

0.0.1 Aufgabe 1

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Behauptung. Es ist äquivalent:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty \Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergiert in X .

(b) X ist ein Banachraum.

Beweis: a \Rightarrow b: Da X bereits ein normierter Raum ist, ist nur noch zu zeigen, dass X vollständig ist. Sei (u_n) eine Cauchyfolge in X , wobei o.B.d.A $u_0 = 0$, sonst betrachten wir (z_n) mit $z_{n+1} := u_n$, $z_0 := 0$ statt (u_n) . Wir definieren: $s_k := \sum_{n=0}^k u_n - u_{n-1} = u_k$ (Teleskopsumme).

Unser Ziel ist es, die Reihe s_k „geschickt“ mit $x_n := \frac{1}{n^2}$ zu majorisieren.

Da u_n eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes x_n ein (kleinstes) $N_n := N(x_n) \in \mathbb{N}$, so dass $\|u_{N(x_n)} - u_m\| \leq x_n \forall m \geq N_n$. Das Bemerkenswerte an (N_n) ist, dass diese Folge monoton steigt. Es ist nun für hinreichend großes k und geeignetes $n' \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung und der Eigenschaft der Teleskopsumme:

$$\|s_k\| = \left\| \sum_{n=0}^k u_n - u_{n-1} \right\| \leq \underbrace{\|u_1 - u_0\| + \|u_2 - u_1\| + \dots + \|u_{N_2} - u_{N_1}\|}_{=: x_0} + \underbrace{\|u_{N_2} - u_{N_1}\|}_{\leq x_1} + \underbrace{\|u_{N_3} - u_{N_2}\|}_{\leq x_2} + \dots + \underbrace{\|u_k - u_{N(n')}\|}_{\leq x_{n'}}$$

Bzw.:

$$\|s_k\| = \left\| \sum_{n=1}^k u_{N_n} - u_{N_n-1} \right\| \leq \sum_{n=0}^{n'} x_n \text{ mit } u_{N_0} := u_{N_1} - u_0$$

Es ergibt sich also:

$$\|s_k\| \leq \sum_{n=0}^{n'} x_n \leq \sum_{n=0}^k x_n \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|s_k\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$$

Und mit der Eigenschaft a) ist nun: $u_k = s_k \rightarrow \alpha \in X$. Also konvergiert u_k in X , damit ist X ein Banachraum.

b \Rightarrow a: Sei X ein Banachraum und (u_n) eine Folge in X , so dass $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$, dann ist dank der Dreiecksungleichung: $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$.

Dank der Vollständigkeit von X können wir das Majorantenkriterium (der Beweis zu der Gültigkeit dieses Kriteriums, ist analog zum reellen Fall) anwenden, und somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. ■

0.0.2 Aufgabe 2

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Behauptung. Es gilt:

$$\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Beweis: Aus Satz 1.7 folgt, dass T stetig ist.

Dank der Definition von sup und der Stetigkeit von $T, \|\cdot\|_Y$ folgt: $\|T\| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y &= \sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \left\| \|x\|_X T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \\ &= \sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \|x\|_X \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \\ &= \underbrace{\sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \|x\|_X}_{=1} \cdot \sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \\ &= \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \end{aligned}$$

Wobei wir genutzt haben, dass $T0 = 0$ (für das erste Gleichheitszeichen) und $\|x\|_X, \|Tx\|_Y \geq 0 \forall x \in X$ (für das dritte Gleichheitszeichen). ■

0.0.3 Aufgabe 3

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

(a)

Behauptung.

$$\dim(X) < \infty \text{ und } T : X \rightarrow Y \text{ linear} \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X, Y)$$

Beweis: Da $\dim(X) < \infty$ und T linear ist, lässt sich T eindeutig als Matrix darstellen. Dann sind aber die Bedingungen aus Bsp. 1.6 a) erfüllt, damit ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. ■

(b)

Behauptung.

$$\dim(X) < \infty \text{ und } T \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow \|T\| = \max_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$$

Beweis: Aus Aufgabe 2 ist bekannt, dass $\sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$. Da $\overline{U_1(0)}$ kompakt (ist es kompakt? Es könnte ja sein, dass X nicht vollständig ist. Müsste aber, denn wir haben ja immernoch den Abschluss... oder?) ist, und $T, \|\cdot\|_Y$ stetig dank Satz 1.7 und Komposition von stetigen Funktionen und stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, ist die Behauptung bewiesen. ■

(c)

Behauptung. Im allgemeinen ist die Aussagen von b) falsch.

Beweis: Wir geben ein Beispiel für $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ derart an, dass

$$\|T\| \notin \left\{ \|Tx\|_Y \mid x \in \overline{U_1(0)} \right\}.$$

■