Линейная алгебра - часть I

1 Линейное пространство

Пример 1.1. Предположим, что сложение векторов на плоскости добавляет единицу к каждой из координат. Например, $(3,1)+(5,0)$ равняется $(9,2)$ вместо $(8,1)$. Умножение вектора на число выполняется обычным образом, то есть $2\cdot(3,1)$ равняется $(6,2)$. Какие из аксиом линейного пространства в такой структуре оказываются нарушенными?

Решение. Проверим выполнение каждой из восьми аксиом линейного пространства. Коммутативность и ассоциативность сложения векторов не нарушаются:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c+1,b+d+1)=(c+a+1,d+b+1)=(c,d)+(a,b),$$

$$\begin{aligned}(a,b)+((c,d)+(e,f))=(a,b)+(c+e+1,d+f+1)=(a+c+e+2,b+d+f+2)=\\=(a+c+1,b+d+1)+(e,f)=((a,b)+(c,d))+(e,f).\end{aligned}$$

Нейтральный элемент $\mathbf{e}$ относительно операции сложения также существует. Действительно, мы хотим найти такую пару чисел (x,y), что

$$(a,b)+(x,y)=(x,y)+(a,b)=(a,b)$$

для любой пары чисел (a,b). По определению операции сложения,

$$(a,b)+(x,y)=(a+x+1,b+y+1),$$

и эта пара чисел должна быть равна (a,b). Это возможно тогда и только тогда, когда $x = y = -1$. Следовательно, нейтральный элемент в данном случае существует и имеет вид $\mathbf{e}=(-1,-1)$.

Зная нейтральный элемент, несложно для любой пары чисел (a,b) найти такую пару чисел (x,y), что $(a,b)+(x,y)=(-1,-1)$:

$$(a,b)+(x,y)=(a+x+1,b+y+1)=(-1,-1).$$

Из последнего равенства следует, что $(x,y)=(-a-2,-b-2)$.

Справедливость пятой и шестой аксиом мы вообще можем не проверять, так как в них операция сложения не участвует — они выполняются по тем же соображениям, что и в случае классического сложения векторов в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Осталось, таким образом, проверить справедливость последних двух аксиом.

Рассмотрим выполнение аксиомы дистрибутивности относительно сложения векторов. Сосчитаем выражение

$$\alpha((a,b)+(c,d))=\alpha(a+c+1,b+d+1)=(\alpha a+\alpha c+\alpha,\alpha b+\alpha d+\alpha).$$

С другой стороны,

$$\alpha(a,b)+\alpha(c,d)=(\alpha a,\alpha b)+(\alpha c,\alpha d)=(\alpha a+\alpha c+1,\alpha b+\alpha d+1).$$

Видно, что при всех $\alpha \neq 1$ последние два выражения не равны друг другу:

$$\alpha((a,b)+(c,d)) = (\alpha a + \alpha c + \alpha, \alpha b + \alpha d + \alpha) \neq (\alpha a + \alpha c + 1, \alpha b + \alpha d + 1) = \alpha(a,b) + \alpha(c,d).$$

Следовательно, данная аксиома не выполняется.

Для полноты картины рассмотрим выполнение последней, восьмой аксиомы. С одной стороны,

$$(\alpha+\beta)(a,b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b).$$

С другой же стороны,

$$\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha a + \beta a + 1, \alpha b + \beta b + 1).$$

Таким образом, и последняя аксиома также не выполнена:

$$(\alpha+\beta)(a,b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) \neq (\alpha a + \beta a + 1, \alpha b + \beta b + 1) = \alpha(a,b) + \beta(a,b).$$

Следовательно, множество векторов с введенной в задании операцией сложения векторов линейное пространство не образует.

Пример 1.2. Рассмотрим следующие векторы в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c \\ e \\ f \end{bmatrix}.$$

Известно, что три из шести чисел $\{a, b, c, d, e, f\}$ равны нулю, а оставшиеся три — отличны от нуля. В каком из вариантов эти три вектора оказываются линейно независимыми?

Решение. Если $a = 0$, то первый вектор становится нулевым. Так как любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим, то данный вариант нам не подходит. Таким образом, $a \neq 0$.

Предположим теперь, что $d = 0$. При любом значении параметра b мы получаем тогда, что два первых вектора (а следовательно, и все три вектора) оказываются линейно зависимыми. Поэтому d обязан быть отличным от нуля.

Наконец, предположим, что $f = 0$. В этом случае все три заданных вектора гарантированно являются линейно зависимыми.

Итак, необходимым условием линейной независимости векторов являются неравенства $a \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$. Осталось заметить, что в случае $b = c = d = 0$ три заданные вектора действительно являются линейно независимыми: линейная комбинация

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

этих векторов равна нулю тогда и только тогда, когда все три коэффициента $\alpha_i = 0$.

Пример 1.3. Найдите среди шести векторов вида

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

наибольшее количество линейно независимых векторов.

Решение. Заметим, прежде всего, что максимальное количество линейно независимых векторов в четырехмерном пространстве равно четырем, поэтому в данном наборе векторов более чем четырех линейно независимых векторов быть не может. Покажем, однако, что в данном конкретном случае максимальное количество линейно независимых векторов равно трем.

Действительно, можно заметить, что $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_6 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2$. Следовательно, любая линейная комбинация четырех векторов сводится к линейной комбинации трех первых векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Например,

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_6\mathbf{v}_6 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \alpha_6(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) =$$

$$= (\alpha_1 - \alpha_4)\mathbf{v}_1 + (\alpha_4 - \alpha_6)\mathbf{v}_2 + (\alpha_3 + \alpha_6)\mathbf{v}_3.$$

Осталось доказать, что три первых вектора являются линейно независимыми. А в этом убедиться несложно: линейная комбинация

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

тогда и только тогда, когда все $\alpha_i = 0$.

Пример 1.4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют базис в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$?

(a) $(1, 2, 0)$ и $(0, 1, -1)$;

(b) $(1, 1, -1)$, $(2, 3, 4)$, $(4, 1, -1)$ и $(0, 1, -1)$;

(c) $(1, 2, 2)$, $(-1, 2, 1)$ и $(0, 8, 0)$;

(d) $(1, 2, 2)$, $(-1, 2, 1)$ и $(0, 8, 6)$.

Решение. Разберем каждый из представленных вариантов.

1. Два вектора базис в трехмерном пространстве образовывать не могут.
2. Четыре вектора в трехмерном пространстве являются линейно зависимыми, поэтому базиса образовывать не могут.
3. Три вектора $(1, 2, 2)$, $(-1, 2, 1)$ и $(0, 8, 0)$ являются линейно независимыми, и поэтому они образуют базис.
4. Векторы $(1, 2, 2)$, $(-1, 2, 1)$ и $(0, 8, 6)$ являются линейно зависимыми. Поэтому базис они не образуют.

Пример 1.5. Что из нижеперечисленного является подпространством трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$?

(a) Векторы вида $(1, a, b)$.

(b) Векторы вида $(0, a, b)$.

(c) Все возможные линейные комбинации векторов (a, b, c), где либо a, либо b равны нулю.

(d) Все возможные линейные комбинации векторов $(1, 1, 0)$ и $(1, 2, -1)$.

(e) Векторы вида (a, b, c), удовлетворяющие условию $c - b + 3a = 0$.

Решение. Основным критерием того, что множество векторов образует подпространство, является тот факт, что это множество замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения на скаляр, заданных в исходном линейном пространстве. Как следствие:

1. Векторы вида $(0, a, b)$ образуют подпространство: сложение и умножение на скаляр из этого множества $\widetilde{V}$ не выводят:

$$(0, a, b) + (0, c, d) = (0, a + c, b + d) \in \widetilde{V}, \qquad \alpha(0, a, b) = (0, \alpha\, a, \alpha\, b) \in \widetilde{V}.$$

   Базис этого подпространства состоит из векторов $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$.

2. Множество $\widetilde{V}$ векторов вида $(1, a, b)$ линейного подпространства не образует: это множество не замкнуто относительно операции сложения в исходном пространстве:

$$(1, a, b) + (1, c, d) = (2, a + c, b + d) \notin \widetilde{V}.$$

3. Множество $\widetilde{V}$ векторов вида (a, b, c), в котором либо a, либо b равны нулю, линейного подпространства не образует, так как оно также не замкнуто относительно операции сложения:

$$(a, 0, c_1) + (0, b, c_2) = (a, b, c_1 + c_2) \notin \widetilde{V}.$$

4. Все возможные линейные комбинации векторов $(1, 1, 0)$ и $(1, 2, -1)$ образуют линейное подпространство — по определению, всевозможные линейные комбинации образуют линейное подпространство векторов вида

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 2, -1),$$

   натянутое на векторы $(1, 1, 0)$ и $(1, 2, -1)$.

5. С геометрической точки зрения все векторы, координаты которых удовлетворяют условию $3a - b + c = 0$, образуют плоскость в исходном трехмерном пространстве, то есть образуют линейное подпространство. Данный факт также легко проверяется формально: если у нас имеются два вектора (a, b, c) и (d, e, f), такие, что $3a - b + c = 0$ и $3d - e + f = 0$, то и любая их линейная комбинация также этому условию удовлетворяет:

$$\alpha(a, b, c) + \beta(d, e, f) = (\alpha\, a + \beta\, d, \alpha\, b + \beta\, e, \alpha\, c + \beta\, f),$$

$$3(\alpha\, a + \beta\, d) - (\alpha\, b + \beta\, e) + (\alpha\, c + \beta\, f) = \alpha(3a - b + c) + \beta(3d - e + f) = 0.$$

Пример 1.6. Какие из приведенных ниже совокупностей векторов образуют подпространство соответствующего линейного пространства?

(a) Векторы на плоскости, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в начале координат.

(b) Векторы на плоскости, концы которых лежат на данной прямой.

(c) Векторы на плоскости, концы которых не лежат на данной прямой.

(d) Векторы на плоскости, концы которых лежат в первой четверти.

(e) Векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых — целые числа.

(f) Векторы линейного пространства, являющиеся линейными комбинациями заданных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Решение. В данном случае только один из представленных вариантов дает положительный ответ. Именно,

1. Если мы возьмем вектор, лежащий в первой четверти, и умножим его на -1, то получится вектор, лежащий в третьей четверти. Таким образом, это множество не замкнуто относительно операции умножения на скаляр.

2. Векторы, концы которых лежат на данной прямой, образуют линейное пространство лишь в случае, когда эта прямая проходит через начало координат. Но заданием допускаются и прямые, не проходящие через начало координат. Для таких прямых множество векторов линейного пространства, очевидно, не образуют.

3. Также не образуют линейного подпространства векторы, концы которых не лежат на заданной прямой: легко подобрать векторы из этого множества, сумма которых будет представлять вектор с концом на данной прямой.

4. Векторы на плоскости, которые лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в начале координат, также не образуют пространства. Действительно, возьмем пару ненулевых векторов, концы которых лежат на разных прямых. Их сумма ни на одной из этих прямых лежать не будет.

5. Если мы возьмем вектор с целочисленными координатами и умножим его на нецелое число, то в результате получим вектор, координаты которого не являются целыми числами. Поэтому такое множество векторов также не образует линейное подпространство.

6. Множество векторов, являющихся линейными комбинациями заданных k векторов, образуют линейное подпространство — подпространство векторов, натянутое на эти k векторов. Важно заметить, что размерность этого подпространства может оказаться как равной k (в случае, если исходные k векторов линейно независимы), так и быть строго меньше k (в случае, когда k векторов линейно зависимы). Размерность такого подпространства равна максимальному количеству линейно независимых векторов в исходном наборе.

Пример 1.7. Рассмотрим плоскость в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением вида $x - 2y + 3z = 0$. Все векторы, исходящие из начала координат и лежащие в этой плоскости, образуют двумерное подпространство пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите любые два вектора с целочисленными координатами, образующие базис такого подпространства.

Решение. В качестве ответа нам подойдет любая пара линейно независимых вектора, лежащих в данной плоскости, то есть пара линейно независимых векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $x - 2y + 3z = 0$. Например, положим вначале $z = 0$, $y = 1$. Из заданного нам уравнения находим, что $x = 2$. Иными словами, вектор $(2, 1, 0)$ исходной плоскости принадлежит. Далее, положим $y = 0$, $z = -1$. Тогда из уравнения для плоскости получаем, что

$x = 3$, а сам вектор имеет вид $(3, 0, -1)$. Остается убедиться, что векторы $(2, 1, 0)$ и $(3, 0, -1)$ являются линейно независимыми, а это сделать легко: из уравнения

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

следует, что

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 0; \qquad\qquad \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta = 0.$$

2 Существование и единственность решений систем линейных алгебраических уравнений

Пример 2.1. Какие из нижеследующих утверждений являются верными: в системе уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y &= 24 \\ 12x + ay &= 18 \end{cases}$$

параметр a можно подобрать таким образом, что эта система

1. будет иметь ровно одно решение;
2. будет иметь ровно два решения;
3. будет иметь ровно три решения;
4. будет иметь бесконечно много решений;
5. не будет иметь решений;
6. будет иметь не более пяти решений.

Решение. Два вектора коэффициентов системы

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix}$$

могут быть либо линейно зависимы (для этого a должен быть равен 9), либо линейно независимы ($a \neq 9$). Так как при этом вектор правых частей и первый из векторов коэффициентов системы линейных уравнений линейно независимы, то возможно только два случая — система либо не имеет решения (в случае $a = 9$), либо она имеет единственное решение ($a \neq 9$). Так как $1 \leqslant 5$, то нам годятся первый, пятый и шестой варианты.

Пример 2.2. Подберите значение параметра a таким образом, чтобы система

$$\begin{cases} 2x + \ \ 6y + 10z = \ \ 4 \\ \ \ x + \ \ 5z + \ \ 4y = \ \ 2 \\ -3x - 26y + \ \ az = -18 \end{cases}$$

решений не имела.

Решение. Заметим, прежде всего, что во втором уравнении переменные y и z поменяны местами. Кроме того, первое уравнение удобно поделить на два. В результате получаем систему вида

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ x + 4y + 5z = 2 \\ -3x - 26y + az = -18 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь векторы $\mathbf{a}_i$ коэффициентов этой системы, а также вектор правых частей:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -26 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Рассматриваемая нами система уравнений не будет иметь решение в случае, если векторы коэффициентов этой системы лежат в одной плоскости (то есть линейно зависимы), а вектор правых частей этой плоскости не принадлежит. Легко заметить, что векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$ будут линейно зависимы в случае, когда $a = -15$. При этом, как несложно видеть, вектор $\mathbf{b}$ при таком значении параметра a линейному пространству, натянутому на векторы $\mathbf{a}_i$, не принадлежит. Следовательно, при таком a система решений не имеет.

Пример 2.3. Подберите значение параметров a и b таким образом, чтобы система

$$\begin{cases} 2x + 7y + az = 4 \\ 8x + by + z = 12 \end{cases}$$

решений не имела.

Решение. Нам нужно добиться, прежде всего, того, чтобы все три вектора

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ b \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a \\ z \end{bmatrix}$$

коэффициентов системы были линейно зависимы, а затем убедиться, что вектор $\mathbf{b}$ правых частей не принадлежит одномерному линейному подпространству, натянутому на векторы $\mathbf{a}_i$ коэффициентов системы. Первые два вектора коэффициентов системы окажутся, очевидно, линейно зависимыми, если $b = 28$. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$ станут линейно зависимыми, если $a = 1/4$. При этом, как несложно видеть, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы. Итак, ответом на данную задачу является число $a + b = 28,25$.

Пример 2.4. Подберите значение параметра a таким образом, чтобы система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + ay = 3 \\ 8x + 18y = 10 \end{cases}$$

имела единственное решение.

Решение. Проще всего рассматривать данную систему как систему из трех нелинейных уравнений относительно трех неизвестных — x, y и a. Заметим, что первые две неизвестные мы легко можем найти из первого и третьего уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 8x + 18y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3y = -9 \end{cases}$$

Ее решением являются числа $x = 8$, $y = -3$. Подставляя эти значения во второе уравнение, получим, что $a = 7$.

Пример 2.5. Рассмотрим систему уравнений вида

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

в которой коэффициенты a_{ij} могут принимать значения, равные нулю или единице. Несложно убедиться, что всего имеются 64 различные системы подобного вида. Определите, какое количество из этих 64-х систем не имеет решений.

Решение. Данная система не будет иметь решений в случае, когда все три вектора $\mathbf{a}_i$ коэффициентов этой линейной системы будут принадлежать одному и тому же одномерному линейному подпространству, а вектор $\mathbf{b}$ правых частей этому подпространству принадлежать не будет.

Первый случай — это когда все коэффициенты равны нулевому вектору $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. В этом случае система, очевидно, решений не имеет. Второй случай — когда два из трех векторов $\mathbf{a}_i$ равны нулевому вектору, а третий — отличен от нулевого вектора. В этом случае оставшийся вектор должен быть равен либо $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, либо $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Всего таких вариантов имеется $2 \cdot 3 = 6$ штук. Третий случай — это когда только один из трех векторов $\mathbf{a}_i$ отличен от $\mathbf{0}$. В данном случае два оставшихся вектора должны быть одинаковы и равны либо $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, либо $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Всего таких вариантов также равно $2 \cdot 3 = 6$. Наконец, четвертый случай — это когда все три вектора $\mathbf{a_i} \neq \mathbf{0}$. В этом случае они все, опять-таки, должы быть равны либо $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, либо $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Всего таких вариантов два. Подводя итоги, получаем 15 вариантов, при которых данная система решений не имеет.

Пример 2.6. Рассмотрим систему уравнений вида

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

в которой коэффициенты a_{ij} могут принимать значения, равные нулю или единице. Несложно убедиться, что всего имеются 64 различные системы подобного вида. Определите, какое количество из этих 64-х систем имеет единственное решение.

Решение. Для того, чтобы система имела единственное решение необходимо, во-первых, чтобы векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ лежали в одной плоскости с вектором $\mathbf{b}$ правых частей, а во-вторых, чтобы векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не лежали на одной прямой.

Предположим вначале, что вектор

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае вектор $\mathbf{a}_2$ может быть любым вектором, отличным от

$$\mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Действительно, если вектор $\mathbf{a}_2$ совпадает с одним из этих двух векторов, то система имеет бесконечное множество решений. Во всех же остальных шести случаях система будет иметь единственное решение вида $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Аналогичная ситуация имеет место в случае, когда все компоненты вектора $\mathbf{a}_2$ равны единице.

Наконец, рассмотрим случай, когда ни один из двух векторов $\mathbf{a}_i$ не равен ни вектору $\mathbf{1}$, ни вектору $\mathbf{0}$. В этом случае, выбирая для вектора $\mathbf{a}_1$ один из оставшихся шести вариантов, мы можем взять вектор $\mathbf{a}_2$ как дополнение $\mathbf{a}_1$ до единичного вектора $\mathbf{1}$ и получить единственное решение исходной системы вида $x_1 = x_2 = 1$.

Подводя итоги, получаем $3 \cdot 6 = 18$ вариантов, при которых рассматриваемая система имеет единственное решение.

3 Решение систем линейных алгебраических уравнений

Пример 3.1. Найти значения, которые будут стоять на главной диагонали после прямого прохода метода Гаусса в системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 8 \\ 4x & + & 7y & + & 5z & = & 20 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Решение. На первом шаге нам нужно домножить первую строку на 2 и вычесть из второй строки первую. В результате получим систему вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 8 \\ & & y & + & 3z & = & 4 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

В подсистеме, состоящей из двух последних уравнений, домножим второе уравнение на 2 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 8 \\ & & y & + & 3z & = & 4 \\ & & & & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

с числами 2, 1 и 8 на главной диагонали.

Пример 3.2. Решите методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & + & 2t & = & 5 \end{array}\right.$$

Решение. В результате прямого прохода метода Гаусса получается система вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & \frac{4}{3}z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & \frac{5}{4}t & = & 5 \end{array}\right.$$

Обратный проход позволяет получить следующий ответ: $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$, $t = 4$.

Заметим, что матрица системы имеет так называемый трехдиагональный вид. Для такого рода матриц вместо метода исключения Гаусса целесообразно использовать специальный, значительно более быстрый и эффективный метод — так называемый метод прогонки.

Пример 3.3. Решите методом Гаусса две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 11 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 10 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \end{array}\right.$$

В качестве ответа укажите сумму корней обеих систем.

Решение. Сразу заметим, что для получения ответа эти системы можно было не решать. Действительно, в первом уравнении каждой системы стоит сумма $x + y + z$, так что сумма корней каждой из систем — это то, что стоит в правой части первого уравнения системы. В итоге в качестве ответа получаем $6 + 7 = 13$.

Если все же решать эти системы, то после прямого хода метода Гаусса получается следующее:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & - & 7z & = & -14 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 7 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & & - & 7z & = & -14 \end{array}\right.$$

Ответом будет $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ в первом случае и $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$ во втором.

Пример 3.4. Напишите программу, которая решает систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Решение. Основной момент, который нужно было учесть при реализации метода Гаусса в общем случае, состоит в следующем: в принципе, не исключен случай, когда на i-м шаге элемент $a_{ii} = 0$. В таких случаях разумно использовать подход, который часто называют **выбором опорного элемента**. При этом подходе просматривается i-й столбец, начиная с текущего элемента и до n-го элемента, выбирается максимальный по модулю, а затем i-я строка меняется местами с той строкой, в которой встретился максимальный элемент. Более того, данную процедуру целесообразно проводить и в том случае, когда элемент a_{ii} отличен от нуля — это позволит снизить вычислительную погрешность метода.

Далее, необходимо также учесть случаи, при которых система не имеет решений или имеет бесконечно много решений. В частности, если у нас после прямого прохода остались строки, все коэффициенты в которых равны нулю, а свободные члены отличны от нуля, то такая система не будет иметь решений. Если же у нас появились строки, в которых равны нулю как все коэффициенты, так и правые части, или если на каком-то шаге опорный элемент мы выделить не смогли (все элементы в столбце под главной диагональю оказались равными нулю), то такая система будет иметь бесконечно много решений.

Пример 3.5. Постройте LU-разложение матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве ответа получите матрицу L с единицами на главной диагонали.

Решение. Опишем шаг за шагом процесс построения LU-разложения:

Шаг	Матрица системы	L−матрица
1.	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 9 & 3\\ 5 & 12 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ ? & 1 & 0\\ ? & ? & 1\end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2-(2\cdot 1) & 9-(2\cdot 1) & 3-(2\cdot 1)\\ 5-(5\cdot 1) & 12-(5\cdot 1) & 2-(5\cdot 1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & 7 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & ? & 1\end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & 7-(1\cdot 7) & -3-(1\cdot 1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Пример 3.6. Постройте LU-разложение матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & 7 & 6 & 4\\ 2 & 15 & 17 & 11\\ 3 & 26 & 44 & 29\\ 4 & 34 & 61 & 49\end{pmatrix}.$$

Решение. Решение этой задачи ничем не отличается от предыдущей, поэтому мы сразу запишем результат LU-разложения:

$$U = \begin{pmatrix}1 & 7 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 7 & 1\end{pmatrix}.$$