Kapitel 1

Grundlagen

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$
- Cauchy-Folge: (x_n), $\forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \epsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm)**.** Sei X ein $\mathbb{K} - Vektorraum$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0$ bildet einen Unterraum von X.

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow$ X/N ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
$\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum ($\nearrow$ Ana III).

(b) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und essentiell beschränkt$\}$ ist ebenfalls seminormiert mit $|||f|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$.
$\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.
$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. $\mathrm{L}^p(\Omega) := \mathrm{L}^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ stetig und beschränkt$\}$ versehen mit der Suprenumsnorm ist ein Banachraum.

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorfsch, Hausdorffeigenschaft** - Joa... Kugeln und so.

2. **essentiell beschränkt** - Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N\in\mathfrak{A}\\ \mu(N)=0}} \sup_{x\in\Omega\setminus N} < \infty$$

   oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da f nur auf $\mathbb{Q}$ nicht null ist, und $\mathbb{Q}$ ist Lesbesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ - Ein Raum, dessen offene Mengen durch $\mathcal{T}$ gegeben sind, wobei die offenen Mengen die bekannten Eigenschaften behalten sollen.