

Kapitel 1

Funktionalanalysis

1.1 Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$)
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)_X}$. Wobei (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge: $(x_n), \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $||| \cdot ||| : X \rightarrow \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $|||x||| \geq 0$
- (ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$
- (iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm erfüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von X .

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow X/N$ ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume). Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar, } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit

$$|||f|||_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum (\nearrow Ana III).

(b) $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$ ist ebenfalls seminormiert mit

$$|||f|||_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

$L^{\infty}(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei das Zählmaß auf \mathbb{N} und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.

$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

- (d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n . $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.
- (e) Sei (Ω, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.4 (diverse Fakten). Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

- (a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$
- (b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (c) Wenn $p \geq r \Rightarrow L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$
- (d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei hier $\frac{1}{\infty} := 0$.
- (e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega) \forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \text{const}$ oder $f = \text{sign}$ sich nicht durch Funktionen aus C_0^k approximieren lassen.
- (f) $BC(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$, dennoch ist $BC(\Omega)$ in beiden Fällen ein Unterraum.

1.2 Lineare Operatoren

Definition 1.5 (linearer Operator). Seien X, Y \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \rightarrow Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

wir schreiben Tx statt $T(x)$.

Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ *Funktional*.

Wenn X, Y normierte \mathbb{K} -Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator T *beschränkt*, wenn $T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist. ($\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in X$ mit $\|x\|_X < 1$)

Aus der Definition erkennt man, dass Bilder beschränkter Mengen M unter einem beschränkten linearen Operator T beschränkt sind. Denn $\exists R > 0 : M \subseteq U_R(0)$, sodass $T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$, und dies ist beschränkt.

Beispiel 1.6. a) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $\{T : X \rightarrow Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$. $T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ist beschränkt. Denn:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| < \infty, \quad t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist T beschränkt.

- b) $T : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$, $Tf := \int_{\Omega} f d\mu$. Es gilt $|Tf| = |\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \|f\|_1$. Also $|Tf| < 1 \forall f \in L^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1 \Rightarrow T$ beschränkt

Satz 1.7. Seien X, Y normierte Räume, $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (i) T beschränkt,
- (ii) T ist Lipschitz stetig,
- (iii) T ist gleichmäßig stetig,
- (iv) T ist stetig,

(v) T stetig in 0,

(vi) $\exists x \in X : T$ stetig in x .

Beweis: "(i) \Rightarrow (ii)": Sei $M > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in U_1(0)$. Es gilt $T0 = 0$. Weiterhin gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:

$$\|Tx\|_Y = \|2\|x\|_X T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)\| = 2\|x\|_X \|T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)\|_Y \leq 2M\|x\|_X.$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in U_1(0)}$

Also gilt $\|Tx\|_Y \leq 2M\|x\|_X \forall x \in \|x\|_X$ und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M\|x_1 - x_2\|_X \forall x_1, x_2 \in X$$

"(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)": Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen¹.

"(vi) \Rightarrow (v)": Sei $x \in X$, so dass T stetig in x ist. Sei (x_n) Nullfolge in X

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(x + x_n) = Tx \stackrel{\text{stetig in } 0}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0 = T0$$

"(v) \Rightarrow (i)": Beweis durch Widerspruch: Angenommen T ist unbeschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_1(0)$, so dass $\|Tx_n\|_Y \geq n$ ($\Rightarrow x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, aber $\|T\frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$ Das heiße aber T ist unstetig in 0. ■

Bemerkung 1.8. a) $\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ beschränkt}\}$

b) $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ beides sind $\mathbb{K} - VR$.

c) $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ topologischer Dualraum von X .

Bemerkung 1.9. c) $\text{Ker } T, \text{Im } T$ sind UVR.

d) (i) – (vi) quivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

e) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass $\text{Im } T$ nicht abgeschlossen \nearrow Übung

f) $\text{Ker } T$ abgeschlossen $\forall T \in \mathcal{B}(X, Y)$, da T stetig und $\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\})$, wobei $\{0\}$ abgeschlossen in Y .

Satz 1.10 (Operatornormen). X, Y normierte Räume. $\mathcal{B}(X, Y)$ normierter Raum mit folgender Norm $\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y$.

Beweis: (Positivität:) $\|0\| = 0$. Sei $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \forall x \in U_1(0)$. Sei $x \in X$ beliebig. $\Rightarrow Tx = 2\|x\|_X T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(Homogenität:) Sei $\lambda \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$.

(Dreiecksungleichug:) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1x + T_2x\|_Y) \leq \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y) \leq \sup_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1x_1\|_Y + \|T_2x_2\|_Y) \leq \sup_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1x_1\|_Y + \sup_{x_2 \in U_1(0)} \|T_2x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$ ■

Bemerkung 1.11. Es gilt $\|T\| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ (\nearrow Übung).

Satz 1.12. X normierter Raum, Y Banachraum. Dann ist $\mathcal{B}(X, Y)$ Banachraum.

¹ Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I, II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

Beweis: Sei (T_n) CF in $\mathcal{B}(X, Y)$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Also $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\| \forall x \in X$. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von Y , dass $(T_n x)$ in Y für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf $T : X \rightarrow Y$, $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a) T ist ein linearer Operator.

b) T ist beschränkt.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$ (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

$$\text{Zu a): } T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$$

zu b): Wegen $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$ gilt $\|T_n\|$ ist CF in \mathbb{R} , also beschränkt: $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Für $x \in U_1(0)$ gilt $\|Tx\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$. (vgl. Def 1.5, " \Leftrightarrow ")

zu c): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_1(0)$ gilt somit

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \forall n \geq N$$

Also ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und aufgrund der Beliebigkeit der CF, folgt die Vollständigkeit. ■

Korollar 1.13. X normierter Raum $\Rightarrow X'$ Banachraum.

Bemerkung 1.14. a) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ (gilt wegen $\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X \leq M \|x\|_X \forall x \in X$ und der Linearität von ST .)

b) $id \in \mathcal{B}(X, X)$, $\|id\| = 1$.

c) Aus punktweise Konvergenz $T_n x \rightarrow Tx$ folgt i.A. nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ (d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$).

Bsp: $X = \ell^p, p \in [1, \infty)$, $T_n : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $T_n(x_k) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ wobei $(x_k) = (x_1, \dots, x_n, \dots)$.

Man kann zeigen, dass $T_n \in \mathcal{B}(X) \forall n \in \mathbb{N}$ (\nearrow Übung).

Sei $(x_k) \in \ell^p, \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} < \epsilon$. $\|T_n(x_k) - x_n\|_X = (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} \forall n \geq N$. Also $\forall x \in X \|T_n - x\|_X \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Frage: $\|T_n - T\|_X \rightarrow 0$? Nein! Sei $(x_k^n) =$

$$(0, \dots, 0, \overset{n+1 \text{ Stelle}}{1}, 0, \dots), \|T_n(x_k^n) - x\|_X = \|(0, \dots, 0, -1, 0, \dots)\|_Y = 1 \quad \|T_n - T\| \stackrel{Def}{=} \sup_{x \in U_1(0)} \|(T_n - T)x\|_X \geq \|(T_n - T)(\frac{1}{2}(x_k^n))\| = \frac{1}{2} \cdot 1 \quad (T = id_X) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|T_n - T\| \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

d) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und T bijektiv. Dann ist T^{-1} i.A. nicht beschränkt.

Bsp. $X \in C[0, 1], Y = \{f \in C^1([0, 1]) : f(0) = 0\}$ mit $\|x\|_X = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ und $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y$

und $T : X \rightarrow Y, (Tx)(t) = \int_0^t x(s) ds$.

- $T^{-1} = S : Y \rightarrow X, Sy = y'$. (Zeige $ST = id_X$ und $TS = id_Y$)
- $T^{-1} \notin \mathcal{B}(Y, X)$ (Sei $y_n(t) = t^n \in Y, (T^{-1}y_n)(t) = n \cdot t^{n-1} \Rightarrow \|y_n\|_Y = 1 \forall n \in \mathbb{N}, \|T^{-1}y\|_X = n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T^{-1}$ kann nicht beschränkt sein. ($\|T^{-1}\frac{1}{2}y_n\|_X = \frac{1}{2} \cdot n$ mit $\|\frac{1}{2}y_n\| = \frac{1}{2}$)

Bem: Y ist nicht vollständig.

Satz 1.15. Sei X, Y normierte \mathbb{K} -VR, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

(i) T ist injektiv und $T^{-1} \in \mathcal{B}(\text{im}(T), X)$ normierter UVR von Y .

(ii) $\exists m > 0 : \|Tx\|_Y \geq m \|x\|_X \forall x \in X$.

Beweis: "(i) \Rightarrow (ii)": $\exists M > 0, \|T^{-1}y\| \leq M\|y\| \forall y \in \text{im}T$. Sei $x \in X \exists y \in \text{im}T : x = T^{-1}y \Rightarrow \|x\|_Y \leq M\|Tx\|_Y \Rightarrow \|Tx\|_Y \geq \frac{1}{M}\|x\|_X = m\|x\|_X$
 "(ii) \Rightarrow (i)": Sei $x \in X : Tx = 0$. Aus $\|Tx\| \geq m\|x\|$ folgt $x = 0$ und damit ist T injektiv. Sei $y \in \text{im}T \exists x \in X : Tx = y$ und $T^{-1}y = x \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Tx\|_Y = \frac{1}{m}\|y\|_Y$, also $\exists M = \frac{1}{m}, \|T^{-1}y\|_X \leq M\|y\|_Y \forall y \in \text{im}T \Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(\text{im}T, X)$ ■

Die Negation dieser Aussage halten wir explizit fest mit folgendem

Korollar 1.16. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ (X, Y normierte \mathbb{K} -VR. Dann sind äquivalent:

- (i) T besitzt keine stetige Inverser $T^{-1} : \text{im}T \rightarrow X$.
- (ii) \exists Folge (x_n) in X , so dass $\|x_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| = 0$

Definition 1.17. X \mathbb{K} -VR mit Norm $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Dann heißt $\|\cdot\|_1$

- (a) "stärker" als $\|\cdot\|_2$, falls gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2 = 0$
- (b) "schwächer" als $\|\cdot\|_2$, falls $\|\cdot\|_2$ stärker ist als $\|\cdot\|_1$.
- (c) "äquivalent" falls $\|\cdot\|_1$ stärker und schwächer ist als $\|\cdot\|_2$

Satz 1.18. X \mathbb{K} -VR mit Norm $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Dann gilt

- (a) $\|\cdot\|_1$ ist stärker als $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \forall x \in X$
- (b) $\|\cdot\|_1$ ist schwächer als $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists M > 0 : \|x\|_1 \leq M\|x\|_2 \forall x \in X$
- (c) $\|\cdot\|_1$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists m, M > 0 : m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \forall x \in X$

Beweis: zu (a): " \Rightarrow " $id : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ ist stetig wegen Vor. $S.1.15$ und weil id linear, id beschränkt, $id \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2))$ d.h. $\exists M > 0 : \|id(x)\|_2 \leq M\|x\|_1 \forall x \in X$.
 " \Leftarrow " Wissen $\exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \forall x \in X$. Sei $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \leq M\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow \|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$. ■

Definition 1.19. Zwei normierte \mathbb{K} -VR X, Y heißen "topologisch isomorph", falls es ein Isomorphismus $T : X \rightarrow Y$ mit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Dann heißt T topologischer Isomorphismus, (sonst auch Homöomorphismus)?

Satz 1.20. X, Y topologisch isomorph $\Leftrightarrow \exists m, M > 0 : T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und injektiv : $m\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \forall x \in X$

Beweis: 'Klar' wegen Satz 1.17 und Satz 1.15. ■

Bemerkung 1.21. 1. Falls, $m = M = 1$, dann nenn wir T "Isometrie".

- 2. Falls $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$: X, Y topologisch isomorph und topologischer Isomorphismus = lineare Bijektion.

Satz 1.22 (Fortsetzung von stetigen Operatoren). X, Y normierte \mathbb{K} -VR, Y ein Banachraum, $Z \subset X$, Z dichter UVR. $T \in \mathcal{B}(Z, Y)$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $T|_Z = \tilde{T}$.

Beweis: TODO: Beweis tippen. ■

Satz 1.23. Ist T normerhaltend (in \mathbb{R}^n die unitären Matrizen $\|Tx\| = \|x\|$), so ist \tilde{T} ebenfalls normerhaltend.

Beweis : TODO: Kurze Begründung. Eigentlich Korollar? ■

Beispiel 1.24 (Konstruktion eines unbeschränkten Funktional). Sei $X = \ell^1$ (Raum der absolut konvergenten Folgen)

Betrachte: $x_0 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots) \in \ell^1$, $\|x_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \frac{\pi^2}{6}$,

Einheitsvektor $e_k = (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$.

Erzeugnis: endliche lineare Kombination der Einheitsvektoren $\Rightarrow \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots, 0, \dots)\}$ (Folgen, die irgendwann zu 0 werden.)

Die Familie $B := (x_0, e_1, e_2, e_3, \dots)$ ist linear unabhängig. $\Rightarrow B_i$ lässt sich zu Basis $B = (b_i)_{i \in I}$ mit $\mathbb{N}_0 \subset I$ und $b_0 = x_0, b_i = e_i \forall i \in \mathbb{N}$ erweitern (überabzählbar).

Sei $x \in X = \ell^1 \Rightarrow \exists$ eindeutige Darstellung $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\text{endlich } n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n + \sum_{\text{endlich } i \in I \setminus \mathbb{N}_0} \alpha_i b_i$.

Definiere das Funktional: $f : \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$ mit $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\text{endlich } n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n + \sum_{\text{endlich } i \in I \setminus \mathbb{N}_0} \alpha_i b_i \mapsto \alpha_0$

Wir zeigen: $\text{Ker} f$ nicht abgeschlossen.

Betrachte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \Rightarrow x_n \in \text{Ker} f \forall n \in \mathbb{N}$, da $x_n \in \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt jedoch $x_n \rightarrow x_0 \notin \text{Ker} f$, da $f(x_0) = 1$.

Nun versuchen wir mit Erfolg einer waghalsigen Verallgemeinerung der geometrischen Reihe im Reellen für Operatoren und Banachräume. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \forall q \in \mathbb{C}$ mit $\text{norm} q < 1$

Satz 1.25 (Neumanansche Reihe). X Banachraum. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent:

i) Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} T^k = I_X + T^1 + T^2 + \dots$ ist konvergent bzgl. der Operatornorm.

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$

iii) $\exists N \in \mathbb{N} : \|T^N\| < 1$

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$.

In diesem Fall besitzt $(I - T)$ eine beschränkte Inverse. Dies erfüllt $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

Beweis : "i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)": "klar"

iii) \Rightarrow iv)": Sei $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}, k \in \{q_0, \dots, N-1\}$, s.d. $n = \ell \cdot N + k \Rightarrow \ell \leq \frac{n}{N} \Rightarrow \|T^n\| = \|(T^N)^\ell T^k\| \leq \|T^N\|^\ell \cdot \|T^k\|$

Sei $M := \max\{1, \|T\|, \|T^2\|, \dots, \|T^{N-1}\|\} \Rightarrow \|T^n\| \leq M \|T^N\|^\ell$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\|T^n\|} = \sqrt[n]{\|T^N\|^\ell} \sqrt[n]{M} \leq \sqrt[n]{\|T^N\|^\ell} \cdot \sqrt[n]{M} = \underbrace{\sqrt[n]{\|T^N\|^\ell}}_{< 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{M}}_{\rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\|T^N\|}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1 \quad (\nearrow \text{Wurzelkriterium})$$

"iv) \Rightarrow i)" TODO

Noch zu zeigen, wenn (i) - (iv) gilt $\Rightarrow (I - T) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} T^k = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k) \cdot (I - T) = I$:

Es gilt: $(I - T) \cdot S_n = (I - T) \cdot (\sum_{k=0}^n T^k) = \sum_{k=0}^n T^k$ ■

Bemerkung 1.26. 1. Wenn $\|T\| < 1$, dann konvergiert die Neumannsche Reihe.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ ist nur hinreichend für Invertierbarkeit von $I - T$, wie das Gegenbeispiel $T = 2I$ zeigt.

Beispiel 1.27 (Fredholmsche Integralgleichung). Sei $k \in C([a, b]^2)$. Der Fredholmsche Integraloperator

$$K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]), (Kx)(s) := \int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

wenn $\|T\| \leq 1$
haben wir ge-
wonnen, aber
 $\|T\|$ kann groß
sein (nilpotente
Matrizen)

ist stetig, wenn x stetig ist. Die Fredholmsche Integralgleichung lautet:

$$(I - K)x = y, \quad y \in C([a, b]).$$

Und es gilt: $\|Kx\|_\infty \leq \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt \cdot \|x\|_\infty$.

Wenn nun $\max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt < 1$, dann gilt für alle $y \in C([a, b])$: Die Fredholmsche Integralgleichung $(I - K)x = y$ hat genau eine Lösung $x \in C([a, b])$. Diese hängt stetig von $y \in C[a, b]$ ab.

1.3 Metrische und topologische Räume, Satz von Baire

Bemerkung 1.28 (Erinnerung). - (X, d) metrischer Raum mit Metrik d .

- Kompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstraß

Lemma 1.29. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt die Vierecksungleichung:

$$|d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leq d(x, x_1) + d(y, y_1) \quad \forall x, x_1, y, y_1 \in X$$

Beweis: $d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x) + d(x, y_1) \leq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, y_1)$
 $\Rightarrow d(x_1, y_1) - d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$. Analog: $d(x, y) - d(x_1, y_1) \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$
 $\Rightarrow |d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$ ■

Bemerkung 1.30. Rekapitulieren Sie folgende Begriffe: $U_r(x)$ Kugel mit Radius r , \overline{M} Abschluss, $\overset{\circ}{M}$ Innere, ∂M Rand, Kompakt, offene Überdeckung.

Definition 1.31. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

- (a) *abstandserhaltend* falls $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$
- (b) *Isometrie* falls abstandserhaltend und surjektiv.

Eine abstandserhaltende Abbildung heißt auch *Einbettung*. Eine Einbettung heißt *dicht*, falls $f(X)$ dicht in Y ist.

Notation: Wir schreiben $X \subset Y$, falls X in Y eingebettet ist.

Satz 1.32. Jeder metrische Raum (X, d) lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum (\hat{X}, \hat{d}) dicht einbetten. (\hat{X}, \hat{d}) heißt Vervollständigung von (X, d) .

Beweis: (1) Konstruktion von \hat{X}

Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchyfolgen in X . Seien $\bar{x} := (x_n), \bar{y} := (y_n) \in CF(X)$.

Wir betrachten den „Abstand“

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n),$$

der dank Lemma 1.29 wohldefiniert ist, und die Relation $\sim \subseteq CF(X) \times CF(X)$ mit

$$\bar{x} \sim \bar{y} :\Leftrightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

„ \sim “ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation und unterteilt $CF(X)$ in Äquivalenzklassen. Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse des Repräsentanten \bar{x} und \hat{X} die Menge aller Äquivalenzklassen.

Für $\bar{x}, \bar{x}' \in [x] \in \hat{X}, \bar{y}, \bar{y}' \in [y] \in \hat{X}$ gilt:

$$0 = d(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X((x_n), (x'_n))$$

$$0 = d(\bar{y}, \bar{y}') = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X((y_n), (y'_n)).$$

Wegen $d_X(x_n, y'_n) \leq d_X(x'_n, x'_n) + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y'_n)$
 $d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x'_n) + d_X(x'_n, y'_n) + d_X(y'_n, y_n)$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x'_n, y'_n) \Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}', \bar{y}')$$

und wir können wohldefinieren: $\hat{d}([x], [y]) := d(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \hat{d}$ ist Metrik auf \hat{X} .

- (2) Konstruktion einer dichten Einbettung $f: X \rightarrow \hat{X}$

Für $x \in X$ sei $f(x) := [(x, x, x, \dots)]$.

Es gilt für $x, y \in X$: $\hat{d}(f(x), f(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x, y) = d_X(x, y)$.

Wir zeigen nun, dass $f(X)$ dicht in \hat{X} liegt. Sei $[x] \in \hat{X}$, $\bar{x} = (x_n)$, da nun (x_n) eine Cauchyfolge in X ist, ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Wir betrachten nun $\bar{x}_N := (x_N, x_N, x_N, \dots)$

$$\Rightarrow \hat{d}(f(x_N), [x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_N, x_n) \leq \varepsilon$$

Damit ist $f(x_N) \rightarrow [x]$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ (oder $N \rightarrow \infty$?).

- (3) Vollständigkeit von \hat{X}

Sei $([x]_j)$ eine Cauchyfolge in \hat{X} . Zu jedem $[x]_j \in \hat{X} \exists y_j \in X$ so dass $\hat{d}([x]_j, f(y_j)) < \frac{1}{j}$, da $f(X)$ dicht in \hat{X} ist.

$$\Rightarrow d_X(y_j, y_k) = \hat{d}(f(y_j), f(y_k)) \leq \hat{d}(f(y_j), [x]_j) + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \hat{d}([x]_k, f(y_k)) < \frac{1}{j} + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow (y_j)$ ist eine Cauchyfolge in X , $y := (y_j) \in CF(X) \Rightarrow [y] \in \hat{X}$ ist der Kandidat für den Grenzwert der Cauchyfolge:

$$\hat{d}([x]_j, [y]) \leq \hat{d}([x]_j, f(y_j)) + \hat{d}(f(y_j), [y]) < \frac{1}{j} + \lim_{k \rightarrow \infty} d_X(y_j, y_k) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{d}([x]_j, [y]) = 0$$

das heißt $[x]_j \rightarrow [y]$ für $j \rightarrow \infty$

- (4) Eindeutigkeit von \hat{X} im folgenden Sinne: ist \tilde{X} eine weitere Vervollständigung von X , so sind \hat{X}, \tilde{X} isometrisch zueinander.

Sei also (H, d_H) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \subseteq H$, $d_H(x, y) = d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$ und $\bar{X} = H$.

Unser Ziel ist es, eine Isometrie $g: \hat{X} \rightarrow H$ zu bauen.

Sei $[x] \in \hat{X}$, $\bar{x} = (x_n) \in [x] \in \hat{X}$, da H vollständig ist $\exists h \in H$ so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, h) = 0$

Wir betrachten $g: \hat{X} \rightarrow H$, $[x] \mapsto h$ wie oben.

g ist surjektiv, da für $h \in H \Rightarrow \exists \bar{x} = (x_n) \in CF(X)$ so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, h) = 0$, also $g([x]) = h$

g ist abstandserhaltend, da für $[x], [y] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([x], [y]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, y_n) = d_H(g([x]), g([y])).$$

Definition 1.33. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$. Wir definieren den Durchmesser von M durch

$$\delta(M) := \sup \{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips aus \mathbb{R} .

Satz 1.34 (Cantorscher Durchschnittssatz). Sei (X, d) ein metrischer Raum, der vollständig ist. (F_n) eine Folge von abgeschlossen Teilmengen mit $F_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in X : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in F_n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0 \exists N \in \mathbb{N} : \delta(F_n) < \varepsilon \forall n \geq N$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ da } x_n, x_m \in F_N \text{ und } \delta(F_N) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ ist eine Cauchyfolge} \stackrel{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Weil $x_k \in F_n \forall k \geq n$ und F_n abgeschlossen ist, ist

$$x_0 \in F_n \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Angenommen $\exists y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, mit $x_0 \neq y$

$$\Rightarrow 0 < d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \leq 2\delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ Widerspruch!}$$

■

Eigene Bemerkung. Der Heuser beschreibt den folgenden Satz folgendermaßen:

Es gibt wohl keinen Satz in der Funktionalanalysis, der glanzloser und gleichzeitig kraftvoller wäre als der Bairesche Kategoriensatz. Von seiner Glanzlosigkeit wird sich der Leser *sofort* überzeugen können; für seine Kraft müssen wir ihn auf die folgenden Nummern vertrösten.

Satz 1.35 (Bairescher Kategoriensatz). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, wobei $F_n \subseteq X$ abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset.$$

Es gibt also ein F_{n_0} dessen Inneres nichtleer ist.

Beweis: Wir bemerken zuerst: $x \in \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq M$.

Angenommen es gelte für alle $n \in \mathbb{N} \overset{\circ}{F}_n = \emptyset$, also kein F_n enthalte eine abgeschlossene Kugel.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $r > 0$ und $x_0 \in X \Rightarrow \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$

Seien nun $x_n \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$. Da F_n kein Inneres hat (offiziell: abgeschlossen?!), existiert ein $r_n \in (0, \frac{r}{2})$ mit $\overline{U_{r_n}(x_0)} \cap F_n = \emptyset$, und für ein $y \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$ gilt:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_0) \leq r_n + \frac{r}{2} \leq r$$

So erhalten wir $\overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq \overline{U_r(x_0)}$. Wir betrachten nun $\overline{U_1(x_0)}$ und nach obiger Überlegung

$$\exists r_1 > 0, x_1 \in X : \overline{U_{r_1}(x_1)} \subseteq \overline{U_1(x_0)} \text{ mit } r_1 \leq \frac{1}{2} \text{ und } \overline{U_{r_1}(x_1)} \cap F_1 = \emptyset$$

Ebenso

$$\exists r_2 > 0, x_2 \in X : \overline{U_{r_2}(x_2)} \subseteq \overline{U_{r_1}(x_1)} \text{ mit } r_2 \leq \frac{1}{4} \text{ und } \overline{U_{r_2}(x_2)} \cap F_2 = \emptyset$$

Sukzessive erhalten wir so eine Folge $\left(\overline{U_{r_n}(x_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\overline{U_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{U_{r_n}(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) $r_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (3) $\overline{U_{r_n}(x_n)} \cap F_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wegen (1) und

$$0 \leq \delta\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right) = 2r_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sind wir in der Situation des Cantorschen Durchschnittsatzes und es gibt ein eindeutiges $\hat{x} \in X$ mit $\hat{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_{r_n}(x_n)}$. Dann ist wegen (3) $\hat{x} \notin F_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \hat{x} \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ Widerspruch! ■

Korollar. *Hier kommt ziemlich fancy Zeug, von wegen der Polynomraum kann nicht vollständig sein, rein. TODO Behauptung und Beweis erstellen.*

Beweis: klar! (Ja, selbst ohne eine Behauptung) ■

Definition 1.36. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M \subseteq X$ heißt...

- (a) *nirgends dicht*, wenn $\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$.
- (b) *mager* oder *von 1.Kategorie*, wenn M eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, also $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, A_n nirgends dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt.
- (c) *von 2.Kategorie* oder *fett*, wenn M nicht von 1.Kategorie ist.

Eigene Bemerkung (Trivia am Rande). Direkt aus der Definition folgt, dass jede nirgends dichte Menge insbesondere von 1.Kategorie ist. Andersrum gilt dies nicht, was das Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ zeigt. Ein Beispiel für eine nirgends dichte Menge ist die Cantor-Menge. "Anschaulich" bedeutet *nirgends dicht*, wenn sie in keiner Teilmenge (mit nichtleeren Innerem) dicht liegt.

Mithilfe dieser Definition können wir den Baireschen Kategoriensatz umformulieren zu

$$(X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum} \Rightarrow X \text{ ist von 2.Kategorie}$$

Korollar 1.37. (X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen und nichtleer. Dann ist U von 2.Kategorie.

Beweis (Eigener Beweis): Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in U$, $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq U$ ist. Nun können wir den Baireschen Kategoriensatz auf $\overline{U_\varepsilon(x)}$ anwenden. ■

Korollar 1.38. (X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$M \subseteq X \text{ mager} \Rightarrow X \setminus M \text{ ist dicht in } X.$$

Beweis: Sei $M \subseteq X$ mager, angenommen $X \setminus M$ sei nicht dicht, also $X \setminus \overline{(X \setminus M)} \neq \emptyset$
 $\Rightarrow O := X \setminus \overline{(X \setminus M)}$ ist (als Komplement einer abgeschlossenen Menge) offen und nichtleer.
 $\Rightarrow O \subseteq M$ ist von 1. Kategorie, Widerspruch zu Korollar 1.37! ■

Korollar 1.39. (X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n \subseteq X$ so dass $X \setminus B_n$ mager. $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$
 $\Rightarrow \overline{B} = X$

Beweis: $X \setminus \overline{B} = X \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n)^c = X \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c)$ ist wegen Korollar 1.38 dicht in X . ■

Definition 1.40. Der metrische Raum (X, d) heißt...

- (a) *kompakt*, wenn für alle offenen Überdeckungen $(U_i)_{i \in I}$ von X ein endliches $I' \subseteq I$ existiert, so dass $X = \bigcup_{i \in I'} U_i$
- (b) *präkompakt*, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ existiert, so dass $X = \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$. M heißt auch ε -Netz von X .

Satz 1.41. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist äquivalent:

- (1) X kompakt.
- (2) Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.

(3) Ist (A_n) eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $A_n \supseteq A_{n+1} \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(4) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

(5) X ist vollständig und präkompakt.

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Man nimmt nur weniger mögliche Vereinigungen.

(2) \Rightarrow (3): Angenommen $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, $A_n = \overline{A_n}$, $\emptyset \neq A_{n+1} \subseteq A_n \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow U_n := X \setminus A_n \text{ offen und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} : X &= \bigcup_{i=1}^m U_{n_i} = \bigcup_{i=1}^m (X \setminus A_{n_i}) \\ &= X \setminus (\bigcap_{i=1}^m A_{n_i}) \\ &= X \setminus A_k \quad \text{für } k := \max\{n_1, \dots, n_m\} \\ &\Rightarrow A_k = \emptyset \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (4): Sei (x_n) eine Folge in X . Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Es ist $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Deshalb ist

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : U_\varepsilon(x_0) \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x_0$ ist Häufungspunkt der Folge (x_n) und damit Grenzwert einer Teilfolge von (x_n) .

(4) \Rightarrow (5): Sei (x_n) eine Cauchyfolge. Wegen (4) hat (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow X$ vollständig.

Angenommen X sei nicht präkompakt

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X \exists x_{n+1} \in X \text{ mit } x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Konstruiere so eine Folge (x_n) in X . Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon_0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Rightarrow (x_n)$ hat keine Cauchy-Teilfolge $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.

(5) \Rightarrow (1): Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Angenommen \nexists endliche Teilüberdeckung. Definiere induktiv Kugeln K_n , $n \in \mathbb{N}$, wie folgt:

Da X präkompakt, gibt es zu $\varepsilon = 1$ endliche viele Kugeln $U_1(x_0, j)$ mit $X \subseteq \bigcap_{j=0}^{m_1} U_1(x_0, j)$. Dann gilt: Mindestens eine dieser Kugeln ist nicht durch endliche viele Mengen aus $(U_i)_{i \in I}$ überdeckbar.

OBdA $U_1(x_0, 0)$, setze $x_0 := x_{0,0}$.

Konstruiere so eine Folge (x_n) , so dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_1)$ nicht durch endlich viele Mengen aus $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt werden kann.

Sei $y \in U_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1}) \cap U_{\frac{1}{2^n}}(x_1) \neq \emptyset$

Dann gilt $d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, y) + d(y, x_1) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

Für $n \leq p \leq q$ gilt dann $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow (x_n)$

ist eine Cauchyfolge in $X \stackrel{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists \hat{x} \in X$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \hat{x}) = 0$

Wegen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt $\exists i_0 \in I : \hat{x} \in U_{i_0}$

Weil U_{i_0} offen: $\exists r > 0$, so dass $U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$

Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ und $d(\hat{x}, x_n) < \frac{r}{2}$

$\Rightarrow U_{\frac{1}{2}}(x_n) \subseteq U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann. ■

Korollar 1.42. (X, d) metrischer Raum

- a) (X, d) kompakt $\Rightarrow X$ vollständig
- b) $M \subset X$, so dass jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge hat ("M folgenkompakt") $\Leftrightarrow M \subset X$ kompakt ("M Überdeckungskompakt")
- c) $M \subset X$ kompakt $\Rightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen.
- d) X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt.

Definition 1.43. (X, d) metrischer Raum. $M \subset X$ heißt "relativ kompakt", wenn \overline{M} kompakt ist.

Definition 1.44. (X, d) vollständiger metrischer Raum, $M \subset X$ relativ kompakt.
 \Leftrightarrow jede Folge in M besitzt eine in X konvergente Teilfolge.

Satz 1.45. (X, d) metrischer Raum. $M, N \subset X$ seien relativ kompakt (bzw. präkompakt). Dann gilt

1. $S \subset M \Rightarrow S$ relativ kompakt (bzw. präkompakt)
2. $M \cup N$ relativ kompakt (bzw. präkomp.)
3. M, N präkompakt
4. Ist (X, d) vollständig, so gilt M relativ kompakt $\Leftrightarrow M$ präkompakt

Beweis: • "a) - c)": mündlicher Beweis. TODO. folgt aus Definition.

- d) \Rightarrow folgt aus c)
 \Leftrightarrow Sei M präkompakt $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N}, \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^p \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)}$. Wegen $\overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset U_{\varepsilon}(x_j)$ gilt $\overline{M} \subset \bigcup_{j=1}^p \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset \bigcup_{j=1}^p U_{\varepsilon}(x_j) \Rightarrow \overline{M}$ präkompakt. Da (\overline{M}, d) vollständig ist \overline{M} kompakt. (Satz 1.41) $\Rightarrow M$ relativ kompakt. ■

Bemerkung 1.46 (Fakten). $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

- a) Aussagen über metrischer Räume übertragen sich
- b) Die Vervollständigung von X ist ein Banachraum.
- c) Wenn $\dim X < \infty$, dann
 - i) X Banachraum
 - ii) $M \subset X$ kompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen (Heine Borel)
 - iii) $M \subset X$ relativ kompakt $\Leftrightarrow M$ präkompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt

Lemma 1.47 (Lemma von Riesz). TODO: θ mit ε ersetzen, Beweis vervollständigen. $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $E \subset X$ abgeschlossener Unterraum mit $E \neq X$, $\theta \in (0, 1)$.
 Dann existiert ein $x_{\theta} \in X$ mit $\|x_{\theta}\| = 1$ und $\|x_{\theta} - y\| \geq \theta \forall y \in E$.

Beweis: Sei $x_0 \in X \setminus E$. $\delta = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|$

E abgeschlossen $\Rightarrow \delta > 0$. Sei (y_n) Folge in E mit $\|x_0 - y_n\| \rightarrow \delta$. Sei $\eta \in (0, 1) \Rightarrow \frac{\delta}{\eta} > \delta$
 $\Rightarrow \exists z \in E$ mit $\|x_0 - z\| \leq \frac{\delta}{\eta}$. Definiere $x_{\theta} := \frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} \Rightarrow \|x_{\theta}\| = 1$ ■

Korollar 1.48. $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

1. $\overline{U_1(0)} \Leftrightarrow \dim X < \infty$
2. Jede beschränkt Folge besitzt konvergente Teilfolge $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

Beweis: a) " \Leftarrow " Folgt aus Heine-Borel

\Rightarrow Angenommen, $\dim X = \infty$ (Nicht endlichdimensional). Wähle $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$. Nach Lemma von Riesz, wähle $x_1 \in X$, so dass $\|x_1 - y\| \geq \frac{1}{2} \forall y \in \text{span}\{x_0\}$.

Konstruiere so Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2} \forall y \in \text{span}\{x_0, \dots, x_{n-1}\} \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.

b) genauso. ■

1.3.1 Skalarprodukträume

Wiederholung: X \mathbb{K} -VR. Ein "Skalarprodukt" ist eine Abb $(\cdot, \cdot) \rightarrow \mathbb{K}$ mit (S1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (S2) $(x, y) = (y, x)$ (S3) $(x, x) > 0 \forall x \in X \setminus \{0\}$.

Bemerkung 1.49. 1. $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ist Norm.

2. vollständig Skalarproduktraum heißt "Hilbertraum".

3. $\|x\| \cdot \|y\| \geq |(x, y)| \forall x, y \in X$ (Cauchy-Schwartz-Ungleichung)

4. Für $x, y \in X$ mit $(x, y) = 0$ (x und y orthogonal, *orthogonal*) gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Satz des Pythagoras)

5. Für $x, y \in X$ gilt die Parallelogrammgleichung: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

6. Für $(x_n), (y_n)$ mit $(x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y$ gilt $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, da $|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|$ (Stetigkeit des Skalarprodukts)

Satz 1.50. Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum mit $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \forall x, y \in X$. Dann existiert Skalarprodukt auf X , welches $\|\cdot\|$ induziert.

Beweis: Skizze! a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ■

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffseigenschaft** - Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand > 0 haben. Für ein Gegenbeispiel \nearrow topologischer Raum

2. **essentiell beschränkt** - $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *essentiell beschränkt*, falls

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \in \mathfrak{A} \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty$$

oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da f nur auf \mathbb{Q} nicht null ist, und \mathbb{Q} ist Lebesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** (X, \mathcal{T}) - Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq P(X)$. Die Elemente von \mathcal{T} sind die *offenen Mengen*. \mathcal{T} definiert eine *Topologie*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) $A_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I, \mathbb{N} \supset I$ endlich $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

(iii) $A_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I, I$ bel. Indexmenge $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

(X, \mathcal{T}) ist der *topologische Raum*.

Ein Beispiel, für einen topologischen Raum sind die metrischen Räume (X, d) : d induziert dann eine Topologie auf X , die offenen Mengen sind nämlich durch d bestimmt.

Sei $M := \{1, 2, \dots\}$.

$\mathcal{T} := \{\emptyset, M\}$. Die triviale Topologie, nur \emptyset und M sind offen.

$\mathcal{T} := P(M)$. Die diskrete Topologie, alle Mengen sind offen. Die diskrete Metrik induziert genau diese Topologie.

$\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. M ist hier nicht hausdorffsch, denn egal welche Umgebung man um 2 betrachtet, man kann nicht erreichen, dass 1 nicht in der gleichen ist.