МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Семинар 8. Линейная регрессия (продолжение)

Несколько примеров линейной регрессии

Фиттинг поверхности в пространстве

Пример линейной регрессии - полиномиальный фитинг двумерных данных

Задача следующая, имеются данные $\vec{Y}, \vec{X_1}, \vec{X_2}$ - вектор-столбцы наблюдений некоторых параметров

В первом варианте предполагается, что $\vec{Y}$ зависит от $\vec{X_1}$ и $\vec{X_2}$ линейно, то есть каждую координату вектора $\vec{Y}$ можно выразить в виде линейной комбинации соотвествующих координат векторов $\vec{X_1}$ и $\vec{X_2}$:

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{1i} + \beta_3 X_{2i}$ (i - индекс строки)

$$\vec{Y} = [\vec{1}, \vec{X_1}, \vec{X_2}]\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3\end{bmatrix}$$

Во втором варианте предполагается, что зависимость квадратичная:

$$Y_i = w_1 + w_2 X_{1i} + w_3 X_{2i} + w_4 X_{1i}^2 + w_5 X_{2i}^2$$

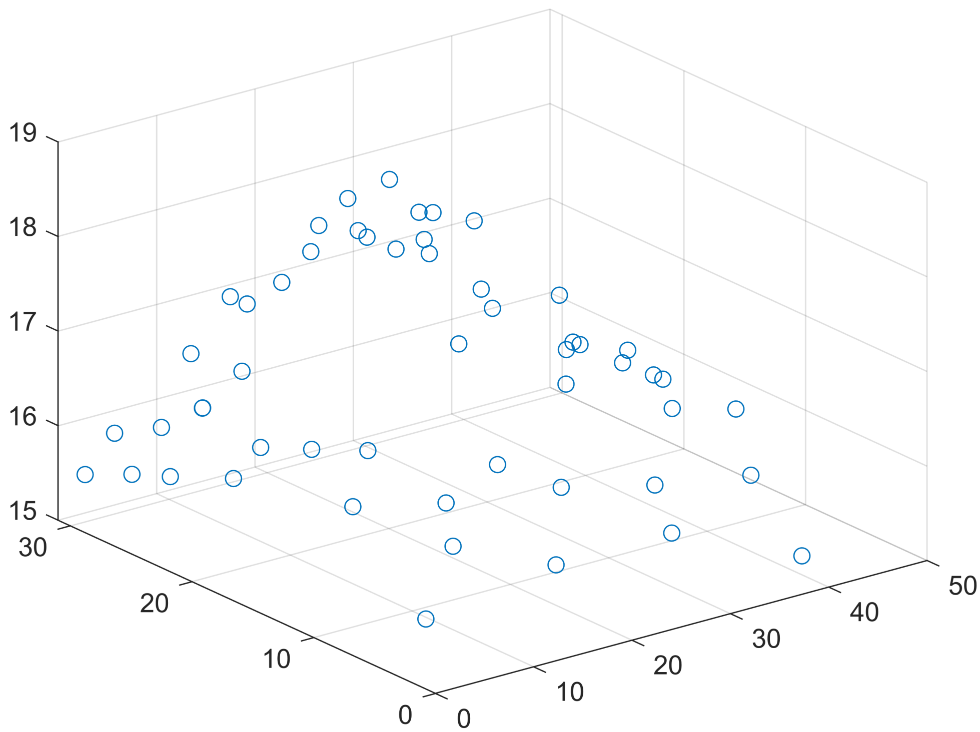
$$\vec{Y} = [\vec{1}, \vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{X_1}^2, \vec{X_2}^2]\begin{bmatrix}w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5\end{bmatrix}$$

Данные взяты из книжки:

```
% данные из "https://raw.githubusercontent.com/probml/probml-data/main/data/
moteData/moteData.mat"
% пример из книжки K.P.Murphy "Probabilistic machine learning. An introduction"
data = load(fullfile(get_folder(),"DataSurfFit.mat"))
```

```
data = struct with fields:
    y: [53×1 double]
    X: [53×2 double]
```

```
Y = data.y;
X1 = data.X(:,1);
X2 = data.X(:,2);
N = numel(X1);
scatter3(X1,X2,Y)
```



Решаем задачу линейно регрессии для двух вариантов зависимости

```
I1 = ones([N 1]);
V1 = [I1,data.X];% матрица полинома первой степени (три колонки)
W1 = lsqminnorm(V1,Y) % аппроксимируем линейной зависимостью
```

```
W1 = 3×1
   16.4141
    0.0137
    0.0037
```

```
norm1 = norm(Y - V1*W1)
```

```
norm1 = 5.8802
```

```
% W1 = V1\Y ;
V2 = [I1,data.X,data.X.^2]; % матрица для полинома второй степени (пять колонок)
W2 = lsqminnorm(V2,Y) % аппроксимируем квадратичной зависимостью
```

```
W2 = 5×1
   14.4583
    0.1972
    0.1736
   -0.0045
   -0.0052
```

```
norm2 = norm(Y - V2*W2)
```

```
norm2 = 3.2956
```

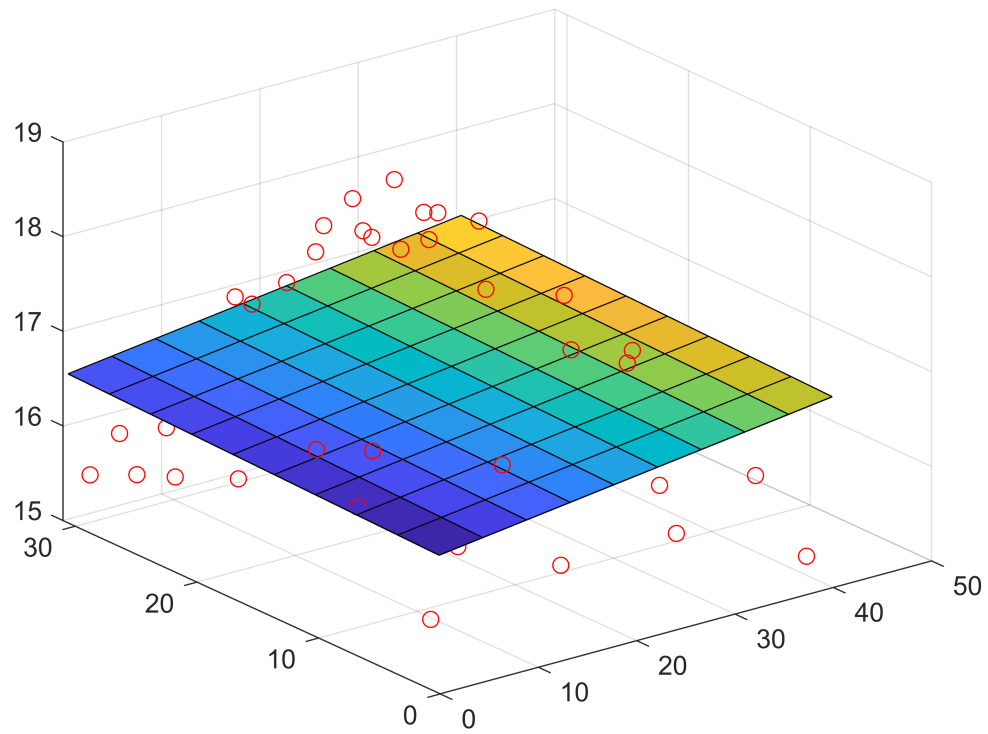
```
% W2 = V2\Y ; % аппроксимируем квадратичной зависимостью
% Функция lsqminnorm решает задачу Ax=b  в смысле наименьших квадратов
% Отличие функции x = lsqminnorm(A,b) от x = A\b в том, что она минимизирует не
% только норму квадратичного отклонения, но и (это актуально если матрица A является
% сингулярной) норму самого вектора
```

```
% теперь построим поверхность по результатам интерполяции
M = 10
```

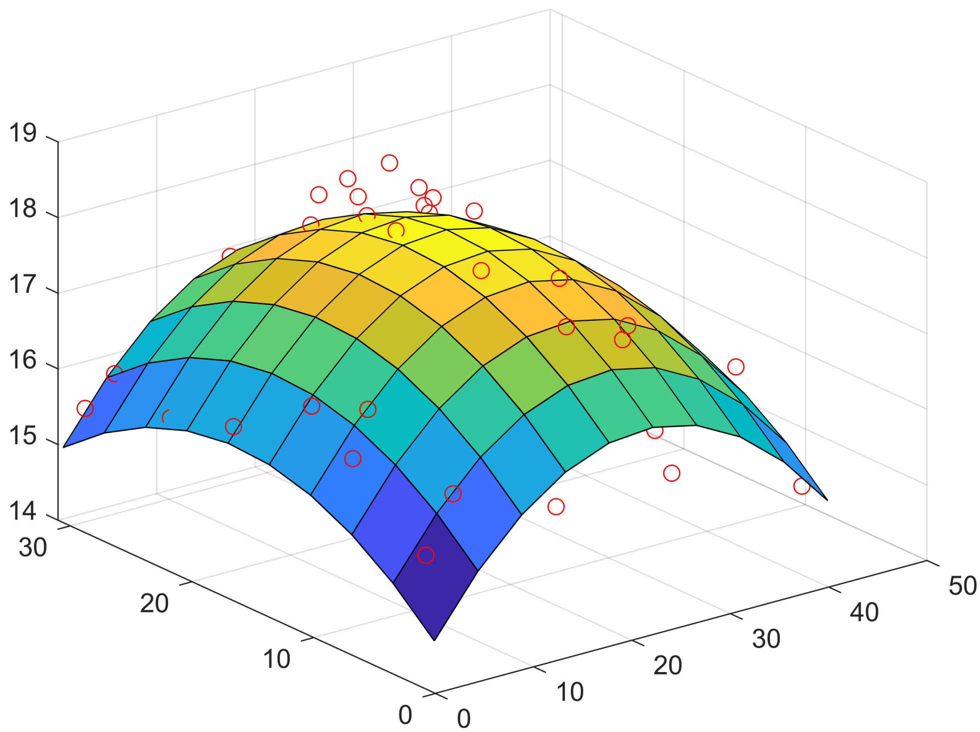
```
M = 10
```

```

xrange = linspace(min(X1), max(X1), M);
yrange = linspace(min(X1), max(X2), M);
% оборачиваем расчет полинома в указатель на функцию (функция будет
% вызываться скалярно в цикле)
z_fun_linear =@(x,y,w) w(1)+ x*w(2) + y*w(3);
z_fun_square = @(x,y,w) z_fun_linear(x,y,w) +w(4)*x^2 + w(5)*y^2;
[Xgrid,Ygrid] = meshgrid(xrange,yrange);
Z1 = zeros(M);
Z2 = zeros(M);
for ii = 1:M
    for jj = 1:M
        x = Xgrid(ii,jj);y = Ygrid(ii,jj);
        Z1(ii,jj) = z_fun_linear(x,y,W1);
        Z2(ii,jj) = z_fun_square(x,y,W2);
    end
end
ax = get_next_ax();
surf(ax,Xgrid,Ygrid,Z1)
hold(ax,"on")
scatter3(ax,X1,X2,Y,"or")
hold(ax,"off")
```




```
ax = get_next_ax();
surf(Xgrid,Ygrid,Z2)
hold(ax,"on")
scatter3(ax,X1,X2,Y,"or")
hold(ax,"off")
```




```
% Двойной вложенный цикл это постыдно, упражнение:
% сгенерить данные для поверхности без использования циклов
```

Пример 2. Линейная регрессия нелинейной задачи.

Иногда нелинейную задачу можно свести к линейной путем некоторого нелинейного пребразования, для примера рассмотрим следующую задачу:

Есть данные $\overrightarrow{y}$ и $\overrightarrow{x}$, предполагается, что $y(x) = \alpha_1 x^{\alpha_2} \exp(-\frac{\alpha_3}{x})$, нужно найти параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Данная задача сводится к задаче линейной регрессии (несмотря на то, что в изначальной постановке параметры входят нелинейно, если прологарифмировать обе части, то:

$$ln(y) = ln(\alpha_1) + \alpha_2 * ln(x) - \alpha_3 \frac{1}{x}$$

Если ввести новые переменные, то получи мзадачу линейной регрессии :

$\overrightarrow{Y} = ln(\overrightarrow{y})$ $\overrightarrow{X_1} = \ln(\overrightarrow{x})$ и $\overrightarrow{X_2} = 1/\overrightarrow{x}$

$\beta_1 = \ln(\alpha_1)$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = -\alpha_3$

$$\vec{Y} = [\vec{1}, \vec{X}_1, \vec{X}_2]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$$

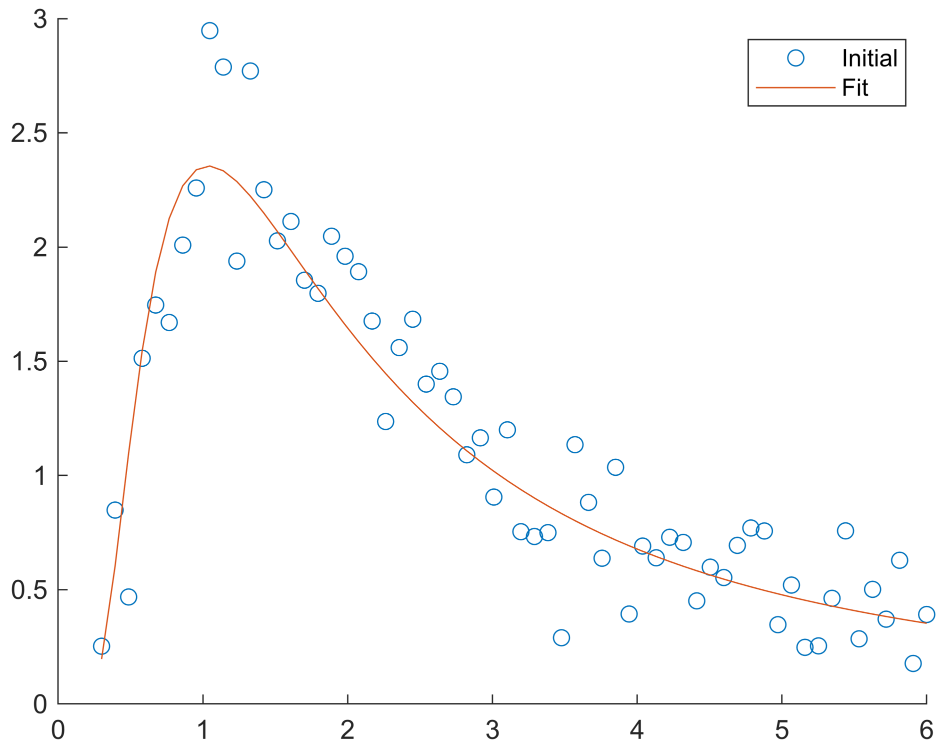
```
clearvars
e = 0.2;
N = 62;
x = linspace(0.3,6,N)';
a = [20 -2 2.2];
y = a(1)*(x.^a(2)).*exp(-a(3)./x) + e*randn(N,1);
X1 = log(x);
X2 = 1./x;
I = ones([N,1]);
X = [I,X1,X2];
Y = log(y);
b = lsqminnorm(X,Y);
a_fitted = [exp(b(1)) b(2) -b(3)]
```

```
a_fitted = 1×3
   19.5557   -2.0433    2.1180
```

```
a_real=a
```

```
a_real = 1×3
   20.0000   -2.0000    2.2000
```

```
ax= get_next_ax();
scatter(ax,x,y);hold(ax,"on")
plot(ax,x,exp(X*b));hold(ax,"off");legend(ax,["Initial" "Fit"])
```



Вопрос что при всех этих нелинейных преобразованиях происходит с ошибкой....

Погрешность линейной регрессии

Введение. Понятия из статистики. Описательная статистика

У нас есть случаная переменная, которая может принимать некоторый (дискретный) набор возможных значений:

$\nu \sim \nu_1 \ldots \nu_N$

Вероятность переменной иметь некоторое определеннoей значение из этого дискретного набора характеризуется набором вероятностей:

$P \sim p_1 \ldots p_N, \ \Sigma_i p_i = 1$

Для некоторой случайной переменной, которая берется из некоторого распределения P, математическое ожидание будет:

$\hat{\nu} = \mathbb{E}[\nu \sim P] = \Sigma_i p_i \nu_i$ - i - индексы возможных исходов! (их всего N штук)

Среднее значение результатов набора из M испытаний:

$\mu_\nu = \frac{\Sigma_{j=1}^{M} \nu_j}{M}$ - применяется для экспериментальной оценки мат. ожидания по M испытаниям

(j - перебирает испытания, испытаний было M штук)

Разброс некоторой переменной характеризуется вариацией:

$\mathbb{V}[\nu] = \mathbb{E}[(\nu - \hat{\nu})^2] = \Sigma_i p_i(\nu_i - \hat{\nu})^2 = \mathbb{E}[(\nu^2] - (\mathbb{E}[\nu])^2,$

Для экспериментальной оценки вариации по выборке из M испытаний:

$S_{\nu\nu} = \frac{\Sigma_{j=1}^{M}(\nu_j - \hat{\nu})^2}{M-1}$

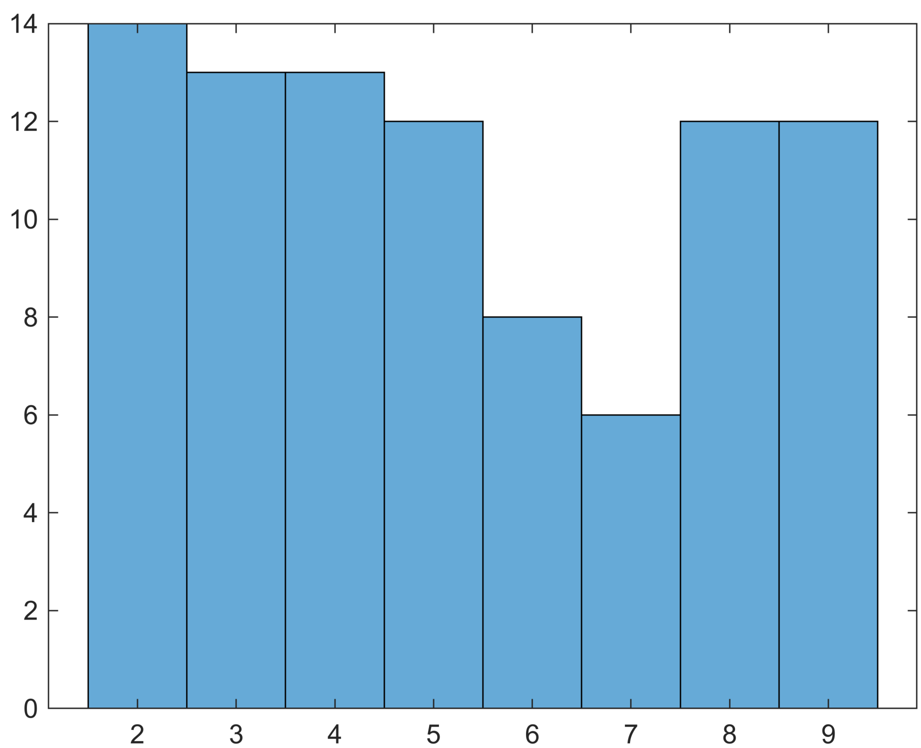
$std(x) = \sqrt{S_{\nu\nu}}$ - стандартное отклонение

Ковариация двух случаных переменных:

$Cov(\nu, \eta) = \mathbb{E}[(\nu - \mathbb{E}[\nu])(\eta - \mathbb{E}[\eta])] = \Sigma_{ij}p_{ij}(\nu_i - n)(\eta_i - m),$

$Cov(\nu, \nu) = \mathbb{V}(\nu),$

```
clearvars
M = 100;% число испытаний
N = 9; % число цифр (число возможных исходов)
possible_values = transpose(1:1:N);% сами цифры все возможные значения
a = randi(N,M,1); % случайно выбирает значения в диапазоне от 1 до N, M раз
histogram(get_next_ax(),a,[1.5;possible_values(2:end) + diff(possible_values)/2])
```




```
tb = table();
tb.Average = mean(a); % считаем среднее значение (оценка математического ожидания)
```

```
p_i = 1/N; % вероятность выбрать конкретную цифру
p = p_i*ones(N,1);% вектор вероятностей для всех цифр
tb.Expectation = p'*possible_values;
tb.STD2 = std(a)^2;
tb.Variation = p'*((possible_values-tb.Expectation).^2);
tb
```

tb = 1×4 table

	Average	Expectation	STD2	Variation
1	4.8300	5	6.8698	6.6667

Коэффициент корреляции двух случайных величин:

$$Cor(\eta,\nu) = \frac{Cov(\eta,\nu)}{\sqrt{\mathbb{V}(\eta)}\sqrt{\mathbb{V}(\nu)}}$$

Если у нас есть вектор-столбец измерений некоторой случайной величины x, то есть, каждая из координат этого вектора - образцы (сэмплы, розыгрыши) случайной величины x, экспериментальной оценкой вариации будет:

$S_{xx} = (\vec{X} - \mu_x \vec{I})^T(\vec{X} - \mu_x \vec{I})/(N-1)$, $\vec{I}$ - вектор состоящий из единиц,

$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)}{N} = \frac{\vec{I}\,\vec{X}^T}{N}$ - экспериментальная оценка математического ожидания.

Ковариации линейно комбинации двух случайных величин:

$$Cov(a\nu + b\eta) = a^2Cov(\nu,\nu) + 2abCov(\nu,\eta) + b^2Cov(\eta,\eta) = a^2\mathbb{V}(\nu) + 2abCov(\nu,\eta) + b^2\mathbb{V}(\eta)$$

Если у нас есть вектор случайных величин (то есть, вектор, координаты которого случайные величины, каждая получена из своего распределения, каждая имеет свое среднее и свою вариацию :

$$\vec{\beta} = [\beta_1, \quad \dots \quad \beta_i, \quad \dots \quad \beta_N]^T$$

Среднее значение этого вектора - тоже вектор, каждая из координат которого - это среднее значение соотвествующей случайной величины:

$$\mathbb{E}[\vec{\beta}] = [\mathbb{E}[\beta_1], \dots, \mathbb{E}[\beta_i], \dots, \mathbb{E}[\beta_N]]$$

То можно ввести матрицу ковариации размером NxN) этого вектора, элемент i-й строки j-го столбца которой:

$$K_{\beta ij} = Cov(\vec{\beta})_{ij} = Cov(\beta_i, \beta_j)$$

На диагонали матрицы ковариации стоят, соответственно вариации.

Таким образом, матрица ковариации вектора случаных величин :

$K_\beta = \mathbb{E}[(\vec{\beta} - \mathbb{E}[\vec{\beta}])(\vec{\beta} - \mathbb{E}[\vec{\beta}])^T]$

```
%вспомним что такое внешнее произведение:
clearvars
a = sym("a",[2,1],"real")
```

a =

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

```
a*a'
```

ans =

$$\begin{pmatrix} {a_1}^2 & a_1\,a_2 \\ a_1\,a_2 & {a_2}^2 \end{pmatrix}$$

Экспериментальная оценка матрицы ковариации:

Если у нас есть матрица измерений размером $N \times M$:

$X = [\vec{X_1}^T, \ldots, \vec{X_i}^T, ..., \vec{X_N}^T]^T$, в которой каждый столбец - это вектор сэмплов N случайных величин

Каждая i - я строка матрицы X- это M сэмплов случайной величины x_i - компоненты случайного вектора $\vec{x}$

Для экспериментальной оценки матрицы ковариации:

$K_X = [X - \vec{\mu}\vec{I_M}^T][X - \vec{\mu}\vec{I_M}^T]^T/M$

$\vec{\mu}$ - вектор-столбец размером Nx1 средних значений каждой из строк

$$\vec{\mu} = \frac{X\vec{I_M}}{M}$$

```
clearvars
M = 3;
N=2;
a = sym("a",[1 M],"real"); % вектор сэмплов случайно величины a
b = sym("b",[1 M],"real");% вектор сэмплов случайной величины b
X = [a;b] % матрица измерений
```

X =

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

```
Im = sym(ones(M,1))
```

```
Im =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
mu = X*Im/M
```

```
mu =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3} \\ \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{3} \end{pmatrix}$$

```
mus = sym("mu",[N 1],"real")
```

```
mus =
```

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

```
Mu = mus*Im'
```

```
Mu =
```

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

```
Kx = (X-Mu)*(X-Mu)'
```

```
Kx =
```

$$\begin{pmatrix} (a_1 - \mu_1)^2 + (a_2 - \mu_1)^2 + (a_3 - \mu_1)^2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & (b_1 - \mu_2)^2 + (b_2 - \mu_2)^2 + (b_3 - \mu_2)^2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = (a_1 - \mu_1)\ (b_1 - \mu_2) + (a_2 - \mu_1)\ (b_2 - \mu_2) + (a_3 - \mu_1)\ (b_3 - \mu_2)$$

```
disp("Вариация случайной переменной x :")
```

```
Вариация случайной переменной x :
```

```
disp(Kx(1,1));
```

$$(a_1 - \mu_1)^2 + (a_2 - \mu_1)^2 + (a_3 - \mu_1)^2$$

```
Kx(1,2)
```

ans = $(a_1 - \mu_1)\ (b_1 - \mu_2) + (a_2 - \mu_1)\ (b_2 - \mu_2) + (a_3 - \mu_1)\ (b_3 - \mu_2)$

```
clearvars
```

```
x1 = randn([1 100]);
x2 = 1*x1 + randn([1 100]);
mu = [mean(x1);mean(x2)];
X = [x1-mu(1);x2-mu(2)];
X*X'/(99)
```

```
ans = 2×2
    0.9409    0.8817
    0.8817    1.8302
```

```
cov(X')
```

```
ans = 2×2
    0.9409    0.8817
    0.8817    1.8302
```

Распределения

Теперь плотность вероятности - не дискретная величина, а непрерывная, которая дается функцией

$p(x; \mu, \sigma, ...)$

$x -$переменная, а то, что стоит после запятой - параметры распределения,

Иногда бывает условное распределение вероятности (сегодня в явном виде не будет), то есть, например, распределение вероятности x, при заданном y (тоже случайном, но фиксированном), записывают:

$p(x|y; \mu, \sigma, ...)$

Кумулятивная вероятность - вероятность случайной переменной иметь значением меньше x

$$P(x|t < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

Понятно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$

Основные элементы описательной статистики:

$\mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ (еще это называют первым моментом)

$$\mathbb{V}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[x])^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (\mathbb{E}[x])^2$$

Значок $x \sim P(x)$ обозначает, что случайная переменная x берется из распределения $P(x)$. То есть это аналог вызова генератора случаных чисел, например, запись *x=rand()* в матлаб эквивалентна $x \sim P(x)$, где $P(x)$ - равномерное распределение от -1 до 1.

Запись:

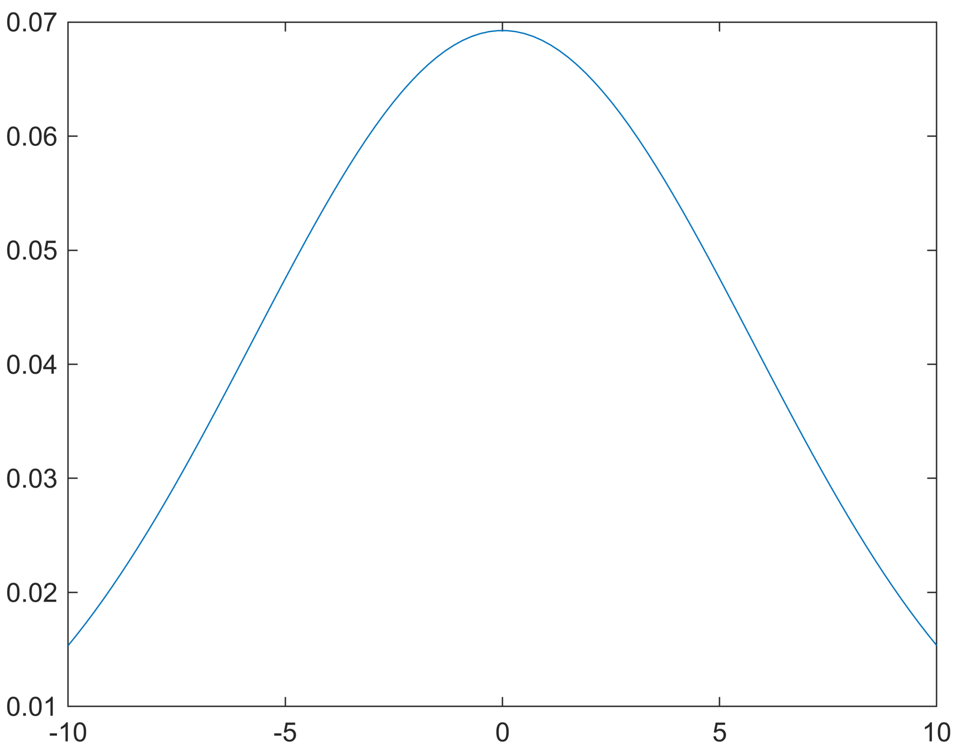
$\zeta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Обозначает что случайная переменная ζ получена из нормального распределения с параметрами μ и σ.

Формула для нормального распределения:

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

```
clearvars
% строим нормальное распределение
mu=0; % первый параметр распределения
sig = 5.76; % второй параметр распределения
x = linspace(-10,10,100)';
distr_fun = norm_distribution_function(mu,sig);
plot(get_next_ax(),x,distr_fun(x))
```



Вероятность того, что переменная имеет значение меньше заданного (кумулятивное распределение вероятности):

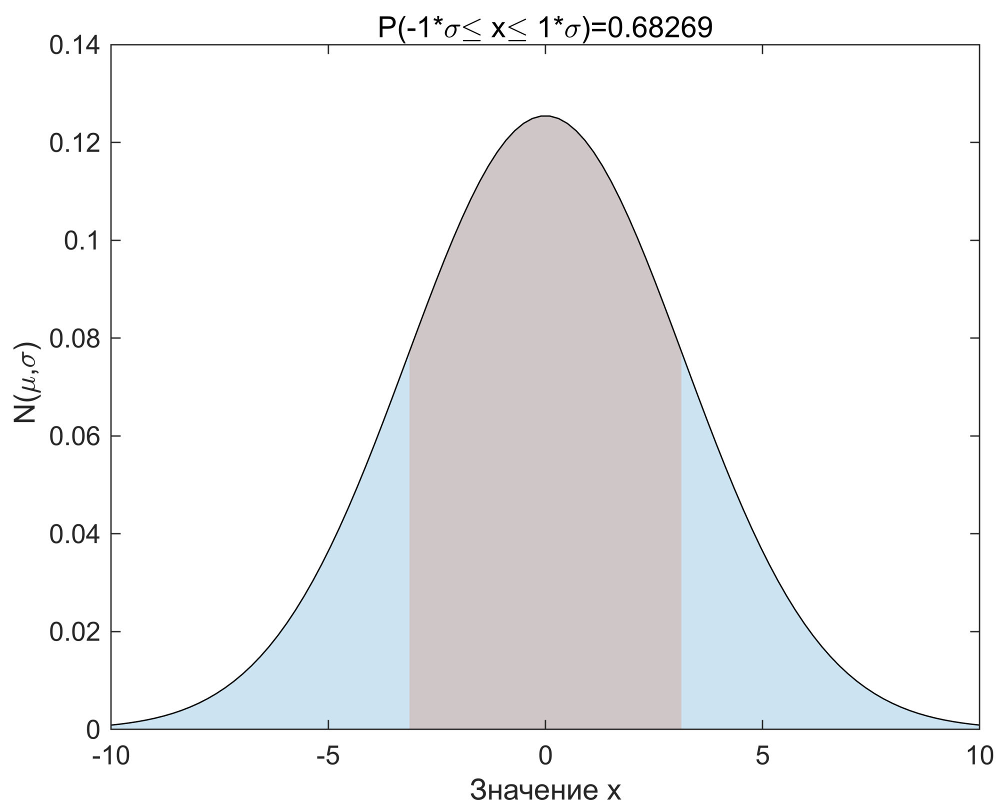
$$P(x|t < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Вероятность того, что случайная переменная распределенная нормально лежит в интервале от x_1 до x_2:

$$P(x \in [x_1, x_2]) = P(x_2) - P(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = [\int_{-\infty}^{x_2} - \int_{-\infty}^{x_1}]\mathcal{N}(x; \mu, \sigma)dx$$

Код ниже рассчитывает вероятность того, что случайная величина x распределенная нормально лежит в интервале $-m\sigma \leq x \leq m\sigma$

```
clearvars
x = linspace(-10,10,100)';
sig = 3.18;
distr_fun = norm_distribution_function(0,sig);
sigma_multiplier=1;
P = integral(distr_fun,-sigma_multiplier*sig,sigma_multiplier*sig);
% integral - функция численного интегрирования
ax = get_next_ax();
area(ax,x,distr_fun(x),"FaceAlpha",0.2)
hold(ax,"on");
sub_x = x((x>=-sigma_multiplier*sig)&(x<=sigma_multiplier*sig));
area(sub_x,distr_fun(sub_x),"FaceAlpha",0.2);
title(ax,"P(-"+string(sigma_multiplier) + "*\sigma"+ "\leq x\leq
"+string(sigma_multiplier) + "*\sigma)="+ string(P))
ylabel(ax," N(\mu,\sigma)")
xlabel(ax,"Значение x")
hold(ax,"off");
```



$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ - интеграл от гауссиана - специальная функция

$P(x|t < x) = \frac{1}{2}[1 - erf(-\frac{x}{\sqrt{2}})]$

```
% это соотвенственнно точное значение
tb = table(P,erf(sigma_multiplier/sqrt(2)));
tb.Properties.VariableNames = ["Численное интегрирование" "Точное значение"];
tb
```

tb = 1×2 table

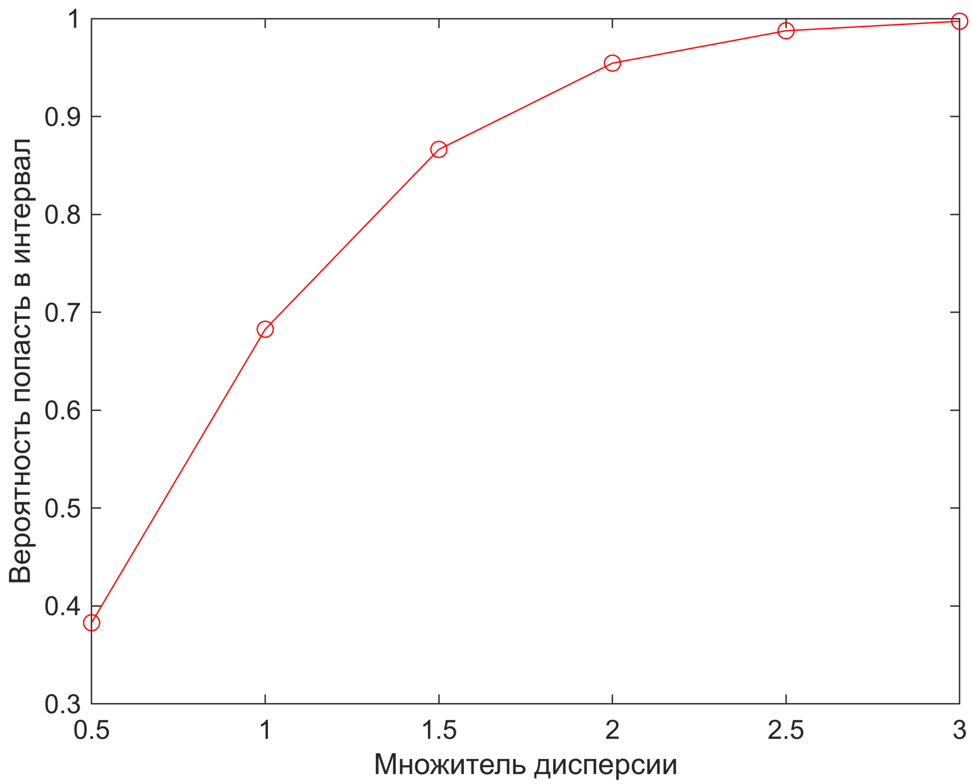
	Численное интегрирование	Точное значение
1	0.6827	0.6827

```
clearvars
% строим нормальное распределение
sig = 1;
mu = 0;
distr_fun = norm_distribution_function(mu,sig);
sigma_multiplier = 0.5:0.5:3;
P = zeros(numel(sigma_multiplier),1);
tic
%parfor ii = 1:numel(sigma_multiplier)
for ii = 1:numel(sigma_multiplier)
    m = sigma_multiplier(ii);
    % интегрируем численно от mu-m*sig до mu + m*sig
    P(ii) = integral(distr_fun,mu-m*sig,mu+m*sig);
end
toc
```

Elapsed time is 0.035474 seconds.

```
ax = get_next_ax();

plot(ax,sigma_multiplier,P,"or-");
xlabel(ax,"Множитель дисперсии");
ylabel(ax,"Вероятность попасть в интервал")
```




```
table(sigma_multiplier(:),P,VariableNames = ["Множитель","Вероятность"])
```

ans = 6×2 table

	Множитель	Вероятность
1	0.5000	0.3829
2	1	0.6827
3	1.5000	0.8664
4	2	0.9545
5	2.5000	0.9876
6	3	0.9973

$\mathcal{N}(0,1)$ - стандартное нормальное распределение (функция randn)

Чтобы получить переменную, взятую из $\zeta \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ из переменной, взятой из стандартного распределения $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\zeta \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) = \mu + \sigma^2\mathcal{N}(0,1)$

Важное распределение - хи квадрат. Хи-квадрат распределение показывает распределение значений суммы квадратов нормальных случаных переменных:

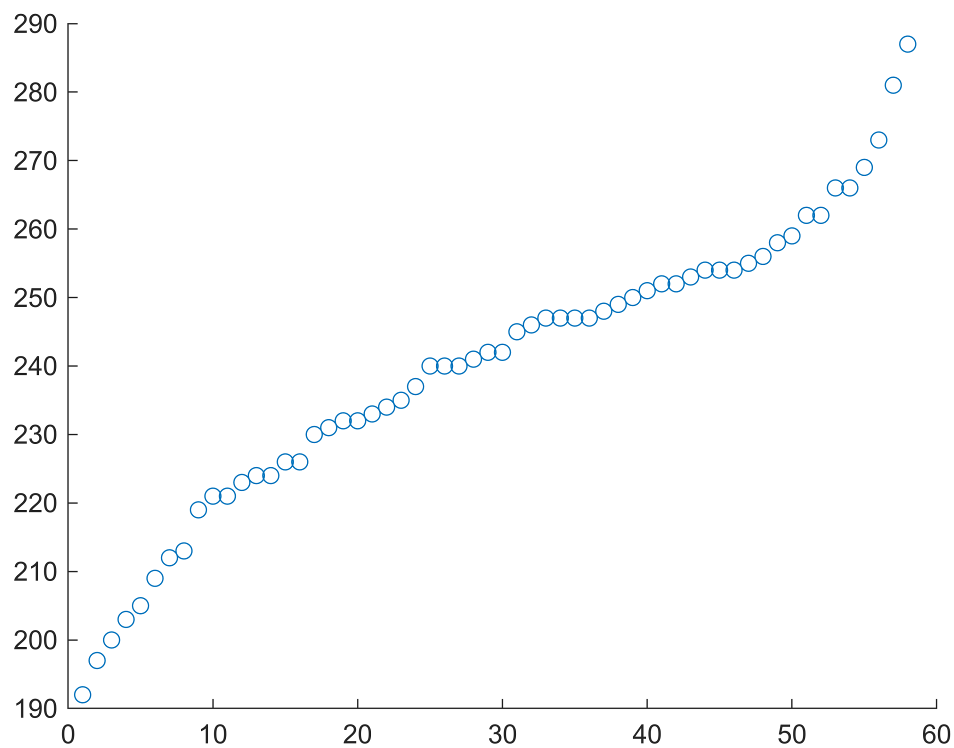
$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

где $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

Важное распределение - распределение Вейбулла (прочность хрупких материалов подчиняется статистике Вейбулла)

$p_{weib}(x|;a,b) = \frac{b}{a}(\frac{x}{a})^{b-a}e^{(-x/a)^b}$ для $x \geq 0$

```
%в statistics and machine learning toolbox есть функция fitdist,
% которая позволяет подбирать распределение под данные
data =  load(fullfile(get_folder(),"DataWeibDistr.mat"));
X = data.MAT;
scatter(get_next_ax(),1:numel(X),X)
```

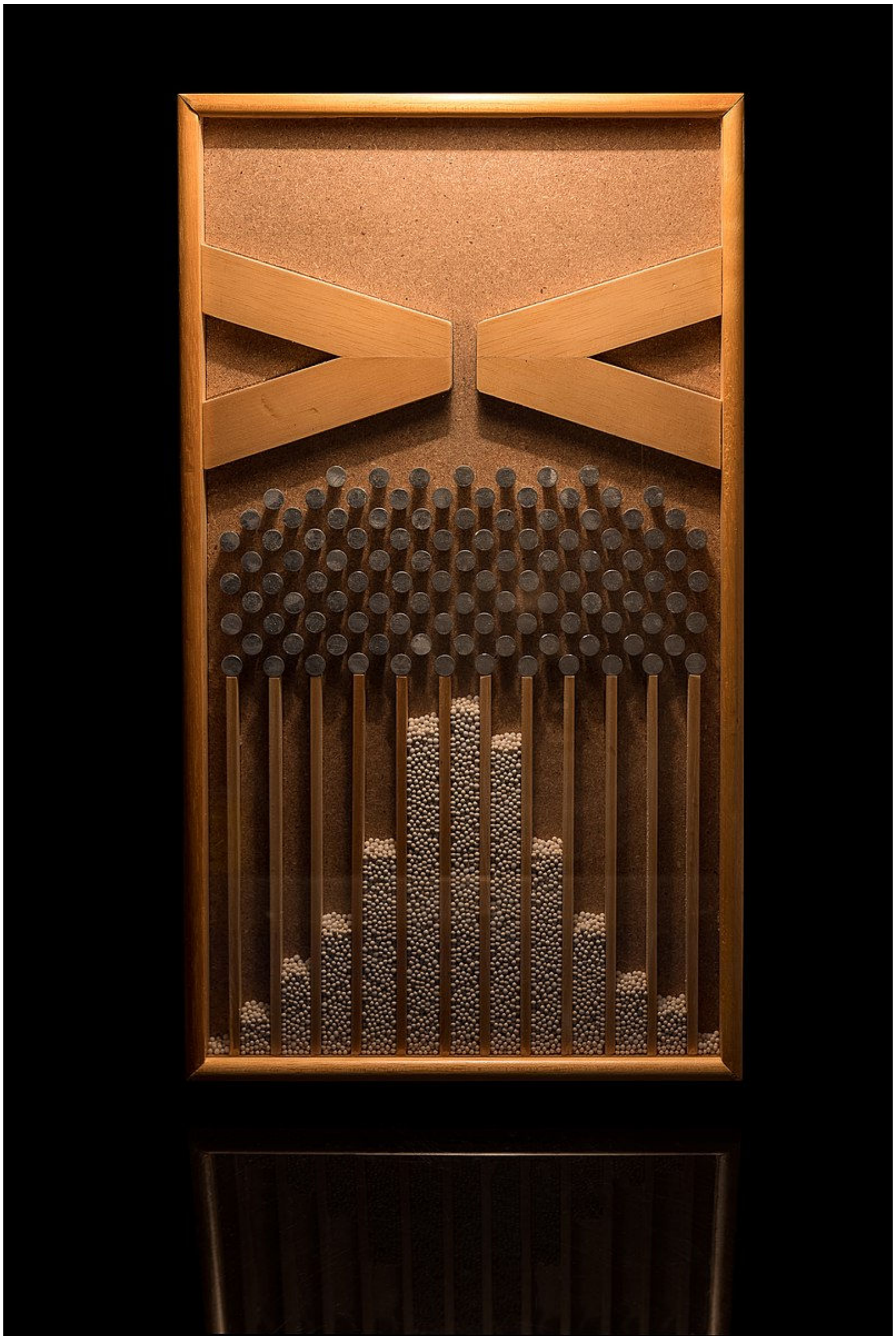



```
fitdist(X,"Weibull")
```

```
ans = 
  WeibullDistribution

  Weibull distribution
    A = 249.174   [244.015, 254.443]
    B = 13.0011   [10.7242, 15.7614]
```

```
% distributionFitter - приложения для фитинга распрелений
```



```
clearvars
% картинки разных распределений
% наша задача  - построить распределения на основе "экспериментальных" данных

M = 50; % число точек сетки
tmin=-5;tmax=286;t = transpose(linspace(tmin,tmax,M));
distrib = 'Normal'; % выбираем тип генератора случаных чисел
mu=122.37; % первый параметр распределения
sigma = 6.98; % второй параметр распределения
N = 1e4; % число экспериментов
pd = make_dist(distrib,mu=mu,sig=sigma); %генерит генератор случайных чисел
```

```
% для различных двухпараметрических распределений(обертка для встроенных
генераторов, для всех кроме
% нормального и равномерного распределения нужен statistical toolbox
g = pd(N);% возращает вектор из N чисел, распределенных в соотвествии с данным
распределением
distr = zeros(M-1,1);
for ii = 1:M-1
    distr(ii) = sum((g<t(ii+1))&(g>=t(ii)))/N; % считаем число точек, которые
попали в интервал
end
sum_distr = sum(distr)
```

```
sum_distr = 0.9961
```

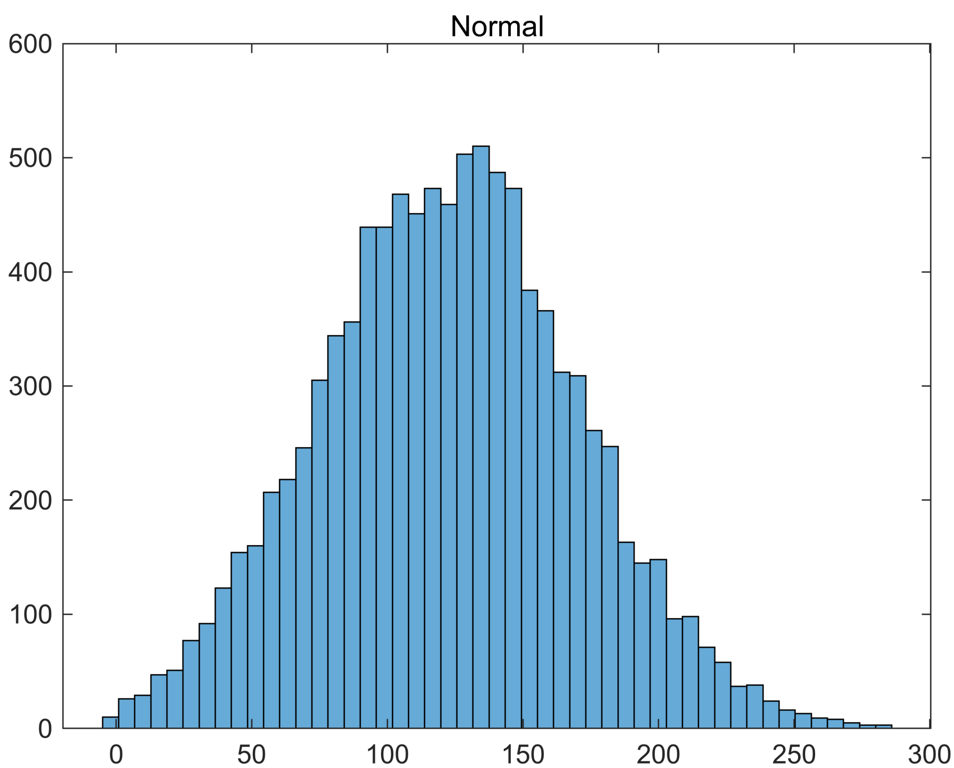
```
average_g = mean(g) % оценка среднего из среднего арифметического
```

```
average_g = 122.5214
```

```
var_g = (g - average_g)'*(g - average_g)/(N-1) % оценка вариации
```

```
var_g = 2.3164e+03
```

```
ax= get_next_ax();
histogram(ax,g,t)
title(ax,distrib)
```




```
tb = table();
tb.mu = mu;tb.mean = average_g;tb.sig = sigma^2;tb.std = sqrt(var_g);
```

```
tb
```

tb = 1×4 table

	mu	mean	sig	std
1	122.3700	122.5214	48.7204	48.1291

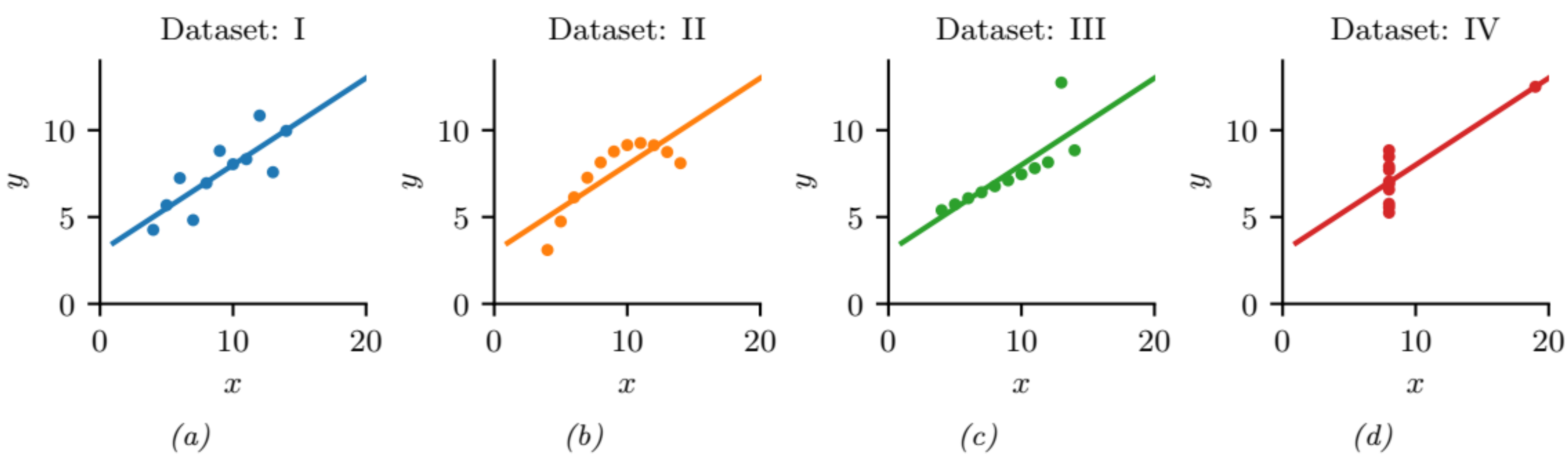


Figure 2.5: Illustration of Anscombe's quartet. All of these datasets have the same low order summary statistics. Generated by anscombes_quartet.ipynb.

(картинка из книжки K.P.Murphy "Probabilistic machine learning. An introduction", иллюстрирующая недостаточность дескриптивной статистики, все эти наборы данных имеют одно среднее по каждому из столбцов, вариацию и коэффициент корреляции между x и y)

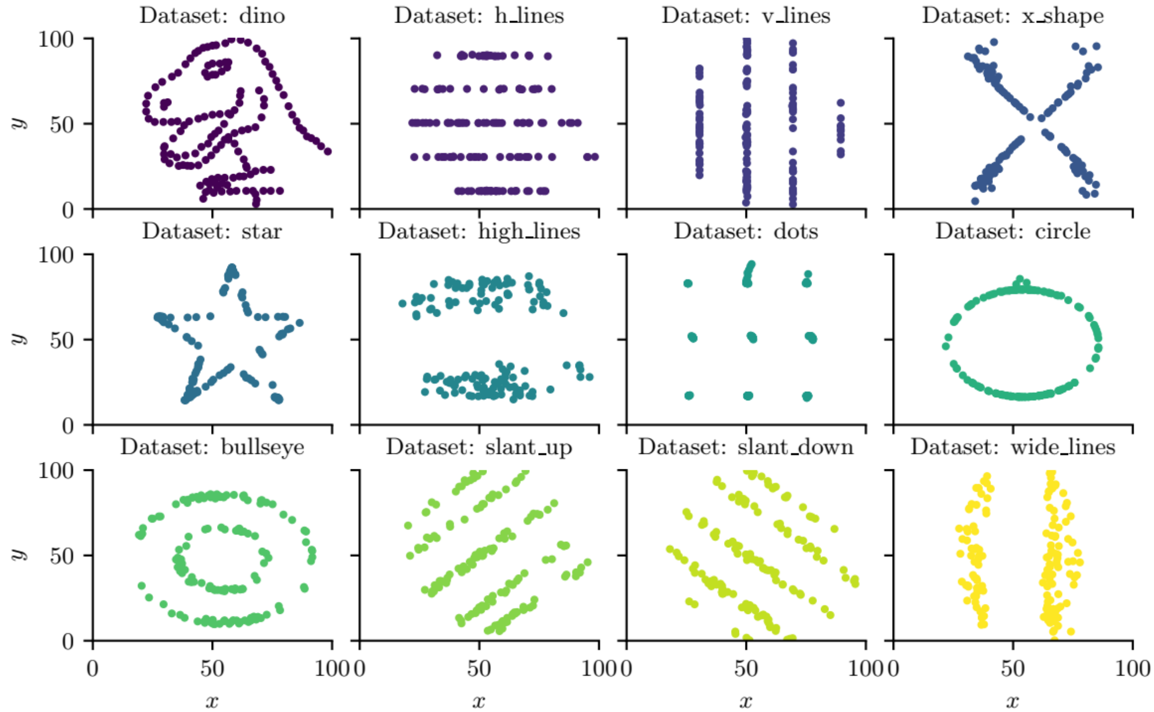


Figure 2.6: Illustration of the Datasaurus Dozen. All of these datasets have the same low order summary statistics. Adapted from Figure 1 of [MF17]. Generated by datasaurus_dozen.ipynb.

Выводы по семинару 8

1. Рассмотрены два примера линейной регрессии, первый - фиттинг данных поверхностью параболоида, второй - сведение нелинейной функции к линейной путем нелинейного преобразования
2. Основные характеристики случайной велчины ψ математическое ожидание $\mathbb{E}[\psi]$ и вариация $\mathbb{V}[\psi] = \mathbb{E}[(\psi - \mathbb{E}[\psi])^2]$, для их оценки по выборке применяется среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение среднего
3. В качестве меры совместного изменеия двух случаных величин применяется ковариация $Cov(\nu, \eta) = \mathbb{E}[(\nu - \mathbb{E}[\nu])(\eta - \mathbb{E}[\eta])]$
4. Для вектора случайных величин вводят матрицу вариации - ковариации, в которой каждый элементы i-й строки j-го столбца соотвествует ковариации его i-й и j-й координаты
5. Если имеются измерения $X = [\vec{X_1}^T, \dots, \vec{X_i}^T, ..., \vec{X_N}^T]^T$, в которой каждый столбец - это вектор сэмплов N случайных величин. Каждая i - я строка матрицы X- это M сэмплов случайной величины x_i - компоненты случайного вектора $\vec{x}$. Для экспериментальной оценки матрицы ковариации: $K_X = [X - \vec{\mu}\vec{I_M}^T][X - \vec{\mu}\vec{I_M}^T]^T/(M-1)$; $\vec{\mu}$ - вектор-столбец размером Nx1 средних значений каждой из строк $\vec{\mu} = \dfrac{X\vec{I_M}}{M}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. N.Draper, H.Smith . Applied regression analysis. Third edition. Wiley Series in Probability and Statistics.

3. K.Murphy. Probabilistic machine learning. An Introduction. Book

2. Gilbert Strang - Introduction to Linear Algebra (2016, Wellesley-Cambridge Press)

```
function rus_name = rus(type)
    possible_types =  ["stand" "legA" "trig" "legP" "custom"];
    possible_rus_names = ["Стандартный базис" "Присоединенные полиномы Лежандра"
"Тригонометрический базис" "Полиномы лежандра" "Кастомный"];
    flag = possible_types==type;
    if any(flag)
        rus_name = possible_rus_names(flag);
    else
        rus_name = type;
    end

end
function f = norm_distribution_function(mu,sig)
% возвращает анонимную функцию для нормального распределения
    f =@(x) exp(-(x-mu).^2./(2*sig^2))./(sig*sqrt(2*pi));
end
function [V,s] = vandermatrix(t,P,type,polyprod_function)
arguments
    t double
    P (1,1) double {mustBeInteger,mustBePositive} = 2
    type (1,1) string {mustBeMember(type,["stand" "legA" "trig" "legP" "custom"])}
= "stand"
    polyprod_function =[]
end
% создаем матрицу Вандермонда
% type - тип полинома (стандартный базис, полиномы лежандра,
% тригонометрические полиномы)
    t = t(:);
    N = numel(t);
    V = zeros(N,P);
    if ~(type=="custom")
        [Pfun,s] = producing_function(type,t); % возвращаем производящую функцию
для колонки матрицы вандермонда
    else
        assert(~isempty(polyprod_function)||
~isa(polyprod_function,"function_handle"),"Если выбрана кастомная производящая
функция, то нужно ее предоставить")
        s = normalize(t);
        Pfun = @(i)polyprod_function(i,s.x);
    end
    for jj = P:-1:1
```

```
        V(:,jj) = Pfun(jj);
    end
end
function dist= make_dist(type,options)
% возращает генератор N случайных чисел, распределенных в соответствии
% с двух параметрическими распределениями: нормальным, дельта-равномерным,
% Вейбулла и Хи-квадрат
    arguments
        type (1,1) string {mustBeMember(type,["Normal" "Uniform" "Weibull" "Chi2"])}
        options.mu (1,1) =0
        options.sig (1,1)=0
    end
    mu=options.mu;
    sig2=options.sig^2;
    switch type
        case "Normal"
            dist = @(N) mu + sig2*randn([N 1]);
        case "Uniform"
            dist  = @(N)   sqrt(sig2)*(rand([N 1])  -0.5)+ mu;
        case "Weibull"
            dist  = @(N) wblrnd(mu,sqrt(sig2),N,1);
        case "Chi2"
            dist = @(N) (mu + sig2*randn([N 1]).^2);
    end

end
function norm_struct = normalize2(t)
% функция возвращает стурктуру, в которой хранятся данные для нормировки
    if ~issorted(t)
        t = sort(t,"ascend");
    end
    tmin = t(1);
    tmax = t(end);
    x = 2.0*((t - tmin) / (tmax - tmin))- 1;
    norm_struct = struct("tmin",tmin,"tmax",tmax,"x",x); %t,(max(t) - min(t))
end
function t = denormalize2(s)
    t = 0.5*(s.x + 1.0)*(s.tmax - s.tmin) + s.tmin;
end
function Pn = leg_polyA(i,t) % производящая функция для присоединенных полиномов
Лежандра
    persistent P
    persistent tleg
    leg_type = 'norm';
    if isempty(tleg)||isempty(P)||(~isequal(t,tleg))
        P = transpose(legendre(i-1,t,leg_type)); % встроенная функция по сути
возвращает уже матрицу Вандермонда
        tleg = t;
    end
    if i<=size(P,2)
```

```
        Pn = P(:,i);
        return
    end
    P = transpose(legendre(i,t,leg_type));
    tleg = t;
    Pn = P(:,end);
end
function Pn = trig_poly(i,t) % производящая функция для тригонометрических полиномов
    if i==1
        Pn  = ones(size(t));
        return
    end
    if mod(i,2)==0
        Pn = cos(i*t*pi);
    else
        Pn = sin(i*t*pi);
    end
end
function [P,s] = producing_function(type,t)
% функция возвращает производящую функцию для полинома
    s = normalize2(t);
    switch type
        case "stand" % стандартный базис полинома
          P = @(i) s.x.^(i-1);
        case "legA" % присоединенные полиномы Лежандра
          P = @(i) leg_polyA(i,s.x);
        case "legP" % полиномы Лежандра
          P = @(i) legendreP(i-1,s.x) ; % стандартная фукнция для полиномов лежандра
        case "trig" % тригонометрический базис
          P = @(i) trig_poly(i,s.x);

    end

end
function [new_ax,fig_handle] = get_next_ax(index, axes_name_value_pairs)
% функция, которая возвращает новые оси на новой фигуре (нужна чтобы
% кратинки в ливскрипте нормально строились)
    arguments
        index = []
        axes_name_value_pairs cell = {}
    end
    persistent N;
    if isempty(index)
        if isempty(N)
            N=1;
        else
            N  = N+1;
        end
        fig_handle = figure(N);
        clf(fig_handle);
```

```
        new_ax = axes(fig_handle,axes_name_value_pairs{:});
        %disp("fig"+ N)
    else
        fig_handle = figure(index);
        clf(fig_handle);
        new_ax = axes(fig_handle,axes_name_value_pairs{:});
    end
end
function ax = get_named_ax(title_string)
    ax = get_next_ax();
    title(title_string);
end
function ax = draw_vector(ax,ttl,names,type,varargin)
% функция строит двух- и трех-мерные вектора, а также рассеянные данные из
% матрицы
% ax - оси (если пустые, то создаются новые)
% ttl - заголовок картинки
% names - имена векторов
% type:
%       "vector" - аргументы, которые передаются после интерпретируются
%                   как отдельные вектора
%       "point"  - в этом случае передается матрица в качестве аргумента и
%       столбцы матрицы строятся при помощи функций scatter и scatter3 d
%       в зависимости от размерности массива
    arguments
        ax =[]
        ttl string =strings(0,1)
        names string =strings(0,1)
        type string {mustBeMember(type,["vector" "point"])}="vector"
    end
    arguments (Repeating)
        varargin double
    end
    was_empty = isempty(ax); % это признак того, что все строится на новых осях
    if was_empty
        ax = get_next_ax();
    else
        hold(ax,"on");
        % if ~isempty(ax.Legend)
        %     leg_before = ax.Legend.String;
        % else
        %     leg_before = strings(0,1);
        % end
    end

    if strcmp(type,"vector")
        is_3D = numel(varargin{1})==3;
            if is_3D
                [x,y,z]  = make_xy(varargin{1});
                plot3(ax,x,y,z,'LineWidth',2,'Marker','o');
```

```
            hold on
            for iii = 2:numel(varargin)
                    [x,y,z] = make_xy(varargin{iii});
                    plot3(ax,x,y,z,'LineWidth',2,'Marker','o');
            end
            grid on
            hold off
        else
            [x,y]  = make_xy(varargin{1});
            plot(ax,x,y,'LineWidth',2,'Marker','o');
            hold on
            for iii = 2:numel(varargin)
                    [x,y]  = make_xy(varargin{iii});
                    plot(ax,x,y,'LineWidth',2,'Marker','o');
            end
            grid on
            hold off
        end
        if isempty(names)||(numel(names)~=numel(varargin))
            legend(ax,string(1:numel(varargin)));

        else
            % if ~was_empty
            %       names= [names(:);leg_before(:)];
            % end
            legend(ax,names);
        end
        xlim(ax,[-1 1]);
        ylim(ax,[-1 1]);
        if ~isempty(ttl)
            title(ax,ttl);
        end
else
    %data_number = numel(varargin); % число массивов данных
    is_3D = numel(varargin)==3;
    data = varargin{1};
    if size(data,2)>1
        data = transpose(data);
        is_transpose = true;
    else
        is_transpose = false;
    end
    if ~is_transpose
        for iii = 2:numel(varargin)
            data = [data,varargin{iii}];
        end
    else
        for iii = 2:numel(varargin)
            data = [data,transpose(varargin{iii})];
        end
```

```
        end

        if is_3D
            scatter3(ax,data(:,1),data(:,2),data(:,3));
        else
            scatter(ax,data(:,1),data(:,2));
        end

    end
    if ~was_empty
            hold(ax,"off");
    end
end
function [x,y,z]  = make_xy(col)
% добавляет к координатам вектора нули так, чтобы при помощи функции plot
% строилась линия
    switch numel(col)
        case 1
            x = [col(1)];
            y = 0;
            z = 0;
        case 2
            x = [0 col(1)];
            y = [0 col(2)];
            z = zeros(1,2);
        case 3
            x = [0 col(1)];
            y = [0 col(2)];
            z = [0 col(3)];
    end
end
function folder = get_folder()
% текущая папка
folder = fileparts(matlab.desktop.editor.getActiveFilename);
end
```