

Kapitel 1

Funktionalanalysis

1.1 Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$)
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)_X}$. Wobei (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge: $(x_n), \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $||| \cdot ||| : X \rightarrow \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $|||x||| \geq 0$
- (ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$
- (iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm erfüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von X .

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow X/N$ ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume). Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar, } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
 $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum (\nearrow Ana III).

(b) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$ ist ebenfalls seminormiert mit $|||f|||_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$.
 $L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei das Zählmaß auf \mathbb{N} und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.
 $\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

- (d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n . $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.
- (e) Sei (Ω, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.4 (diverse Fakten). Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

- (a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$
- (b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (c) Wenn $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei hier $\frac{1}{\infty} := 0$.
- (e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega) \forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \text{const}$ oder $f = \text{sign}$ sich nicht durch Funktionen aus C_0^k approximieren lassen.
- (f) $BC(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$, dennoch ist $BC(\Omega)$ in beiden Fällen ein Unterraum.

1.2 Lineare Operatoren

Definition 1.5 (linearer Operator). Seien X, Y \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \rightarrow Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

wir schreiben Tx statt $T(x)$.

Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ *Funktional*.

Wenn X, Y normierte \mathbb{K} -Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator T *beschränkt*, wenn $T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist. ($\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in X$ mit $\|x\|_X < 1$)

Aus der Definition erkennt man, dass Bilder beschränkter Mengen M unter einem beschränkten linearen Operator T beschränkt sind. Denn $\exists R > 0 : M \subseteq U_R(0)$, sodass $T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$, und dies ist beschränkt.

Beispiel 1.6. a) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $\{T : X \rightarrow Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$. $T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist beschränkt. Wir stellen fest:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| < \infty, \quad t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist T beschränkt.

- b) $T : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$, $Tf := \int_{\Omega} f d\mu$. Es gilt $|Tf| = |\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \|f\|_1$. Also $|Tf| < 1 \forall f \in L^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1 \Rightarrow T$ beschränkt

Satz 1.7. Seien X, Y normierte Räume, $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (i) T beschränkt,
- (ii) T ist Lipschitz stetig,
- (iii) T ist gleichmäßig stetig,
- (iv) T ist stetig,

(v) T stetig in 0,

(vi) $\exists x \in X : T$ stetig in x .

Beweis: "(i) \Rightarrow (ii)" : Sei $M > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in U_1(0)$. Es gilt $T0 = 0$. Weiterhin gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:

$$\|Tx\|_Y = \|2\|x\|_X T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)\| = 2\|x\|_X \underbrace{\left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)\right\|_Y}_{\in U_1(0)} \leq 2M\|x\|_X.$$

Also gilt $\|Tx\|_Y \leq 2M\|x\|_X \forall x \in \|x\|_X$ und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M\|x_1 - x_2\|_X \forall x_1, x_2 \in X$$

"(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)" : Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen ¹.

"(vi) \Rightarrow (v)" : Sei $x \in X$, so dass T stetig in x ist. Sei (x_n) Nullfolge in X

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(x + x_n) = Tx \stackrel{\text{stetig in } 0}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0 = T0$$

"(v) \Rightarrow (i)" : Beweis durch Widerspruch: Angenommen T ist unbeschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_1(0)$, so dass $\|Tx_n\|_Y \geq n$ ($\Rightarrow x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, aber $\|T\frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$ Das hieße aber T ist unstetig in 0. ■

Bemerkung 1.8. a) $\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ beschränkt}\}$

b) $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ beides sind $\mathbb{K} - VR$.

c) $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ topologischer Dualraum von X .

Bemerkung 1.9. c) $\text{Ker } T, \text{Im } T$ sind UVR.

d) (i) – (vi) äquivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

e) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass $\text{Im } T$ nicht abgeschlossen \nearrow Übung

f) $\text{Ker } T$ abgeschlossen $\forall T \in \mathcal{B}(X, Y)$, da T stetig und $\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\})$, wobei $\{0\}$ abgeschlossen in Y .

Satz 1.10 (Operatornormen). X, Y normierte Räume. $\mathcal{B}(X, Y)$ normierter Raum mit folgender Norm $\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y$.

Beweis: (Positivität:) $\|0\| = 0$. Sei $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \forall x \in U_1(0)$. Sei $x \in X$ beliebig. $\Rightarrow Tx = 2\|x\|_X T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(Homogenität:) Sei $\lambda \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$.

(Dreiecksungleichung:) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1 x + T_2 x\|_Y) \leq \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y) \leq \sup_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1 x_1\|_Y + \|T_2 x_2\|_Y) \leq \sup_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1 x_1\|_Y + \sup_{x_2 \in U_1(0)} \|T_2 x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$ ■

Bemerkung 1.11. Es gilt $\|T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ (\nearrow Übung).

Satz 1.12. X normierter Raum, Y Banachraum. Dann ist $\mathcal{B}(X, Y)$ Banachraum.

¹Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

Beweis: Sei (T_n) CF in $\mathcal{B}(X, Y)$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Also $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\| \forall x \in X$. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von Y , dass $(T_n x)$ in Y für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf $T : X \rightarrow Y$, $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a) T ist ein linearer Operator.

b) T ist beschränkt.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$ (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

$$\text{Zu a): } T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$$

zu b): Wegen $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$ gilt $\|T_n\|$ ist CF in \mathbb{R} , also beschränkt: $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Für $x \in U_1(0)$ gilt $\|Tx\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$. (vgl. Def 1.5, " \Leftrightarrow ")

zu c): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_1(0)$ gilt somit

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \forall n \geq N$$

Also ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und aufgrund der Beliebigkeit der CF, folgt die Vollständigkeit. ■

Korollar 1.13. X normierter Raum $\Rightarrow X'$ Banachraum.

Bemerkung 1.14. a) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

b) $id \in \mathcal{B}(X, X)$, $\|id\| = 1$.

c) Aus punktweise Konvergenz $T_n x \rightarrow Tx$ folgt i.A. nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ (d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$).

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft** - Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand > 0 haben.

2. **essentiell beschränkt** - $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \in \mathfrak{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty$$

oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da f nur auf \mathbb{Q} nicht null ist, und \mathbb{Q} ist Lebesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** (X, \mathcal{T}) - Ein Raum, dessen offene Mengen durch \mathcal{T} gegeben sind, wobei die offenen Mengen die bekannten Eigenschaften behalten sollen.