Kapitel 1

Funktionalanalysis

1.1 Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$)
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$. Wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge: (x_n), $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm)**.** Sei X ein $\mathbb{K} - Vektorraum$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von X.

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow$ X/N ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
$L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum ($\nearrow$ Ana III).

(b) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und essentiell beschränkt$\}$ ist ebenfalls seminormiert mit $|||f|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$.
$L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.
$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Suprenumsnorm ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.4 (diverse Fakten). Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

(a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_\Omega f\overline{g}d\mu$

(b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow \; L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$

(c) Wenn $p \geq r \Rightarrow \; L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$

(d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \;\Rightarrow\; fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei hier $\frac{1}{\infty} := 0$.

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \text{supp} f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \text{const}$ oder $f = \mathit{sign}$ sich nicht durch Funktionen aus C_0^k approximieren lassen.

(f) $BC(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$, dennoch ist $BC(\Omega)$ in beiden Fällen ein Unterraum.

1.2 Lineare Operatoren

Definition 1.5 (linearer Operator)**.** Seien X, Y $\mathbb{K}-$Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \; x, y \in X$$

wir schreiben Tx statt $T(x)$.
Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \to \mathbb{K}$ *Funktional.*
Wenn X, Y normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator T *beschränkt*, wenn $T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist. ($\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \; \forall x \in X$ mit $\|x\|_X < 1$)

Aus der Definition erkennt man, dass Bilder beschränkter Mengen M unter einem beschränkten linearen Operator T beschränkt sind. Denn $\exists R > 0 : M \subseteq U_R(0)$, sodass $T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$, und dies ist beschränkt.

Beispiel 1.6. a) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $\{T : X \to Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$. $T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ist beschränkt. Denn:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}| < \infty, \; t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist T beschränkt.

b) $T : \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$, $Tf := \int_\Omega f d\mu$. Es gilt $|Tf| = |\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1$. Also $|Tf| < 1 \; \forall f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1 \Rightarrow T$ beschränkt

Satz 1.7. *Seien X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) T beschränkt,

(ii) T ist lipschitz stetig,

(iii) T ist gleichmäßig stetig,

(iv) T ist stetig,

(v) T *stetig in* 0,

(vi) $\exists x \in X : T$ *stetig in* x.

Beweis : "$(i) \Rightarrow (ii)$" : Sei $M > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \; \forall x \in U_1(0)$. Es gilt $T0 = 0$. Weiterhin gilt für $x \in X \backslash \{0\}$:

$$\|Tx\|_Y = \| \, 2 \, \|x\|_X \, T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) \| = 2 \, \|x\|_X \|T \underbrace{\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)}_{\in U_1(0)} \|_Y \leq 2M \|x\|_X.$$

Also gilt $\|Tx\|_Y \leq 2M\|x\|_X \; \forall x \in \|x\|_X$ und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M\|x_1 - x_2\|_X \; \forall x_1, x_2 \in X$$

"$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$" : Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen [1].

"$(vi) \Rightarrow (v)$" : Sei $x \in X$, so dass T stetig in x ist. Sei (x_n) Nullfolge in X

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(x + x_n) = Tx \overset{\text{stetig in } 0}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0 = T\,0$$

"$(v) \Rightarrow (i)$" : Beweis durch Widerspruch: Angenommen T ist unbeschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in U_1(0)$, so dass $\|Tx_n\|_Y \geq n$ ($\Rightarrow x_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $\frac{x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber $\|T\frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$ Das hieße aber T ist unstetig in 0. ■

Bemerkung 1.8. a) $\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \to Y : T \text{ beschränkt}\}$

b) $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ beides sind $\mathbb{K} - VR$.

c) $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ topologischer Dualraum von X.

Bemerkung 1.9. c) $Ker\,T$, $Im\,T$ sind UVR.

d) $(i) - (vi)$ äquivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

e) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass $Im\,T$ nicht abgeschlossen $\nearrow$ Übung

f) $Ker\;T$ abgeschlossen $\forall \; T \in \mathcal{B}(X, Y)$, da T stetig und $Ker T = T^{-1}(\{0\})$, wobei $\{0\}$ abgeschlossen in Y.

Satz 1.10 (Operatornormen)**.** *X, Y normierte Räume. $\mathcal{B}(X, Y)$ normierter Raum mit folgendener Norm* $\|T\| := \sup\limits_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y$.

Beweis : (*Positivität:*) $\|0\| = 0$. Sei $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \; \forall \; x \in U_1(0)$. Sei $x \in X$ beliebig. $\Rightarrow Tx = 2\|x\|_X \; T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(*Homogenität:*) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda|\|T\|$.

(*Dreiecksungleichug:*) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|T_1 + T_2\| = \sup\limits_{x \in U_1(0)} (\|T_1x + T_2x\|_Y) \leq \sup\limits_{x \in U_1(0)} (\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y) \leq \sup\limits_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1x_1\|_Y + \|T_2x_2\|_Y) \leq \sup\limits_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1x_1\|_Y + \sup\limits_{x_2 \in U_1(0)} \|T_1x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$ ■

Bemerkung 1.11. Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ ($\nearrow$ Übung).

Satz 1.12. *X normierter Raum, Y Banachraum. Dann ist $\mathcal{B}(X, Y)$ Banachraum.*

[1] Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

Beweis : Sei (T_n) CF in $\mathcal{B}(X,Y)$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Also $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|\ \forall x \in X$. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von Y, dass $(T_n x)$ in Y für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf $T : X \to Y,\ Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a) T ist ein linearer Operator.

b) T ist beschränkt.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

Zu a): $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_1 + \mu \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$

zu b): Wegen $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$ gilt $\|T_n\|$ ist CF in $\mathbb{R}$, also beschränkt: $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Für $x \in U_1(0)$ gilt $\|Tx\|_Y = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$. (vgl. Def 1.5, " $\Leftrightarrow$ ")

zu c): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\, \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_1(0)$ gilt somit

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x\in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \forall n \geq N$$

Also ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und aufgrund der Beliebigkeit der CF, folgt die Vollständigkeit. ■

Korollar 1.13. *X normierter Raum $\Rightarrow$ X' Banachraum.*

Bemerkung 1.14. a) $T \in \mathcal{B}(X,Y),\ S \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X,Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ (gilt wegen $\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X \leq M\|x\|_X\ \forall x \in X$ und der Linearität von ST.)

b) $id \in \mathcal{B}(X,X)$, $\|id\| = 1$.

c) Aus punktweise Konvergenz $T_n x \to Tx$ folgt i.A. nicht $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$).

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft -** Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand > 0 haben.

2. **essentiell beschränkt -** $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N\in\mathfrak{A}\\ \mu(N)=0}} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |f(x)| < \infty$$
oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da f nur auf $\mathbb{Q}$ nicht null ist, und $\mathbb{Q}$ ist Lesbesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ - Ein Raum, dessen offene Mengen durch $\mathcal{T}$ gegeben sind, wobei die offenen Mengen die bekannten Eigenschaften behalten sollen.