P1. 讨论在不同参数λ下，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3 \end{cases}$ 何时有唯一解/无穷多解/无解，并在无穷多解时给出通解

P2. $V=\mathrm{span}\langle \underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_2}, \underline{\alpha_3}, \underline{\alpha_4} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$，$\underline{\alpha_1}=(1,2,-1,1)$ $\underline{\alpha_2}=(2,4,-2,2)$ $\underline{\alpha_3}=(3,7,2,0)$ $\underline{\alpha_4}=(1,3,4,-2)$

求一组由$\{\underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_2}, \underline{\alpha_3}, \underline{\alpha_4}\}$子集构成的V的基

P3. 线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\underline{u_1}, \underline{u_2} \dots \underline{u_k} \in \mathbb{R}^n$，$\underline{v_k}=f(\underline{u_k})$

I) 证明: $\underline{v_1}, \underline{v_2} \dots \underline{v_k}$线性无关 $\Rightarrow$ $\underline{u_1}, \underline{u_2} \dots \underline{u_k}$也线性无关

II) "$\underline{u_1}, \underline{u_2} \dots \underline{u_k}$线性无关 $\Rightarrow$ $\underline{v_1}, \underline{v_2} \dots \underline{v_k}$也线性无关"是否正确?是请给出证明，否请举反例来说明

P4. 线性映射 $\varphi: \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ $\varphi([x_1,x_2,x_3,x_4])=[x_1+3x_3+x_4,\ 4x_2+5x_4,\ 2x_2+x_3]$

I). 写出φ对应的矩阵A，即有$\varphi(\underline{x})=A\underline{x}$，$\forall \underline{x}\in\mathbb{R}^4$

II). 求 $\ker\varphi$，$\mathrm{im}\varphi$ 维数

P5. $n\in\mathbb{N}_+$，对 $a_1, a_2 \dots a_{n-1}\in\mathbb{R}$有 n阶方阵

$$M(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $G=\{M(a_1,a_2 \dots a_{n-1}) \mid a_1,a_2,\dots a_{n-1}\in\mathbb{R}\}$

证明: G对于矩阵乘法、求逆均封闭，即对$\forall A,B\in G$ 有 $AB\in G$，$A^{-1}\in G$

P6 计算下述行列式

I) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$　II). $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　III). $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

P7. A，B 均为n阶方阵，$[A\ \ B]$与$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$分别表示 $n\times 2n$与$2n\times n$的分块矩阵

I). 证明: $\max\{A,B\} \le \mathrm{rank}[A\ \ B] \le \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$

II). "$\mathrm{rank}[A\ \ B]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$"是否正确?是请给出证明，否请举反例来说明

P8. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 求 A^{-1}、$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ （A_{ij} 指 a_{ij} 的代数余子式）

P9. $A=(a_{ij})$ 是 $(n+1)\times n$ 矩阵，$X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是未知数列向量，$B=[b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}]$ 是常数列向量，$\operatorname{rank} A = n$

证明：线性方程组 $AX=B$ 有解的充要条件是增广矩阵 $(A|B)$ 行列式值为0