作业 4

请在 10 月 17 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

Problem 1 (15 marks) 计算下列矩阵的秩：

(1) $\begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}$ (x 是变量)

Problem 2 (20 marks) 计算:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k$，其中 k 是任意正整数。

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$，其中 k 是任意正整数。

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$，其中 n 是该矩阵的阶数。

Problem 3 (5 marks) 证明 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Problem 4 (10 marks) P_{34} 第 3 题。

Problem 5 (10 marks) P_{47} 第 4 题。

Problem 6 (10 marks) P_{47} 第 6 题。

Problem 7 (10 marks) P_{47} 第 7 题。

Problem 8 (10 marks) P_{47} 第 8 题。

Problem 9 (10 marks) P_{47} 第 9 题。

附录:

3. 证明若 $a_0 \neq 0$, 则方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩为 $n+1$.

4. 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, E_i 是 $1 \times m$ 矩阵, 其第 i 个分量为 1, 其余分量为 0, F_j 是 $n \times 1$ 矩阵, 其第 j 个分量为 1, 其余分量为 0. 计算 E_iA 和 AF_j.

5. 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, E_{ij} 是 $m \times m$ 矩阵, 其在 (i,j) 处的值 1, 其余处的值均为 0, F_{ij} 是 $n \times n$ 矩阵, 其在 (i,j) 处的值 1, 其余处的值均为 0. 计算 $E_{ij}A$ 和 AF_{ij}.

6. 设 A 和 B 是 $m \times n$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

7. 对任意的 $m \times s$ 矩阵 A 和 $s \times n$ 矩阵 B, 证明:

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - s \leqslant \operatorname{rank}(AB).$$

8. 证明: 如果三个 n 阶方阵的乘积为 0, 那么它们的秩的和不超过 $2n$.

9. 证明: 如果 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 1, 则存在高为 m 的列向量 ($m \times 1$ 矩阵) B 和长为 n 的行向量 ($1 \times n$ 矩阵) C 使得 $A = BC$.