作业 5

请在 10 月 24 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

Problem 1 (20 marks) 判断下面的矩阵是否可逆，如果可逆，求其逆矩阵。

(1). $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

(2). $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(3). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

(4). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (n 阶方阵)

Problem 2 (10 marks) 利用等式

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

计算 $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^6$

Problem 3 (5 marks) P_{62} 页，第 6 题。

Problem 4 (10 marks) P_{62} 页，第 7 题。（注意，这里 ${}^{t}A$ 表示矩阵 A 的转置，即 A^T。）

Problem 5 (7 marks) P_{62} 页，第 8 题。

Problem 6 (8 marks) P_{62} 页，第 9 题。

Problem 7 (10 marks) P_{62} 页，第 10 题。

Problem 8 (10 marks) 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

(1) 证明 $AX = 0$ 只有零解;

(2) 求线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系;

(3) 求线性方程组 $(A - I_3)X = 0$ 的一个基础解系（I_3 为 3 阶单位矩阵）。

Problem 9 (5 marks) P_{68} 页，第 3 题。

Problem 10 (5 marks) P_{68} 页，第 4 题。

Problem 11 (10 marks) P_{68} 页，第 5 题（2）。

附录:

6. 证明如果有大于 2 的整数 m 使得 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m = 0$, 则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$.

7. 称方阵 A 是对称 (相应地, 斜对称) 的如果 ${}^tA = A$ (相应地, ${}^tA = -A$). 证明: 如果对称 (相应地, 斜对称) 矩阵 A 可逆, 那么其逆矩阵 A^{-1} 也是对称的 (相应地, 斜对称).

8. 求下列方阵的逆矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & G \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & D & B \\ F & G & C \end{pmatrix},$$

其中 A, D, F 是可逆方阵.

9. 设 A 和 B 是方阵. 证明如果 $E + AB$ 可逆, 那么 $E + BA$ 可逆.

10. 对同阶方阵 A 和 B, 其交换子定义为 $[A, B] = AB - BA$. 现设 C 也是同阶方阵. 证明:

(1) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$;

(2) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

3. 对下面的线性方程组求通解和一个基础解系:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0, \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 0. \end{array}$$

4. 对下面的线性方程组求通解和相伴的齐次方程组的一个基础解系:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 12x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 13, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 7. \end{array}$$

5. 分析下列带参数的线性方程组的可解性, 在线性方程组可解时求出通解.

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -6x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & - & x_4 & = & 9, \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & = & 1, \\ -3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\ -3x_1 & + & 7x_2 & + & 17x_3 & + & 7x_4 & = & \lambda. \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 7, \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 9, \\ \lambda x_1 & - & 4x_2 & + & 9x_3 & + & 10x_4 & = & 11. \end{array}$$