# 作业 15

请在 1 月 4 号（周日）课前，按照对应习题班号提交

姓名:　　　　　　　　　　　　习题班级:

**Q1**. (10 marks) 运用正交化方法找出埃氏空间 $\mathbb{C}^4$ 的子空间的一个标准正交基:

$$\langle (2,1,-\mathrm{i},1),(1,-\mathrm{i},2,0),(-\mathrm{i},0,1,-\mathrm{i})\rangle.$$

**Q2**. (10 marks) 验证下面矩阵是酉矩阵。

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4\mathrm{i} \\ -4 & 2\mathrm{i} & 2 & -1 \\ -2 & -4\mathrm{i} & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix};$$

**Q3**. (10 marks) 设 $V$ 是欧氏空间或埃氏空间，其中的两个基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 互称为对偶基，如果

$$\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

证明：对任何基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 对偶基存在且唯一.

**Q4**. (10 marks) 验证下面的矩阵是埃尔米特矩阵，并通过酉矩阵将下面的埃尔米特矩阵对角化.

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

**Q5**. (10 marks) 确定 $\lambda$ 取什么值时下面的埃尔米特二次函数是正定的:

$$x_1\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_2 - i\bar{x}_1x_2 + \lambda x_2\bar{x}_2.$$

**Q6**. (10 marks) 通过酉矩阵将下列酉矩阵对角化。

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & -2 \\ -3-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -2 & -2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

**Q7**. (10 marks) 求下面矩阵的约当标准形。

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Q8**. (10 marks) 如果线性算子 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求出 $\mathcal{A}$ 的一个约当基和 $\mathcal{A}$ 在约当基下的矩阵.