

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КРЕНЕВИЧ А.П.  
КЛЕВЦОВСЬКИЙ А.В.

**Методичні вказівки  
до лабораторних занять із дисципліни  
«Алгоритми і структури даних»**

для студентів механіко-математичного факультету

Київ – 2020

УДК 519.942+550

Рецензенти:  
доктор фіз.-мат. наук, професор  
доктор фіз.-мат. наук,

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного  
факультету  
(протокол № \_\_ від \_\_ \_\_\_\_\_ 202\_\_ року)*

**Крєневич А.П.**

Методичні вказівки до лабораторних занять із дисципліни «Алгоритми і структури даних» для студентів механіко-математичного факультету / А. П. Крєневич, А. В. Клевцовський. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2020. – \_\_\_\_ с.

Посібник містить перелік завдань для самостійної роботи з дисципліни «Алгоритми і структури даних», що викладається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він містить завдання для засвоєння основних понять цього курсу, таких як рекурентні співвідношення, рекурсія, аналіз складності алгоритмів, лінійні рекурсивні структури даних, графи, дерева, динамічне програмування тощо.

Для студентів механіко-математичного факультету та викладачів, які проводять заняття з курсу «Алгоритми і структури даних».

## **ЗМІСТ**

<b>ВСТУП.....</b>	<b>5</b>
<b>ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ .....</b>	<b>6</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ. ЧАС ВИКОНАННЯ. ....</b>	<b>8</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ. АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА СКЛАДНОСТІ АЛГОРИТМІВ. ....</b>	<b>10</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. ЛІНІЙНИЙ ТА БІНАРНИЙ ПОШУК.....</b>	<b>16</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. РОЗВ’ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ БІЕКЦІЇ. ....</b>	<b>20</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. БІНАРНИЙ ПОШУК ПО ВІДПОВІДІ. ....</b>	<b>22</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. ХЕШУВАННЯ ТА ХЕШ-ТАБЛИЦІ.....</b>	<b>25</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7. ХЕШ-ТАБЛИЦІ.....</b>	<b>29</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8. СОРТУВАННЯ – АЛГОРИТМИ ЗІ СКЛАДНІСТЮ <math>N^2</math>. .....</b>	<b>30</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9. СОРТУВАННЯ – ШВИДКІ АЛГОРИТМИ.....</b>	<b>33</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10. РЕКУРСІЯ, ПОВНИЙ ПЕРЕБІР, МЕТОД «РОЗДІЛЯЙ І ВОЛОДАРЮЙ». ....</b>	<b>36</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11. РЕКУРСІЯ, ПОВНИЙ ПЕРЕБІР, МЕТОД «РОЗДІЛЯЙ І ВОЛОДАРЮЙ». ....</b>	<b>41</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12. СТЕК – БАЗОВІ АЛГОРИТМИ. ....</b>	<b>42</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 13. СТЕК ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ. ....</b>	<b>43</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 14. ЧЕРГИ ТА ДЕК. ЇХНЕ ЗАСТОСУВАННЯ. ....</b>	<b>45</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 15. ЗВ’ЯЗНІ СПИСКИ. ЇХНЕ ЗАСТОСУВАННЯ .....</b>	<b>47</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 16. ДЕРЕВА. АЛГОРИТМИ НА ДЕРЕВАХ. ....</b>	<b>53</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 17. БІНАРНІ ДЕРЕВА. БІНАРНІ ДЕРЕВА ПОШУКУ. ....</b>	<b>55</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 18. ЗБАЛАНСОВАНІ БІНАРНІ ДЕРЕВА ПОШУКУ. ....</b>	<b>57</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 19. ДВІЙКОВА КУПА ТА ПРИОРИТЕТНА ЧЕРГА. ....</b>	<b>58</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 20. ДЕРЕВО ВІДРІЗКІВ. ....</b>	<b>59</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 21. ГРАФИ. ПОБУДОВА ТА ВЛАСТИВОСТІ. ....</b>	<b>61</b>

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 22. АЛГОРИТМИ НА НЕЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ. ОБХІД В ШИРИНУ ТА ГЛИБИНУ. ....	63
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 23. ТОПОЛОГІЧНЕ СОРТУВАННЯ. ЗВ'ЯЗНІСТЬ ГРАФІВ. ....	65
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 24. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДО ПОШУКУ ШЛЯХІВ У ЛАБІРИНТАХ. ....	67
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 25. АЛГОРИТМИ НА ЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ .....	69
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 26. АЛГОРИТМ ПРИМА ПОБУДОВИ КАРКАСНОГО ДЕРЕВА.....	71
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ТА ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ .....	72

## **ВСТУП**

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

1. Основна ціль лабораторної роботи довести викладачу, що студент засвоїв матеріал на достатньому рівні.
2. Кожна лабораторна роботи містить
  - a. перелік контрольних запитань, що стосуються теоретичного матеріалу;
  - b. варіанти індивідуальних/групових завдань лабораторних робіт для практичного виконання;
  - c. посилання на допоміжну літературу для закріплення теоретичного матеріалу і стане в нагоді під час виконання практичних завдань.
3. На вибір студентів надано перелік практичних завдань по кожній темі, серед яких вони мають можливість самостійно вибрати бажаний варіант. Обраний номер завдання студенти записують у спеціальний хмарний документ, наданий викладачем, ціль якого рівномірно розподілити завдання між студентами групи. Кілька студентів однієї групи, що можуть обрати один варіант не може перевищувати 2, у випадку самостійної роботи, та 3-х, у випадку роботи у команді.
4. Кожна лабораторна робота оформлюється у паперовому та електронному вигляді.
5. Паперове оформлення здійснюється за допомогою текстового процесору Word (чи аналогічного) або редактора презентацій PowerPoint (чи аналогічного) та має містити такі частини:
  - a. Титульний аркуш, що містить назву навчальної дисципліни, номер лабораторної роботи, номер варіанту, ПІБ студента (студентів, якщо спільна лабораторна робота), що виконав роботу, спеціальність, курс, номер групи.
  - b. Умову задачі. Якщо задача береться з електронних джерел, то вказати посилання на задачу. Умова задачі має містити приклади вхідних та вихідних даних.
  - c. Аналіз задачі та опис алгоритму, яким пропонується розв'язувати задачу.
  - d. Приклад роботи алгоритму на модельному прикладі (взятому з умови задачі або придуманому самостійно).
  - e. Програмну реалізацію (основні моменти).
  - f. Висновки: якщо робота програми перевірялася за допомогою електронних систем, то обов'язково вказати посилання на систему перевірки разом з задачею (наприклад, <https://www.e-olymp.com/uk/problems/3966>), логін (логіни)

виконавців лабораторної роботи та результат перевірки (наприклад, 100%). Якщо результат не 100%, то обов'язково зазначити у чому проблема (не пройшов, по часу, помилки виконання, тощо).

6. Електронна частина, складається з
  - а. Файлу (файлів), з яких друкується паперовий примірник лабораторної роботи.
  - б. Файлів вихідного коду програми, що розв'язує поставлену задачу.
  - с. Файлів вхідних даних (за необхідності) – текстові файли, що містять вхідні дані задачі. Вони мають бути названі згідно з правилом – «input.txt» (якщо один файл) та «input01.txt», «input02.txt» і т.д. – якщо кілька файлів вхідних даних.
7. Електронний варіант надсилається на електронну адресу викладача, що викладає практичні заняття не пізніше ніж напередодні лабораторного заняття, на якому студент має її захищати.
8. Захист лабораторної роботи здійснюється студентом (студентами) одним з двох способів:
  - а. Індивідуальна співбесіда з викладачем, протягом якої викладач ставить запитання по теоретичному матеріалу теми лабораторної роботи (з переліку контрольних запитань), вислуховує ідею алгоритму, що розв'язує поставлену задачу, знайомиться з деталями реалізації алгоритму та перевіряє коректність розв'язку.
  - б. Презентація розв'язаної задачі з усіма деталями реалізації для всіх студентів навчальної групи. У цьому випадку роздрукований варіант не вимагається.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. Складність алгоритмів. Час виконання.

### Контрольні запитання

- 1.1. Наведіть означення алгоритму.
- 1.2. Що таке комп'ютерна програма? Що таке реалізація алгоритму?
- 1.3. У чому полягає аналіз алгоритму?
- 1.4. Що таке елементарна операція? Наведіть кілька прикладів.
- 1.5. Що таке час виконання програми?
- 1.6. Що означає фраза: час виконання програми сталий/логарифмічний/лінійний/поліноміальний/експоненціальний?
- 1.7. Наведіть означення таких понять як найкращий/найгірший час виконання програми. Що таке час виконання програми в середньому.

### Завдання для аудиторної та самостійної роботи

- 1.1. Визначте час виконання фрагментів програм заданих нижче

a)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     k += 1
4     i += 1
```

b)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     i = i * 2
```

c)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     if i % 2 == 0:
4         k += 1
5     i += 1
```

d)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = n
4     while j > 0:
5         k += 1
6         j -= 1
7     i += 1
```

e)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = i
4     while j < n:
5         k += 1
6         j += 1
7     i += 1
```

f)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = n
4     while j != 0:
5         k += 1
6         j //= 3
7     i += 1
```

- 1.2. Визначте час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення



- a)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ T(n-1) + 1, & n \geq 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2T(n-1) + 1, & n \geq 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ T(\lfloor n/a \rfloor) + 1, & n \geq 2. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 2T(\lfloor n/a \rfloor) + 1, & n \geq 2. \end{cases}$

### Завдання для самостійної роботи

1.3. Визначте час виконання фрагментів програм заданих нижче

a)

```
1 k += 1
2 i = n
3 while i > 0:
4     i -= 1
```

b)

```
1 i = n
2 while i > 1:
3     k += 1
4     i //= 2
```

c)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = 0
4     while j < n:
5         k += 1
6         j += 2
7     i += 2
```

d)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = 0
4     while j = i * i:
5         k += 1
6         j += 1
7     i += 1
```

e)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     j = 1
4     while j < n:
5         k += 1
6         j *= 2
7     i *= 2
```

f)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     j = i
4     while j < n:
5         k += 1
6         j *= 2
7     i *= 2
```

1.4. Визначте час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n \leq a, a > 0; \\ T(n-a) + 1, & n \geq a. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2T(n-1) + n, & n \geq 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 2T(\lfloor n/a \rfloor) + n, & n \geq 2. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + n^2, & n \geq 1, a \geq 2. \end{cases}$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. Складність алгоритмів. Асимптотична оцінка складності алгоритмів.

### Контрольні запитання

- 2.1. Наведіть означення О-оцінки: що означає  $f = O(g)$ ?
- 2.2. Наведіть означення Омега-оцінки: що означає  $f = \Omega(g)$ ?
- 2.3. Наведіть означення Тета-оцінки: що означає  $f = \Theta(g)$ ?
- 2.4. Наведіть основні правила визначення асимптотичної поведінки часу виконання.

### Завдання для аудиторної роботи

- 2.1. Нехай  $f(n) = 3n^2 - n + 4$ . Користуючись означенням покажіть що

а)  $f(n) = O(n^2)$ ,                      б)  $f(n) = \Omega(n^2)$ .

- 2.2. Для кожної пари функцій  $f(n)$  та  $g(n)$ , зазначених у таблиці визначте яке із співвідношень має місце  $f(n) = O(g(n))$  чи  $g(n) = O(f(n))$

$f(n)$	$g(n)$
$10n$	$n^2 - 10n$
$n^3$	$n^2 \log n$
$n \log n$	$n + \log n$
$\log n$	$\sqrt[k]{n}$
$\ln n$	$\log n$
$\log(n + 1)$	$\log n$
$\log \log n$	$\log n$
$2^n$	$10^n$
$n^m$	$m^n$
$\cos(n\pi/2)$	$\sin(n\pi/2)$
$n^2$	$(n \cos n)^2$

- 2.3. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у термінах  $O$ –«великого» для функції:

```
def f(n):  
    k = 0  
    i = n - 1  
    while i != 0:  
        k += 1.0 / i  
        i = i / 2  
    return k
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа  $n$ ?

2.4. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у термінах  $O$ –«великого» для функції:

```
def f(n):  
    i = n - 1  
    while i != 0:  
        j = 0  
        while j < n:  
            j += 1  
        i = i / 2
```

2.5. Знайдіть асимптотичний час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ 2T(n-1) + O(1), & n \geq 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ 2T(n-1) + O(n), & n \geq 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(1), & n \geq 1. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n), & n \geq 1. \end{cases}$

2.6. Чи можна описати алгоритм для кожної з задач підрахунку суми наведених нижче, асимптотична складність яких буде  $O(1)$ ? Якщо так, то наведіть фрагмент такої програми.

a)  $\sum_{i=0}^n i$

b)  $\sum_{i=0}^n a^i$

c)  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i, |a| \leq 1$

### Завдання для самостійної роботи

2.7. Нехай  $f(n) = 3n^2 - n + 4$  та  $g(n) = n \log n + 5$ . Покажіть що

$$f(n) + g(n) = O(n^2).$$

2.8. Нехай  $f(n) = \sqrt{n}$  та  $g(n) = \log n$ . Покажіть що

$$f(n) + g(n) = O(\sqrt{n}).$$

2.9. Припустимо, що  $n, m$  та  $k$  невід'ємні цілі числа і методи  $e, f, g$  та  $h$  мають такі характеристики:

- Час виконання у найгіршому випадку методу  $e(n, m, k) \in O(1)$  і повертає значення з проміжку від 1 до  $(n + m + k)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $f(n, m, k) \in$

$O(n + m)$ .

- Час виконання у найгіршому випадку методу  $g(n, m, k)$  є  $O(m + k)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $h(n, m, k)$  є  $O(n + k)$ .

Визначте асимптотичні оцінки виконання програм у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для фрагментів програм зазначених нижче:

- a) 

```
1 f(n, 10, 0)
2 g(n, m, k)
3 h(n, m, 1000000)
```
- b) 

```
1 for i in range(e(n, 10, 100)):
2     f(n, 10, 0);
```
- c) 

```
1 for i in range(n):
2     f(n, m, k);
```
- d) 

```
1 for i in range(n):
2     for j in range(i, n):
3         f(n, m, k);
```

2.10. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для функції:

```
def f(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i
    return sum
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа  $n$ ? Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

2.11. Нехай  $f(n)$  функція визначена у праві 2.10. Розглянемо функцію

```
def g(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i + f(i)
    return sum
```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції  $g(n)$  у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого». Що є результатом виконання функції  $g(n)$  для заданого натурального числа  $n$ . Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

2.12. Нехай  $f(n)$  функція визначена у вправі 2.10, а функція  $g(n)$  – у вправі 2.11. Розглянемо функцію

```
def h(n):
    return f(n) + g(n)
```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції  $h(n)$  у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого». Що є результатом її виконання для заданого натурального числа  $n$ . Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

2.13. Знайдіть асимптотичний час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ T(n-1) + O(1), & n \geq 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = a, a > 1; \\ T(n-a) + O(1), & n \geq a+1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(1), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = a, a > 1; \\ aT(n-a) + O(1), & n \geq a+1. \end{cases}$
- e)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(n), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$
- f)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(n), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$
- g)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + O(1), & n \geq 1, a \geq 2. \end{cases}$
- h)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + O(n), & n \geq 1, a \geq 2. \end{cases}$

2.14. Доведіть співвідношення

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sum_{i=0}^n i = O(n) & \text{b)} \quad \sum_{i=0}^n i^2 = O(n^2) & \text{c)} \quad \sum_{i=0}^n i^3 = O(n^4) \\ \text{d)} \quad \sum_{i=0}^n a^i = O(n) & \text{e)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i} = O(n) & \text{f)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2} = O(n^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{g)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i!} = & \text{h)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^m} = & \text{i)} \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^i} = \\ & = O(n) & = O(nm) \quad = O(n^2) \end{array}$$

Зауваження. Для доведення співвідношення можна запропонувати алгоритм обчислення виразу зазначеного у лівій частині рівності, що має вказану у правій частині рівності асимптотичну оцінку часу виконання програми.

2.15. Чи можна описати алгоритм для кожної з задач підрахунку суми наведених нижче, асимптотична складність яких буде  $O(n)$ ? Якщо так, то наведіть фрагмент такої програми.

a)  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ , ( $n$  коренів);

b)  $y = x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + \dots + x^4 + x^2 + 1$ ;

c)  $\left(1 + \frac{1}{1^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)$ ;

d)  $1 + \sin x + \dots + \sin^n x$ .

2.16. Опишіть функції натурального аргументу  $n$ , час виконання яких у найгіршому випадку має асимптотику:

a) $O(n)$	b) $O(n^2)$	c) $O(n^3)$
d) $O(\log n)$	e) $O(n \log n)$	f) $O(2^n)$

2.17. Опишіть функції натуральних аргументів  $n$  та  $m$ , час виконання яких у найгіршому випадку має асимптотику:

a) $O(n + m)$	b) $O(m \log n)$	c) $O(n^m)$
---------------	------------------	-------------

2.18. Натуральне число називається паліндромом, якщо його запис читається однаково зліва направо і справа наліво (наприклад, 1, 393, 4884). Скласти програму, що визначає, чи є задане натуральне число  $n$  паліндромом асимптотична складність якої  $O(n)$ , де  $n$  – кількість цифр у числі.

2.19. Числами трибоначчі називається числова послідовність  $\{T_k: k \geq 0\}$ , задана рекурентним співвідношенням третього порядку:

$$T_0 = 0, T_1 = T_2 = 1, T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Опишіть функції для обчислення  $T_n$  за допомогою рекурентного співвідношення та використовуючи рекурсію. Обчисліть асимптотичну складність кожного з варіантів. Порівняйте абсолютний час виконання (у секундах) обох варіантів для знаходження  $T_{10}, T_{20}, T_{50}$ .

2.20. Послідовністю Падована називається числова послідовність  $\{P_k: k \geq 0\}$ , задана рекурентним співвідношенням третього порядку:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, P_k = P_{k-1} + P_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Опишіть функції для обчислення  $P_n$  за допомогою рекурентного співвідношення та використовуючи рекурсію. Обчисліть асимптотичну складність кожного з варіантів. Порівняйте абсолютний час виконання (у секундах) обох варіантів для знаходження  $P_{10}, P_{20}, P_{50}$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3.

### Лінійний та бінарний пошук.

#### Контрольні запитання

- 3.1. Які задачі допомагає розв'язати лінійний пошук? Наведіть алгоритм лінійного пошуку та його складність (у найгіршому випадку).
- 3.2. У чому полягає цілочисельний бінарний пошук? Для яких структур даних він може бути реалізований? Яка складність бінарного пошуку? Яка перевага бінарного пошуку у порівнянні з лінійним пошуком? Наведіть алгоритм бінарного пошуку.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 3.1. Одиниці

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/622>

На уроках інформатики вас, напевно, вчили переводити числа з одних систем числення у інші і виконувати інші подібні операції. Прийшов час продемонструвати ці знання. Знайдіть кількість одиниць у двійковому запису заданого числа.

*Вхідні дані*

У вхідному файлі міститься єдине ціле число  $n$  ( $0 \leq n \leq 2000000000$ ).

*Вихідні дані*

Вихідний файл повинен містити одне число — кількість двійкових одиниць у запису числа  $n$ .

*Вхідні дані #1*

5

*Вихідні дані #1*

2

*Вхідні дані #2*

7

*Вихідні дані #2*

3

*Зауваження. Скористайтесь побітовими операціями.*

- 3.2. Реалізуйте інтерфейс для роботи з англійсько-українським словником та швидким пошуком перекладу. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності двох функцій описаних нижче. Функція

```
def addTranslation(eng, translation)
```

додає до словника англійське слово `eng` та його переклад `translation`. Пари `(eng, translation)` приходяться у порядку, що відповідає лексикографічному порядку. Функція



```
def find(eng)
```

повертає переклад слова `eng` зі словника, якщо воно міститься у словнику, або порожній рядок у іншому разі.

*Тестова програма `main.py`, файл `user.py`, що містить вищезгаданий інтерфейс та вхідні дані (текстові файли) розташовані за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task2>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку та реалізуйте згаданий вище інтерфейс (файл `user.py`). Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

- 3.3. Реалізуйте алгоритм пошуку номеру найпершого входження до заданого масиву, заданого числа `x`. Якщо заданий елемент відсутній у списку - поверніть номер першого елементу, що більший за число `x`:

```
array[i] >= x
```

Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def bsearch_leftmost(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task3>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

### Завдання для самостійної роботи

- 3.4. Циклічні зсуви  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/27>
- 3.5. Сортування за зростом  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3607>  
Вказівка: Використайте лінійний пошук для підрахунку відповіді.
- 3.6. Затятий колекціонер метеликів  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3966>
- 3.7. Мутанти  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3970>

Вказівка: Використайте бінарний пошук для знаходження відповіді для кожного вказаного інтервалу.

### Додаткові завдання для самостійної роботи

- 3.8. Реалізуйте алгоритм пошуку номеру останнього входження до заданого масиву заданого числа  $x$ . Якщо такий елемент відсутній у списку - поверніть номер останнього елементу, що менший за число  $x$ . Зауважимо, що якщо всі елементи масиву менші за шукане число, програма має повертати значення  $-1$  (мінус один).

$\text{array}[i] \geq x$

Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def bsearch_rightmost(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task8>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 3.9. Знайдіть кількість входжень заданого числа  $x$  до масиву цілих чисел `array`. Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def counter(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L03/task9>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 3.10. Реалізуйте алгоритм лінійного пошуку всіх елементів списку, що є степенями двійки та визначте асимптотичну складність отриманого алгоритму.

- 3.11. Припустимо, що список містить елементи, для яких визначена операція  $\leq$  (менше або рівно) і елементи у цьому списку

розташовані у порядку зростання. Скориставшись цією властивістю списку, запропонуйте алгоритм лінійного пошуку та оцініть його час виконання. Чи буде такий алгоритм оптимальнішим ніж класичний лінійний пошук?

- 3.12. Реалізуйте алгоритм бінарного пошуку з використанням рекурсії.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4.

### Розв'язання рівнянь методом бієкції.

#### Контрольні запитання

- 4.1. Для чого використовується дійсний бінарний пошук? Наведіть приклад задачі. Чи є відмінність у реалізації дійсного бінарного пошуку від цілочисельного? Які основні підходи застосовуються для моменту завершення пошуку? У чому їхні переваги та недоліки у порівнянні один з одним? Наведіть алгоритм дійсного бінарного пошуку.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 4.1. Для монотонної на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'яжіть рівняння

$$f(x) = c. \quad (4.1)$$

Реалізацію здійсьніть у вигляді сукупності двох функцій описаних нижче. Функція

```
def solve(f, c, a, b):
```

Для неспадної на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'язує рівняння (4.1), а функція

```
def solve_decreasing(f, c, a, b)
```

відповідно для незростаючої на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'язує рівняння (4.1). Для визначення моменту завершення пошуку використайте всі три підходи (точність по аргументу, точність по значенню та безпосереднє сусідство двох чисел з плаваючою крапкою). Порівняйте отримані результати.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L04/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

#### Завдання для самостійної роботи

- 4.2. Квадратний корінь  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3968>

- 4.3. Знайдіть найменше  $x \in [0,10]$ , що  
$$f(x) = x^3 + x + 1 > 5$$
- 4.4. На відрізку  $[1.6, 3]$  знайдіть корінь рівняння  
$$\sin x = \frac{x}{3}.$$
- 4.5. На відрізку  $[0,2]$  знайдіть корінь рівняння  
$$x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5.

### Бінарний пошук по відповіді.

#### Контрольні запитання

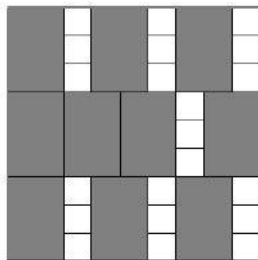
- 5.1. У чому полягає концепція бінарного пошуку по відповіді?

#### Завдання для аудиторної роботи

- 5.1. Дипломи

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3969>

Коли Петя вчився в школі, він часто брав участь в олімпіадах з інформатики, математики та фізики. Так як він був досить здібним хлопчиком і старанно вчився, то на багатьох із цих олімпіад він отримував дипломи. До закінчення школи у нього накопичилося  $n$  дипломів, причому, як виявилось, всі вони мали однакові розміри:  $w$  - в ширину і  $h$  - у висоту.



Зараз Петя навчається в одному з кращих університетів і живе в гуртожитку зі своїми одногрупниками. Він вирішив прикрасити свою кімнату, повісивши на одну зі стін свої дипломи за шкільні олімпіади. Так як до бетонної стіни прикріпити дипломи досить важко, він вирішив купити спеціальну дошку з коркового дерева, щоб прикріпити її до стіни, а до неї - дипломи. Для того, щоб ця конструкція виглядала більш красиво, Петя хоче, щоб була квадратною і займала якомога менше місця на стіні. Кожен диплом повинен бути розміщений строго в прямокутнику  $w$  на  $h$ . дипломи забороняється повертати на 90 градусів. Прямокутники, які відповідають різним дипломам, не повинні мати спільних внутрішніх точок.

Потрібно написати програму, яка обчислить мінімальний розмір сторони дошки, яка буде потрібно Пете для розміщення всіх своїх дипломів.

*Вхідні дані*

Вхідний файл містить три цілих числа  $w$ ,  $h$ ,  $n$  ( $1 \leq w, h, n \leq 10^9$ ).

*Вихідні дані*

У вихідний файл вивести відповідь до сформульованої задачі.

*Вхідні дані #1*

2 3 10

*Вихідні дані #1*

9

5.2. Дуже Легка Задача

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5102>

Сьогодні вранці журі вирішило додати у варіант олімпіади ще одну, Дуже Легку Задачу. Відповідальний секретар оргкомітету надрукував її умову в одному екземплярі, і тепер йому потрібно до початку олімпіади встигнути зробити ще  $n$  копій. У його розпорядженні є два ксерокси, один з яких копіює аркуш за  $x$  секунд, а другий за  $y$ . (Дозволяється використовувати як один ксерокс, так і обидва одночасно. Можна копіювати не лише з оригіналу, але і з копії).

Допоможіть йому вияснити, який мінімальний час для цього потрібно.

*Вхідні дані*

Три натуральних числа  $n$ ,  $x$  та  $y$  ( $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^8$ ,  $1 \leq x, y \leq 10$ ).

*Вихідні дані*

Виведіть одне число – мінімальний час в секундах, необхідний для отримання  $n$  копій.

*Вхідні дані #1*

4 1 1

*Вихідні дані #1*

3

*Вхідні дані #2*

5 1 2

*Вихідні дані #2*

4

**Завдання для самостійної роботи**

5.3. Корови – в стійла

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5149>

5.4. Мотузочки

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3967>

5.5. Морозиво

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4035>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 5.6. Черепаха  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/669>
- 5.7. Рисосховище  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2254>
- 5.8. Роботи  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/161>
- 5.9. Автобус  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6132>



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. Хешування та хеш-таблиці.

### Контрольні запитання

- 6.1. Що таке хешування?
- 6.2. Наведіть приклад хеш-функції.
- 6.3. Наведіть основні характеристики, яким має задовольняти хеш-функція
- 6.4. Що таке колізія хеш-функції?
- 6.5. Яка хеш-функція називається ідеальною?
- 6.6. Наведіть приклад хеш-функції для рядків.
- 6.7. Що таке асоціативний масив?
- 6.8. Яка структура даних називається хеш-таблицею? Які основні операції вона має підтримувати?
- 6.9. У чому полягає процес розв'язання колізій?
- 6.10. Які види хеш-таблиць бувають? Які відмінності між ними?
- 6.11. Яким чином реалізується процес видалення ключів у хеш-таблиці з відкритою адресацією?
- 6.12. Поясніть концепцію методу ланцюжків для розв'язання колізій при реалізації хеш-таблиць.

### Завдання для аудиторної роботи

- 6.1. Реалізуйте інтерфейс асоціативного масиву, ключами якого є цілі числа, а значеннями – рядки. Реалізацію здійсніть як хеш-таблицю з відкритою адресацією у вигляді сукупності функцій описаних нижче функцій. Функція

```
def init()
```

Викликається 1 раз на початку виконання програми. Функція

```
def set(key: int, value: str) -> None
```

встановлює значення value для ключа key. Якщо такий ключ відсутній у структурі – додає пару, інакше змінює значення для цього ключа. Функція

```
def get(key: int) -> str
```

за ключем key повертає значення зі структури (або None, якщо ключ відсутній у структурі). Нарешті функція

```
def delete(key: int) -> None
```

видаляє пару ключ-значення за заданим ключем, якщо такий ключ міститься у таблиці.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 6.2. Розв'яжіть задачу 6.1 реалізуючи хеш-таблицю з розв'язанням колізій методом ланцюжків.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

### Завдання для самостійної роботи

- 6.3. Розглядається бібліотека художніх книг. У бібліотеці може міститися кілька книг одного автора. Реалізуйте каталог для цієї бібліотеки. Інтерфейс, що необхідно реалізувати наведено нижче.

```
def init():
    """ Викликається 1 раз на початку виконання програми. """
    pass

def addBook(author, title):
    """ Додає книгу до бібліотеки.
    :param author: Автор книги
    :param title: Назва книги
    """
    pass

def find(author, title):
    """ Перевірає чи міститься задана книга у бібліотеці.
    :param author: Автор
    :param title: Назва книги
    :return: True, якщо книга міститься у бібліотеці та
             False у іншому разі. """
    return False

def delete(author, title):
    """ Видаляє книгу з бібліотеки.
    :param author: Автор
    :param title: Назва книги
```

```

"""
pass

def findByAuthor(author):
    """ Повертає список книг заданого автора.
    Якщо бібліотека не міститься книг заданого автора,
    то підпрограма повертає порожній список.
    :param author: Автор
    :return: Список книг заданого автора у алфавітному порядку."""
    return []

```

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task3>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням (у тому ж числі папку data разом з усім її вмістом), у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 6.4. Розв'яжіть задачу 6.3 реалізуючи хеш-таблицю з розв'язанням колізій методом ланцюжків.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task4>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням (у тому ж числі папку data разом з усім її вмістом), у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 6.5. Реалізуйте для хеш-таблиці описаної в задачі 6.1 ітеративний протокол для проходження усіх ключів хеш-таблиці. Реалізацію здійсніть як хеш-таблицю з відкритою адресацією у вигляді класу, описаного нижче функцій.

```

class HashTable:

    def __init__(self):
        """ Конструктор """
        pass

    def set(self, key: int, value: str) -> None:
        """ Встановлює значення value для ключа key.
        Якщо такий ключ відсутній у структурі - додає пару,
        інакше змінює значення для цього ключа.
        :param key: Ключ
        :param value: Значення
        """
        pass

```

```

def get(self, key: int):
    """ За ключем key повертає значення зі структури.
    :param key: Ключ
    :return: Значення, що відповідає заданому ключу або None,
    якщо ключ відсутній у структурі.
    """
    return None

def delete(self, key: int) -> None:
    """ Видаляє пару ключ-значення за заданим ключем.
    Якщо ключ у структурі відсутній - нічого не робить.
    :param key: Ключ
    """
    pass

def __iter__(self):
    """ Створює ітератор для проходження хеш-таблиці
    :return: Новий ітератор
    """
    return None

```

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L06/task5>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте усі методи згаданого вище класу, що міститься у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

## **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

### **6.6. Хеш-таблиця**

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7273>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7. Хеш-таблиці.**

### **Контрольні запитання**

- 7.1. Що таке асоціативний масив?
- 7.2. Яка структура даних називається хеш-таблицею? Які основні операції вона має підтримувати?
- 7.3. У чому полягає процес розв'язання колізій?
- 7.4. Які види хеш-таблиць бувають? Які відмінності між ними?
- 7.5. Яким чином реалізується процес видалення ключів у хеш-таблиці з відкритою адресацією?
- 7.6. Запропонуйте алгоритм збільшення слотів хеш-таблиці, що використовує лінійне зондування для розв'язання колізій, для випадку, якщо фактор завантаження таблиці перевищує деякий поріг.
- 7.7. Поясніть концепцію методу ланцюжків для розв'язання колізій при реалізації хеш-таблиць.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 7.1. Англо-латинський словник  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4842>
- 7.2. Перший словник Енді  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1227>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 7.3. Слова  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/131>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 7.4. Чорна скринька  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1225>
- 7.5. Словник нецензурних слів  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1236>
- 7.6. Дешифратор  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2035>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8.

### Сортування – алгоритми зі складністю $n^2$ .

#### Контрольні запитання

- 8.1. Наведіть ідею алгоритму сортування обміном (бульбашкового сортування).
- 8.2. Наведіть ідею алгоритму сортування вибором. У чому його перевага перед алгоритмом сортування обміном?
- 8.3. Наведіть ідею алгоритму сортування вставкою.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 8.1. Реалізуйте алгоритм сортування обміном (бульбашкове сортування). Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив array та сортує його.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 8.2. Модифікуйте алгоритм бульбашкового сортування, реалізований під час виконання задачі 8.1, перевіркою на кожному проході чи відсортований вже масив. Порівняйте час виконання обох програм.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте модифікацію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 8.3. Реалізуйте алгоритм сортування вибором. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив `array` та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередніх задачах.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task3>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 8.4. Реалізуйте алгоритм сортування вставкою. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив `array` та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередніх задачах.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L08/task4>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

### Завдання для самостійної роботи

- 8.5. Сортування бульбашкою  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2663>
- 8.6. Словник  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5089>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 8.7. Бібліотечний метод  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2664>
- 8.8. Сортування часу  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/972>
- 8.9. Градуйований лексикографічний порядок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1130>
- 8.10. Особові справи  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1344>
- 8.11. Хитре сортування

- <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1462>
- 8.12. Метод мінімуму
- <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2662>
- 8.13. Бібліотека
- <https://www.e-olymp.com/ru/problems/4230>



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9.

### Сортування – швидкі алгоритми.

#### Контрольні запитання

- 9.1. Наведіть ідею алгоритму сортування злиттям. Яка його асимптотична складність? Які його особливості?
- 9.2. Наведіть ідею алгоритму швидкого сортування. Яка його асимптотична складність? Які його особливості у порівнянні з іншими алгоритмами сортуванням?

#### Завдання для аудиторної роботи

- 9.1. Реалізуйте алгоритм сортування злиттям. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередній лабораторній роботі.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L09/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 9.2. Реалізуйте швидкий алгоритм сортування QuickSort. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмом сортування вставкою.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L09/task2>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну

папку. Реалізуйте задану вище функцію у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 9.3. Проведіть аналіз швидкодії реалізованих алгоритмів сортування для різних типів та розмірів масивів (не відсортований масив згенерований випадковим чином, масив відсортований за зростанням, масив відсортований за спаданням елементів). Для цього опишіть функції

```
def bubble_sort(array):
    """ Сортвання "Бульбашкою"
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def bubble_sort_optimized(array):
    """ Модифікований алгоритм сортування "Бульбашкою"
    :param array: Масив (список однотипових елементів).
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def selection_sort(array):
    """ Сортвання вибором
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def insertion_sort(array):
    """ Сортвання вставкою
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def merge_sort(array):
    """ Сортвання злиттям
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут

def quick_sort(array):
    """ Швидке сортування
    :param array: Масив (список однотипових елементів)
    :return: None
    """
    pass # TODO: реалізуйте відповідний алгоритм тут
```

кожна з яких отримує на вхід масив array та сортує його відповідним методом.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L09/task3>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції у файлі user.py. Для перевірки запустіть файл main.py.*

#### **Завдання для самостійної роботи**

- 9.4. Сортування  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2321>
- 9.5. Сортування злиттям  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4037>

#### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 9.6. Ультра швидке сортування  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1303>
- 9.7. Станція "Сортувальна"  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1457>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10. Рекурсія, повний перебір, Метод «розділяй і володарюй».

### Контрольні запитання

- 10.1. Які алгоритми називаються алгоритмами повного перебору?
- 10.2. Чи існують загальні методи побудови алгоритмів повного перебору?
- 10.3. Що можна сказати про асимптотичну складність алгоритмів повного перебору?
- 10.4. У чому полягає метод гілок та меж?
- 10.5. У чому полягає метод декомпозиції («розділяй і володарюй»)?

### Завдання для аудиторної роботи

- 10.1. 23 з 5

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1540>

Основна ідея наступна. Пробігаємо по масиву вхідних чисел і беремо окремо кожне число для розгляду, яке буде поточним значенням (не можна взяти нейтральний елемент, бо для операцій  $+$ ,  $-$ ,  $*$  він різний). Далі пробігаємо по тим числам, що залишилися в масиві. Беремо одне з них. Також пробігаємо по можливим операціям  $+$ ,  $-$ ,  $*$  (в даній реалізації використовується цикл по методам `__add__`, `__sub__`, `__mul__` класу `int`, оскільки це “дешевше” ніж використовувати функцію `eval`). Виконуємо відповідну операцію з поточним значенням та продовжуємо рекурсію з вже новим поточним значенням та масивом, у якого на один елемент менше. Рекурсію зупиняємо в тому випадку, коли масив залишився пустий, а поточне значення співпадає з шуканим - 23.

Будемо читувати з вхідного файлу та перетворювати дані в кортеж, поки кортеж не матиме всі нульові елементи. Основну задачу буде виконувати функція `twenty_three`, яка повертає `True`, якщо з даних чисел можна отримати число 23 та `False` інакше. Рекурсію забезпечує функція `_tt`, що приймає поточне значення та кортеж чисел, які залишилось опрацювати.

```
OPS = ("__add__", "__sub__", "__mul__")

def twenty_three(nums):

    def _tt(value: int, nums: tuple):
```

```

        if not nums:
            return value == 23

        for i in range(len(nums)):
            for op in OPS:
                if _tt(getattr(value, op)(nums[i]),
                    nums[:i] + nums[i+1:]) is True:
                    return True

        return any(_tt(nums[i], nums[:i] + nums[i+1:])
            for i in range(len(nums)))

if __name__ == "__main__":
    with open("input.txt") as inp:
        nums = tuple(map(int, inp.readline().split()))
        while any(nums):
            print("Possible" if twenty_three(nums)
                else "Impossible")
            nums = tuple(map(int, inp.readline().split()))

```

## 10.2. Машина арифметика

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1296>

Тут знадобиться глобальна змінна `max_value` для зберігання максимального результату. Для вхідних даних `n` зручно використовувати як рядок, а `m` - ціле число, на яке потрібно розділити `n`. Виберемо 1 як початковий поточний елемент, оскільки він є нейтральним для множення. Пробігаємо по рядку `n` та вибираємо місце, де його потрібно відокремити на дві частини (при цьому враховуючи, що непотрібно пробігати забагато, оскільки `n` можна розділити лише на `m` частин, а якщо символів в рядку `n` менше за `m`, то будуть виконуватись зайві дії). Далі запускаємо рекурсію з поточним значенням, що є добутком старого поточного значення та першої частини рядка, другої частини рядка, так кількістю разів, на яку його залишилось розбити (ця кількість буде на 1 менше). Коли залишається єдине розбиття (`m = 1`) перевіряємо, чи є добуток поточного елемента та підрядка `n` більшим за `max_value`. Якщо так, встановлюємо нове значення для `max_value`. Крім того, згідно методу гілок там меж, можна покращити даний алгоритм. Для цього потрібно додати перевірку чи є добуток поточного елемента та рядка `n` меншим за `max_value`. Якщо це так, дану гілку перевіряти далі немає сенсу.

93%

```
def arithmetic_masha(n: str, m: int):
    """
    :param n: натуральне число
    :param m: кількість частин, на яке розбивається число n
    :return: максимальний добуток
    """
    max_value = 0

    def _am(mult: int, sub_num: str, m: int):
        """
        :param sub_num: підрядок цифр
        :param mult: добуток
        :param m: кількість шматків, на які залишилося розбити
        """
        nonlocal max_value

        value = mult * int(sub_num)
        if value < max_value:
            return
        elif m == 1:
            max_value = value
            return

        for i in range(1, len(sub_num) - m + 2):
            _am(mult * int(sub_num[:i]), sub_num[i:], m - 1)

    _am(1, n, m)
    return max_value

if __name__ == "__main__":
    with open("input.txt") as inp:
        for line in inp:
            n, m = line.split()
            print(arithmetic_masha(n, int(m)))
```

### 10.3. Задача про призначення

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1781>

Будемо зберігати мінімальну можливу вартість призначення в глобальній змінній `min_salary`. Оскільки від порядку визначення призначення вартість не зміниться, беремо першого працівника (перший рядок) в матриці призначень `matr` і перебираємо його вартості призначення (елементи). Далі запускаємо рекурсію з поточною вартістю (сумою попередньої вартості та *i*-тої вартості

призначення `matr[0][i]`) та підматрицею, в якій вирізано перший рядок та *i*-тий стовпчик. На кожному кроці рекурсії перевіряємо: якщо поточна загальна вартість призначень більша за мінімальну, то далі занурюватись у рекурсію немає смислу і повертаємося до попереднього кроку, якщо ні, то перевіряємо, чи залишилися ще працівники та призначення, у негативному випадку, встановлюємо нову мінімальну вартість `min_salary`.

```
def assignment(matrix):  
    min_salary = float("inf")  
  
    def _assignment(salary: int, matr: tuple):  
        nonlocal min_salary  
  
        if salary > min_salary:  
            return  
        elif not matr:  
            min_salary = salary  
            return  
  
        for i in range(len(matr)):  
            sub_matr = tuple([r[:i] + r[i+1:] for r in matr[1:]])  
            _assignment(salary + matr[0][i], sub_matr)  
  
    _assignment(0, matrix)  
    return min_salary  
  
if __name__ == "__main__":  
    with open("input.txt") as inp:  
        n = int(inp.readline())  
        matrix = tuple(tuple(map(int, inp.readline().split()))  
                        for _ in range(n))  
        print(assignment(matrix))
```

### Завдання для самостійної роботи

- 10.4. А побалакати?  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3606>
- 10.5. Банк  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7470>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 10.6. Печеньки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2633>
- 10.7. Відпали мирних ферзів!  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2764>
- 10.8. Торговець  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/224>
- 10.9. CD  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1266>



## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11. Рекурсія, повний перебір, Метод «розділяй і володарюй».**

### **Контрольні запитання**

- 11.1. У чому полягає метод гілок та меж?
- 11.2. У чому полягає метод декомпозиції («розділяй і володарюй»)?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 11.1. Словник  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/364>
- 11.2. Путівки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6>
- 11.3. Міст  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1592>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 11.4. Дуже швидке множення  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/317>  
Вказівка: Використайте алгоритм [Множення Карацуби](#).
- 11.5. Кафе "Хоботанія"  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4746>
- 11.6. Розподіл оцінок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1524>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 11.7. Мінне поле  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2000>
- 11.8. Істотні інверсії  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7031>
- 11.9. Шкільний бал  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7227>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12. Стек – базові алгоритми.

### Контрольні запитання

- 12.1. Яка структура даних називається стеком?
- 12.2. Наведіть основні операції для роботи зі стеком.
- 12.3. Які основні підходи до моделювання структури даних Стек використовуються у програмуванні на практиці?
- 12.4. Які структури даних називаються рекурсивними?

### Завдання для аудиторної роботи

- 12.1. Простий стек  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6122>  
*Вказівка:* реалізацію стеку здійсніть на базі вбудованого списку або масиву
- 12.2. Стек необмеженого розміру  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6124>  
*Вказівка:* реалізацію стеку здійсніть як рекурсивну структуру.

### Завдання для самостійної роботи

- 12.3. Стек із захистом від помилок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6123>
- 12.4. Мінімум на стеці  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4259>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 12.5. Рейки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1776>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 13. Стек та його застосування.

### Контрольні запитання

- 13.1. Наведіть приклади застосування стеку.
- 13.2. Наведіть алгоритм перевірки правильності дужкової послідовності.
- 13.3. Наведіть алгоритм конвертування арифметичного виразу з інфіксії у постфіксну форму зображення.
- 13.4. Наведіть алгоритм обчислення арифметичного виразу зображеного у інфіксійній та постфіксійній формах.

### Завдання для аудиторної роботи

- 13.1. Системи числення - 1  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5322>
- 13.2. Баланс дужок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2479>

### Завдання для самостійної роботи

- 13.3. Система числення  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7433>
- 13.4. Дужки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1994>
- 13.5. 3 префіксного у інфіксне  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/731>
- 13.6. Дужки (2)  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/855>

### Додаткові завдання для самостійної роботи

- 13.7. Системи числення  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1008>
- 13.8. Вирази  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3837>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 13.9. Система числення - перезавантаження  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1376>
- 13.10. Дужки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5205>
- 13.11. Перетворення

- 13.12. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/5539>  
Магічні дужки
- 13.13. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/3013>  
Математики та дужки
- 13.14. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/4438>  
Дужки
- 13.15. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1801>  
Дріб у LATEX-i
- 13.16. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2039>  
Інопланетяни
- 13.17. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2702>  
Яка система числення?
- 13.18. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1377>  
Калькулятор
- 13.19. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1394>  
Статична складність
- 13.19. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1073>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 14. Черги та дек. Їхнє застосування.

### Контрольні запитання

- 14.1. Яка структура даних називається чергою?
- 14.2. Наведіть основні операції для роботи з чергою.
- 14.3. Наведіть приклади реалізації черги. Яка додаткова структура даних використовується для реалізації черги як рекурсивної структури даних?
- 14.4. Яка структура даних називається деком (чергою з двома кінцями або двосторонньою чергою)? У чому її відмінність від черги?
- 14.5. Наведіть основні операції для роботи з двосторонньою чергою.
- 14.6. У чому полягає ідея алгоритму реалізації двосторонньої черги як рекурсивної структури? Яка додаткова структура даних при цьому використовується?
- 14.7. Яка структура даних називається пріоритетною чергою?

### Завдання для аудиторної роботи

- 14.1. Проста черга  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6125>  
*Вказівка:* реалізацію здійсніть на базі вбудованого списку або масиву
- 14.2. Черга необмеженого розміру  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6127>  
*Вказівка:* реалізацію черги здійсніть як рекурсивну структуру.
- 14.3. Простий дек  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6128>  
*Вказівка:* реалізацію здійсніть на базі вбудованого списку або масиву
- 14.4. Дек з захистом від помилок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6129>
- 14.5. Задача Іосифа Флавія  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/971>  
*Вказівка:* для розв'язання задачі використайте структуру даних черга або двостороння черга реалізовану у попередніх задачах.

### Завдання для самостійної роботи

- 14.6. Черга з захистом від помилок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6126>

- 14.7. Дек необмеженого розміру  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6130>  
*Вказівка:* реалізацію здійсніть як рекурсивну структуру.
- 14.8. Гра у п'яницю  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4005>
- 14.9. Варварські племена  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1549>
- 14.10. Деки на 6 мегабайтах  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3161>

#### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 14.11. Іосиф повторюється  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1515>

#### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 14.12. Мінімум в черзі  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/694>
- 14.13. Сорткування чергами  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2510>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 15. Зв'язні списки. Їхнє застосування

### Контрольні запитання

- 15.1. Яка структура даних називається однозв'язним списком? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.
- 15.2. Яка структура даних називається двозв'язним списком? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.
- 15.3. Яка структура даних називається кільцевим списком? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.
- 15.4. Яка структура даних називається списком з поточним елементом? Наведіть основні операції з цією структурою даних та ідею алгоритму її реалізації.

### Завдання для аудиторної роботи

- 15.1. Реалізуйте структуру даних зв'язний список з поточним елементом.  
Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def reset()
```

Робить перший елемент списку, поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елемента. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def insert_after(item):
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user1.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

15.2. Реалізуйте структуру даних зв'язний список з поточним елементом та реалізуйте додаткові операції для роботи зі списком.

Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def reset()
```

Робить перший елемент списку, поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елемента. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def insert_after(item):
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

```
def insert_before(item)
```

Вставляє новий елемент у список перед поточним.

```
def delete()
```

Видаляє поточний елемент. Поточним при цьому стає наступний елемент, що йшов у списку після поточного. Якщо елемент, що видаляється був у списку останнім, то поточним стає передостанній елемент цього списку. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.



```
def damp():
```

Повертає масив у якому записані всі елементи поточного списку.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task2>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user1.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

- 15.3. Реалізуйте структуру даних двобічно зв'язний список з поточним елементом. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def set_first()
```

Робить перший елемент списку поточним.

```
def set_last()
```

Робить останній елемент списку поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def prev()
```

Перейти до попереднього елемента – робить поточним елементом елемент списку, що йде перед поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є першим у списку..

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елемента. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

```
def insert_after(item):
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

```
def insert_before(item)
```

Вставляє новий елемент у список перед поточним.

```
def delete()
```

Видаляє поточний елемент. Поточним при цьому стає наступний елемент, що йшов у списку після поточного. Якщо елемент, що видаляється був у списку останнім, то поточним стає передостанній елемент цього списку. Гарантується, що функція не буде викликана, якщо список порожній.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task3>

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user2.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

- 15.4. Реалізуйте структуру даних двобічно зв'язний список з поточним елементом та реалізуйте додаткові операції для роботи зі списком. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності функцій описаних нижче.

```
def init()
```

Викликається один раз на початку виконання програми.

```
def empty()
```

Перевіряє чи список порожній.

```
def set_first()
```

Робить перший елемент списку поточним.

```
def set_last()
```

Робить останній елемент списку поточним.

```
def next()
```

Перейти до наступного елемента – робить поточним елементом списку, елемент, що йде за поточним. Породжує виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є останнім у списку.

```
def prev()
```

Перейти до попереднього елемента – робить поточним елементом елемент списку, що йде перед поточним. Породжує

виключення `StopIteration`, якщо поточний елемент є першим у списку..

```
def current()
```

Повертає навантаження поточного елементу.

```
def insert_after(item)
```

Вставляє новий елемент у список після поточного.

```
def insert_before(item)
```

Вставляє новий елемент у список перед поточним.

```
def delete()
```

Видаляє поточний елемент. Поточним при цьому стає наступний елемент, що йшов у списку після поточного. Якщо елемент, що видаляється був у списку останнім, то поточним стає передостанній елемент цього списку.

```
def damp()
```

Повертає масив у якому записані всі елементи поточного списку.

```
def len()
```

Повертає кількість елементів у списку

```
def swap_prev()
```

Міняє місцями поточний елемент списку з попереднім. Гарантується, що виклик функції здійснюється лише, якщо поточний елемент не перший у списку. Поточний елемент лишається не змінним

```
def swap_next()
```

Міняє місцями поточний елемент списку з наступним. Гарантується, що виклик функції здійснюється лише, якщо поточний елемент не останній у списку. Поточний елемент лишається не змінним.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/L15/task4>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user2.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

### **Завдання для самостійної роботи**

- 15.5. Виведення зв'язного списку  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7452>
- 15.6. Обертання списку  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7453>
- 15.7. Зміна порядку списку  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7468>
- 15.8. Цикл у зв'язному списку  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7454>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 15.9. Вікна  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2397>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 16. Дерева. Алгоритми на деревах.

### Контрольні запитання

- 16.1. Яка структура даних називається деревом?
- 16.2. Що таке вершина (вузол) дерева? Яка вершина дерева називається коренем? Листком?
- 16.3. Які вузли називаються дітьми вузла? Батьками?
- 16.4. Які вузли називаються предками для заданого вузла? Які вузли називаються його нащадками?
- 16.5. Що таке шлях в дереві? Як визначається його довжина?
- 16.6. Що таке рівень вузла у дереві? Як визначається висота дерева?
- 16.7. Наведіть способи зображення дерев у пам'яті комп'ютера.
- 16.8. Поясніть ідею алгоритму пошуку в глибину (DFS) на дереві.
- 16.9. Наведіть ідею алгоритму пошуку в ширину (BFS) на дереві.

### Завдання для аудиторної роботи

- 16.1. Список телефонних номерів  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2303>  
Вказівка. Для розв'язання задачі реалізуйте префіксне дерево.
- 16.2. LCA offline (Easy)  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2317>  
Вказівка: LCA - Найменший спільний предок двох вершин

### Завдання для самостійної роботи

- 16.3. Дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2923>
- 16.4. Корупція  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2996>
- 16.5. Манкунианец и цветное дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3983>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 16.6. Рядки у дереві  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2925>
- 16.7. Спільний предок – 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3299>
- 16.8. Дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3710>

- 16.9.     Дерево  
          <https://www.e-olymp.com/uk/problems/4173>
- 16.10.   Дерево  
          <https://www.e-olymp.com/uk/problems/4325>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 17. Бінарні дерева. Бінарні дерева пошуку.**

### **Контрольні запитання**

- 17.1. Які дерева називаються бінарними?
- 17.2. Як бінарні дерева зображуються у пам'яті комп'ютера?
- 17.3. Наведіть модифікацію алгоритмів пошуку в глибину та ширину для бінарних дерев
- 17.4. Наведіть означення бінарного дерева пошуку?
- 17.5. Які операції визначені для бінарних дерев пошуку? Яка алгоритмічна складність цих операцій?
- 17.6. Наведіть ідею алгоритмів вставки, пошуку і видалення вузлів для бінарних дерев пошуку.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 17.1. Висота дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2312>
- 17.2. Кількість елементів  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2313>
- 17.3. Другий максимум  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2314>
- 17.4. Вивод листьєв  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2316>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 17.5. Дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/468>
- 17.6. Родовідне дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2242>
- 17.7. Однакові дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7465>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 17.8. Максимальна глибина Бінарного Дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7463>
- 17.9. Мінімальна глибина Бінарного Дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7464>
- 17.10. Симетричне дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7467>

- 17.11.     Минимум и Максимум на дереве  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4034>
- 17.12.     Прямой обход дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4036>
- 17.13.     Обратный обход дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4038>

**Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 17.14.     Прямий, центрований та обернений порядок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1513>
- 17.15.     Створення двійкового дерева пошуку  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1516>
- 17.16.     Створення бінарного дерева пошуку  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3326>



## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 18. Збалансовані бінарні дерева пошуку.**

### **Контрольні запитання**

- 18.1. Що таке збалансоване дерево пошуку?
- 18.2. Яке бінарні дерева пошуку називаються ідеально збалансованими?
- 18.3. Які бінарні дерева називаються AVL- збалансованим?
- 18.4. Що таке AVL-дерево?
- 18.5. Що таке фактор балансу вузла у AVL-дереві?
- 18.6. Наведіть ідею алгоритму малого лівого обертання у AVL-дереві. Малого правого обертання?
- 18.7. Наведіть ідею алгоритму великого лівого обертання у AVL-дереві. Великого правого обертання?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 18.1. Збалансоване бінарне дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7466>
- 18.2. Двійкове дерево пошуку 1  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4146>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 18.3. Двійкове дерево пошуку 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4147>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 18.4. Збалансоване дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2950>
- 18.5. AVL-дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1846>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 19. Двійкова купа та пріоритетна черга.

### Контрольні запитання

- 19.1. Які дерева називаються повними? Майже повними?
- 19.2. Яка структура даних називається двійковою купою?
- 19.3. Які операції можна здійснювати з двійковою купою? Яка алгоритмічна складність цих операцій?
- 19.4. На базі якої структури даних здійснюється реалізації двійкової купи?
- 19.5. Наведіть застосування двійкової купи?

### Завдання для аудиторної роботи

- 19.1. Хіпуй!  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4039>
- 19.2. Швидке сортування  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4848>  
Вказівка: сортування реалізуйте за допомогою алгоритму на базі двійкової купи (heap sort).

### Завдання для самостійної роботи

- 19.3. Куча чи ні?  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3737>
- 19.4. Черга з пріоритетами  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4847>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 19.5. Додати все  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1228>
- 19.6. ДАС Черга  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3809>
- 19.7. Це ліва куча?  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2919>
- 19.8. Нумерація повного дерева  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/402>
- 19.9. Чорний ящик  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3358>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 20. Дерево відрізків.

### Контрольні запитання

- 20.1. Яка структура даних називається деревом відрізків?
- 20.2. Які основні задачі розв'язують використовуючи дерево відрізків?
- 20.3. Наведіть ідею реалізації структури даних дерево відрізків.

### Завдання для аудиторної роботи

- 20.1. Діма та масив  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2941>
- 20.2. Діма та великий масив  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2940>

### Завдання для самостійної роботи

- 20.3. У країні невивчених уроків  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4481>
- 20.4. У країні невивчених уроків 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4482>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 20.5. Дерево відрізків  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5952>
- 20.6. Range Variation Query  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/695>
- 20.7. Пригоди Незнайки та його друзів  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4496>
- 20.8. Загадковий пристрій  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3318>
- 20.9. Вінні-Пух  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4487>
- 20.10. Вінні-Пух 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4488>
- 20.11. Троє з Простоквашино  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4491>
- 20.12. Троє з Простоквашино 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4492>
- 20.13. Добуток на відріzkу  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4082>

- 20.14.   Фенечка  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5274>
- 20.15.   Діма та масив  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2939>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 21. Графи. Побудова та властивості.**

### **Контрольні запитання**

- 21.1. Яка структура даних називається графом.
- 21.2. Який зв'язок дерев з графами?
- 21.3. Що таке вершина (вузол) та ребро графа?
- 21.4. Який граф називається орієнтованим? Не орієнтованим?
- 21.5. Що таке шлях у графі? Який шлях називається простим? Що таке довжина шляху на графі?
- 21.6. Які основні способи зображення графів у пам'яті комп'ютера ви знаєте?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 21.1. Від матриці суміжності до списку ребер  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2471>
- 21.2. Від списків суміжності до матриці суміжності  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3982>
- 21.3. Операції на графі  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2472>
- 21.4. Підрахунок кількості ребер  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5072>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 21.5. Кількість висячих вершин 1  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5080>
- 21.6. Півстепені вершин за списками ребер  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5075>
- 21.7. Степені вершин за списками ребер  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5074>
- 21.8. Мультиребра  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5073>
- 21.9. Повний граф  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3987>

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

- 21.10. Степені вершин  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5082>

- 21.11. Від матриці суміжності до списку ребер – 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4766>
- 21.12. Від списку ребер до матриці суміжності – 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4767>
- 21.13. Перевірка на неорієнтовність  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2470>
- 21.14. Витоки та стоки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3986>
- 21.15. Регулярний граф  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5076>
- 21.16. Напівповний граф  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5077>

**Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 21.17. Стародавній рукопис  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/610>
- 21.18. Транзитивність орієнтовного графа –  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5079>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 22. Алгоритми на незважених графах. Обхід в ширину та глибину.**

### **Контрольні запитання**

- 22.1. Наведіть ідею алгоритму пошуку в глибину на графі.
- 22.2. Наведіть ідею алгоритму пошуку в ширину на графі.
- 22.3. Як перевірити чи містить граф цикл?

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 22.1. Обхід в ширину  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2401>
- 22.2. Найкоротший шлях  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4853>
- 22.3. Чи є цикл?  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4004>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 22.4. Маршрути в горах  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/122>
- 22.5. Підпал  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4369>
- 22.6. Отримай дерево  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/978>
- 22.7. Найкоротша відстань  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4852>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 22.8. Числа  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4007>
- 22.9. Геть списування!  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4002>
- 22.10. Покриття шляхами  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5299>
- 22.11. Рекурсія  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/553>
- 22.12. Ходи ферзем!  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1098>

- 22.13. Забавна гра  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4050>
- 22.14. Хрещений батько  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5366>
- 22.15. База даних  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3037>



## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 23. Топологічне сортування. Зв'язність графів.**

### **Контрольні запитання**

- 23.1. Що таке топологічне сортування орієнтованого графа? Наведіть алгоритм.
- 23.2. Наведіть означення зв'язності неорієнтованого графа.
- 23.3. Який граф називається не зв'язним? Що таке компонента зв'язності графа?
- 23.4. Наведіть алгоритм пошуку компонент зв'язності неорієнтованого графа.
- 23.5. Чи можна узагальнити поняття зв'язності для орієнтованих графів? Які бувають види такого узагальнення.
- 23.6. Наведіть алгоритм перевірки орієнтованого графа на сильну зв'язність.
- 23.7. Наведіть алгоритм відшукування компонент сильної зв'язності орієнтованого графа.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 23.1. Обхід у глибину  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4000>
- 23.2. Зв'язність  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/982>
- 23.3. Компоненти зв'язності  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2269>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 23.4. Зв'язність графа  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4374>
- 23.5. Топологічне сортування  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1948>
- 23.6. Компоненти зв'язності - 2  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4816>
- 23.7. Ну дуже поширений метод для графів...  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1977>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 23.8. Міцно зв'язаний син гір  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1975>
- 23.9. Місто під струмом  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3269>
- 23.10. Стільниковий зв'язок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2003>
- 23.11. Згоряння та компоненти зв'язності  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4371>
- 23.12. Конденсація графу  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1947>
- 23.13. Конденсація графа  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1667>
- 23.14. Сильна зв'язність  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2403>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 24. Застосування теорії графів до пошуку шляхів у лабіринтах.**

### **Контрольні запитання**

24.1.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 24.1. Площа кімнати  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4001>

### **Завдання для самостійної роботи**

- 24.2. Помста Лі Чака  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/88>
- 24.3. Лінії  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1060>
- 24.4. Lines  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1062>
- 24.5. Видалення клітинок  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1063>
- 24.6. Вихід з лабіринту  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4820>
- 24.7. Грядки  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1065>
- 24.8. Лабіринт  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5622>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 24.9. Підземелля  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/432>
- 24.10. Фарбування лабіринту  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1061>
- 24.11. Шлях коня  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/1064>
- 24.12. Переміщення коня  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2820>
- 24.13. Іграшковий лабіринт  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/4452>

- 24.14. Місце зустрічі змінити неможна  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5069>
- 24.15. Лабіринт  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7215>
- 24.16. Гном і монети  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/7229>
- 24.17. Виведи хом'ячків  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/213>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 25. Алгоритми на зважених графах

### Контрольні запитання

25.1.

### Завдання для аудиторної роботи

25.1.

### Завдання для самостійної роботи

25.2.

### Додаткові завдання для самостійної роботи

25.3.

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

25.4.

### Завдання для аудиторної роботи

25.5.	Алгоритм Дейкстри - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1365">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1365</a>
25.6.	Найкоротший шлях - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4856">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4856</a>
25.7.	

### Варіанти індивідуальних завдань

25.1.	Відстань між вершинами – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/625">https://www.e-olymp.com/uk/problems/625</a>
25.2.	Флойд - 1 - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/974">https://www.e-olymp.com/uk/problems/974</a>
25.3.	Флойд - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/975">https://www.e-olymp.com/uk/problems/975</a>
25.4.	Флойд - існування - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/976">https://www.e-olymp.com/uk/problems/976</a>
25.5.	Червякові діри - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1108">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1108</a>
25.6.	Заправки - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1388">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1388</a>
25.7.	Автобуси - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1389">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1389</a>
25.8.	Форд-Беллман - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1453">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1453</a>
25.9.	Лабіринт знань - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1454">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1454</a>

25.10.	Цикл - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1455">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1455</a>
25.11.	Ліфти - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2209">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2209</a>
25.12.	Доставка кефірчика - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4006">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4006</a>
25.13.	

#### Варіанти для командних завдань

25.1.	Складний тест - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/626">https://www.e-olymp.com/uk/problems/626</a>
25.2.	Мандри - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2267">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2267</a>
25.3.	Альтернативні шляхи - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4637">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4637</a>
25.4.	

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 26. Алгоритм Прима побудови каркасного дерева.**

### **Контрольні запитання**

26.1.

### **Завдання для аудиторної роботи**

26.1.

### **Завдання для самостійної роботи**

26.2.

### **Додаткові завдання для самостійної роботи**

26.3.

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

26.4.

26.1.	Мінімальний каркас - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3835">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3835</a>
26.2.	Мінімальний каркас - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/981">https://www.e-olymp.com/uk/problems/981</a>

## **Список літератури та додаткових джерел**

1. **Кренивч А.П.** Алгоритми та структури даних. Підручник. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2020. – 777 с.