作业 12

请在 12 月 12 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名:　　　　　　　　　　　　　　　习题班级:

Q1. (5 marks) 特征子空间总是不变子空间吗? 比如，同一个特征值 λ 的全部特征向量所张成的特征子空间是否为不变子空间?

Q2. (5 marks) 请完成 Week 11 slides 中第 10 页的例题（4）。

Q3. (20 marks) 判断下列矩阵 A 是否可对角化，如果可对角化，求出它的对角形和对角化变换矩阵。

(1). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

(2). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Q4. (10 marks) 证明：如果 λ^2 是线性算子 $\mathcal{A}^2$ 的特征值，那么 λ 和 $-\lambda$ 中有一个是 $\mathcal{A}$ 的特征值。(提示：利用等式 $\mathcal{A}^2 - \lambda^2\mathcal{E} = (\mathcal{A} + \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$.)

Q5. (10 marks) 设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 证明：如果 $V_1, \cdots, V_m$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 那么这些子空间的和与交都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

Q6. (10 marks) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 证明：如果 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, 那么对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ker(\lambda\mathcal{E} - \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间.

Q7. (10 marks) 证明：如果 $\mathcal{A}$ 是可逆线性算子，那么 $\mathcal{A}$ 的不变子空间也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的不变子空间. 特别，$\mathcal{A}$ 的特征向量也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量.

Q8. (10 marks) 设 A, B 是 n 阶实方阵, 且 $AB = BA$, B 是幂零矩阵（$A^k = 0, k \geq 2$）. 证明:$\det(tE - (A + B)) = \det(tE - A)$.

Q9. (10 marks) 假设向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在标准基下的矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

求在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 下均不变的所有子空间。

Q10. (10 marks) 假设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。将 $\mathbb{R}^3$ 分解成两个非平凡不变子空间的直和.

Q11. (10 marks) 证明：线性算子 $\mathcal{A}$ 是幂零的当且仅当其特征多项式没有非零根