Kapitel 1

Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$. Wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge: (x_n), $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \epsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm)**.** Sei X ein $\mathbb{K} - Vektorraum$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von X.

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow$ X/N ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
$L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum ($\nearrow$ Ana III).

(b) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und essentiell beschränkt$\}$ ist ebenfalls seminormiert mit $|||f|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$.
$L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.
$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Suprenumsnorm ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.4 (diverse Fakten). Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

(a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_\Omega f\overline{g}d\mu$

(b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow\ L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$

(c) Wenn $p \geq r \Rightarrow\ L^p(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$

(d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow\ fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei hier $\frac{1}{\infty} := 0$.

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \text{supp} f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \text{const}$ oder $f = sign$ sich nicht durch Funktionen aus C_0^k approximieren lassen.

(f) $BC(\Omega)$ ist bzgl. Folgenbildung abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$.

Kapitel 2

Lineare Operatoren

Definition 2.1 (linearer Operator)**.** Seien X, Y $\mathbb{K}-$Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \; x, y \in X$$

wir schreiben Tx statt $T(x)$.
Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \to \mathbb{K}$ *Funktional.*
Wenn X, Y normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator T *beschränkt*, wenn $T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist.

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft -** Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand > 0 haben.

2. **essentiell beschränkt -** Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \in \mathfrak{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} < \infty$$

   oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da f nur auf $\mathbb{Q}$ nicht null ist, und $\mathbb{Q}$ ist Lesbesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ **-** Ein Raum, dessen offene Mengen durch $\mathcal{T}$ gegeben sind, wobei die offenen Mengen die bekannten Eigenschaften behalten sollen.