ShanghaiTech MATH1112: Linear Algebra
Fall 2025 Midterm

P1

讨论在不同参数 λ 下，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \end{cases}$$

何时有唯一解、无穷多解、无解，并在无穷多解时给出通解。

P2

设 $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$，其中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 V 的一组由 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ 中向量构成的基。

P3

线性映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_k = f(\mathbf{u}_k)$

1. 证明：若$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 线性无关，则 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ 也线性无关。
2. 命题：”若$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ 线性无关，则 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 也线性无关。” 是否正确？是请给出证明，否请举反例说明。

P4

线性映射 $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 定义为：

$$\phi([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + 3x_3 + x_4,\ 4x_2 + 5x_4,\ x_1 + 2x_2 + x_3].$$

1. 写出 ϕ 对应的矩阵 A，即 $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$。
2. 求 $\ker \phi$ 与 $\operatorname{im} \phi$ 的维数。

P5

对 $n \in \mathbb{N}^+$ 及 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$,有$n$阶方阵:

$$M(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义 n 阶方阵集合：

$$G = \{M(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

证明 G 对于矩阵乘法与求逆均封闭，即对$\forall A, B \in G$，有 $AB \in G$ 且 $A^{-1} \in G$。

P6

计算下述行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$$

P7

设 A, B 均为 n 阶方阵，$[A\ B]$ 与 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 分别表示 $n \times 2n$ 与 $2n \times n$ 的分块矩阵。

1. 证明：$\max\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leq \operatorname{rank}[A\ B] \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$。
2. "$\operatorname{rank}[A\ B] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$"是否正确？若是，请给出证明；若否，请举反例说明。

P8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

求 A^{-1}、$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}$($A_{ij}$ 指 a_{ij}的代数余子式)。

P9

设 $A=(a_{ij})$ 是 $(n+1)\times n$ 矩阵，$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 是未知数列向量，$\mathbf{b}=[b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}]^T$ 是常数列向量，且 $\operatorname{rank} A=n$。

证明：线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解的充要条件是增广矩阵 $(A\mid\mathbf{b})$ 的行列式值为 0。