

作业 14

请在 12 月 25 号（周五）课前，按照对应习题班号提交

姓名：

习题班级：

Q1. (10 marks) 利用最小二乘法得到的最小二乘解 \mathbf{x} 可能不是唯一的，此时 $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ 是确定的吗？请说明理由。

Q2. (5 marks) 若矩阵 A 可逆，请推导出矩阵 A 的特征值与其伴随矩阵 $\text{adj}(A)$ 的特征值的关系。

Q3. (20 marks) 求下面的正交矩阵的典范式，并求出把它们化成典范式的正交矩阵

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Q4. (20 marks) 对下面给定的 A 和 B ，求线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解。

$$(1). \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2). \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Q5. (15 marks) 设 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射， U 是 \mathbb{R}^n 的子空间。证明：

(1). $\varphi(U) = \{\varphi(\mathbf{u}) | \mathbf{u} \in U\}$ 是 \mathbb{R}^m 的子空间；

(2). $\dim(\ker \varphi \cap U) + \dim(\varphi(U)) = \dim U$ ；

(3). 对 \mathbb{R}^m 任意的子空间 W ，其逆像 $\varphi^{-1}(W) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f(\mathbf{x}) \in W\}$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间。

Q6. (10 marks) 设 A 和 B 是 n 阶实方阵。证明： $\overline{\det(A + iB)} = \det(A - iB)$ 。（横线表示复共轭。）

Q7. (10 marks) 设 A 和 B 是 n 阶实方阵,

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

借助复数域上的初等变换证明 $\det C = |\det(A - iB)|^2$.