Kapitel 1

Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, ||\cdot||_X)$
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $||\cdot|| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$
- Cauchy-Folge: (x_n), $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : ||x_m - x_n|| < \epsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm)**.** *Sei X ein $\mathbb{K} - Vektorraum$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. *(a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0$ bildet einen Unterraum von X.*

(b) X/N ist normierter Raum über $||x + N|| := |||x|||$

(c) X ist vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow$ X/N ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum*

(a) $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorfsch, Hausdorffeigenschaft -** Joa... Kugeln und so.