

小测试 2

请在 20 分钟内完成下面 2 题

姓名: _____ 学号: _____

Problem 1. 我们将 \mathbb{R}^4 看作一个内积空间，其中内积定义为点积。

- (1). (10 分) 使用 Gram-Schmidt 过程，求出子空间 $W \subseteq \mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ，其中子空间 W 由以下向量张成：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (2). (5 分) 在 \mathbb{R}^4 中，求子空间 W^\perp （正交补空间）的一个标准正交基。

Problem 2. (5 分) 证明：若 A 是一个正交矩阵，那么 A^2 也是一个正交矩阵且 $\det(A^2) = 1$ 。