0.0.1 Aufgabe 1

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Behauptung. Es ist äquivalent:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty \Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergiert in X.

(b) X ist ein Banachraum.

Beweis : a⇒b: Da X bereits ein normierter Raum ist, ist nur noch zu zeigen, dass X vollständig ist. Sei (u_n) eine Cauchyfolge in X, wobei o.B.d.A $u_0 = 0$, sonst betrachten wir (z_n) mit $z_{n+1} := u_n$, $z_0 := 0$ statt (u_n). Wir definieren: $s_k := \sum_{n=0}^{k} u_n - u_{n-1} = u_k$ (Teleskopsumme).
Unser Ziel ist es, die Reihe s_k „geschickt" mit $x_n := \frac{1}{n^2}$ zu majorisieren.
Da u_n eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes x_n ein (kleinstes) $N_n := N(x_n) \in \mathbb{N}$, so dass $\|u_{N(x_n)} - u_m\| \leq x_n \; \forall m \geq N_n$. Das Bemerkenswerte an (N_n) ist, dass diese Folge monoton steigt. Es ist nun für hinreichend großes k und geeignetes $n' \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung und der Eigenschaft der Teleskopsumme:

$$\|s_k\| = \|\sum_{n=0}^{k} u_n - u_{n-1}\| \leq \underbrace{\|u_1 - u_0\| + \|u_2 - u_1\| + \ldots}_{=:x_0} + \underbrace{\|u_{N_2} - u_{N_1}\|}_{\leq x_1} + \underbrace{\|u_{N_3} - u_{N_2}\|}_{\leq x_2} + \cdots + \underbrace{\|u_k - u_{N(n')}\|}_{\leq x_{n'}}$$

Bzw.:

$$\|s_k\| = \|\sum_{n=1}^{k} u_{N_n} - u_{N_{n-1}}\| \leq \sum_{n=0}^{n'} x_n \text{ mit } u_{N_0} := u_0$$

Es ergibt sich also:

$$\|s_k\| \leq \sum_{n=0}^{n'} x_n \leq \sum_{n=0}^{k} x_n \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|s_k\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$$

Und mit der Eigenschaft a) ist nun: $u_k = s_k \longrightarrow \alpha \in X$. Also konvergiert u_k in X, damit ist X ein Banachraum.
b⇒a: Sei X ein Banachraum und (u_n) eine Folge in X, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$, dann ist dank der Dreiecksungleichung: $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$.
Dank der Vollständigkeit von X können wir das Majorantenkriterium (der Beweis zu der Gültigkeit dieses Kriteriums, ist analog zum reellen Fall) anwenden, und somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
Nachtrag:
Wesentlich eleganter geht dieser Beweis mithilfe des Cauchykriteriums für Reihen. Die Idee ist aber im Grunde die gleiche. ■

0.0.2 Aufgabe 2

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Behauptung. Es gilt:

$$\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_y}{\|x\|_X}.$$

Beweis : Aus Satz 1.7 folgt, dass T stetig ist.
Dank der Definition von sup und der Stetigkeit von $T, \|\cdot\|_Y$ folgt: $\|T\| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\overline{U_1(0)}}\|Tx\|_Y &= \sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|\|x\|_X T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|x\|_X\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \underbrace{\sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|x\|_X}_{=1} \cdot \sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \sup_{x\in\partial U_1(0)}\|Tx\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}}\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}
\end{aligned}$$

Wobei wir genuzt haben, dass $T0 = 0$ (für das erste Gleichheitszeichen) und $\|x\|_X, \|Tx\|_Y \geq 0\ \forall x \in X$ (für das dritte Gleichheitszeichen). ■

0.0.3 Aufgabe 3

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

(a)

Behauptung.

$$dim(X) < \infty \text{ und } T : X \to Y \text{ linear} \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X, Y)$$

Beweis: Da $dim(X) < \infty$ und T linear ist, lässt sich T eindeutig als Matrix darstellen. Dann sind aber die Bedingungen aus Bsp. 1.6 a) erfüllt. Damit ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.
Nachtrag:
Der Beweis ist noch nicht ganz vollständig. Es ist noch zu zeigen, dass die Koordinatenfunktion in beide Richtungen (also $\phi : X \to Y$ und $\phi^{-1} : Y \to X$, für die Koordinatenfunktion ϕ zu einer Basis) stetig ist. Dann kann man aber wirklich die Zeilensummennorm betrachten:

$$\forall x \in U_1(0) \text{ gilt } \|Tx\| \leq a\|Tx\|_\infty \leq a\|T\|_\infty\|x\| \leq a\|T\|_\infty < a\infty.$$

Wobei $a \in \mathbb{R}^+$ die geeignet gewählte nur von der Norm abhängige Konstante ist, die von der Äquivalenz zu jeder anderen Norm entsteht. ■

(b)

Behauptung.

$$dim(X) < \infty \text{ und } T \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow \|T\| = \max_{x\in\overline{U_1(0)}}\|Tx\|_Y$$

Beweis: Aus Aufgabe 2 ist bekannt, dass $\sup_{x\in U_1(0)}\|Tx\|_Y = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}}\|Tx\|_Y$. Da $\overline{U_1(0)}$ kompakt *(ist es kompakt? Es könnte ja sein, dass X nicht vollständig ist. Müsste aber, denn wir haben ja immernoch den Abschluss... oder?)* ist, und T, $\|\cdot\|_Y$ stetig dank Satz 1.7 und Komposition von stetigen Funktionen und da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, ist die Behauptung bewiesen.
Nachtrag:
Tatsächlich ist $\overline{U_1(0)}$ in einem endlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ stets kompakt. Angeblich gilt sogar *(habe ich das richtig mitbekommen??)*:

$$\overline{U_1(0)} \subset X \text{ kompakt } \Leftrightarrow dim(X) < \infty$$

■

(c)

Behauptung. Im allgemeinen ist die Aussagen von b) falsch.

Beweis: Wir geben ein Beispiel für $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ derart an, dass

$$\|T\| \notin \left\{ \|Tx\|_Y \,|\, x \in \overline{U_1(0)} \right\}.$$

Sei

$$X = Y = \ell^p(\mathbb{K}) =: \ell^p \text{ (beschr. Folgenraum) und } T : \ell^p \to \ell^p,\ (x_n) \mapsto \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \right)$$

Mit der Norm $\|(x_n)\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Dann ist $\overline{U_1(0)} = \left\{ (x_n) \in \ell^p | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq 1 \right\}$

T ist ein beschränkter linearer Operator, denn:

(i) Seien $(x_n), (y_n) \in \ell^p$, $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow T(\alpha x_n + y_n) = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) (\alpha x_n + y_n) \right) = \alpha T x_n + T y_n$

(ii) Sei $x_n \in \overline{U_1(0)}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|T(x_n)\|^p = \| \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \right) \|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \right)^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - \frac{x_n}{n}|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + |\frac{x_n}{n}|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|^p < \infty
\end{aligned}$$

Mit der Folge (von Folgen) i_n, die an der n. Stelle eine 1 hat, und sonst nur Nullen, ist dann: $T(i_n) \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$. Dies ist mit Elementen aus $\overline{U_1(0)}$ nicht möglich (Warum?).

Nachtrag:

Geschickter ist es den Folgenraum $M \subset \ell^p$ einzuschränken, so dass für jedes Element aus M gilt, dass nur endlich viele Folgenglieder ungleich null sind. Der Rest folgt flott. ∎