

# Kapitel 1

## Funktionalanalysis

### 1.1 Grundlagen

#### Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben  $(X, \|\cdot\|_X)$ )
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit  $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)_X}$ . Wobei  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge:  $(x_n), \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

**Definition 1.1** (Halbnorm, Seminorm). Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, wobei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Für  $x, y \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung  $||| \cdot ||| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $|||x||| \geq 0$
- (ii)  $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$
- (iii)  $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm erfüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

*Bemerkung 1.2.* (a)  $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$  bildet einen Unterraum von  $X$ .

(b)  $X/N$  ist ein normierter Raum über(?)  $\|x + N\| := |||x|||$

(c)  $X$  ist ein vollständiger seminormierter Raum  $\Rightarrow X/N$  ist ein Banachraum

**Beispiel 1.3** (wichtige Vektorräume). Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum

(a)  $p \in [1, \infty)$   $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar, } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$  ist ein seminormierter Raum mit

$$|||f|||_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega, \mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum ( $\nearrow$  Ana III).

(b)  $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$  ist ebenfalls seminormiert mit

$$|||f|||_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

$L^{\infty}(\Omega, \mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum.

(c)  $p \in [1, \infty]$ ,  $|\cdot|$  sei das Zählmaß auf  $\mathbb{N}$  und der Maßraum sei gegeben durch  $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$ .

$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$  heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

- (d)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  messbar,  $\lambda^n$  Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .  $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$  heißt Lebesgue-Raum.
- (e) Sei  $(\Omega, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.  $BC(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$  versehen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

*Bemerkung 1.4 (diverse Fakten).* Seien  $p, q, r \in [1, \infty)$

- (a)  $L^p(\Omega, \mu)$  ist ein Banachraum,  $L^2(\Omega, \mu)$  ist ein Hilbertraum mit  $(f, g)_2 := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$
- (b) Falls  $\mu(\Omega) < \infty$ ,  $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (c) Wenn  $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (d)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega, \mu)$  mit  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$  (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für  $p = 1, q = \infty$  wobei hier  $\frac{1}{\infty} := 0$ .
- (e) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.  $C_0^k := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$  ist dicht in  $L^p(\Omega) \forall p \in [1, \infty)$ . Dies gilt nicht für  $p = \infty$ , da  $f = \text{const}$  oder  $f = \text{sign}$  sich nicht durch Funktionen aus  $C_0^k$  approximieren lassen.
- (f)  $BC(\Omega)$  ist abgeschlossen in  $L^\infty(\Omega)$ , aber nicht in  $L^p(\Omega)$  für  $p < \infty$ , dennoch ist  $BC(\Omega)$  in beiden Fällen ein Unterraum.

## 1.2 Lineare Operatoren

**Definition 1.5** (linearer Operator). Seien  $X, Y$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

wir schreiben  $Tx$  statt  $T(x)$ .

Wenn  $Y = \mathbb{K}$  dann heißt ein linearer Operator  $T : X \rightarrow \mathbb{K}$  *Funktional*.

Wenn  $X, Y$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator  $T$  *beschränkt*, wenn  $T(U_1(0)) \subseteq Y$  beschränkt ist. ( $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so dass  $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in X$  mit  $\|x\|_X < 1$ )

Aus der Definition erkennt man, dass Bilder beschränkter Mengen  $M$  unter einem beschränkten linearen Operator  $T$  beschränkt sind. Denn  $\exists R > 0 : M \subseteq U_R(0)$ , sodass  $T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$ , und dies ist beschränkt.

**Beispiel 1.6.** a)  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $Y = \mathbb{K}^m$ ,  $\{T : X \rightarrow Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$ .  $T \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist beschränkt. Wir stellen fest:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| < \infty, \quad t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist  $T$  beschränkt.

- b)  $T : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $Tf := \int_{\Omega} f d\mu$ . Es gilt  $|Tf| = |\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \|f\|_1$ . Also  $|Tf| < 1 \forall f \in L^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1 \Rightarrow T$  beschränkt

**Satz 1.7.** Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $T : X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (i)  $T$  beschränkt,
- (ii)  $T$  ist Lipschitz stetig,
- (iii)  $T$  ist gleichmäßig stetig,
- (iv)  $T$  ist stetig,

(v)  $T$  stetig in 0,

(vi)  $\exists x \in X : T$  stetig in  $x$ .

**Beweis:** "(i)  $\Rightarrow$  (ii)" : Sei  $M > 0$ , so dass  $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in U_1(0)$ . Es gilt  $T0 = 0$ . Weiterhin gilt für  $x \in X \setminus \{0\}$ :

$$\|Tx\|_Y = \|2\|x\|_X T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)\| = 2\|x\|_X \underbrace{\left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)\right\|_Y}_{\in U_1(0)} \leq 2M\|x\|_X.$$

Also gilt  $\|Tx\|_Y \leq 2M\|x\|_X \forall x \in \|x\|_X$  und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M\|x_1 - x_2\|_X \forall x_1, x_2 \in X$$

"(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (v)  $\Rightarrow$  (vi)" : Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen <sup>1</sup>.

"(vi)  $\Rightarrow$  (v)" : Sei  $x \in X$ , so dass  $T$  stetig in  $x$  ist. Sei  $(x_n)$  Nullfolge in  $X$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(x + x_n) = Tx \stackrel{\text{stetig in } 0}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0 = T0$$

"(v)  $\Rightarrow$  (i)" : Beweis durch Widerspruch: Angenommen  $T$  ist unbeschränkt  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_1(0)$ , so dass  $\|Tx_n\|_Y \geq n$  ( $\Rightarrow x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , aber  $\|T\frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$  Das hieße aber  $T$  ist unstetig in 0. ■

**Bemerkung 1.8.** a)  $\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ beschränkt}\}$

b)  $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$  beides sind  $\mathbb{K} - VR$ .

c)  $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  topologischer Dualraum von  $X$ .

**Bemerkung 1.9.** c)  $\text{Ker } T, \text{Im } T$  sind UVR.

d) (i) – (vi) äquivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

e) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass  $\text{Im } T$  nicht abgeschlossen  $\nearrow$  Übung

f)  $\text{Ker } T$  abgeschlossen  $\forall T \in \mathcal{B}(X, Y)$ , da  $T$  stetig und  $\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\})$ , wobei  $\{0\}$  abgeschlossen in  $Y$ .

**Satz 1.10** (Operatornormen).  $X, Y$  normierte Räume.  $\mathcal{B}(X, Y)$  normierter Raum mit folgender Norm  $\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y$ .

**Beweis:** (Positivität:)  $\|0\| = 0$ . Sei  $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \forall x \in U_1(0)$ . Sei  $x \in X$  beliebig.  $\Rightarrow Tx = 2\|x\|_X T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$ .

(Homogenität:) Sei  $\lambda \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann  $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$ .

(Dreiecksungleichung:) Seien  $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann  $\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1 x + T_2 x\|_Y) \leq \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y) \leq \sup_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1 x_1\|_Y + \|T_2 x_2\|_Y) \leq \sup_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1 x_1\|_Y + \sup_{x_2 \in U_1(0)} \|T_2 x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$  ■

**Bemerkung 1.11.** Es gilt  $\|T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$  ( $\nearrow$  Übung).

**Satz 1.12.**  $X$  normierter Raum,  $Y$  Banachraum. Dann ist  $\mathcal{B}(X, Y)$  Banachraum.

<sup>1</sup>Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

**Beweis:** Sei  $(T_n)$  CF in  $\mathcal{B}(X, Y)$ , d.h.  $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$ . Also  $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\| \forall x \in X$ . Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von  $Y$ , dass  $(T_n x)$  in  $Y$  für alle  $x \in X$  konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf  $T : X \rightarrow Y$ ,  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a)  $T$  ist ein linearer Operator.

b)  $T$  ist beschränkt.

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$

Zu a):  $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$

zu b): Wegen  $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$  gilt  $\|T_n\|$  ist CF in  $\mathbb{R}$ , also beschränkt:  $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ .

Für  $x \in U_1(0)$  gilt  $\|Tx\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$ . (vgl. Def 1.5, "  $\Leftrightarrow$  ")

zu c): Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $x \in U_1(0)$  gilt somit  $\|(T - T_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \forall n \geq N$

Also ist  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  und aufgrund der Beliebigkeit der CF, folgt die Vollständigkeit. ■

**Korollar 1.13.**  $X$  normierter Raum  $\Rightarrow X'$  Banachraum.

*Bemerkung 1.14.* a)  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X, Z)$  und  $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

b)  $id \in \mathcal{B}(X, X)$ ,  $\|id\| = 1$ .

c) Aus punktweise Konvergenz  $T_n x \rightarrow Tx$  folgt i.A. nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  (d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ ).

## Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft** - Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand  $> 0$  haben.

2. **essentiell beschränkt** -  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  sei ein Maßraum. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt essentiell beschränkt, falls

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \in \mathfrak{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty$$

oder auch:  $f$  ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist  $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$  und  $\mu = \lambda$ , da  $f$  nur auf  $\mathbb{Q}$  nicht null ist, und  $\mathbb{Q}$  ist Lebesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{T})$  - Ein Raum, dessen offene Mengen durch  $\mathcal{T}$  gegeben sind, wobei die offenen Mengen die bekannten Eigenschaften behalten sollen.