作业 10

请在 11 月 27 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名:　　　　　　　　　　　　　　习题班级:

Q1. (5 marks) 证明 QR 分解中的上三角矩阵 R 是可逆的

Q2. (10 marks) 设 U 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: U 中两个标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵（slides 中定理 5）.

Q3. (6 marks) 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 如果 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 的夹角和 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 的夹角相等，证明 $\boldsymbol{z}$ 与向量 $\|\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{x} - \|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{y}$ 正交。

Q4. (25 marks) 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$ 是行向量欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间, V 是 U 的由 (1,0,0,-1) 张成的子空间.

(1). 求 V 在 U 中的正交补;

(2). 求 V 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补;

(3). 求 U 的一个标准正交基;

(4). 把 (1) 中的基扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基;

(5). 用 (2) 中的标准正交基构造一个四阶正交矩阵.

Q5. (10 marks) 求如下线性方程组

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0, \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0, \\
4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\
3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0
\end{array}$$

的解空间的正交补.

Q6. (10 marks) 如果实方阵的列向量都是非零的且相互正交的，证明它是可逆的并求其逆矩阵.

Q7. (10 marks) 运用正交化方法，求出 $\mathbb{R}^4$ 中由向量 (1,2,1,3),(4,1,1,1),(3,1,1,0) 张成的线性子空间的一个标准正交基.

Q8. (10 marks) QR 分解矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

并验证并一般性证明 $|A| = \pm|R|$.

Q9. (4 marks) 写出下列双线性型或二次型的矩阵:

(1). $-x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 4x_2y_3 - 3x_3y_1 + 4x_3y_3 - 6x_3y_3$

(2). $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4$

Q10. (10 marks) 对列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的双线性型

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

求典范基与典范式。