

作业 7

请在 11 月 7 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名：

习题班级：

Q1. (15 marks)

- (1). 根据课上的内容，请继续写出 n 阶行列式与 $n - 2$ 阶行列式的关系表达式；
- (2). 使用数学归纳法证明范德蒙行列式 (Week 5 slides 29 页)。

Q2. (15 marks) 计算下面矩阵的行列式：

$$(1). \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$$

$$(2). \begin{bmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{bmatrix}$$

Q3. (15 marks) 若方阵 A 可逆，证明以下性质：

- (1). $\text{adj}(A)$ 是可逆的；
- (2). $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$ ；
- (3). $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$.

Q4. (10 marks) 证明 n 阶方阵的伴随矩阵的秩只有三个可能：0, 1, n 。

Q5. (10 marks) 假设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩为 $n - 1$, 那么

- (1). 它的基础解系由一个向量组成；
- (2). $\mathbf{d} = [D_1, -D_2, \dots, (-1)^{n-1} D_n]$ 形成方程组的一个基础解系，其中 D_i 是系数矩阵去掉 i 列得到的矩阵的行列式。于是方程组的任意解的形式为 $\lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Q6. (10 marks) 分别使用克拉默法则和消元法解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Q7. (10 marks) 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij},$$

其中 C_{ij} 是 a_{ij} 对应的代数余子式, $i, j = 1, \dots, n$ 。

Q8. (15 marks) 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, A 可逆, I 是 n 阶单位矩阵。

(1). 求矩阵 X, Y 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

然后证明

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

(2). 如果 $AC = CA$, 证明

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det(AD - CB).$$