

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КЛЕВЦОВСЬКИЙ А.В.  
КРЕНЕВИЧ А.П.

**Методичні вказівки  
до лабораторних занять із дисципліни  
«Алгоритми і структури даних»**

для студентів механіко-математичного факультету

Київ – 2024

УДК 519.942+550

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор Ямненко Р.Є.  
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Бойко Ю.В.

*Рекомендовано до друку вченою радою  
механіко-математичного факультету  
(протокол № 9 від 23 січня 2024 року)*

**Клевцовський А.В., Крєневич А.П.**

Методичні вказівки до лабораторних занять із дисципліни «Алгоритми і структури даних» для студентів механіко-математичного факультету / А. В. Клевцовський., А. П. Крєневич – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2024. – 70 с.

Посібник містить перелік завдань для самостійної роботи з дисципліни «Алгоритми і структури даних», що викладається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він містить завдання для засвоєння основних понять цього курсу, таких як рекурентні співвідношення, рекурсія, аналіз складності алгоритмів, лінійні рекурсивні структури даних, графи, дерева, динамічне програмування тощо.

Для студентів механіко-математичного факультету та викладачів, які проводять заняття з курсу «Алгоритми і структури даних».

## **ЗМІСТ**

<b>ВСТУП .....</b>	<b>5</b>
<b>ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ .....</b>	<b>6</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ. ЧАС ВИКОНАННЯ.....</b>	<b>8</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ. АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА СКЛАДНОСТІ АЛГОРИТМІВ. ....</b>	<b>10</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. ЛІНІЙНИЙ ТА БІНАРНИЙ ПОШУК. ....</b>	<b>16</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ БІЄКЦІЇ.....</b>	<b>20</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. БІНАРНИЙ ПОШУК ПО ВІДПОВІДІ.....</b>	<b>22</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. ХЕШУВАННЯ ТА ХЕШ-ТАБЛИЦІ. ....</b>	<b>25</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7. ХЕШ-ТАБЛИЦІ. ....</b>	<b>29</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8. СОРТУВАННЯ – АЛГОРИТМИ ЗІ СКЛАДНІСТЮ <math>N^2</math>. .....</b>	<b>30</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9. СОРТУВАННЯ – ШВИДКІ АЛГОРИТМИ.....</b>	<b>33</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10. РЕКУРСІЯ, ПОВНИЙ ПЕРЕБІР.....</b>	<b>36</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11. РЕКУРСІЯ, ПОВНИЙ ПЕРЕБІР. МЕТОД «РОЗДІЛЯЙ І ВОЛОДАРЮЙ».....</b>	<b>37</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12. СТЕК – БАЗОВІ АЛГОРИТМИ. ....</b>	<b>39</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 13. СТЕК ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ. ....</b>	<b>40</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 14. ЧЕРГИ ТА ДЕК. ЇХНЕ ЗАСТОСУВАННЯ. ....</b>	<b>42</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 15. ЗВ'ЯЗНІ СПИСКИ. ЇХНЕ ЗАСТОСУВАННЯ .....</b>	<b>44</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 16. ДЕРЕВА. АЛГОРИТМИ НА ДЕРЕВАХ. ....</b>	<b>50</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 17. БІНАРНІ ДЕРЕВА. БІНАРНІ ДЕРЕВА ПОШУКУ. ....</b>	<b>52</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 18. ЗБАЛАНСОВАНІ БІНАРНІ ДЕРЕВА ПОШУКУ. ....</b>	<b>54</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 19. ДВІЙКОВА КУПА ТА ПРИОРИТЕТНА ЧЕРГА.....</b>	<b>55</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 20. ДЕРЕВО ВІДРІЗКІВ. ....</b>	<b>56</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 21. ГРАФИ. ПОБУДОВА ТА ВЛАСТИВОСТІ. ....</b>	<b>58</b>

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 22. АЛГОРИТМИ НА НЕЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ. ОБХІД В ШИРИНУ ТА ГЛИБИНУ. ....	60
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 23. ТОПОЛОГІЧНЕ СОРТУВАННЯ. ЗВ'ЯЗНІСТЬ ГРАФІВ. ....	62
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 24. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДО ПОШУКУ ШЛЯХІВ У ЛАБІРИНТАХ. ....	64
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 25. АЛГОРИТМИ НА ЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ. ....	66
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 26. АЛГОРИТМ ПРИМА ПОБУДОВИ КАРКАСНОГО ДЕРЕВА. ....	69
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ТА ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ .....	70

## ВСТУП

Метою цього посібника є надання студенту вичерпний перелік завдань, які стануть у нагоді для практичного засвоєння дисципліни «Алгоритми і структури даних» [1]. Посібник розділено на 26 лабораторних робіт, кожна з яких містить завдання окремої теми дисципліни.

Матеріал кожної лабораторної роботи посібника складається з п'яти блоків: контрольних запитань, завдань для аудиторної роботи та трьох блоків завдань для самостійної роботи. Під час підготовки до практичного заняття, студент повинен опрацювати блок контрольних запитань та знати вичерпні відповіді на них. Блок завдань для аудиторної містить перелік типових задач відповідної теми. Ці завдання студент має виконати протягом практичного заняття самостійно або під керівництвом викладача. Завдання для самостійної роботи студент виконує самостійно та звітує про їхнє виконання викладачу. Як було зазначено вище, завдання для самостійної роботи складається з трьох блоків, перший з яких є обов'язковим для виконання. Другий блок завдань є ідентичним по складності основному блоку завдань для самостійної роботи та призначений для кращого засвоєння матеріалу. Третій блок завдань складається з задач підвищеної складності та вимагає від студента не лише досконалого опанування методів поточної теми, а й матеріалу, що виходить за межі нормативного курсу.

Формулювання задач у блоці завдань для аудиторної роботи та у блоках завдань для самостійної роботи може бути записане або безпосередньо, або містити посилання на задачу з інтернет-порталу [eolymp.com/uk](http://eolymp.com/uk) [2], або містити умову та посилання на тестову програму, що знаходиться на веб-сервісі GitHub [github.com/krenevych/algo](https://github.com/krenevych/algo) [3], для перевірки правильності розв'язку. У двох останніх випадках, розв'язання задачі передбачає не лише написання програми зі строгим дотриманням вимог поставлених у задачі, а й перевірку її коректності шляхом автоматичного тестування.

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

1. Основна ціль лабораторної роботи довести викладачу, що студент засвоїв матеріал на достатньому рівні.
2. Кожна лабораторна роботи містить
  - a. перелік контрольних запитань, що стосуються теоретичного матеріалу;
  - b. варіанти індивідуальних/групових завдань лабораторних робіт для практичного виконання;
  - c. посилання на допоміжну літературу для закріплення теоретичного матеріалу і стане в нагоді під час виконання практичних завдань.
3. На вибір студентів надано перелік практичних завдань по кожній темі, серед яких вони мають можливість самостійно вибрати бажаний варіант. Обраний номер завдання студенти записують у спеціальний хмарний документ, наданий викладачем, ціль якого рівномірно розподілити завдання між студентами групи. Кілька студентів однієї групи, що можуть обрати один варіант не може перевищувати 2, у випадку самостійної роботи, та 3-х, у випадку роботи у команді.
4. Кожна лабораторна робота оформлюється у паперовому та електронному вигляді.
5. Паперове оформлення здійснюється за допомогою текстового процесору Word (чи аналогічного) або редактора презентацій PowerPoint (чи аналогічного) та має містити такі частини:
  - a. Титульний аркуш, що містить назву навчальної дисципліни, номер лабораторної роботи, номер варіанту, ПІБ студента (студентів, якщо спільна лабораторна робота), що виконав роботу, спеціальність, курс, номер групи.
  - b. Умову задачі. Якщо задача береться з електронних джерел, то вказати посилання на задачу. Умова задачі має містити приклади вхідних та вихідних даних.
  - c. Аналіз задачі та опис алгоритму, яким пропонується розв'язувати задачу.
  - d. Приклад роботи алгоритму на модельному прикладі (взятому з умови задачі або придуманому самостійно).
  - e. Програмну реалізацію (основні моменти).
  - f. Висновки: якщо робота програми перевірялася за допомогою електронних систем, то обов'язково вказати посилання на систему перевірки разом з задачею (наприклад, <https://eolymp.com/uk/problems/3966>), логін (логіні)

виконавців лабораторної роботи та результат перевірки (наприклад, 100%). Якщо результат не 100%, то обов'язково зазначити у чому проблема (не пройшов, по часу, помилки виконання, тощо).

6. Електронна частина, складається з
  - a. Файлу (файлів), з яких друкується паперовий примірник лабораторної роботи.
  - b. Файлів вихідного коду програми, що розв'язує поставлену задачу.
  - c. Файлів вхідних даних (за необхідності) – текстові файли, що містять вхідні дані задачі. Вони мають бути названі згідно з правилом – «input.txt» (якщо один файл) та «input01.txt», «input02.txt» і т.д. – якщо кілька файлів вхідних даних.
7. Електронний варіант надсилається на електронну адресу викладача, що викладає практичні заняття не пізніше ніж напередодні лабораторного заняття, на якому студент має її захищати.
8. Захист лабораторної роботи здійснюється студентом (студентами) одним з двох способів:
  - a. Індивідуальна співбесіда з викладачем, протягом якої викладач ставить запитання по теоретичному матеріалу теми лабораторної роботи (з переліку контрольних запитань), вислуховує ідею алгоритму, що розв'язує поставлену задачу, знайомиться з деталями реалізації алгоритму та перевіряє коректність розв'язку.
  - b. Презентація розв'язаної задачі з усіма деталями реалізації для всіх студентів навчальної групи. У цьому випадку роздрукований варіант не вимагається.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. Складність алгоритмів. Час виконання.

### Контрольні запитання

- 1.1. Наведіть означення алгоритму.
- 1.2. Що таке комп'ютерна програма? Що таке реалізація алгоритму?
- 1.3. У чому полягає аналіз алгоритму?
- 1.4. Що таке елементарна операція? Наведіть кілька прикладів.
- 1.5. Що таке час виконання програми?
- 1.6. Наведіть означення таких понять як найкращий/найгірший час виконання програми. Що таке час виконання програми в середньому?

### Завдання для аудиторної роботи

- 1.1. Визначте час виконання фрагментів програм заданих нижче

a)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     k += 1
4     i += 1
```

b)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     i = i * 2
```

c)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     if i % 2 == 0:
4         k += 1
5     i += 1
```

d)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = n
4     while j > 0:
5         k += 1
6         j -= 1
7     i += 1
```

e)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = i
4     while j < n:
5         k += 1
6         j += 1
7     i += 1
```

f)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = n
4     while j != 0:
5         k += 1
6         j //= 3
7     i += 1
```

- 1.2. Визначте час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

a) 
$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ T(n-1) + 1, & n \geq 1. \end{cases}$$



- b)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2T(n-1) + 1, & n \geq 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ T(n-1) + n, & n \geq 1. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ T(\lfloor n/a \rfloor) + 1, & n \geq 2, a \geq 2. \end{cases}$

### Завдання для самостійної роботи

1.3. Визначте час виконання фрагментів програм заданих нижче

a)

```
1 k += 1
2 i = n
3 while i > 0:
4     i -= 1
```

b)

```
1 i = n
2 while i > 1:
3     k += 1
4     i //= 2
```

c)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = 0
4     while j < n:
5         k += 1
6         j += 2
7     i += 2
```

d)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = 0
4     while j < i * i:
5         k += 1
6         j += 1
7     i += 1
```

e)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     j = 1
4     while j < n:
5         k += 1
6         j *= 2
7     i *= 2
```

f)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     j = i
4     while j < n:
5         k += 1
6         j *= 2
7     i *= 2
```

1.4. Визначте час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n \leq a, a > 0; \\ T(n-a) + 1, & n > a. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ T(n-1) + 2^n, & n \geq 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1, & n \geq 2. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + n, & n \geq 2, a \geq 2. \end{cases}$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. Складність алгоритмів. Асимптотична оцінка складності алгоритмів.

### Контрольні запитання

- 2.1. Наведіть означення О-оцінки: що означає  $f = O(g)$ ?
- 2.2. Наведіть означення Омега-оцінки: що означає  $f = \Omega(g)$ ?
- 2.3. Наведіть означення Тета-оцінки: що означає  $f = \Theta(g)$ ?
- 2.4. Що означає фраза: час виконання програми сталий/логарифмічний/лінійний/поліноміальний/експоненціальний?
- 2.5. Наведіть основні властивості «Великого О».
- 2.6. Наведіть основні правила визначення асимптотичної поведінки часу виконання.

### Завдання для аудиторної роботи

- 2.1. Нехай  $f(n) = 3n^2 - n + 4$ . Користуючись означенням покажіть що
  - a)  $f(n) = O(n^2)$ ,
  - b)  $f(n) = \Omega(n^2)$ .
- 2.2. Для кожної пари функцій  $f(n)$  та  $g(n)$ , зазначених у таблиці визначте яке із співвідношень має місце  $f(n) = O(g(n))$  чи  $g(n) = O(f(n))$

$f(n)$	$g(n)$
$10n$	$n^2 - 10n$
$n^3$	$n^2 \log n$
$n \log n$	$n + \log n$
$\log n$	$\sqrt[k]{n}$
$\ln n$	$\log n$
$\log(n + 1)$	$\log n$
$\log \log n$	$\log n$
$2^n$	$10^n$
$n^m$	$m^n$
$\cos(n\pi/2)$	$\sin(n\pi/2)$
$n^2$	$(n \cos n)^2$

- 2.3. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у термінах  $O$ –«великого» для функції:

```
def f(n):
    k = 0
    i = n - 1
    while i != 0:
        k += 1.0 / i
        i = i // 2
    return k
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа  $n$ ?

2.4. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у термінах  $O$ –«великого» для функції:

```
def f(n):
    i = n - 1
    while i != 0:
        j = 0
        while j < n:
            j += 1
        i = i // 2
```

2.5. Знайдіть асимптотичний час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ 2T(n-1) + O(1), & n \geq 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ 2T(n-1) + O(n), & n \geq 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1; \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(1), & n \geq 2. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1; \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n), & n \geq 2. \end{cases}$

2.6. Чи можна описати алгоритм для кожної з задач підрахунку суми наведених нижче, асимптотична складність яких буде  $O(1)$ ? Якщо так, то наведіть фрагмент такої програми.

a)  $\sum_{i=0}^n i$

b)  $\sum_{i=0}^n a^i$

c)  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i, |a| < 1$

### Завдання для самостійної роботи

2.7. Нехай  $f(n) = 3n^2 - n + 4$  та  $g(n) = n \log n + 5$ . Покажіть що

$$f(n) + g(n) = O(n^2).$$

2.8. Нехай  $f(n) = \sqrt{n}$  та  $g(n) = \log n$ . Покажіть що

$$f(n) + g(n) = O(\sqrt{n}).$$

2.9. Припустимо, що  $n$ ,  $m$  та  $k$  невід'ємні цілі числа і методи  $e$ ,  $f$ ,  $g$  та  $h$  мають такі характеристики:

- Час виконання у найгіршому випадку методу  $e(n, m, k) \in O(1)$  і повертає значення з проміжку від 1 до  $(n + m + k)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $f(n, m, k) \in O(n + m)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $g(n, m, k) \in O(m + k)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $h(n, m, k) \in O(n + k)$ .

Визначте асимптотичні оцінки виконання програм у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для фрагментів програм зазначених нижче:

- a) 

```
1 f(n, 10, 0)
2 g(n, m, k)
3 h(n, m, 1000000)
```
- b) 

```
1 for i in range(e(n, 10, 100)):
2     f(n, 10, 0);
```
- c) 

```
1 for i in range(n):
2     f(n, m, k);
```
- d) 

```
1 for i in range(n):
2     for j in range(i, n):
3         f(n, m, k);
```

2.10. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для функції:

```
def f(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i
    return sum
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа  $n$ ? Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

2.11. Нехай  $f(n)$  функція визначена у праві 2.10. Розглянемо функцію

```
def g(n):
    sum = 0
```

```

for i in range(1, n + 1):
    sum = sum + i + f(i)
return sum

```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції  $g(n)$  у найгіршому випадку в термінах  $O$ –«великого». Що є результатом виконання функції  $g(n)$  для заданого натурального числа  $n$ . Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

2.12. Нехай  $f(n)$  функція визначена у праві 2.10, а функція  $g(n)$  – у праві 2.11. Розглянемо функцію

```

def h(n):
    return f(n) + g(n)

```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції  $h(n)$  у найгіршому випадку в термінах  $O$ –«великого». Що є результатом її виконання для заданого натурального числа  $n$ . Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

2.13. Знайдіть асимптотичний час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ T(n-1) + O(1), & n \geq 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a, \ a > 1; \\ T(n-a) + O(1), & n > a. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(1), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a, \ a > 1; \\ aT(n-a) + O(1), & n > a. \end{cases}$
- e)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ T(n-1) + O(n), & n \geq 1. \end{cases}$
- f)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a, \ a > 1; \\ T(n-a) + O(n), & n > a. \end{cases}$
- g)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1; \\ aT([n/a]) + O(1), & n \geq 2, a \geq 2. \end{cases}$
- h)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1; \\ aT([n/a]) + O(n), & n \geq 2, a \geq 2. \end{cases}$

2.14. Доведіть співвідношення

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \sum_{i=0}^n i = O(n) & \text{b)} \quad \sum_{i=0}^n i^2 = O(n) & \text{c)} \quad \sum_{i=0}^n a^i = O(n)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{d)} \quad \sum_{i=0}^n i^i = O(n^2) & \text{e)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i} = O(n) & \text{f)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i!} = O(n) \\
 \text{g)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{a^i}{1+i!} = O(n) & \text{h)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^m} = O(nm) & \text{i)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^i} = O(n^2)
 \end{array}$$

**Зауваження.** Для доведення співвідношення треба запропонувати алгоритм обчислення виразу зазначеного у лівій частині рівності, що має вказану у правій частині рівності асимптотичну оцінку часу виконання програми.

### Додаткові завдання для самостійної роботи

2.15. Чи можна описати алгоритм для кожної з задач підрахунку суми наведених нижче, асимптотична складність яких буде  $O(n)$ ? Якщо так, то наведіть фрагмент такої програми.

- a)  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ , ( $n$  коренів);
- b)  $y = x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + \dots + x^4 + x^2 + 1$ ;
- c)  $\left(1 + \frac{1}{1^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)$ ;
- d)  $1 + \sin x + \dots + \sin^n x$ .

2.16. Опишіть функції натурального аргументу  $n$ , час виконання яких у найгіршому випадку має асимптотику:

- a)  $O(n)$                       b)  $O(n^2)$                       c)  $O(n^3)$
- d)  $O(\log n)$                       e)  $O(n \log n)$                       f)  $O(2^n)$

2.17. Опишіть функції натуральних аргументів  $n$  та  $m$ , час виконання яких у найгіршому випадку має асимптотику:

- a)  $O(n + m)$                       b)  $O(m \log n)$                       c)  $O(n^m)$

2.18. Натуральне число називається паліндромом, якщо його запис читається однаково зліва направо і справа наліво (наприклад, 1, 393, 4884). Скласти програму, що визначає, чи є задане натуральне число  $n$  паліндромом асимптотична складність якої  $O(n)$ , де  $n$  – кількість цифр у числі.

2.19. Числами трибоначчі називається числова послідовність  $\{T_k: k \geq 0\}$ , задана рекурентним співвідношенням третього порядку:

$$T_0 = 0, T_1 = T_2 = 1, T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Опишіть функції для обчислення  $T_n$  за допомогою рекурентного співвідношення та використовуючи рекурсію. Обчисліть асимптотичну складність кожного з варіантів. Порівняйте абсолютний час виконання (у секундах) обох варіантів для знаходження  $T_{10}, T_{20}, T_{50}$ .

2.20. Послідовністю Падована називається числова послідовність  $\{P_k: k \geq 0\}$ , задана рекурентним співвідношенням третього порядку:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, P_k = P_{k-1} + P_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Опишіть функції для обчислення  $P_n$  за допомогою рекурентного співвідношення та використовуючи рекурсію. Обчисліть асимптотичну складність кожного з варіантів. Порівняйте абсолютний час виконання (у секундах) обох варіантів для знаходження  $P_{10}, P_{20}, P_{50}$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3.

### Лінійний та бінарний пошук.

#### Контрольні запитання

- 3.1. Які задачі допомагає розв'язати лінійний пошук?
- 3.2. Яка складність лінійного пошуку (у найгіршому випадку)?
- 3.3. Наведіть алгоритм лінійного пошуку.
- 3.4. У чому полягає цілочисельний бінарний пошук?
- 3.5. Для яких структур даних він може бути реалізований?
- 3.6. Яка складність бінарного пошуку?
- 3.7. Яка перевага бінарного пошуку у порівнянні з лінійним пошуком?
- 3.8. Наведіть алгоритм цілочисельного бінарного пошуку.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 3.1. Одиниці

<https://eolymp.com/uk/problems/622>

На уроках інформатики вас, напевно, вчили переводити числа з одних систем числення у інші і виконувати інші подібні операції. Прийшов час продемонструвати ці знання. Знайдіть кількість одиниць у двійковому запису заданого числа.

*Вхідні дані*

У вхідному файлі міститься єдине ціле число  $n$  ( $0 \leq n \leq 2000000000$ ).

*Вихідні дані*

Вихідний файл повинен містити одне число — кількість двійкових одиниць у запису числа  $n$ .

*Вхідні дані #1*

5

*Вихідні дані #1*

2

*Вхідні дані #2*

7

*Вихідні дані #2*

3

*Вказівка: Скористайтеся побітовими операціями.*

- 3.2. Реалізуйте інтерфейс для роботи з англійсько-українським словником та швидким пошуком перекладу. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності двох функцій описаних нижче. Функція

```
def addTranslation(eng, translation)
```



додає до словника англійське слово `eng` та його переклад `translation`. Пари (`eng`, `translation`) приходяться у порядку, що відповідає лексикографічному порядку. Функція

```
def find(eng)
```

повертає переклад слова `eng` зі словника, якщо воно міститься у словнику, або порожній рядок у іншому разі.

Тестова програма `main.py`, файл `user.py`, що містить вищезгаданий інтерфейс та вхідні дані (текстові файли) розташовані за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку та реалізуйте згаданий вище інтерфейс (файл `user.py`). Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 3.3. Реалізуйте алгоритм пошуку номеру найпершого входження до заданого масиву, заданого числа `x`. Якщо заданий елемент відсутній у списку - поверніть номер першого елементу, що більший за число `x`:

```
array[i] >= x
```

Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def bsearch_leftmost(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task3>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

### Завдання для самостійної роботи

- 3.4. Циклічні зсуви  
<https://eolymp.com/uk/problems/27>
- 3.5. Сортювання за зростом  
<https://eolymp.com/uk/problems/3607>

Вказівка: Використайте лінійний пошук для підрахунку відповіді.

3.6. Затятий колекціонер метеликів  
<https://eolymp.com/uk/problems/3966>

3.7. Мутанти  
<https://eolymp.com/uk/problems/3970>

*Вказівка: Використайте бінарний пошук для знаходження відповіді для кожного вказаного інтервалу.*

### Додаткові завдання для самостійної роботи

3.8. Реалізуйте алгоритм пошуку номеру останнього входження до заданого масиву заданого числа  $x$ . Якщо такий елемент відсутній у списку - поверніть номер останнього елементу, що менший за число  $x$ . Зауважимо, що якщо всі елементи масиву менші за шукане число, програма має повертати значення  $-1$  (мінус один).

$\text{array}[i] \geq x$

Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def bsearch_rightmost(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task8>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

3.9. Знайдіть кількість входжень заданого числа  $x$  до масиву цілих чисел `array`. Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def counter(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task9>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

- 3.10. Реалізуйте алгоритм лінійного пошуку всіх елементів списку, що є степенями двійки та визначте асимптотичну складність отриманого алгоритму.
- 3.11. Припустимо, що список містить елементи, для яких визначена операція  $\leq$  (менше або рівно) і елементи у цьому списку розташовані у порядку зростання. Скориставшись цією властивістю списку, запропонуйте алгоритм лінійного пошуку та оцініть його час виконання. Чи буде такий алгоритм оптимальнішим ніж класичний лінійний пошук?
- 3.12. Реалізуйте алгоритм бінарного пошуку з використанням рекурсії.
- 3.13. Реалізуйте алгоритм бінарного пошуку для масиву, що відсортовано за незростанням.
- 3.14. Праве входження  
<https://eolymp.com/uk/problems/5199>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4.

### Розв'язання рівнянь методом бісекції.

#### Контрольні запитання

- 4.1. Для чого використовується дійсний бінарний пошук? Наведіть приклад задачі.
- 4.2. Чи є відмінність у реалізації дійсного бінарного пошуку від цілочисельного?
- 4.3. Які основні підходи застосовуються для моменту завершення дійсного бінарного пошуку? У чому їхні переваги та недоліки у порівнянні один з одним?
- 4.4. Наведіть алгоритм дійсного бінарного пошуку.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 4.1. Для монотонної на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'яжіть рівняння
$$f(x) = c. \quad (4.1)$$
Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності двох функцій описаних нижче. Функція

```
def solve(f, c, a, b):
```

для неспадної на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'язує рівняння (4.1), а функція

```
def solve_decreasing(f, c, a, b)
```

відповідно для незростаючої на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'язує рівняння (4.1). Для визначення моменту завершення пошуку використайте всі три підходи (точність по аргументу, точність по значенню та безпосереднє сусідство двох чисел з плаваючою крапкою). Порівняйте отримані результати.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L04/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

### Завдання для самостійної роботи

- 4.2. Квадратний корінь  
<https://eolymp.com/uk/problems/3968>
- 4.3. Знайдіть найменше  $x \in [0, 10]$ , що  
$$f(x) = x^3 + x + 1 > 5$$
- 4.4. На відрізку  $[1.6, 3]$  знайдіть корінь рівняння  
$$\sin x = \frac{x}{3}.$$
- 4.5. На відрізку  $[0, 2]$  знайдіть корінь рівняння  
$$x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5.

### Бінарний пошук по відповіді.

#### Контрольні запитання

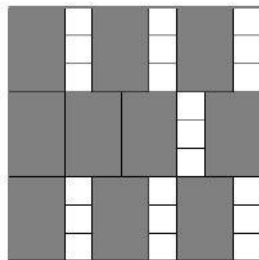
- 5.1. У чому полягає концепція бінарного пошуку по відповіді?

#### Завдання для аудиторної роботи

- 5.1. Дипломи

<https://eolymp.com/uk/problems/3969>

Коли Петя вчився в школі, він часто брав участь в олімпіадах з інформатики, математики та фізики. Так як він був досить здібним хлопчиком і старанно вчився, то на багатьох із цих олімпіад він отримував дипломи. До закінчення школи у нього накопичилося  $n$  дипломів, причому, як виявилось, всі вони мали однакові розміри:  $w$  - в ширину і  $h$  - у висоту.



Зараз Петя навчається в одному з кращих університетів і живе в гуртожитку зі своїми одногрупниками. Він вирішив прикрасити свою кімнату, повісивши на одну зі стін свої дипломи за шкільні олімпіади. Так як до бетонної стіни прикріпити дипломи досить важко, він вирішив купити спеціальну дошку з коркового дерева, щоб прикріпити її до стіни, а до неї - дипломи. Для того, щоб ця конструкція виглядала більш красиво, Петя хоче, щоб була квадратною і займала якомога менше місця на стіні. Кожен диплом повинен бути розміщений строго в прямокутнику  $w$  на  $h$ . дипломи забороняється повертати на 90 градусів. Прямокутники, які відповідають різним дипломам, не повинні мати спільних внутрішніх точок.

Потрібно написати програму, яка обчислить мінімальний розмір сторони дошки, яка буде потрібно Пете для розміщення всіх своїх дипломів.

*Вхідні дані*

Вхідний файл містить три цілих числа  $w$ ,  $h$ ,  $n$  ( $1 \leq w, h, n \leq 10^9$ ).

*Вихідні дані*

У вихідний файл вивести відповідь до сформульованої задачі.

*Вхідні дані #1*

2 3 10

*Вихідні дані #1*

9

### **Завдання для самостійної роботи**

- 5.2. Корови – в стійла

<https://eolymp.com/uk/problems/5149>

- 5.3. Мотузочки

<https://eolymp.com/uk/problems/3967>

- 5.4. Автобус

<https://eolymp.com/uk/problems/6132>

- 5.5. Соціальна відстань

<https://eolymp.com/uk/problems/10307>

*Вказівка: Відсортувати масив інтервалів перед запуском алгоритму бінарного пошуку.*

- 5.6. Сушіння

<https://eolymp.com/uk/problems/5363>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 5.7. Дуже Легка Задача

<https://eolymp.com/uk/problems/5102>

Сьогодні вранці журі вирішило додати у варіант олімпіади ще одну, Дуже Легку Задачу. Відповідальний секретар оргкомітету надрукував її умову в одному екземплярі, і тепер йому потрібно до початку олімпіади встигнути зробити ще  $n$  копій. У його розпорядженні є два ксерокси, один з яких копіює аркуш за  $x$  секунд, а другий за  $y$ . (Дозволяється використовувати як один ксерокс, так і обидва одночасно. Можна копіювати не лише з оригіналу, але і з копії).

Допоможіть йому визначити, який мінімальний час для цього потрібно.

*Вхідні дані*

Три натуральних числа  $n$ ,  $x$  та  $y$  ( $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^8$ ,  $1 \leq x, y \leq 10$ ).

*Вихідні дані*

Виведіть одне число – мінімальний час в секундах, необхідний для отримання  $n$  копій.

*Вхідні дані #1*

4 1 1

*Вихідні дані #1*

3

*Вхідні дані #2*

5 1 2

*Вихідні дані #2*

4

5.8. Морозиво

<https://eolymp.com/uk/problems/4035>

5.9. Будівництво

<https://eolymp.com/uk/problems/7329>

**Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

5.10. Черепаха

<https://eolymp.com/uk/problems/669>

5.11. Рисосховище

<https://eolymp.com/uk/problems/2254>

5.12. Роботи

<https://eolymp.com/uk/problems/161>



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. Хешування та хеш-таблиці.

### Контрольні запитання

- 6.1. Що таке хешування?
- 6.2. Наведіть приклад хеш-функції.
- 6.3. Наведіть основні характеристики, яким має задовольняти хеш-функція
- 6.4. Що таке колізія хеш-функції?
- 6.5. Яка хеш-функція називається ідеальною?
- 6.6. Наведіть приклад хеш-функції для рядків.
- 6.7. Що таке асоціативний масив?
- 6.8. Яка структура даних називається хеш-таблицею? Які основні операції вона має підтримувати?
- 6.9. У чому полягає процес розв'язання колізій?
- 6.10. Які види хеш-таблиць бувають? Які відмінності між ними?
- 6.11. Поясніть концепцію розв'язання колізій при реалізації хеш-таблиць з відкритою адресацією.
- 6.12. Яким чином реалізується процес видалення ключів у хеш-таблиці з відкритою адресацією?
- 6.13. Запропонуйте алгоритм збільшення слотів хеш-таблиці, що використовує лінійне зондування для розв'язання колізій, для випадку, якщо фактор завантаження таблиці перевищує деякий поріг.
- 6.14. Поясніть концепцію методу ланцюжків для розв'язання колізій при реалізації хеш-таблиць.

### Завдання для аудиторної роботи

- 6.1. Реалізуйте інтерфейс асоціативного масиву, ключами якого є цілі числа, а значеннями – рядки. Реалізацію здійсніть як хеш-таблицю з відкритою адресацією у вигляді сукупності функцій описаних нижче функцій. Функція

```
def init()
```

викликається один раз на початку виконання програми. Функція

```
def set(key: int, value: str) -> None
```

встановлює значення value для ключа key. Якщо такий ключ відсутній у структурі – додає пару, інакше змінює значення для цього ключа. Функція

```
def get(key: int) -> str
```

за ключем key повертає значення зі структури (або None, якщо ключ відсутній у структурі). Нарешті функція

```
def delete(key: int) -> None
```

видаляє пару ключ-значення за заданим ключем, якщо такий ключ міститься у таблиці.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 6.2. Розв'яжіть задачу 6.1 реалізуючи хеш-таблицю з розв'язанням колізій методом ланцюжків.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

### Завдання для самостійної роботи

- 6.3. Розглядається бібліотека художніх книг. У бібліотеці може міститися кілька книг одного автора. Реалізуйте каталог для цієї бібліотеки. Розв'яжіть задачу, реалізуючи хеш-таблицю з відкритою адресацією. Інтерфейс, що необхідно реалізувати наведено нижче.

```
def init():
    """ Викликається 1 раз на початку виконання програми. """
    pass

def addBook(author, title):
    """ Додає книгу до бібліотеки.
    :param author: Автор книги
    :param title: Назва книги
    """
    pass

def find(author, title):
    """ Перевіряє чи міститься задана книга у бібліотеці.
    :param author: Автор
```

```

:param title: Назва книги
:return: True, якщо книга міститься у бібліотеці та
        False у іншому разі. ""
return False

def delete(author, title):
    """ Видаляє книгу з бібліотеки.
    :param author: Автор
    :param title: Назва книги
    """
    pass

def findByAuthor(author):
    """ Повертає список книг заданого автора.
    Якщо бібліотека не містить книг заданого автора,
    то підпрограма повертає порожній список.
    :param author: Автор
    :return: Список книг заданого автора у алфавітному порядку. """
    return []

```

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task3>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням (у тому ж числі папку data разом з усім її вмістом), у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 6.4. Розв'яжіть задачу 6.3 реалізуючи хеш-таблицю з розв'язанням колізій методом ланцюжків.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task4>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням (у тому ж числі папку data разом з усім її вмістом), у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 6.5. Реалізуйте для хеш-таблиці описаної в задачі 6.1 ітеративний протокол для проходження усіх ключів хеш-таблиці. Реалізацію здійсніть як хеш-таблицю з відкритою адресацією у вигляді класу, описаного нижче функцій.

```

class HashTable:

    def __init__(self):
        """ Конструктор """
        pass

    def set(self, key: int, value: str) -> None:

```

```

""" Встановлює значення value для ключа key.
Якщо такий ключ відсутній у структурі - додає пару,
інакше змінює значення для цього ключа.
:param key: Ключ
:param value: Значення
"""

pass

def get(self, key: int):
    """ За ключем key повертає значення зі структури.
    :param key: Ключ
    :return: Значення, що відповідає заданому ключу або None,
    якщо ключ відсутній у структурі.
    """
    return None

def delete(self, key: int) -> None:
    """ Видаляє пару ключ-значення за заданим ключем.
    Якщо ключ у структурі відсутній - нічого не робить.
    :param key: Ключ
    """
    pass

def __iter__(self):
    """ Створює ітератор для проходження хеш-таблиці
    :return: Новий ітератор
    """
    return None

```

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task5>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте усі методи згаданого вище класу, що міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

## Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

6.6. Хеш-таблиця

<https://eolymp.com/uk/problems/7273>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7. Хеш-таблиці.

### Контрольні запитання

- 7.1. Що таке асоціативний масив?
- 7.2. Яка структура даних називається хеш-таблицею? Які основні операції вона має підтримувати?
- 7.3. У чому полягає процес розв'язання колізій?
- 7.4. Які види хеш-таблиць бувають? Які відмінності між ними?
- 7.5. Поясніть концепцію розв'язання колізій при реалізації хеш-таблиць з відкритою адресацією.
- 7.6. Яким чином реалізується процес видалення ключів у хеш-таблиці з відкритою адресацією?
- 7.7. Запропонуйте алгоритм збільшення слотів хеш-таблиці, що використовує лінійне зондування для розв'язання колізій, для випадку, якщо фактор завантаження таблиці перевищує деякий поріг.
- 7.8. Поясніть концепцію методу ланцюжків для розв'язання колізій при реалізації хеш-таблиць.

### Завдання для аудиторної роботи

- 7.1. Англо-латинський словник  
<https://eolymp.com/uk/problems/4842>
- 7.2. Перший словник Енді  
<https://eolymp.com/uk/problems/1227>

### Завдання для самостійної роботи

- 7.3. Контакти  
<https://eolymp.com/uk/problems/2797>
- 7.4. Перевірка орфографії  
<https://eolymp.com/uk/problems/2195>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 7.5. Словник нецензурних слів  
<https://eolymp.com/uk/problems/1236>
- 7.6. Дешифратор  
<https://eolymp.com/uk/problems/2035>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8.

### Сортування – алгоритми зі складністю $n^2$ .

#### Контрольні запитання

- 8.1. Наведіть ідею алгоритму сортування обміном (бульбашкового сортування).
- 8.2. Наведіть ідею алгоритму сортування вибором. У чому його перевага перед алгоритмом сортування обміном?
- 8.3. Наведіть ідею алгоритму сортування вставкою.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 8.1. Реалізуйте алгоритм сортування обміном (бульбашкове сортування). Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив array та сортує його.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 8.2. Модифікуйте алгоритм бульбашкового сортування, реалізований під час виконання задачі 8.1, перевіркою на кожному проході чи відсортований вже масив. Порівняйте час виконання обох програм.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте модифікацію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 8.3. Реалізуйте алгоритм сортування вибором. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив `array` та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередніх задачах.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task3>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 8.4. Реалізуйте алгоритм сортування вставкою. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив `array` та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередніх задачах.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task4>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

#### Завдання для самостійної роботи

- 8.5. Сортування бульбашкою  
<https://eolymp.com/uk/problems/2663>
- 8.6. Словник  
<https://eolymp.com/uk/problems/5089>

#### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 8.7. Бібліотечний метод  
<https://eolymp.com/uk/problems/2664>
- 8.8. Сортування часу  
<https://eolymp.com/uk/problems/972>
- 8.9. Градуирований лексикографічний порядок  
<https://eolymp.com/uk/problems/1130>
- 8.10. Особові справи  
<https://eolymp.com/uk/problems/1344>
- 8.11. Хитре сортування

- <https://eolymp.com/uk/problems/1462>
- 8.12. Метод мінімуму  
<https://eolymp.com/uk/problems/2662>
- 8.13. Бібліотека  
<https://eolymp.com/uk/problems/4230>
- 8.14. Кафе "Хоботанія"  
<https://eolymp.com/uk/problems/4746>



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9.

### Сортування – швидкі алгоритми.

#### Контрольні запитання

- 9.1. Наведіть ідею алгоритму сортування злиттям. Яка його асимптотична складність? Які його особливості?
- 9.2. Наведіть ідею алгоритму швидкого сортування. Яка його асимптотична складність? Які його особливості у порівнянні з іншими алгоритмами сортуванням?

#### Завдання для аудиторної роботи

- 9.1. Реалізуйте алгоритм сортування злиттям. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередній лабораторній роботі.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L09/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 9.2. Реалізуйте швидкий алгоритм сортування QuickSort. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмом сортування вставкою.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L09/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну

папку. Реалізуйте задану вище функцію у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 9.3. Проведіть аналіз швидкодії реалізованих алгоритмів сортування для різних типів та розмірів масивів (не відсортований масив згенерований випадковим чином, масив відсортований за зростанням, масив відсортований за спаданням елементів). Для цього опишіть функції

```
def bubble_sort(array):
    """ Сортвання "Бульбашкою"
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def bubble_sort_optimized(array):
    """ Модифікований алгоритм сортування "Бульбашкою"
    :param array: Масив (список однотипових елементів).
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def selection_sort(array):
    """ Сортвання вибором
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def insertion_sort(array):
    """ Сортвання вставкою
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def merge_sort(array):
    """ Сортвання злиттям
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def quick_sort(array):
    """ Швидке сортування
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

кожна з яких отримує на вхід масив array та сортує його відповідним методом.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L09/task3>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких знаходяться у файлі user.py. Для перевірки запустіть файл main.py.*

### **Завдання для самостійної роботи**

- 9.4. Сортування

<https://eolymp.com/uk/problems/2321>

*Вказівка: Використайте алгоритм швидкого сортування.*

- 9.5. Сортування злиттям

<https://eolymp.com/uk/problems/4037>

*Вказівка: Використайте алгоритм сортування злиттям.*

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 9.6. Ультра швидке сортування

<https://eolymp.com/uk/problems/1303>

- 9.7. Станція "Сортувальна"

<https://eolymp.com/uk/problems/1457>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10. Рекурсія, повний перебір.

### Контрольні запитання

- 10.1. Які алгоритми називаються алгоритмами повного перебору?
- 10.2. Чи існують загальні методи побудови алгоритмів повного перебору?
- 10.3. Що можна сказати про асимптотичну складність алгоритмів повного перебору?
- 10.4. У чому полягає метод гілок та меж?

### Завдання для аудиторної роботи

- 10.1. 23 з 5  
<https://eolymp.com/uk/problems/1540>
- 10.2. Машина арифметика  
<https://eolymp.com/uk/problems/1296>
- 10.3. Задача про призначення  
<https://eolymp.com/uk/problems/1781>

### Завдання для самостійної роботи

- 10.4. Перестановки  $n$  по  $k$   
<https://eolymp.com/uk/problems/9961>
- 10.5. CD  
<https://eolymp.com/uk/problems/1266>

### Додаткові завдання для самостійної роботи

- 10.6. Розклад на доданки  
<https://eolymp.com/uk/problems/849>
- 10.7. Всі підмножини  
<https://eolymp.com/uk/problems/9962>
- 10.8. Перестановки  
<https://eolymp.com/uk/problems/2169>
- 10.9. Перестановки літер  
<https://eolymp.com/uk/problems/843>
- 10.10. Вираз  
<https://eolymp.com/uk/problems/831>
- 10.11. Майстер "Ворміксу"  
<https://eolymp.com/uk/problems/3533>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11. Рекурсія, повний перебір. Метод «розділяй і володарюй».

### Контрольні запитання

- 11.1. У чому полягає метод гілок та меж?
- 11.2. У чому полягає метод декомпозиції («розділяй і володарюй»)?

### Завдання для аудиторної роботи

- 11.1. Словник  
<https://eolymp.com/uk/problems/364>
- 11.2. Путівки  
<https://eolymp.com/uk/problems/6>
- 11.3. Гра в закреслювання  
<https://eolymp.com/uk/problems/658>

### Завдання для самостійної роботи

- 11.4. Дуже швидке множення  
<https://eolymp.com/uk/problems/317>  
*Вказівка: Використайте алгоритм [Множення Карацуби](#).*
- 11.5. Розподіл оцінок  
<https://eolymp.com/uk/problems/1524>

### Додаткові завдання для самостійної роботи

- 11.6. Міст  
<https://eolymp.com/uk/problems/1592>
- 11.7. Мінне поле  
<https://eolymp.com/uk/problems/2000>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 11.8. Істотні інверсії  
<https://eolymp.com/uk/problems/7031>  
*Вказівка: Використайте метод «розділяй і володарюй».*
- 11.9. Взлом сейфа  
<https://eolymp.com/uk/problems/6408>
- 11.10. Штанги  
<https://eolymp.com/uk/problems/8213>
- 11.11. Печеньки  
<https://eolymp.com/uk/problems/2633>

- 11.12. Торговец  
<https://eolymp.com/uk/problems/224>
- 11.13. Банк  
<https://eolymp.com/uk/problems/7470>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12. Стек – базові алгоритми.

### Контрольні запитання

- 12.1. Яка структура даних називається стеком?
- 12.2. Наведіть основні операції для роботи зі стеком.
- 12.3. Які основні підходи до моделювання структури даних Стек використовуються у програмуванні на практиці?
- 12.4. Які структури даних називаються рекурсивними?

### Завдання для аудиторної роботи

- 12.1. Простий стек  
<https://eolymp.com/uk/problems/6122>  
*Вказівка: реалізацію стеку здійсніть на базі вбудованого списку або масиву.*
- 12.2. Стек необмеженого розміру  
<https://eolymp.com/uk/problems/6124>  
*Вказівка: реалізацію стеку здійсніть як рекурсивну структуру.*

### Завдання для самостійної роботи

- 12.3. Стек із захистом від помилок  
<https://eolymp.com/uk/problems/6123>
- 12.4. Рейки  
<https://eolymp.com/uk/problems/1776>

### Додаткові завдання для самостійної роботи

- 12.5. Реалізуйте стек  
<https://eolymp.com/uk/problems/5087>
- 12.6. Мінімум на стеці  
<https://eolymp.com/uk/problems/4259>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 13. Стек та його застосування.**

### **Контрольні запитання**

- 13.1. Наведіть приклади застосування стеку.
- 13.2. Наведіть алгоритм перевірки правильності дужкової послідовності.
- 13.3. Наведіть алгоритм конвертування арифметичного виразу з інфіксної у постфіксну форму зображення.
- 13.4. Наведіть алгоритм обчислення арифметичного виразу зображеного у інфікській та постфікській формах.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 13.1. Системи числення - 1  
<https://eolymp.com/uk/problems/5322>
- 13.2. Баланс дужок  
<https://eolymp.com/uk/problems/2479>
- 13.3. Зворотній польський запис  
<https://eolymp.com/uk/problems/5060>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 13.4. Система числення  
<https://eolymp.com/uk/problems/7433>
- 13.5. Дужкова послідовність  
<https://eolymp.com/uk/problems/5058>
- 13.6. З префіксного у інфіксне  
<https://eolymp.com/uk/problems/731>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 13.7. Системи числення  
<https://eolymp.com/uk/problems/1008>
- 13.8. Система числення - перезавантаження  
<https://eolymp.com/uk/problems/1376>
- 13.9. Інопланетяни  
<https://eolymp.com/uk/problems/2702>
- 13.10. Яка система числення?  
<https://eolymp.com/uk/problems/1377>
- 13.11. Вирази  
<https://eolymp.com/uk/problems/3837>
- 13.12. Математики та дужки



<https://eolymp.com/uk/problems/4438>

**Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 13.13. Дужки  
<https://eolymp.com/uk/problems/5205>
- 13.14. Магічні дужки  
<https://eolymp.com/uk/problems/3013>
- 13.15. Дужки (2)  
<https://eolymp.com/uk/problems/855>
- 13.16. Дужки  
<https://eolymp.com/uk/problems/1801>
- 13.17. Дріб у LATEX-i  
<https://eolymp.com/uk/problems/2039>
- 13.18. Калькулятор  
<https://eolymp.com/uk/problems/1394>
- 13.19. Статична складність  
<https://eolymp.com/uk/problems/1073>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 14. Черги та дек. Їхнє застосування.

### Контрольні запитання

- 14.1. Яка структура даних називається чергою?
- 14.2. Наведіть основні операції для роботи з чергою.
- 14.3. Наведіть приклади реалізації черги. Яка додаткова структура даних використовується для реалізації черги як рекурсивної структури даних?
- 14.4. Яка структура даних називається деком (чергою з двома кінцями або двосторонньою чергою)? У чому її відмінність від черги?
- 14.5. Наведіть основні операції для роботи з двосторонньою чергою.
- 14.6. У чому полягає ідея алгоритму реалізації двосторонньої черги як рекурсивної структури? Яка додаткова структура даних при цьому використовується?
- 14.7. Яка структура даних називається пріоритетною чергою?

### Завдання для аудиторної роботи

- 14.1. Проста черга  
<https://eolymp.com/uk/problems/6125>  
*Вказівка: реалізацію здійсніть на базі вбудованого списку або масиву.*
- 14.2. Черга необмеженого розміру  
<https://eolymp.com/uk/problems/6127>  
*Вказівка: реалізацію черги здійсніть як рекурсивну структуру.*
- 14.3. Простий дек  
<https://eolymp.com/uk/problems/6128>  
*Вказівка: реалізацію здійсніть на базі вбудованого списку або масиву.*
- 14.4. Задача Йосифа Флавія  
<https://eolymp.com/uk/problems/971>  
*Вказівка: для розв'язання задачі використайте структуру даних черга або двостороння черга реалізовану у попередніх задачах.*

### Завдання для самостійної роботи

- 14.5. Черга з захистом від помилок  
<https://eolymp.com/uk/problems/6126>

- 14.6. Дек необмеженого розміру  
<https://eolymp.com/uk/problems/6130>  
*Вказівка: реалізацію здійсніть як рекурсивну структуру.*
- 14.7. Гра у п'яницю  
<https://eolymp.com/uk/problems/4005>
- 14.8. Варварські племена  
<https://eolymp.com/uk/problems/1549>

#### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 14.9. Дек з захистом від помилок  
<https://eolymp.com/uk/problems/6129>
- 14.10. Деки на 6 мегабайтах  
<https://eolymp.com/uk/problems/3161>
- 14.11. Іосиф повторюється  
<https://eolymp.com/uk/problems/1515>

#### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 14.12. Мінімум в черзі  
<https://eolymp.com/uk/problems/694>
- 14.13. Сорткування чергами  
<https://eolymp.com/uk/problems/2510>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 15. Зв'язні списки. Їхнє застосування

### Контрольні запитання

- 15.1. Яка структура даних називається однозв'язним списком? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.
- 15.2. Яка структура даних називається двозв'язним списком? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.
- 15.3. Яка структура даних називається кільцевим списком? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.
- 15.4. Яка структура даних називається списком з поточним елементом? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.

### Завдання для аудиторної роботи

- 15.1. Реалізуйте структуру даних зв'язний список з поточним елементом.  
Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

перевіряє чи список порожній.

```
def reset()
```

робить перший елемент списку, поточним.

```
def next()
```

перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def current()
```

повертає навантаження поточного елемента. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def insert_after(item):
```

вставляє новий елемент у список після поточного.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 15.2. Реалізуйте структуру даних зв'язний список з поточним елементом та реалізуйте додаткові операції для роботи зі списком. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def reset()
```

Робить перший елемент списку, поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елемента. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def insert_after(item):
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

```
def insert_before(item)
```

Вставляє новий елемент у список перед поточним.

```
def delete()
```

Видаляє поточний елемент. Поточним при цьому стає наступний елемент, що йшов у списку після поточного. Якщо елемент, що видаляється був у списку останнім, то поточним стає передостанній елемент цього списку. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def damp():
```

Повертає масив у якому записані всі елементи поточного списку.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task2>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте задані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

- 15.3. Реалізуйте структуру даних двобічно зв'язний список з поточним елементом. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def set_first()
```

Робить перший елемент списку поточним.

```
def set_last()
```

Робить останній елемент списку поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def prev()
```

Перейти до попереднього елемента – робить поточним елементом елемент списку, що йде перед поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є першим у списку..

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елемента. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def insert_after(item):
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

```
def insert_before(item)
```

Вставляє новий елемент у список перед поточним.

```
def delete()
```

Видаляє поточний елемент. Поточним при цьому стає наступний елемент, що йшов у списку після поточного. Якщо елемент, що видаляється був у списку останнім, то поточним стає передостанній елемент цього списку. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task3>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

- 15.4. Реалізуйте структуру даних двобічно зв'язний список з поточним елементом та реалізуйте додаткові операції для роботи зі списком. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def set_first()
```

Робить перший елемент списку поточним.

```
def set_last()
```

Робить останній елемент списку поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення StopIteration, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def prev()
```

Перейти до попереднього елемента – робить поточним елементом елемент списку, що йде перед поточним. Породжує

виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є першим у списку..

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елементу.

```
def insert_after(item)
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

```
def insert_before(item)
```

Вставляє новий елемент у список перед поточним.

```
def delete()
```

Видаляє поточний елемент. Поточним при цьому стає наступний елемент, що йшов у списку після поточного. Якщо елемент, що видаляється був у списку останнім, то поточним стає передостанній елемент цього списку.

```
def damp()
```

Повертає масив у якому записані всі елементи поточного списку.

```
def len()
```

Повертає кількість елементів у списку

```
def swap_prev()
```

Міняє місцями поточний елемент списку з попереднім. Гарантується, що виклик функції здійснюється лише, якщо поточний елемент не перший у списку. Поточний елемент лишається не змінним

```
def swap_next()
```

Міняє місцями поточний елемент списку з наступним. Гарантується, що виклик функції здійснюється лише, якщо поточний елемент не останній у списку. Поточний елемент лишається не змінним.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task4>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*



### **Завдання для самостійної роботи**

- 15.5. Виведення зв'язного списку  
<https://eolymp.com/uk/problems/7452>
- 15.6. Обертання списку  
<https://eolymp.com/uk/problems/7453>
- 15.7. Зміна порядку списку  
<https://eolymp.com/uk/problems/7468>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 15.8. Цикл у зв'язному списку  
<https://eolymp.com/uk/problems/7454>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 15.9. Вікна  
<https://eolymp.com/uk/problems/2397>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 16. Дерева. Алгоритми на деревах.

### Контрольні запитання

- 16.1. Яка структура даних називається деревом?
- 16.2. Що таке вершина (вузол) дерева? Які вузли називаються дітьми вузла? Батьками?
- 16.3. Яка вершина дерева називається коренем? Листком?
- 16.4. Які вузли називаються предками для заданого вузла? Які вузли називаються його нащадками?
- 16.5. Що таке шлях в дереві? Як визначається його довжина?
- 16.6. Що таке рівень вузла у дереві? Як визначається висота дерева?
- 16.7. Наведіть способи зображення дерев у пам'яті комп'ютера.
- 16.8. Поясніть ідею алгоритму пошуку в глибину (DFS) на дереві.
- 16.9. Наведіть ідею алгоритму пошуку в ширину (BFS) на дереві.

### Завдання для аудиторної роботи

- 16.1. Список телефонних номерів  
<https://eolymp.com/uk/problems/2303>  
*Вказівка: для розв'язання задачі реалізуйте префіксне дерево.*  
*Вказівка: зверніть увагу, що якщо в довіднику міститься два однакових номери телефону, то такий довідник вважається не сумісним*
- 16.2. LCA offline (Easy)  
<https://eolymp.com/uk/problems/2317>  
*Вказівка: LCA - Найменший спільний предок двох вершин.*

### Завдання для самостійної роботи

- 16.3. Дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/2923>
- 16.4. Корупція  
<https://eolymp.com/uk/problems/2996>
- 16.5. Манкуніанець та кольорове дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/3983>
- 16.6. Дерево гри  
<https://eolymp.com/uk/problems/659>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 16.7.     Спільний предок – 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/3299>
- 16.8.     Дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/3710>
- 16.9.     Дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/4173>
- 16.10.    Дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/4325>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 17. Бінарні дерева. Бінарні дерева пошуку.**

### **Контрольні запитання**

- 17.1. Які дерева називаються бінарними?
- 17.2. Як бінарні дерева зображуються у пам'яті комп'ютера?
- 17.3. Наведіть модифікацію алгоритмів пошуку в глибину та ширину для бінарних дерев
- 17.4. Наведіть означення бінарного дерева пошуку?
- 17.5. Які операції визначені для бінарних дерев пошуку? Яка алгоритмічна складність цих операцій?
- 17.6. Наведіть ідею алгоритмів вставки, пошуку і видалення вузлів для бінарних дерев пошуку.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 17.1. Висота дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/2312>
- 17.2. Кількість елементів  
<https://eolymp.com/uk/problems/2313>
- 17.3. Другий максимум  
<https://eolymp.com/uk/problems/2314>
- 17.4. Виведення листя  
<https://eolymp.com/uk/problems/2316>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 17.5. Дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/468>
- 17.6. Родовідне дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/2242>
- 17.7. Однакові дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/7465>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 17.8. Чорна скринька  
<https://eolymp.com/uk/problems/1225>
- 17.9. Максимальна глибина Бінарного Дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/7463>
- 17.10. Мінімальна глибина Бінарного Дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/7464>

- 17.11. Симетричне дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/7467>
- 17.12. Мінімум та Максимум на дереві  
<https://eolymp.com/uk/problems/4034>
- 17.13. Прямий обхід дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/4036>
- 17.14. Зворотний обхід дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/4038>

**Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 17.15. Прямий, центрований та обернений порядок  
<https://eolymp.com/uk/problems/1513>
- 17.16. Створення двійкового дерева пошуку  
<https://eolymp.com/uk/problems/1516>
- 17.17. Створення бінарного дерева пошуку  
<https://eolymp.com/uk/problems/3326>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 18. Збалансовані бінарні дерева пошуку.**

### **Контрольні запитання**

- 18.1. Що таке збалансоване дерево пошуку?
- 18.2. Яке бінарні дерева пошуку називаються ідеально збалансованими?
- 18.3. Які бінарні дерева називаються AVL- збалансованим?
- 18.4. Що таке AVL-дерево?
- 18.5. Що таке фактор балансу вузла у AVL-дереві?
- 18.6. Наведіть ідею алгоритму малого лівого обертання у AVL-дереві. Малого правого обертання?
- 18.7. Наведіть ідею алгоритму великого лівого обертання у AVL-дереві. Великого правого обертання?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 18.1. Двійкове дерево пошуку 1  
<https://eolymp.com/uk/problems/4146>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 18.2. Збалансоване бінарне дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/7466>
- 18.3. Двійкове дерево пошуку 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4147>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 18.4. Збалансоване дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/2950>
- 18.5. AVL-дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/1846>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 19. Двійкова купа та пріоритетна черга.

### Контрольні запитання

- 19.1. Які дерева називаються повними? Майже повними?
- 19.2. Яка структура даних називається двійковою купою?
- 19.3. Які операції можна здійснювати з двійковою купою? Яка алгоритмічна складність цих операцій?
- 19.4. На базі якої структури даних здійснюється реалізації двійкової купи?
- 19.5. Як здійснюється доступ до синів заданого вузла в двійковій купі? До батька?
- 19.6. Наведіть приклад застосування двійкової купи?

### Завдання для аудиторної роботи

- 19.1. Хіпуй!  
<https://eolymp.com/uk/problems/4039>
- 19.2. Швидке сортування  
<https://eolymp.com/uk/problems/4848>  
*Вказівка: сортування реалізуйте за допомогою алгоритму на базі двійкової купи (heap sort).*

### Завдання для самостійної роботи

- 19.3. Куча чи ні?  
<https://eolymp.com/uk/problems/3737>
- 19.4. Черга з пріоритетами  
<https://eolymp.com/uk/problems/4847>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 19.5. Додати все  
<https://eolymp.com/uk/problems/1228>
- 19.6. ДАС Черга  
<https://eolymp.com/uk/problems/3809>
- 19.7. Це ліва куча?  
<https://eolymp.com/uk/problems/2919>
- 19.8. Нумерація повного дерева  
<https://eolymp.com/uk/problems/402>
- 19.9. Чорний ящик  
<https://eolymp.com/uk/problems/3358>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 20. Дерево відрізків.

### Контрольні запитання

- 20.1. Яка структура даних називається деревом відрізків?
- 20.2. Які основні задачі розв'язують використовуючи дерево відрізків?
- 20.3. Наведіть ідею реалізації структури даних дерево відрізків.

### Завдання для аудиторної роботи

- 20.1. Діма та масив  
<https://eolymp.com/uk/problems/2941>
- 20.2. Діма та великий масив  
<https://eolymp.com/uk/problems/2940>

### Завдання для самостійної роботи

- 20.3. У країні невивчених уроків  
<https://eolymp.com/uk/problems/4481>
- 20.4. У країні невивчених уроків 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4482>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 20.5. Дерево відрізків  
<https://eolymp.com/uk/problems/5952>
- 20.6. Range Variation Query  
<https://eolymp.com/uk/problems/695>
- 20.7. Пригоди Незнайки та його друзів  
<https://eolymp.com/uk/problems/4496>
- 20.8. Загадковий пристрій  
<https://eolymp.com/uk/problems/3318>
- 20.9. Вінні-Пух  
<https://eolymp.com/uk/problems/4487>
- 20.10. Вінні-Пух 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4488>
- 20.11. Троє з Простоквашино  
<https://eolymp.com/uk/problems/4491>
- 20.12. Троє з Простоквашино 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4492>
- 20.13. Добуток на відрізу  
<https://eolymp.com/uk/problems/4082>



- 20.14.   Фенечка  
<https://eolymp.com/uk/problems/5274>
- 20.15.   Діма та масив  
<https://eolymp.com/uk/problems/2939>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 21. Графи. Побудова та властивості.

### Контрольні запитання

- 21.1. Яка структура даних називається графом.
- 21.2. Який зв'язок дерев з графами?
- 21.3. Що таке вершина (вузол) та ребро графа?
- 21.4. У чому різниця між порядком та розміром графа?
- 21.5. Який граф називається орієнтованим? Неорієнтованим?
- 21.6. Які вершини називаються суміжними у неорієнтованому графі? У орієнтованому?
- 21.7. Що таке степінь вершини у неорієнтованому графі? Що таке напівстепінь входу та виходу у орієнтованому графі? Яка вершина називається витокком? Стоком?
- 21.8. Які основні способи зображення графів у пам'яті комп'ютера ви знаєте?

### Завдання для аудиторної роботи

- 21.1. Від матриці суміжності до списку ребер  
<https://eolymp.com/uk/problems/2471>
- 21.2. Від списків суміжності до матриці суміжності  
<https://eolymp.com/uk/problems/3982>
- 21.3. Операції на графі  
<https://eolymp.com/uk/problems/2472>
- 21.4. Підрахунок кількості ребер  
<https://eolymp.com/uk/problems/5072>

### Завдання для самостійної роботи

- 21.5. Кількість висячих вершин 1  
<https://eolymp.com/uk/problems/5080>
- 21.6. Півстепені вершин за списками ребер  
<https://eolymp.com/uk/problems/5075>
- 21.7. Степені вершин за списками ребер  
<https://eolymp.com/uk/problems/5074>
- 21.8. Мультиребра  
<https://eolymp.com/uk/problems/5073>
- 21.9. Повний граф  
<https://eolymp.com/uk/problems/3987>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 21.10. Степені вершин  
<https://eolymp.com/uk/problems/5082>
- 21.11. Від матриці суміжності до списку ребер – 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4766>
- 21.12. Від списку ребер до матриці суміжності – 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4767>
- 21.13. Перевірка на неорієнтовність  
<https://eolymp.com/uk/problems/2470>
- 21.14. Витоки та стоки  
<https://eolymp.com/uk/problems/3986>
- 21.15. Регулярний граф  
<https://eolymp.com/uk/problems/5076>
- 21.16. Напівповний граф  
<https://eolymp.com/uk/problems/5077>
- 21.17. Граф турнір  
<https://eolymp.com/uk/problems/5078>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 21.18. Стародавній рукопис  
<https://eolymp.com/uk/problems/610>
- 21.19. Транзитивність орієнтовного графа  
<https://eolymp.com/uk/problems/5079>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 22. Алгоритми на незважених графах. Обхід в ширину та глибину.**

### **Контрольні запитання**

- 22.1. Що таке маршрут у графі? Що таке шлях у графі? Який шлях називається простим? Що таке довжина шляху на графі?
- 22.2. Який шлях називається циклічним? Що таке цикл в графі?
- 22.3. Наведіть ідею алгоритму пошуку в глибину на графі.
- 22.4. Наведіть ідею алгоритму пошуку в ширину на графі.
- 22.5. Наведіть ідею хвильового алгоритму.
- 22.6. Яким чином знайти найкоротший шлях у незваженому графі?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 22.1. Обхід в ширину  
<https://eolymp.com/uk/problems/2401>
- 22.2. Найкоротший шлях  
<https://eolymp.com/uk/problems/4853>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 22.3. Маршрути в горах  
<https://eolymp.com/uk/problems/122>
- 22.4. Підпал  
<https://eolymp.com/uk/problems/4369>
- 22.5. Отримай дерево  
<https://eolymp.com/uk/problems/978>
- 22.6. Найкоротша відстань  
<https://eolymp.com/uk/problems/4852>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 22.7. Числа  
<https://eolymp.com/uk/problems/4007>
- 22.8. Геть списування!  
<https://eolymp.com/uk/problems/4002>
- 22.9. Покриття шляхами  
<https://eolymp.com/uk/problems/5299>
- 22.10. Рекурсія  
<https://eolymp.com/uk/problems/553>

- 22.11. Ходи ферзем!  
<https://eolymp.com/uk/problems/1098>
- 22.12. Забавна гра  
<https://eolymp.com/uk/problems/4050>
- 22.13. Хрещений батько  
<https://eolymp.com/uk/problems/5366>
- 22.14. База даних  
<https://eolymp.com/uk/problems/3037>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 23. Топологічне сортування. Зв'язність графів.**

### **Контрольні запитання**

- 23.1. Що таке топологічне сортування орієнтованого графа? Наведіть алгоритм.
- 23.2. Як перевірити чи містить граф цикл?
- 23.3. Наведіть означення зв'язності неорієнтованого графа.
- 23.4. Який граф називається не зв'язним? Що таке компонента зв'язності графа?
- 23.5. Наведіть алгоритм пошуку компонент зв'язності неорієнтованого графа.
- 23.6. Чи можна узагальнити поняття зв'язності для орієнтованих графів? Які бувають види такого узагальнення?
- 23.7. Наведіть алгоритм перевірки орієнтованого графа на сильну зв'язність.
- 23.8. Наведіть алгоритм відшукування компонент сильної зв'язності орієнтованого графа.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 23.1. Обхід у глибину  
<https://eolymp.com/uk/problems/4000>
- 23.2. Зв'язність  
<https://eolymp.com/uk/problems/982>
- 23.3. Компоненти зв'язності  
<https://eolymp.com/uk/problems/2269>
- 23.4. Чи є цикл?  
<https://eolymp.com/uk/problems/4004>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 23.5. Зв'язність графа  
<https://eolymp.com/uk/problems/4374>
- 23.6. Топологічне сортування  
<https://eolymp.com/uk/problems/1948>
- 23.7. Компоненти зв'язності - 2  
<https://eolymp.com/uk/problems/4816>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 23.8. Пошта спонсора  
<https://eolymp.com/uk/problems/37>
- 23.9. Ну дуже поширений метод для графів...  
<https://eolymp.com/uk/problems/1977>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 23.10. Міцно зв'язаний син гір  
<https://eolymp.com/uk/problems/1975>
- 23.11. Місто під струмом  
<https://eolymp.com/uk/problems/3269>
- 23.12. Стільниковий зв'язок  
<https://eolymp.com/uk/problems/2003>
- 23.13. Згоряння та компоненти зв'язності  
<https://eolymp.com/uk/problems/4371>
- 23.14. Конденсація графу  
<https://eolymp.com/uk/problems/1947>
- 23.15. Конденсація графа  
<https://eolymp.com/uk/problems/1667>
- 23.16. Сильна зв'язність  
<https://eolymp.com/uk/problems/2403>
- 23.17. Водопровід  
<https://eolymp.com/uk/problems/40>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 24. Застосування теорії графів до пошуку шляхів у лабіринтах.**

### **Контрольні запитання**

- 24.1. Наведіть основні способи зображення лабіринтів у пам'яті комп'ютера.
- 24.2. Чи має якісь відмінності алгоритм пошуку в ширину для лабіринтів від відповідного алгоритму для графів?
- 24.3. Яким чином відбувається знаходження шляху в лабіринті?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 24.1. Площа кімнати  
<https://eolymp.com/uk/problems/4001>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 24.2. Лінії  
<https://eolymp.com/uk/problems/1060>
- 24.3. Видалення клітинок  
<https://eolymp.com/uk/problems/1063>
- 24.4. Вихід з лабіринту  
<https://eolymp.com/uk/problems/4820>
- 24.5. Лабіринт  
<https://eolymp.com/uk/problems/5622>
- 24.6. Уникайте озер  
<https://eolymp.com/uk/problems/1058>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 24.7. Lines (2)  
<https://eolymp.com/uk/problems/1062>
- 24.8. Грядки  
<https://eolymp.com/uk/problems/1065>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 24.9. Помста Лі Чака  
<https://eolymp.com/uk/problems/88>
- 24.10. Підземелля  
<https://eolymp.com/uk/problems/432>



- 24.11. Три держави  
<https://eolymp.com/uk/problems/1061>
- 24.12. Шлях коня  
<https://eolymp.com/uk/problems/1064>
- 24.13. Переміщення коня  
<https://eolymp.com/uk/problems/2820>
- 24.14. Іграшковий лабіринт  
<https://eolymp.com/uk/problems/4452>
- 24.15. Місце зустрічі змінити неможна  
<https://eolymp.com/uk/problems/5069>
- 24.16. Лабіринт  
<https://eolymp.com/uk/problems/7215>
- 24.17. Ліва кнопка миші  
<https://eolymp.com/uk/problems/1092>
- 24.18. Гном і монети  
<https://eolymp.com/uk/problems/7229>
- 24.19. Виведи хом'ячків  
<https://eolymp.com/uk/problems/213>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 25. Алгоритми на зважених графах.

### Контрольні запитання

- 25.1. Що таке вага ребра графа? Який граф називається зваженим?
- 25.2. Наведіть ідею алгоритму Беллмана-Форда для відшукування найкоротшого шляху у зваженому графі.
- 25.3. Яким чином можна оптимізувати алгоритм Беллмана-Форда?
- 25.4. Наведіть ідею алгоритму Дейкстри для відшукування найкоротшого шляху у зваженому графі.
- 25.5. Які переваги має алгоритм Дейкстри над алгоритмом Беллмана-Форда? Які недоліки?

### Завдання для аудиторної роботи

- 25.1. Нехай задано орієнтований зважений граф.  
Знайдіть довжину найкоротшого шляху між двома заданими вузлами цього графа.  
Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init(vertices, edges)
```

Викликається один раз на початку виконання програми. vertices, edges – відповідно кількість вершин та ребер у графі.

```
def addEdge(source, destination, weight)
```

Додає ребро графа, що з'єднує вершини source та destination. weight – вага ребра.

```
def findDistance(start, end)
```

Знаходить та повертає довжину найкоротшого шляху, між двома заданими вершинами графа. Якщо шляху між цими вершинами не існує – повертає значення -1.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L25/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

Вказівка: Використайте алгоритм Беллмана-Форда.

- 25.2. Нехай задано орієнтований зважений граф.  
Знайдіть найкоротший шлях між двома заданими вузлами цього графа.  
Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init(vertices, edges)
```

Викликається один раз на початку виконання програми.  
Параметри vertices та edges – кількість вершин та ребер у графі відповідно.

```
def addEdge(source, destination, weight)
```

Додає ребро графа, що з'єднує вершини source та destination.  
weight – вага ребра.

```
def getWay(start, end)
```

Знаходить найкоротший шлях, між двома заданими вершинами графа. Повертає список вершин шляху start та end або порожній список, якщо шляху між цими вершинами не існує. Якщо таких шляхів існує кілька – виведіть будь-який з них.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L25/task2>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте задані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

Вказівка. Відшукування найкоротшого шляху здійсніть використовуючи алгоритм Дейкстри. Для цього скористайтеся класом PriorityQueue – пріоритетна черга, вихідний код якого розташований за посиланням:

[github.com/krenevych/algo/blob/master/labs/L25/PriorityQueue.py](https://github.com/krenevych/algo/blob/master/labs/L25/PriorityQueue.py).

### Завдання для самостійної роботи

- 25.3. Алгоритм Дейкстри  
<https://eolymp.com/uk/problems/1365>
- 25.4. Найкоротший шлях  
<https://eolymp.com/uk/problems/4856>
- 25.5. Червякові діри  
<https://eolymp.com/uk/problems/1108>
- 25.6. Заправки  
<https://eolymp.com/uk/problems/1388>

- 25.7. Автобуси  
<https://eolymp.com/uk/problems/1389>
- 25.8. Форд-Беллман  
<https://eolymp.com/uk/problems/1453>
- 25.9. Лабіринт знань  
<https://eolymp.com/uk/problems/1454>
- 25.10. Цикл  
<https://eolymp.com/uk/problems/1455>
- 25.11. Ліфти  
<https://eolymp.com/uk/problems/2209>
- 25.12. Зміна сценарію  
<https://eolymp.com/uk/problems/7710>
- 25.13. Слово спонсора  
<https://eolymp.com/uk/problems/34>

#### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 25.14. Флойд - 1  
<https://eolymp.com/uk/problems/974>
- 25.15. Флойд  
<https://eolymp.com/uk/problems/975>
- 25.16. Флойд - існування  
<https://eolymp.com/uk/problems/976>
- 25.17. Відстань між вершинами  
<https://eolymp.com/uk/problems/625>
- 25.18. Доставка кефірчика  
<https://eolymp.com/uk/problems/4006>
- 25.19. Найкоротші шляхи  
<https://eolymp.com/uk/problems/2968>
- 25.20. Середня відстань  
<https://eolymp.com/uk/problems/1670>

#### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 25.21. Складний тест  
<https://eolymp.com/uk/problems/626>
- 25.22. Мандри  
<https://eolymp.com/uk/problems/2267>
- 25.23. Альтернативні шляхи  
<https://eolymp.com/uk/problems/4637>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 26. Алгоритм Прима побудови каркасного дерева.**

### **Контрольні запитання**

- 26.1. Що таке кістякове (або каркасне) дерево? Яке кістякове дерево називається мінімальним?
- 26.2. Наведіть ідею алгоритму Прима.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 26.1. Мінімальний каркас  
<https://eolymp.com/uk/problems/981>
- 26.2. Пазл Юрського періоду  
<https://eolymp.com/uk/problems/9876>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 26.3. Дорога  
<https://eolymp.com/uk/problems/6576>
- 26.4. День Об'єднання  
<https://eolymp.com/uk/problems/2967>
- 26.5. Підземні кабелі  
<https://eolymp.com/uk/problems/1387>
- 26.6. Арктична мережа  
<https://eolymp.com/uk/problems/10203>
- 26.7. Автомагістралі  
<https://eolymp.com/uk/problems/10205>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 26.8. Мінімальний каркас  
<https://eolymp.com/uk/problems/3835>  
*Зауваження: граф містить мультиребра.*

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 26.9. Стаціонарна телефона мережа  
<https://eolymp.com/uk/problems/7531>
- 26.10. ACM змагання і порушення зв'язку  
<https://eolymp.com/uk/problems/1107>

## Список літератури та додаткових джерел

1. **Кренивч А.П.** Алгоритми та структури даних. Підручник. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2021. – 200 с.
2. **Eolymp** [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: [eolymp.com](https://eolymp.com).
3. **Код тестових програм** [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: [github.com/krenevych/algo](https://github.com/krenevych/algo).
4. Bruno R. Preiss. Data Structures and Algorithms with Object-Oriented Design Patterns in Python / Bruno R. Preiss., 2003. – 566 с.
5. Problem Solving with Algorithms and Data Structures using Python [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://runestone.academy/runestone/books/published/pythonds/index.html>.
6. Kent D. Lee. Data Structures and Algorithms with Python / Kent D. Lee, Steve Hubbard., – Springer, 2015. – 363 с.
7. Donald E. Knuth. Volume 1. Fundamental Algorithms, Third Edition (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1997), xx+650pp. ISBN 0-201-89683-4
8. Donald E. Knuth. Volume 2 Seminumerical Algorithms, Third Edition (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1997), xiv+762pp. ISBN 0-201-89684-2
9. Donald E. Knuth. Volume 3. Sorting and Searching, Second Edition (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1998), xiv+780pp.+foldout. ISBN 0-201-89685-0