Kapitel 1

Funktionalanalysis

1.1 Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$)
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$. Wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge: (x_n), $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm)**.** Sei X ein $\mathbb{K} - Vektorraum$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von X.

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow X/N$ ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
$L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum ($\nearrow$ Ana III).

(b) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$ ist ebenfalls seminormiert mit $|||f|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$.
$L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.
$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Suprenumsnorm ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.4 (diverse Fakten). Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

(a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_\Omega f\overline{g} d\mu$

(b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow\ L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$

(c) Wenn $p \geq r \Rightarrow\ L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$

(d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow\ fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei <u>hier</u> $\frac{1}{\infty} := 0$.

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \text{supp} f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \text{const}$ oder $f = sign$ sich nicht durch Funktionen aus C_0^k approximieren lassen.

(f) $BC(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$, dennoch ist $BC(\Omega)$ in beiden Fällen ein Unterraum.

1.2 Lineare Operatoren

Definition 1.5 (linearer Operator)**.** Seien X, Y $\mathbb{K}-$Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ x, y \in X$$

wir schreiben Tx statt $T(x)$.
Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \to \mathbb{K}$ *Funktional.*
Wenn X, Y normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator T *beschränkt*, wenn $T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist. ($\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M\ \forall x \in X$ mit $\|x\|_X < 1$)

Aus der Definition erkennt man, dass Bilder beschränkter Mengen M unter einem beschränkten linearen Operator T beschränkt sind. Denn $\exists R > 0 : M \subseteq U_R(0)$, sodass $T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$, und dies ist beschränkt.

Beispiel 1.6. a) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $\{T : X \to Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$. $T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ist beschränkt. Denn:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| < \infty,\ t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist T beschränkt.

b) $T : \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$, $Tf := \int_\Omega f d\mu$. Es gilt $|Tf| = |\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1$. Also $|Tf| < 1\ \forall f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1 \Rightarrow T$ beschränkt

Satz 1.7. *Seien X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) T beschränkt,

(ii) T ist lipschitz stetig,

(iii) T ist gleichmäßig stetig,

(iv) T ist stetig,

(v) T stetig in 0,

(vi) $\exists x \in X : T$ *stetig in* x.

Beweis : "$(i) \Rightarrow (ii)$" : Sei $M > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \; \forall x \in U_1(0)$. Es gilt $T0 = 0$. Weiterhin gilt für $x \in X \backslash \{0\}$:

$$\|Tx\|_Y = \| \, 2 \, \|x\|_X \, T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) \| = 2 \, \|x\|_X \|T \underbrace{\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)}_{\in U_1(0)} \|_Y \leq 2M\|x\|_X.$$

Also gilt $\|Tx\|_Y \leq 2M\|x\|_X \; \forall x \in \|x\|_X$ und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M\|x_1 - x_2\|_X \; \forall x_1, x_2 \in X$$

"$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$" : Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen [1].

"$(vi) \Rightarrow (v)$" : Sei $x \in X$, so dass T stetig in x ist. Sei (x_n) Nullfolge in X

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(x + x_n) = Tx \overset{\text{stetig in } 0}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0 = T\,0$$

"$(v) \Rightarrow (i)$" : Beweis durch Widerspruch: Angenommen T ist unbeschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in U_1(0)$, so dass $\|Tx_n\|_Y \geq n$ ($\Rightarrow x_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $\frac{x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber $\|T\frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$ Das hieße aber T ist unstetig in 0. ∎

Bemerkung 1.8. a) $\mathcal{B}(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ beschränkt}\}$

b) $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X,X)$ beides sind $\mathbb{K} - VR$.

c) $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ topologischer Dualraum von X.

Bemerkung 1.9. c) $Ker\,T$, $Im\,T$ sind UVR.

d) $(i) - (vi)$ äquivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

e) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass $Im\,T$ nicht abgeschlossen $\nearrow$ Übung

f) $Ker\ T$ abgeschlossen $\forall\, T \in \mathcal{B}(X,Y)$, da T stetig und $Ker T = T^{-1}(\{0\})$, wobei $\{0\}$ abgeschlossen in Y.

Satz 1.10 (Operatornormen)**.** *X, Y normierte Räume. $\mathcal{B}(X,Y)$ normierter Raum mit folgendener Norm* $\|T\| := \sup\limits_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y$.

Beweis : (*Positivität:*) $\|0\| = 0$. Sei $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \; \forall \; x \in U_1(0)$. Sei $x \in X$ beliebig. $\Rightarrow Tx = 2\|x\|_X \; T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(*Homogenität:*) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda|\|T\|$.

(*Dreiecksungleichug:*) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann $\|T_1 + T_2\| = \sup\limits_{x\in U_1(0)} (\|T_1x + T_2x\|_Y) \leq \sup\limits_{x \in U_1(0)} (\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y) \leq \sup\limits_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1x_1\|_Y + \|T_2x_2\|_Y) \leq \sup\limits_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1x_1\|_Y + \sup\limits_{x_2\in U_1(0)} \|T_1x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$ ∎

Bemerkung 1.11. Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ ($\nearrow$ Übung).

Satz 1.12. *X normierter Raum, Y Banachraum. Dann ist $\mathcal{B}(X,Y)$ Banachraum.*

[1] Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

Beweis: Sei (T_n) CF in $\mathcal{B}(X,Y)$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Also $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|\ \forall x \in X$. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von Y, dass $(T_n x)$ in Y für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf $T : X \to Y,\ Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a) T ist ein linearer Operator.

b) T ist beschränkt.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

Zu a): $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_1 + \mu \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$

zu b): Wegen $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$ gilt $\|T_n\|$ ist CF in $\mathbb{R}$, also beschränkt: $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.
Für $x \in U_1(0)$ gilt $\|Tx\|_Y = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$. (vgl. Def 1.5, " $\Leftrightarrow$ ")

zu c): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\, \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_1(0)$ gilt somit

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x\in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \forall n \geq N$$

Also ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und aufgrund der Beliebigkeit der CF, folgt die Vollständigkeit. ■

Korollar 1.13. *X normierter Raum $\Rightarrow$ X' Banachraum.*

Bemerkung 1.14. a) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X,Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ (gilt wegen $\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X \leq M\|x\|_X\ \forall x \in X$ und der Linearität von ST.)

b) $id \in \mathcal{B}(X,X)$, $\|id\| = 1$.

c) Aus punktweise Konvergenz $T_n x \to Tx$ folgt i.A. nicht $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$).

Bsp: $X = \ell^p, p \in [1,\infty), T_n : \ell^p \to \ell^p,\ T_n(x_k) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ wobei $(x_k) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$.
Man kann zeigen, dass $T_n \in \mathcal{B}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ ($\nearrow$ Übung).
Sei $(x_k) \in \ell^p, \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1\backslash p} < \epsilon$. $\|T_n(x_k) - x_n\|_X = (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1\backslash p}\ \forall n \geq N$. Also $\forall x \in X\ \|T_n - x\|_X \to 0\ (n \to \infty)$. Frage: $\|T_n - T\|_X \to 0$? Nein! Sei $(x_k^n) = (0, \ldots, 0, \overset{\text{n+1 Stelle}}{1}, 0, \ldots)$, $\|T_n(x_k^n) - x\|_X = \|(0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots)\|)_Y = 1$ $\|T_n - T\| \overset{Def}{=} \sup\limits_{x\in U_1(0)} \|(T_n - T)x\|_X \geq \|(T_n - T)(\frac{1}{2}(x_k^n)\| = \frac{1}{2} \cdot 1$ $(T = idx)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|T_n - T\| \not\to 0$ $(n \to \infty)$

d) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und T bijektiv. Dann ist T^{-1} i.A. nicht beschränkt.

Bsp. $X \in C[0,1], Y = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$ mit $\|x\|_X = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ und $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y$
und $T : X \to Y,\ (Tx)(t) = \int_0^t x(s)ds$.

- $T^{-1} = S : Y \to X, Sy = y'$. (Zeige $ST = id_x$ und $TS = id_Y$)
- $T^{-1} \notin \mathcal{B}(Y,X)$ (Sei $y_n(t) = t^n \in Y$, $(T^{-1}y_n)(t) = n \cdot t^{n-1} \Rightarrow \|y_n\|_Y = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|T^{-1}y\|_X = n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T^{-1}$ kann nicht beschränkt sein. ($\|T^{-1}\frac{1}{2}y_n\|_X = \frac{1}{2} \cdot n$ mit $\|\frac{1}{2}y_n\| = \frac{1}{2}$)

Bem: Y ist nicht vollständig.

Satz 1.15. *Sei X, Y normierte $\mathbb{K} - VR$, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist injektiv und $T^{-1} \in \mathcal{B}(im(T), X)$ normierter UVR von Y.

(ii) $\exists\, m > 0 : \|Tx\|_Y \geq m\|x\|_X\ \forall x \in X$.

Beweis : "$(i) \Rightarrow (ii)$": $\exists\, M > 0, \|T^{-1}y\| \leq M\|y\|\ \forall y \in imT$. Sei $x \in X\ \exists y \in imT : x = T^{-1}y \Rightarrow \|x\|_Y \leq M\|Tx\|_Y \Rightarrow \|Tx\|_Y \geq \frac{1}{M}\|x\|_X = m\|x\|_X$
"$(ii) \Rightarrow (i)$": Sei $x \in X : Tx = 0$. Aus $\|Tx\| \geq m\|x\|$ folgt $x = 0$ und damit ist $Tinjektiv$. Sei $y \in imT\ \exists x \in X : Tx = y$ und $T^{-1}y = x \overset{(ii)}{\Rightarrow} \|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Tx\|_Y = \frac{1}{m}\|y\|_Y$, also $\exists\, M = \frac{1}{m}$, $\|T^{-1}y\|_X \leq M\|y\|_Y\ \forall v \in imT \Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(imT, X)$ ∎

Die Negation dieser Aussage halten wir explizit fest mit folgendem

Korollar 1.16. *$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ (X, Y normierte $\mathbb{K} - VR$. Dann sind äquivalent:*

(i) T besitzt keine stetige Inverser $T^{-1} : imT \to X$.

(ii) $\exists$ Folge (x_n) in X, so dass $\|x_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0$

Definition 1.17. $X - \mathbb{K} - VR$ mit Norm $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Dann heißt $\|\cdot\|_1$

(a) "stärker" als $\|\cdot\|_2$, falls gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2$

(b) "schwächer" als $\|\cdot\|_2$, falls $\|\cdot\|_2$ stärker ist als $\|\cdot\|_1$.

(c) "äquivalent" falls $\|\cdot\|_1$ stärker und schwächer ist als $\|\cdot\|_2$

Satz 1.18. *X $\mathbb{K} - VR$ mit Norm $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Dann gilt*

(a) $\|\cdot\|_1$ ist stärker als $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists\, M > 0 : \|x\|_2 \leq M\|x\|_1\ \forall x \in X$

(b) $\|\cdot\|_1$ ist schwächer als $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists\, M > 0 : \|x\|_1 \leq M\|x\|_2\ \forall x \in X$

(c) $\|\cdot\|_1$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists\, m, M > 0 : m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1\ \forall x \in X$

Beweis : zu (a): "$\Rightarrow$" $id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ ist stetig wegen Vor. $\overset{S.1.15}{\Rightarrow}$ und weil id linear, id beschränkt, $id \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ d.h. $\exists M > 0 : \|id(X)\|_2 \leq M\|x\|_1\ \forall x \in X$.
"$\Leftarrow$" Wissen $\exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M\|x\|_1\ \forall x \in X$. Sei $\|x_n - x\|_1 \to 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \leq M\|x_n - x\|_1 \to 0\ (n \to \infty) \Rightarrow \|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$. ∎

Definition 1.19. . Zwei normierte $\mathbb{K} - VR$ X, Y heißen "topologisch isomorph", falls es ein Isomorphismus $T : X \to Y$ mit $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$. Dann heißt T topologischer Isomorphismus, (sonst auch Homöomorphismus)?

Satz 1.20. *X, Y topologisch isomorph $\Leftrightarrow \exists m, M > 0 : T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und injektiv $: m\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall x \in X$*

Beweis : 'Klar' wegen Satz 1.17 und Satz 1.15. ∎

Bemerkung 1.21.

1. Falls, $m = M = 1$, dann nenn wir T "Isometrie".
2. Falls $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$: X, Y topologisch isomorph und topologischer Isomorphismus = lineare Bijektion.

Satz 1.22 (Fortsetzung von stetigen Operatoren)**.** *X, Y normierte $\mathbb{K} - VR$, Y ein Banachraum, $Z \subset X$, Z dichter UVR. $T \in \mathcal{B}(Z,Y)$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X,Y)$, so dass $T|_Z = T$.*

Beweis : TODO: Beweis tippen. ∎

Satz 1.23. *Ist T normerhaltend (in $\mathbb{R}^n$ die unitären Matrizen $\|Tx\| = \|x\|$), so ist $\tilde{T}$ ebenfalls normerhaltend.*

Beweis : TODO: Kurze Begründung. Eigentlich Korollar? ■

Beispiel 1.24 (Konstruktion eines unbeschränkten Funktionals)**.** Sei $X = \ell^1$ (Raum der absolut konvergenten Folgen)
Betrachte: $x_0 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots) \in \ell^1$, $\|x_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \frac{\pi^2}{6}$,
Einheitsvektor $e_k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$.
$\nearrow$ Erzeugnis: endliche linear Kombination der Einheitsvektoren $\Rightarrow \text{span}\{e_k\}_{k_\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots, 0, \dots)\}$ (Folgen, die irgendwann zu 0 werden.)
Die Familie $B := (x_0, e_1, e_2, e_3, \dots)$ ist linear unabhängig. $\Rightarrow B_i$ lässt sich zu Basis $B = (b_i)_{i\in I}$ mit $\mathbb{N}_0 \subset I$ und $b_0 = x_0, b_i = e_i \; \forall i \in \mathbb{N}$ erweitern (überabzählbar).
Sei $x \in X = \ell^1 \Rightarrow \exists$ eindeutige Darstellung $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ endlich}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i\in I\setminus N_0 \\ endlich}} \alpha_i b_i$.
Definiere das Funktional: $f : \ell^1 \to \mathbb{KN}?$ mit $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ endlich}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i\in I\setminus N_0 \\ endlich}} \alpha_i b_i \mapsto \alpha_0$
Wir zeigen: $Kerf$ nicht abeschlossen.
Betrachte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \Rightarrow x_n \in Kerf \; \forall n \in \mathbb{N}$, da $x_n \in span\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt jedoch $x_n \to x_0 \notin Kerf$, da $f(x_0) = 1$.

Nun versuchen wir mit Erfolgt einer waghalsige Verallgemeinerung der geometrischen Reihe im Reellen für Operatoren und Banachräume. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \; \forall q \in \mathbb{C}$ mit $normq < 1$

Satz 1.25 (Neumananansche Reihe)**.** *X Banachraum. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent:*

i) Die Reihe $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} T^k = I_X + T^1 + T^2 + \dots$ *ist konvergent bzgl. der Operatornorm.*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$

iii) $\exists N \in \mathbb{N} : \|T^N\| < 1$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1.$

In diesem Fall besitzt $(I - T)$ eine beschränkte Inverse. Dies erfüllt $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

wenn $\|T\| \leq 1$ haben wir gewonnen, aber $\|T\|$ kann groß sein (nilpotente Matrizen)

Beweis : "*i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*": "klar"
iii) $\Rightarrow$ *iv)*": Sei $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}, k \in \{q_0, \dots, N-1\}$, s.d. $n = \ell \cdot N + k \Rightarrow \ell \leq \frac{n}{N} \Rightarrow \|T^n\| = \|(T^n)^\ell T^k\| \leq \|T^N\|^\ell \cdot \|T^k\|$
Sei $M := \max\{1, \|T\|, \|T^2\|, \dots, \|T^{N-1}\|\} \Rightarrow \|T^n\| \leq M\|T^N\|^\ell$
$\Rightarrow \sqrt[n]{\|T^n\|} = \sqrt[n]{\|T^N\|^\ell} \sqrt[n]{M} \leq \sqrt[n]{\|T^N\|^{\frac{n}{N}}} \cdot \sqrt[n]{M} = \underbrace{\sqrt[N]{\|T^N\|}}_{<1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{M}}_{\substack{\to 1 \\ \text{für } n\to\infty}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\|T^N\|}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ ($\nearrow$ Wurzelkriterium)
"*iv)* $\Rightarrow$ *i)*" TODO
Noch zu zeigen, wenn $(i) - (iv)$ gilt $\Rightarrow (I - T) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} T^k = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k) \cdot (I - T) = I$:
Es gilt: $(I - T) \cdot S_n = (I - T) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} T^k) = \sum_{k=0}^{n} T^k$ ■

Bemerkung 1.26. 1. Wenn $\|T\| < 1$, dann konvergiert die Neumannsche Reihe.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ ist nur hinreichend für Invertierbarkeit von $I - T$, wie das Gegenbeispiel $T = 2I$ zeigt.

Beispiel 1.27 (Fredholmsche Integralgleichung)**.** Sei $k \in C([a, b]^2)$. Der Fredholmsche Integraloperator

$$K : C([a, b]) \to C([a, b]),\ (Kx)(s) := \int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

ist stetig, wenn x stetig ist. Die Fredholmsche Integralgleichung lautet:

$$(I-K)x = y, \quad y \in C([a,b]).$$

Und es gilt: $\|Kx\|_\infty \leq \max\limits_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt \cdot \|x\|_\infty$.

Wenn nun $\max\limits_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt < 1$, dann gilt für alle $y \in C([a,b])$: Die Fredholmsche Integralgleichung $(I-K)x = y$ hat genau eine Lösung $x \in C([a,b])$. Diese hängt stetig von $y \in C[a,b]$ ab.

1.3 Metrische und topologische Räume, Satz von Baire

Bemerkung 1.28 (Erinnerung). - (X,d) metrischer Raum mit Metrik d.

- Kompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstraß

Lemma 1.29. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt die Vierecksungleichung:*

$$|d(x,y) - d(x_1,y_1)| \leq d(x,x_1) + d(y,y_1) \quad \forall x,x_1,y,y_1 \in X$$

Beweis : $d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x) + d(x,y_1) \leq d(x_1,x) + d(x,y) + d(y,y_1)$
$\Rightarrow d(x_1,y_1) - d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$. Analog: $d(x,y) - d(x_1,y_1) \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$
$\Rightarrow |d(x,y) - d(x_1,y_1)| \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$ ■

Bemerkung 1.30. Rekapitulieren Sie folgende Begriffe: $U_r(x)$ Kugel mit Radius r, $\overline{M}$ Abschluss, $\mathring{M}$ Innere, ∂M Rand, Kompakt, offene Überdeckung.

Definition 1.31. Seien $(X,d_X),(Y,d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

(a) *abstandserhaltend* falls $d_X(x,y) = d_Y(f(x),f(y))$ (Bsp.: orthogonale Matrix).

(b) *Isometrie* falls abstandserhaltend und surjektiv.

Eine *abstandserhaltende* Abbildung heißt auch *Einbettung*. Eine *Einbettung* heißt *dicht*, falls $f(X)$ dicht in Y ist.
Notation: Wir schreiben $X \subset Y$, falls X in Y eingebettet ist.

Satz 1.32. *Jeder metrische Raum (X,d) lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ dicht einbetten. $(\hat{X},\hat{d})$ heißt Vervollständigung von (X,d).*

Beweis : (1) Konstruktion von $\hat{X}$
Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchyfolgen in X. Seien $\overline{x} := (x_n),\ \overline{y} := (y_n) \in CF(X)$.
Wir betrachten den „Abstand“

$$d(\overline{x},\overline{y}) := \lim_{n\to\infty} d_X(x_n,y_n),$$

der dank Lemma 1.29 wohldefiniert ist, und die Relation $\sim \subseteq CF(X) \times CF(X)$ mit

$$\overline{x} \sim \overline{y} :\Leftrightarrow d(\overline{x},\overline{y}) = 0.$$

„ $\sim$ “ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation und unterteilt $CF(X)$ in Äquivalenzklassen. Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse des Repräsentanten $\overline{x}$ und $\hat{X}$ die Menge aller Äquivalenzklassen.
Für $\overline{x},\overline{x}' \in [x] \in \hat{X},\ \overline{y},\overline{y}' \in [y] \in \hat{X}$ gilt:

$$0 = d(\overline{x},\overline{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X((x_n),(x_n'))$$
$$0 = d(\overline{y},\overline{y}') = \lim_{n\to\infty} d_X((y_n),(y_n')).$$

Wegen $d_x(x_n, y_n') \leq d_X(x_n', x_n') + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y_n')$
$d_x(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x_n') + d_X(x_n', y_n') + d_X(y_n', y_n)$ ist

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n', y_n') \leq \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d_X(x_n', y_n') \Rightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{x}', \overline{y}')$$

und wir können wohldefinieren: $\hat{d}([x],[y]) := d(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow \hat{d}$ ist Metrik auf $\hat{X}$.

(2) Konstruktion einer dichten Einbettung $f : X \to \hat{X}$
Für $x \in X$ sei $f(x) := [(x, x, x, \dots)]$.
Es gilt für $x, y \in X$: $\hat{d}(f(x), f(y)) = \lim_{n\to\infty} d_X(x, y) = d_X(x, y)$.
Wir zeigen nun, dass $f(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Sei $[x] \in \hat{X}$, $\overline{x} = (x_n)$, da nun (x_n) eine Cauchyfolge in X ist, ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \ \forall n, m \geq N$$

Wir betrachten nun $\overline{x}_N := (x_N, x_N, x_N, \dots)$

$$\Rightarrow \hat{d}(f(x_N), [x]) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_N, x_n) \leq \varepsilon$$

Damit ist $f(x_N) \to [x]$ für $\varepsilon \to 0$ (oder $N \to \infty$?).

(3) Vollständigkeit von $\hat{X}$
Sei $([x]_j)$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Zu jedem $[x]_j \in \hat{X}\ \exists y_j \in X$ so dass $\hat{d}([x]_j, f(y_j) < \frac{1}{j}$, da f(X) dicht in $\hat{X}$ ist.

$$\Rightarrow d_X(y_j, y_k) = \hat{d}(f(y_j), f(y_k)) \leq \hat{d}(f(y_j), [x]_j) + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \hat{d}([x]_k, f(y_k)) < \frac{1}{j} + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow (y_j)$ ist eine Cauchyfolge in X, $y := (y_j) \in CF(X) \Rightarrow\ [y] \in \hat{X}$ ist der Kandidat für den Grenzwert der Cauchyfolge:

$$\hat{d}([x]_j, [y]) \leq \hat{d}([x]_j, f(y_j)) + \hat{d}(f(y_j), [y]) < \frac{1}{j} + \lim_{k\to\infty} d_X(y_j, y_k) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \hat{d}([x]_j, [y]) = 0$$

das heißt $[x]_j \to [y]$ für $j \to \infty$

(4) Eindeutigkeit von $\hat{X}$ im folgenden Sinne: ist $\tilde{X}$ eine weitere Vervollständigung von X, so sind $\hat{X}, \tilde{X}$ isometrisch zueinander.
Sei also (H, d_H) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \subseteq H$, $d_H(x, y) = d_X(x, y)\ \forall x, y \in X$ und $\overline{X} = H$.
Unser Ziel ist es, eine Isometrie $g : \hat{X} \to H$ zu bauen.
Sei $[x] \in \hat{X}$, $\overline{x} = (x_n) \in [x] \in \hat{X}$, da H vollständig ist $\exists h \in H$ so dass $\lim_{n\to\infty} d_H(x_n, h) = 0$
Wir betrachten $g : \hat{X} \to H$, $[x] \mapsto h$ wie oben.
g ist surjektiv, da für $h \in H \Rightarrow \exists \overline{x} = (x_n) \in CF(X)$ so dass $\lim_{n\to\infty} d_H(x_n, h) = 0$, also $g([x]) = h$
g ist abstandserhaltend, da für $[x], [y] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([x],[y]) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_H(x_n, y_n) = d_H(g([x]), g([y])).$$

■

Definition 1.33. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$. Wir definieren den Durchmesser von M durch

$$\delta(M) := \sup \{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips aus $\mathbb{R}$.

Satz 1.34 (Cantorscher Durchschnittssatz). *Sei (X, d) ein metrischer Raum, der vollständig ist. (F_n) eine Folge von abgeschlossen Teilmengen mit $F_n \neq \emptyset\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ und* $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in F_n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \delta(F_n) < \varepsilon\ \forall n \geq N$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ da } x_n, x_m \in F_N \text{ und } \delta(F_N) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ ist eine Cauchyfolge } \overset{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in X : \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Weil $x_k \in F_n\ \forall k \geq n$ und F_n abgeschlossen ist, ist

$$x_0 \in F_n \Rightarrow x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Angenommen $\exists y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, mit $x_0 \neq y$

$$\Rightarrow 0 < d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \leq 2\delta(F_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ Widerspruch!}$$

∎

Satz 1.35 (Bairescher Kategoriensatz). *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, wobei $F_n \subseteq X$ abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$.*
Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset.$$

Es gibt also ein F_{n_0} dessen Inneres nichtleer ist.

Beweis: Wir bemerken zuerst: $x \in \mathring{M} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq M$.
Angenommen es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathring{F}_n = \emptyset$, also kein F_n enthalte eine abgeschlossene Kugel.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $r > 0$ und $x_0 \in X \Rightarrow \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$
Seien nun $x_n \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n = \emptyset$. Da F_n kein Inneres hat (offiziell: abgeschlossen?!), existiert ein $r_n \in (0, \frac{r}{2})$ mit $\overline{U_{r_n}(x_0)} \cap F_n = \emptyset$, und für ein $y \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$ gilt:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) d(x_n, x_0) \leq r_n + \frac{r}{2} \leq r$$

So erhalten wir $\overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq \overline{U_r(x_0)}$. Wir betrachten nun $\overline{U_1(x_0)}$ und nach obiger Überlegung

$$\exists r_1 > 0, x_1 \in X : \overline{U_{r_1}(x_1)} \subseteq \overline{U_1(x_0)} \text{ mit } r_1 \leq \frac{1}{2} \text{ und } \overline{U_{r_1}(x_1)} \cap F_1 = \emptyset$$

Ebenso

$$\exists r_2 > 0, x_2 \in X : \overline{U_{r_2}(x_2)} \subseteq \overline{U_{r_1}(x_1)} \text{ mit } r_2 \leq \frac{1}{4} \text{ und } \overline{U_{r_2}(x_2)} \cap F_2 = \emptyset$$

Sukzessive erhalten wir so eine Folge $\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{U_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{U_{r_n}(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $r_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $\overline{U_{r_n}(x_n)} \cap F_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wegen (1) und

$$0 \leq \delta\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right) = 2r_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

sind wir in der Situation des Cantorschen Durchschnittsatzes und es gibt ein eindeutiges $\hat{x} \in X$ mit $\hat{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_{r_n}(x_n)$. Dann ist wegen (3) $\hat{x} \notin F_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \hat{x} \in X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ Widerspruch! ∎

Korollar. *Hier kommt ziemlich fancy Zeug, von wegen der Polynomraum kann nicht vollständig sein, rein. TODO Behauptung und Beweis erstellen.*

Beweis: klar! (Ja, selbst ohne eine Behauptung) ∎

Definition 1.36. Sei (X,d) ein metrischer Raum. $M \subseteq X$ heißt…

(a) *nirgends dicht*, wenn $\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$.

(b) *mager* oder *von 1.Kategorie*, wenn M eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, also $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A_n nirgends dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt.

(c) *von 2.Kategorie* oder *fett*, wenn M nicht von 1.Kategorie ist.

Eigene Bemerkung (Trivia am Rande). Direkt aus der Definition folgt, das jede nirgends dichte Menge insbesondere von 1.Kategorie ist. Andersrum gilt dies nicht, was das Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ zeigt. Ein Beispiel für eine nirgends dichte Menge ist die Cantor-Menge.
"Anschaulich" bedeutet *nirgends dicht*, wenn sie in keiner Teilmenge (mit nichtleeren Innerem) des gesamten Raumes dicht liegt.

Mithilfe dieser Definition können wir den Baireschen Umformulieren zu

$$(X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum } \Rightarrow X \text{ ist von 2.Kategorie}$$

Korollar 1.37. *(X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen und nichtleer. Dann ist U von 2.Kategorie.*

Beweis Eigener Beweis : Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in U$, $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq U$ ist. Nun können wir den Baireschen Kategoriensatz auf $\overline{U_\varepsilon(x)}$ anwenden. ∎

Korollar 1.38. *(X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:*

$$M \subseteq X \text{ mager } \Rightarrow X \setminus M \text{ ist dicht in} X.$$

Beweis : Sei $M \subseteq X$ mager, angenommen $X \setminus M$ sei nicht dicht, also $X \setminus \overline{(X \setminus M)} \neq \emptyset$
$\Rightarrow O := X \setminus \overline{(X \setminus M)}$ ist offen und nichtleer.
$\Rightarrow O \subseteq M$ ist von 1. Kategorie, Widerspruch zu Korollar 1.37! ∎

Korollar 1.39. *(X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n \subseteq X$ so dass $X \setminus B_n$ mager. $B := \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$*

$$\Rightarrow \overline{B} = X$$

Beweis : $X \setminus \overline{B} = X \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c = X \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c)$ ist wegen Korollar dicht in X. ∎

Definition 1.40. Der metrische Raum (X, d) heißt ...

(a) *kompakt*, wenn für alle offenen Überdeckungen $(U_i)_{i\in I}$ von X ein endliches $I' \subseteq I$ existiert, so dass $X = \cup_{i\in I'} U_i$

(b) *präkompakt*, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ existiert, so dass $X = \cup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$. M heißt auch ε-Netz von X.

Satz 1.41. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist äquivalent:*

(1) X kompakt.

(2) Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.

(3) Ist (A_n) eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $A_n \supseteq A_{n+1} \neq \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(4) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

(5) X ist vollständig und präkompakt.

Beweis : (1) $\Rightarrow$ (2): Man nimmt nur weniger mögliche Vereinigungen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Angenommen $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, $A_n = \overline{A_n}$, $\emptyset \neq A_{n+1} \subseteq A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow U_n := X \setminus A_n \text{ offen und } \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N} : X = \cup_{i=1}^m U_{n_i} = \cup_{i=1}^m (X \setminus A_{n_i}) \\ &\qquad = X \setminus (\cap_{i=1}^m A_{n_i}) \\ &\qquad = X \setminus A_k \qquad \text{für } k := \max\{n_1, \ldots, n_m\} \\ &\qquad \Rightarrow A_k = \emptyset \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei (x_n) eine Folge in X. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Es ist $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N} \overset{(3)}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Deshalb ist

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : U_\varepsilon(x_0) \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x_0$ ist Häufungspunkt der Folge (x_n) und damit Grenzwert einer Teilfolge von (x_n).

(4) $\Rightarrow$ (5): Sei (x_n) eine Cauchyfolge. Wegen (4) hat (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow X$ vollständig.

Angenommen X sei nicht präkompakt

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X \; \exists x_{n+1} \in X \text{ mit } x_{n+1} \notin \cup_{i=1}^n U_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Konstruiere so eine Folge (x_n) in X. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon_0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

$\Rightarrow (x_n)$ hat keine Cauchy-Teilfolge $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen $\nexists$ endliche Teilüberdeckung. Definiere induktiv Kugeln K_n, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt:

Da X präkompakt, gibt es zu $\varepsilon = 1$ endliche viele Kugeln $U_1(x_0, j)$ mit $X \subseteq \cap_{j=0}^{m_1} U_1(x_{0,j})$. Dann gilt: Mindestens eine dieser Kugeln ist nicht durch endliche viele Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckbar.

OBdA $U_1(x_{0,0})$, setze $x_0 := x_{0,0}$.

Konstruiere so eine Folge (x_n), so dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_1)$ nicht durch endlich viele Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt werden kann.

Sei $y \in U_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1}) \cap U_{\frac{1}{2^n}}(x_1) \neq \emptyset$

Dann gilt $d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, y) + d(y, x_1) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

Für $n \leq p \leq q$ gilt dann $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow (x_n)$ ist eine Cauchyfolge in $X \overset{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists \hat{x} \in X$, so dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \hat{x}) = 0$

Wegen $X = \cup_{i\in I} U_i$ gilt $\exists i_0 \in I : \hat{x} \in U_{i_0}$

Weil U_{i_0} offen: $\exists r > 0$, so dass $U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$

Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ und $d(\hat{x}, x_n) < \frac{r}{2}$

$\Rightarrow U_{\frac{1}{2}}(x_n) \subseteq U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ nicht durch endliche viele U_i überdeckt werden kann. ■

Korollar 1.42. *(X, d) metrischer Raum*

a) (X, d) kompakt $\Rightarrow$ X vollständig

b) $M \subset X$, so dass jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge hat ("M folgenkomapkt") $\Leftrightarrow$ $M \subset X$ kompakt ("M Überdeckungskompakt") *c) $M \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ M beschränkt und abgeschlossen.*

d) X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ A kompakt.

Definition 1.43. (X, d) metrischer Raum. $M \subset X$ heißt "relativ kompakt", wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

Definition 1.44. (X, d) vollständiger metrischer Raum, $M \subset X$ relativ kompakt.
$\Leftrightarrow$ jede Folge in M besitzt eine in X konvergente Teilfolge.

Satz 1.45. *(X, d) metrischer Raum. $M, n \subset X$ seien relativ kompakt (bzw. präkompakt). Dann gilt*

1. *$S \subset M \Rightarrow S$ relativ kompakt (bzw. präkompakt)*
2. *$M \cup N$ relativ kompakt (bzw präkomp.)*
3. *M, N präkompakt*
4. *Ist (X, d) vollständig, so gilt M relativ kompakt $\Leftrightarrow$ M präkompakt*

Beweis : • "a) - c)": mündlicher Beweis. TODO. folgt aus Definition.

- d) $\Rightarrow$ folgt aus c)
  $\Leftarrow$ Sei M präkompakt $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}, \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$ mit $M \subset \cup_{j=1}^{p} \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)}$. Wegen $\overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset U_\varepsilon(x_j)$ gilt $\overline{M} \subset \cup_{j=1}^{p} \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset \cup_{j=1}^{p} U_\varepsilon(x_j) \Rightarrow \overline{M}$ präkompakt. Da $(\overline{M}, d)$ vollständig ist $\overline{M}$ kompakt. (Satz 1.41) $\Rightarrow$ M relativ kompakt. ■

Bemerkung 1.46 (Fakten). $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

a) Aussagen über metrischer Räume übertragen sich

b) Die Vervollständigung von X ist ein Banachraum.

c) Wenn $dim X < \infty$, dann

   i) X Banachraum
   ii) $M \subset X$ kompakt $\Leftrightarrow$ M beschränkt und abgeschlossen (Heine Borel)
   iii) $M \subset X$ relativ kompakt $\Leftrightarrow$ M präkompakt $\Leftrightarrow$ M beschränkt

Lemma 1.47 (Lemma von Riesz)**.** $\mathbb{TODO}$*: theta mit eta ersetzen, Beweis vervollständigen. $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $E \subset X$ abgeschlossener Unterraum mit $E \neq X$, $\theta \in (0, 1)$.
Dann existiert ein $x_\theta \in X$ mit $\|x_\theta\| = 1$ und $\|x_\theta - y\| \geq \theta\ \forall y \in E$.*

Beweis : Sei $x_0 \in X \backslash E$. $\delta = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|$
E abgeschlossen $\Rightarrow \delta > 0$. Sei (y_n) Folge in E mit $\|x_0 - y_n\| \to \delta$. Sei $\eta \in (0, 1) \Rightarrow \frac{\delta}{\eta} > \delta$
$\Rightarrow \exists z \in E$ mit $\|x_0 - z\| \leq \frac{\delta}{\eta}$. Definiere $x_\theta := \frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} \Rightarrow \|x_\theta\| = 1$ ■

Korollar 1.48. $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum.*

1. *$\overline{U_1(0)} \Leftrightarrow dim X < \infty$*
2. *Jede beschränkt Folge besitzt konvergente Teilfolge $\Leftrightarrow dim X < \infty$*

Beweis : a) "$\Leftarrow$ "Folgt aus Heine-Borel
$\Rightarrow$ Angenommen, $dim X = \infty$ (Nicht endlichdimensional). Wähle $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$. Nach Lemma von Riesz, wähle $x_1 \in X$, so dass $\|x_1 - y\| \geq \frac{1}{2} \forall y \in \text{span}\{x_0\}$.
Konstruiere so Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2} \forall y \in \text{span}\{x_0, \dots, x_{n-1}\}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}\ \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.
b) genauso. ■

1.3.1 Skalarprodukträume

Wiederholung: X $\mathbb{K}-VR$. Ein "Skalarprodukt" ist eine Abb $(\cdot,\cdot)\to\mathbb{K}$ mit (S1) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$ $\forall x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ (S2) $(x,y)=(y,x)$ (S3) $(x,x)>0\forall x\in X\backslash 0$.

Bemerkung 1.49. 1. $\|x\|:=\sqrt{(x,x)}$ ist Norm.

2. vollständig Skalarproduktraum heißt "Hilbertraum".
3. $\|x\|\cdot\|y\|\geq|(x,y)|$ $\forall x,y\in X$ (Cauchy-Schwartz-Ungleichung)
4. Für $x,y\in X$ mit $(x,y)=0$ (x und y orthogonal, $xorhy$) gilt $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ (Satz des Pythagoras)
5. Für $x,y\in X$ gilt die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$
6. Für $(x_n),(y_n)$ mit $(x_n)\to x$, $(y_n)\to y$ gilt $(x_n,y_n)\to(x,y)$, da $|(x_n,y_n)-(x,y)|\leq\|x_n\|\cdot\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|$ (Stetigkeit des Skalarprodukts)

Satz 1.50. *Sei $(X,\|\|)$ normierter Raum mit $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2...\forall x,y\in X$ Dann existiert Skalarprodukt auf X, welches $\|\cdot\|$ induziert.*

Beweis : Skizze! a) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $(x,y):=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$. b) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ■

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft** - Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand >0 haben. Für ein Gegenbeispiel ↗ topologischer Raum

2. **essentiell beschränkt** - $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|:=\inf_{\substack{N\in\mathfrak{A}\\ \mu(N)=0}}\sup_{x\in\Omega\backslash N}|f(x)|<\infty$$
oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x):=x\cdot\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu=\lambda$, da f nur auf $\mathbb{Q}$ nicht null ist, und $\mathbb{Q}$ ist Lesbesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** $(X,\mathcal{T})$ - Sei X eine Menge und $\mathcal{T}\subseteq P(X)$. Die Elemente von $\mathcal{T}$ sind die *offenen Mengen*. $\mathcal{T}$ definiert eine *Topologie*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:
   (i) $\emptyset$, $X\in\mathcal{T}$
   (ii) $A_i\in\mathcal{T}$ für $i\in I$, $\mathbb{N}\supset I$ endlich $\Rightarrow\cap_{i\in I}A_i\in\mathcal{T}$
   (iii) $A_i\in\mathcal{T}$ für $i\in I$, I bel. Indexmenge $\Rightarrow\cup_{i\in I}A_i\in\mathcal{T}$

   $(X,\mathcal{T})$ ist der *topologische Raum.*

   Ein Beispiel, für einen topologischen Raum sind die metrischen Räume (X,d): d induziert dann eine Topologie auf X, die offenen Mengen sind nämlich durch d bestimmt.

   Sei $M:=\{1,2\},\ldots$

   $\mathcal{T}:=\{\emptyset,M\}$. Die triviale Topologie, nur $\emptyset$ und M sind offen.

   $\mathcal{T}:=P(M)$. Die diskrete Topologie, alle Mengen sind offen. Die diskrete Metrik induziert genau diese Topologie.

   $\mathcal{T}:=\{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}$. M ist hier nicht hausdorffsch, denn egal welche Umgebung man um 2 betrachtet, man kann nicht erreichen, dass 1 nicht in der gleichen ist.