作业 13

请在 12 月 19 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名:　　　　　　　　　　　　习题班级:

Q1. (10 marks) 设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子，其平方是恒等算子. 证明：

(1). 对任意的向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 向量 $\boldsymbol{v} - \mathcal{A}\boldsymbol{v}$ 是零向量或以 -1 为特征值的特征向量;

(2). $\mathbb{R}^n$ 是特征空间 $\mathbb{R}{-1}^n$ 和 $\mathbb{R}^n_{-1}$ 的直和.

Q2. (10 marks) 求矩阵 A 的特征多项式和极小多项式:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q3. (10 marks) 利用凯莱-哈密顿定理求矩阵 A 的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q4. (10 marks) 找出对角化矩阵 A 的一个正交矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Q5. (20 marks) 求正交矩阵 T 使得变量替换 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ 把下面的二次型化成典范式.

(1). $3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

(2). $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$

Q6. (10 marks) 设 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量. 证明: 存在保距线性算子把 $\boldsymbol{u}_i$ 映到 $\boldsymbol{v}_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的充要条件是 $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle, 1 \leqslant i, j \leqslant k$.

Q7. (15 marks) 设 $\boldsymbol{w}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量. 对任何向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 命

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle}\boldsymbol{w}.$$

(1). $\mathcal{R}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{w}$.

(2). $\mathcal{R}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ 如果 $\boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{w} \rangle^{\perp}$. (注意 $\langle \boldsymbol{w} \rangle = \mathrm{span}(\boldsymbol{w})$)

(3). $\mathcal{R}_{\boldsymbol{w}}$ 是保距算子