

# ShanghaiTech MATH1112: Linear Algebra

## Fall 2025 Midterm

### P1

讨论在不同参数  $\lambda$  下, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \end{cases}$$

何时有唯一解、无穷多解、无解, 并在无穷多解时给出通解。

### P2

设  $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ , 其中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求  $V$  的一组由  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  中向量构成的基。

### P3

线性映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v}_k = f(\mathbf{u}_k)$

1. 证明: 若  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  线性无关, 则  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  也线性无关。
2. 命题: “若  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  线性无关, 则  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  也线性无关。”是否正确? 是请给出证明, 否请举反例说明。

### P4

线性映射  $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  定义为:

$$\phi([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + 3x_3 + x_4, 4x_2 + 5x_4, x_1 + 2x_2 + x_3].$$

1. 写出  $\phi$  对应的矩阵  $A$ , 即  $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 。
2. 求  $\ker \phi$  与  $\text{im } \phi$  的维数。

## P5

对  $n \in \mathbb{N}^+$  及  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ , 有  $n$  阶方阵:

$$M(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义  $n$  阶方阵集合:

$$G = \{M(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

证明  $G$  对于矩阵乘法与求逆均封闭, 即对  $\forall A, B \in G$ , 有  $AB \in G$  且  $A^{-1} \in G$ 。

## P6

计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

## P7

设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $[A \ B]$  与  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  分别表示  $n \times 2n$  与  $2n \times n$  的分块矩阵。

1. 证明:  $\max\{\text{rank } A, \text{rank } B\} \leq \text{rank}[A \ B] \leq \text{rank } A + \text{rank } B$ 。

2. “ $\text{rank}[A \ B] = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ”是否正确? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例说明。

## P8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

求  $A^{-1}$ 、 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$  ( $A_{ij}$  指  $a_{ij}$  的代数余子式)。

## P9

设  $A = (a_{ij})$  是  $(n+1) \times n$  矩阵,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  是未知数列向量,  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{n+1}]^T$  是常数列向量, 且  $\text{rank } A = n$ 。

证明: 线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解的充要条件是增广矩阵  $(A | \mathbf{b})$  的行列式值为 0。