# 作业 3

请在 10 月 10 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

**Problem 1** (15 marks) 判断下列向量组是否线性无关，并计算这些向量组的秩：

(a). $\boldsymbol{v}_1 = (2, 3, -1), \boldsymbol{v}_2 = (3, 5, 2), \boldsymbol{v}_3 = (-2, 4, 1)$

(b). $\boldsymbol{v}_1 = (4, -5, 2, 6), \boldsymbol{v}_2 = (2, -2, 1, 3), \boldsymbol{v}_3 = (6, -3, 3, 9)$

(c). $\boldsymbol{v}_1 = (4, -5, 2, 6), \boldsymbol{v}_2 = (2, -2, 1, 3), \boldsymbol{v}_3 = (5, -3, 3, 9), \boldsymbol{v}_4 = (4, -1, 5, 6)$

**Problem 2** (15 marks) 假设向量 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关。判断下列向量组知否线性相关，并计算这些的向量组的秩。

(a). $\boldsymbol{u}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4.$

(b). $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1} = \boldsymbol{v}_{k-1} + \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_1.$

(c). $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1} = \boldsymbol{v}_{k-1} - \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_1.$

**Problem 3** (10 marks) 求 $\lambda$ 使得向量 $(7, -2, \lambda)$ 是向量 $(2, 3, 5), (3, 7, 8), (1, -6, 1)$ 的线性组合。

**Problem 4** (10 marks) 证明在 $\mathbb{R}^n$ 中，第一个坐标和最后一个坐标相等的向量全体是一个线性子空间。

**Problem 5** (10 marks) 证明有 $n$ 个未知元的齐次线性方程组的解集是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间。

**Problem 6** (20 marks) 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，含有非零向量。证明：

(a). $S$ 中的极大线性无关向量组存在，且 $S$ 中的任意极大线性无关组是线性子空间 $\langle S \rangle$ 的基。

(b). $S$ 中的任意线性无关向量组均可以扩充为 $S$ 中的极大线性无关组。

**Problem 7** (10 marks) 形如 $(1, x)$ 的实数对的集合，满足下面的运算：

$$(1, y) + (1 + y') = (1, y + y'), k(1, y) = (1, ky).$$

判断上面的集合是否能够构成向量空间，如果不能，请指出它无法满足哪个性质（slides 第 4 页）。

**Problem 8** (10 marks) 已知向量 $\boldsymbol{v}_1 = (1, 6, 4), \boldsymbol{v}_2 = (2, 4, -1), \boldsymbol{v}_3 = (-1, 2, 5)$ 和 $\boldsymbol{w}_1 = (1, -2, -5), \boldsymbol{w}_2 = (0, 8, 9)$. 证明：

$$\text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \text{span}\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}.$$