作业 8

请在 11 月 14 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名: 习题班级:

Q1. (10 marks) 设 A 和 B 是 n 阶方阵，证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\cdot\det(A-B).$$

Q2. (10 marks) 设 X 和 Y 分别是 $n\times k$ 矩阵和 $k\times n$ 矩阵，I_r 是 r 阶单位矩阵. 证明：

$$\det(I_n+XY)=\det(I_k+YX).$$

Q3. (15 marks) 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基。

(1). 求从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3+3\boldsymbol{e}_3$ 到基 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3$ 的过渡矩阵；

(2). 求从基 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3$ 到基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ 的过渡矩阵；

(3). 假设向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3+3\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标列向量是 $(2,-1,5)$，求 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标列向量。

Q4. (10 marks) 向量组 $\boldsymbol{a}_1=(5,-2),\boldsymbol{a}_2=(3,1)$ 和向量组 $\boldsymbol{b}_1=(3,-2),\boldsymbol{a}_2=(-3,4)$ 均是行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的基。求向量 $\boldsymbol{u}=(7,-5)$ 在这两个基下的坐标行向量。

Q5. (20 marks) 命 $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\}$，它是行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

(1). 证明 $\boldsymbol{u}_1=(2,-1,0,0),\boldsymbol{u}_2=(3,0,-1,0),\boldsymbol{u}_3=(1,0,0,1)$ 是 V 的一个基。

(2). 证明 $\boldsymbol{v}_1=(1,1,-1,0),\boldsymbol{u}_2=(1,1,0,3),\boldsymbol{u}_3=(1,0,1,4)$ 是 V 的一个基。

(3). 求从基 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ 到基 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 的过渡矩阵。

(4). 求 $\boldsymbol{w}=(1,1,1,6)\in V$ 在基 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ 和基 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 下的坐标列向量。

Q6. (10 marks)　求下列向量张成的线性子空间的一个基和维数:$(1,1,1,1,0),(1,1,-1,-1,-1),$ $(2,2,0,0,-1),(1,1,5,5,2),(1,-1,-1,0,0)$。

Q7. (10 marks) 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\dim(U+V)=1+\dim(U\cap V)$。证明：$U+V$ 是这两个子空间中的一个，$U\cap V$ 是这两个子空间中的另一个。

Q8. (15 marks) 找出子空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ 和子空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ 的和与交的一个基: $\boldsymbol{u}_1=(1,2,1),\boldsymbol{u}_2=(1,1,-1),\boldsymbol{u}_3=(1,3,3),$ $\boldsymbol{v}_1=(1,2,2),\boldsymbol{v}_2=(2,3,-1),\boldsymbol{v}_3=(1,1,-3)$。