作业 11

请在 12 月 5 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名:　　　　　　　　　　　　　　　　习题班级:

Q1. (5 marks) 典范基一定是正交基吗？如果是，请证明；如果不是，请说明理由或举例。

Q2. (5 marks) 对于矩阵 n 的各个特征子空间满足什么关系，并适当说明理由？

Q3. (10 marks)

(1). 运用雅可比方法把双线性型化成典范式:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3.$$

(2). 命 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\boldsymbol{x}' = [x_1', x_2', x_3']$, $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$, $\boldsymbol{y}' = [y_1', y_2', y_3']$. 求过渡矩阵 A 使得在变换 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y}'$ 下 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 具有典范形式, 即具有形式 $a_1x_1'y_1'+\ a_2x_2'y_2' + a_3x_3'y_3'$, 其中 a_1, a_2, a_3 是实数.

Q4. (10 marks) 已知实二次型 $f(x) = ax_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2$ 的秩为 2，

(1). 写出二次型所对应的矩阵 A, 并求参数 a;

(2). 把二次型化成标准形.

Q5. (10 marks) 证明对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

是正定的, 然后把它们分解成形式 $P^T \cdot P$ 的形式, 其中 P 是方阵.

Q6. (10 marks) 设方阵 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 分别与方阵 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 合同（相似），

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_k \end{pmatrix}.$$

证明: A 与 B 合同（相似）.

Q7. (20 marks) 设 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性算子, 定义为 $\mathcal{A}(x, y) = (-x, y)$·

(1). 求 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵 A.

(2). 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{u}_1=(1,1), \boldsymbol{u}_2=(-1,1)$ 下的矩阵 B.

(3). 求从基 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 到基 $\boldsymbol{v}_1=(2,1), \boldsymbol{v}_2=(1,0)$ 的过渡矩阵 S, 再通过计算 $S^{-1}BS$ 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 下的矩阵

(4). 求从标准基到基 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 的转换矩阵 T, 再通过计算 $T^{-1}AT$ 求出 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 下的矩阵.

Q8. (15 marks) 定义线性算子 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 如下

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

(1). 求 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵;

(2). 确定从标准基到基 $\boldsymbol{u}_1=[1,1,0], \boldsymbol{u}_2=[1,0,1], \boldsymbol{u}_3=[0,1,1]$ 的过渡矩阵 T;

(3). 求 A 在基 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 下的矩阵.

Q9. (10 marks) 证明下面两个 n 阶方阵是相似的:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Q10. (5 marks) 设 A 和 B 是同阶方阵且 A 可逆. 证明:AB 和 BA 相似.