

ShanghaiTech MATH1112: Linear Algebra

Fall 2025 Midterm

P1

讨论在不同参数 λ 下, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \end{cases}$$

何时有一解、无穷多解、无解, 并在无穷多解时给出通解。

P2

设 $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$, 其中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 V 的一组由 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ 中向量构成的基。

P3

线性映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_k = f(\mathbf{u}_k)$

1. 证明: 若 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 线性无关, 则 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ 也线性无关。
2. 命题: "若 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ 线性无关, 则 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 也线性无关。" 是否正确? 是请给出证明, 否请举反例说明。

P4

线性映射 $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为:

$$\phi([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + 3x_3 + x_4, 4x_2 + 5x_4, x_1 + 2x_2 + x_3].$$

1. 写出 ϕ 对应的矩阵 A , 即 $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 。
2. 求 $\ker \phi$ 与 $\text{im } \phi$ 的维数。

P5

对 $n \in \mathbb{N}^+$ 及 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, 有 n 阶方阵:

$$M(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义 n 阶方阵集合:

$$G = \{M(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

证明 G 对于矩阵乘法与求逆均封闭, 即对 $\forall A, B \in G$, 有 $AB \in G$ 且 $A^{-1} \in G$ 。

P6

计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

P7

设 A, B 均为 n 阶方阵, $[A \ B]$ 与 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 分别表示 $n \times 2n$ 与 $2n \times n$ 的分块矩阵。

1. 证明: $\max\{\text{rank } A, \text{rank } B\} \leq \text{rank}[A \ B] \leq \text{rank } A + \text{rank } B$ 。
2. "rank $[A \ B] = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ " 是否正确? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例说明。

P8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

求 A^{-1} 、 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}(A_{ij} \text{ 指 } a_{ij} \text{ 的代数余子式})$ 。

P9

设 $A = (a_{ij})$ 是 $(n+1) \times n$ 矩阵, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是未知数列向量, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{n+1}]^T$ 是常数列向量, 且 $\text{rank } A = n$ 。

证明: 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解的充要条件是增广矩阵 $(A \mid \mathbf{b})$ 的行列式值为 0。