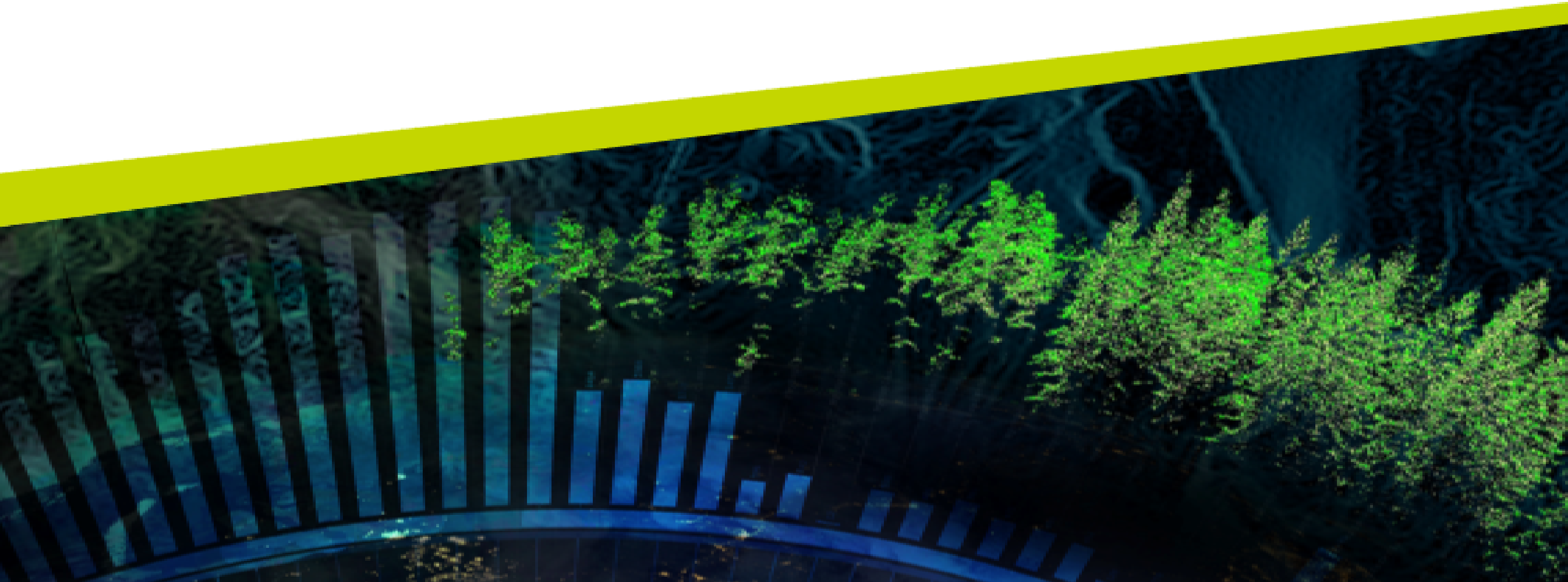
INFERENCIA Y MODELOS ESTADÍSTICOS

Jacqueline Köhler C. y José Luis Jara V.



CAPÍTULO 9. ANOVA DE UNA VÍA PARA MUESTRAS CORRELACIONADAS

En el capítulo 8 conocimos el procedimiento ANOVA de una vía para muestras independientes, que podemos entender como una extensión de la prueba t de Student para muestras independientes. De manera similar, ahora abordaremos el **procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas** (también llamado **ANOVA para medidas repetidas** o **ANOVA intra-sujetos**) que puede asociarse a la prueba t con muestras pareadas, pero ahora con tres o más mediciones (o condiciones) en lugar de dos. Para ello tomaremos como base la explicación que ofrece Lowry (1999, cap. 15).

En este caso podemos distinguir entre dos escenarios:

- **Diseño con medidas repetidas:** a cada sujeto se le toman medidas en las diferentes condiciones, por ejemplo, registrar los tiempos de ejecución para una misma instancia de un problema con k algoritmos diferentes.
- **Diseño con bloques aleatorios:** cada bloque contiene diferentes sujetos agrupados según una determinada característica, por ejemplo, registrar tiempos de ejecución usando instancias de grafos diferentes, pero similares (como que tengan el mismo número de vértices y aristas), para los k algoritmos.

El método es el mismo en ambos casos e intenta controlar estadísticamente la variación introducida por factores distintos al que se desea estudiar, usando para ello varias mediciones de un sujeto (o grupos de sujetos parecidos). Si bien el diseño con bloques aleatorios es común, especialmente en medicina, este apunte usa las medidas repetidas en su discusión, ya que son más comunes en el área de la informática.

Como es habitual, usemos un ejemplo para ver cómo se lleva a cabo el procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas. Supongamos que un estudiante de un curso de programación debe comparar la eficiencia de cuatro algoritmos de ordenamiento: *quicksort*, *bubblesort*, *radixsort* y *mergesort*. Para ello, ha seleccionado aleatoriamente 6 arreglos de igual tamaño y registrado, para cada uno de ellos, el tiempo de ejecución utilizado por cada algoritmo (en milisegundos), como muestra la tabla 9.1[1].

Instancia	**Quicksort**	**Bubblesort**	**Radixsort**	**Mergesort**
1	23,2	31,6	30,1	25,0
2	22,6	29,3	28,4	25,7
3	23,4	30,7	28,7	25,7
4	23,3	30,8	28,3	23,7
5	21,8	29,8	29,9	25,5
6	23,9	30,3	29,1	24,7

Tabla 9.1: tiempos de ejecución para las diferentes instancias con cada algoritmo del ejemplo.

En este caso, la lógica es muy similar a la que ya conocimos para ANOVA con muestras independientes. Sin embargo, existe una diferencia importante al trabajar con muestras correlacionadas: no toda la variabilidad es pura e inevitable, sino que una parte de ella se debe a diferencias individuales preexistentes entre los sujetos (por ejemplo, un arreglo puede estar ordenado desde el inicio, mientras otro podría estar en orden inverso).

Recordemos que la pregunta detrás de ANOVA es: ¿se diferencian las medias poblacionales?, por lo que nuestras hipótesis son:

H_0: El tiempo de ejecución promedio es igual para los cuatro algoritmos.
H_A: El tiempo de ejecución promedio es diferente para al menos un algoritmo.

En lenguaje matemático, estas hipótesis podrían expresarse como:

[1] Los valores aquí expuestos son ficticios.

Sean μ_Q, μ_B, μ_R y μ_M los tiempos de ejecución medios para las mismas instancias de los algoritmos de ordenamiento Quicksort, Bubblesort, Radixsort y Mergesort, respectivamente, entonces:

H_0: $\mu_Q = \mu_B = \mu_R = \mu_M$
H_A: Existe al menos un par (i, j) tal que $\mu_i \neq \mu_j$ con $i, j \in \{Q, B, R, M\}$

Notemos que, al igual que al trabajar con muestras independientes, la prueba ANOVA para medidas repetidas sigue siendo una prueba ómnibus. También, que las hipótesis podrían expresarse en términos de las diferencias entre pares de medias iguales (o distintas) a cero.

9.1 CONDICIONES PARA USAR ANOVA DE UNA VÍA PARA MUESTRAS CORRELACIONADAS

Al igual que otras pruebas que hemos conocido en capítulos anteriores, este procedimiento requiere que se cumplan algunas condiciones:

1. La escala con que se mide la variable dependiente tiene las propiedades de una escala de intervalos iguales.
2. Las mediciones son independientes al interior de cada grupo.
3. Se puede suponer razonablemente que la(s) población(es) de origen sigue(n) una distribución normal.
4. La matriz de varianzas-covarianzas es esférica. Como explica Horn (2008, p. 1), esta condición establece que las varianzas entre los diferentes niveles de las medidas repetidas deben ser iguales.

Veamos si nuestro ejemplo cumple con las condiciones. La primera se verifica, puesto que el tiempo, como toda magnitud física, tiene una escala de intervalos iguales (de hecho tiene escala de razón). A su vez, el enunciado señala que el proceso seguido por el ingeniero garantiza el cumplimiento de la segunda condición.

La figura 9.1 (creada mediante el script 9.1, líneas 20–26) muestra gráficos Q-Q para cada grupo, donde se puede apreciar que no se observan valores que pudieran ser considerados atípicos y se puede suponer razonablemente que las distribuciones se asemejan a la normal.

La prueba de esfericidad es más compleja, por lo que no se aborda en este texto. En principio, podemos examinar las diferencias entre las varianzas registradas para cada algoritmo (que se muestran en la tabla 9.2). Podemos ver que las diferencias parecen más bien "pequeñas" si se considera que los tiempos promedio están el rango de 23 a 30 [ms], por lo que podríamos asumir que son iguales. No obstante, la función de R `ezANOVA()` incluye una prueba para verificar esta condición: la **prueba de esfericidad de Mauchly**, e incluso proporciona un método para controlar posibles violaciones, como veremos más adelante en este capítulo.

	Mergesort	Quicksort	Radixsort
Bubblesort	0.05	0.12	0.07
Mergesort		0.06	0.01
Quicksort			-0.05

Tabla 9.2: diferencias de las varianza del tiempo de ejecución entre cada par de algoritmos.

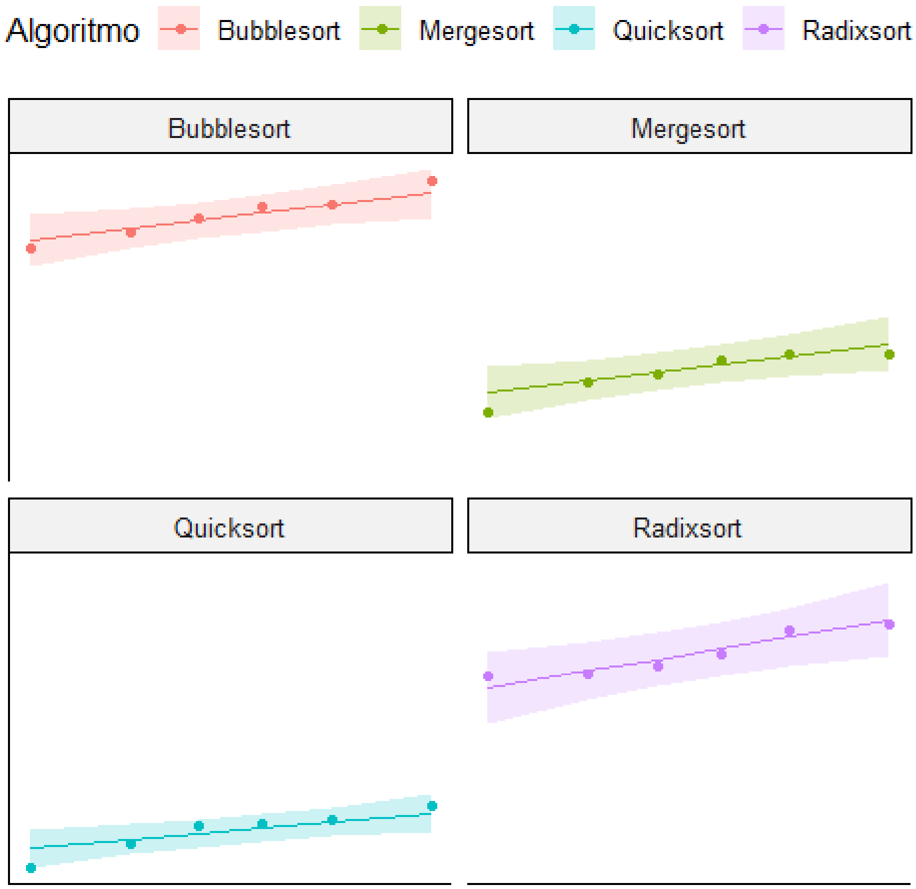


Figura 9.1: gráfico para comprobar el supuesto de normalidad en las muestras del ejemplo.

9.2 PROCEDIMIENTO ANOVA DE UNA VÍA PARA MUESTRAS CORRELACIONADAS

Al igual que para el caso de muestras independientes, el procedimiento ANOVA para muestras correlacionadas opera en base a la variabilidad, calculada en base a la suma de los cuadrados de las desviaciones. Recordemos la forma general de este cálculo:

$$SS = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

9.2.1 Separando la variabilidad intra-grupos

Los primeros pasos son idénticos a los que ya estudiamos para ANOVA de una vía con muestras independientes, y consisten en calcular la variabilidad total (es decir, para las muestras combinadas), la variabilidad entre grupos y la variabilidad intra-grupos, denotadas por SS_T, SS_{bg} y SS_{wg}, respectivamente:

$$\begin{aligned} SS_T &= 224,930 \\ SS_{bg} &= 213,045 \\ SS_{wg} &= 11,885 \end{aligned}$$

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, al trabajar con muestras correlacionadas es necesario descartar la variabilidad debida a las diferencias preexistentes entre los diferentes sujetos ($SS_{sujetos}$), pues estas son ajenas al factor en estudio, y solo nos interesa conservar la variabilidad pura (SS_{error}). Así, en ANOVA para muestras correlacionadas aparece una nueva identidad, dada por la ecuación 9.1.

$$SS_{wg} = SS_{sujetos} + SS_{error} \tag{9.1}$$

De manera similar a la que ya empleamos en cálculos previos, la variabilidad entre sujetos está dada por la ecuación 9.2, donde:

- k corresponde a la cantidad de observaciones (medidas) por cada sujeto.
- $\overline{x}_i$ es la media de las observaciones del i-ésimo sujeto.
- $\overline{x}_T$ es la media combinada de las mediciones.

$$SS_{sujetos} = k \cdot \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i - \overline{x}_T)^2 \tag{9.2}$$

La tabla 9.3 muestra una vez más las observaciones del ejemplo, incluyendo el tiempo promedio de ejecución para cada instancia.

Instancia	Quicksort	Bubblesort	Radixsort	Mergesort	$\overline{x}$
1	23,2	31,6	30,1	25,0	27,475
2	22,6	29,3	28,4	25,7	26,500
3	23,4	30,7	28,7	25,7	27,125
4	23,3	30,8	28,3	23,7	26,525
5	21,8	29,8	29,9	25,5	26,750
6	23,9	30,3	29,1	24,7	27,000

Tabla 9.3: tiempos de ejecución y tiempo medio de ejecución para las diferentes instancias del ejemplo.

Haciendo los cálculos correspondientes para el ejemplo, obtenemos:

$$\begin{aligned} SS_{sujetos} &= 4 \cdot [(27,475 - 26,896)^2 + (26,500 - 26,896)^2 + (27,125 - 26,896)^2 + \\ &\qquad (26,525 - 26,896)^2 + (26,750 - 26,896)^2 + (27,000 - 26,896)^2] = 2,857 \\ SS_{error} &= SS_{wg} - SS_{sujetos} = 11,885 - 2,857 = 9,028 \end{aligned}$$

9.2.2 El estadístico de prueba F

Al igual que en el capítulo 8, calculamos ahora los grados de libertad ya conocidos (recordemos que ahora k corresponde a la cantidad de mediciones por sujeto):

$$\begin{aligned} \nu_T = &\quad n_T - 1 = 24 - 1 &= 23 \\ \nu_{bg} = &\quad k - 1 = 4 - 1 &= 3 \\ \nu_{wg} = &\quad n_T - k = 24 - 4 &= 20 \end{aligned}$$

Puesto que anteriormente descompusimos la variabilidad intra-grupos en variabilidad intra-sujetos y variabilidad del error, necesitamos también identificar los grados de libertad correspondientes a cada componente, dados por las ecuaciones 9.3 y 9.4, respectivamente.

$$\nu_{sujetos} = \quad n_{sujetos} - 1 \tag{9.3}$$

$$\nu_{error} = \quad \nu_{wg} - \nu_{sujetos} \tag{9.4}$$

Para el ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} \nu_{sujetos} = &\quad 6 - 1 &= 5 \\ \nu_{error} = &\quad 20 - 5 &= 15 \end{aligned}$$

Las medias cuadradas del procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas son, respectivamente, la media cuadrada entre grupos para el efecto (igual que para muestras independientes) y la media cuadrada del error, dada por la ecuación 9.5.

$$MS_{error} = \frac{SS_{error}}{\nu_{error}} \tag{9.5}$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} MS_{efecto} = MS_{bg} &= \frac{213,045}{3} &= 71,015 \\ MS_{error} &= \frac{9,028}{15} &= 0,602 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$F = \frac{MS_{\text{efecto}}}{MS_{\text{error}}} = \frac{71,015}{0,602} = 117,992$$

Al hacer la llamada `pf(117.992, 3, 15, lower.tail = FALSE)` para calcular el valor p, obtenemos $p = 1,177 \cdot 10^{-10}$.

9.2.3 Resultado del procedimiento ANOVA

Una vez más, el resultado del procedimiento se representa en la forma tabular, como muestra la tabla 9.4.

El valor p obtenido es muy menor a cualquier nivel de significación típico que podamos considerar, por lo que rechazamos la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa. Así, el estudiante del ejemplo concluye con más de 99 % de confianza que existen diferencias significativas entre al menos dos de los algoritmos de ordenamiento comparados.

Fuente	ν	**SS**	**MS**	**F**	**p**
Efecto	3	213,045	71,015	117,991	$1,177 \cdot 10^{-10}$
Error	15	9,028	0,602		
TOTAL	23	224,930			

Tabla 9.4: resultado del procedimiento ANOVA.

9.2.4 Resumen del procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas

El procedimiento ANOVA de una vía para variables independientes puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Calcular la suma de los cuadrados de las desviaciones para la muestra combinada (SS_T).
2. Para cada grupo g, calcular la suma de los cuadrados de las desviaciones dentro de dicho grupo (SS_g).
3. Calcular la variabilidad entre grupos (SS_{bg}).
4. Calcular la variabilidad al interior de los grupos (SS_{wg}).
5. Calcular la variabilidad intra-sujetos y la variabilidad del error ($SS_{sujetos}$ y SS_{error}).
6. Calcular los grados de libertad relevantes (ν_T, $\nu_{efecto} = \nu_{bg}$ y ν_{error}).
7. Calcular las medias cuadradas ($MS_{efecto} = MS_{bg}$ y MS_{error}).
8. Calcular el estadístico de prueba (F).
9. Obtener el valor p.

9.3 ANOVA DE UNA VÍA PARA MUESTRAS CORRELACIONADAS EN R

Para efectuar el procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas en R, podemos usar las mismas funciones ya estudiadas en el capítulo 8: `aov()` y `ezANOVA()`, como ilustra el script 9.1.

En el caso de `aov()`, podemos apreciar que la fórmula entregada en la llamada (líneas 31–32 del script 9.1) es bastante diferente a la del capítulo 8. Esto se debe a que esta función realiza por defecto un procedimiento ANOVA para muestras independientes, por lo que se debe explicitar en la fórmula que se requiere descartar la variabilidad entre sujetos. La figura 9.2 muestra el resultado obtenido, idéntico al presentado en la tabla 9.4 salvo por ligeras diferencias de redondeo.

```
Resultado de la prueba ANOVA para muestras correlacionadas con aov

Error: Instancia
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Residuals  5  2.857  0.5714

Error: Instancia:Algoritmo
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
Algoritmo  3 213.04   71.01     118 1.18e-10 ***
Residuals 15   9.03    0.60
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Figura 9.2: resultado del procedimiento ANOVA usando la función `aov()`.

La llamada a `ezANOVA()`, en cambio, es muy similar a la ya conocida, como se puede apreciar en las líneas 39–40 del script 9.1. Es importante destacar que la única diferencia con respecto a la llamada realizada en el capítulo 8 es que ahora **el argumento** `between` empleado en el capítulo 8 ha sido **reemplazado por** `within` para la variable independiente. Esta diferencia indica a `ezANOVA()` que se trata de un procedimiento ANOVA con muestras correlacionadas. La figura 9.3 muestra, una vez más, que se obtiene el mismo resultado.

Script 9.1: procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas.

```
library(tidyverse)
library(ggpubr)
library(ez)

# Crear el data frame.
instancia <- factor(1:6)
Quicksort <- c(23.2, 22.6, 23.4, 23.3, 21.8, 23.9)
Bubblesort <- c(31.6, 29.3, 30.7, 30.8, 29.8, 30.3)
Radixsort <- c(30.1, 28.4, 28.7, 28.3, 29.9, 29.1)
Mergesort <- c(25.0, 25.7, 25.7, 23.7, 25.5, 24.7)
datos <- data.frame(instancia, Quicksort, Bubblesort, Radixsort, Mergesort)

# Llevar data frame a formato largo.
datos <- datos %>% pivot_longer(c("Quicksort", "Bubblesort", "Radixsort",
                                  "Mergesort"),
                                names_to = "algoritmo", values_to = "tiempo")

datos[["algoritmo"]] <- factor(datos[["algoritmo"]])

# Comprobción de normalidad.
g <- ggqqplot(datos, x = "tiempo", y = "algoritmo", color = "algoritmo")
g <- g + facet_wrap(~ algoritmo)
g <- g + rremove("x.ticks") + rremove("x.text")
g <- g + rremove("y.ticks") + rremove("y.text")
g <- g + rremove("axis.title")
print(g)

# Procedimiento ANOVA con aov.
cat("Procedimiento ANOVA usando aov\n\n")

prueba <- aov(tiempo ~ algoritmo + Error(instancia/(algoritmo)),
              data = datos)

print(summary(prueba))

# Procedimiento ANOVA con ezANOVA().
cat("\n\nProcedimiento ANOVA usando ezANOVA\n\n")

prueba2 <- ezANOVA(data = datos, dv = tiempo, within = algoritmo,
                   wid = instancia, return_aov = TRUE)

print(summary(prueba2$aov))
cat("\n\nPero ezANOVA entrega más información.\n")
cat("El resultado de la prueba de esfericidad de Mauchly:\n\n")
print(prueba2[["Mauchly's Test for Sphericity"]])

cat("\n\nY factores de corrección para cuando no se cumple la\n")
cat("condición de esfericidad:\n\n")
print(prueba2$`Sphericity Corrections`)

# Gráfico del tamaño del efecto.
g2 <- ezPlot(data = datos, dv = tiempo, wid = instancia, within = algoritmo,
             y_lab = "Tiempo promedio de ejecución [ms]", x = algoritmo)

print(g2)
```

```
Resultado de la prueba ANOVA para muestras correlacionadas con ezANOVA

Error: Instancia
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Residuals  5  2.857  0.5714

Error: Instancia:Algoritmo
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
Algoritmo  3 213.04   71.01     118 1.18e-10 ***
Residuals 15   9.03    0.60
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Figura 9.3: resultado del procedimiento ANOVA usando la función `ezANOVA()`.

Habíamos mencionado que otra ventaja de `ezANOVA()` es que verifica la condición de esfericidad mediante la prueba de esfericidad de Mauchly, cuyo resultado se muestra en la figura 9.4. Podemos apreciar que el valor p obtenido en esta prueba es muy alto ($p = 0,555$), de lo que se desprende que los datos del ejemplo sí cumplen con la condición de esfericidad (hipótesis nula de la prueba de Mauchly).

```
Resultado de la prueba de esfericidad de Mauchly

     Effect         W         p p<.05
2 Algoritmo 0.3367911 0.5545469
```

Figura 9.4: resultado de la prueba de esfericidad de Mauchly realizada por `ezANOVA()`.

Ahora bien, existen dos correcciones que suelen emplearse cuando se producen violaciones a la condición de esfericidad: la de **Greenhouse-Geisser** y la de **Huynd-Feldt**. Ambas estiman la esfericidad, denotada por ϵ, y corrigen el valor p de ANOVA en base a dicha estimación (ajustando los grados de libertad de la distribución F usada en el cálculo). La corrección de Greenhouse-Geisser es más conservadora y tiende a subestimar ϵ cuando este es cercana a 1, por lo que se recomienda su uso para $\epsilon < 0,75$. Para $\epsilon \geq 0,75$ (estimada con el método Greenhouse-Geisser, de acuerdo a Karadimitriou y Marshall (2016)) suele emplearse la estimación de Huynd-Feldt, algo más liberal (Lærd Statistics, 2020). `ezANOVA()` lleva a cabo ambas correcciones y reporta para cada una de ellas tanto la estimación de la esfericidad como el valor p corregido, como se aprecia en la figura 9.5:

- GGe: estimación de ϵ con el método de Greenhouse-Geisser.
- p[gg]: valor p tras la corrección de Greenhouse-Geisser.
- HFe: estimación de ϵ con el método de Huynd-Feldt.
- p[HF]: valor p tras la corrección de Huynd-Feldt.

```
Factores de corrección para cuando no se cumple la condición de esfericidad

     Effect       GGe        p[GG] p[GG]<.05      HFe        p[HF] p[HF]<.05
2 Algoritmo 0.6803135 8.377723e-08         * 1.154155 1.177725e-10         *
```

Figura 9.5: correcciones de esfericidad realizadas por `ezANOVA()`.

Si los datos del ejemplo no cumplieran con la esfericidad, deberíamos considerar `p[GG]` como p valor de la prueba, y no el valor (sin corregir) de la tabla entregada por `ezANOVA()` de la figura 9.3.

Una vez más, podemos graficar el tamaño del efecto medido (script 9.1, líneas 52–55), obteniéndose como resultado el gráfico de la figura 9.6.

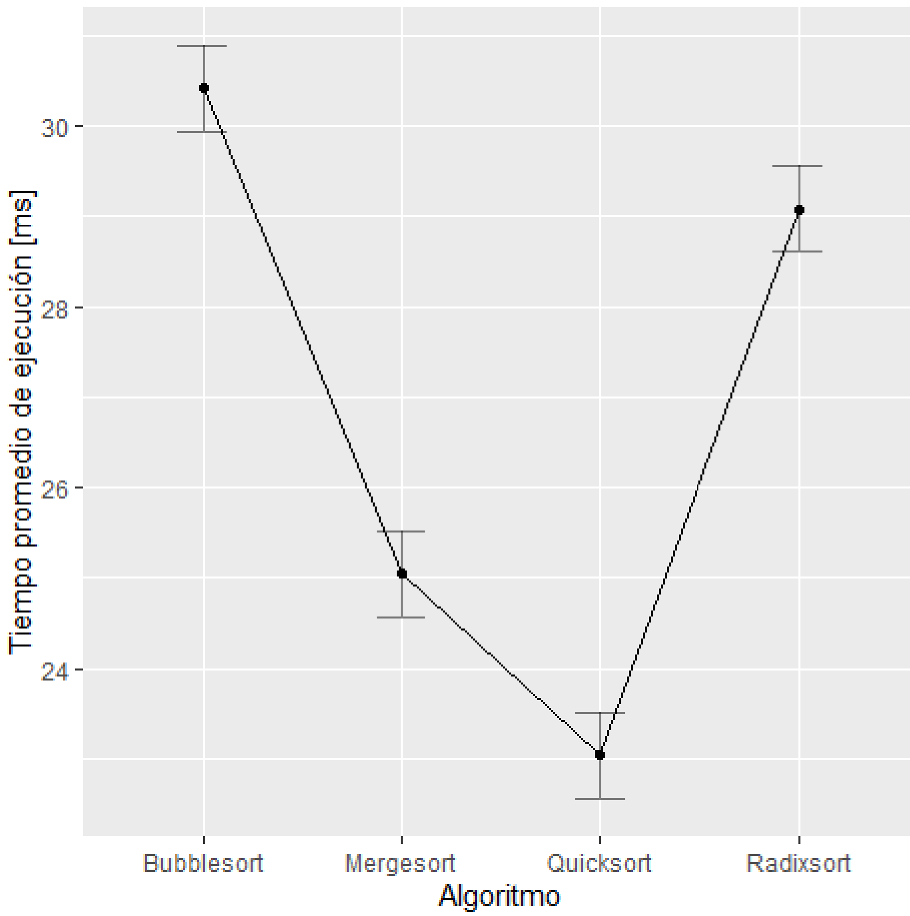


Figura 9.6: Tamaño del efecto medido.

9.4 PROCEDIMIENTOS POST-HOC

Podemos ocupar los mismos procedimientos post-hoc estudiados en el capítulo 8 tras realizar un procedimiento ANOVA de una vía con muestras correlacionadas.

En el caso de las correcciones de Bonferroni y Holm, lo único que cambia es que ahora debemos asignar el valor `TRUE` al argumento `paired` de la función `pairwise.t.test()`.

En cuanto a las pruebas HSD de Tukey y de Scheffé, su realización se dificulta al usar la tabla ANOVA resultante de un proceso de una vía para muestras correlacionadas. Esto se debe a que el formato del objeto `aov` resultante difiere al que se obtiene al realizar un procedimiento ANOVA para muestras independientes, por lo que las funciones del paquete `DescTools` arrojan un error. No obstante, existe una alternativa. El primer paso consiste en crear un modelo mixto (concepto que va más allá de los alcances de este documento) mediante la función `lme(formula, data, random)` del paquete `nlme`, donde:

- `formula`: tiene la forma <variable dependiente>~<variable categórica>.
- `data`: matriz de datos en formato largo.
- `random`: fórmula de la forma ~1|<identificador del sujeto>.

Como segundo paso, estimamos la media de la variable dependiente, con su respectivo intervalo de confianza, para cada nivel de la variable categórica. Para esto usamos la función `emmeans(object, specs)` del paquete homónimo, donde:

- `object`: modelo mixto construido en el paso previo.
- `specs`: nombre del factor en estudio, delimitado por comillas.

Por último, estimamos las medias de las diferencias para los contrastes entre pares, con su error estándar y los valores p correspondientes, mediante la función `pairs(x, adjust)`, donde:

- `x`: diferencias obtenidas en el párrafo precedente.
- `adjust`: método para ajustar los valores p. "tukey" para el método HSD de Tukey, "scheffe" para el método de Scheffé.

Los mecanismos para estimar las medias marginales (emmeans) y para construir otros contrastes con el método de Scheffé van más allá de los alcances de este libro, pero pueden encontrarse en la documentación de los paquetes R involucrados.

El script 9.2 efectúa las pruebas post-hoc para el ejemplo, obteniéndose los resultados de la figura 9.7. Considerando el ajuste para múltiples pruebas de Tukey, podemos concluir con 99 % de confianza que todos los algoritmos tienen tiempos de ejecución distintos, para el que la evidencia no es suficiente para descartar que presentan el mismo tiempo de ejecución medio.

Script 9.2: pruebas post-hoc para el ejemplo.

```r
library(tidyverse)
library(nlme)
library(emmeans)
library(ez)

# Crear el data frame.
instancia <- factor(1:6)
Quicksort <- c(23.2, 22.6, 23.4, 23.3, 21.8, 23.9)
Bubblesort <- c(31.6, 29.3, 30.7, 30.8, 29.8, 30.3)
Radixsort <- c(30.1, 28.4, 28.7, 28.3, 29.9, 29.1)
Mergesort <- c(25.0, 25.7, 25.7, 23.7, 25.5, 24.7)
datos <- data.frame(instancia, Quicksort, Bubblesort, Radixsort, Mergesort)

# Llevar data frame a formato largo.
datos <- datos %>% pivot_longer(c("Quicksort", "Bubblesort", "Radixsort",
                                   "Mergesort"),
                                 names_to = "algoritmo", values_to = "tiempo")

datos[["algoritmo"]] <- factor(datos[["algoritmo"]])

# Nivel de significación.
alfa <- 0.01

# Procedimiento ANOVA.
anova <- ezANOVA(data = datos, dv = tiempo, within = algoritmo,
                 wid = instancia, return_aov = TRUE)

# Procedimiento post-hoc de Bonferroni.
bonferroni <- pairwise.t.test(datos[["tiempo"]], datos[["algoritmo"]],
                              p.adj = "bonferroni", paired = TRUE)

cat("Corrección de Bonferroni\n")
print(bonferroni)

# Procedimiento post-hoc de Holm.
holm <- pairwise.t.test(datos[["tiempo"]], datos[["algoritmo"]],
                        p.adj = "holm", paired = TRUE)

cat("\n\nCorrección de Holm\n")
```

```
print(holm)

# Procedimiento post-hoc HSD de Tukey.
mixto <- lme(tiempo ~ algoritmo, data = datos, random = ~1|instancia)
medias <- emmeans(mixto, "algoritmo")
tukey <- pairs(medias, adjust = "tukey")

cat("\n\nPrueba HSD de Tukey\n\n")
print(tukey)

# Procedimiento post-hoc de Scheffé
cat("\n\nComparación de Scheffé\n")
scheffe <- pairs(medias, adjust = "scheffe")
print(scheffe)
```

9.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuándo aplica el procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas? ¿Con qué otros nombres se encuentra?
2. Explica a qué se refiere "eliminar la variabilidad de los sujetos".
3. ¿Cuáles son las hipótesis contrastadas en el procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas?
4. Enumera las condiciones (o supuestos) del procedimiento ANOVA de una vía para muestras correlacionadas para tener confiabilidad.
5. El conjunto de datos `ChickWeight` registra el peso (en gramos) de 50 pollitos al momento de nacer y al cabo de varios días después de nacidos. Identifica si existen diferencias significativas en el peso de los pollitos al momento de nacer, al cabo de 4 días y luego de 8 días. En caso de detectarse tales diferencias, indica cuáles son.

```
             Corrección de Bonferroni

Pairwise comparisons using paired t tests

data:  Tiempo and Algoritmo

          Bubblesort Mergesort Quicksort
Mergesort 0.00112    -         -
Quicksort 1.4e-05    0.07196   -
Radixsort 0.09232    0.00088   0.00039

P value adjustment method: bonferroni

Corrección de Holm

Pairwise comparisons using paired t tests

data:  Tiempo and Algoritmo

          Bubblesort Mergesort Quicksort
Mergesort 0.00059    -         -
Quicksort 1.4e-05    0.02399   -
Radixsort 0.02399    0.00059   0.00033

P value adjustment method: holm

Prueba HSD de Tukey

 contrast               estimate    SE df t.ratio p.value
 Bubblesort - Mergesort     5.37 0.445 15  12.058 <.0001
 Bubblesort - Quicksort     7.38 0.445 15  16.589 <.0001
 Bubblesort - Radixsort     1.33 0.445 15   2.996 0.0403
 Mergesort - Quicksort      2.02 0.445 15   4.531 0.0020
 Mergesort - Radixsort     -4.03 0.445 15  -9.062 <.0001
 Quicksort - Radixsort     -6.05 0.445 15 -13.594 <.0001

Degrees-of-freedom method: containment
P value adjustment: tukey method for comparing a family of 4 estimates

Comparación de Scheffé
 contrast               estimate    SE df t.ratio p.value
 Bubblesort - Mergesort     5.37 0.445 15  12.058 <.0001
 Bubblesort - Quicksort     7.38 0.445 15  16.589 <.0001
 Bubblesort - Radixsort     1.33 0.445 15   2.996 0.0642
 Mergesort - Quicksort      2.02 0.445 15   4.531 0.0040
 Mergesort - Radixsort     -4.03 0.445 15  -9.062 <.0001
 Quicksort - Radixsort     -6.05 0.445 15 -13.594 <.0001

Degrees-of-freedom method: containment
P value adjustment: scheffe method with rank 3
```

Figura 9.7: resultados de las pruebas post-hoc para el ejemplo.

REFERENCIAS

Horn, R. A. (2008). *Sphericity in repeated measures analysis*. Consultado el 11 de mayo de 2021, desde http://oak.ucc.nau.edu/rh232/courses/EPS625/Handouts/RM-ANOVA/Sphericity.pdf

Karadimitriou, S. M. & Marshall, E. (2016). *Repeated measures ANOVA in R* [statstutor community project]. Consultado el 12 de mayo de 2021, desde https://www.sheffield.ac.uk/polopoly_fs/1.885219!/file/105_RepeatedANOVA.pdf

Lærd Statistics. (2020). *Sphericity* [Lund Research Ltd.]. Consultado el 11 de mayo de 2021, desde https://statistics.laerd.com/statistical-guides/sphericity-statistical-guide.php

Lowry, R. (1999). *Concepts & Applications of Inferential Statistics*. Consultado el 3 de mayo de 2021, desde http://vassarstats.net/textbook/