE: $r.d_1 d_2 d_3 \dots d_n$ $r \in \mathbb{Z}, d_i \in \{0, \dots, 9\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

ALLINEAMENTO LIMITATO: $r.d_1 d_2 \dots d_n 0000$ $(-110,151448)$

ALLINEAMENTO PERIODICO: $r.d_1 d_2 \dots d_n c_1 c_2 \dots c_J, c_1 c_2 \dots c_J =$

$= r.d_1 d_2 \dots d_n \overline{c_1 c_2 \dots c_J}$ $(11,232323\dots = 11,\overline{23})$

ALLINEAMENTO PROPRIO: TUTTI GLI ALLINEAMENTI CHE NON SIANO PERIODICI DI PERIODO 9

(AD ES: NO $0,\overline{9}$, ($e, \pi, \sqrt{2}$ SI!)

NUMERI REALI: $\mathbb{R} = \{$ALLINEAMENTO PROPRI$\}$

OSSERVAZIONE: SI PUÓ MOSTRARE CHE UN NUMERO É RAZIONALE SE E SOLO SE AMMETTE UN'ALLINEAMENTO LIMITATO O PERIODICO. GLI ALTRI NUMERI, CIOÉ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, SI DICONO IRRAZIONALI ($\sqrt{2}, \pi, e, \dots$) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

ABBIAMO UN DOMINO CON INFINITE TESSERE. LE VOGLIAMO DISPORRE IN MODO CHE CADONO TUTTE. COSA DOBBIAMO FARE?

1- FAR CADERE LA PRIMA TESSERA

2- SE CADE L'N-ESIMO, ALLORA CADE L'(n+1)-ESIMA $\Rightarrow$ CADONO TUTTE

SIA $P(n)$ $n \in \mathbb{N}$, UN PREDICATO. SIA $n_0 \in \mathbb{N}$,

1- $P(n_0)$ É VERO (BASE INDUTTIVA)

2- $\forall n \geq n_0$ $P(n)$ É VERA $\Rightarrow$ $P(n+1)$ É VERA (PASSO INDUTTIVO)
(IPOTESI INDUTTIVA)

$\Rightarrow P(n)$ É VERA $\forall n \geq n_0$

ES: DIMOSTRARE CHE $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ É DIVISIBILE PER 6.

PER INDUZIONE

1- DIMOSTRIAMO PER $n=0$: $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ DIVISIBILE PER 6 (BASE INDUTTIVA C'É)

2- SUPPONIAMO SIA VERO PER $n \in \mathbb{N}$, DIMOSTRIAMOLO PER $n+1$.

$7^{n+1} - 1 = 7(7^n) - 1 = 7(7^n - 1 + 1) - 1 = 7(7^n - 1) + 7 - 1$ $\Rightarrow 7^{n+1} - 1$ DIV. PER 6 (PRINCIPIO INDUZIONE)

$= 7(7^n - 1) + 6$ $7^n - 1$ DIV. PER 6 $\forall n \in \mathbb{N}$

ES: (FORMULA DI GAUSS): DIMOSTRARE CHE $\forall n \geq 1$, $\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$

$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$

1- BASE INDUTTIVA: $\sum_{K=1}^{1} K = \frac{1\cancel{(1+1)}}{\cancel{2}} = 1$ (VERO)

2- PASSO INDUTTIVO: SIA $n \geq 1$ E SUPPONIAMO CHE LA FORMULA SIA VERA PER n,

DIMOSTRIAMOLA PER $n+1$: $\sum_{K=1}^{n+1} K = \sum_{K=1}^{n} K + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

LA FORMULA È VERA PER n

ES: (SOMMA DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA)

SIA $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. ALLORA $\sum_{K=0}^{n} q^K = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall n \geq 0$

$\sum_{K=0}^{n} q^K = q^0 + q^1 + q^2 \dots q^n$

1- BASE INDUTTIVA: $n=0$ $\sum_{K=0}^{0} q^K = \frac{1-q}{1-q} = 1$ (VERO)

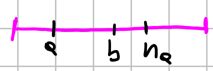
2- PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMOLA VERA PER n, DIMOSTRIAMOLA PER $n+1$:

$\sum_{K=0}^{n+1} q^K = \sum_{K=0}^{n} q^K + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ (VERA)

PROPRIETÁ DI $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{R}$

1- "I RAZIONALI SONO TANTI", $\forall p, q \in \mathbb{Q}$, $\exists$ INFINITI $r \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $p < r < q$ ($1 < 1.00\dots n < 2$)

2- "PROPRIETÁ DI ARCHIMEDE", $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ TALE CHE $na > b$

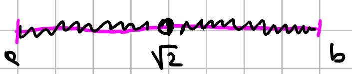


3- "$\mathbb{Q}$ HA DEI BUCHI": AD ES. $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$

$B = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geq 2\}$

$\nexists r \in \mathbb{Q}$ TALI CHE SEPARI A E B CIOÉ TALE CHE $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

$a < r < b$



4- SUI REALI SI POSSONO DEFINIRE LE 4 OPERAZIONI $(+, -, \cdot, /)$ E UNA RELAZIONE D'ORDINE $(\leq)$.

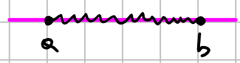
TEOREMA ($\mathbb{Q}$ DENSO IN $\mathbb{R}$): SIANO $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ALLORA $\exists q \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $a < q < b$

Valore assoluto e disuguaglianza triangolare

Definizione: Un intervallo I è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che $\forall a,b \in I$, $\forall r \in \mathbb{R}$ tale che $a<r<b \Rightarrow r \in I$.

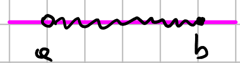
Notazione: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

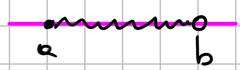


$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$



$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

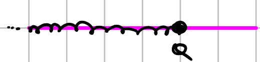


- a,b si dicono estremi dell'intervallo.
- (a,b) sono i punti interni.
- $b-a$ è l'ampiezza dell'intervallo.
- $\frac{b+a}{2}$ è il centro.

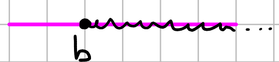
Questi sono gli intervalli limitati

Con i simboli $+\infty$, $-\infty$ indicheremo $\pm$ infinito, che <u>non</u> sono numeri reali, ma per cui vale che $-\infty < x < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$

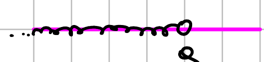


- $[b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge b\}$



- $(b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$

- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



N.B.: Alcuni testi usano la quadra aperta al posto della tonda, ad esempio:

$(a,b) =]a,b[$

DEFINIZIONE: Sia $x \in \mathbb{R}$. Il valore assoluto (o modulo) $|x|$ é definito come:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x| = |-x|$, $|x| \geq 0$, $|xy| = |x| \cdot |y|$

PROPOSIZIONE: $x \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, allora $|x| \leq M \iff x \in [-M, M] \iff -M \leq x \leq M$

TEOREMA (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE): $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x+y| \leq |x| + |y|$

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

Sommiamole:

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$ $\quad x+y \in [-(|x|+|y|), |x|+|y|] \iff |x+y| \leq |x|+|y|$

Venerdí 10 Ottobre 2025

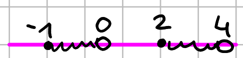
Maggioranti, Minoranti, max, min

DEFINIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Si dice che:

1- x é maggiorante di A, se $\forall a \in A$, $x \geq a$

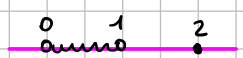
2- x é un minorante di A, se $\forall a \in A$, $x \leq a$

ES: $A = [-1, 0) \cup [2, 4)$

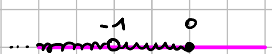


$B = [3, +\infty)$

$C = (0, 1) \cup \{2\}$



$D = (-\infty, 0] \setminus \{-1\}$



A: L'insieme dei maggioranti di A é $[4, +\infty)$, dei minoranti $(-\infty, -1]$

B: L'insieme dei maggioranti di B é $\emptyset$, dei minoranti $(-\infty, 3]$

C: L'insieme dei maggioranti di C é $[2, +\infty)$, dei minoranti $(-\infty, 0]$

D: L'insieme dei maggioranti di D é $[0, +\infty)$, dei minoranti $\emptyset$

DEFINIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$. SE A AMMETTE ALMENO UN MAGGIORANTE (MINORANTE) SI DICE SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) LIMITATO. SE A É SIA SUPERIORMENTE LIMITATO CHE INFERIORMENTE LIMITATO SI DICE LIMITATO. SE A NON É LIMITATO, SI DICE ILLIMITATO.

ES: SIANO A, B, C, D COME PRIMA.

A É SIA SUPERIORMENTE LIMITATO CHE INFERIORMENTE LIMITATO, QUINDI LIMITATO.

B É INFERIORMENTE LIMITATO, QUINDI É ILLIMITATO.

C É SIA SUPERIORMENTE LIMITATO CHE INFERIORMENTE LIMITATO, QUINDI LIMITATO.

D É SUPERIORMENTE LIMITATO, QUINDI É UN INSIEME ILLIMITATO.

ES: $\mathbb{N}$: L'INSIEME DEI MINORANTI É $(-\infty, 0]$, DEI MAGGIORANTI $\emptyset$ QUINDI $\mathbb{N}$ É INFERIORMENTE LIMITATO MA SUPERIORMENTE ILLIMITATO.

DEFINIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. DICIAMO CHE:

1- x É IL MASSIMO DI A (E SCRIVIAMO $x = \max A$), SE $x \in A$ ED É UN MAGGIORANTE DI A.

2- x É IL MINIMO DI A (E SCRIVIAMO $x = \min A$), SE $x \in A$ ED É UN MINORANTE DI A.

ES:

$A = [-1, 0) \cup [2, 4)$ $\min A = -1$, A NON AMMETTE MAX

$B = [3, +\infty)$ $\min B = 3$, B NON AMMETTE MAX

$C = (0, 1) \cup \{2\}$ C NON AMMETTE MIN, $\max C = 2$

$D = (-\infty, 0] \setminus \{-1\}$ D NON AMMETTE MIN, $\max D = 0$

TEOREMA: $A \subseteq \mathbb{R}$. IL MAX E MIN DI A, SE ESISTONO, SONO UNICI.

DIMOSTRAZIONE: (MAX) SUPPONIAMO CHE x_1, x_2 SIANO DUE MASSIMI.

DATO CHE $x_1 = \max A$, $\forall a \in A \; x_1 \geq a \Rightarrow x_1 \geq x_2$ $x_2 = \max A$, $\forall a \in A \; x_2 \geq a \Rightarrow x_2 \geq x_1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\blacksquare$

DIMOSTRAZIONE: (MIN) SUPPONIAMO CHE x_1, x_2 SIANO DUE MINIMI.

DATO CHE $x_1 = \min A$, $\forall a \in A \; x_1 \quad a \Rightarrow x_1 \leq x_2$ $x_2 = \min A$, $\forall a \in A \; x_2 \quad a \Rightarrow x_2 \leq x_1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\blacksquare$

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

DEFINIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ E SUPERIORMENTE LIMITATO (INFERIORMENTE LIMITATO). SI DEFINISCE ESTREMO SUPERIORE (ESTREMO INFERIORE), E LO INDICHIAMO CON SUP.A (INF. A), IL MINIMO DEI MAGGIORANTI (IL MASSIMO DEI MINORANTI). SE A NON È SUPERIORMENTE LIMITATO (INFERIORMENTE LIMITATO) PONIAMO $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$).

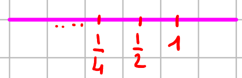
ES:
$A = [-1,0) \cup [2,4)$ INF. $A = -1 = \min A$, SUP. $A = 4$

$B = [3,+\infty)$ INF. $B = 3 = \min B$, SUP. $B = +\infty$

$C = (0,1) \cup \{2\}$ INF. $C = 0$, SUP. $B = 2 = \max C$

$D = (-\infty, 0] \setminus \{-1\}$ INF. $D = -\infty$, SUP. $D = 0 = \max D$

ES: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$



SUP. $A = 1 = \max A$, INF. $A = 0$

OSSERVAZIONE: SE $A \subseteq \mathbb{R}$ AMMETTE MAX (MIN), ALLORA $\max A = \sup A$ ($\min A = \inf A$).

TEOREMA (COMPLETEZZA DEI REALI): OGNI SOTTOINSIEME NON VUOTO E SUPERIORMENTE LIMITATO (INFERIORMENTE LIMITATO) DI $\mathbb{R}$, AMMETTE ESTREMO SUPERIORE (ESTREMO INFERIORE).

DIMOSTRAZIONE: NO!

ES: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| - 2 \leq 0\}$. TROVARE INF/SUP/MIN/MAX DI A

RISOLVIAMO LA DISEQUAZIONE DISTINGUENDO IN CASI:

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 2 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ -1-\sqrt{3} \leq x \leq -1+\sqrt{3} \end{cases}$ $\Rightarrow 0 \leq x \leq -1+\sqrt{3}$

2) $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 2 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3} \end{cases}$ $\Rightarrow 1-\sqrt{3} \leq x < 0$

LE SOLUZIONI SONO: $1-\sqrt{3} \leq x \leq -1+\sqrt{3}$.

$\Rightarrow A = [1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$ $\max A = -1+\sqrt{3} = \sup A$ $\min A = 1-\sqrt{3} = \inf A$

ES: $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < |x| + 1\}$ DETERMINARE MIN/MAX/INF./SUP. DIVIDERLO IN CASI È LUNGO

ELEVIAMO ALLA SECONDA: $(|x+2|)^2 < (|x|+1)^2 = \cancel{x^2} + 4 + 4x < \cancel{x^2} + 1 + 2|x| \rightarrow 2|x| > 3 + 4x$

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x > 3 + 4x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

2) $\begin{cases} x < 0 \\ -2x > 3 + 4x \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow x < -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow B = (-\infty, -\frac{1}{2}]$ INF. $B = -\infty$ SUP. $B = -\frac{1}{2}$ NO MAX/MIN

RADICI / POTENZE / LOGARITMI

TEOREMA ($\exists$ RADICI n-ESIMA): $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
ALLORA $\exists!\, r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ TALE CHE $r^n = y$. SI PONE $r = \sqrt[n]{y}$

N.B.: $\sqrt{4} = 2$, $\cancel{\sqrt{4} = \pm 2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$, $\cancel{\sqrt{x^2} = \pm x}$

OSSERVAZIONE: SOLO NEL CASO IN CUI n SIA DISPARI, SI PUÓ DEFINIRE LA RADICE
$y < 0$: $\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{-y}$

POTENZA CON ESPONENTE RAZIONALE

DEFINIZIONE: SIA $a \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. PONIAMO $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ $\quad a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$

OSSERVAZIONE: SI PUÓ MOSTRARE CHE $(a^{\frac{1}{q}})^p = (a^p)^{\frac{1}{q}}$

N.B.: SE PRENDESSIMO $a < 0$, CI SONO GROSSI PROBLEMI:
$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ $\;\text{!!}\;$ PERCHÉ $(-8)^{\frac{2}{6}}$ NON DEVE AVERE BASE < 0.

ALCUNE PROPRIETÁ: $a \geq 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

1- $\dfrac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_2 - r_1}$

2- $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$

3- SE $a > 1$ $\quad r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$
SE $0 < a < 1$ $\quad r_1 > r_2 \Rightarrow a^{r_1} > a^{r_2}$
MONOTONIA

POTENZE AD ESPONENTE REALE

DEFINIZIONE: SE $a > 1$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ $\quad a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\, q \leq r\}$
$0 < a < 1$ $\quad a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\, q \geq r\}$

OSSERVAZIONE: ANCHE PER LE POTENZE REALI, VALGONO LE PROPRIETÁ
1, 2, 3 VISTE IN $\mathbb{Q}$.

LOGARITMO

DEFINIZIONE: SIA $y>0$, $a>0$, $a\neq 1$. DENOTIAMO CON $\log_a y$ L'UNICO $x\in\mathbb{R}$ TALE CHE $a^x = y$

PROPRIETÀ:

- $\log_a(a^x)=x$, $a^{\log_a y}=y$
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
- $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^y) = y\log_a x$
- $c>0,\ c\neq 1$ $\quad \log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ (CAMBIO BASE)

NOTAZIONE: $\log x$ INDICA $\log_e x \to e =$ NUMERO NEPERO

ES: $C=\left\{x\in\mathbb{R} : \log_{x+3}\left|\frac{x+1}{x+3}\right| < 0\right\}$ TROVARE INF., SUP., MIN E MAX

C.E. = $\begin{cases} x+3\neq 1 \\ x+3>0 \\ x+1\neq 0\end{cases}$ $\quad -3 \quad -2 \quad -1$

$x\in(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty) = (-3,+\infty)\setminus\{-2,-1\}$

1) $\underbrace{x+3>0}_{\text{BASE}>1} \Rightarrow x>-2$

$\left|\frac{x+1}{x+3}\right|<1$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\quad |x|\leq M \quad x\in\mathbb{R} \quad M\geq 0$

$-M\leq x\leq M \qquad -1<\frac{x+1}{x+3}<1$

① $\frac{x+1}{x+3}<1 \qquad \frac{x+1}{x+3}<x+3 \qquad \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}-3}{x+3}<0 \qquad \frac{-2}{x+3}<0 \to x+3>0 \quad x>-3$

② $\frac{x+1}{x+3}>-1 \Rightarrow \frac{x+1+x+3}{x+3}>0 \qquad \frac{2x+4}{x+3}>0 \qquad x>-2$

$-3 \quad -2 \qquad x>-2$

2) $\overbrace{0<x+3<1}^{0<a<1} \Rightarrow -3<x<-2 \qquad 1<\frac{x+1}{x+3}<-1$

① $\frac{x+1}{x+3}>1 \Rightarrow \frac{-2}{x+3}>0 \qquad x+3<0 \Rightarrow x<-3$

② $\frac{x+1}{x+3}<-1 \Rightarrow \frac{2(x+2)}{x+3}<0 \qquad \begin{matrix} x<-2 \\ x<-3\end{matrix}$

	-3	-2	
$-$	$-$	$+$	
$-$	$+$	$+$	
$+$	$-$	$+$	

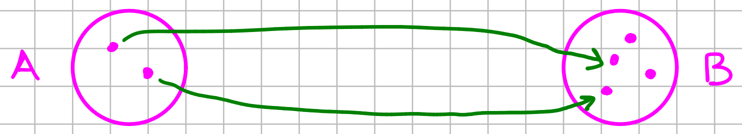
$-3<x<-2$

1- $x>-2$
2- $-3<x<-2$
3- $x\neq 1$

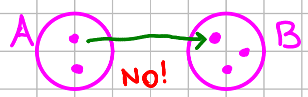
$C=(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$ $\quad$ INF. $C=-3$ $\quad$ SUP. $C=+\infty$ $\quad$ NO MAX/MIN

FUNZIONI

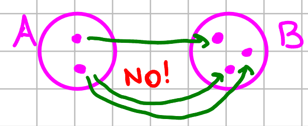
DEFINIZIONE: SIANO A, B INSIEMI NON VUOTI. SI DICE FUNZIONE f DI DOMINIO A E CODOMINIO B, E SI SCRIVE $f: A \to B$ UNA REGOLA CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO DI A UNO ED UN SOLO ELEMENTO DI B.



OGNI ELEMENTO DI A É COLLEGATO CON UN ELEMENTO DI B.
↪ TUTTI



• NO! NON È UNA FUNZIONE SE UN ELEMENTO DI A NON ASSOCIA NIENTE



• NO! NON È UNA FUNZIONE SE UN ELEMENTO DI A COLLEGA PIÚ ELEMENTI

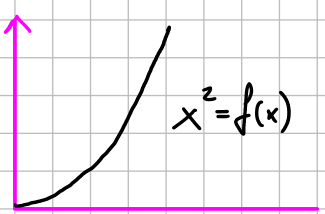
GRAFICO DI UNA FUNZIONE

$f: A \to B$ GRAFICO DI $f = \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$

DEFINIZIONE: $f: A \to B$, f SI DICE:

- INIETTIVA: SE $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $(\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$
- SURIETTIVA: SE $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ TALE CHE $f(x) = y$ (TUTTI I PUNTI DI B DEVONO ESSERE RAGGIUNTI DA A)
- BIETTIVA: SE É SIA SURIETTIVA CHE INIETTIVA. SE f É BIETTIVA, SI PUÓ DEFINIRE UNA FUNZIONE $f^{-1}: B \to A$ DETTA INVERSA TALE CHE $f^{-1}(y) = x$

ES: $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$ $\forall x \in [0, +\infty)$



$f(x) = y$ SE E SOLO SE $x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

É INIETTIVA PERCHÉ $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

E SURIETTIVA PERCHÉ PERCHÉ RAGGIUNGONO TUTTI GLI ELEMENTI DEL CODOMINIO

PERTANTO É BIETTIVA $\to$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

OSSERVAZIONE: $f: A \to B$ INVERTIBILE (AMMETTE INVERSA, CIOÉ BIETTIVA). ALLORA:

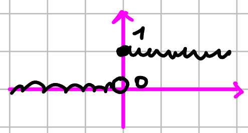
- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

DEFINIZIONE: $f: A \to B$. SI DICE IMMAGINE DI f (IMMAGINE DI A ATTRAVERSO f), L'INSIEME $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$

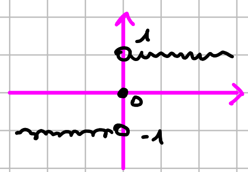
OSSERVAZIONE: É SEMPRE POSSIBILE RENDERE SURREATTIVA UNA FUNZIONE CAMBIANDO IL CODOMINIO: $f: A \to B$, ALLORA $f: A \to f(A)$ É SURIETTIVA. QUINDI SE f É INIETTIVA, SI PUÓ CONSIDERARE L'INVERSA $f^{-1}: f(A) \to A$

ESEMPI (DI FUNZIONI REALI)

1) "GRADINO" $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

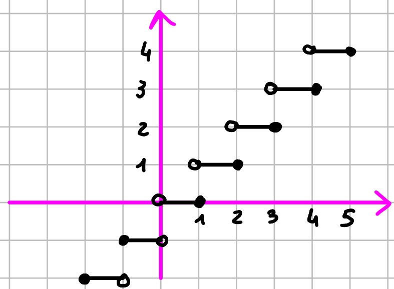


2) "SEGNO" $SGN: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad SGN(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

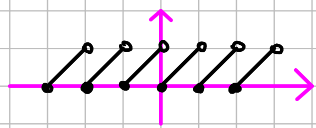


OSS: $|x| = x \cdot SGN(x)$

3) "PARTE INTERA": $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad [x] = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq x \}$



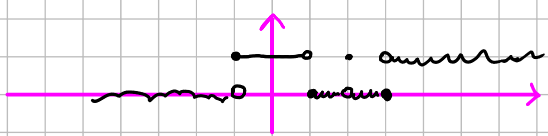
4) "PARTE FRAZIONARIA": $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \{x\} = x - [x]$



DEFINIZIONE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE PERIODICA DI PERIODO $T > 0$ SE $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) "FUNZIONE CARATTERISTICA": SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

AD ESEMPIO $A = [-1, 1) \cup \{2\} \cup (3, +\infty)$

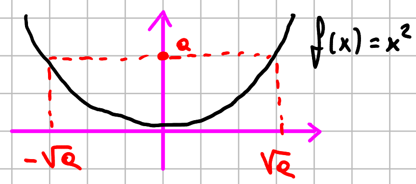


DEFINIZIONE: $f: A \to B$ UNA FUNZIONE. SI DICE IMMAGINE INVERSA DI $y \in B$ L'INSIEME $f^{\leftarrow}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$. SE $B' \subseteq B$, L'IMMAGINE INVERSA DI B' È $f^{\leftarrow}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$

N.B.: SE f È BIETTIVA, $\forall y \in B$ $f^{\leftarrow}(y)$ È COMPOSTA DA UN SOLO ELEMENTO, CIOÈ $f^{-1}(y)$.

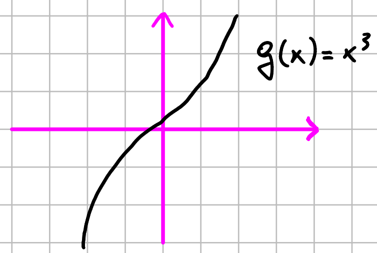
ES: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$f^{\leftarrow}(-1) = \emptyset$, $f^{\leftarrow}(0) = \{0\}$, $f^{\leftarrow}(a) = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ $a > 0$



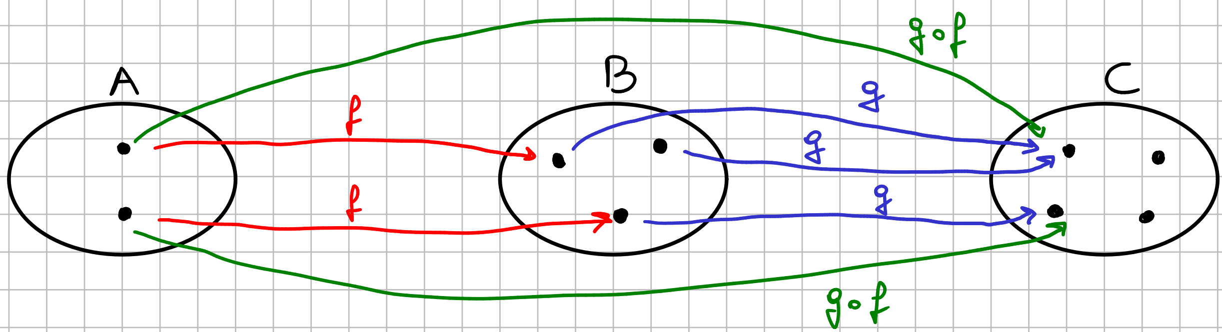
• $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$

$x^3 = y$ SE E SOLO SE $x = \sqrt[3]{y}$, $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $g^{\leftarrow}(y) = \{\sqrt[3]{y}\}$



DEFINIZIONE: $A, B, C \neq \emptyset$. $f: A \to B$, $g: B \to C$. SI DICE COMPOSIZIONE DI f E g, E SI SCRIVE $f \circ g$, LA FUNZIONE DA A IN C CHE AD OGNI $x \in A$ ASSOCIA $g(f(x))$:

$g \circ f : A \to C$ $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$



N.B.: IN GENERALE $g \circ f \neq f \circ g$

ES: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 1 + \log(1+x^2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + \log\left(1 + \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)$

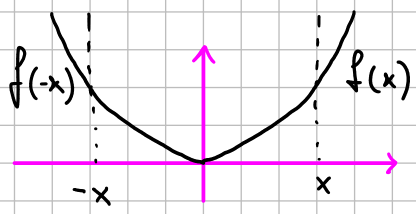
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 + \left(1 + \log(1+x^2)\right)^2}$

DEFINIZIONE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, SI DICE CHE f È:

- PARI : SE $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE y
- DISPARI : SE $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE

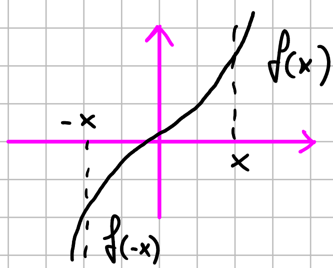
ES: • $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ PARI!



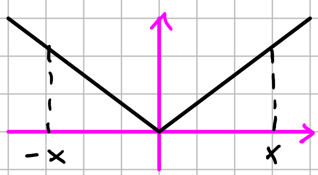
• $g(x) = x^3$

$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ DISPARI!



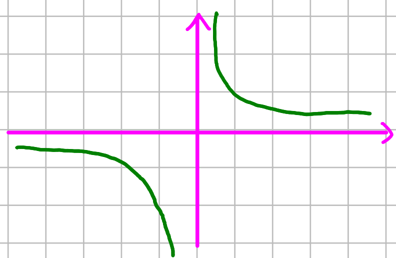
• $h(x) = |x|$

$h(-x) = |-x| = |x| = h(x)$ PARI!



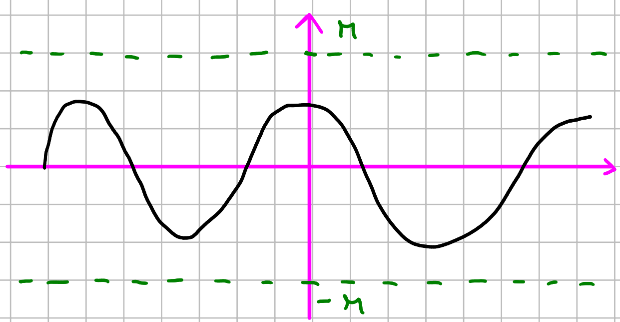
OSSERVAZIONE: ABBIAMO DEFINITO LE SIMMETRIE PARI E DISPARI PER FUNZIONI $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI PUÒ FACILMENTE ESTENDERE LA DEFINIZIONE A FUNZIONI $f: A \to \mathbb{R}$, DOVE A È UN INSIEME SIMMETRICO RISPETTO ALLO ZERO.

ES: LA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ È DISPARI!

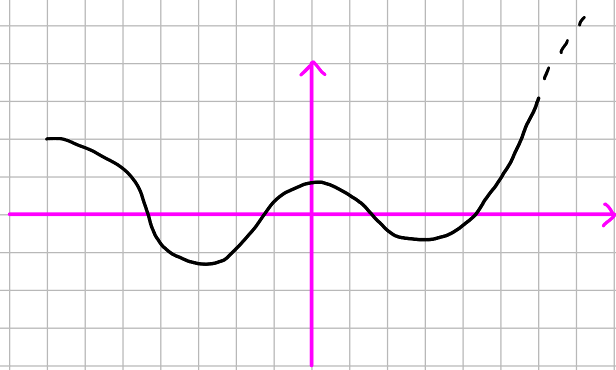


DEFINIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ È LIMITATA SE $f(A)$ È UN SOTTOINSIEME LIMITATO DI $\mathbb{R}$.

CIOÈ $\exists M > 0$ TALE CHE $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in A$ $\quad -M < f(x) < M$



LIMITATA



NON È LIMITATA

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ NON É LIMITATA

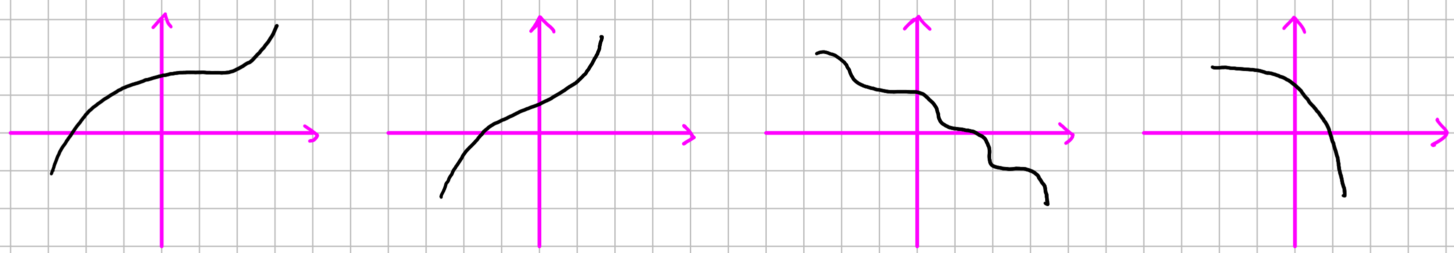
$\forall M > 0 \ \exists x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) > M$ CIOÉ $x^2 > M$ (AD ES. $x = \sqrt{M+1}$)

ES: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ É LIMITATA, INFATTI:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

DEFINIZIONE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE:

- CRESCENTE (STRETTAMENTE CRESCENTE): SE $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2)$
- DECRESCENTE (STRETTAMENTE DECRESCENTE): SE $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(>)}{\geq} f(x)$
- MONOTONA (STRETTAMENTE MONOTONA): SE É CRESCENTE O DECRESCENTE (STRETTAMENTE)



CRESCENTE — STRETTAMENTE CRESCENTE — DECRESCENTE — STRETTAMENTE DECRESCENTE

OSSERVAZIONE: UNA FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA É INIETTIVA, INFATTI SE AD ESEMPIO É STRETTAMENTE CRESCENTE E PRENDIAMO $x_1 \neq x_2$, POSSIAMO SUPPORRE $x_1 < x_2$