

# Kapitel 1

## Grundlagen

### Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben  $(X, \|\cdot\|_X)$ )
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit  $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)_X}$ . Wobei  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge:  $(x_n), \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \epsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

**Definition 1.1** (Halbnorm, Seminorm). Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, wobei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Für  $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$  ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung  $|||\cdot||| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $|||x||| \geq 0$
- (ii)  $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$
- (iii)  $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm erfüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

*Bemerkung 1.2.* (a)  $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$  bildet einen Unterraum von  $X$ .

(b)  $X/N$  ist ein normierter Raum über(?)  $\|x + N\| := |||x|||$

(c)  $X$  ist ein vollständiger seminormierter Raum  $\Rightarrow X/N$  ist ein Banachraum

**Beispiel 1.3** (wichtige Vektorräume). Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum

(a)  $p \in [1, \infty)$   $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar}, \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$  ist ein seminormierter Raum mit  $|||f|||_p := (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ .  
 $L^p(\Omega, \mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum ( $\nearrow$  Ana III).

(b)  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$  ist ebenfalls seminormiert mit  $|||f|||_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ .  
 $L^\infty(\Omega, \mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum.

(c)  $p \in [1, \infty], |\cdot|$  sei das Zählmaß auf  $\mathbb{N}$  und der Maßraum sei gegeben durch  $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$ .  
 $\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$  heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  messbar,  $\lambda^n$  Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .  $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$  heißt Lebesgue-Raum.

- (e) Sei  $(\Omega, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.  $BC(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$  versehen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

*Bemerkung 1.4 (diverse Fakten).* Seien  $p, q, r \in [1, \infty)$

- (a)  $L^p(\Omega, \mu)$  ist ein Banachraum,  $L^2(\Omega, \mu)$  ist ein Hilbertraum mit  $(f, g)_2 := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$
- (b) Falls  $\mu(\Omega) < \infty$ ,  $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (c) Wenn  $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (d)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega, \mu)$  mit  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$  (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für  $p = 1, q = \infty$  wobei hier  $\frac{1}{\infty} := 0$ .
- (e) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.  $C_0^k := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$  ist dicht in  $L^p(\Omega) \forall p \in [1, \infty)$ . Dies gilt nicht für  $p = \infty$ , da  $f = \text{const}$  oder  $f = \text{sign}$  sich nicht durch Funktionen aus  $C_0^k$  approximieren lassen.
- (f)  $BC(\Omega)$  ist bzgl. Folgenbildung abgeschlossen in  $L^\infty(\Omega)$ , aber nicht in  $L^p(\Omega)$  für  $p < \infty$ .

## Kapitel 2

# Lineare Operatoren

**Definition 2.1** (linearer Operator). Seien  $X, Y$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

wir schreiben  $Tx$  statt  $T(x)$ .

Wenn  $Y = \mathbb{K}$  dann heißt ein linearer Operator  $T : X \rightarrow \mathbb{K}$  *Funktional*.

Wenn  $X, Y$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator  $T$  *beschränkt*, wenn  $T(U_1(0)) \subseteq Y$  beschränkt ist.

## Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft** - Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand  $> 0$  haben.
2. **essentiell beschränkt** - Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *essentiell beschränkt*, falls

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \in \mathfrak{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty$$

oder auch:  $f$  ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist  $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$  und  $\mu = \lambda$ , da  $f$  nur auf  $\mathbb{Q}$  nicht null ist, und  $\mathbb{Q}$  ist Lebesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{T})$  - Ein Raum, dessen offene Mengen durch  $\mathcal{T}$  gegeben sind, wobei die offenen Mengen die bekannten Eigenschaften behalten sollen.