作业 6

请在 10 月 31 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名:　　　　　　　　　　　　　　　　习题班级:

Q1. (5 marks) 若 A, B 同为 n 阶方阵，若 A 不可逆，则 AB 也不可逆。

Q2. (15 marks) 设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是 n 阶方阵。在下述情况下比较 $|A|$,$|B|$。

(1). $b_{ij} = 2^{j-i}a_{ij}$

(2). $b_{ij} = a_{n+1-i,j}$

(3). $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

Q3. (15 marks) 不展开行列式证明下列等式:

(1). $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(2). $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(3). $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Q4. (10 marks) 按照某一行或列的代数余子式展开求 $\det(A)$：

(a). $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b). $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Q4. (5 marks) 解方程: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}=0$

Q5. (10 marks) 计算下列行列式

(1). $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$

(2). $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

Q6. (10 marks) 证明：n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=n+1.$

Q7. (20 marks) 计算下列行列式:

(1). $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & n \end{vmatrix}$$

(2). $$\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Q9. (10 marks) 使用数学归纳法证明:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$