线性代数期中练习题一

1. 当 a 取什么值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

有唯一的解，无穷多解和无解？且在方程有无穷多解的时候求出方程组的解.

2. 行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$ 张成的一个线性子空间 V，求出 V 的一个基，从而确定 V 的维数。

3. 求下列 4 阶方阵 A 的逆矩阵 A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. (i) 若 A 为实对称矩阵（即 ${}^tA = A$). 证明: 当 $A^2 = \mathbf{0}$ 时, $A = \mathbf{0}$.
(ii) 举一个二阶方阵的例子说明: 存在非零的方阵 B, 满足 $B^2 = \mathbf{0}$.

5. 计算如下的行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1 + x_3y_3 & \cdots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}.$$

6. (10分) 一个 n 阶方阵 A 称为幺幂的, 如果存在正整数 k (由 A 决定) 使得 $(A-I_n)^k=\mathbf{0}$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵. 证明: 如果 A,B 是两个 n 阶幺幂矩阵且 $AB=BA$, 则 AB 也是幺幂矩阵.

7. 设 A 是一个可逆的上三角矩阵，请证明 A^{-1} 也是一个上三角矩阵。

8. 设 A 为 n 阶方阵，证明：存在一个 n 阶非零方阵 B 使得 $AB=\mathbf{0}$，当且仅当 $detA=0$.

9. 设 A 是一个可逆矩阵。

(i) 若互换 A 的第 i 行和第 j 行后 (其中 $i\neq j$)，得到的可逆矩阵记为 B. 那么 ${}^tB$ 可以由 ${}^tA$ 经过怎样的初等变换得到？请说明理由。

(ii) 若将 A 的第 i 列的 μ 倍加到第 j 列后 (其中 $i\neq j$)，得到的可逆矩阵为 C. 那么 C^{-1} 可以由 A^{-1} 经过怎样的变换得到？请说明理由。