

## 作业 2

请在 9 月 26 号（周五）课前提交，按照对应习题班号提交

你可能使用到下面的信息：线性方程组 (1) 指的是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

它对应的（称为相伴的或伴随的）齐次线性方程组是：

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. . \quad (2)$$

### Problem 1 (10 marks)

(a). 判断下列方程组是否是确定的:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

(b). 对 (a) 中线性方程组对应的 (称为相伴的或伴随的) 齐次线性方程组讨论其解;

**Problem 2 (10 marks)** 如果方程组 (1) 是确定的，证明它的相伴的齐次线性方程组 (2) 只有零解。举例说明反之不对。

**Problem 3 (10 marks)** 假设  $m = n$ 。证明方程组 (1) 是确定的当且仅当它的相伴的齐次方程组 (2) 只有零解。

**Problem 4 (15 marks)** 判断下列线性方程组是否有解，在有解时求出它的解

(a).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

(b).

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}.$$

**Problem 5 (15 marks)** 在平面上引入直角坐标系，求：

(a). 直线  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  和  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  的交点；

(b). 求四点  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4$  共圆的充要条件。

**Problem 6 (10 marks)** 计算下列矩阵的行列式： $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

**Problem 7 (10 marks)** 找到下面矩阵的简化的行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

**Problem 8** (20 marks) 对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases},$$

找到合适的  $\lambda$  使得线性方程组无解、有唯一解、有无穷解。