otivar Estudantes com Sistemas de Controle do Mundo Real

tilizando a aplicação prática da engenharia de sistemas de controle, esta 3ª edição, atualizada em seu conteúdo, ivará os estudantes a aprender como analisar e projetar sistemas de controle com retroação que sustentam as ologias avançadas da atualidade. A motivação é obtida por meio de explanações claras e completas sobre como etar sistemas do mundo real. Os tópicos são apresentados de modo lógico e progressivo que constrói e apóia a preensão. Sempre que possível, os novos conceitos são apresentados primeiramente a partir de uma perspectiva ltativa para ajudar o estudante a obter uma visão de conjunto necessária ao desenvolvimento de projetos pletos. Em seguida, uma discussão detalhada de ferramentas quantitativas dá aos leitores a capacidade de etar parâmetros e configurações relativos a sistemas que eles encontrarão durante a vida profissional. E com o do MATLAB® os estudantes descobrirão como aplicar os mais recentes métodos computacionais à análise e ao eto de sistemas de controle.

pectos Principais da Terceira Edição

tudos de caso, utilizando o mesmo sistema de modo progressivo, são integrados ao longo do texto para fornecer s estudantes uma visão realista de cada etapa do procedimento de projetar sistemas de controle.

ma metodologia com etapas claramente definidas é apresentada para cada tipo de problema de projeto.

o fornecidos numerosos exemplos e exercícios de avaliação, bem como problemas e perguntas de revisão de fim capítulo, incluindo um problema progressivo de análise e projeto que utiliza o mesmo sistema.

ncluída uma introdução aos métodos de análise e de projeto no espaço de estados. Tais seções são assinaladas ramente e podem ser ensinadas junto com os métodos clássicos, ensinadas separadamente ou ignoradas sem rda de continuidade.

o fornecidos tutoriais sobre como usar o MATLAB®, a *Toolbox* de Sistemas de Controle, o Simulink® e a *Toolbox* bre Matemática Simbólica para analisar e projetar sistemas de controle. São também incluídos tutoriais sobre mo usar duas interfaces gráficas de usuário (GUI) do MATLAB® como ferramentas de análise e de projeto — o nalisador LTI Viewer e o Root Locus Design GUI. Todos os tutoriais e códigos MATLAB® estão contidos nos textos s apêndices de modo a não prejudicar o ensino dos princípios da engenharia de sistemas de controle. As ferências a esses apêndices são fornecidas em locais adequados no texto.

o CD-ROM que acompanha o livro fornece material adicional de grande valia, como aplicações computacionais r máquinas isoladas, arquivos eletrônicos dos programas de computador para uso com o MATLAB®, apêndices plementares e a solução dos exercícios de avaliação.

Ilustrações do livro, na forma de arquivos eletrônicos, estão disponíveis, em inglês, no endereço da Internet tp://www.wiley.com/college/nise

N.Cham. 629.8 N724e 2002
Autor: Nise, Norman S.
Título: Engenharia de sistemas de controle .
189373
138955
Ex.4 FUNOESC LES

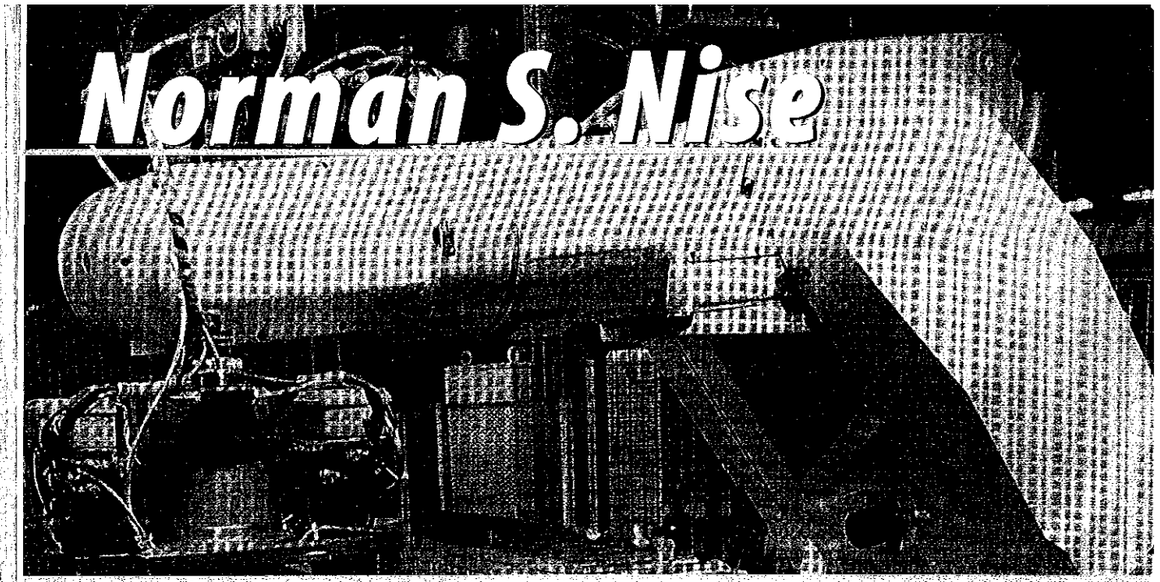
629.8
N724e
2002
Ex.4

Norman S. Nise

Engenharia de Sistemas de Controle

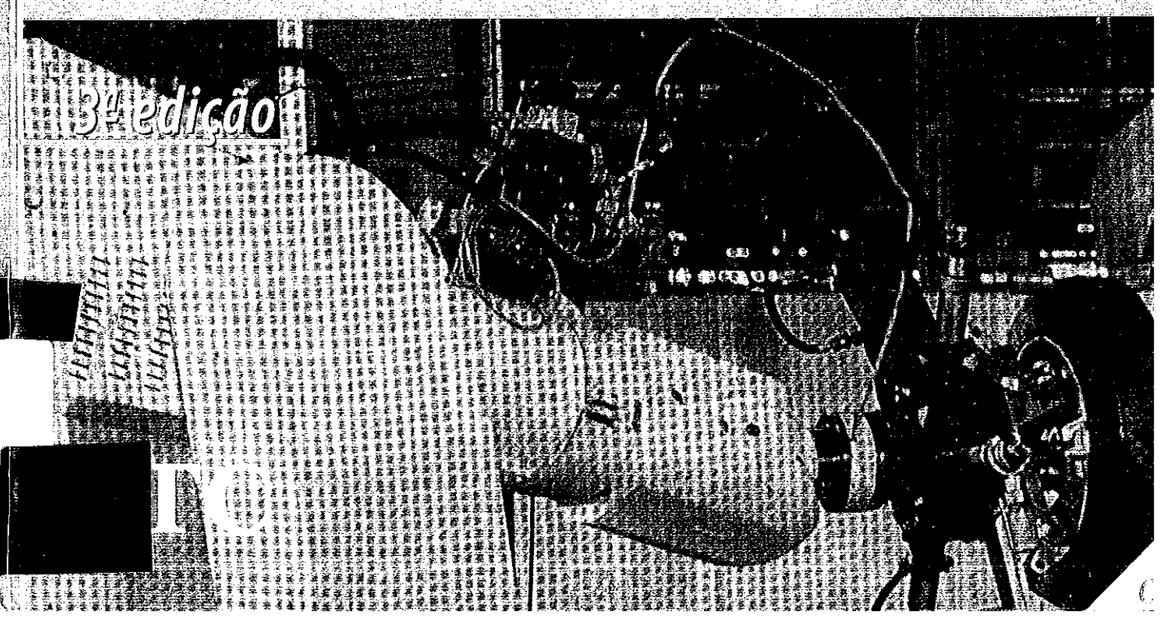
3ª edição

Norman S. Nise



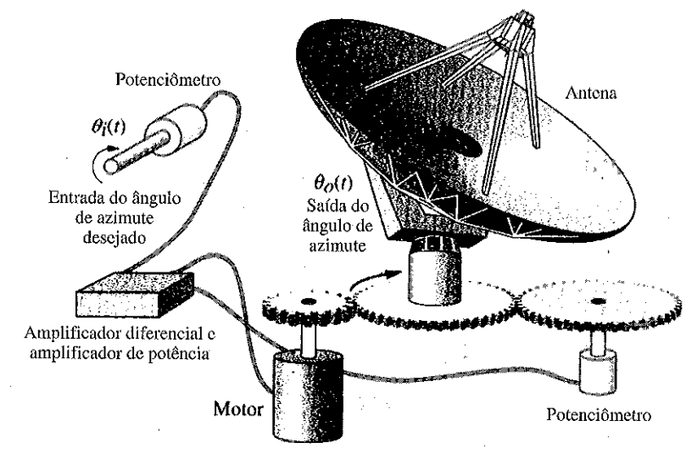
Engenharia de Sistemas de Controle

3ª edição



Sistema de Controle de Posicionamento de uma Antena em Azimute

Arranjo Físico dos Componentes



Esquema

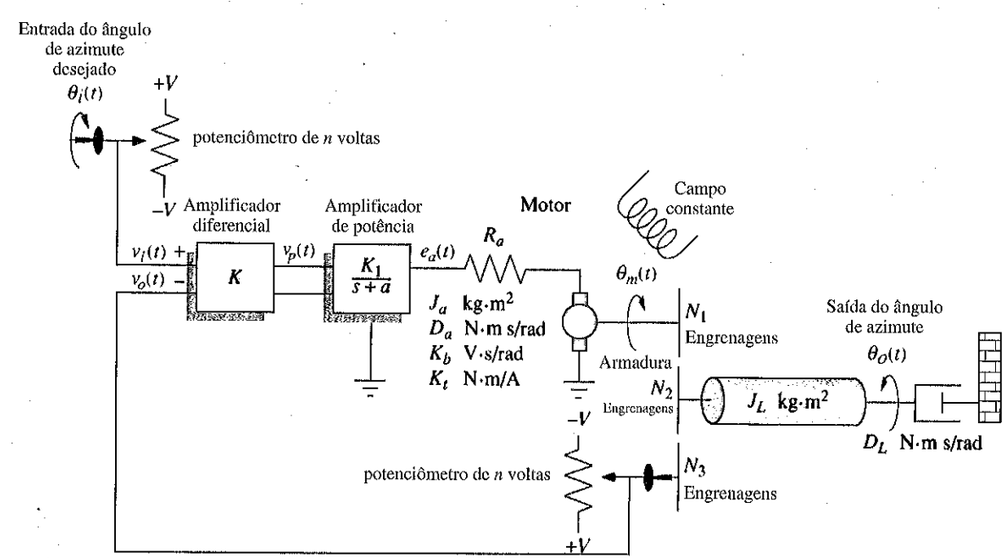
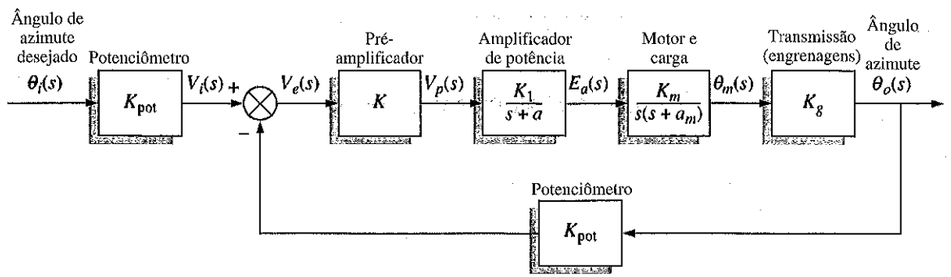


Diagrama de Blocos



Parâmetros do Esquema

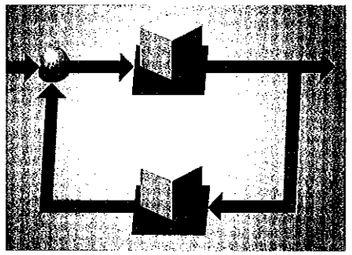
Parâmetro	Configuração 1	Configuração 2	Configuração 3
V	10	10	10
n	10	1	1
K	—	—	—
K_1	100	150	100
a	100	150	100
R_a	8	5	5
J_a	0,02	0,05	0,05
D_a	0,01	0,01	0,01
K_b	0,5	1	1
K_t	0,5	1	1
N_1	25	50	50
N_2	250	250	250
N_3	250	250	250
J_L	1	5	5
D_L	1	3	3

Parâmetros do Diagrama de Blocos

Parâmetro	Configuração 1	Configuração 2	Configuração 3
K_{pot}	0,318		
K	—		
K_1	100		
a	100		
K_m	2,083		
a_m	1,71		
K_g	0,1		

ENGENHARIA DE SISTEMAS DE CONTROLE

ABPDEA
Associação Brasileira para a Proteção dos Direitos Editoriais e Autorais
Respeite o Autor
Não Faça Cópia



ENGENHARIA DE SISTEMAS DE CONTROLE

3.ª Edição

Norman S. Nise
California State Polytechnic University
Pomona

Tradução

Bernardo Severo da Silva Filho
Engenheiro Eletricista pelo Instituto Militar de Engenharia
MSc pela École Nationale Supérieure de l'Aéronautique (França)
Professor e Coordenador dos Cursos de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Coordenador do Curso de Pós-Graduação "lato sensu" em Engenharia Mecatrônica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

LTC
EDITORA

No interesse de difusão da cultura e do conhecimento, o autor e os editores envidaram o máximo esforço para localizar os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado, dispondo-se a possíveis acertos posteriores caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

À minha esposa, Ellen;
aos meus filhos, Benjamin e Alan;
e à minha filha, Sharon.

Control Systems Engineering, Third Edition
Copyright © 2000 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2002 by
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21–2221-9621
Fax: 21–2221-3202

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web ou outros) sem permissão expressa da Editora.

Prefácio

Este livro apresenta aos estudantes a teoria e a prática da engenharia de sistemas de controle. O texto enfatiza as aplicações práticas da matéria à análise e ao projeto de sistemas com retroação.

O estudo de engenharia dos sistemas de controle é essencial para os alunos de graduação em engenharia elétrica, mecânica, controle e automação, aeroespacial[1] ou engenharia química. Os sistemas de controle são encontrados em uma ampla gama de aplicações nessas áreas, desde aviões e espaçonaves a robôs e sistemas de controle de processos.

Engenharia de Sistemas de Controle é uma obra voltada para estudantes de cursos superiores e para aqueles que desejam dominar o assunto através de estudo próprio. Os estudantes usuários deste texto devem ter concluído os cursos básicos em física e em matemática, por meio de equações diferenciais. Outros materiais que dizem respeito ao conhecimento prévio requerido, incluindo transformadas de Laplace e álgebra linear, são incorporados ao texto, seja ao longo das discussões dos capítulos, seja separadamente nos apêndices ou no CD-ROM que acompanha o livro. Este material de revisão pode ser omitido sem perda de continuidade para os estudantes que não precisam dele.

Características Principais

Constituem características principais desta terceira edição:

- Organização padronizada dos capítulos
- Explanações qualitativas e quantitativas
- Exemplos, exercícios de avaliação e estudos de caso ao longo do texto
- Ilustrações abundantes
- Numerosos problemas de fim de capítulo
- Ênfase no projeto
- Organização flexível
- Ênfase na análise e no projeto com auxílio de computador

Vejamos cada uma destas características com mais detalhe.

Organização Padronizada dos Capítulos

Cada capítulo começa com uma lista de objetivos do capítulo seguida de uma lista de objetivos dos estudos de caso relacionando os objetivos do capítulo com o desempenho específico do estudante na solução de um problema prático como o sistema de controle do posicionamento de uma antena em azimute.

Os tópicos são então divididos em seções numeradas e com título contendo explanações, exemplos e, onde apropriado, exercícios de avaliação com respostas. Estas seções numeradas são seguidas de um ou mais estudos de caso, como resumido a seguir. Cada capítulo se encerra com um breve resumo, com diversas perguntas de revisão que requerem respostas curtas e um conjunto de tarefas a domicílio.

[1]No Brasil, Engenharia Aeronáutica. (*N.T.*)

Explanações Qualitativas e Quantitativas

As explicações são claras e completas e, quando apropriado, incluem uma breve revisão dos fundamentos. Os tópicos são elaborados a partir dessa base e se apóiam uns nos outros de forma lógica. Os fundamentos e a terminologia sobre novos conceitos são cuidadosamente colocados para evitar sobrecarregar o estudante e facilitar o estudo autodidático.

Embora as soluções quantitativas sejam, como é óbvio, importantes, uma compreensão qualitativa ou intuitiva dos problemas e dos métodos de solução é vital para produzir uma visão de conjunto necessária para o desenvolvimento completo de projetos. Portanto, sempre que possível, os novos conceitos são discutidos a partir de uma perspectiva qualitativa antes da análise e do projeto quantitativos. Por exemplo, no Cap. 8, o estudante pode simplesmente observar o lugar das raízes e descrever qualitativamente as alterações na resposta transitória que irão ocorrer à medida que um parâmetro de sistema, como o ganho, é variado. Esta habilidade é desenvolvida com o auxílio de algumas equações simples do Cap. 4.

Exemplos, Exercícios de Avaliação e Estudos de Caso

As explanações são ilustradas com clareza por meio de diversos exemplos numerados e identificados ao longo do texto. Onde apropriado, as seções são encerradas com exercícios de avaliação. São exercícios de cálculo, a maioria com respostas, os quais testam a compreensão e fornecem retorno imediato. As soluções completas podem ser encontradas no CD-ROM que acompanha o livro.

Exemplos mais abrangentes na forma de estudos de caso podem ser encontrados depois da última seção numerada de cada capítulo, com exceção do Cap. 1. Estes estudos de caso são problemas de aplicação prática que demonstram os conceitos introduzidos no capítulo. Cada estudo de caso termina com um problema desafiador sobre o qual os estudantes podem trabalhar a fim de testar sua compreensão sobre o material.

Um dos estudos de caso, relativo ao sistema de controle do posicionamento de uma antena em azimute é tratado ao longo de todo o livro. A finalidade é ilustrar a aplicação de novos conhecimentos em cada capítulo ao mesmo sistema físico, enfatizando assim a continuidade do procedimento de projeto. Um outro estudo de caso mais desafiador, envolvendo um veículo submersível autônomo não-tripulado, UFSS (*Unmanned Free-Swimming Submersible Vehicle*) é desenvolvido ao longo de cinco capítulos.

Ilustrações Abundantes

A capacidade para visualizar conceitos e procedimentos é crítica para a compreensão do estudante. Por esta razão, aproximadamente 750 fotos, diagramas, gráficos e tabelas aparecem ao longo do livro para ilustrar os tópicos em discussão.

Numerosos Problemas de Fim de Capítulo

Cada capítulo termina com uma variedade de tarefas a domicílio que permitem ao estudante testar sua compreensão sobre o material apresentado no capítulo. Os problemas variam em grau de dificuldade e em complexidade, e a maioria dos capítulos inclui diversos problemas práticos, da "vida real" para ajudar a manter a motivação dos estudantes. Além disso, as tarefas a domicílio incluem um problema progressivo de análise e de projeto que utiliza o mesmo sistema prático para demonstrar os conceitos de cada capítulo.

Ênfase em Projeto

Este texto coloca uma grande ênfase em projeto. Os Caps. 8, 9, 11, 12 e 13 enfocam fundamentalmente o projeto. Porém, até mesmo nos capítulos que enfatizam a análise, são incluídos exemplos simples de projeto sempre que possível.

Ao longo do livro, os exemplos de projeto envolvendo sistemas físicos são identificados por um ícone **Projeto**. Os problemas de fim de capítulo que envolvem o projeto de sistemas físicos são grupados sob o título de Problemas de Projeto e, também, nos capítulos que cuidam de projeto sob o título Problema Progressivo de Análise e de Projeto. Nestes exemplos e problemas, especifica-se uma resposta desejada e o estudante deve calcular os valores de certos parâmetros de sistema, como o ganho, ou especificar uma configuração de sistema juntamente com valores de parâmetro. Ademais, o texto inclui numerosos exemplos de projeto e problemas (não identificados por um ícone) que envolvem sistemas puramente matemáticos.

Como a visualização é tão vital na compreensão do projeto, este texto relaciona cuidadosamente as especificações indiretas de projeto com as mais familiares. Por exemplo, a margem de fase menos familiar e indireta é cuidadosamente relacionada com a ultrapassagem percentual mais direta e familiar antes de ser utilizada como especificação de projeto.

Para cada tipo geral de problema de projeto introduzido no texto é apresentada uma metodologia para resolver o problema. Em muitos casos, na forma de procedimento passo a passo, começando com um enunciado dos objetivos de projeto. Os problemas de exemplo servem para demonstrar a metodologia seguindo o procedimento, fazendo hipóteses simplificadoras e apresentando os resultados do projeto em tabelas ou gráficos que comparam o desempenho do sistema original ao do sistema melhorado. Esta comparação também serve para verificar a validade das hipóteses simplificadoras.

Os tópicos de projeto da resposta transitória são cobertos de maneira abrangente no texto. Incluem

- Projeto através do ajuste de ganho usando o lugar das raízes
- Projeto de compensação e de controladores usando o lugar das raízes
- Projeto através do ajuste de ganho usando métodos de resposta de freqüência senoidal
- Projeto de compensação usando métodos de resposta de freqüência senoidal
- Projeto de controladores no espaço de estados usando técnicas de alocação de pólos
- Projeto de observadores no espaço de estados usando técnicas de alocação de pólos
- Projeto de sistemas de controle digital através do ajuste de ganho no lugar das raízes
- Projeto de compensação de sistemas de controle digital através do projeto no plano *s* e da transformação de Tustin

O projeto do erro de estado estacionário é coberto de forma abrangente neste livro e inclui

- Ajuste de ganho
- Projeto de compensação usando o lugar das raízes
- Projeto de compensação usando métodos de resposta de freqüência senoidal
- Projeto de controle integral no espaço de estados

Finalmente, o projeto de ajuste de ganho que leva à estabilidade é tratado a partir das seguintes perspectivas:

- Critério de Routh-Hurwitz
- Lugar das raízes
- Critério de Nyquist
- Gráficos de Bode

Organização Flexível

O material neste livro pode ser adaptado para um curso com duração de um trimestre ou de um semestre. A organização é flexível, permitindo que o professor selecione o material que melhor se ajuste aos requisitos e às restrições de tempo da turma.

Ao longo do livro, as técnicas no espaço de estados são apresentadas juntamente com a abordagem clássica. Os capítulos e as seções (bem como exemplos, exercícios, perguntas de revisão e problemas) que tratam do espaço de estados são marcados com um ícone **Espaço de Estados** e podem ser omitidos sem qualquer perda de continuidade. Os que desejarem incluir uma introdução à modelagem no espaço de estados podem incluir o Cap. 3 no plano de estudos.

Nos cursos de um semestre, as discussões sobre a análise no espaço de estados nos Caps. 4, 5, 6 e 7, bem como o projeto no espaço de estados no Cap. 12, podem ser tratados juntamente com a abordagem clássica. Uma outra opção é ensinar espaço de estados separadamente reunindo os capítulos apropriados e as seções marcadas com o ícone **Espaço de Estados** em uma única unidade que segue a abordagem clássica. Nos cursos de um trimestre, o Cap. 13, Sistemas de Controle Digital, pode ser eliminado.

Ênfase na Análise e no Projeto com Auxílio de Computador

Os problemas de sistemas de controle, particularmente os problemas de análise e de projeto usando o lugar das raízes, podem ser cansativos, uma vez que sua solução envolve ensaio e erro. Para solucionar estes problemas, os estudantes devem ter acesso a computadores ou a calculadoras programáveis configurados com software apropriado. Nesta terceira edição, o MATLAB®[2] continua a ser integrado no texto como um recurso opcional.

Muitos problemas neste texto podem ser resolvidos seja com computador, seja com calculadora manual programável. Por exemplo, os estudantes podem usar uma calculadora programável para (1) determinar se um ponto

[2]MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

do plano s está também no lugar das raízes, (2) obter dados da resposta de magnitude e de fase para os diagramas de Nyquist e de Bode e (3) passar de uma a outra entre as seguintes representações de um sistema de segunda ordem:

- Localização de pólos em coordenadas polares
- Localização de pólos em coordenadas cartesianas
- Polinômio característico
- Freqüência natural e relação de amortecimento
- Tempo de assentamento e ultrapassagem percentual
- Instante de pico e ultrapassagem percentual
- Tempo de assentamento e instante de pico

As calculadoras manuais apresentam a vantagem da facilidade de acesso nas tarefas a domicílio e nos exames. Por obséquio, queira consultar o Apêndice H, localizado no CD-ROM que acompanha este livro, para uma discussão sobre auxílios computacionais que podem ser adaptados a calculadoras portáteis.

Os computadores pessoais são melhor adaptados para aplicações mais intensas em cálculos computacionais, como traçado de respostas no tempo, lugar das raízes, curvas de resposta de freqüência, bem como obtenção de matrizes de transição de estados. Estes computadores também fornecem ao estudante um ambiente do mundo real no qual podem analisar e projetar sistemas de controle. Aqueles que não estejam usando o MATLAB podem escrever seus próprios programas ou usar outros programas, como o Program CC.

Sem o acesso a computadores ou a calculadoras programáveis, os estudantes não podem obter resultados significativos de análise e de projeto e a experiência de aprendizado será limitada.

Novidades desta Edição

Nesta terceira edição, revisamos e acrescentamos material em resposta às sugestões de estudantes e de professores que adotaram a segunda edição do texto. A lista que se segue descreve as mudanças principais na terceira edição:

Problemas de fim de capítulo Há pelo menos 30% de alterações nos problemas de fim de capítulo. Os problemas velhos foram revisados e novos problemas foram incluídos. Um problema prático progressivo de análise e de projeto, que utiliza o mesmo sistema físico, foi acrescentado ao conjunto de problemas de cada capítulo.

MATLAB O uso do MATLAB para análise e projeto auxiliado por computador continua a ser integrado nas discussões e nos problemas como um recurso ótimo na terceira edição. O tutorial sobre o MATLAB foi atualizado para a Versão 5 do MATLAB e para a Versão 4 da *Toolbox* de Sistemas de Controle.

SIMULINK®[3] do MATLAB O Simulink foi adicionado para mostrar os efeitos de não-linearidades na resposta temporal de sistemas a malha aberta e a malha fechada. Usamos o Simulink também para demonstrar como simular sistemas digitais. Para auxiliá-lo foi adicionado um apêndice tutorial cobrindo os fundamentos do Simulink.

Ferramentas GUI do MATLAB Duas ferramentas do MATLAB que utilizam Interfaces Gráficas de Usuário (GUI — *Graphical User Interface*) fazem sua estréia nesta 3.ª edição. A primeira é o visualizador de objetos lineares e invariantes no tempo, *LTI Viewer*, uma ferramenta conveniente para avaliar características dos gráficos de respostas de sistemas nos domínios do tempo e de freqüência. A segunda ferramenta é a interface gráfica de usuário para projeto empregando o lugar das raízes, *Root Locus Design GUI*, uma ferramenta conveniente e intuitiva para análise e projeto com o lugar das raízes. Para ajudá-lo, foi incluído um apêndice tutorial sobre as ferramentas GUI do MATLAB.

***Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB** A *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB foi incluída em seções apropriadas como recurso opcional de auxílio ao cálculo. Para auxiliá-lo, foi incluído um apêndice tutorial sobre os fundamentos da *Toolbox* de Matemática Simbólica (*Symbolic Math Toolbox*).

Exercícios de avaliação Exercícios selecionados com respostas foram acrescentados ao final de seções apropriadas. Estes exercícios dão aos estudantes um retorno imediato através do qual podem medir o aprendizado do conhecimento básico da seção.

[3]Simulink é uma marca comercial registrada da The MathWorks, Inc.

Problemas progressivos de análise e de projeto Foi acrescentado ao final do conjunto de problemas de cada capítulo, um problema progressivo de análise e de projeto. Este problema dá a você a oportunidade de aplicar progressivamente as lições de análise e de projeto de cada capítulo ao mesmo sistema físico.

CD-ROM Um CD-ROM acompanha o texto. Apêndices e seções selecionadas da segunda edição foram deslocadas para o CD-ROM para liberar espaço para o material de texto adicional. O disco contém o seguinte:

- Todos os arquivos M (M-files) usados nos tutoriais do MATLAB, no Simulink, nas Ferramentas GUI e na *Toolbox* de Matemática Simbólica
- Arquivos PowerPoint®[4] e Acrobat®[5] contendo figuras selecionadas do texto
- Soluções dos exercícios de avaliação
- Apêndice B da segunda edição: Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações
- Apêndice D, Seção 4.11 e todo o material da segunda edição que trata do uso da análise e do projeto auxiliados por computador que não usa o MATLAB. Tudo foi revisado e reunido em um único apêndice, apresentando alternativas ao MATLAB.
- Apêndice F da segunda edição: Solução das Equações de Estado para $t_0 \neq 0$.
- Apêndice G da segunda edição: Regras do Lugar das Raízes: Dedução

Ícones Diversos ícones foram acrescentados à terceira edição para identificar a cobertura de material opcional. Especificamente, ícones do Simulink, das Ferramentas GUI do MATLAB (LTI Viewer e Root Locus Design GUI) e da *Toolbox* de Matemática Simbólica foram adicionados aos ícones anteriores do MATLAB, do espaço de estados e de projeto. Os ícones são resumidos a seguir:

MATLAB

O ícone MATLAB identifica discussões, exemplos, exercícios e problemas com MATLAB. A cobertura do MATLAB é fornecida como um aprimoramento e não é necessária para se usar o texto.

Simulink

O ícone Simulink identifica discussões, exemplos, exercícios e problemas com Simulink. A cobertura do Simulink é fornecida como um aprimoramento e não é necessária para se usar o texto.

Ferramenta GUI

O ícone Ferramenta GUI identifica discussões, exemplos, exercícios e problemas com Ferramentas GUI do MATLAB. A discussão das ferramentas, que inclui o visualizador LTI Viewer e o Root Locus Design GUI, é fornecida como um aprimoramento e não é necessária para se usar o texto.

Matemática Simbólica

O ícone Matemática Simbólica identifica discussões, exemplos, exercícios e problemas com a *Toolbox* de Matemática Simbólica. A cobertura da *Toolbox* de Matemática Simbólica é fornecida como um aprimoramento e não é necessária para se usar o texto.

Espaço de Estados

O ícone Espaço de Estados destaca discussões, exemplos, exercícios e problemas no espaço de estados. Como o MATLAB, o material sobre espaço de estados é opcional e pode ser omitido sem perda de continuidade.

Projeto

O ícone Projeto identifica claramente os problemas de projeto envolvendo sistemas físicos.

Capítulo 4 Os efeitos das não-linearidades sobre a resposta no domínio do tempo de sistemas a malha aberta usando o Simulink foram adicionados ao Cap. 4. As relações entre tempo de subida e relação de amortecimento foram

[4]PowerPoint é uma marca registrada da Microsoft Corporation.
[5]Acrobat é uma marca registrada da Adobe Systems Incorporated.

ajustadas a uma equação cúbica, a qual deve fazer com que o cálculo do tempo de subida seja mais fácil e mais direto. O visualizador LTI Viewer é apresentado no Cap. 4 através de um apêndice tutorial. A Seção 4.11 da 2.ª edição, Resposta em Função do Tempo por meio de Simulação, bem como outros métodos computacionais sem MATLAB, foram deslocados para o Apêndice H no CD-ROM que acompanha o livro.

Capítulo 5 Os efeitos das não-linearidades sobre a resposta no domínio do tempo de sistemas a malha fechada usando o Simulink foram adicionados ao Cap. 5.

Capítulo 7 A análise de erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados foi deslocada do Cap. 7 para o Cap. 12.

Capítulo 9 A subseção que aborda o filtro supressor de faixa (*notch*) foi adicionada à Seção 9.4.

Capítulo 13 A análise de estabilidade de sistemas digitais no plano s usando a transformação bilinear foi adicionada à Seção 13.6, Estabilidade. Além disso, foram acrescentadas duas seções: (1) Compensação em Cascata por Intermédio do Plano s, que usa a transformação de Tustin, e (2) Implementação do Compensador Digital.

Apêndice B da Segunda Edição: Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Este material foi deslocado para o CD-ROM e é agora o Apêndice G.

Apêndice C da Segunda Edição: Tutorial do MATLAB Este material é agora o Apêndice B.

Apêndice C da Terceira Edição: *Tutorial do Simulink do MATLAB* Este é um novo apêndice.

Apêndice D da Segunda Edição: Programas em QuickBASIC da Microsoft®[6] O Apêndice D foi revisado, combinado com outras discussões que não tratam do MATLAB e deslocado para o Apêndice H do CD-ROM que acompanha o livro.

Apêndice D da Terceira Edição: Ferramentas GUI do MATLAB Este é um novo apêndice que inclui o LTI Viewer e o Root Locus Design GUI.

Apêndice E da Segunda Edição: Dedução de um Esquema para Motor CC Este material é agora o Apêndice F.

Apêndice E da Terceira Edição: Tutorial da *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB Este é um novo apêndice.

Apêndice F da Segunda Edição: Solução das Equações de Estado para $t_0 \neq 0$ Este material foi deslocado para o CD-ROM que acompanha o livro e é agora o Apêndice I.

Apêndice G da Segunda Edição: Regras do Lugar das Raízes: Deduções O Apêndice G foi deslocado para o CD-ROM que acompanha o livro e é agora o Apêndice J.

Organização dos Capítulos

Muitas vezes é útil compreender o raciocínio do autor por trás da organização do conteúdo do curso. Os parágrafos a seguir felizmente explicitam este tópico.

O objetivo principal do Cap. 1 é motivar o estudante. Neste capítulo o estudante aprende a respeito das muitas aplicações de sistemas de controle no quotidiano e sobre as vantagens do estudo e das atividades profissionais neste campo do conhecimento. Os objetivos de projeto de engenharia de sistemas de controle,[7] como resposta transitória, erro de estado estacionário e estabilidade, são apresentados, e também o caminho para atingir estes objetivos. Termos novos e não-familiares são igualmente incluídos no Glossário.

Muitos estudantes sentem dificuldade com o passo inicial da seqüência de análise e de projeto: transformar um sistema físico em um esquema. Este passo requer muitas hipóteses simplificadoras baseadas na experiência, que o estudante ainda não possui. A identificação de algumas dessas hipóteses no Cap. 1 auxilia a preencher esta lacuna de experiência.

[6]Microsoft é uma marca registrada da Microsoft Corporation.
[7]No Brasil, Engenharia de Controle e Automação. (*N.T.*)

Os Caps. 2, 3 e 5 tratam da representação de sistemas físicos. Os Caps. 2 e 3 cobrem a modelagem de sistemas a malha aberta usando técnicas de resposta de freqüência e técnicas do espaço de estados, respectivamente. O Cap. 5 discute a representação e a redução de sistemas formados por subsistemas a malha aberta interconectados. Somente algumas amostras representativas de sistemas físicos podem ser tratadas em um livro com esta extensão. Sistemas elétricos, mecânicos (em translação e em rotação) e eletromecânicos são usados como exemplos de sistemas físicos que são modelados, analisados e projetados. A linearização de um sistema não-linear — técnica usada pelo engenheiro para simplificar um sistema no sentido de representá-lo matematicamente — também é apresentada.

O Cap. 4 propicia uma introdução à análise de sistemas, isto é, a obtenção e a descrição da resposta de um sistema. Poderia parecer mais lógico inverter a ordem dos Caps. 4 e 5, para apresentar o material do Cap. 4 junto com os outros capítulos que cobrem a análise. Contudo, muitos anos ministrando sistemas de controle ensinaram que quanto mais cedo os estudantes virem uma aplicação do estudo da representação de sistemas, maior será o nível de motivação.

Os Caps. 6, 7, 8 e 9 retornam à análise e projeto de sistemas de controle com o estudo de estabilidade (Cap. 6), de erro de estado estacionário (Cap. 7) e de resposta transitória de sistemas de ordem elevada usando técnicas do lugar das raízes (Cap. 8). O Cap. 9 cobre o projeto de compensadores e de controladores usando o lugar das raízes.

Os Caps. 10 e 11 focalizam a análise e o projeto no domínio de freqüência senoidal. O Cap. 10, como o Cap. 8, cobre os conceitos básicos da análise de estabilidade, de resposta transitória e de erro de estado estacionário. Contudo, os métodos de Nyquist e de Bode são usados em substituição ao lugar das raízes. O Cap. 11, como o Cap. 9, cobre o projeto de compensadores, mas do ponto de vista das técnicas de resposta de freqüência senoidal em vez do lugar das raízes.

Uma introdução ao projeto no espaço de estados e à análise e projeto de sistemas de controle digital completam o texto nos Caps. 12 e 13, respectivamente. Embora estes capítulos possam ser usados como introdução para estudantes que prosseguirão seu estudo de engenharia de sistemas de controle, eles são úteis por si mesmos e como um suplemento à discussão sobre análise e projeto dos capítulos anteriores. Não é possível apresentar em dois capítulos um tratamento completo sobre o tema, mas a ênfase é resumida e relacionada de forma lógica ao restante do livro.

O Pacote de Recursos de Ensino

O seguinte material compreende o pacote de recursos de ensino da terceira edição do livro Engenharia de Sistemas de Controle.

PowerPoint e Acrobat Lecture Graphics As figuras-chave do texto estão disponíveis em gráficos eletrônicos em cores por meio de arquivos em PowerPoint e em pdf do Adobe Acrobat. Estes arquivos podem ser encontrados no CD-ROM que acompanha o livro e no site da Wiley, na Internet.

***Toolbox* de Engenharia de Sistemas de Controle** Todos os arquivos .m do MATLAB e do Simulink usados nos apêndices deste livro podem ser encontrados no CD-ROM e no site da Wiley, na Internet.

***Manual de Soluções para Engenharia de Sistemas de Controle*, 3.ª edição** de autoria de Norman S. Nise. Este manual contém soluções detalhadas da maioria dos problemas no texto. O Manual de Soluções é disponível somente para professores qualificados.

Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer aos colegas da California State Polytechnique University, em Pomona, que contribuíram para esta e para as edições anteriores de *Engenharia de Sistemas de Controle*. Sem o seu apoio este volume talvez não tivesse acontecido. Aos que contribuíram para esta terceira edição, meus agradecimentos especiais aqui. O apoio contínuo ao longo de todas as fases deste projeto do Electrical and Computer Engeneering Department e do seu Chefe, Yi Cheng, bem como do College of Engineering e do seu Diretor, Edward Hohmann foi inestimável para a conclusão deste trabalho.

Esta terceira edição foi completamente revista e verificada por meu colega M. Samy El-Sawah e por este trabalho agradecemos eu e os estudantes que a lêem.

Gostaria de externar um agradecimento especial a meus estudantes que usaram as edições anteriores ao longo dos últimos oito anos. Suas sugestões para esta nova edição foram inestimáveis. Em particular, quero agradecer a Michael House pelas muitas sugestões que me deu. Os polinômios de tempo de subida no Cap. 4 são um resultado direto de suas sugestões e do seu esforço.

Minha gratidão é estendida a Alan H. Nise pelas inúmeras horas gastas em criar aplicações isoladas de resposta em função do tempo e de análise e projeto com lugar das raízes incluídas no CD-ROM que acompanha o livro. Estes programas serão apreciados certamente pelos leitores que não têm acesso ao MATLAB.

O autor gostaria de agradecer a todos os revisores cujo domínio do assunto e cuja atenção a detalhes digna de louvores produziram muitas sugestões para melhorias desta terceira edição. Os revisores são os seguintes docen-

tes: Darren Dawson, Clemson University, Mahlon D. Heller, California State University, Sacramento; Vojislav D. Kalanovic, South Dakota School of Mines and Technology; Leslie R. Koval, The University of Missouri-Rolla; Marca J. Lam, The Cooper Union for the Advancement of Science and Art; Fu Li, Portland State University; Jure Medanic, University of Illinois em Urbana-Champaign; Medhat M. Morcos, Kansas State University; Satish S. Nair, University of Missouri, Columbia; Charles P. Neumann, Carnegie Mellon; J. William Ray, Jr., Louisiana Tech University; e Michael J. Rider, Ohio Northern University.

Gostaria também de expressar meu reconhecimento a Wayne E. Whiteman, Academia Militar dos Estados Unidos, pelo envio voluntário de numerosas sugestões para melhorar o conteúdo e a exatidão.

Antes da transferência deste título para a John Wiley & Sons, Inc. diversas pessoas nos deram orientação preciosa e auxiliaram nos estágios iniciais de desenvolvimento desta terceira edição. Sou grato por suas contribuições. Em particular quero agradecer ao seguinte pessoal da Addison-Wesley: Paul Becker, Editor de Aquisições; Anna Eberhard Friedlander, Editora Assistente; e Royden Tonomura, Assistente de Editorial. Durante sua breve transferência para a Prentice Hall, Tom Robbins, Editor, conduziu este título ao longo do seu desenvolvimento.

E, naturalmente, o autor gostaria de agradecer à John Wiley & Sons, Inc. e à sua equipe pelo suporte profissional fornecido a este projeto ao longo de todas as fases do seu desenvolvimento. Especificamente, devemos reconhecimento às seguintes pessoas por suas contribuições: Peter M. Janzow, Editor, que deu pleno suporte executivo a todo o projeto; Bill Zobrist, Editor de Aquisições, que forneceu orientação editorial profissional; Jennifer Welter, Assistente de Editorial, que sempre esteve lá para responder pontualmente as minhas inúmeras perguntas; e Robin Factor, Editor de Produção Sênior, que verificou o livro ao longo de todas as fases de produção. Gostaria também de agradecer a Karin Kincheloe, Projetista Sênior, pela contribuição na impressionante capa; a Lisa Gee, Editora de Fotografia, pela pesquisa das novas fotos que você vê no livro; e Katherine Hepburn, Gerente de Marketing, por fazer com que você tome conhecimento da existência deste livro. Há outros a agradecer; especialmente aqueles com quem não tive o prazer de interagir pessoalmente, mas cujas contribuições são, contudo, inestimáveis.

Finalmente, os créditos vão para os Serviços de Publicação e sua equipe pela produção da versão final do livro sob grande pressão e limitação de tempo. Especificamente, quero agradecer a Jan Fisher, Representante do Atendimento ao Cliente, por pavimentar suavemente os meios de produção e encampar minhas muitas indagações. Além disso, devo um obrigado a Bilal Dardai, Editor, e a Ken Churchill, Coordenador de Produção pela edição e produção finais do livro em um espírito de colaboração. Especialmente apreciada sua disposição de efetuar refinamentos de última hora que serão apreciados pelo leitor.

Norman S. Nise

Sumário

1. Introdução 1

1.1 Introdução, 2
1.2 História dos Sistemas de Controle, 4
1.3 O Engenheiro de Sistemas de Controle, 6
1.4 Características de Resposta e Configurações de Sistema, 8
1.5 Objetivos de Análise e de Projeto, 10
Introdução a um Estudo de Caso, 13
1.6 Procedimento de Projeto, 16
1.7 Projeto Assistido por Computador, 19
Sumário, 20
Perguntas de Revisão, 21
Problemas, 21
Bibliografia, 25

2. Modelagem no Domínio de Freqüência 27

2.1 Introdução, 28
2.2 Revisão sobre Transformada de Laplace, 28
2.3 Função de Transferência, 36
2.4 Funções de Transferência de Circuitos Elétricos, 38
2.5 Funções de Transferência de Sistemas Mecânicos em Translação, 50
2.6 Funções de Transferência de Sistema Mecânico em Rotação, 56
2.7 Funções de Transferência de Sistemas com Engrenagens, 60
2.8 Funções de Transferência de Sistema Eletromecânico, 64
2.9 Circuitos Elétricos Análogos, 69
2.10 Não-linearidades, 72
2.11 Linearização, 73
Estudos de Caso, 78
Sumário, 81
Perguntas de Revisão, 81
Problemas, 81
Bibliografia, 88

3. Modelagem no Domínio do Tempo 90

3.1 Introdução, 91
3.2 Algumas Observações, 91
3.3 A Representação Geral no Espaço de Estados, 94
3.4 Aplicando a Representação no Espaço de Estados, 96
3.5 Convertendo uma Função de Transferência para o Espaço de Estados, 102
3.6 Convertendo do Espaço de Estados para a Função de Transferência, 108
3.7 Linearização, 109
Estudos de Caso, 112
Sumário, 115
Perguntas de Revisão, 116
Problemas, 116
Bibliografia, 122

4. Resposta no Domínio do Tempo 123

4.1 Introdução, 124
4.2 Pólos, Zeros e Resposta do Sistema, 124
4.3 Sistemas de Primeira Ordem, 127
4.4 Sistemas de Segunda Ordem: Introdução, 129
4.5 O Sistema de Segunda Ordem Geral, 134
4.6 Sistemas de Segunda Ordem Subamortecidos, 136
4.7 Resposta de Sistemas com Pólos Adicionais, 145
4.8 Resposta de Sistema com Zeros, 148
4.9 Efeitos das Não-linearidades sobre a Resposta no Domínio do Tempo, 152
4.10 Solução das Equações de Estado Através da Transformada de Laplace, 156
4.11 Solução das Equações de Estado no Domínio do Tempo, 158
Estudos de Caso, 164
Sumário, 168
Perguntas de Revisão, 169
Problemas, 170
Problemas de Projeto, 175
Bibliografia, 177

5. Redução de Subsistemas Múltiplos 179

5.1 Introdução, 180
5.2 Diagramas de Blocos, 180
5.3 Análise e Projeto de Sistemas com Retroação, 188
5.4 Diagramas de Fluxo de Sinal, 190
5.5 Regra de Mason, 193
5.6 Diagramas de Fluxo de Sinal das Equações de Estado, 195
5.7 Representações Alternativas no Espaço de Estados, 197
5.8 Transformações de Similaridade, 205

Estudos de Caso, 215
Sumário, 220
Perguntas de Revisão, 220
Problemas, 221
Problemas de Projeto, 231
Bibliografia, 233

6. Estabilidade 234

6.1 Introdução, 235
6.2 Critério de Routh-Hurwitz, 238
6.3 Critério de Routh-Hurwitz: Casos Especiais, 240
6.4 Critério de Routh-Hurwitz: Exemplos Adicionais, 245
6.5 Estabilidade no Espaço de Estados, 251
Estudos de Caso, 254
Sumário, 255
Perguntas de Revisão, 256
Problemas, 256
Problemas de Projeto, 260
Bibliografia, 262

7. Erros de Estado Estacionário 263

7.1 Introdução, 264
7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária, 267
7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema, 271
7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário, 275
7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações, 277
7.6 Erro de Estado Estacionário para Sistemas com Retroação Não-unitária, 279
7.7 Sensibilidade, 282
7.8 Erro de Estado Estacionário de Sistemas no Espaço de Estados, 284
Estudos de Caso, 288
Sumário, 290
Perguntas de Revisão, 291
Problemas, 291
Problemas de Projeto, 298
Bibliografia, 300

8. Técnicas do Lugar das Raízes 301

8.1 Introdução, 302
8.2 Definindo o Lugar das Raízes, 305
8.3 Propriedades do Lugar das Raízes, 305
8.4 Esboçando o Lugar das Raízes, 310
8.5 Refinando o Esboço, 313

8.6 Um Exemplo, 321
8.7 Projeto de Resposta Transitória Através do Ajuste de Ganho, 323
8.8 Lugar das Raízes Generalizado, 327
8.9 Lugar das Raízes para Sistemas com Retroação Positiva, 329
8.10 Sensibilidade dos Pólos, 331
Estudos de Caso, 333
Sumário, 337
Perguntas de Revisão, 338
Problemas, 338
Problemas de Projeto, 346
Bibliografia, 351

9. Projeto por Intermédio do Lugar das Raízes 353

9.1 Introdução, 354
9.2 Melhorando o Erro de Estado Estacionário Através da Compensação em Cascata, 356
9.3 Melhorando a Resposta Transitória Através da Compensação em Cascata, 364
9.4 Melhorando o Erro de Estado Estacionário e a Resposta Transitória, 376
9.5 Compensação por Retroação, 387
9.6 Realização Física da Compensação, 397
Estudos de Caso, 402
Sumário, 406
Perguntas de Revisão, 407
Problemas, 408
Problemas de Projeto, 412
Bibliografia, 415

10. Técnicas de Resposta de Freqüência 417

10.1 Introdução, 418
10.2 Aproximações Assintóticas: Gráficos de Bode, 423
10.3 Introdução ao Critério de Nyquist, 439
10.4 Esboçando o Diagrama de Nyquist, 443
10.5 Estabilidade por Intermédio do Diagrama de Nyquist, 447
10.6 Margem de Ganho e Margem de Fase por Intermédio do Diagrama de Nyquist, 451
10.7 Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase por Intermédio dos Gráficos de Bode, 453
10.8 Relação entre Resposta Transitória a Malha Fechada e Resposta de Freqüência a Malha Fechada, 455
10.9 Relação entre Respostas de Freqüência a Malha Aberta e a Malha Fechada, 458
10.10 Relação entre Respostas Transitória a Malha Fechada e de Freqüência a Malha Aberta, 463
10.11 Características de Erro do Estado Estacionário a Partir da Resposta de Freqüência, 466
10.12 Sistemas com Retardo, 470
10.13 Obtendo Funções de Transferência Experimentalmente, 474
Estudos de Caso, 478
Sumário, 479

Perguntas de Revisão, 480
Problemas, 480
Bibliografia, 488

11. Projeto por Intermédio da Resposta de Freqüência 490

11.1 Introdução, 491
11.2 Resposta Transitória por Intermédio do Ajuste de Ganho, 492
11.3 Compensação por Atraso de Fase, 494
11.4 Compensação por Avanço de Fase, 498
11.5 Compensação por Atraso e Avanço de Fase, 503
Estudos de Caso, 507
Sumário, 508
Perguntas de Revisão, 509
Problemas, 509
Problemas de Projeto, 511
Bibliografia, 513

12. Projeto no Espaço de Estados 515

12.1 Introdução, 516
12.2 Projeto do Controlador, 517
12.3 Controlabilidade, 522
12.4 Abordagens Alternativas para o Projeto do Controlador, 525
12.5 Projeto do Observador, 529
12.6 Observabilidade, 535
12.7 Abordagens Alternativas para o Projeto de Observadores, 538
12.8 Projeto de Erro de Estado Estacionário por Intermédio do Controle Integral, 543
Estudos de Caso, 547
Sumário, 551
Perguntas de Revisão, 552
Problemas, 552
Problemas de Projeto, 555
Bibliografia, 556

13. Sistemas de Controle Digital 558

13.1 Introdução, 559
13.2 Modelando o Computador Digital, 562
13.3 A Transformada z, 564
13.4 Funções de Transferência, 568
13.5 Redução de Diagrama de Blocos, 571
13.6 Estabilidade, 573
13.7 Erros de Estado Estacionário, 579
13.8 Resposta Transitória no Plano z, 582
13.9 Projeto de Ajuste de Ganho no Plano z, 584

13.10 Compensação em Cascata por Intermédio do Plano s, 587
13.11 Implementação do Compensador Digital, 590
Estudos de Caso, 593
Sumário, 597
Perguntas de Revisão, 598
Problemas, 598
Problemas de Projeto, 601
Bibliografia, 602

Apêndice A Lista de Símbolos 603

Apêndice B Tutorial do MATLAB 606

Apêndice C Tutorial do Simulink do MATLAB 642

Apêndice D Tutorial sobre Ferramentas de Interface Gráfica de Usuário (GUI) do MATLAB 654

Apêndice E Tutorial da *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB 665

Apêndice F Obtenção de um Diagrama Esquemático de um Motor CC 673

Glossário 676

Respostas dos Problemas Selecionados 682

Créditos 687

Índice 689

Apêndice G Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações CD-ROM
G.1 Definições e Notações de Matrizes
G.2 Operações com Matrizes
G.3 Identidades de Matrizes e de Determinantes
G.4 Sistemas de Equações
Bibliografia

Apêndice H Auxílios Computacionais para Sistemas de Controle CD-ROM
H.1 Resposta ao Degrau de um Sistema Representado no Espaço de Estados
H.2 Lugar das Raízes e Resposta de Freqüência

Apêndice I Solução das Equações de Estado para $t_0 \neq 0$ CD-ROM

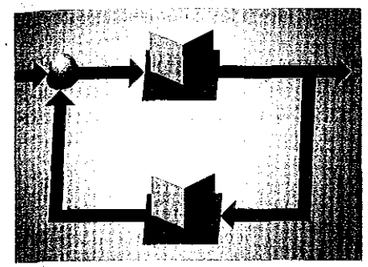
Apêndice J Regras do Lugar das Raízes: Deduções CD-ROM
J.1 Comportamento do Lugar das Raízes no Infinito
J.2 Dedução do Método de Transição para Pontos de Saída e de Entrada

Soluções dos Exercícios de Avaliação CD-ROM

Arquivos do MATLAB CD-ROM

Figuras das Aulas CD-ROM

CAPÍTULO 1



Introdução

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo introdutório estudaremos o seguinte:

- Aplicações de sistemas de controle
- História dos sistemas de controle
- Como você pode se beneficiar com o estudo de sistemas de controle
- Características e configurações básicas dos sistemas de controle
- Objetivos de análise e de projeto
- O procedimento de projeto

Objetivos do Estudo de Caso

- Você será apresentado a um estudo de caso repetido — o sistema de controle de posição de uma antena em azimute — que servirá para ilustrar princípios em cada um dos capítulos subseqüentes. Neste capítulo, o sistema é usado para demonstrar qualitativamente como funciona um sistema de controle, bem como definir critérios de desempenho que constituem a base para analisar e projetar este tipo de sistema.

1.1 Introdução

Os sistemas de controle são parte integrante da sociedade moderna. Numerosas aplicações estão ao nosso redor: foguetes são disparados, e o ônibus espacial decola rumo a uma órbita ao redor da Terra; pulveriza-se água de refrigeração, e peças metálicas são usinadas automaticamente; veículos pilotados automaticamente, transportando material para estações de trabalho de uma fábrica montadora no espaço, deslizam ao longo de andaimes procurando o ponto predeterminado de entrega. Estes são alguns exemplos de sistemas controlados automaticamente que podemos criar.

Não somos os únicos criadores de sistemas controlados automaticamente; estes sistemas também existem na natureza. Dentro do nosso próprio corpo há numerosos sistemas de controle, como o pâncreas, que regula o açúcar no sangue. Nos instantes de "lutar ou fugir", a adrenalina aumenta com o ritmo do coração, produzindo mais oxigênio a ser entregue às células. Nossos olhos seguem um objeto em movimento para mantê-lo no campo visual; nossas mãos seguram um objeto e o colocam precisamente em um local predeterminado.

Mesmo o mundo não-físico parece ser regulado automaticamente. Têm sido sugeridos modelos descrevendo o controle automático do desempenho de um estudante. A grandeza de entrada do modelo é o tempo de estudo disponível do estudante, e a saída é a nota. O modelo pode ser usado para prever o tempo necessário para aumentar a nota se ocorrer, de repente, uma maior disponibilidade de tempo para estudo. Usando este modelo, você pode determinar se vale a pena aumentar o estudo durante a última semana do período.

Definição de Sistema de Controle

Um sistema de controle consiste em *subsistemas* e *processos* (ou *plantas*[1]) reunidos com o propósito de controlar as saídas dos processos. Por exemplo, uma caldeira produz calor como resultado do fluxo de combustível. Neste processo, subsistemas chamados *válvulas de combustível* e *atuadores de válvulas de combustível* são usados para regular a temperatura de uma sala controlando a saída de calor da caldeira. Outros subsistemas, como os termostatos, que se comportam como sensores, medem a temperatura da sala. Na sua forma mais simples, um sistema de controle fornece uma saída ou resposta para uma dada entrada ou estímulo, conforme mostrado na Fig. 1.1.

Benefícios dos Sistemas de Controle

Com sistemas de controle podemos mover grandes equipamentos com precisão que, de outra forma, seria impossível. Podemos apontar imensas antenas para alcançar os pontos mais remotos do universo e captar sinais de rádio extremamente fracos; controlar estas antenas à mão seria impossível. Por causa dos sistemas de controle, os elevadores nos transportam rapidamente ao nosso destino, parando automaticamente no andar certo (Fig. 1.2). Sozinhos não poderíamos fornecer a energia requerida pela carga e pela velocidade; os motores fornecem a energia, e os sistemas de controle regulam a posição e a velocidade.

Construímos sistemas de controle por quatro razões principais:

1. Amplificação de potência
2. Controle remoto
3. Facilidade de uso da forma de entrada
4. Compensação de perturbações

Por exemplo, uma antena de radar, posicionada pela rotação de baixa potência de um botão de baixa força na entrada, requer uma grande potência para sua rotação de saída. Um sistema de controle pode produzir a amplificação de potência necessária, ou o *ganho* de potência.

Robôs projetados com base nos princípios dos sistemas de controle podem compensar deficiências humanas. Sistemas de controle são também úteis em localidades remotas ou perigosas. Por exemplo, um braço robótico controlado remotamente pode ser usado para manipular material em um ambiente radioativo. A Fig. 1.3 mostra um braço robótico projetado para operar em ambientes contaminados.

Os sistemas de controle podem também ser usados para facilitar o uso mudando a forma da entrada. Por exemplo, em um sistema de controle de temperatura, a entrada é uma *posição* em um termostato. A saída é *calor*. Desta maneira, uma posição conveniente de entrada produz uma saída térmica desejada.

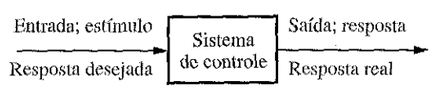
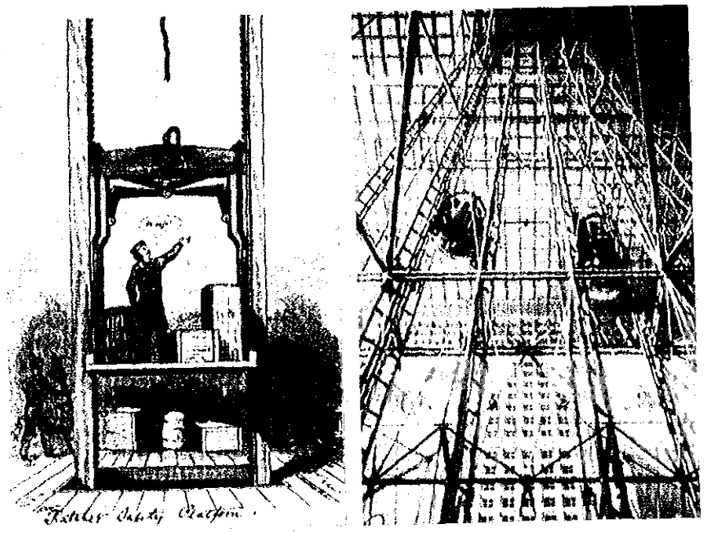


Fig. 1.1 Descrição simplificada de um sistema de controle

[1]O termo *plant* do original em inglês está sendo traduzido como *planta*, com a acepção de instalação produtiva, fábrica — registrada na versão 3.0 do *Dicionário Eletrônico Novo Aurélio Século XXI*. (N.T.)



(a) (b)

Fig. 1.2 a. Os elevadores primitivos eram controlados por cabos manuais ou por um operador de elevador. Aqui, uma corda é cortada para demonstrar o freio de segurança, uma inovação nos elevadores primitivos; **b.** os modernos elevadores de transporte duplo fazem sua subida no Grande Arche em Paris, conduzido por um motor, com cada carro contrabalançando o outro. Hoje, os elevadores são completamente automáticos, usando sistemas de controle para regular posição e velocidade.

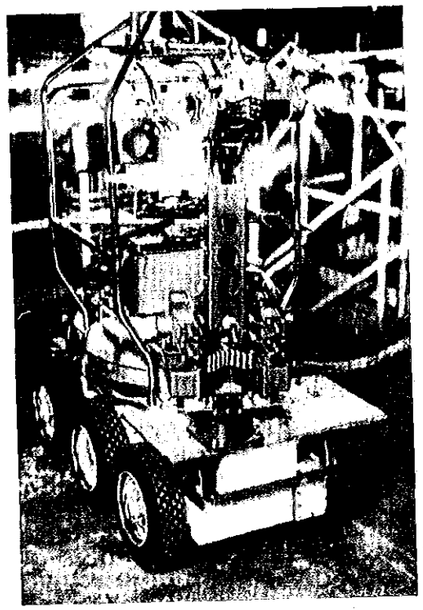


Fig. 1.3 O *Rover* foi construído para trabalhar nas áreas contaminadas de Three Mile Island em Middleton, PA, onde ocorreu um acidente nuclear em 1979. O longo braço do robô de controle remoto pode ser visto na frente do veículo.

Vejamos agora um outro benefício dos sistemas de controle, a capacidade de compensar perturbações. Usualmente, controlamos variáveis como temperatura em sistemas térmicos, posição e velocidade em sistemas mecânicos, e tensão, corrente ou freqüência em sistemas elétricos. O sistema deve ser capaz de fornecer a saída correta mesmo em presença de perturbações. Por exemplo, considere um sistema de antena que aponta em uma direção comandada. Se um vento força a antena a se deslocar de sua posição comandada ou se algum ruído entra internamente, o sistema deve ser capaz de detectar a perturbação e corrigir a posição da antena. Obviamente, a entrada do sistema não muda para fazer a correção. Conseqüentemente, o próprio sistema (1) mede o quanto a perturbação reposicionou a antena, e (2) retorna a antena para a posição comandada pela entrada.

1.2 História dos Sistemas de Controle

Os sistemas de controle com retroação são mais antigos que a humanidade. Numerosos sistemas de controle biológicos fizeram parte dos primeiros habitantes do nosso planeta. Vejamos uma breve história dos sistemas de controle.[2]

Controle Nível-Líquido

Os gregos começaram a engenharia de sistemas com retroação por volta de 300 a.C. Um relógio de água, inventado por Ktesibios, operava por meio do gotejamento de água, a uma taxa constante, dentro de um reservatório medidor. O nível de água no reservatório medidor podia ser usado para informar o tempo decorrido. Para obter um gotejamento a uma taxa constante, o reservatório de alimentação tinha de ser mantido com um nível constante. Isto era realizado usando uma bóia semelhante à do controle de nível das caixas de descarga dos vasos sanitários atuais.

Logo depois de Ktesibios, a idéia do controle de nível de líquido foi aplicada em um lampião a óleo por Fílon de Bizâncio.[3] O lampião consistia em dois reservatórios de óleo configurados verticalmente. O inferior, aberto no topo, fornecia o combustível para a chama. O vaso superior, fechado, constituía o depósito de combustível para o vaso inferior. Os reservatórios eram interconectados por dois tubos capilares e um outro tubo, chamado *transportador vertical*, inserido dentro do óleo do vaso inferior logo abaixo da superfície do líquido. À medida que o óleo queimava, a base do tubo transportador era exposta ao ar, o que forçava o óleo do reservatório de cima a fluir através dos tubos capilares para o interior do vaso de baixo. A transferência de combustível a partir do reservatório superior para o inferior era interrompida quando se restabelecia o nível de óleo anterior, impedindo, assim, o ar de entrar no transportador. Em conseqüência, o sistema mantinha o nível do líquido constante no reservatório inferior.

Controles de Pressão de Vapor e Temperatura

A regulação de pressão de vapor começou por volta de 1681 com a invenção da válvula de segurança de Denis Papin. O conceito foi mais elaborado com a inclusão de peso na parte superior da válvula. Se a ação da pressão na parte superior da caldeira excedesse o valor do peso, o vapor era liberado e a pressão diminuía. Se não excedesse o valor, a válvula não abria e a pressão interna da caldeira aumentava. Desta maneira, o valor do peso na parte superior da válvula ajustava a pressão interna da caldeira.

Também no século XVII, Cornelis Drebbel, na Holanda, inventou um sistema de controle de temperatura exclusivamente mecânico para chocar ovos. O dispositivo utilizava um pequeno frasco de álcool e mercúrio com um flutuador aí inserido. O flutuador era conectado a um abafador que controlava a chama. Uma parte do frasco era inserida na incubadora para sentir o calor gerado pelo fogo. Quando o calor aumentava, o álcool e o mercúrio se expandiam, elevando o flutuador, que fechava o abafador e reduzia a chama. Uma redução na temperatura fazia o flutuador descer, abrindo o abafador e aumentando a intensidade da chama.

Controle de Velocidade

Em 1745, o controle de velocidade era aplicado a um moinho de vento por Edmund Lee. Um aumento na intensidade do vento posicionava as pás de modo a expor uma menor área delas. Quando o vento diminuía, uma área maior das pás ficava disponível. William Cubitt aperfeiçoou a idéia em 1809 dividindo a vela do moinho de vento em venezianas móveis.

Também no século XVIII, James Watt inventou o regulador de velocidade de esferas para controlar a velocidade de máquinas a vapor. Neste dispositivo, duas esferas em rotação se elevam quando a velocidade angular aumenta. Uma válvula de vapor conectada ao mecanismo das esferas fecha com um movimento ascendente destas e abre com um movimento descendente, regulando desta maneira a velocidade.

Estabilidade, Estabilização e Condução

A teoria dos sistemas de controle, como a conhecemos hoje, começou a se cristalizar na segunda metade do século XIX. Em 1868, James Clerk Maxwell publicou o critério da estabilidade para um sistema de terceira ordem baseado nos coeficientes da equação diferencial. Em 1874, Edward John Routh, usando uma sugestão de William Kingdon Clifford que fora ignorada anteriormente por Maxwell, foi capaz de estender o critério da estabilidade para sistemas de quinta ordem. Em 1877, o tema para o Prêmio Adams foi "O Critério da Estabilidade Dinâmica". Em resposta, Routh submeteu um artigo intitulado "Um Tratado sobre a Estabilidade de um Dado Estado de Movimento" e ganhou o prêmio. Este artigo contém o que agora é conhecido como critério para a estabilidade de Routh-Hurwitz, que estudaremos no Cap. 6. Alexander Michailovich Lyapunov também contribuiu para o desenvolvimento e a formulação da teoria e da prática da estabilidade de sistemas de controle. Discípulo de P. L. Chebyshev da Universidade de São Petersburgo, na Rússia, Lyapunov estendeu o trabalho de Routh para sistemas não-lineares em sua tese de doutorado em 1892 intitulada "O Problema Geral da Estabilidade do Movimento".

Durante a segunda metade dos anos 1800, o desenvolvimento de sistemas de controle esteve focado na direção e na estabilização de navios. Em 1874, Henry Bessemer, usando um giroscópio para detectar o movimento angular de uma embarcação e aplicando energia gerada pelo sistema hidráulico da embarcação, moveu o restaurante da embarcação para mantê-lo estável (se isto realmente produziu alguma diferença para os clientes é questionável). Outros esforços foram despendidos para estabilizar plataformas de canhões, bem como estabilizar embarcações inteiras, usando pêndulos para sentir o movimento.

Desenvolvimentos do Século XX

A pilotagem automática de navios não pôde ser realizada senão no início dos anos 1900. Em 1922, a Sperry Gyroscope Company instalou um sistema automático de pilotagem que usou os elementos de compensação e de controle adaptativo para melhorar o desempenho. Contudo, grande parte da teoria geral usada nos dias de hoje para melhorar o desempenho de sistemas de controle automático é atribuída a Nicholas Minorsky, um russo nascido em 1885. Foi o desenvolvimento teórico aplicado por ele na pilotagem automática de embarcações que resultou no que hoje chamamos de controlador proporcional, integral e derivativo (PID), ou controlador de três modos, que estudaremos nos Caps. 9 e 11.

No final dos anos 1920 e começo dos anos 1930, H. W. Bode e H. Nyquist desenvolveram nos laboratórios da Bell Telephone a análise de amplificadores com retroação. Esta contribuição evoluiu para as técnicas de análise e projeto no domínio de freqüência senoidal usadas atualmente para sistemas de controle com retroação e apresentadas nos Caps. 10 e 11.

Em 1948, Walter R. Evans, trabalhando na indústria aeronáutica, desenvolveu uma técnica gráfica para traçar as raízes de uma equação característica de um sistema com retroação cujos parâmetros mudam de valor sobre uma faixa particular de valores. Esta técnica, conhecida hoje como lugar das raízes, toma seu lugar ao lado dos trabalhos de Bode e Nyquist na formulação dos fundamentos da teoria para análise e projeto de sistemas de controle lineares. Estudaremos o lugar das raízes nos Caps. 8, 9 e 13.

Aplicações Contemporâneas

Hoje, os sistemas de controle encontram aplicação ampla na direção, navegação e controle de mísseis e de naves espaciais, bem como em aviões e navios. Por exemplo, os navios modernos usam uma combinação de componentes elétricos, mecânicos e hidráulicos para desenvolver os comandos do leme em resposta aos comandos de rumo desejado. Os comandos do leme, por sua vez, resultam em um ângulo do leme que manobra o navio.

Encontramos sistemas de controle por toda parte ao longo da indústria de controle de processos regulando níveis de líquidos em reservatórios, concentrações químicas em tonéis, bem como espessura de materiais fabricados. Por exemplo, considere um sistema de controle de espessura para uma placa de aço na laminação final. O aço entra na laminação final e passa através de cilindros. Na laminação final, raios X medem a espessura real e a comparam com a espessura desejada. Qualquer diferença é ajustada por um controle de posição que muda o afastamento entre os rolos dos cilindros através dos quais o aço passa. Esta mudança no afastamento dos rolos regula a espessura.

Os desenvolvimentos modernos têm visto o uso em larga escala de computadores digitais como parte dos sistemas de controle. Por exemplo, computadores são parte de sistemas de controle usados em robôs industriais, em naves espaciais e na indústria de controle de processos. É difícil conceber um sistema de controle moderno que não use computador digital.

O ônibus espacial contém numerosos sistemas de controle operados por um computador de bordo compartilhado no tempo. Sem sistemas de controle seria impossível guiar o ônibus da Terra para a órbita terrestre e vice-versa ou ajustar a sua própria órbita e assegurar a vida a bordo. As funções de navegação programadas nos computadores do ônibus usam dados obtidos dos equipamentos de bordo para estimar a posição e a velocidade do veículo. Esta informação alimenta as equações de guiamento que calcula os comandos para o sistema de controle de vôo do ônibus, que manobra a nave espacial. No espaço, o sistema de controle de vôo movimenta angularmente os motores do sistema de manobra orbital (OMS)[4] para uma posição que forneça o empuxo na direção conveniente à manobra comandada. Dentro da atmosfera terrestre, o ônibus é manobrado por comandos enviados pelo sistema de controle de vôo a superfícies aerodinâmicas, como os elevons.[5]

No interior deste grande sistema de controle representado pela navegação, guiamento e controle existem inúmeros subsistemas para controlar as funções do veículo. Por exemplo, os elevons necessitam de um sistema de controle para assegurar que sua posição seja realmente a que foi comandada, uma vez que perturbações como rajadas de vento podem desviá-los da posição comandada. De modo semelhante, no espaço, o movimento angular dos motores de manobra orbital requer um sistema de controle semelhante para assegurar que a rotação dos motores seja executada com velocidade e precisão. Sistemas de controle são também usados para controlar e estabilizar

[2]Ver Bennet (1979) e Mayr (1970) — obras completas sobre a história dos sistemas de controle.
[3]Hoje, Istambul. (N.T.)

[4]OMS, do inglês Orbital Maneuvering System. (N.T.)
[5](Termo aeronáutico) Superfície de controle que combina as funções de *aileron* e de profundor. (N.T.)

o veículo durante sua descida da órbita. Um grande número de pequenos jatos que compõem o sistema de controle de reação (RCS) são usados inicialmente na exosfera, onde as superfícies aerodinâmicas são ineficientes. Mais tarde, o controle é passado para as superfícies aerodinâmicas à medida que o veículo orbital ingressa na atmosfera.

Dentro do ônibus, numerosos sistemas de controle são necessários para suprir energia e suporte a atividades de seres vivos. Por exemplo, o veículo orbital possui três células combustíveis que convertem hidrogênio e oxigênio (reagentes) em eletricidade e água para uso da tripulação. As células combustíveis envolvem o uso de sistemas de controle para regular temperatura e pressão. Os reservatórios do reagente são mantidos a pressão constante à medida que a quantidade de reagente diminui. Sensores nos reservatórios enviam sinais aos sistemas de controle para ligar ou desligar os aquecedores de modo a manter constante a pressão do reservatório (Rockwell International, 1984).

Os sistemas de controle não estão limitados à ciência e à indústria. Por exemplo, um sistema de aquecimento residencial contém um sistema de controle simples que consiste em um material bimetálico que expande ou contrai com a mudança de temperatura. Esta expansão ou contração movimenta um frasco de mercúrio que atua como uma chave, ligando ou desligando o aquecedor. A quantidade de expansão ou contração necessária para mover a chave de mercúrio é determinada pelo ajuste de temperatura.

Sistemas de entretenimento doméstico também incorporaram sistemas de controle. Por exemplo, em um equipamento de disco de vídeo ou de CD, cavidades microscópicas representando informações são usinadas no disco por um laser durante o processo de gravação (Fig. 1.4). Durante a reprodução, um feixe de laser muda de intensidade ao ser refletido nas cavidades. As mudanças de intensidade da luz são convertidas em sinal elétrico e processadas como som ou imagem. Um sistema de controle mantém o feixe de laser posicionado nas cavidades, que são usinadas como círculos concêntricos.

Há um número incontável de outros exemplos de sistemas de controle, do cotidiano ao extraordinário. Ao iniciar o estudo de engenharia de sistemas de controle, você se concientizará sobre a imensa variedade de aplicações e de oportunidades que eles representam para os engenheiros de controle e automação.[6]

1.3 O Engenheiro de Sistemas de Controle[7]

A Engenharia de Controle e Automação[8] é um campo excitante para nele você aplicar seus talentos de engenharia, porque ela percorre inúmeras áreas de conhecimento e inúmeras funções dentro destas áreas. O engenheiro de controle e automação pode ser encontrado no nível mais alto de grandes projetos, envolvido na fase conceitual de determinar ou implementar os requisitos globais do sistema. Estes requisitos incluem especificações do desempenho do sistema como um todo, funções de subsistemas, e a interconexão destas funções, incluindo os requisitos de interface, projeto de hardware e software, e planos e procedimentos de teste.

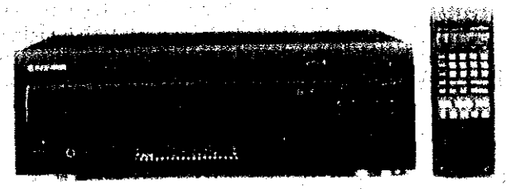
Muitos engenheiros estão engajados em somente uma área, como o projeto de circuitos ou o desenvolvimento de software. Contudo, como engenheiro de controle e automação, você pode se descobrir trabalhando em uma ampla área e interagindo com pessoas de inúmeros ramos da engenharia e da ciência. Por exemplo, se você estiver trabalhando em um sistema biológico, precisará interagir com colegas das ciências biológicas, de engenharia mecânica, de engenharia elétrica e de engenharia de computação, sem mencionar matemáticos e físicos. Você estará trabalhando com estes engenheiros em todos os níveis do desenvolvimento do projeto a partir do conceito, passando pelo desenvolvimento e, finalmente, testando. No nível de desenvolvimento, o engenheiro de controle e automação pode estar executando a seleção, projeto e interface de hardware, incluindo o desenvolvimento total de subsistemas para atender os requisitos especificados. O engenheiro de controle pode estar trabalhando com sensores e motores, bem como com circuitos eletrônicos, pneumáticos e hidráulicos.

O ônibus espacial fornece outro exemplo da diversidade exigida do engenheiro de sistemas. Na seção anterior, mostramos que os sistemas de controle do ônibus espacial envolvem muitos ramos do conhecimento científico: mecânica orbital e propulsão, aerodinâmica, engenharia elétrica e engenharia mecânica. Trabalhe ou não no programa espacial, como engenheiro de controle e automação você aplicará conhecimento amplo para solucionar problemas de engenharia de controle. Você terá a oportunidade de expandir seus horizontes de engenharia além do currículo universitário.

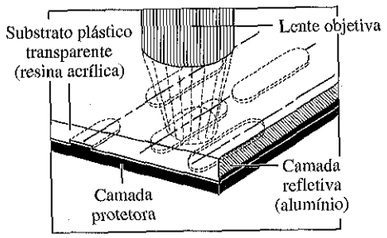
Agora você está ciente das futuras oportunidades. Mas, por ora, que vantagens este curso oferece a um estudante de sistemas de controle (além do fato de você necessitar se graduar)? Os currículos de engenharia tendem a enfatizar o projeto *de baixo para cima*. Isto é, você começa a partir dos componentes, desenvolve circuitos, e então monta um produto. No projeto *de cima para baixo*, primeiro é formulada uma visão de alto nível sobre os requisitos; em seguida, são determinados as funções e o hardware necessários para implementar o sistema. Como resultado deste curso, você será capaz de adotar uma abordagem sistêmica, *de cima para baixo*.

Uma das razões principais para não ensinar o projeto *de cima para baixo* ao longo de todo o currículo é o alto nível de matemática exigido inicialmente para a abordagem dos sistemas. Por exemplo, a teoria de sistemas de controle, que requer equações diferenciais, não pode ser ensinada nos primeiros períodos. Por outro lado, ao pro-

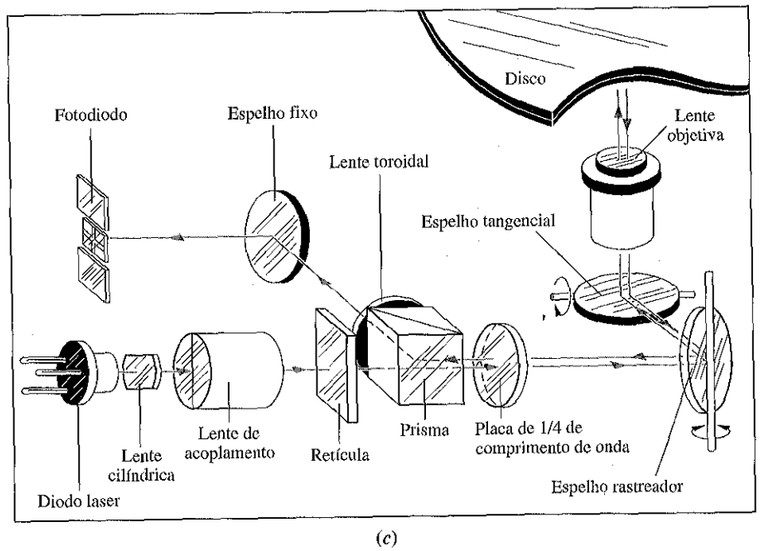
[6]Esta é a designação, no Brasil, dos engenheiros de sistemas de controle. (N.T.)
[7]No Brasil, Engenheiro de Controle e Automação. (N.T.)
[8]Idem. (N.T.)



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Fig. 1.4 a. Reprodutor de disco de vídeo a laser; **b.** lentes objetivas lendo depressões no disco; **c.** trajetória óptica para reprodução mostrando o espelho de rastreamento acionado angularmente por um sistema de controle para manter o feixe de laser posicionado nas depressões

gredir através do projeto de baixo para cima, é difícil enxergar como os cursos que você está tendo se ajustam logicamente dentro da grande moldura do ciclo de desenvolvimento do produto.

Ao concluir este curso de sistemas de controle, você será capaz de retroceder e constatar como seus estudos anteriores se ajustam dentro do grande cenário. O curso sobre amplificadores ou o curso sobre vibrações terá um novo significado quando você começar a ver o papel que eles desempenham como parte integrante do desenvolvimento do produto. Por exemplo, como engenheiros, queremos descrever o mundo físico matematicamente para tornar possível a criação de sistemas que beneficiarão a humanidade. Você descobrirá que realmente adquiriu, através de seus cursos anteriores, a habilidade de modelar sistemas físicos matematicamente, embora às vezes possa não ter entendido onde se ajusta a modelagem no ciclo de desenvolvimento do produto. Este curso esclarecerá os procedimentos de análise e planejamento e mostrará a você como o conhecimento adquirido se encaixa dentro do cenário total do projeto do sistema.

A compreensão dos sistemas de controle capacita os alunos de todos os ramos da engenharia a falar uma linguagem comum e a desenvolver apreciação e conhecimento do trabalho dos outros ramos. Você descobrirá que realmente não existe muita diferença entre os ramos da engenharia, ao menos no que concerne aos objetivos e aplicações. Ao estudar sistemas de controle, você verá este aspecto comum.

1.4 Características de Resposta e Configurações de Sistema

Nesta seção daremos uma olhada mais de perto nas características de resposta dos sistemas de controle. Discutiremos, também, duas configurações principais dos sistemas de controle: malha aberta e malha fechada. Finalmente, mostraremos como um computador digital faz parte de uma configuração de sistema de controle.

Entrada e Saída

Conforme observado anteriormente, um sistema de controle fornece uma saída ou resposta para uma dada entrada ou estímulo. A entrada representa a resposta desejada; a saída é a resposta real. Por exemplo, quando o botão do quarto andar de um elevador é pressionado no térreo, o elevador sobe até o quarto andar com uma velocidade e com uma precisão de nivelamento projetados para o conforto do passageiro. A Fig. 1.5 mostra a entrada e a saída para o sistema elevador. O acionamento do botão do quarto andar é a entrada e é representado por um comando em degrau. Note que no interesse pelo conforto do passageiro, sem falar na potência limitada disponível, não poderíamos querer que o elevador imitasse a transição instantânea da entrada. A entrada representa o que gostaríamos que a saída fosse depois que o elevador tivesse parado; o elevador, em si, segue o deslocamento descrito pela curva denominada *resposta do elevador*.

Dois fatores fazem a saída diferente da entrada. Primeiro, compare a mudança instantânea da entrada contra a mudança gradual da saída na Fig. 1.5. Entidades físicas não podem mudar seus estados (por exemplo, posição ou velocidade) instantaneamente. O estado se altera segundo uma trajetória que se relaciona com o dispositivo físico e ao modo como armazena ou dissipa energia. Desta maneira, o elevador é submetido a uma mudança gradual à medida que sobe do primeiro para o quarto andar. Chamamos esta parte da resposta de *resposta transitória*.

Depois da resposta transitória, um sistema físico tende à resposta de *estado estacionário*, que é a aproximação da resposta comandada ou desejada. Para o exemplo do elevador, esta resposta ocorre quando o elevador alcança o quarto andar. A precisão do nivelamento do elevador com o piso do andar é um segundo fator que poderia tornar a saída diferente da entrada. Chamamos esta diferença, mostrada na Fig. 1.5, de *erro de estado estacionário*. A ocorrência de erro de estado estacionário não existe somente nos sistemas de controle com defeito. Freqüentemente, o erro de estado estacionário é inerente ao sistema projetado, e o engenheiro de controle e automação determina se esse erro conduz ou não a degradação relevante das funções do sistema. Por exemplo, em sistemas de rastreamento de satélite, alguns erros de estado estacionário podem ser tolerados desde que suficientemente pequenos para manter o satélite próximo ao centro do feixe do radar de rastreamento. Contudo, para um robô inserindo um chip de memória em uma placa, o erro de estado estacionário deve ser zero.

Agora descreveremos duas configurações de sistemas de controle — malha aberta e malha fechada. Podemos considerar que estas configurações sejam a arquitetura interna do sistema inteiro mostrado na Fig. 1.1.

Sistemas a Malha Aberta

Um sistema a *malha aberta* genérico é mostrado na Fig. 1.6(*a*). Consiste em um subsistema chamado *transdutor de entrada*, que converte a forma de entrada na que é usada pelo *controlador*. O controlador age sobre um processo ou planta. A entrada às vezes é chamada de *referência*, ao passo que a saída pode ser chamada de *variável controlada*. Outros sinais, como *perturbações*, são mostrados somados às saídas do controlador e do processo por meio de *junções de adição*, as quais produzem a soma algébrica de seus sinais de entrada usando sinais associados. Por exemplo, a planta pode ser uma caldeira ou um sistema de condicionamento de ar, onde a variável de saída é a

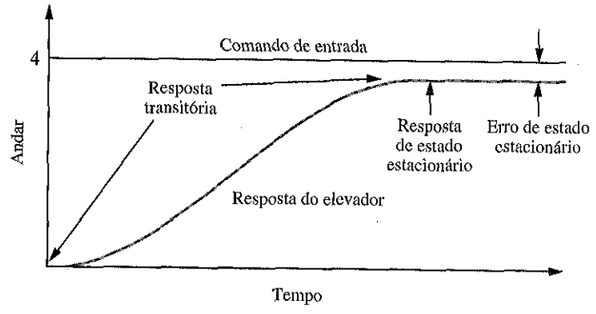


Fig. 1.5 Entrada e saída do elevador

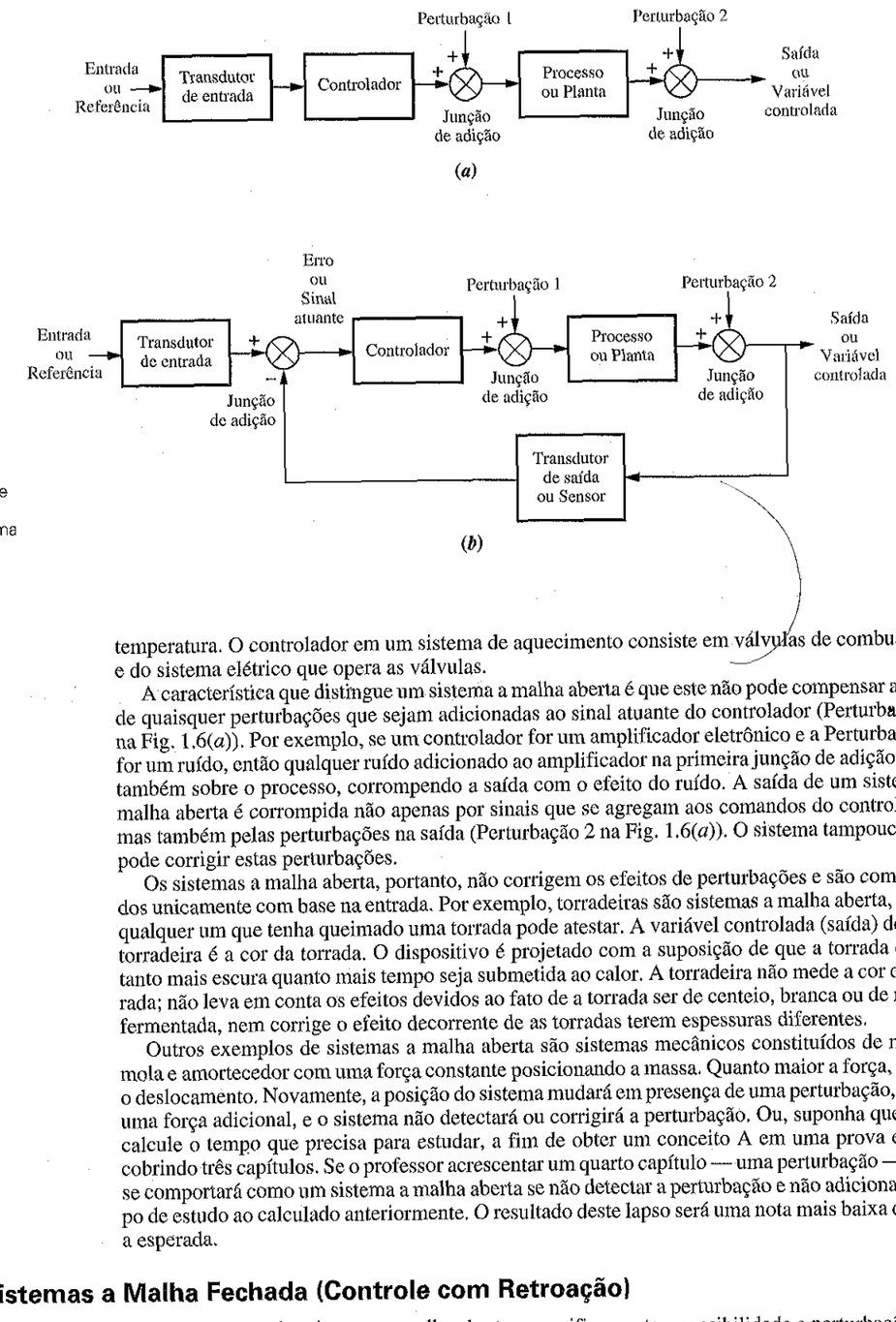


Fig. 1.6 Diagrama de blocos dos sistemas de controle: **a.** sistema a malha aberta; **b.** sistema a malha fechada

temperatura. O controlador em um sistema de aquecimento consiste em válvulas de combustível e do sistema elétrico que opera as válvulas.

A característica que distingue um sistema a malha aberta é que este não pode compensar a ação de quaisquer perturbações que sejam adicionadas ao sinal atuante do controlador (Perturbação 1 na Fig. 1.6(*a*)). Por exemplo, se um controlador for um amplificador eletrônico e a Perturbação 1 for um ruído, então qualquer ruído adicionado ao amplificador na primeira junção de adição agirá também sobre o processo, corrompendo a saída com o efeito do ruído. A saída de um sistema a malha aberta é corrompida não apenas por sinais que se agregam aos comandos do controlador, mas também pelas perturbações na saída (Perturbação 2 na Fig. 1.6(*a*)). O sistema tampouco não pode corrigir estas perturbações.

Os sistemas a malha aberta, portanto, não corrigem os efeitos de perturbações e são comandados unicamente com base na entrada. Por exemplo, torradeiras são sistemas a malha aberta, como qualquer um que tenha queimado uma torrada pode atestar. A variável controlada (saída) de uma torradeira é a cor da torrada. O dispositivo é projetado com a suposição de que a torrada estará tanto mais escura quanto mais tempo seja submetida ao calor. A torradeira não mede a cor da torrada; não leva em conta os efeitos devidos ao fato de a torrada ser de centeio, branca ou de massa fermentada, nem corrige o efeito decorrente de as torradas terem espessuras diferentes.

Outros exemplos de sistemas a malha aberta são sistemas mecânicos constituídos de massa, mola e amortecedor com uma força constante posicionando a massa. Quanto maior a força, maior o deslocamento. Novamente, a posição do sistema mudará em presença de uma perturbação, como uma força adicional, e o sistema não detectará ou corrigirá a perturbação. Ou, suponha que você calcule o tempo que precisa para estudar, a fim de obter um conceito A em uma prova escrita cobrindo três capítulos. Se o professor acrescentar um quarto capítulo — uma perturbação — você se comportará como um sistema a malha aberta se não detectar a perturbação e não adicionar tempo de estudo ao calculado anteriormente. O resultado deste lapso será uma nota mais baixa do que a esperada.

Sistemas a Malha Fechada (Controle com Retroação)

As desvantagens dos sistemas a malha aberta, especificamente a sensibilidade a perturbações e a incapacidade de corrigir os efeitos destas perturbações, podem ser superadas nos sistemas a malha fechada. A arquitetura genérica de um sistema a malha fechada é mostrada na Fig. 1.6(*b*).

O transdutor de entrada converte a forma da entrada na forma usada pelo controlador. Um transdutor de saída, ou sensor, mede a resposta de saída e a converte na forma usada pelo controlador. Por exemplo, se o controlador usa sinais elétricos para operar as válvulas de um sistema de controle de temperatura, a posição de entrada e a temperatura de saída são convertidas em sinais elétricos. A posição de entrada pode ser convertida em uma tensão por meio de um *potenciômetro*,

um resistor variável, e a temperatura de saída pode ser convertida em uma tensão por intermédio de um *termistor*, um dispositivo cuja resistência elétrica muda com a temperatura.

A primeira junção de adição adiciona algebricamente o sinal da entrada ao sinal da saída, que chega pelo *canal de retroação*, o percurso de retorno da saída para a junção de adição. Na Fig. 1.6(*b*), o sinal de saída é subtraído do sinal de entrada. O resultado é geralmente chamado de *sinal atuante*. Contudo, em sistemas onde ambos os transdutores de entrada e de saída têm *ganho unitário* (isto é, o transdutor amplifica o sinal de entrada por 1), o valor do sinal atuante é igual à diferença real entre a entrada e a saída. Sob esta condição, o sinal atuante é chamado de *erro*.

O sistema a malha fechada compensa perturbações medindo a resposta da saída, retornando esta medição através de um canal de retroação e comparando essa resposta com a entrada na junção de adição. Se existir alguma diferença entre as duas respostas, o sistema age sobre a planta, por meio do sinal atuante, para fazer a correção. Se não existir diferença, o sistema não age sobre o processo, uma vez que a resposta da planta já é a resposta desejada.

Os sistemas a malha fechada, por conseguinte, apresentam a vantagem óbvia de uma maior precisão que os sistemas a malha aberta. Eles são menos sensíveis a ruídos, a perturbações e a mudanças nas condições ambientes. A resposta transitória e o erro de estado estacionário podem ser controlados de modo mais conveniente e com maior flexibilidade nos sistemas a malha fechada, muitas vezes por meio de um simples ajuste de ganho (amplificação) na malha, e às vezes reprojetando-se o controlador. Referimo-nos ao reprojeto como *compensação* do sistema e ao hardware resultante como *compensador*. Por outro lado, sistemas a malha fechada são mais complexos e caros que os sistemas a malha aberta. Uma torradeira padrão, a malha aberta, serve como exemplo: é simples e barata. Uma torradeira com forno, a malha fechada, é mais complexa e mais cara, uma vez que tem de medir a cor (através da refletividade da luz) juntamente com a umidade dentro do forno. Por conseguinte, os engenheiros de controle e automação devem considerar a relação custo-benefício entre a simplicidade e o baixo custo de um sistema a malha aberta e a precisão e o maior custo de um sistema a malha fechada.

Resumindo, sistemas que realizam medição e correção descritas anteriormente são chamados de *sistemas a malha fechada*, ou *sistemas de controle com retroação*. Sistemas que não têm esta propriedade de medição e correção são chamados de *sistemas a malha aberta*.

Sistemas Controlados por Computador

Em muitos sistemas modernos, o controlador (ou *compensador*) é um computador digital. A vantagem de usar um computador é que se pode controlar ou compensar muitas malhas pelo mesmo computador através de forma compartilhada (*time sharing*). Além disso, qualquer ajuste requerido nos parâmetros do compensador para produzir uma resposta desejada pode ser feito através de mudanças no software e não no hardware. O computador também pode realizar funções de supervisão, como agendar a execução de muitas aplicações requeridas. Por exemplo, o controlador do motor principal do ônibus espacial (SSME),[9] que contém dois computadores digitais, controla sozinho numerosas funções do motor. Monitora os sensores do motor que fornecem pressões, temperaturas, vazões, velocidade das turbobombas e posições do atuador de servoválvulas do motor. O controlador, além disso, efetua o controle da malha fechada do empuxo e da razão de mistura do propelente, da excitação dos sensores, dos atuadores de válvulas, dos ignitores, bem como de outras funções (Rockwell International, 1984).

Agora que descrevemos os sistemas de controle, definamos os objetivos de análise e de projeto.

1.5 Objetivos de Análise e de Projeto

Sistemas de controle são *dinâmicos*: eles respondem a uma entrada submetidos a uma resposta transitória antes de alcançar a resposta de estado estacionário que geralmente se parece com a entrada. Já identificamos estas duas respostas e citamos como exemplo um sistema de controle de posição (um elevador). Nesta seção discutiremos três objetivos principais da análise e do projeto de sistemas: produzir a resposta transitória desejada, reduzir o erro de estado estacionário, obter estabilidade. Também serão tratadas outras preocupações de projeto, como custo e sensibilidade de desempenho do sistema a mudanças nos parâmetros.

Resposta Transitória

A resposta transitória é importante. No caso de um elevador, uma resposta transitória lenta deixa os passageiros impacientes, ao passo que uma resposta excessivamente rápida os deixa desconfortáveis. Se o elevador oscila em torno do piso do andar por mais de um segundo, pode sobrevir uma sensação de embaraço. A *resposta transitória* é também importante por razões estruturais: uma resposta transitória excessivamente rápida poderia provocar danos físicos permanentes. Em um computador, a resposta transitória contribui para o tempo necessário para leitura ou gravação no disco rígido (HD) (ver Fig. 1.7). Uma vez que a leitura e a gravação não podem ocorrer até que a cabeça pare, a velocidade de leitura/gravação do movimento da cabeça, de uma trilha para outra, afeta a velocidade de processamento total do computador.

[9]Sigla para *Space Shuttle Main Engine*. (N.T.)

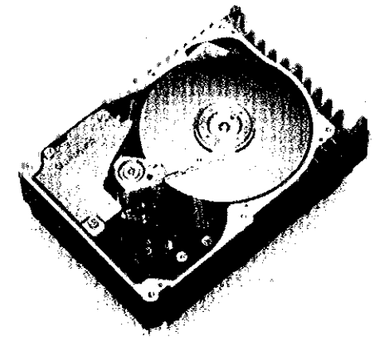


Fig. 1.7 Acionador de disco rígido de computador, mostrando discos e cabeça de leitura/gravação

Neste livro estabelecemos definições quantitativas para a resposta transitória. Analisamos, então, o sistema com sua resposta transitória *existente*. Finalmente, ajustamos parâmetros ou projetamos componentes para produzir uma resposta transitória *desejada* — nosso primeiro objetivo de análise e de projeto.

Resposta de Estado Estacionário

Outro objetivo da análise e do projeto focaliza a resposta em estado estacionário. Como vimos, esta resposta se parece com a entrada e é usualmente o que permanece depois que a componente transitória se reduz a zero. Por exemplo, esta resposta pode ser um elevador parado próximo ao quarto andar ou a cabeça de um acionador de disco finalmente parada na trilha correta. Estamos interessados na precisão da resposta de estado estacionário. Um elevador deve estar nivelado o suficiente com o andar para os passageiros saírem, e uma cabeça de leitura/gravação não posicionada sobre a trilha comandada resulta em erros computacionais. Uma antena rastreando um satélite deve manter o satélite bem dentro da largura do feixe a fim de não perder o rastreamento. Neste texto, definimos os erros de estado estacionário quantitativamente, analisamos os erros de estado estacionário do sistema, e então projetamos a ação corretiva de modo a reduzir o erro de estado estacionário — nosso segundo objetivo de análise e de projeto.

Estabilidade

A discussão sobre a resposta transitória e sobre o erro de estado estacionário é duvidosa se o sistema não tiver *estabilidade*. Para explicar a estabilidade, começamos a partir do fato de que a resposta total de um sistema é a soma da *resposta natural* e da *resposta forçada*. Quando você estudou equações diferenciais lineares, provavelmente se referiu a estas respostas como as soluções *homogênea* e *particular*, respectivamente. A resposta natural descreve o modo pelo qual o sistema dissipa ou acumula energia. A forma ou a natureza desta resposta é dependente somente do sistema, não da entrada. Por outro lado, a forma ou a natureza da resposta forçada é dependente da entrada. Desta maneira, para um sistema *linear*, podemos escrever

$$\text{Resposta total} = \text{Resposta natural} + \text{Resposta forçada} \qquad (1.1)^{10}$$

Para que um sistema de controle seja útil, a resposta natural deve (1) finalmente tender a zero, desta maneira deixando somente a resposta forçada, ou (2) oscilar. Em alguns sistemas, contudo, a resposta natural cresce sem limites em vez de diminuir até zero ou oscilar. Finalmente, a resposta natural é tão maior que a resposta forçada que o sistema não é mais controlado. Esta condição, chamada *instabilidade*, pode conduzir à autodestruição do dispositivo físico se não houver batentes limitadores como parte do projeto. Por exemplo, o elevador se chocaria contra o chão ou sairia através do telhado, uma aeronave poderia entrar em movimento incontrolável de rolamento; ou uma antena, comandada para apontar sobre um alvo, começaria a oscilar em torno do alvo com oscilações *crescentes* e *aumentando* a velocidade até que o motor ou os amplificadores alcançassem seus limites de saída ou até que a antena fosse danificada estruturalmente. Um gráfico em função do tempo de um sistema instável mostraria uma resposta transitória que cresce sem limites e sem qualquer evidência de uma resposta de estado estacionário.

[10]Você pode estar confuso com as palavras transitório vs. natural, e estado estacionário vs. forçado. Se você olhar a Fig. 1.5, poderá ver as partes transitória e de estado estacionário da resposta total, como indicadas. A resposta transitória é a soma das respostas natural e forçada enquanto a resposta natural for grande. Se esboçássemos a resposta natural por si mesma, poderíamos ter uma curva que é diferente da porção transitória da Fig. 1.5. A resposta de estado estacionário da Fig. 1.5 é também a soma das respostas natural e forçada, mas enquanto a resposta natural for pequena. Desta maneira, as respostas transitória e de estado estacionário são o que você realmente vê no gráfico; as respostas natural e forçada são os componentes matemáticos fundamentais dessas respostas.

Os sistemas de controle devem ser projetados para serem estáveis. Isto é, sua resposta natural deve tender a zero quando o tempo tende a infinito, ou oscilar. Em muitos sistemas, a resposta transitória que você vê em um gráfico da resposta em função do tempo pode ser relacionada diretamente com a resposta natural. Assim, se a resposta natural tender a zero quando o tempo tender a infinito, a resposta transitória também desaparecerá, deixando somente a resposta forçada. Se o sistema for estável, podem ser projetadas as características adequadas do erro de estado estacionário e da resposta transitória. Estabilidade é o nosso terceiro objetivo de análise e de projeto.

Outras Considerações

Já foram enumerados os três objetivos principais da análise e do projeto do sistema de controle. Contudo, outras considerações importantes devem ser levadas em conta. Por exemplo, fatores que afetam a seleção do hardware, como o dimensionamento do motor para atender os requisitos de potência e a escolha de sensores de acordo com a precisão necessária, devem ser considerados na fase inicial do projeto.

Os custos são uma outra consideração. Projetistas de sistemas de controle não podem criar projetos sem considerar seu impacto econômico. Considerações como distribuição de orçamento e preço competitivo devem guiar o engenheiro. Por exemplo, se seu produto for um único exemplar, você pode ser capaz de criar um projeto que use componentes caros sem aumentar apreciavelmente o custo total. Contudo, se seu projeto for usado para fazer muitas unidades, um pequeno acréscimo no custo unitário pode se traduzir em muitos mais dólares para sua empresa propor no contrato de licitação e para desembolso antes das vendas.

Uma outra consideração é a de um projeto *robusto*. Parâmetros do sistema considerados constantes durante o projeto da resposta transitória, dos erros de estado estacionário e da estabilidade mudam ao longo do tempo quando o sistema real é construído. Desta maneira, o desempenho do sistema também muda ao longo do tempo e não será consistente com seu projeto. Infelizmente, a relação entre mudanças de parâmetros e seus efeitos no desempenho não é linear. Em alguns casos, ainda no mesmo sistema, mudanças nos valores dos parâmetros podem acarretar mudanças menores ou maiores no desempenho, dependendo do ponto de operação nominal do sistema e do tipo de projeto usado. Desta maneira, o engenheiro deve criar um projeto robusto para que o sistema não seja sensível a mudanças dos parâmetros. Discutiremos o conceito de sensibilidade do sistema a mudanças de parâmetros nos Caps. 7 e 8. Este conceito então pode ser usado para testar o projeto quanto à robustez.

Introdução a um Estudo de Caso

Agora que nossos objetivos foram estabelecidos, como alcançá-los? Nesta seção, examinaremos um exemplo de um sistema de controle com retroação. O sistema apresentado aqui será usado em capítulos subseqüentes como um estudo de caso itinerante para demonstrar os objetivos desses capítulos. Uma faixa no topo da página identificará a seção de estudo de caso ao final de cada capítulo. A Seção 1.6, que segue este primeiro estudo de caso, explora o procedimento de projeto que nos ajudará a construir o sistema.

Uma Introdução aos Sistemas de Controle de Posicionamento de uma Antena em Azimute

Um sistema de controle de posição converte um comando de posição de entrada em uma resposta de posição de saída. Os sistemas de controle de posição encontram aplicações muito difundidas em antenas, braços robóticos e acionadores de disco rígido de computador. A antena do radiotelescópio da Fig. 1.8 é um exemplo de sistema que utiliza controle de posição. Nesta seção, examinaremos em detalhes um sistema de controle de posição de antena em azimute que pode ser usado para posicionar uma antena de radiotelescópio. Veremos como o sistema funciona e como podemos efetuar mudanças em seu desempenho. A discussão aqui será sob um nível qualitativo, com o objetivo de obter um sentimento intuitivo a respeito dos sistemas com os quais estivermos lidando.

Um sistema de controle de posição de uma antena em azimute é mostrado na Fig. 1.9(*a*) com um leiaute e um esquema mais detalhados nas Figs. 1.9(*b*) e 1.9(*c*), respectivamente. A Fig. 1.9(*d*) mostra um *diagrama de blocos funcional* do sistema. As funções são mostradas acima dos blocos, e o hardware necessário está indicado dentro dos blocos. Partes da Fig. 1.9 são repetidas na contracapa dianteira para referência futura.

A finalidade deste sistema é fazer com que o ângulo de azimute de saída da antena, $\theta_o(t)$, siga o ângulo de entrada do potenciômetro, $\theta_i(t)$. Observemos a Fig. 1.9(*d*) e descrevamos como funciona este sistema. O comando de entrada é um deslocamento angular. O potenciômetro converte o deslocamento angular em uma tensão. De modo semelhante, o deslocamento angular de saída é convertido em uma tensão por um potenciômetro no canal de retroação. Os amplificadores de sinal e de potência amplificam a diferença entre as tensões de entrada e de saída. Este sinal amplificado atua sobre o processo.

O sistema normalmente opera para levar o erro a zero. Quando a entrada e a saída coincidirem, o erro será zero e o motor não girará. Portanto, o motor é acionado somente quando a saída e a entrada não coincidem. Quanto maior a diferença entre a entrada e a saída, maior será a tensão de entrada do motor e mais rápido girará o motor.

Se aumentarmos o ganho do amplificador de sinal, haverá um aumento no valor de estado estacionário da saída? Se o ganho for aumentado, então, para um dado sinal atuante, o motor será acionado com mais energia. Mas, o motor parará quando o sinal atuante alcançar o valor zero, isto é, quando a saída se igualar à entrada. A diferença na resposta, contudo, será nos transitórios. Uma vez que o motor seja acionado com mais energia, ele gira mais rápido para a posição final. Também, em virtude do aumento da velocidade, um aumento na quantidade de movimento angular pode fazer com que o motor exceda os limites do valor final e seja forçado pelo sistema a retornar à posição comandada.

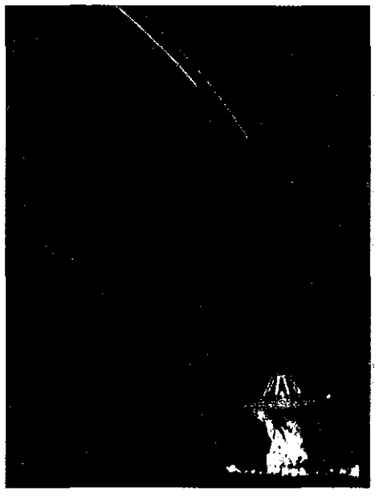
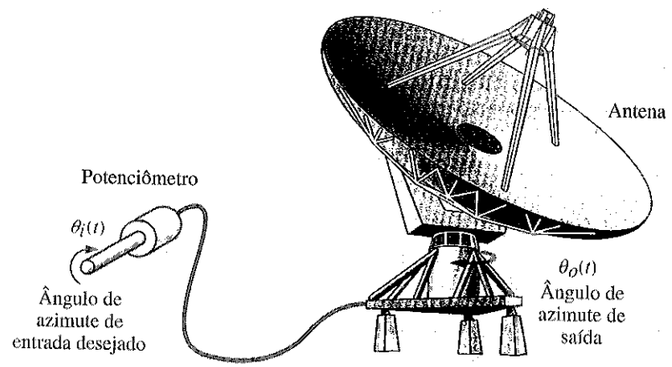
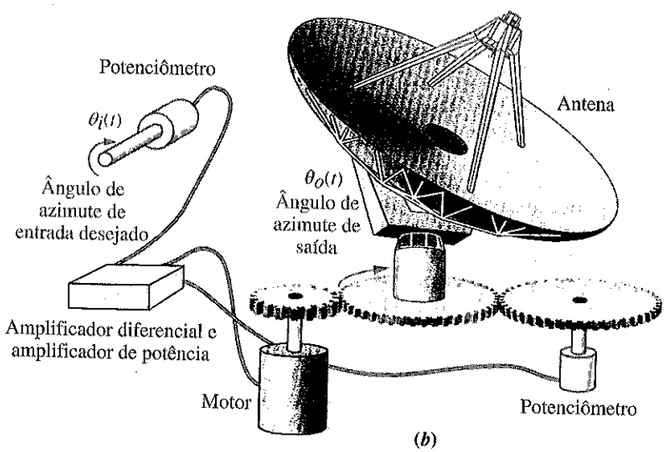


Fig. 1.8 A procura por vida extraterrena está sendo realizada com antenas de rádio como a mostrada aqui. Uma antena de rádio é um exemplo de sistema com controles de posição.



(*a*)



(*b*)

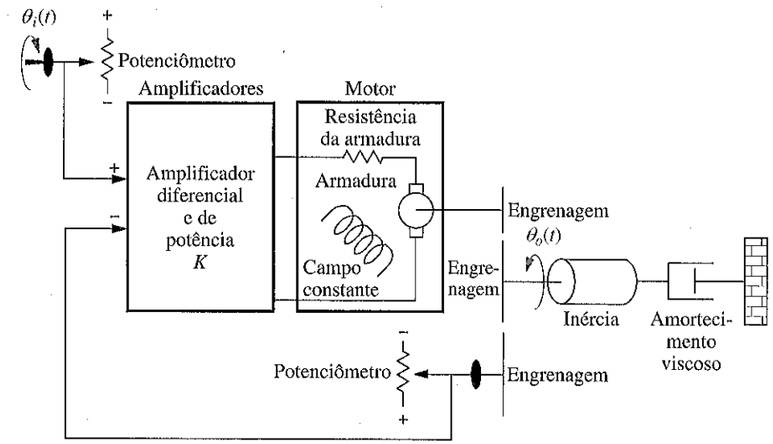
Fig. 1.9 Sistema de controle de posição da antena em azimute: **a.** conceito do sistema; **b.** leiaute detalhado; (*a figura continua*)

Desta maneira, existe a possibilidade de se ter uma resposta transitória com *oscilações amortecidas* (isto é, uma resposta senoidal cuja amplitude diminui com o tempo) em torno do valor de estado estacionário se o ganho for alto. As respostas para valores de baixo e alto ganho são mostradas na Fig. 1.10.

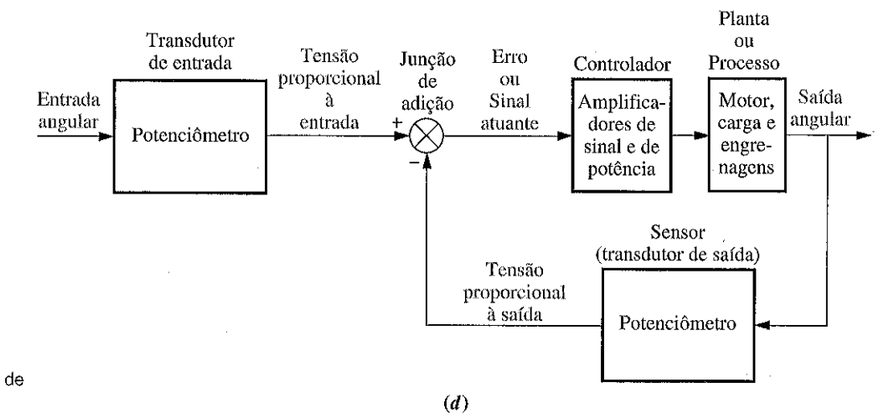
Discutimos a resposta transitória do sistema de controle de posição. Dirijamos agora nossa atenção para a posição de estado estacionário para observar o quanto a saída coincide com a entrada depois que os transitórios desaparecem. A Fig. 1.10 mostra erro zero na resposta de estado estacionário; isto é, depois de os transitórios terem desaparecido, a posição de saída iguala a posição de entrada comandada. Em alguns sistemas, o erro de estado estacionário não será zero; para estes sistemas, um simples ajuste no ganho para regular a resposta transitória ou é ineficiente ou conduz a um compromisso entre a resposta transitória desejada e a exatidão de estado estacionário desejada.

Para resolver este problema, um controlador com resposta dinâmica, como um filtro elétrico, é usado junto com um amplificador. Com este tipo de controlador, é possível projetar a resposta transitória desejada e a exatidão de estado estacionário desejado sem o conflito a que se chega adotando um simples ajuste de ganho. Contudo, o controlador é agora mais complexo. O filtro neste caso é chamado *compensador*. Muitos sistemas também usam elementos dinâmicos no canal de retroação junto com o transdutor de saída para melhorar o desempenho do sistema.

Resumindo, então, nossos objetivos de projeto e o desempenho do sistema giram ao redor da resposta transitória, do erro de estado estacionário e da estabilidade. Ajustes de ganho podem afetar o desempenho e algumas vezes conduzir a conflitos entre os critérios de desempenho. Os compensadores podem freqüentemente ser projetados para obter especificações de desempenho sem a necessidade de soluções de compromisso. Agora que estabelecemos os objetivos e alguns dos métodos disponíveis para alcançar esses objetivos, podemos descrever o procedimento ordenado que nos conduz ao projeto final do sistema.



(*c*)



(*d*)

Fig. 1.9 (***continuação***) **c.** esquema; **d.** diagrama de blocos funcional

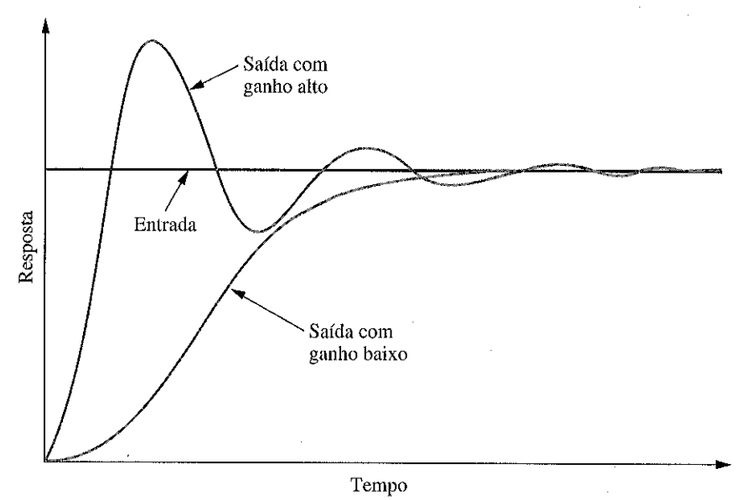


Fig. 1.10 Resposta de um sistema de controle de posição mostrando o efeito de valores grande e pequeno para o ganho do controlador na resposta de saída

1.6 Procedimento de Projeto

Nesta seção, estabelecemos uma seqüência ordenada para o projeto de sistemas de controle com retroação que será seguido conforme formos progredindo ao longo do restante do livro. A Fig. 1.11 mostra o procedimento descrito bem como os capítulos nos quais os passos são discutidos. O sistema de controle de posição da antena em azimute discutido na última seção é representativo de sistemas de controle que precisam ser analisados e projetados. A retroação e a comunicação são inerentes a cada uma das fases da Fig. 1.11. Por exemplo, se o teste (Passo 6) mostrar que os requisitos não foram atendidos, o sistema deve ser reprojetado e testado de novo. Algumas vezes, os requisitos são conflitantes e o projeto não pode ser atendido. Nestes casos, os requisitos precisam ser reespecificados e o procedimento de projeto repetido. Elaboremos cada bloco da Fig. 1.11.

Passo 1: Transformar Requisitos em um Sistema Físico

Começamos por transformar os requisitos em um sistema físico. Por exemplo, no sistema de controle de azimute da antena, os requisitos expressariam o desejo de posicionar a antena a partir de uma localização remota e descrever características como peso e dimensões físicas. Usando os requisitos, são determinadas as especificações de projeto como resposta transitória desejada e exatidão de estado estacionário. Resultaria, talvez, uma noção global, tal como a Fig. 1.9(*a*).

Passo 2: Desenhar um Diagrama de Blocos Funcional

O projetista agora traduz a descrição qualitativa do sistema em um diagrama de blocos funcional que descreve as partes componentes do sistema (isto é, função e/ou hardware) e mostra suas interconexões. A Fig. 1.9(*d*) é um exemplo de diagrama de blocos funcional para um sistema de controle de posição de antena em azimute. Indica funções como transdutor de entrada e controlador, bem como possível descrição de hardware, como amplificadores e motores. Neste ponto, o projetista pode produzir um leiaute detalhado do sistema, conforme mostrado na Fig. 1.9(*b*), a partir do qual pode ser lançada a próxima fase de análise e seqüência de projeto, desenvolvendo um diagrama esquemático.

Passo 3: Criar um Diagrama Esquemático

Como vimos, os sistemas de controle de posição consistem em componentes elétricos, mecânicos e eletromecânicos. Após produzir a descrição de um sistema físico, o engenheiro de sistemas de controle transforma o sistema físico em um diagrama esquemático. O projetista de sistemas de controle pode começar com a descrição física contida na Fig. 1.9(*d*) e deduzir um esquema. O engenheiro deve fazer aproximações sobre o sistema e desprezar o efeito de certos fenômenos ou então o esquema será difícil de manejar, tornando difícil extrair um modelo matemático útil durante a próxima fase de análise e seqüência de projeto. O projetista começa com uma simples representação esquemática e, nas fases subseqüentes de análise e seqüência de projeto, verifica as suposições feitas sobre o sistema físico através da análise e simulação em computador. Se o esquema for muito simples e não levar em consideração de forma adequada o comportamento observado, o engenheiro de sistemas de controle adiciona ao esquema o efeito dos fenômenos que foram anteriormente supostos insignificantes. Um diagrama esquemático para o sistema de controle de posição da antena em azimute é mostrado na Fig. 1.9(*c*).

Ao desenhar os potenciômetros, fizemos nossa primeira hipótese simplificadora desprezando o atrito e a inércia. Estas características mecânicas conduzem a uma resposta dinâmica para a tensão de saída em vez de uma resposta instantânea. Admitimos que estes efeitos mecânicos são insignificantes e que a tensão sobre o potenciômetro muda instantaneamente conforme o eixo do potenciômetro gira.

Um amplificador diferencial e um amplificador de potência são usados como controlador para produzir amplificação de sinal e de potência, respectivamente, para acionar o motor. Novamente, supomos que a dinâmica dos amplificadores é rapida em comparação com o tempo de resposta do motor; desta maneira, modelamos os amplificadores como um ganho puro, K.

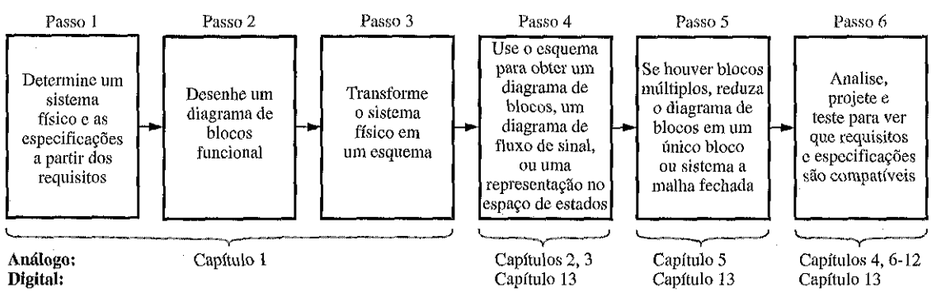


Fig. 1.11 O procedimento de projeto de sistemas de controle

Um motor CC e a carga equivalente produzem o deslocamento angular de saída. A velocidade do motor é proporcional à tensão aplicada ao *circuito de armadura* do motor. A indutância e a resistência são, ambas, partes do circuito de armadura. Mostrando somente a resistência de armadura na Fig. 1.9(*c*), estamos admitindo que o efeito da indutância da armadura é insignificante no motor CC.

O projetista faz suposições adicionais sobre a carga. A carga consiste em uma massa em rotação e em um atrito de mancais. Desta maneira, o modelo consiste em *inércia* e em *amortecimento viscoso* cujo torque resistivo aumenta com a velocidade, como em um amortecedor de automóvel ou de fechamento automático de porta.

As decisões tomadas no desenvolvimento do esquema têm origem no conhecimento do sistema físico, nas leis físicas que governam o comportamento do sistema e na *experiência prática*. Estas decisões não são fáceis; contudo, à medida que você adquira mais experiência em projeto, ganhará a intuição requerida para esta difícil tarefa.

Passo 4: Desenvolver um Modelo Matemático (Diagrama de Blocos)

Uma vez que o esquema está desenhado, o projetista usa leis físicas, como as leis de Kirchhoff para circuitos elétricos e as leis de Newton para sistemas mecânicos, junto com hipóteses simplificadoras, para modelar matematicamente o sistema. Estas leis são:

Lei de Kirchhoff das tensões A soma das tensões ao longo de um caminho fechado é igual a zero.
Lei de Kirchhoff das correntes A soma das correntes elétricas que fluem por um nó é igual a zero.
Leis de Newton A soma das forças aplicadas a um corpo é igual a zero;[11] a soma dos momentos aplicados a um corpo é igual a zero.

As leis de Kirchhoff e as de Newton conduzem a modelos matemáticos que descrevem a relação entre a entrada e a saída de sistemas dinâmicos. Um tal modelo é a *equação diferencial linear, invariante no tempo*, Eq. (1.2):

$$\frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t) \qquad (1.2)^{12}$$

Muitos sistemas podem ser aproximadamente descritos por esta equação, que relaciona a saída $c(t)$, com a entrada, $r(t)$, por meio dos parâmetros do sistema, a_i e b_j. Supomos que o leitor esteja familiarizado com equações diferenciais. São incluídos, ao final deste capítulo, problemas e bibliografia para você fazer uma revisão sobre este assunto.

As hipóteses simplificadoras elaboradas no processo de obter um modelo matemático geralmente conduzem a uma forma de ordem baixa da Eq. (1.2). Sem as hipóteses simplificadoras, o modelo do sistema poderia ser de ordem elevada ou descrito por equações não-lineares, variantes no tempo, ou derivadas parciais. Estas equações complicam o procedimento de projeto e reduzem a intuição do projetista. Naturalmente, todas as hipóteses simplificadoras devem ser verificadas e todas as simplificações justificadas através de análise ou de testes. Se as suposições para simplificação não puderem ser justificadas, então o modelo não pode ser simplificado. Examinamos algumas destas hipóteses simplificadoras no Cap. 2.

Em complemento à equação diferencial, a *função de transferência* é outra forma de modelagem matemática de um sistema. O modelo é deduzido a partir da equação diferencial linear invariante no tempo usando o que chamamos de *transformada de Laplace*. Embora a função de transferência só possa ser usada para sistemas lineares, ela conduz a uma informação mais intuitiva que a equação diferencial. Seremos capazes de variar os parâmetros de sistema e rapidamente sentir o efeito destas mudanças na resposta do sistema. A função de transferência é também útil na modelagem da interconexão de subsistemas através da formação de um diagrama de blocos semelhante ao da Fig. 1.9(*d*), mas com uma função matemática no interior de cada bloco.

Ainda um outro modelo é o da representação no *espaço de estados*. Uma vantagem dos métodos no espaço de estados é que eles podem ser usados também para sistemas que não podem ser descritos por equações diferenciais lineares. Além disso, os métodos no espaço de estados são usados para modelar sistemas para simulação em computador digital. Basicamente, esta representação transforma uma equação diferencial de *enésima* ordem em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Admitamos, por ora, que esta descrição seja suficiente; descrevemos esta abordagem em mais detalhes no Cap. 3.

Finalmente, deveríamos mencionar que para produzir o modelo matemático de um sistema é necessário o conhecimento dos valores dos parâmetros como resistência equivalente, indutância, massa e amortecimento, que freqüentemente não é fácil de se obter. Análises, medições ou especificações a partir de fornecedores são fontes que o engenheiro de sistemas de controle pode usar para obter os parâmetros.

Agora discutiremos o quinto bloco do procedimento de projeto da Fig. 1.11, redução do diagrama de blocos.

[11] Alternativamente, Σ forças $= Ma$. Neste texto, a força, Ma, será trazida para o lado esquerdo da equação para produzir Σ forças $= 0$ (princípio de D'Alembert). Podemos então ter uma analogia consistente entre força e tensão, e entre as leis de Kirchhoff e as de Newton (isto é, Σ forças $= 0$; Σ tensões $= 0$).

[12] O lado direito da Eq. (1.2) indica a derivação da entrada, $r(t)$. Em sistemas físicos, a derivação da entrada introduz ruído. Nos Caps. 3 e 5 mostramos implementações e interpretações da Eq. (1.2) que não requerem derivação da entrada.

Passo 5: Reduzir o Diagrama de Bloco

Os modelos de subsistemas são interconectados para formar diagramas de blocos de grandes sistemas, como na Fig. 1.9(*d*), onde cada bloco tem uma descrição matemática. Note que muitos sinais, como tensões e erro proporcionais, são internos ao sistema. Também há dois sinais — entrada angular e saída angular — que são externos ao sistema. A fim de calcular a resposta do sistema neste exemplo, precisamos reduzir este grande diagrama de blocos a um único bloco com uma descrição matemática que represente o sistema a partir de sua entrada para a saída conforme mostrado na Fig. 1.12. Uma vez que o diagrama de blocos foi reduzido, estamos prontos para analisar e projetar o sistema.

Passo 6: Analisar e Projetar

A próxima fase do procedimento, que se segue à redução do diagrama de blocos, é analisar e projetar. Se você estiver interessado somente no desempenho de um subsistema individual, pode pular a redução do diagrama de blocos e ir imediatamente para análise e projeto. Nesta fase, o engenheiro analisa o sistema para ver se as especificações de resposta e os requisitos de desempenho podem ser alcançados através de simples ajustes nos parâmetros do sistema. Se as especificações não puderem ser atendidas, o projetista então projeta hardware adicional a fim de obter o desempenho desejado.

São usados sinais de entrada para teste, para verificar o projeto analiticamente e durante a fase de ensaios. Não é necessariamente prático nem esclarecedor escolher sinais de entrada complicados para analisar o desempenho de um sistema. Desta maneira, o engenheiro geralmente seleciona entradas para teste padronizadas. Estas entradas são impulsos, degraus, rampas, parábolas e senóide, conforme mostradas na Tabela 1.1.

Um *impulso* é infinito em $t = 0$ e zero em qualquer outro instante. A área sob o impulso unitário é 1. Uma aproximação deste tipo de forma de onda é usada para introduzir energia inicial em um sistema para que a resposta devida à energia inicial seja somente a resposta transitória do sistema. A partir desta resposta, o projetista pode deduzir um modelo matemático do sistema.

Uma entrada em *degrau* representa um *comando constante*, como posição, velocidade ou aceleração. Tipicamente, a entrada em degrau é da mesma forma que a saída. Por exemplo, se a saída do sistema é posição, como é o caso para o sistema de controle de posição da antena em azimute, a entrada em degrau representa uma posição desejada e a saída representa a posição real. Se a saída do sistema for velocidade, como é o caso da velocidade do eixo de um reprodutor de disco de vídeo, a entrada em degrau representa uma velocidade constante desejada e a saída representa a velocidade real. O projetista usa entradas em degrau porque as respostas transitória e de estado estacionário são claramente visíveis e podem ser avaliadas.

A entrada em *rampa* representa um *comando crescendo linearmente* com o tempo. Por exemplo, se a saída do sistema for posição, a entrada em rampa representa uma posição crescendo linearmente com o tempo, como a que é obtida ao rastrear um satélite que se move no firmamento com velocidade constante. Se a saída do sistema for velocidade, a entrada em rampa representa uma velocidade crescendo linearmente com o tempo. A resposta a um sinal para teste de entrada em rampa produz informação adicional sobre o erro de estado estacionário. A discussão anterior pode ser estendida para entradas *parabólicas*, que são usadas para avaliar um erro de estado estacionário do sistema.

Entradas senoidais também podem ser usadas para testar um sistema físico de modo a se chegar a um modelo matemático. Discutiremos o uso desta forma de onda em detalhes nos Caps. 10 e 11.

Concluímos que um dos requisitos básicos para análise e projeto é calcular a resposta no domínio do tempo de um sistema a uma dada entrada. Ao longo deste livro você aprenderá numerosos métodos para alcançar esta meta.

O engenheiro de sistemas de controle deve levar em consideração outras características sobre sistemas de controle com retroação. Por exemplo, o comportamento de sistema de controle é alterado pelas flutuações nos valores dos componentes ou nos parâmetros do sistema. Estas variações podem ser causadas por variações de temperatura, pressão ou outras mudanças nas condições ambientais. Os sistemas devem ser construídos de modo que flutuações esperadas não degradem o desempenho além dos limites especificados. Uma análise de *sensibilidade* pode fornecer a variação percentual de uma especificação em função de uma variação percentual de um parâmetro do sistema. Um dos objetivos do projetista, então, é construir um sistema com um mínimo de sensibilidade sobre uma faixa esperada de mudanças do ambiente.

Nesta seção, vimos algumas considerações sobre a análise e o projeto de sistemas de controle. Mostramos que dizem respeito ao projetista a resposta transitória, o erro de estado estacionário, a estabilidade e a sensibilidade. Salientamos que embora a base da avaliação do desempenho do sistema seja a equação diferencial, serão usados

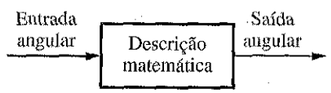
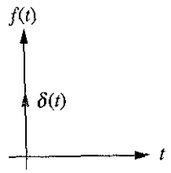
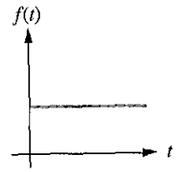
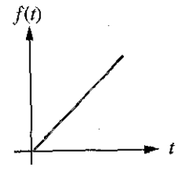
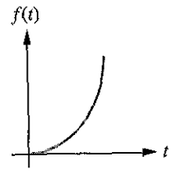
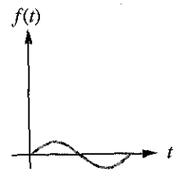


Fig. 1.12 Diagrama de blocos equivalente para o sistema de controle de posição da antena em azimute

Tabela 1.1 Formas de onda de teste usadas em sistemas de controle

Entrada	Função	Descrição	Esboço	Uso
Impulso	$\delta(t)$	$\delta(t) = \infty$ para $0- < t < 0+$ $= 0$ nos demais casos $\int_{0-}^{0+} \delta(t)\,dt = 1$		Modelagem de Resposta Transitória
Degrau	$u(t)$	$u(t) = 1$ para $t > 0$ $= 0$ para $t < 0$		Resposta Transitória; Erro de estado estacionário
Rampa	$tu(t)$	$tu(t) = t$ para $t \geq 0$ $= 0$ nos demais casos		Erro de estado estacionário
Parábola	$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t) = \frac{1}{2}t^2$ para $t \geq 0$ $= 0$ nos demais casos		Erro de estado estacionário
Senóide	sen ωt			Modelagem de Resposta Transitória; Erro de estado estacionário

outros métodos, tais como funções de transferência e espaço de estados. As vantagens destas novas técnicas sobre equações diferenciais se tornarão evidentes conforme as discutirmos em capítulos posteriores. Agora que já discutimos a seqüência de análise e de projeto, falemos sobre o uso do computador como uma ferramenta computacional nesta seqüência.

1.7 Projeto Assistido por Computador

O computador representa um importante papel no projeto de sistemas de controle modernos. No passado, o projeto de sistema de controle era exaustivo. Muitas das ferramentas que usamos hoje foram implementadas através de cálculos manuais ou, quando muito, com o auxílio de ferramentas gráficas de plástico. O processo era lento e os resultados nem sempre exatos. Computadores centrais de grande porte eram então usados para simular os projetos.

Hoje, temos sorte de dispor de computadores e de programas que nos livram da parte fatigante da tarefa. Em nosso próprio computador de mesa podemos realizar análises, projetar e simular com um programa. Com a capacidade de simular um projeto rapidamente, podemos facilmente fazer mudanças e imediatamente testar um novo projeto. Podemos executar jogos do tipo "o que aconteceria se..." e tentar soluções alternativas para ver se elas alcançam resultados melhores, como por exemplo reduzir a sensibilidade a mudanças de parâmetros. Podemos incluir não-linearidades e outros efeitos, e testar nossos modelos quanto à exatidão.

MATLAB

O computador é uma parte integrante do projeto de sistema de controle moderno, e muitas ferramentas computacionais estão disponíveis para seu uso. Neste livro, usamos o MATLAB e a *Toolbox* de Sistemas de Controle do MATLAB, que amplia o MATLAB para incluir comandos específicos para sistemas de controle. Além disso, apresentamos vários recursos que ampliam a funcionalidade do MATLAB e a *Toolbox* de Sistemas de Controle. São incluídos o (1) Simulink, que utiliza uma interface gráfica de usuário (GUI); (2) o LTI Viewer, permitindo que medições sejam feitas diretamente a partir das curvas de resposta nos domínios de tempo e de freqüência; (3) o Root Locus Design GUI, uma ferramenta de análise e projeto conveniente e intuitiva; e (4) a *Toolbox* de Matemática Simbólica, que economiza trabalho ao fazer cálculos simbólicos requeridos na análise e no projeto de sistema de controle. Alguns destes recursos podem necessitar de software adicional disponível na The MathWorks, Inc.

O MATLAB é apresentado como um método alternativo de solução de problemas de sistemas de controle. Você é encorajado a solucionar problemas primeiro manualmente e depois com o MATLAB para que a intuição não seja perdida através do uso mecanizado de programas de computador. Para este fim, muitos dos exemplos ao longo do livro são resolvidos manualmente, seguidos pelo uso sugerido do MATLAB.

Para evitar confundir o ensino dos princípios dos sistemas de controle com o ensino de métodos computacionais de solução, instruções e códigos específicos de programas são cobertos somente nos apêndices, não nos capítulos. Ao longo do livro, diversos ícones aparecem na margem para identificar referências do MATLAB que direcionam você para o programa adequado no apêndice apropriado e dizem o que você irá aprender. Problemas de fim de capítulo selecionados e Desafios de Estudos de Caso para serem resolvidos usando o MATLAB também estão assinalados com ícones apropriados. A lista a seguir discrimina os componentes específicos do MATLAB usados neste livro, os ícones usados para identificá-los e o apêndice no qual pode ser achada uma descrição:

MATLAB

MATLAB/*Toolbox* de Sistemas de Controle — tutoriais e códigos estão no Apêndice B e identificados no texto com o ícone MATLAB mostrado na margem.

Simulink

Simulink — tutoriais e diagramas estão no Apêndice C e identificados no texto com o ícone Simulink mostrado na margem.

Ferramenta GUI

MATLAB GUI — ferramentas de interface gráfica de usuário —, tutoriais e exemplos estão no Apêndice D e identificados no texto com o ícone Ferramenta GUI mostrado na margem. Estas ferramentas consistem no LTI Viewer e no Root Locus Design GUI.

Matemática Simbólica

Toolbox de Matemática Simbólica — tutoriais e códigos estão no Apêndice E e identificados no texto com o ícone Symbolic Math mostrado na margem.

O código do MATLAB em si não é específico de plataforma. O mesmo código roda nos PCs e estações de trabalho nas quais o MATLAB seja instalado. Embora existam diferenças na instalação e no manuseio dos arquivos do MATLAB, não faremos referência a elas neste livro. Também existem muito mais comandos no MATLAB e nas *Toolboxes* do MATLAB do que as cobertas nos apêndices. Por favor, explore a Bibliografia ao final do apêndice aplicável para descobrir mais sobre o manuseio de arquivos de MATLAB e instruções do MATLAB não cobertas neste texto.

Você é encorajado a usar auxílio computacional ao longo deste livro. Os que não são usuários do MATLAB devem consultar o Apêndice H no CD-ROM que acompanha o livro para uma discussão sobre outras alternativas. Agora que apresentamos a você os sistemas de controle e estabelecemos a necessidade de ajuda computacional para realizar análise e projeto, lançamos nosso estudo de sistemas de controle.

Sumário

Os sistemas de controle contribuem para todos os aspectos da sociedade moderna. Em nossas casas, os encontramos em tudo, desde torradeiras aos sistemas de calefação e de refrigeração até aparelhos de vídeo. Os sistemas de controle também encontram aplicações em grande escala na ciência e na indústria, desde a pilotagem de navios e de aviões até mísseis e ônibus espaciais. Sistemas de controle também existem naturalmente; nossos corpos contêm numerosos sistemas de controle. Até mesmo representações de sistemas econômicos e psicológicos têm sido propostas com base na teoria de sistemas de controle. Os sistemas de controle são usados onde ganho de potência, controle remoto ou conversão de forma da entrada são necessários.

Um sistema de controle tem uma *entrada*, um *processo* e uma *saída*. Os sistemas de controle podem ser a *malha aberta* ou a *malha fechada*. Sistemas a malha aberta não monitoram ou corrigem a saída de perturbações; contudo, eles são mais simples e menos dispendiosos que os sistemas a malha fechada. Os sistemas a malha fechada monitoram a saída e a comparam com a entrada. Se um erro for detectado, o sistema corrige a saída e por isso corrige os efeitos de perturbações.

A análise e o projeto de sistemas de controle focalizam três objetivos principais:

1. Produzir a resposta transitória desejada
2. Reduzir os erros de estado estacionário
3. Alcançar a estabilidade

Um sistema deve ser estável a fim de produzir a resposta transitória e a resposta de estado estacionário adequadas. A resposta transitória é importante porque afeta a velocidade do sistema e influência a paciência e o conforto humanos, para não falar da fadiga mecânica. A resposta de estado estacionário determina a exatidão do sistema de controle; governa o quanto a saída se aproxima da resposta desejada.

O projeto de um sistema de controle segue seguintes passos:

Passo 1 Determinar um sistema físico e especificações a partir dos requisitos.
Passo 2 Desenhar um diagrama de blocos funcional.
Passo 3 Representar o sistema físico como um esquema.
Passo 4 Usar o esquema para obter um modelo matemático como um diagrama de blocos.
Passo 5 Reduzir o diagrama de blocos.
Passo 6 Analisar e projetar o sistema para atender os requisitos especificados e as especificações que incluem estabilidade, resposta transitória e desempenho de estado estacionário.

No próximo capítulo, continuaremos através da seqüência de análise e de projeto e aprenderemos como usar o esquema para obter um modelo matemático.

Perguntas de Revisão

1. Cite três aplicações de sistemas de controle com retroação.
2. Cite três razões para o uso de sistemas de controle com retroação e pelo menos uma razão para não usá-los.
3. Dê três exemplos de sistemas a malha aberta.
4. Funcionalmente, como os sistemas a malha fechada se diferenciam dos sistemas a malha aberta?
5. Estabeleça uma condição em que o sinal de erro de um sistema de controle com retroação não seja a diferença entre a entrada e a saída.
6. Se o sinal de erro não for a diferença entre a entrada e a saída, por qual nome geral podemos descrever o sinal de erro?
7. Cite duas vantagens de ter um computador na malha.
8. Cite os três critérios principais de projeto para sistemas de controle.
9. Cite as duas partes de uma resposta de sistema.
10. Fisicamente, o que acontece a um sistema que é instável?
11. A instabilidade é atribuída a qual parte da resposta total?
12. O ajuste do ganho do canal direto pode causar mudança na resposta transitória. Verdadeiro ou falso?
13. Cite três aproximações para a modelagem matemática de sistemas de controle.
14. Descreva sucintamente cada uma das suas resposta à Questão 13.

Problemas

1. Um resistor variável, chamado *potenciômetro*, é mostrado na Fig. P1.1. A resistência é variada pelo movimento de um cursor de contato deslizante ao longo de uma resistência fixada. A resistência entre A e C é fixa, mas a resistência entre B e C varia com a posição do cursor. Se forem necessárias 10 voltas para mover o cursor de contato deslizante de A para C, desenhe um diagrama de blocos do potenciômetro mostrando a variável de entrada, a variável de saída e (dentro do bloco) o ganho, que é uma constante e é a quantidade pela qual a entrada deve ser multiplicada para se obter a saída.

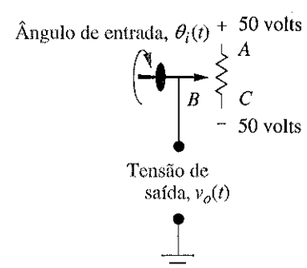


Fig. P1.1 Potenciômetro

2. Um sistema de controle de temperatura opera sentindo a diferença entre o ajuste do termostato e a temperatura real e em seguida abrindo uma válvula de combustível de uma quantidade proporcional a esta diferença. Desenhe um diagrama de blocos funcional a malha fechada semelhante ao da Fig. 1.9(*d*), identificando os transdutores de entrada e de saída, o controlador e a planta. Além disso, identifique os sinais de entrada e de saída para todos os subsistemas descritos anteriormente.
3. A atitude de uma aeronave varia em rolamento, arfagem e guinada conforme definido na Fig. P1.2. Desenhe um diagrama de blocos funcional para um sistema a malha fechada que estabilize o rolamento como a seguir: o sistema mede o ângulo de rolamento real com um dispositivo giroscópico e compara o ângulo de rolamento real com o ângulo de rolamento desejado. Os *ailerons* respondem ao erro de ângu-

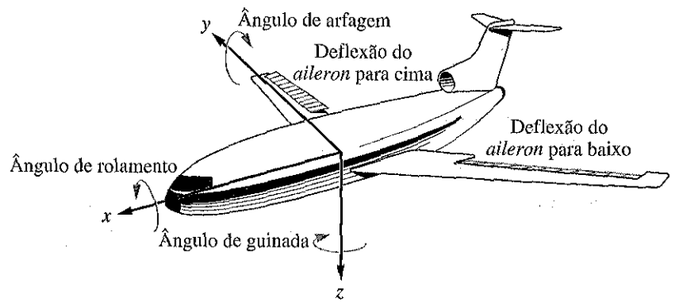


Fig. P1.2 Altitude definida da aeronave

lo de rolamento efetuando uma deflexão angular. A aeronave responde a esta deflexão angular produzindo uma velocidade angular de rolamento. Identifique os transdutores de entrada e de saída, o controlador e a planta. Além disso, identifique a natureza de cada sinal.

4. Muitos processos operam sobre materiais em rolo que se movem a partir de um carretel alimentador para um carretel armazenador. Tipicamente, estes sistemas, chamados *bobinadeiras*, controlam o material para que este se desloque a uma velocidade constante. Além da velocidade, bobinadeiras complexas também controlam tensão, compensam a inércia de rolamento ao acelerar ou desacelerar, e regulam a aceleração devida a mudanças súbitas. Uma bobinadeira é mostrada na Fig. P1.3. O transdutor de força mede a tensão; a bobinadeira traciona contra os cilindros compressores, que fornecem uma força oposta; e a brida fornece o deslizamento. Para compensar mudanças na velocidade, o material é preso ao redor de um *bailarino*. O laço evita que variações rápidas ocasionem folga excessiva ou danos ao material. Se a posição do bailarino for sentida por um potenciômetro ou outro dispositivo, variações de velocidade devidas ao enchimento do carretel armazenador ou a outras causas podem ser controladas comparando a tensão do potenciômetro com a velocidade comandada. O sistema então corrige a velocidade e reajusta o bailarino para a posição desejada (Ayers, 1988). Desenhe um diagrama de blocos funcional para o sistema de controle de velocidade, mostrando cada componente e cada sinal.

5. Em uma usina nuclear geradora de energia, o calor proveniente de um reator é usado para gerar vapor para as turbinas. A taxa da reação de fissão determina a quantidade de calor gerada, e esta taxa é controlada através de varetas inseridas dentro do núcleo radioativo. As varelas regulam o fluxo de nêutrons. Se as varetas forem baixadas dentro do núcleo, a taxa de fissão diminuirá; se as varetas forem elevadas, a taxa de fissão aumentará. Através do controle automático da posição das varetas, a quantidade de calor gerada pelo reator pode ser regulada. Desenhe um diagrama de blocos para o sistema de controle do reator nuclear mostrado na Fig. P1.4. Mostre todos os blocos e sinais.

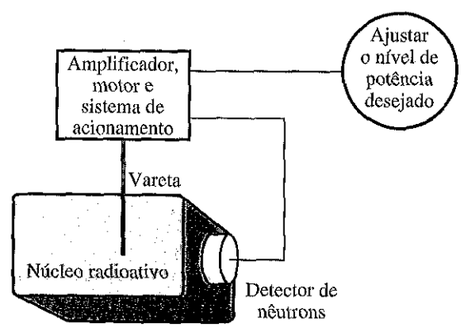


Fig. P1.4 Controle de um reator nuclear

6. Uma universidade deseja estabelecer um modelo de sistema de controle que represente a população de estudantes como saída e tendo a população desejada de estudantes como entrada. A administração determina a taxa de admissões comparando as populações de estudantes atual e a desejada. O setor de admissões usa então esta taxa para admitir estudantes. Desenhe um diagrama de blocos mostrando a administração e o setor de admissões como blocos do sistema. Mostre também os seguintes sinais: a população de estudantes desejada, a população de estudantes real, a taxa de estudantes desejada determinada pela administração, a taxa de estudantes real gerada pelo setor de admissões, a taxa de evasão e a taxa líquida de entrada.

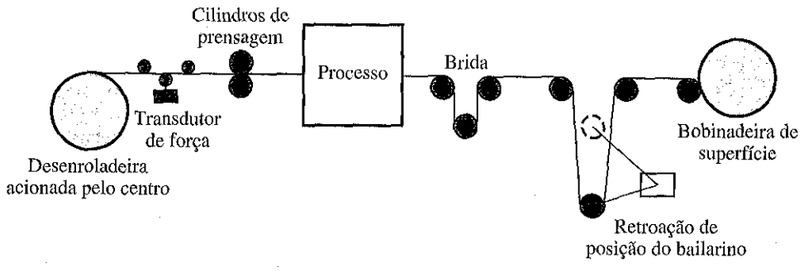


Fig. P1.3 Bobinadeira

7. Podemos construir um sistema de controle que ajuste automaticamente o volume do rádio de uma motocicleta de acordo com as mudanças no ruído gerado pela motocicleta. O ruído gerado pela motocicleta aumenta com a velocidade. À medida que o ruído aumenta, o sistema aumenta o volume do rádio. Admita que a quantidade de ruído possa ser representada por uma tensão gerada pelo cabo do velocímetro, e o volume do rádio seja controlado por uma tensão CC (Hogan, 1988). Se a tensão CC representa o volume desejado perturbado pelo barulho da motocicleta, desenhe um diagrama de bloco funcional de um sistema de controle automático de volume, mostrando o transdutor de entrada, o circuito de controle do volume e o transdutor de velocidade como blocos. Mostre também os seguintes sinais: o volume desejado como entrada, o volume real como saída e as tensões representando velocidade, volume desejado e volume real.

8. Sua banheira doméstica é um sistema de controle que mantém o nível de água constante. Uma vazão constante da torneira produz um nível constante de água, porque a vazão através do escoamento aumenta conforme o nível de água aumenta e diminui conforme o nível de água diminui. Após o equilíbrio ter sido alcançado, o nível pode ser controlado através da vazão de entrada. Uma vazão de entrada baixa produz um nível mais baixo, enquanto uma vazão de entrada maior produz um nível maior.

a. Esboce um sistema de controle que use este princípio para controlar precisamente o nível de fluido em um reservatório. Mostre as válvulas de entrada e de escoamento, o reservatório, alguns sensores e transdutores, e a interconexão de todos os componentes.

b. Desenhe um diagrama de blocos funcional do sistema identificando os sinais de entrada e de saída de cada bloco.

9. Um dinamômetro é um dispositivo usado para medir torque e velocidade e para variar a carga em dispositivos rotativos. O dinamômetro opera como descrito a seguir para controlar a quantidade de torque: um atuador hidráulico associado ao eixo pressiona um pneu contra um volante rotativo. Quanto maior o deslocamento do atuador, maior a força aplicada ao volante em rotação. Uma célula de carga com extensômetros sente a força. O deslocamento do atuador é controlado por uma válvula operada eletricamente cujo deslocamento regula o líquido que flui dentro do atuador (D'Souza, 1988). Desenhe um diagrama de blocos funcional de um sistema a malha fechada que usa o dinamômetro descrito para regular a força contra o pneu durante teste. Mostre todos os sinais e sistemas. Inclua os amplificadores que alimentam a válvula, a válvula, o atuador com carga e o pneu.

10. Durante uma operação médica, um anestesista controla a profundidade de inconsciência controlando a concentração de isoflurano em uma mistura vaporizada com oxigênio e óxido nitroso. A profundidade da anestesia é medida pela pressão sangüínea do paciente. O anestesista também regula a ventilação, o equilíbrio de fluido e a administração de outras drogas. A fim de liberar o anestesista para dedicar mais tempo à últimas tarefas, e a bem da segurança do paciente, desejamos automatizar a profundidade da anestesia automatizando o controle da concentração de isoflurano. Desenhe um diagrama de blocos funcional do sistema mostrando sinais pertinentes e os subsistemas (Meier, 1992).

11. A posição vertical, $x(t)$, do volante de prensagem mostrado na Fig. P1.5 é controlado por um sistema a malha fechada. A entrada do sistema é a profundidade desejada da prensa, e a saída é a profundidade real da prensa. A diferença entre a profundidade desejada e a profundidade real aciona o motor, resultando em uma força aplicada ao trabalho. Esta força resulta em uma velocidade de alimentação do volante da prensa (Jenkins, 1997). Desenhe um diagrama de blocos funcional a malha fechada para o processo de prensagem, mostrando a entrada, a saída, a força e a taxa de alimentação da prensa.

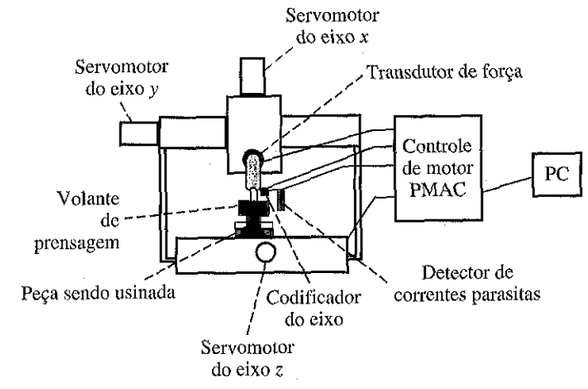


Fig. P1.5 Sistema de prensa

12. Uma válvula solenóide proporcional de alta velocidade é mostrada na Fig. P1.6. Uma tensão proporcional para a posição desejada do carretel é aplicada à bobina. O campo magnético resultante produzido pela corrente na bobina faz com que a armadura se mova. Um pino impulsor conectado à armadura move o carretel. Um transformador diferencial linear de tensão (LVDT) que dá uma tensão de saída proporcional ao deslocamento sente a posição do carretel. Esta tensão pode ser usada em um canal de retroação para implementar a operação a malha fechada (Vaughan, 1996). Desenhe um diagrama de blocos funcional da válvula, mostrando as posições de entrada e de saída, a tensão da bobina, a corrente na bobina, e a força sobre o carretel.

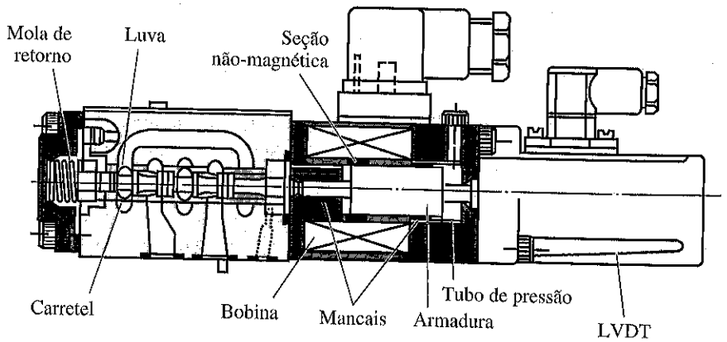


Fig. P1.6 Válvula solenóide proporcional de alta velocidade

13. Dado o circuito elétrico mostrado na Fig. P1.7,

a. Escreva a equação diferencial para o circuito se $v(t) = u(t)$, um degrau unitário.

b. Resolva a equação diferencial para a corrente, $i(t)$, se não há energia inicial no circuito.

c. Faça um gráfico da sua solução se $R/L = 1$.

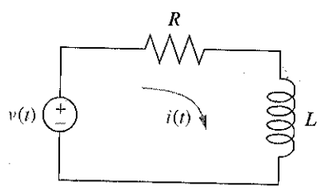


Fig. P1.7 Circuito *RL*

14. Repita o Problema 13 usando o circuito mostrado na Fig. P1.8. Suponha que $R = 1\Omega$, $L = 0{,}5$ H e $1/LC = 30$.

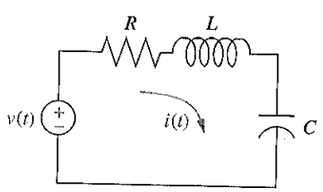


Fig. P1.8 Circuito *RLC*

15. Resolva as seguintes equações diferenciais usando os métodos clássicos. Suponha que as condições iniciais sejam iguais a zero.

a. $\dfrac{dx}{dt} + 7x = 5\cos 2t$

b. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} + 8x = 5\,\text{sen}\,3t$

c. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 8\dfrac{dx}{dt} + 25x = 10u(t)$

16. Resolva as seguintes equações diferenciais usando os métodos clássicos e dadas as condições iniciais.

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = \text{sen}\,2t$

$x(0) = 2; \quad \dfrac{dx}{dt}(0) = -3$

b. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + x = 5e^{-2t} + t$

$x(0) = 2; \quad \dfrac{dx}{dt}(0) = 1$

c. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = t^2$

$x(0) = 1; \dfrac{dx}{dt}(0) = 2$

Problema Progressivo de Análise e Projeto

17. Pantógrafo para ferrovia de alta velocidade. Alguns sistemas ferroviários de alta velocidade são energizados por eletricidade fornecida a um pantógrafo no teto do trem a partir de uma catenária aérea conforme mostrado na Fig. P1.9. A força aplicada pelo pantógrafo à catenária é regulada para evitar perda de contato devido a movimento transitório excessivo. Um método proposto para regular a força usa um sistema com retroação a malha fechada, no qual uma força, F_{cima}, é aplicada à parte inferior do pantógrafo, resultando em uma força de saída aplicada à catenária no topo. O contato entre a cabeça do pantógrafo e a catenária é representado por uma mola. A força de saída é proporcional ao deslocamento desta mola, o qual é a diferença entre as posições verticais da catenária e da cabeça do pantógrafo (O'Connor, 1997). Desenhe um diagrama de blocos funcional mostrando os seguintes sinais: a força de saída desejada como entrada, a força, F_{cima}, aplicada à parte inferior do pantógrafo, a diferença em deslocamento entre a catenária e a cabeça do pantógrafo, e a força de contato de saída. Mostre também os blocos representando o transdutor de entrada, o controlador, o atuador gerando F_{cima}, a dinâmica do pantógrafo, a mola descrita acima e o sensor de saída. Todas as forças e deslocamentos são medidos a partir do equilíbrio.

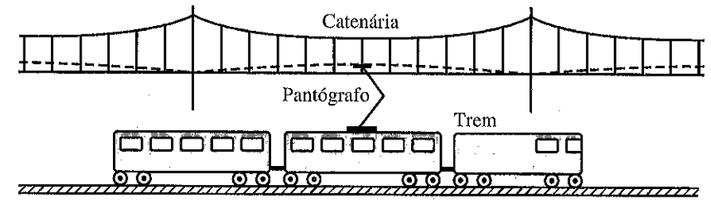


Fig. P1.9 Sistema ferroviário de alta velocidade mostrando pantógrafo e catenária

Bibliografia

Ayers, J. Taking the Mystery Out of Winder Controls. *Power Transmission Design,* April 1988, pp. 27–34.

Bahill, A. T. *Bioengineering: Biomedical, Medical, and Clinical Engineering.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

Bennett, S. *A History of Control Engineering 1800–1930.* Peter Peregrinus Ltd., Stevenage, UK, 1979.

Bode, H. W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* Van Nostrand, Princeton, NJ, 1945.

Cannon, R. H., Jr. *Dynamics of Physical Systems.* McGraw-Hill, New York, 1967.

D'Azzo, J. J., and Houpis, C. H. *Feedback Control System Analysis and Synthesis,* 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1966.

Doebelin, E. O. *Measurement Systems Application and Design,* 4th ed. McGraw-Hill, New York, 1990.

Dorf, R. C. *Modern Control Systems,* 5th ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

D'Souza, A. F. *Design of Control Systems,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Franklin, G. F.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1986.

Heller, H. C.; Crawshaw, L. I.; and Hammel, H. T. The Thermostat of Vertebrate Animals. *Scientific American,* August 1978, pp. 102–113.

Hogan, B. J. As Motorcycle's Speed Changes, Circuit Adjusts Radio's Volume. *Design News,* 18 August 1988, pp. 118–119.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J., Jr.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems,* 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Jenkins, H. E.; Kurfess, T. R.; and Ludwick, S. J. Determination of a Dynamic Grinding Model. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, June 1997, pp. 289–293.

Klapper, J., and Frankle, J. T. *Phase-Locked and Frequency-Feedback Systems.* Academic Press, New York, 1972.

Martin, R. H., Jr. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems.* McGraw-Hill, New York, 1984.

Mayr, O. The Origins of Feedback Control. *Scientific American,* October 1970, pp. 110–118.

Mayr, O. *The Origins of Feedback Control.* MIT Press, Cambridge, MA, 1970.

Meier, R.; Nieuwland, J.; Zbinden, A. M.; and Hacisalihzade, S. S. Fuzzy Logic Control of Blood Pressure during Anesthesia. *IEEE Control Systems,* December 1992, pp. 12–17.

Novosad, J. P. *Systems, Modeling, and Decision Making.* Kendall/Hunt, Dubuque, IA, 1982.

Nyquist, H. Regeneration Theory. *Bell System Technical Journal,* January 1932.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

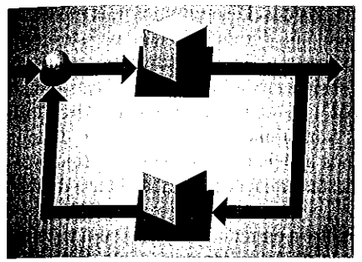
Ogata, K. *Modern Control Engineering,* 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

Rockwell International. *Space Shuttle Transportation System.* 1984 (Press Information).

Shaw, D. A., and Turnbull, G. A. Modern Thickness Control for a Generation III Hot Strip Mill. *The International Steel Rolling Conference—The Science & Technology of Flat Rolling vol. 1.* Association Technique de la Siderurgie Francaise, Deauville, France, 1–3 June 1987.

Vaughan, N. D., and Gamble, J. B. The Modeling and Simulation of a Proportional Solenoid Valve. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 118, March 1996, pp. 120–125.

CAPÍTULO 2



Modelagem no Domínio de Freqüência

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos:

- Rever a transformada de Laplace
- Aprender como obter um modelo matemático, chamado *função de transferência,* para sistemas lineares e invariantes no tempo de natureza elétrica, mecânica e eletromecânica
- Aprender como linearizar um sistema não-linear a fim de obter a função de transferência

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de obter a função de transferência de cada subsistema.
- Dado um modelo de perna humana ou de um circuito elétrico não-linear, você deverá ser capaz de linearizá-lo e em seguida obter a função de transferência.

2.1 Introdução

No Cap. 1 discutimos a seqüência de análise e projeto que incluiu a obtenção do diagrama do sistema e demonstramos esta etapa em um sistema de controle de posição. Para obter um diagrama, o engenheiro de sistemas de controle muitas vezes precisa formular hipóteses simplificadoras de modo a fazer com que o modelo resultante seja fácil de manipular e ainda se aproxime da realidade física.

O próximo passo é desenvolver modelos a partir de diagramas de sistemas físicos. Discutiremos dois métodos: (1) funções de transferência no domínio de freqüência e (2) equações de estado no domínio do tempo. Estes tópicos serão tratados neste e no Cap. 3, respectivamente. À medida que formos prosseguindo, observaremos que em todos os casos a primeira etapa para desenvolver um modelo matemático consiste em aplicar as leis físicas fundamentais de ciência e engenharia. Por exemplo, ao modelar circuitos elétricos, a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff, que são as leis básicas de circuitos elétricos, serão aplicadas inicialmente. Somaremos tensões ao longo de uma malha ou correntes em um nó. Ao estudar sistemas mecânicos, utilizaremos as leis de Newton com princípios-guias fundamentais. Somaremos, neste caso, forças e torques. Com base nestas equações, iremos obter a relação entre a saída e a entrada do sistema.

No Cap. 1, vimos que uma equação diferencial pode descrever a relação entre a entrada e a saída de um sistema. A forma da equação diferencial e os coeficientes constituem uma formulação ou descrição do sistema. Embora a equação diferencial relacione o sistema à sua entrada e à sua saída, não constitui uma representação a partir da perspectiva de sistema. Observando a Eq. (1.2), a forma geral de uma equação diferencial de ordem n, linear e invariante no tempo, vemos que os parâmetros do sistema, que são os coeficientes, bem como a saída, $c(t)$, e a entrada, $r(t)$, aparecem ao longo da equação.

Seria preferível uma representação matemática como a mostrada na Fig. 2.1(a), onde a entrada, a saída e o sistema são partes distintas e separadas. Além disto, gostaríamos de representar convenientemente a interligação de diversos subsistemas. Por exemplo, gostaríamos de representar interligações em *cascata*, como na Fig. 2.1(b), onde uma função matemática, chamada função de transferência, está no interior de cada bloco e funções de blocos podem ser combinadas com facilidade, para gerar a Fig. 2.1(a), com o objetivo de facilitar a análise e o projeto. Esta conveniência não pode ser obtida com equação diferencial.

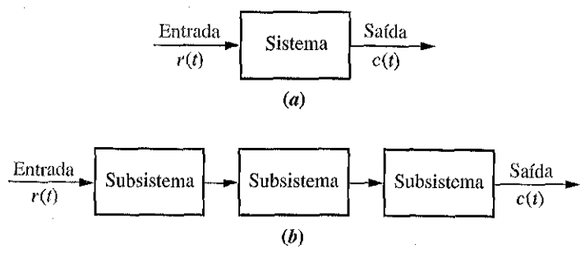
2.2 Revisão sobre Transformada de Laplace

Um sistema representado por uma equação diferencial é difícil de modelar como diagrama de blocos. Assim, vamos deixar agora o trabalho de base para transformada de Laplace, com a qual podemos representar a entrada, a saída e o sistema como entidades distintas. Além do mais, sua relação será simplesmente algébrica. Definamos primeiro a transformada de Laplace e em seguida mostremos como ela simplifica a representação de sistemas físicos (Nilsson, 1996).

A transformada de Laplace é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{2.1}$$

em que $s = \sigma + j\omega$ é uma variável complexa. Assim, conhecendo-se $f(t)$ e sabendo que a integral da Eq. (2.1) existe, é possível obter uma função, $F(s)$, chamada *transformada de Laplace de* $f(t)$.[1]



Nota: A notação, $r(t)$, para a entrada significa *entrada de referência*.
A notação, $c(t)$, para a saída significa *variável controlada*.

Fig. 2.1 a. Representação em diagrama de blocos de um sistema; **b.** representação em diagrama de blocos de uma interconexão de subsistemas

[1] A transformada de Laplace existe se a integral da Eq. (2.1) convergir. A integral irá convergir se $\int_{0^-}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_1 t}\,dt < \infty$. Se $|f(t)| < Me^{\sigma_2 t}$, $0 < t < \infty$, a integral convergirá se $\infty > \sigma_1 > \sigma_2$. Chamamos σ_2 a *abscissa de convergência*, o menor valor de σ, em $s = \sigma + j\omega$, para o qual a integral existe.

A notação referente ao limite inferior da integral significa que, mesmo se $f(t)$ for descontínua em $t = 0$, podemos começar a integração antes da descontinuidade, desde que a integral convirja. Assim, podemos obter a transformada de Laplace de funções impulso. Esta propriedade apresenta vantagens diferentes ao aplicar a transformada de Laplace na solução de equações diferenciais quando as condições iniciais forem descontínuas em $t = 0$. Usando equações diferenciais, é necessário obter solução para as condições iniciais depois da descontinuidade conhecendo-se as condições iniciais antes da descontinuidade. Usando a transformada de Laplace, necessitamos conhecer somente as condições antes da descontinuidade. Ver Kailath (1980) para uma discussão mais detalhada.

A transformada de Laplace inversa, que nos permite obter $f(t)$ dada $F(s)$, é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \\ &= f(t)u(t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 \qquad t > 0 \\ &= 0 \qquad t < 0 \end{aligned}$$

é a função degrau unitário. A multiplicação de $f(t)$ por $u(t)$ conduz a uma função do tempo que é nula para $t < 0$.

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\operatorname{sen} \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Usando a Eq. (2.1), é possível deduzir uma tabela relacionando $f(t)$ a $F(s)$ para casos específicos. A Tabela 2.1 mostra os resultados para uma amostra representativa de funções. Se usarmos tabelas, não precisaremos empregar a Eq. (2.2), que requer integração complexa, para obter $f(t)$ a partir de $F(s)$. No exemplo a seguir, demonstraremos o uso da Eq. (2.1) para obter a transformada de Laplace de uma função do tempo.

Exemplo 2.1

Transformada de Laplace de uma função do tempo

Problema Obter a transformada de Laplace de $f(t) = Ae^{-at}u(t)$.

Solução Como a função do tempo não contém impulsos, pode-se substituir o limite inferior da Eq. (2.1) por 0. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-st}\,dt = A\int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt \\ &= -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+a} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tabela 2.2 Teoremas das transformadas de Laplace

Item n.°	Teorema	Nome
1.	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$	Teorema da linearidade
3.	$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Teorema da linearidade
4.	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Teorema do deslocamento de freqüência
5.	$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$	Teorema do deslocamento no tempo
6.	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Teorema do fator de escala
7.	$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	Teorema da derivação
8.	$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$	Teorema da derivação
9.	$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Teorema da derivação
10.	$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Teorema da integração
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Teorema do valor final[1]
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Teorema do valor inicial[2]

[1]Para que este teorema seja aplicado corretamente, todas as raízes de $F(s)$ devem ter parte real negativa, e não mais do que uma raiz pode estar na origem.
[2]Para que este teorema seja válido, $f(t)$ deve ser contínua ou ter um degrau de descontinuidade em $t = 0$ (isto é, sem impulsos ou suas derivadas em $t = 0$).

Além da tabela de transformadas de Laplace, Tabela 2.1, podemos usar os teoremas da transformada de Laplace, listados na Tabela 2.2, para auxiliar na transformação entre $f(t)$ e $F(s)$. No próximo exemplo, demonstraremos o uso dos teoremas da transformada de Laplace mostrados na Tabela 2.2 na obtenção de $f(t)$ a partir de $F(s)$.

Exemplo 2.2

Transformada de Laplace inversa

Problema Obter a transformada de Laplace inversa de $F_1(s) = 1/(s+3)^2$.

Solução Neste exemplo, usaremos o teorema do deslocamento de freqüência, Item 4 da Tabela 2.2, e a transformada de Laplace de $f(t) = tu(t)$, Item 3 da Tabela 2.1. Se a transformada de Laplace inversa de $F(s) = 1/s^2$ é $tu(t)$, a transformada de $F(s+a) = 1/(s+a)^2$ é $e^{-at}tu(t)$. Em conseqüência, $f_1(t) = e^{-3t}tu(t)$.

Expansão em Frações Parciais

Para obter a transformada de Laplace inversa de uma função complicada, podemos converter a função em uma soma de termos mais simples para cada um dos quais se conhece a transformada de Laplace. O resultado é chamado de *expansão em frações parciais*. Se $F_1(s) = N(s)/D(s)$, onde a ordem de $N(s)$ é inferior à ordem de $D(s)$, então é possível fazer uma expansão em frações parciais. Se a ordem de $N(s)$ for superior ou igual à ordem de $D(s)$, deve-se então dividir $N(s)$ por $D(s)$, sucessivamente, até que o resultado apresente um resto cujo numerador seja de ordem inferior ao denominador. Por exemplo, se

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \tag{2.4}$$

devemos efetuar a divisão indicada até obter um resto cujo numerador seja de ordem inferior ao respectivo denominador. Portanto,

$$F_1(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5} \tag{2.5}$$

Tomando-se a transformada de Laplace inversa, utilizando o Item 1 da Tabela 2.1, juntamente com o teorema da derivação, Item 7, e o teorema da linearidade, Item 3 da Tabela 2.2, obtemos

$$f_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + s + 5}\right] \tag{2.6}$$

Usando a expansão em frações parciais, estaremos aptos a expandir funções como $F(s) = 2/(s^2 + s + 5)$ em uma soma de termos e, em seguida, obter a transformada inversa de cada um dos termos. Iremos considerar agora três casos e mostrar, para cada um deles, como expandir $F(s)$ em frações parciais.

Caso 1: Raízes do Denominador de $F(s)$ Reais e Distintas Um exemplo de $F(s)$ com raízes reais e distintas em denominador é

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \tag{2.7}$$

As raízes do denominador são distintas, uma vez que cada um dos fatores é elevado somente à potência unitária. Podemos escrever a expansão em frações parciais como a soma de termos onde cada fator do denominador original constitui o denominador de cada termo, e constantes, chamadas *resíduos*, formam os numeradores. Por conseguinte,

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \tag{2.8}$$

Para obter K_1, multiplica-se primeiro a Eq. (2.8) por $(s+1)$, isolando K_1. Assim,

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{(s+1)K_2}{(s+2)} \tag{2.9}$$

Fazendo s tender a -1 elimina-se o último termo, resultando $K_1 = 2$. De modo semelhante, pode-se determinar K_2 multiplicando a Eq. (2.8) por $(s+2)$ e, em seguida, fazendo s tender a -2; assim, $K_2 = -2$.

Cada termo componente da Eq. (2.8) é uma $F(s)$ na Tabela 2.1. Portanto, $f(t)$ é a soma das transformadas de Laplace inversas de cada um dos termos, ou seja,

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) \tag{2.10}$$

Em geral, então, dada uma $F(s)$ cujo denominador possua raízes reais e distintas, é possível efetuar uma expansão em frações parciais,

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} &= \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_m}{(s+p_m)} + \cdots + \frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

se a ordem de $N(s)$ for inferior à ordem de $D(s)$. Para calcular cada um dos resíduos, K_i, multiplica-se a Eq. (2.11) pelo denominador da fração parcial correspondente. Assim, se quisermos obter K_m, multiplicamos a Eq. (2.11) por $(s+p_m)$ e obtemos

$$\begin{aligned} (s+p_m)F(s) &= \frac{(s+p_m)N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)} \\ &= (s+p_m)\frac{K_1}{(s+p_1)} + (s+p_m)\frac{K_2}{(s+p_2)} + \cdots + K_m + \cdots \\ &\quad + (s+p_m)\frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Se fizermos s tender a $-p_m$, todos os termos do membro da direita na Eq. (2.12) tenderão a zero exceto o termo K_m, resultando

$$\left.\frac{\cancel{(s+p_m)}N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots\cancel{(s+p_m)}\cdots(s+p_n)}\right|_{s\to -p_m} = K_m \tag{2.13}$$

O exemplo a seguir ilustra o uso da expansão em frações parciais na solução de equações diferenciais. Veremos que a transformada de Laplace reduz a tarefa de obter a solução a operações algébricas simples.

Exemplo 2.3

Solução de equação diferencial com transformada de Laplace

Problema Dada a seguinte equação diferencial, obter a solução $y(t)$ se todas as condições iniciais forem zero. Usar a transformada de Laplace.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 32u(t) \tag{2.14}$$

Solução Substituir o correspondente $F(s)$ de cada um dos termos na Eq. (2.14) usando o Item 2 da Tabela 2.1, os Itens 7 e 8 da Tabela 2.2 e as condições iniciais de $y(t)$ e $dy(t)/dt$, dadas por $y(0-) = 0$ e $\dot{y}(0-) = 0$, respectivamente. Portanto, a transformada de Laplace da Eq. (2.14) é

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s} \tag{2.15}$$

Obtendo a solução para $Y(s)$, resulta

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} \tag{2.16}$$

Para obter a solução $y(t)$, observa-se que a Eq. (2.16) não corresponde a nenhum dos termos da Tabela 2.1. Assim, efetuamos a expansão em frações parciais do termo da direita e fazemos a identificação de cada um dos termos resultantes com o $F(s)$ correspondente na Tabela 2.1. Portanto,

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+4)} + \frac{K_3}{(s+8)} \tag{2.17}$$

onde, com base na Eq. (2.13),

$$K_1 = \left.\frac{32}{(s+4)(s+8)}\right|_{s\to 0} = 1 \tag{2.18a}$$

$$K_2 = \left.\frac{32}{s(s+8)}\right|_{s\to -4} = -2 \tag{2.18b}$$

$$K_3 = \left.\frac{32}{s(s+4)}\right|_{s\to -8} = 1 \tag{2.18c}$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+4)} + \frac{1}{(s+8)} \tag{2.19}$$

Como cada uma das três frações componentes da Eq. (2.19) é representada por um $F(s)$ na Tabela 2.1, $y(t)$ é a soma das transformadas inversas de cada um dos termos. Por conseguinte,

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t) \tag{2.20}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora os programas ch2p1 até ch2p18 do Apêndice B. Este é o primeiro exercício MATLAB. Você aprenderá como usar o MATLAB para (1) representar polinômios, (2) obter raízes de polinômios, (3) multiplicar polinômios e (4) obter a expansão em frações parciais. Finalmente, o Exemplo 2.3 será resolvido usando o MATLAB.

O $u(t)$ na Eq. (2.20) mostra que a resposta é zero até $t = 0$. A menos que sejam especificadas, todas as entradas de sistemas no texto não serão iniciadas antes de $t = 0$. Assim, as respostas terão valor zero até $t = 0$. Por conveniência, abandonaremos daqui em diante a notação com $u(t)$. Escreveremos, então, a resposta da saída como

$$y(t) = 1 - 2e^{-4t} + e^{-8t} \tag{2.21}$$

Caso 2: Raízes do Denominador de $F(s)$ Reais e Repetidas Um exemplo de $F(s)$ com raízes reais e repetidas em denominador é

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} \tag{2.22}$$

As raízes de $(s + 2)^2$ no denominador são repetidas, uma vez que o fator é elevado a uma potência inteira maior que 1. Neste caso, a raiz do denominador em -2 é uma *raiz múltipla* de *multiplicidade* 2.

Podemos escrever a expansão em frações parciais como uma soma de termos, onde cada fator do denominador constitui o denominador de cada uma das frações. Além disto, cada raiz múltipla gera termos adicionais com fatores do denominador de multiplicidade reduzida. Por exemplo, se

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)} \tag{2.23}$$

então, $K_1 = 2$ pode ser obtido como descrito anteriormente. K_2 pode ser isolado multiplicando-se a Eq. (2.23) por $(s + 2)^2$, resultando

$$\frac{2}{s+1} = (s+2)^2\frac{K_1}{(s+1)} + K_2 + (s+2)K_3 \tag{2.24}$$

Fazendo s tender a -2, $K_2 = -2$. Para obter K_3, constatamos que se derivarmos a Eq. (2.24) em relação a s,

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}K_1 + K_3 \tag{2.25}$$

é possível isolar e determinar K_3 fazendo s tender a -2. Portanto, $K_3 = -2$.

Cada uma das partes componentes da Eq. (2.23) é uma $F(s)$ na Tabela 2.1; em conseqüência, $f(t)$ é a soma das transformadas de Laplace inversas de cada termo, ou seja,

$$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t} \tag{2.26}$$

Se a raiz do denominador for de multiplicidade superior a 2, as derivações sucessivas irão isolar cada um dos resíduos na expansão da raiz múltipla.

Em geral, então, dada uma $F(s)$ cujo denominador possui raízes reais e repetidas, uma expansão em frações parciais

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{K_1}{(s+p_1)^r} + \frac{K_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_r}{(s+p_1)} \\ &\quad + \frac{K_{r+1}}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned} \tag{2.27}$$

pode ser efetuada se a ordem de $N(s)$ for inferior à ordem de $D(s)$ e as raízes repetidas forem de multiplicidade r em $-p_1$. Para determinar as constantes K_1 a K_r referentes às raízes de multiplicidade superior à unidade, multiplica-se primeiro a Eq. (2.27) por $(s + p_1)^r$ obtendo $F_1(s)$,

$$\begin{aligned} F_1(s) &= (s+p_1)^rF(s) \\ &= \frac{(s+p_1)^rN(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= K_1 + (s+p_1)K_2 + (s+p_1)^2K_3 + \cdots + (s+p_1)^{r-1}K_r \\ &\quad + \frac{K_{r+1}(s+p_1)^r}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_n(s+p_1)^r}{(s+p_n)} \end{aligned} \tag{2.28}$$

De imediato, é possível determinar K_1 fazendo s tender a $-p_1$. Podemos determinar K_2 derivando a Eq. (2.28) com relação a s e em seguida fazendo s tender a $-p_1$. As derivações subseqüentes permitirão determinar os valores de K_3 a K_r. A expressão geral de K_1 a K_r para raízes múltiplas é

$$K_i = \left.\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}F_1(s)}{ds^{i-1}}\right|_{s\to -p_1} \qquad i = 1, 2, \ldots, r; \quad 0! = 1 \tag{2.29}$$

Caso 3: Raízes do Denominador de $F(s)$ Complexas ou Imaginárias Um exemplo de $F(s)$ com raízes complexas em denominador é

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} \tag{2.30}$$

Esta função pode ser expandida na seguinte forma:

$$\frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5} \tag{2.31}$$

K_1 pode ser determinado pelo procedimento habitual e vale 3/5. K_2 e K_3 podem ser determinados multiplicando-se primeiro a Eq. (2.31) pelo mínimo múltiplo comum do denominador, $s(s^2 + 2s + 5)$ e simplificando as frações. Depois da simplificação, com $K_1 = 3/5$, obtém-se

$$3 = \left(K_2 + \frac{3}{5}\right)s^2 + \left(K_3 + \frac{6}{5}\right)s + 3 \tag{2.32}$$

Igualando-se os coeficientes de mesma potência de s, resultam $(K_2 + 3/5) = 0$ e $(K_3 + 6/5) = 0$. Portanto, $K_2 = -3/5$ e $K_3 = -6/5$. Assim,

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5} \tag{2.33}$$

É possível mostrar que o último termo é igual à soma das transformadas de Laplace de um seno e de um co-seno exponencialmente amortecidos. Usando o Item 7 na Tabela 2.1 e os Itens 2 e 4 na Tabela 2.2, obtemos

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}\cos\omega t] = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{2.34}$$

De modo semelhante,

$$\mathcal{L}[Be^{-at}\operatorname{sen}\omega t] = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{2.35}$$

Adicionando as Eqs. (2.34) e (2.35), obtemos

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}\cos\omega t + Be^{-at}\operatorname{sen}\omega t] = \frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{2.36}$$

Convertemos agora o último termo da Eq. (2.33) à forma sugerida pela Eq. (2.36) completando os quadrados no denominador e ajustando termos no numerador sem alterar o seu valor. Por conseguinte,

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2} \tag{2.37}$$

Comparando a Eq. (2.37) com a Tabela 2.1 e com a Eq. (2.36), encontramos

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) \tag{2.38}$$

Para visualizar a solução, é preferível uma forma alternativa de $c(t)$, obtida através de identidades trigonométricas. Usando as amplitudes dos termos seno e co-seno, pomos em evidência o fator $\sqrt{1^2+(1/2)^2}$ nos termos entre parênteses e obtemos

$$c(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(1/2)^2}}\cos 2t + \frac{1/2}{\sqrt{1^2+(1/2)^2}}\operatorname{sen} 2t\right) \tag{2.39}$$

Fazendo $1/\sqrt{1^2+(1/2)^2} = \cos\phi$ e $(1/2)/\sqrt{1^2+(1/2)^2} = \operatorname{sen}\phi$,

$$c(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}(\cos\phi\cos 2t + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen} 2t) \tag{2.40}$$

ou

$$c(t) = 0{,}6 - 0{,}671e^{-t}\cos(2t-\phi) \tag{2.41}$$

onde $\phi = \operatorname{arc\,tg} 0{,}5 = 26{,}57°$. Assim, $c(t)$ é igual a uma constante mais uma senóide exponencialmente amortecida.

Em geral, então, dada uma $F(s)$ cujo denominador possua raízes complexas ou raízes imaginárias, é possível efetuar uma expansão em frações parciais,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s^2+as+b)\cdots} = \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{(K_2 s + K_3)}{(s^2+as+b)} + \cdots \tag{2.42}$$

se a ordem de $N(s)$ for inferior à ordem de $D(s)$, p_1 for real e $(s^2 + as + b)$ possuir raízes complexas ou imaginárias. As raízes complexas ou imaginárias são expandidas com termos da forma $(K_2 s + K_3)$ no numerador em vez de simplesmente K_i, como no caso de raízes reais. Os K_i na Eq. (2.42) são obtidos igualando-se os coeficientes da equação depois de simplificar as frações. Depois de completar os quadrados de $(s^2 + as + b)$ e ajustar o numerador, $(K_2 s + K_3)/(s^2 + as + b)$ pode ser colocada na forma mostrada no membro da direita da Eq. (2.36).

Finalmente, o caso de raízes puramente imaginárias ocorre se $a = 0$ na Eq. (2.42). Os cálculos são os mesmos.

Um outro método, que segue a técnica usada para a expansão em frações parciais de $F(s)$ com raízes reais em denominador, pode ser usado para o caso de raízes complexas e imaginárias. Contudo, os resíduos de raízes complexas e imaginárias são também conjugados complexos. Então, depois de obter a transformada de Laplace inversa, os termos resultantes podem ser identificados como

$$\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta \tag{2.43}$$

e

$$\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} = \operatorname{sen}\theta \tag{2.44}$$

Por exemplo, a $F(s)$ anterior também pode ser expandida como

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2} \tag{2.45}$$

Determinando K_2,

$$K_2 = \left.\frac{3}{s(s+1-j2)}\right|_{s\to -1-j2} = -\frac{3}{20}(2+j1) \tag{2.46}$$

De modo semelhante, K_3 é obtido como o conjugado complexo de K_2 e K_1 é determinado como descrito anteriormente. Por conseguinte,

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20}\left(\frac{2+j1}{s+1+j2} + \frac{2-j1}{s+1-j2}\right) \tag{2.47}$$

donde

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}\left[(2+j1)e^{-(1+j2)t} + (2-j1)e^{-(1-j2)t}\right] = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}e^{-t}\left[4\left(\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right)\right] \tag{2.48}$$

Usando as Eqs. (2.43) e (2.44), obtemos

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = 0{,}6 - 0{,}671e^{-t}\cos(2t-\phi) \tag{2.49}$$

onde $\phi = \operatorname{arctg} 0{,}5 = 26{,}57°$.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem usando exercícios com o MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora os programas ch2sp1 e ch2sp2 do Apêndice E. Você aprenderá como construir objetos simbólicos e em seguida obter a transformada de Laplace inversa e as transformadas de Laplace de funções nos domínios de freqüência e do tempo, respectivamente. Os exemplos no Caso 2 e no Caso 3 desta seção serão resolvidos usando a *Toolbox* de Matemática Simbólica.

Exercício de Avaliação 2.1

Problema: Obter a transformada de Laplace de $f(t) = te^{-5t}$.

Resposta: $F(s) = 1/(s+5)^2$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Exercício de Avaliação 2.2

Problema: Obter a transformada de Laplace inversa de $F(s) = 10/[s(s+2)(s+3)^2]$.

Resposta: $f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

2.3 Função de Transferência

Na seção anterior, definimos a transformada de Laplace e sua inversa. Apresentamos a idéia da expansão em frações parciais e aplicamos os conceitos na solução de equações diferenciais. Agora estamos prontos para formular a representação de sistema mostrada na Fig. 2.1, através do estabelecimento de uma definição viável de uma função que relacione algebricamente a saída de um sistema à sua entrada. Esta função permitirá a separação da entrada, do sistema e da saída em três partes separadas e distintas, diferentemente da equação diferencial. A função nos permitirá também combinar *algebricamente* representações matemáticas de subsistemas para obter uma representação total do sistema.

Comecemos escrevendo a forma geral de uma equação diferencial de ordem n, linear e invariante no tempo,

$$a_n\frac{d^nc(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0c(t) = b_m\frac{d^mr(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0r(t) \tag{2.50}$$

onde $c(t)$ é a saída, $r(t)$ é a entrada e os a_i, os b_i e a forma da equação diferencial representam o sistema. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da equação,

$$\begin{aligned} a_ns^nC(s) + a_{n-1}s^{n-1}C(s) + \cdots + a_0C(s) &+ \text{termos de condição inicial envolvendo } c(t) \\ = b_ms^mR(s) + b_{m-1}s^{m-1}R(s) + \cdots + b_0R(s) &+ \text{termos de condição inicial envolvendo } r(t) \end{aligned} \tag{2.51}$$

A Eq. (2.51) é uma expressão puramente algébrica. Admitindo-se que *todas as condições iniciais sejam iguais a zero*, a Eq. (2.51) se reduz a

$$(a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)C(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)R(s) \tag{2.52}$$

Forme agora a relação entre a transformada da saída, $C(s)$, dividida pela transformada da entrada, $R(s)$:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)} \tag{2.53}$$

Observe que a Eq. (2.53) separa a saída, $C(s)$, a entrada, $R(s)$, e o sistema, a relação de polinômios em s na direita. Chamamos esta relação, $G(s)$, de *função de transferência* e o seu cálculo é feito com *condições iniciais iguais a zero*.

A função de transferência pode ser representada por um diagrama de blocos, como mostrado na Fig. 2.2, com a entrada à esquerda, a saída à direita, e a função de transferência do sistema no interior do bloco. Observe que o denominador da função de transferência é idêntico ao polinômio característico da equação diferencial. Além disto, podemos obter a saída, $C(s)$, usando

$$C(s) = R(s)G(s) \tag{2.54}$$

Apliquemos o conceito de função de transferência a um exemplo e em seguida usemos o resultado para obter a resposta do sistema.

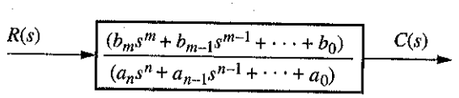


Fig. 2.2 Diagrama de blocos de uma função de transferência

Exemplo 2.4

Função de transferência de uma equação diferencial

Problema Obter a função de transferência representada por

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t) \tag{2.55}$$

Solução Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros, supondo condições iniciais iguais a zero, temos

$$sC(s) + 2C(s) = R(s) \tag{2.56}$$

A função de transferência, $G(s)$, é

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+2} \tag{2.57}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora os programas ch2p9 até ch2p11 do Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para criar funções de transferência com o numerador e o denominador sob forma polinomial ou fatorada. Aprenderá também a realizar a conversão entre as formas polinomial e fatorada.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem fazendo exercícios com o MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa ch2sp3 do Apêndice E. Você aprenderá como usar a *Toolbox* de Matemática Simbólica para simplificar a entrada de funções de transferência complicadas bem como melhorar a legibilidade. Você aprenderá como entrar com uma função de transferência simbólica e convertê-la em um objeto linear e invariante no tempo (LTI) como apresentado no Apêndice B, ch2p9.

Exemplo 2.5

Resposta do sistema a partir da função de transferência

Problema Usar o resultado do Exemplo 2.4 para obter a resposta, $c(t)$, a uma entrada, $r(t) = u(t)$, a um degrau unitário, supondo condições iniciais iguais a zero.

Solução Para resolver o problema, usamos a Eq. (2.54), onde $G(s) = 1/(s+2)$, como encontrado no Exemplo 2.4. Como $r(t) = u(t)$, $R(s) = 1/s$, com base na Tabela 2.1. Como as condições iniciais são nulas,

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \tag{2.58}$$

Expandindo em frações parciais, obtemos

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2} \tag{2.59}$$

Finalmente, aplicando a transformada de Laplace inversa a cada um dos termos, resulta

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{2.60}$$

Exercício de Avaliação 2.3

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = C(s)/R(s)$, correspondente à equação diferencial $\frac{d^3c}{dt^3} + 3\frac{d^2c}{dt^2} + 7\frac{dc}{dt} + 5c = \frac{d^2r}{dt^2} + 4\frac{dr}{dt} + 3r$.

Resposta: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2+4s+3}{s^3+3s^2+7s+5}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Exercício de Avaliação 2.4

Problema: Obter a equação diferencial correspondente à função de transferência

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+6s+2}.$$

Resposta: $\frac{d^2c}{dt^2} + 6\frac{dc}{dt} + 2c = 2\frac{dr}{dt} + r.$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Exercício de Avaliação 2.5

Problema: Obter a resposta a uma rampa de um sistema cuja função de transferência é $G(s) = \frac{s}{(s+4)(s+8)}$.

Resposta: $c(t) = \frac{1}{32} - \frac{1}{16}e^{-4t} + \frac{1}{32}e^{-8t}.$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Em geral, os sistemas físicos que podem ser representados por meio de equação diferencial linear e invariante no tempo podem ser modelados através de função de transferência. O restante deste capítulo será dedicado à tarefa de modelar subsistemas individuais. Aprenderemos como representar, através de função de transferência, circuitos elétricos, sistemas mecânicos em translação, sistemas mecânicos em rotação e sistemas eletromecânicos. Na medida do necessário, o leitor poderá consultar a Bibliografia no final do capítulo para a discussão de outros tipos de sistema, como os sistemas pneumáticos, hidráulicos e de transferência de calor (Cannon, 1967).

2.4 Funções de Transferência de Circuitos Elétricos

Nesta seção aplicaremos formalmente a função de transferência à modelagem matemática de circuitos elétricos, incluindo as redes passivas e os circuitos com amplificadores operacionais. As seções seguintes irão tratar dos sistemas mecânicos e eletromecânicos.

Os circuitos equivalentes às redes elétricas com as quais trabalhamos consistem basicamente em três componentes lineares passivos: resistores, capacitores e indutores.[2] A Tabela 2.3 resume os componentes e as relações entre tensão e corrente e entre tensão e carga, sob condições iniciais iguais a zero.

Vamos agora combinar componentes elétricos em circuitos, decidir a respeito da entrada e da saída e obter a função de transferência. Nossos princípios-guias são as leis de Kirchhoff. Somamos tensões ao longo de malhas ou correntes em nós, dependendo da técnica que envolva o menor esforço de manipulação algébrica e, em seguida,

Tabela 2.3 Relações tensão-corrente, tensão-carga e impedância para capacitores, resistores e indutores

Componente	Tensão-corrente	Corrente-tensão	Tensão-carga	Impedância $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admitância $Y(s) = I(s)/V(s)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Indutor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Nota: O seguinte conjunto de símbolos e unidades é usado ao longo deste livro: $v(t)$ = V (volts), $i(t)$ = A (ampères), $q(t)$ = Q (coulombs), C = F (farads), R = Ω (ohms), G = ℧ (mhos), L = H (henries).

[2] *Passivo* significa que não há fonte de energia interna.

igualamos o resultado a zero. A partir destas relações, podemos escrever as equações diferenciais do circuito. Aplica-se, então, a transformada de Laplace das equações e finalmente se soluciona a função de transferência.

Circuitos Simples via Método das Malhas

As funções de transferência podem ser obtidas usando a lei de Kirchhoff das tensões e somando as tensões ao longo de laços ou malhas.[3] Chamamos este método de *análise pelo método das malhas*. Ele é mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 2.6

Função de transferência — malha única via equação diferencial

Problema Obter a função de transferência relacionando a tensão, $V_C(s)$, no capacitor à tensão de entrada, $V(s)$, na Fig. 2.3.

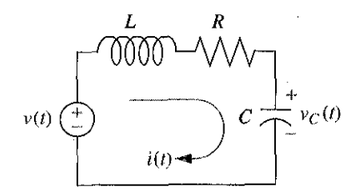


Fig. 2.3 Circuito *RLC*

Solução Em todo problema, o projetista deve primeiro decidir quais devem ser a entrada e a saída. Neste circuito diversas variáveis poderiam ser escolhidas como saída — por exemplo, a tensão no indutor, a tensão no capacitor, a tensão no resistor ou a corrente. O enunciado do problema, contudo, é claro neste caso: devemos tratar a tensão do capacitor como saída e a tensão aplicada como entrada.

Somando as tensões ao longo da malha, supondo condições iniciais iguais a zero, resulta a equação íntegro-diferencial deste circuito

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t) \tag{2.61}$$

Fazendo uma mudança de variável, de corrente para carga, usando a relação $i(t) = dq(t)/dt$ resulta

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t) \tag{2.62}$$

A partir da relação tensão-carga em um capacitor na Tabela 2.3,

$$q(t) = Cv_C(t) \tag{2.63}$$

Substituindo a Eq. (2.63) na Eq. (2.62) vem

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t) \tag{2.64}$$

Aplicando a transformada de Laplace admitindo condições iniciais nulas, rearrumando os termos e simplificando, resulta

$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s) \tag{2.65}$$

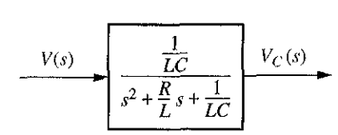


Fig. 2.4 Diagrama de blocos de um circuito elétrico *RLC* série

[3] Um laço (*loop*) particular que lembra os espaços de uma moldura ou de uma cerca é chamado de malha (*mesh*).

Calculando a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, obtemos

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \tag{2.66}$$

como mostrado na Fig. 2.4.

Desenvolvamos agora a técnica de simplificação da solução de problemas no futuro. Primeiro, selecione a transformada de Laplace das equações na coluna tensão-corrente da Tabela 2.3, supondo condições iniciais nulas.

Para o capacitor,

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \tag{2.67}$$

Para o resistor,

$$V(s) = RI(s) \tag{2.68}$$

Para o indutor,

$$V(s) = LsI(s) \tag{2.69}$$

Defina agora a seguinte função de transferência:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) \tag{2.70}$$

Observe que esta função é semelhante à definição de resistência, isto é, à relação da tensão pela corrente. Porém, diferentemente da resistência, esta função é aplicável a capacitores e indutores e transporta informação sobre o comportamento dinâmico do componente, uma vez que representa uma equação diferencial equivalente. Chamamos esta função de transferência particular de *impedância*. A impedância de cada um dos elementos elétricos está mostrada na Tabela 2.3.

Mostremos agora como o conceito de impedância simplifica a solução para obter a função de transferência. A transformada de Laplace da Eq. (2.61), supondo condições iniciais nulas, é

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = V(s) \tag{2.71}$$

Observe que a Eq. (2.71), que está sob a forma

$$[\text{Soma de impedâncias}]\, I(s) = [\text{Soma de tensões aplicadas}] \tag{2.72}$$

sugere o circuito série mostrado na Fig. 2.5. Observe, também, que o circuito da Fig. 2.5 poderia ter sido obtido imediatamente a partir do circuito da Fig. 2.3 simplesmente pela substituição de cada elemento por sua impedância. Chamamos este circuito modificado de *circuito transformado*. Finalmente, observe que o circuito transformado conduz imediatamente à Eq. (2.71) se somarmos impedâncias em série como somamos resistências em série. Portanto, no lugar de escrever primeiro a equação diferencial e depois aplicar a transformada de Laplace, podemos desenhar o circuito transformado e obter a transformada de Laplace da equação diferencial simplesmente aplicando a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito transformado. Resumimos os passos a seguir:

1. Redesenhe o circuito original mostrando todas as variáveis no domínio do tempo, como $v(t)$, $i(t)$ e $v_C(t)$, como transformadas de Laplace $V(s)$, $I(s)$ e $V_C(s)$, respectivamente.
2. Substitua os valores dos componentes por seus valores de impedância. Esta substituição é semelhante ao caso de circuitos de corrente contínua, onde representamos os resistores por seus valores de resistência.

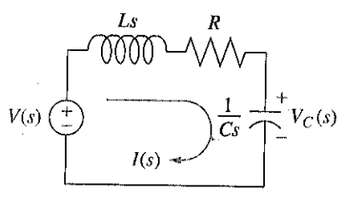


Fig. 2.5 Circuito transformado via Laplace

Vamos refazer agora o Exemplo 2.6 usando o método do circuito transformado, recém-descrito para contornar a escrita da equação diferencial.

Exemplo 2.7

Função de transferência — malha única via método da transformada

Problema Repetir o Exemplo 2.6 usando os métodos das malhas e do circuito transformado sem escrever a equação diferencial.

Solução Empregando a Fig. 2.5 e escrevendo a equação de malha com as impedâncias, como faríamos ao usar os valores de resistores em um circuito puramente resistivo, obtemos

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = V(s) \tag{2.73}$$

Resolvendo em função de $I(s)/V(s)$,

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \tag{2.74}$$

Porém, a tensão sobre o capacitor, $V_C(s)$, é o produto da corrente pela impedância do capacitor. Por conseguinte,

$$V_C(s) = I(s)\frac{1}{Cs} \tag{2.75}$$

Solucionando a Eq. (2.75) para $I(s)$, substituindo $I(s)$ na Eq. (2.74) e simplificando, obtemos o mesmo resultado da Eq. (2.66).

Circuitos Simples via Método dos Nós

As funções de transferência também podem ser obtidas usando a lei de Kirchhoff das correntes e somando as correntes que fluem nos nós. Chamamos este método de *método dos nós*. Vamos mostrar agora este princípio refazendo o Exemplo 2.6 com a aplicação da lei de Kirchhoff das correntes e os métodos de circuito transformado recém-descrito para evitar escrever as equações diferenciais.

Exemplo 2.8

Função de transferência — nó único via método da transformada

Problema Repetir o Exemplo 2.6 usando os métodos dos nós sem escrever a equação diferencial.

Solução A função de transferência pode ser obtida somando as correntes que saem do nó, cuja tensão é $V_C(s)$ na Fig. 2.5. Admita que as correntes que deixam o nó sejam positivas e que as correntes que chegam ao nó sejam negativas. As correntes são as que circulam através do capacitor e a que flui através do resistor e do indutor em série. Com base na Eq. (2.70), para cada corrente, $I(s) = V(s)/Z(s)$. Portanto,

$$\frac{V_C(s)}{1/Cs} + \frac{V_C(s) - V(s)}{R + Ls} = 0 \tag{2.76}$$

onde $V_C(s)/(1/Cs)$ é a corrente que deixa o nó fluindo através do capacitor e $[V_C(s) - V(s)]/(R + Ls)$ é a corrente que sai do nó fluindo através do resistor em série com o indutor. Solucionando a Eq. (2.76) em termos da função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, chegamos ao mesmo resultado da Eq. (2.66).

Circuitos Simples via Divisão de Tensão

O Exemplo 2.6 pode ser resolvido diretamente usando divisão de tensão no circuito transformado. Vamos mostrar esta técnica, a seguir.

Exemplo 2.9

Função de transferência — malha única via divisão de tensão

Problema Repetir o Exemplo 2.6 usando divisão de tensão e o circuito transformado.

Solução A tensão sobre o capacitor é uma parte proporcional da tensão de entrada, nominalmente a impedância do capacitor dividida pela soma das impedâncias. Assim,

$$V_C(s) = \frac{1/Cs}{\left(Ls + R + \dfrac{1}{Cs}\right)} V(s) \tag{2.77}$$

Solucionando em termos da função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, obtemos o mesmo resultado da Eq. (2.66).

Reveja os Exemplos 2.6 a 2.9. Que método você julga ser mais fácil para este circuito?

O exemplo anterior envolve um circuito elétrico simples com uma única malha. Muitos circuitos elétricos consistem em diversas malhas e nós e para eles devemos escrever e resolver um sistema de equações diferenciais simultâneas a fim de obter a função de transferência ou a solução em termos da saída.

Circuitos Complexos via Método das Malhas

Para resolver circuitos elétricos complexos — os de múltiplas malhas e nós — usando o método das malhas, podemos executar os seguintes passos:

1. Substituir todos os valores dos elementos passivos por suas impedâncias.
2. Substituir todas as fontes e todas as variáveis no domínio do tempo pelas respectivas transformadas de Laplace.
3. Arbitrar um sentido para a corrente do circuito transformado em cada malha.
4. Escrever a lei de Kirchhoff das tensões ao longo de cada malha.
5. Resolver o sistema de equações em termos da saída.
6. Elaborar a função de transferência.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.10

Função de transferência — múltiplas malhas

Problema Dado o circuito da Fig. 2.6(*a*), obter a função de transferência, $I_2(s)/V(s)$.

Solução O primeiro passo na solução consiste em converter o circuito em transformada de Laplace das impedâncias e das variáveis de circuito, supondo condições iniciais nulas. O resultado está mostrado na Fig. 2.6(*b*). O circuito com o qual estamos lidando requer duas equações simultâneas para se obter a função de transferência. Estas equações podem ser determinadas somando as tensões ao longo de cada malha através das quais se supõe que circulem as correntes, $I_1(s)$ e $I_2(s)$. Ao longo da Malha 1, onde circula $I_1(s)$,

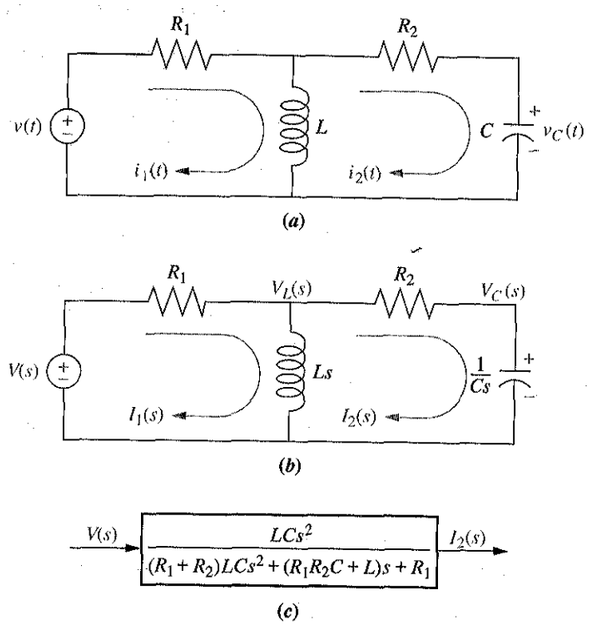


Fig. 2.6 a. Circuito elétrico com duas malhas; **b.** circuito elétrico com duas malhas transformado; **c.** diagrama de blocos

$$R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V(s) \tag{2.78}$$

Ao longo da Malha 2, onde circula $I_2(s)$,

$$LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) = 0 \tag{2.79}$$

Combinando termos, as Eqs. (2.78) e (2.79) se tornam equações simultâneas em $I_1(s)$ e $I_2(s)$:

$$(R_1 + Ls)I_1(s) \qquad - LsI_2(s) = V(s) \tag{2.80a}$$

$$-LsI_1(s) + \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I_2(s) = 0 \tag{2.80b}$$

Podemos usar a regra de Cramer (ou qualquer outro método para resolver sistemas de equações) para resolver a Eq. (2.80) em termos de $I_2(s)$.[4] Assim,

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & V(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{LsV(s)}{\Delta} \tag{2.81}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -Ls \\ -Ls & \left(Ls + R_2 + \dfrac{1}{Cs}\right) \end{vmatrix}$$

Elaborando a função de transferência, $G(s)$, resulta

$$G(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)} = \frac{Ls}{\Delta} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1} \tag{2.82}$$

como mostrado na Fig. 2.6(*c*).

Conseguimos modelar um circuito físico como função de transferência: o circuito da Fig. 2.6(*a*) está agora modelado como uma função de transferência da Fig. 2.6(*c*). Antes de deixar o exemplo, observamos a ocorrência de um padrão ilustrado em primeira mão pela Eq. (2.72). A forma tomada pela Eq. (2.80) é

$$\begin{bmatrix} \text{Soma das} \\ \text{impedâncias ao} \\ \text{longo da Malha 1} \end{bmatrix} I_1(s) - \begin{bmatrix} \text{Soma das} \\ \text{impedâncias} \\ \text{comuns às} \\ \text{duas malhas} \end{bmatrix} I_2(s) = \begin{bmatrix} \text{Soma das tensões} \\ \text{aplicadas ao} \\ \text{longo da Malha 1} \end{bmatrix} \tag{2.83a}$$

$$-\begin{bmatrix} \text{Soma das} \\ \text{impedâncias} \\ \text{comuns às} \\ \text{duas malhas} \end{bmatrix} I_1(s) + \begin{bmatrix} \text{Soma das} \\ \text{impedâncias ao} \\ \text{longo da Malha 2} \end{bmatrix} I_2(s) = \begin{bmatrix} \text{Soma das tensões} \\ \text{aplicadas ao} \\ \text{longo da Malha 2} \end{bmatrix} \tag{2.83b}$$

O reconhecimento da forma geral ajudará a escrever rapidamente essas equações; por exemplo, as equações mecânicas de movimento (tratadas nas Seções 2.5 e 2.6) possuem a mesma forma.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem fazendo exercícios com o MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa ch2sp4 do Apêndice E, onde o Exemplo 2.10 é resolvido. Você aprenderá como usar a *Toolbox* de Matemática Simbólica para resolver sistemas de equações usando a Regra de Cramer. Especificamente, a *Toolbox* de Matemática Simbólica será usada para resolver a função de transferência na Eq. (2.82) usando as Eqs. (2.80).

Circuitos Complexos via Método dos Nós

Freqüentemente, o meio mais fácil de obter a função de transferência é utilizar o método dos nós em vez do método das malhas. O número de equações diferenciais simultâneas que devem ser escritas é igual ao número de nós cujas tensões são desconhecidas. No exemplo anterior, escrevemos as equações de malha usando a lei de Kirchhoff

[4]Para mais informações sobre a Regra de Cramer, ver o Apêndice G (Seção G.4) no CD-ROM que acompanha o livro.

das tensões. Para nós múltiplos, usamos a lei de Kirchhoff das correntes e somamos as correntes que deixam cada um dos nós. Novamente, por convenção, as correntes que saem do nó são consideradas positivas e as correntes que chegam ao nó são consideradas negativas.

Antes de prosseguir com um exemplo, definamos primeiro *admitância*, $Y(s)$, como o inverso da impedância, ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} \tag{2.84}$$

Ao escrever as equações dos nós, poderá ser mais conveniente representar os elementos de circuitos por suas admitâncias. As admitâncias dos componentes elétricos básicos estão mostradas na Tabela 2.3. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.11

Função de transferência — nós múltiplos

Problema Obter a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, para o circuito na Fig. 2.6(*b*). Usar o método dos nós.

Solução Neste problema, somamos correntes nos nós em vez de somar tensões ao longo das malhas. Com base na Fig. 2.6(*b*) as somas das correntes que saem dos nós designados por $V_L(s)$ e $V_C(s)$ são, respectivamente,

$$\frac{V_L(s) - V(s)}{R_1} + \frac{V_L(s)}{Ls} + \frac{V_L(s) - V_C(s)}{R_2} = 0 \tag{2.85a}$$

$$CsV_C(s) + \frac{V_C(s) - V_L(s)}{R_2} = 0 \tag{2.85b}$$

Rearrumando e expressando as resistências como condutâncias,[5] $G_1 = 1/R_1$ e $G_2 = 1/R_2$, obtemos

$$\left(G_1 + G_2 + \frac{1}{Ls}\right)V_L(s) \qquad - G_2V_C(s) = V(s)G_1 \tag{2.86a}$$

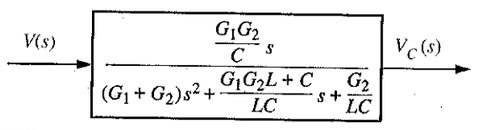
$$-G_2V_L(s) + (G_2 + Cs)V_C(s) = 0 \tag{2.86b}$$

Resolvendo em termos da função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, resulta

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{G_1G_2}{C}s}{(G_1 + G_2)s^2 + \dfrac{G_1G_2L + C}{LC}s + \dfrac{G_2}{LC}} \tag{2.87}$$

como mostrado na Fig. 2.7.

Fig. 2.7 Diagrama de blocos do circuito da Fig. 2.6



Uma outra forma de escrever as equações de nós é substituir as fontes de tensão por fontes de corrente. Uma fonte de tensão apresenta uma tensão que independe da carga; reciprocamente, uma fonte de corrente entrega uma corrente que independe da carga. Na prática, pode-se construir uma fonte de corrente a partir de uma fonte de tensão colocando-se uma resistência bem grande em série com a fonte de tensão. Teoricamente, nos baseamos no *teorema de Norton* que estabelece que uma fonte de tensão, $V(s)$, em série com uma impedância, $Z_s(s)$, pode ser substituída por uma fonte de corrente, $I(s) = V(s)/Z_s(s)$, em paralelo com $Z_s(s)$.

Para manipular circuitos elétricos de múltiplos nós devemos executar os seguintes passos:

1. Substituir todos os valores dos elementos passivos por suas admitâncias.
2. Substituir todas as fontes e todas as variáveis no domínio do tempo pelas respectivas transformadas de Laplace.

[5]Em geral, a admitância é complexa. A parte real é chamada condutância e a parte imaginária de susceptância. Porém, quando se toma o inverso da resistência para obter a admitância, resulta uma grandeza real. O inverso da resistência é chamada de condutância.

3. Substituir as fontes de tensão transformadas por fontes de corrente transformadas.
4. Escrever a lei de Kirchhoff das correntes em cada nó.
5. Resolver o sistema de equações em termos da saída.
6. Elaborar a função de transferência.

Vejamos um exemplo.

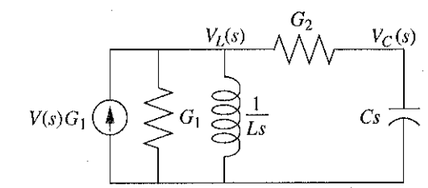
Exemplo 2.12

Função de transferência — múltiplos nós com fontes de corrente

Problema Para o circuito da Fig. 2.6, obter a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, usando o método dos nós e um circuito transformado com fontes de corrente.

Solução Converter todas as impedâncias em admitâncias e todas as fontes de tensão em série com uma impedância em fontes de corrente em paralelo com uma admitância usando o teorema de Norton.

Fig. 2.8 Circuito transformado para o método dos nós



Redesenhando a Fig. 2.6(*b*) para retratar as alterações, obtemos a Fig. 2.8, onde $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$ e as tensões de nó — as tensões sobre o indutor e sobre o capacitor — foram identificadas como $V_L(s)$ e $V_C(s)$, respectivamente. Usando a relação geral, $I(s) = Y(s)V(s)$, e somando as correntes no nó $V_L(s)$,

$$G_1V_L(s) + \frac{1}{Ls}V_L(s) + G_2\left[V_L(s) - V_C(s)\right] = V(s)G_1 \tag{2.88}$$

Somando as correntes no nó $V_C(s)$ resulta

$$CsV_C(s) + G_2\left[V_C(s) - V_L(s)\right] = 0 \tag{2.89}$$

Combinando os termos, as Eqs. (2.88) e (2.89) se tornam as equações simultâneas em $V_C(s)$ e $V_L(s)$, que são idênticas às Eqs. (2.86) e conduzem à mesma solução que a da Eq. (2.87).

Uma vantagem de desenhar este circuito reside na forma das Eqs. (2.86) e na sua relação direta com a Fig. 2.8, ou seja

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das admitâncias}\\ \text{conectadas ao Nó 1}\end{bmatrix}V_L(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{admitâncias comuns}\\ \text{aos dois nós}\end{bmatrix}V_C(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das correntes}\\ \text{aplicadas ao Nó 1}\end{bmatrix} \tag{2.90a}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{admitâncias comuns}\\ \text{aos dois nós}\end{bmatrix}V_L(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das admitâncias}\\ \text{conectadas ao Nó 2}\end{bmatrix}V_C(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das correntes}\\ \text{aplicadas ao Nó 2}\end{bmatrix} \tag{2.90b}$$

Uma Técnica para Solução de Problemas

Em todos os exemplos anteriores, vimos a repetição de um padrão nas equações que podemos usar a nosso favor. Se reconhecermos este padrão não teremos necessidade de escrever as equações componente por componente; podemos somar impedâncias ao longo de uma malha no caso das equações de malha ou somar admitâncias em um nó no caso das equações de nó. Vejamos agora um circuito elétrico com três malhas e escrevamos as equações de malha por inspeção para demonstrar o procedimento.

Exemplo 2.13

Equações de malha via inspeção

Problema Escrever, mas não resolver, as equações de malha do circuito mostrado na Fig. 2.9.

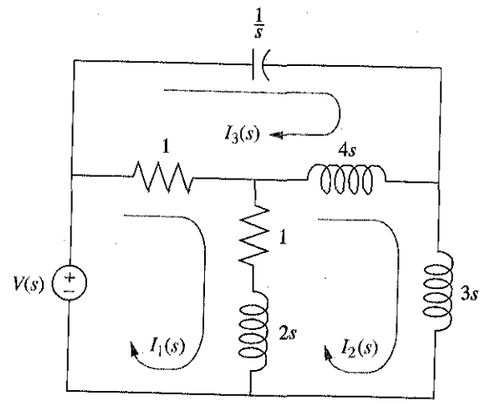


Fig. 2.9 Circuito elétrico com três malhas

Solução Ressaltamos em cada um dos problemas anteriores que as equações de malha e as equações de nó possuem uma forma previsível. Usamos esse conhecimento para resolver este problema de três malhas. A equação para a Malha 1 terá a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias ao}\\ \text{longo da Malha 1}\end{bmatrix} I_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1 e à}\\ \text{Malha 2}\end{bmatrix} I_2(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 1}\end{bmatrix} \tag{2.91}$$

De modo semelhante, as Malhas 2 e 3 são, respectivamente,

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1}\\ \text{e à Malha 2}\end{bmatrix} I_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 2}\end{bmatrix} I_2(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 2 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 2}\end{bmatrix} \tag{2.92}$$

e

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 2 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_2(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias ao}\\ \text{longo da Malha 3}\end{bmatrix} I_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 3}\end{bmatrix} \tag{2.93}$$

Substituindo os valores da Fig. 2.9 nas Eqs. (2.91) a (2.93), resulta

$$+(2s+2)I_1(s) - (2s+1)I_2(s) \qquad - I_3(s) = V(s) \tag{2.94a}$$

$$-(2s+1)I_1(s) + (9s+1)I_2(s) \qquad - 4sI_3(s) = 0 \tag{2.94b}$$

$$-I_1(s) \qquad - 4sI_2(s) + \left(4s + 1 + \frac{1}{s}\right)I_3(s) = 0 \tag{2.94c}$$

que pode ser resolvida simultaneamente para qualquer função de transferência desejada, por exemplo, $I_3(s)/V(s)$.

Circuitos elétricos passivos foram o tópico da discussão até este ponto. Vamos discutir agora uma classe de circuitos ativos que podem ser usados para implementar funções de transferência. Estes são circuitos construídos em torno de um amplificador operacional.

Amplificadores Operacionais

Um *amplificador operacional*, esboçado na Fig. 2.10(*a*), é um amplificador eletrônico usado como bloco construtivo básico para implementar funções de transferência. Possui as seguintes características:

1. Entrada diferencial, $v_2(t) - v_1(t)$
2. Elevada impedância de entrada, $Z_i = \infty$ (ideal)
3. Baixa impedância de saída, $Z_o = 0$ (ideal)
4. Elevado ganho de amplificação, $A = \infty$ (ideal)

A saída, $v_o(t)$, é dada por

$$v_o(t) = A(v_2(t) - v_1(t)) \tag{2.95}$$

Amplificador Operacional Inversor

Se $v_2(t)$ for aterrada, como mostrado na Fig. 2.10(*b*), o amplificador é chamado *amplificador operacional inversor*. Para o amplificador operacional inversor, temos

$$v_o(t) = -Av_1(t) \tag{2.96}$$

Se duas impedâncias forem conectadas ao amplificador operacional inversor, como mostrado na Fig. 2.10(*c*), podemos deduzir um resultado interessante se o amplificador possuir as características mencionadas no início desta subseção. Se a impedância de entrada do amplificador for elevada, então pela lei de Kirchhoff das correntes, $I_a(s)$

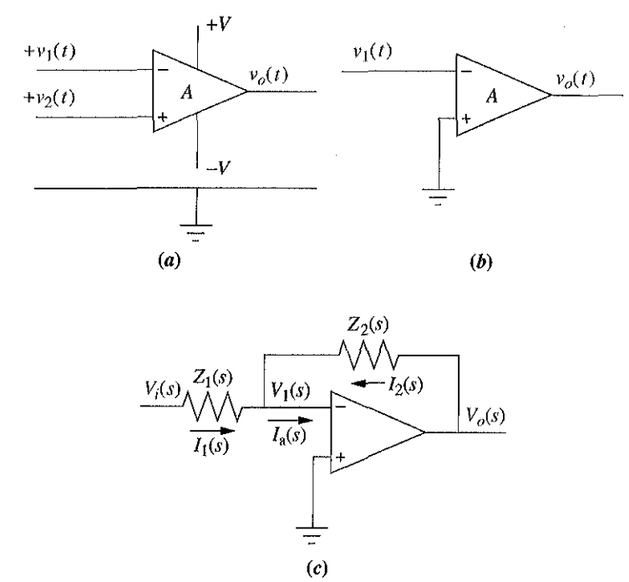


Fig. 2.10 a. Amplificador operacional; **b.** esquema de um amplificador operacional inversor; **c.** amplificador operacional inversor configurado para a realização de uma função de transferência. Comumente o ganho, *A*, do amplificador é omitido.

$= 0$ e $I_1(s) = -I_2(s)$. Além disto, como o valor do ganho A é elevado, $v_1(t) \approx 0$. Em conseqüência, $I_1(s) = V_i(s)/Z_1(s)$ e $I_2(s) = -V_o(s)/Z_2(s)$. Igualando as duas correntes, $V_o(s)/Z_2(s) = -V_i(s)/Z_1(s)$, ou seja, a função de transferência do amplificador operacional inversor configurado como na Fig. 2.10(*c*) é

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{2.97}$$

Exemplo 2.14

Função de transferência — circuito com amplificador operacional

Problema Obter a função de transferência, $V_o(s)/V_i(s)$, para o circuito dado na Fig. 2.11.

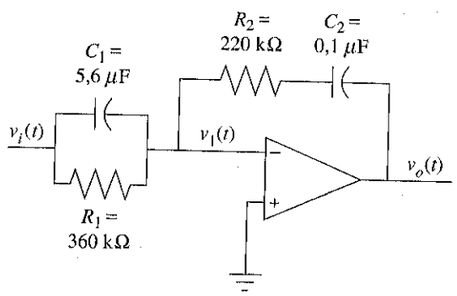


Fig. 2.11 Circuito amplificador operacional para o Exemplo 2.14

Solução A função de transferência do circuito amplificador operacional é dada pela Eq. (2.97). Como as admitâncias de componentes em paralelo se somam, $Z_1(s)$ é o inverso da soma das admitâncias, ou seja,

$$Z_1(s) = \frac{1}{C_1 s + \dfrac{1}{R_1}} = \frac{1}{5{,}6 \times 10^{-6} s + \dfrac{1}{360 \times 10^3}} = \frac{360 \times 10^3}{2{,}016 s + 1} \tag{2.98}$$

Para $Z_2(s)$, as impedâncias se somam, ou seja,

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = 220 \times 10^3 + \frac{10^7}{s} \tag{2.99}$$

Substituindo as Eqs. (2.98) e (2.99) na Eq. (2.97) e simplificando, obtemos

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -1{,}232\frac{s^2 + 45{,}95s + 22{,}55}{s} \tag{2.100}$$

O circuito resultante é chamado controlador PID e pode ser usado para melhorar o desempenho de um sistema de controle. Exploramos esta possibilidade mais adiante no Cap. 9.

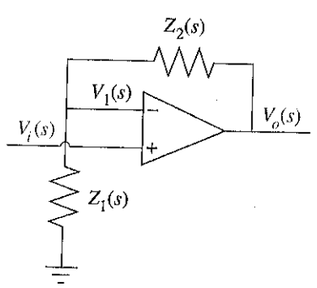


Fig. 2.12 Circuito amplificador operacional não-inversor genérico

Amplificador Operacional Não-inversor

Um outro circuito que pode ser analisado para se obter a função de transferência é o circuito amplificador operacional não-inversor mostrado na Fig. 2.12. Vamos agora deduzir a função de transferência. Vemos que

$$V_o(s) = A(V_i(s) - V_1(s)) \tag{2.101}$$

Porém, usando divisão de tensão,

$$V_1(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V_o(s) \tag{2.102}$$

Substituindo a Eq. (2.102) na Eq. (2.101), rearrumando e simplificando, obtemos

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{A}{1 + AZ_1(s)/(Z_1(s) + Z_2(s))} \tag{2.103}$$

Para valores elevados de A, despreza-se a unidade no denominador e a Eq. (2.103) se torna

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{2.104}$$

Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 2.15

Função de transferência — circuito amplificador operacional não-inversor

Problema Obter a função de transferência, $V_o(s)/V_i(s)$, para o circuito dado na Fig. 2.13.

Solução Obtemos cada uma das funções impedância, $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$, e em seguida as substituímos na Eq. (2.104). Assim,

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{C_1 s} \tag{2.105}$$

e

$$Z_2(s) = \frac{R_2(1/C_2 s)}{R_2 + (1/C_2 s)} \tag{2.106}$$

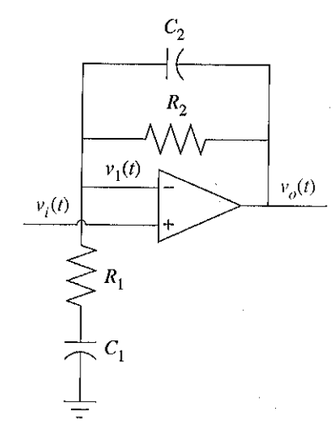


Fig. 2.13 Circuito amplificador operacional não-inversor para o Exemplo 2.15

Substituindo as Eqs. (2.105) e (2.106) na Eq. (2.104) resulta

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{C_2C_1R_2R_1s^2 + (C_2R_2 + C_1R_2 + C_1R_1)s + 1}{C_2C_1R_2R_1s^2 + (C_2R_2 + C_1R_1)s + 1} \tag{2.107}$$

Exercício de Avaliação 2.6

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = V_L(s)/V(s)$, no circuito dado na Fig. (2.14). Solucionar o problema de duas formas — pelo método das malhas e pelo método dos nós. Mostrar que os dois métodos conduzem ao mesmo resultado.

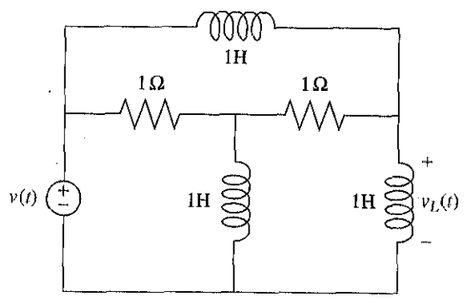


Fig. 2.14 Circuito elétrico para o Exercício de Avaliação 2.6

Resposta: $V_L(s)/V(s) = (s^2 + 2s + 1)/(s^2 + 5s + 2)$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Exercício de Avaliação 2.7

Problema: Se $Z_1(s)$ é a impedância de um capacitor de 10 μF e $Z_2(s)$ é a impedância de um resistor de 100 kΩ, obter a função de transferência, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, se estes componentes forem usados com (a) um amplificador operacional inversor e (b) com um amplificador operacional não-inversor, como está mostrado nas Figs. 2.10(c) e 2.12, respectivamente.

Resposta: $G(s) = -s$ para um amplificador operacional inversor; $G(s) = s + 1$ para um amplificador operacional não-inversor.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção, obtivemos funções de transferência em circuitos elétricos com diversas malhas e diversos nós, bem como em circuitos com amplificadores operacionais. Desenvolvemos as equações de malhas e de nós, observamos sua forma geral e as escrevemos por inspeção. Na próxima seção, iniciaremos nosso trabalho com os sistemas mecânicos. Veremos que muitos dos conceitos aplicados aos circuitos elétricos também podem ser aplicados aos sistemas mecânicos através de analogias — dos conceitos básicos à escrita das equações descritivas por inspeção. Esta descoberta lhe trará confiança para ir além deste livro e estudar sistemas não tratados aqui, como os sistemas hidráulicos ou os sistemas pneumáticos.

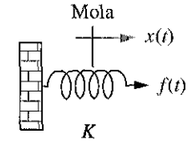
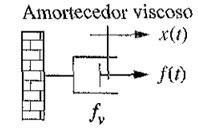
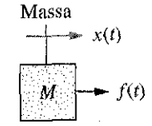
2.5 Funções de Transferência de Sistemas Mecânicos em Translação

Mostramos que os circuitos elétricos podem ser modelados por uma função de transferência, $G(s)$, que relaciona algebricamente a transformada de Laplace da saída com a transformada de Laplace da entrada. Agora faremos o mesmo com respeito aos sistemas mecânicos. Na próxima seção estenderemos os conceitos aos sistemas mecânicos em rotação. Observe que o produto final, mostrado na Fig. 2.2, será matematicamente indistinguível de um circuito elétrico. Portanto, um circuito elétrico pode ser interfaceado com um sistema mecânico colocando suas funções de transferência em cascata, desde que um sistema não seja carregado pelo outro.[6]

Os sistemas mecânicos se assemelham tanto aos circuitos elétricos que há analogias entre componentes e variáveis elétricos e mecânicos. Os sistemas mecânicos, como os circuitos elétricos, possuem três componentes passivos, lineares. Dois deles, a mola e a massa, são elementos armazenadores de energia; um deles, o amortecedor viscoso, dissipa energia. Os dois elementos armazenadores de energia são análogos aos dois elementos armazenadores elétricos, o indutor e o capacitor. O dissipador de energia é análogo à resistência elétrica. Vamos

[6]O conceito de carregar é explicado mais adiante no Cap. 5.

Tabela 2.4 Relações força-velocidade, força-deslocamento e impedância de translação de molas, amortecedores viscosos e massa

Componente	Força-velocidade	Força-deslocamento	Impedância $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Mola 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)\,d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Amortecedor viscoso 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Massa 	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Nota: O seguinte conjunto de símbolos e unidades é usado ao longo deste livro: $f(t)$ = N (newtons), $x(t)$ = m (metros), $v(t)$ = m/s (metros/segundo), K = N/m (newtons/metro), f_v = N·s/m (newton·segundos/metro), M = kg (quilogramas = newton·segundos²/metro).

dar uma olhada nestes elementos mecânicos, que estão mostrados na Tabela 2.4. Na tabela, K, f_v e M são chamadas, respectivamente, de *constante de mola*, *coeficiente de atrito viscoso* e *massa*.

Criamos agora analogias entre os sistemas elétricos e mecânicos comparando as Tabelas 2.3 e 2.4. Comparando a coluna força-velocidade da Tabela 2.4 com a coluna tensão-corrente da Tabela 2.3, vemos que a força mecânica é análoga à tensão elétrica e a velocidade mecânica é análoga à corrente elétrica. A comparação da coluna força-deslocamento da Tabela 2.4 com a coluna tensão-carga da Tabela 2.3 conduz à analogia entre o deslocamento mecânico e a carga elétrica. Vemos também que a mola é análoga ao capacitor, o amortecimento viscoso é análogo ao resistor e a massa é análoga ao indutor. Portanto, a soma de forças escritas em termos de velocidade é análoga à soma de tensões escritas em termos de corrente, e as equações diferenciais resultantes para o sistema mecânico são análogas às equações de malha. Se as forças forem escritas em termos de deslocamentos, as equações resultantes para o sistema mecânico lembrarão, mas não serão análogas às equações de malha. Contudo, usaremos este modelo para sistemas mecânicos de modo que possamos escrever as equações diretamente em termos de deslocamento.

Uma outra analogia pode ser extraída comparando a coluna força-velocidade da Tabela 2.4 com a coluna corrente-tensão da Tabela 2.3 na ordem inversa. Aqui, a analogia é entre força e corrente e entre velocidade e tensão. Além disto, a mola é análoga ao indutor, o amortecedor viscoso é análogo ao resistor e a massa é análoga ao capacitor. Em conseqüência, a soma de forças escritas em termos de velocidade é análoga à soma de correntes escritas em termos de tensões, e as equações diferenciais resultantes para o sistema mecânico são análogas às equações de nós. Discutiremos estas analogias com mais detalhe na Seção 2.9.

Agora estamos prontos para obter funções de transferência de sistemas mecânicos em translação. Nosso primeiro exemplo, mostrado na Fig. 2.15(*a*), é semelhante ao circuito *RLC* simples do Exemplo 2.6 (ver Fig. 2.3). O sistema mecânico requer, para descrevê-lo, uma única equação diferencial, chamada *equação de movimento*. Iniciaremos arbitrando um sentido positivo para o movimento, por exemplo, para a direita. Esta escolha arbitrária do sentido positivo do movimento é semelhante à escolha do sentido positivo da corrente em uma malha elétrica. Usando o sentido escolhido como positivo para o movimento, desenhamos em primeiro lugar um diagrama de corpo livre, posicionando sobre o corpo todas as forças que agem sobre ele no sentido do movimento ou no sentido oposto. Em seguida, utilizamos a lei de Newton para construir a equação diferencial do movimento somando as forças e igualando a soma a zero. Finalmente, supondo condições iniciais nulas, aplicamos a transformada de Laplace à equação diferencial, separamos as variáveis e chegamos à função de transferência. A seguir, um exemplo.

Exemplo 2.16

Função de transferência — uma equação de movimento

Problema Obter a função de transferência, $X(s)/F(s)$, para o sistema da Fig. 2.15(*a*).

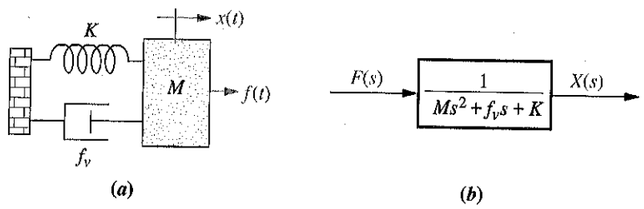


Fig. 2.15 a. Sistema massa, mola e amortecedor; **b.** diagrama de blocos

Solução Comece a solução desenhando o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 2.16(*a*). Coloque na massa todas as forças sentidas por ela. Supomos que a massa está se deslocando para a direita. Assim, somente a força aplicada aponta para a direita; todas as outras forças impedem o movimento e agem para se opor a ele. Assim, a mola, o amortecedor e a força devida à aceleração apontam para a esquerda.

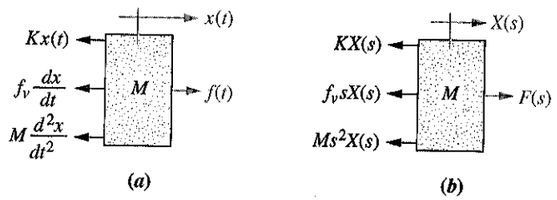


Fig. 2.16 a. Diagrama de corpo livre do sistema massa, mola e amortecedor; **b.** diagrama de corpo livre transformado

Escrevemos agora a equação diferencial do movimento usando a lei de Newton para somar e igualar a zero todas as forças mostradas sobre a massa da Fig. 2.16(*a*):

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t) \tag{2.108}$$

Aplicando a transformada de Laplace, supondo nulas todas as condições iniciais,

$$Ms^2X(s) + f_vsX(s) + KX(s) = F(s) \tag{2.109}$$

ou

$$(Ms^2 + f_vs + K)X(s) = F(s) \tag{2.110}$$

Resolvendo para obter a função de transferência resulta

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_vs + K} \tag{2.111}$$

que é representada na Fig. 2.15(*b*).

Seria, agora, possível estabelecer um paralelo entre o nosso trabalho e os circuitos elétricos evitando escrever as equações diferenciais e definindo impedâncias para os componentes mecânicos? Em caso afirmativo, poderíamos aplicar aos sistemas mecânicos as técnicas de solução de problemas aprendidas na seção anterior. Aplicando a transformada de Laplace à coluna força-deslocamento da Tabela 2.4, obtemos para a mola

$$F(s) = KX(s) \tag{2.112}$$

para o amortecedor viscoso

$$F(s) = f_vsX(s) \tag{2.113}$$

e para a massa

$$F(s) = Ms^2X(s) \tag{2.114}$$

Se definirmos impedância para componentes mecânicos como (Raven, 1995)

$$Z_M(s) = \frac{F(s)}{X(s)} \tag{2.115}$$

e aplicarmos a definição às Eqs. (2.112) a (2.114), chegamos à impedância de cada componente como resumido na Tabela 2.4.[7]

Substituindo cada uma das forças na Fig. 2.16(*a*) por sua transformada de Laplace, que está no formato

$$F(s) = Z_M(s)X(s) \tag{2.116}$$

obtemos a Fig. 2.16(*b*), a partir da qual poderíamos ter obtido imediatamente a Eq. (2.109) sem escrever a equação diferencial. Daqui em diante usaremos esta abordagem.

Finalmente, observe que a Eq. (2.110) está sob a forma,

$$[\text{ Soma de impedâncias }]X(s) = [\text{ Soma de forças aplicadas }] \tag{2.117}$$

que é semelhante, mas não o análogo, a uma equação de malha (ver nota de rodapé 7).

Muitos sistemas mecânicos são semelhantes a circuitos elétricos com diversas malhas e diversos nós (circuitos multimalhas e multinós), onde é necessária mais de uma equação para descrever o sistema. Em sistemas mecânicos, o número necessário de equações de movimento é igual ao número de movimentos *linearmente independentes*. A independência linear implica que um ponto de movimento em um sistema em movimento pode continuar a se mover mesmo se todos os outros pontos forem mantidos parados. Um outro nome para o número de movimentos linearmente independentes é o número de *graus de liberdade*. Esta discussão não significa que estes movimentos não estejam acoplados uns aos outros; em geral, estão. Por exemplo, em um circuito elétrico com duas malhas, cada corrente de malha depende da outra corrente de malha, mas se for aberto o circuito de somente uma das malhas, a outra corrente pode continuar a existir se houver uma fonte de tensão nessa malha. De forma semelhante, em um sistema mecânico com dois graus de liberdade, um ponto do movimento pode ser mantido parado enquanto o outro ponto se mover sob a influência de uma força aplicada.

Para tratar um problema assim, desenhamos o diagrama de corpo livre para cada um dos pontos e, em seguida, usamos a superposição. Para cada um dos diagramas de corpo livre, começamos fixando todos os outros pontos e determinando as forças que atuam sobre o corpo, devidas somente ao próprio movimento. Em seguida, mantemos o corpo parado e ativamos, um a um, os outros pontos, colocando no corpo original as forças criadas pelo movimento adjacente.

Usando a lei de Newton, somamos as forças de cada corpo e fazemos a soma igual a zero. O resultado é um sistema de equações simultâneas do movimento. Estas equações, sob a forma de transformada de Laplace, são então resolvidas em função da variável de saída de interesse a partir da qual se calcula a função de transferência. Demonstramos isto com um exemplo.

Exemplo 2.17

Função de transferência — dois graus de liberdade

Problema Obter a função de transferência, $X_2(s)/F(s)$, para o sistema da Fig. 2.17(*a*).

Solução O sistema tem dois graus de liberdade, uma vez que cada uma das massas pode se mover na horizontal enquanto a outra permanece parada. Assim, são necessárias duas equações de movimento para descrever o siste-

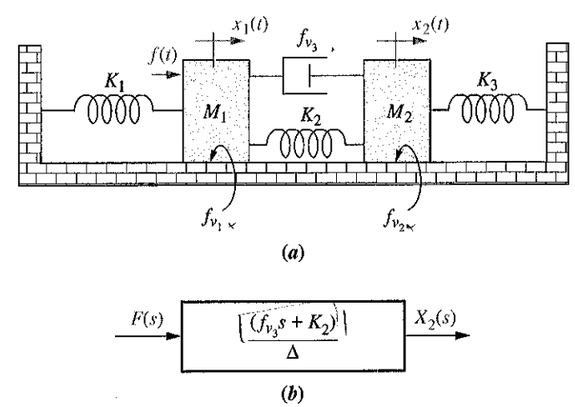


Fig. 2.17 a. Sistema mecânico em translação com dois graus de liberdade;[8] **b.** diagrama de blocos

---

[7]Observe que a coluna impedância da Tabela 2.4 não é uma analogia direta da coluna de impedância da Tabela 2.3, uma vez que o denominador da Eq. (2.115) é deslocamento. É possível deduzir uma analogia direta definindo-se impedância mecânica em termos de velocidade como $F(s)/V(s)$. Escolhemos a Eq. (2.115) como uma definição conveniente para escrever equações de movimento em termos de deslocamento, em vez de velocidade. A alternativa, contudo, está disponível.

[8]O atrito mostrado aqui e ao longo do livro, a menos que se diga o contrário, é o atrito viscoso. Assim, fv_1 e fv_2 não são atrito de Coulomb, mas surgem devidos a uma interface viscosa.

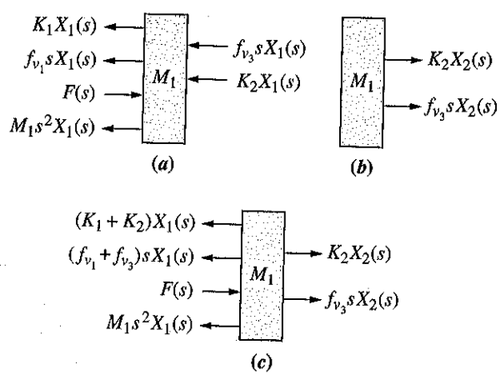


Fig. 2.18 a. Forças sobre M_1 devidas somente ao movimento de M_1; **b.** forças sobre M_1 devidas somente ao movimento de M_2; **c.** todas as forças sobre M_1

ma. As duas equações vêm dos diagramas de corpo livre de cada massa. É usada a superposição para desenhar os diagramas de corpo livre. Por exemplo, as forças sobre M_1 são devidas a (1) seu movimento próprio e (2) ao movimento de M_2 transmitido a M_1 através do sistema. Consideraremos estas duas fontes separadamente.

Se mantivermos M_2 parada e deslocarmos M_1 para a direita, veremos as forças mostradas na Fig. 2.18(*a*). Se mantivermos M_1 parada e deslocarmos M_2 para a direita, veremos as forças mostradas na Fig. 2.18(*b*). A força total sobre M_1 é a superposição, ou soma, das forças recém-discutidas. Este resultado está mostrado na Fig. 2.18(*c*). Com relação a M_2, procedemos de maneira semelhante: primeiro deslocamos M_2 para a direita, mantendo M_1 parada; em seguida, movimentamos M_1 para a direita mantendo M_2 parada. Calculamos para cada uma das situações as forças sobre M_2. Os resultados aparecem na Fig. 2.19.

A transformada de Laplace das equações de movimento podem ser escritas, agora, a partir das Figs. 2.18(*c*) e 2.19(*c*) como

$$[M_1s^2 + (f_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2)]X_1(s) - (f_{v_3}s + K_2)X_2(s) = F(s) \tag{2.118a}$$

$$-(f_{v_3}s + K_2)\,X_1(s) + [M_2s^2 + (f_{v_2} + f_{v_3})s + (K_2 + K_3)]X_2(s) = 0 \tag{2.118b}$$

Com base nisto, a função de transferência, $X_2(s)/F(s)$, é

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{(f_{v_3}s + K_2)}{\Delta} \tag{2.119}$$

como mostrado na Fig. 2.17(*b*) onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left[M_1s^2 + (f_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2)\right] & -(f_{v_3}s + K_2) \\ -(f_{v_3}s + K_2) & \left[M_2s^2 + (f_{v_2} + f_{v_3})s + (K_2 + K_3)\right] \end{vmatrix}$$

Observe novamente, nas Eqs. (2.118), que a forma geral das equações é semelhante às equações elétricas de malha:

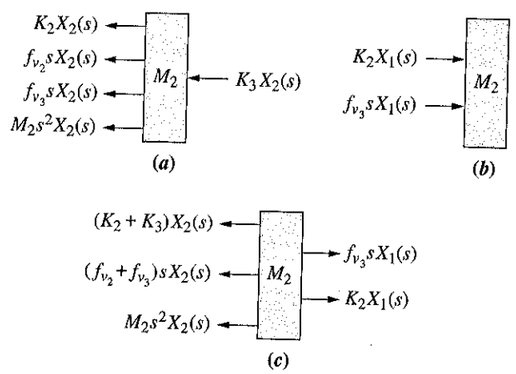


Fig. 2.19 a. Forças sobre M_2 devidas somente ao movimento de M_2; **b.** forças sobre M_2 devidas somente ao movimento de M_1; **c.** todas as forças sobre M_2

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } x_1\end{bmatrix} X_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_1 \text{ e } x_2\end{bmatrix} X_2(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{forças aplicadas}\\ \text{em } x_1\end{bmatrix} \tag{2.120a}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_1 \text{ e } x_2\end{bmatrix} X_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } x_2\end{bmatrix} X_2(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{forças aplicadas}\\ \text{em } x_2\end{bmatrix} \tag{2.120b}$$

O padrão mostrado nas Eqs. (2.120) agora nos é familiar. Usemos o conceito para escrever, por inspeção, as equações de movimento de um sistema mecânico, sem desenhar o diagrama de corpo livre.

Exemplo 2.18

Equações de movimento por inspeção

Problema Escrever, mas não resolver, as equações de movimento da estrutura mecânica da Fig. 2.20.

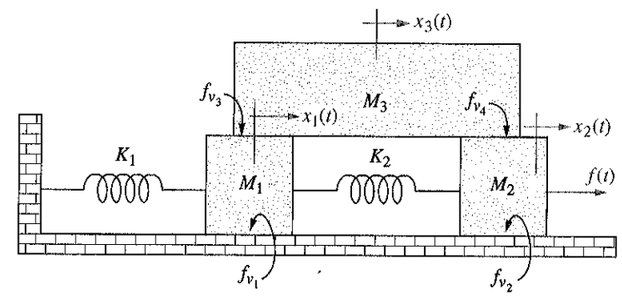


Fig. 2.20 Sistema mecânico em translação com três graus de liberdade

Solução O sistema possui três graus de liberdade, uma vez que cada uma das três massas pode se movimentar independentemente enquanto as outras permanecem paradas. A forma das equações é semelhante às equações de malha de circuitos elétricos. Para M_1,

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } x_1\end{bmatrix} X_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_1 \text{ e } x_2\end{bmatrix} X_2(s)$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_1 \text{ e } x_3\end{bmatrix} X_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{forças aplicadas}\\ \text{em } x_1\end{bmatrix} \tag{2.121}$$

De modo semelhante, para M_2 e M_3, respectivamente,

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_1 \text{ e } x_2\end{bmatrix} X_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } x_2\end{bmatrix} X_2(s)$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_2 \text{ e } x_3\end{bmatrix} X_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{forças aplicadas}\\ \text{em } x_2\end{bmatrix} \tag{2.122}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_1 \text{ e } x_3\end{bmatrix}X_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ x_2 \text{ e } x_3\end{bmatrix}X_2(s)$$

$$+\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } x_3\end{bmatrix}X_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{forças aplicadas}\\ \text{em } x_3\end{bmatrix} \tag{2.123}$$

M_1 possui duas molas, dois amortecedores viscosos e a massa associada ao seu movimento. Há uma mola entre M_1 e M_2 e um amortecedor viscoso entre M_1 e M_3. Assim, usando a Eq. (2.121),

$$[M_1s^2 + (f_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2)]X_1(s) - K_2X_2(s) - f_{v_3}sX_3(s) = 0 \tag{2.124}$$

De modo semelhante, usando a Eq. (2.122) para M_2,

$$-K_2X_1(s) + \left[M_2s^2 + (f_{v_2} + f_{v_4})s + K_2\right]X_2(s) - f_{v_4}sX_3(s) = F(s) \tag{2.125}$$

e usando a Eq. (2.123) para M_3,

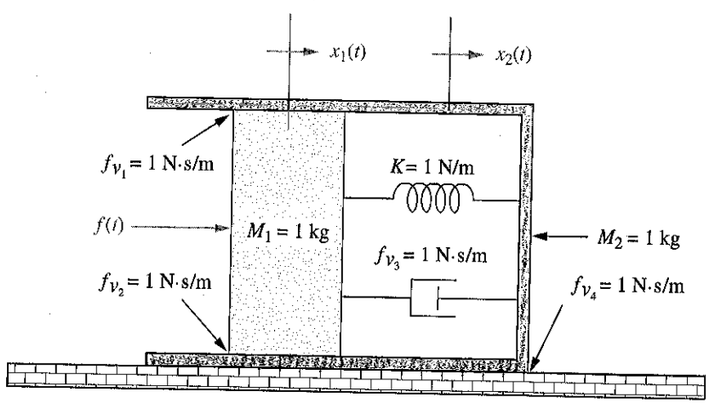
$$-f_{v_3}sX_1(s) - f_{v_4}sX_2(s) + \left[M_3s^2 + (f_{v_3} + f_{v_4})s\right]X_3(s) = 0 \tag{2.126}$$

As Eqs. (2.124) a (2.116) são as equações de movimento. Podemos resolvê-las para obter qualquer um dos deslocamentos, $X_1(s)$, $X_2(s)$ ou $X_3(s)$ ou a função de transferência.

Exercício de Avaliação 2.8

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = X_2(s)/F(s)$, para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. 2.21.

Fig. 2.21 Sistema mecânico em translação para o Exercício de Avaliação 2.8



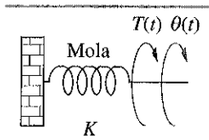
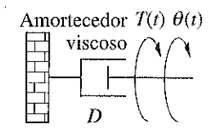
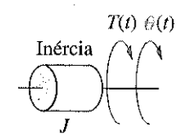
Resposta: $G(s) = \dfrac{3s + 1}{s(s^3 + 7s^2 + 5s + 1)}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

2.6 Funções de Transferência de Sistema Mecânico em Rotação

Após ter tratado dos sistemas elétricos e dos sistemas mecânicos em translação, vamos considerar agora os sistemas mecânicos em rotação. Os sistemas mecânicos em movimento de rotação são manipulados da mesma

Tabela 2.5 Relações torque-velocidade angular, torque-deslocamento angular e impedância de rotação de molas, amortecedores viscosos e inércia

Componente	Torque-velocidade angular	Torque-deslocamento angular	Impedância $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\dfrac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
	$T(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

Nota: O seguinte conjunto de símbolos e unidades é usado ao longo deste livro: $T(t)$ = N·m (newton·metros), $\theta(t)$ = rad (radianos), $\omega(t)$ = rad/s (radianos/segundo), K = N·m/rad (newton·metros/radiano), D = N·m·s/rad (newton·metros·segundos/rad), J = kg·m² (quilograma·metros² = newton·metros·segundos²/rad).

que os sistemas mecânicos em translação, exceto que torque substitui força e deslocamento angular substitui deslocamento de translação. Os componentes mecânicos dos sistemas em rotação são os mesmos dos sistemas em translação, exceto que os componentes efetuam rotação em vez de translação. A Tabela 2.5 mostra os componentes juntamente com as relações entre torque e velocidade angular, bem como entre torque e deslocamento angular. Observe que os símbolos dos componentes são os mesmos do sistema em translação, mas são submetidos a rotação e não a translação.

Observe também que o termo associado a massa foi substituído por inércia. Os valores de K, D e J são chamados *constante de mola*, *coeficiente de atrito viscoso* e *momento de inércia*, respectivamente. As impedâncias dos componentes mecânicos estão também resumidas na última coluna da Tabela 2.5. Os valores podem ser obtidos aplicando a transformada de Laplace à coluna torque-deslocamento angular da Tabela 2.5, supondo condições iniciais nulas.

O conceito de graus de liberdade continua válido nos sistemas em rotação, com exceção de que testamos um ponto de movimento por meio de uma *rotação*, mantendo todos os outros pontos de movimento parados. O número de pontos de movimento que podem ser submetidos a deslocamentos angulares, enquanto se mantêm parados todos os demais, é igual ao número de equações de movimento necessário para descrever o sistema.

Escrever as equações de movimento para sistemas em rotação é semelhante a escrevê-las para os sistemas em translação; a única diferença é que o diagrama de corpo livre consiste em torques em vez de forças. Obtemos estes torques usando superposição. Primeiro giramos um corpo mantendo parados todos os demais e pondo no diagrama de corpo livre todos os torques devidos ao próprio movimento. Em seguida, mantendo o corpo parado, giramos os pontos de movimento adjacentes, um a um, e acrescentamos os torques devidos ao movimento adjacente ao corpo livre. O processo é repetido para cada um dos pontos de movimento. Para cada um dos diagramas de corpo livre, estes torques são somados e igualados a zero para formar as equações de movimento.

Dois exemplos irão mostrar a solução de sistemas em movimento de rotação. O primeiro utiliza os diagramas de corpo livre; o segundo emprega o conceito de impedâncias para escrever as equações de movimento por inspeção.

Exemplo 2.19

Função de transferência — duas equações de movimento

Problema Obter a função de transferência, $\theta_2(s)/T(s)$, para o sistema em rotação mostrado na Fig. 2.22(*a*). O eixo elástico é suspenso por meio de mancais em cada uma das extremidades e é submetido a torção. Um torque é aplicado à esquerda e o deslocamento angular é medido à direita.

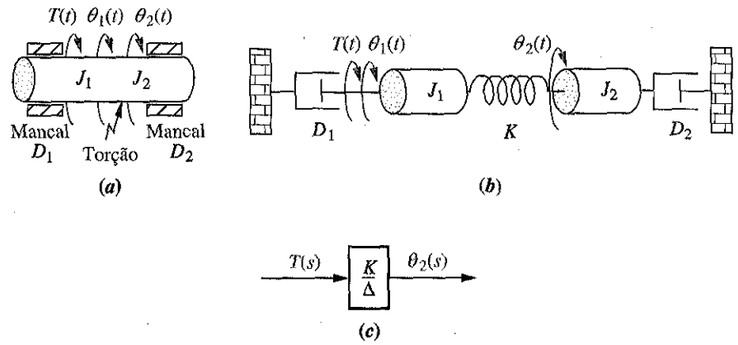


Fig. 2.22 a. Sistema físico; **b.** esquema; **c.** diagrama de blocos

Solução Primeiro, obtenha o diagrama esquemático a partir do sistema físico. Embora a torção ocorra ao longo do eixo na Fig. 2.22(*a*),[9] aproximamos o sistema admitindo que a torção atua como uma mola concentrada em um ponto particular do eixo, com uma inércia, J_1, à esquerda, e uma inércia, J_2, à direita.[10] Admitimos também que o amortecimento no interior do eixo elástico é insignificante. O diagrama esquemático está mostrado na Fig. 2.22(*b*). Há dois graus de liberdade, uma vez que cada inércia pode girar enquanto a outra permanece parada. Portanto, teremos duas equações simultâneas para resolver o sistema.

Em seguida, desenhe o diagrama de corpo livre de J_1, usando superposição. A Fig. 2.23(*a*) mostra os torques sobre J_1 se J_2 for mantida parada e J_1 girar. A Fig. 2.23(*b*) mostra os torques sobre J_1 se J_1 for mantida parada e J_2 girar. Finalmente, a soma das Figs. 2.23(*a*) e 2.23(*b*) está mostrada na Fig. 2.23(*c*), o diagrama de corpo livre final para J_1. O mesmo processo é repetido na Fig. 2.24 para J_2.

Somando os torques respectivamente a partir das Figs. 2.23(*c*) e 2.24(*c*), obtemos as equações de movimento,

$$(J_1s^2 + D_1s + K)\,\theta_1(s) \qquad - K\theta_2(s) = T(s) \tag{2.127a}$$

$$-K\theta_1(s) + (J_2s^2 + D_2s + K)\,\theta_2(s) = 0 \tag{2.127b}$$

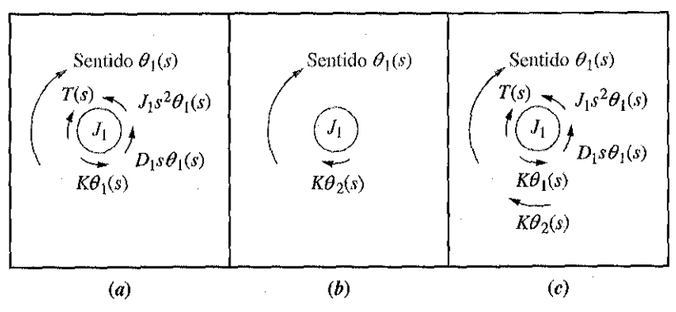


Fig. 2.23 a. Torques sobre J_1 devidos somente ao movimento de J_1; **b.** torques sobre J_1 devidos somente ao movimento de J_2; **c.** todos os torques sobre J_1

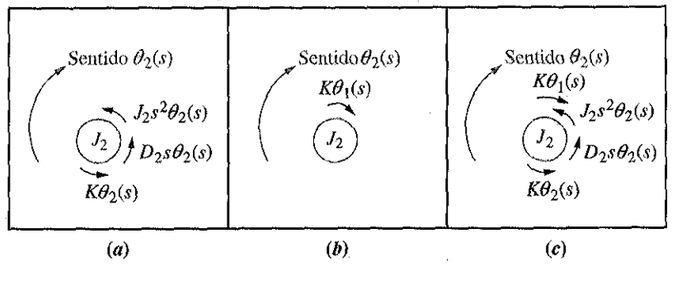


Fig. 2.24 a. Torques sobre J_2 devidos somente ao movimento de J_2; **b.** torques sobre J_2 devidos somente ao movimento de J_1; **c.** todos os torques sobre J_2

[9]Neste caso o parâmetro é referido como parâmetro *distribuído*.

[10]O parâmetro é agora referido com parâmetro *concentrado*.

a partir das quais se obtém a função de transferência pedida

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{\Delta} \tag{2.128}$$

como mostrado na Fig. 2.22(*c*), onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} (J_1s^2 + D_1s + K) & -K \\ -K & (J_2s^2 + D_2s + K) \end{vmatrix}$$

Observe que as Eqs. (2.127) possuem a agora bem conhecida forma geral

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } \theta_1\end{bmatrix}\theta_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_1 \text{ e } \theta_2\end{bmatrix}\theta_2(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma dos}\\ \text{torques aplicados}\\ \text{em } \theta_1\end{bmatrix} \tag{2.129a}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_1 \text{ e } \theta_2\end{bmatrix}\theta_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } \theta_2\end{bmatrix}\theta_2(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma dos}\\ \text{torques aplicados}\\ \text{em } \theta_2\end{bmatrix} \tag{2.129b}$$

Exemplo 2.20

Equações de movimento por inspeção

Problema Escrever, mas não resolver, a transformada de Laplace das equações de movimento para o sistema mostrado na Fig. 2.25.

Solução As equações tomarão a seguinte forma, semelhante a equações de malha de circuitos elétricos:

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } \theta_1\end{bmatrix}\theta_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_1 \text{ e } \theta_2\end{bmatrix}\theta_2(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_1 \text{ e } \theta_3\end{bmatrix}\theta_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma dos}\\ \text{torques aplicados}\\ \text{em } \theta_1\end{bmatrix} \tag{2.130a}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_1 \text{ e } \theta_2\end{bmatrix}\theta_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } \theta_2\end{bmatrix}\theta_2(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_2 \text{ e } \theta_3\end{bmatrix}\theta_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma dos}\\ \text{torques aplicados}\\ \text{em } \theta_2\end{bmatrix} \tag{2.130b}$$

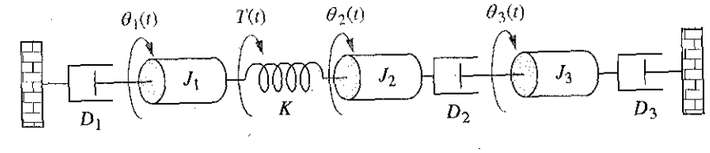


Fig. 2.25 Sistema mecânico em rotação com três graus de liberdade

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_1 \text{ e } \theta_3\end{bmatrix}\theta_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{entre}\\ \theta_2 \text{ e } \theta_3\end{bmatrix}\theta_2(s)$$

$$+\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{conectadas ao}\\ \text{movimento}\\ \text{em } \theta_3\end{bmatrix}\theta_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma dos}\\ \text{torques aplicados}\\ \text{em } \theta_3\end{bmatrix} \tag{2.130c}$$

Portanto

$$\begin{aligned}(J_1s^2 + D_1s + K)\,\theta_1(s) \quad - K\theta_2(s) \quad - 0\,\theta_3(s) &= T(s)\\ -K\theta_1(s) + (J_2s^2 + D_2s + K)\,\theta_2(s) \quad - D_2s\theta_3(s) &= 0\\ -0\,\theta_1(s) \quad - D_2s\theta_2(s) + (J_3s^2 + D_3s + D_2s)\,\theta_3(s) &= 0\end{aligned} \tag{2.131a, b, c}$$

Exercício de Avaliação 2.9

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = \theta_2(s)/T(s)$, para o sistema em rotação mostrado na Fig. 2.26.

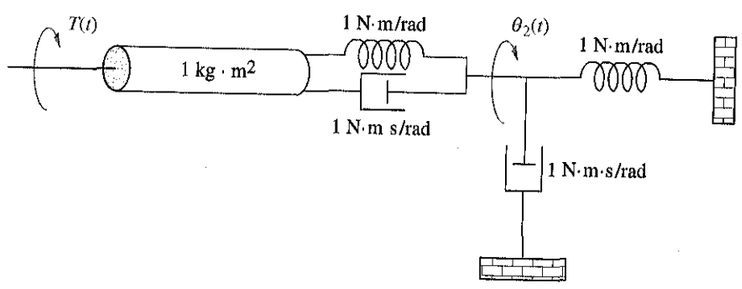


Fig. 2.26 Sistema mecânico em rotação para o Exercício de Avaliação 2.9

Resposta: $G(s) = \dfrac{1}{2s^2 + s + 1}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

2.7 Funções de Transferência de Sistemas com Engrenagens

Agora que somos capazes de obter a função de transferência de sistemas em rotação, percebemos que estes sistemas, especialmente os acionados por motores, raramente são vistos sem trens de engrenagens acionando a carga. Esta seção trata deste importante tópico.

As engrenagens propiciam vantagens mecânicas aos sistemas em rotação. Qualquer um que tenha dirigido uma bicicleta com 10 marchas de velocidade conhece o efeito das engrenagens. Ladeira acima, você troca de marcha para fornecer mais torque e menos velocidade. Em linha reta você troca de marcha para obter mais velocidade e menos torque. Portanto, as engrenagens permitem que você adapte o sistema de acionamento à carga — um compromisso entre velocidade e torque.

Em muitas aplicações, as engrenagens apresentam folgas (*backlash*), que ocorrem devido a um ajustamento inadequado entre os dentes das engrenagens. A engrenagem tratora gira um pequeno ângulo antes de fazer contato com a engrenagem acionada. O resultado é que o movimento angular da engrenagem de saída não ocorre até que um movimento angular pequeno da engrenagem de entrada tenha ocorrido. Nesta seção, o comportamento das engrenagens será ideal e se admite que não haverá folga.

A interação linearizada entre duas engrenagens está esboçada na Fig. 2.27. Uma engrenagem de entrada de raio r_1 e N_1 dentes gira de um ângulo $\theta_1(t)$ devido a um torque $T_1(t)$. Uma engrenagem de saída de raio r_2 e N_2 dentes responde girando de um ângulo $\theta_2(t)$ e entregando um torque $T_2(t)$. Obtenhamos agora a relação entre o ângulo de rotação da Engrenagem 1, $\theta_1(t)$, e o da Engrenagem 2, $\theta_2(t)$.

Com base na Fig. 2.27, à medida que as engrenagens giram, a distância percorrida ao longo de cada circunferência das engrenagens é a mesma. Portanto

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \tag{2.132}$$

ou

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{2.133}$$

uma vez que a razão do número de dentes ao longo da circunferência está na mesma proporção da razão dos raios. Concluímos que a relação entre os deslocamentos angulares das engrenagens é inversamente proporcional à razão do número de dentes.

Qual é a relação entre o torque de entrada, T_1, e o torque fornecido, T_2? Se admitirmos que as engrenagens não absorvem nem armazenam energia, a energia que entra na Engrenagem 1 é igual à energia que sai na Engrenagem 2.[11] Como a energia de translação de força vezes deslocamento se torna energia de rotação de torque vezes deslocamento angular,

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \tag{2.134}$$

Resolvendo a Eq. (2.134) para obter a relação de torques e usando a Eq. (2.133), obtemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{2.135}$$

Por conseguinte, os torques são diretamente proporcionais à relação do número de dentes. Todos os resultados estão resumidos na Fig. 2.28.

Vejamos o que acontece com as impedâncias mecânicas que são acionadas por engrenagens. A Fig. 2.29(*a*) mostra engrenagens acionando uma inércia, uma mola e um amortecedor viscoso. Para maior clareza, as engrenagens são mostradas por meio de uma vista em corte simplificada. Desejamos representar a Fig. 2.29(*a*) como um sistema equivalente referido a θ_1 sem engrenagens. Em outras palavras, será possível refletir as impedâncias mecânicas de saída para o eixo de entrada, eliminando assim as engrenagens?

Com base na Fig. 2.28(*b*), é possível refletir T_1 na saída multiplicando-o por N_2/N_1. O resultado está mostrado na Fig. 2.29(*b*), a partir da qual se escreve a equação de movimento como

$$(Js^2 + Ds + K)\,\theta_2(s) = T_1(s)\frac{N_2}{N_1} \tag{2.136}$$

Converta agora $\theta_2(s)$ em um $\theta_1(s)$ equivalente, de modo que a Eq. (2.136) pareça ter sido escrita em relação à entrada. Usando a Fig. 2.28(*a*) para obter $\theta_2(s)$ em função de $\theta_1(s)$, temos

$$(Js^2 + Ds + K)\frac{N_1}{N_2}\theta_1(s) = T_1(s)\frac{N_2}{N_1} \tag{2.137}$$

Depois das simplificações,

$$\left[J\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 s^2 + D\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 s + K\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\right]\theta_1(s) = T_1(s) \tag{2.138}$$

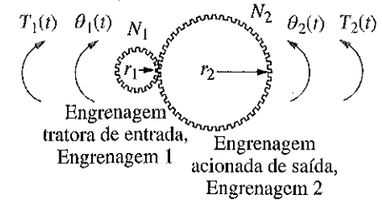


Fig. 2.27 Sistema de engrenagens

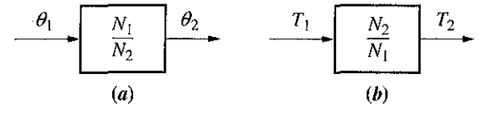


Fig. 2.28 Funções de transferência para **a.** deslocamento angular em engrenagens sem perdas e **b.** torques em engrenagens sem perdas

[11] Isto é equivalente a dizer que as engrenagens possuem inércia e amortecimento insignificantes.

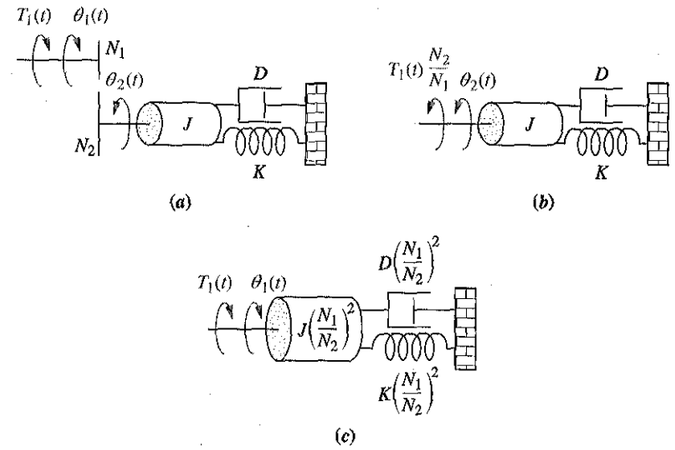


Fig. 2.29 a. Sistema em rotação acionado por engrenagens; **b** sistema equivalente referido à saída após reflexão do torque de entrada; **c.** sistema equivalente referido à entrada após reflexão das impedâncias

que sugere um sistema equivalente visto da entrada e sem engrenagens mostrado na Fig. 2.29(*c*). Assim, a carga pode ser vista como tendo sido refletida da saída para a entrada.

Generalizando os resultados, podemos elaborar o seguinte enunciado: *As impedâncias mecânicas em rotação podem ser refletidas por meio de trens de engrenagens multiplicando-se a impedância mecânica pela relação*

$$\left(\frac{\text{Número de dentes da engrenagem do eixo de } \textit{destino}}{\text{Número de dentes da engrenagem do eixo de } \textit{origem}}\right)^2$$

onde a impedância a ser refletida está anexada ao eixo fonte e está sendo refletida no eixo de destino. O próximo exemplo mostra a aplicação do conceito de impedâncias refletidas ao se obter a função de transferência de um sistema mecânico em rotação com engrenagens.

Exemplo 2.21

Função de transferência — sistema com engrenagens sem perdas

Problema Obter a função de transferência, $\theta_2(s)/T_1(s)$, para o sistema da Fig. 2.30(*a*).

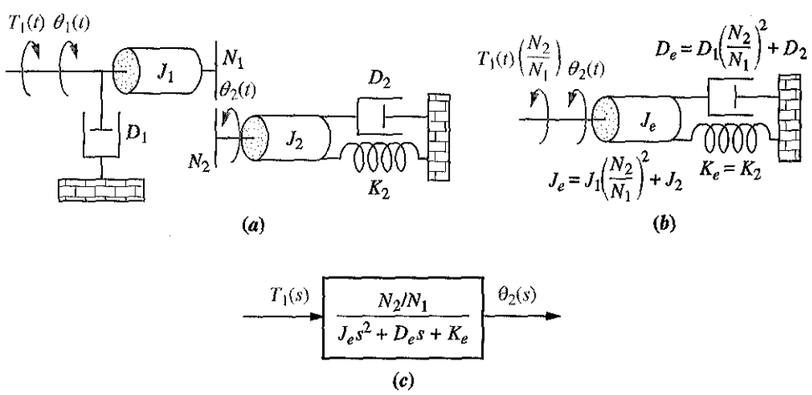


Fig. 2.30 a. Sistema em rotação com engrenagens; **b.** sistema após reflexão de torques e impedâncias ao eixo de saída; **c.** diagrama de blocos

Solução Pode ser tentador neste ponto buscar duas equações simultâneas correspondentes às inércias. Estas, contudo, não são submetidas a movimentos linearmente independentes, uma vez que estão ligadas pelas engrenagens. Por conseguinte, há um único grau de liberdade e, em decorrência disto, uma única equação de movimento.

Reflitamos primeiramente as impedâncias (J_1 e D_1) e o torque T_1 do eixo de entrada para a saída como mostrado na Fig. 2.30(*b*), onde as impedâncias são refletidas pelo fator $(N_2/N_1)^2$ e o torque é refletido pelo fator (N_2/N_1). A equação de movimento pode ser escrita como

$$(J_e s^2 + D_e s + K_e)\theta_2(s) = T_1(s)\frac{N_2}{N_1} \tag{2.139}$$

onde

$$J_e = J_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 + J_2; \qquad D_e = D_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 + D_2; \qquad K_e = K_2$$

Resolvendo em $\theta_2(s)/T_1(s)$, obtemos a função de transferência

$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{T_1(s)} = \frac{N_2/N_1}{J_e s^2 + D_e s + K_e} \tag{2.140}$$

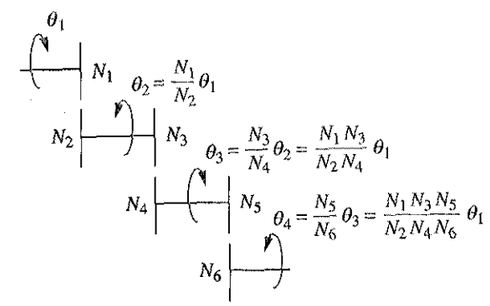
como mostrado na Fig. 2.30(*c*).

No sentido de eliminar engrenagens com raios muito grandes, usa-se um *trem de engrenagens* para implementar valores elevados de relação de transmissão, colocando em cascata relações menores. O diagrama esquemático de um trem de engrenagens é mostrado na Fig. 2.31. Ao lado de cada deslocamento angular, foi calculado o deslocamento angular relativo a θ_1. Com base na Fig. 2.31,

$$\theta_4 = \frac{N_1 N_3 N_5}{N_2 N_4 N_6}\theta_1 \tag{2.141}$$

Concluímos que nos trens de engrenagens a relação de engrenagem equivalente é o produto das relações de engrenagem individuais. Agora vamos aplicar este resultado para obter a função de transferência de um sistema dotado de engrenagens com perdas.

Fig. 2.31 Trem de engrenagens



Exemplo 2.22

Função de transferência — engrenagens com perdas

Problema Obter a função de transferência, $\theta_1(s)/T_1(s)$, para o sistema da Fig. 2.32(*a*).

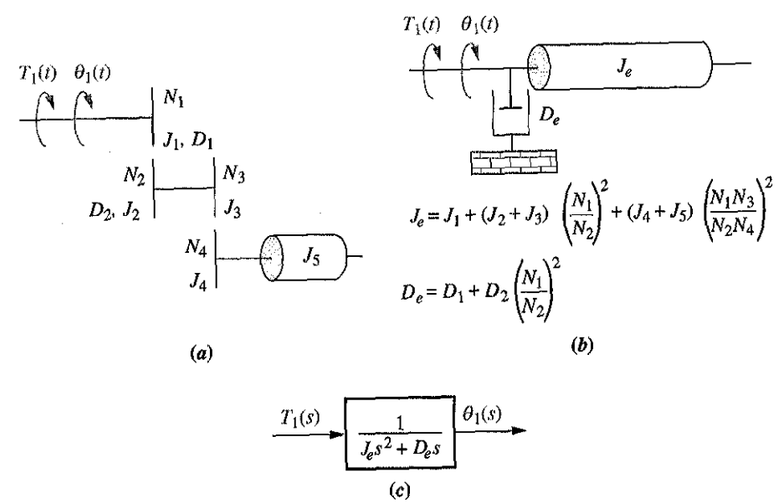


Fig. 2.32 a. Sistema usando um trem de engrenagens; **b.** sistema equivalente referido à entrada; **c.** diagrama de blocos

Solução Neste sistema, que utiliza um trem de engrenagens, não há engrenagens sem perdas. Todas elas possuem inércia, e para alguns eixos há atrito viscoso. Para solucionar o problema, devemos refletir todas as impedâncias no eixo de entrada, θ_1. A relação de engrenagem não é a mesma para todas as impedâncias. Por exemplo, D_2 é refletida somente através de uma relação como $D_2(N_1/N_2)^2$, enquanto J_4 mais J_5 são refletidas através de duas relações de engrenagem como $(J_4 + J_5)[(N_3/N_4)(N_1/N_2)]^2$. O resultado de refletir todas as impedâncias para θ_1 está mostrado na Fig. 2.32(*b*), cuja equação de movimento é

$$(J_e s^2 + D_e s)\,\theta_1(s) = T_1(s) \tag{2.142}$$

onde

$$J_e = J_1 + (J_2 + J_3)\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + (J_4 + J_5)\left(\frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}\right)^2$$

e

$$D_e = D_1 + D_2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

Da Eq. (2.142), a função de transferência é

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{J_e s^2 + D_e s} \tag{2.143}$$

como mostrado na Fig. 2.32(*c*).

Exercício de Avaliação 2.10

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = \theta_2(s)/T(s)$, para o sistema mecânico em rotação com engrenagens mostrado na Fig. 2.33.

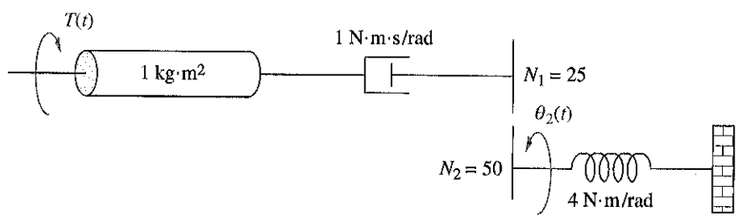


Fig. 2.33 Sistema mecânico em rotação com engrenagens para o Exercício de Avaliação 2.10

Resposta: $G(s) = \dfrac{1/2}{s^2 + s + 1}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

2.8 Funções de Transferência de Sistema Eletromecânico

Na última seção, tratamos de sistemas em rotação com engrenagens, o que completou nossa discussão de sistemas puramente mecânicos. Agora, vamos nos deslocar para sistemas em que há mistura de variáveis elétricas e mecânicas, os *sistemas eletromecânicos*. Vimos uma aplicação de sistema eletromecânico no Cap. 1, o sistema de controle do posicionamento de uma antena em azimute. Outras aplicações em sistemas dotados de componentes eletromecânicos são controles de robôs, rastreadores do Sol e rastreadores estelares, e controle de posição de acionadores de fita e de disco para computadores. Um exemplo de sistema de controle que utiliza componentes eletromecânicos está mostrado na Fig. 2.34.

Um motor é um componente eletromecânico que fornece um deslocamento de saída para uma tensão de entrada, isto é, uma saída mecânica gerada por uma entrada elétrica. Iremos deduzir a função de transferência de uma espécie particular de sistema eletromecânico, o servomotor de corrente contínua controlado pela armadura (Makebos, 1980). O esquema do motor está mostrado na Fig. 2.35(*a*), e a função de transferência a ser deduzida aparece na Fig. 2.35(*b*).

Na Fig. 2.35(*a*), o campo magnético é produzido por ímãs permanentes estacionários ou por meio de um eletroímã estacionário chamado *campo fixo*. Um circuito rotativo chamado *armadura*, através do qual circula a corrente $i_a(t)$, corta o campo magnético segundo um ângulo reto e experimenta uma força , $F = Bli_a(t)$, onde B

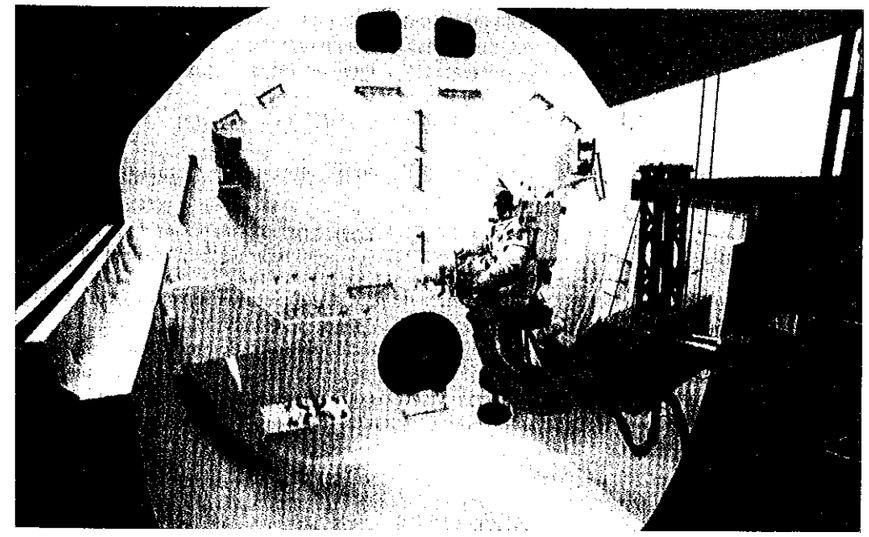


Fig. 2.34 Braço robótico de um simulador de vôo da NASA com componentes de sistema de controle eletromecânico

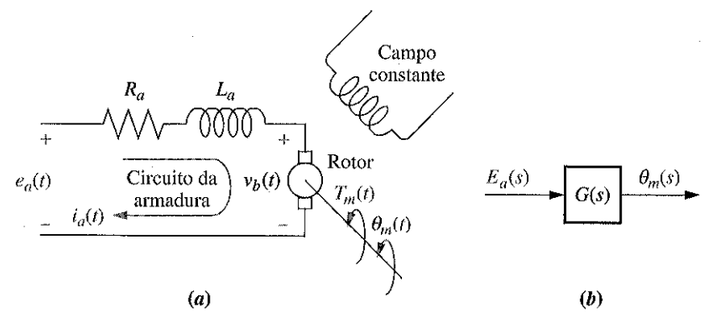


Fig. 2.35 Motor CC: **a.** esquema;[12] **b.** diagrama de blocos

é a intensidade do campo magnético e l é o comprimento do condutor. O torque resultante aciona o *rotor*, o elemento girante do motor.

Há um outro fenômeno que ocorre no motor: quando um condutor se desloca perpendicularmente a um campo magnético, é gerada uma tensão nos terminais do condutor igual a $e = Blv$, onde e é a tensão e v é a velocidade do condutor perpendicular ao campo magnético. Como a armadura conduzindo corrente está girando no interior de um campo magnético, sua tensão é proporcional à velocidade. Portanto,

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \tag{2.144}$$

Chamamos $v_b(t)$ de *força contra-eletromotriz* (*fcem*); K_b é uma constante de proporcionalidade chamada constante de fcem; e $d\theta_m(t)/dt = \omega_m(t)$ é a velocidade angular do motor. Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$V_b(s) = K_b s \theta_m(s) \tag{2.145}$$

A relação entre a corrente de armadura, $i_a(t)$, a tensão aplicada na armadura, $e_a(t)$, e a fcem, $v_b(t)$, é obtida escrevendo a transformada de Laplace da equação de malha do circuito de armadura (ver Fig. 2.35(*a*)):

$$R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + V_b(s) = E_a(s) \tag{2.146}$$

O torque produzido pelo motor é proporcional à corrente de armadura; assim,

$$T_m(s) = K_t I_a(s) \tag{2.147}$$

[12]Ver o Apêndice F para uma dedução deste esquema e de seus parâmetros.

onde T_m é o torque gerado pelo motor e K_t é uma constante de proporcionalidade, chamada constante de torque do motor, a qual depende de detalhes construtivos do motor e das características do campo magnético. Em um sistema de unidades consistente, o valor de K_t é igual ao valor K_b. Rearrumando a Eq. (2.147), resulta

$$I_a(s) = \frac{1}{K_t} T_m(s) \tag{2.148}$$

Para obter a função de transferência do motor, substituímos primeiro as Eqs. (2.145) e (2.148) na Eq. (2.146), resultando

$$\frac{(R_a + L_a s)T_m(s)}{K_t} + K_b s\theta_m(s) = E_a(s) \tag{2.149}$$

Agora devemos obter $T_m(s)$ em termos de $\theta_m(s)$ se quisermos separar as variáveis de entrada e de saída e obter a função de transferência, $\theta_m(s)/E_a(s)$.

A Fig. (2.36) mostra um carregamento mecânico típico de um motor. J_m é a inércia equivalente na armadura e inclui os valores da inércia própria da armadura e também, como veremos adiante, os da inércia da carga refletida na armadura. D_m é o amortecimento viscoso equivalente na armadura e inclui os valores do amortecimento próprio da armadura e também, como veremos adiante, os do amortecimento viscoso da carga refletida na armadura. Da Fig. 2.36,

$$T_m(s) = (J_m s^2 + D_m s)\,\theta_m(s) \tag{2.150}$$

Substituindo a Eq. (2.150) na Eq. (2.149) resulta

$$\frac{(R_a + L_a s)(J_m s^2 + D_m s)\,\theta_m(s)}{K_t} + K_b s\theta_m(s) = E_a(s) \tag{2.151}$$

Se admitirmos que a indutância da armadura, L_a, é pequena em comparação com a sua resistência, R_a, o que é usual em um motor CC, a Eq. (2.151) se torna

$$\left[\frac{R_a}{K_t}(J_m s + D_m) + K_b\right] s\theta_m(s) = E_a(s) \tag{2.152}$$

Depois das simplificações, determina-se a função de transferência desejada, $\theta_m(s)/E_a(s)$,

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} \tag{2.153}$$ [13]

Embora a forma da Eq. (2.153) seja relativamente simples, isto é,

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s(s+\alpha)} \tag{2.154}$$

o leitor deve saber como calcular as constantes.

Discutamos primeiramente as constantes mecânicas, J_m e D_m. Considere a Fig. 2.37, que mostra um motor de inércia J_a e de amortecimento D_a na armadura acionando uma carga de inércia J_L e amortecimento D_L. Admitindo

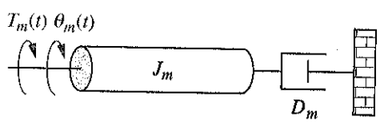


Fig. 2.36 Carregamento mecânico típico de um motor

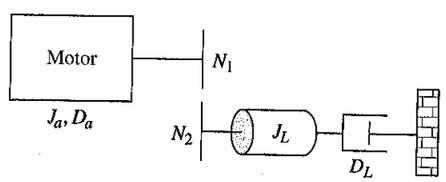


Fig. 2.37 Motor CC acionando uma carga mecânica em rotação

[13] As unidades para as constantes elétricas são K_t = N·m/A (newton·metro/ampère) e K_b = V·s/rad (volt-segundo/radiano).

que sejam conhecidos todos os valores de inércia e de amortecimento, J_L e D_L podem ser refletidos para a armadura como inércia e amortecimento equivalentes a serem adicionados, respectivamente, a J_a e D_a. Portanto, a inércia equivalente, J_m, e o amortecimento equivalente, D_m, referidos à armadura são

$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2; \qquad D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \tag{2.155}$$ [14]

Agora que você calculou as constantes mecânicas, J_m e D_m, que tal tratar das constantes elétricas da função de transferência da Eq. (2.153)? Mostraremos que estas constantes podem ser obtidas através de um teste do motor em *dinamômetro*, no qual um dinamômetro mede o torque e a velocidade de um motor ao qual é aplicada uma tensão constante. Desenvolvamos primeiro a relação que governa o uso de um dinamômetro.

Substituindo as Eqs. (2.145) e (2.148) na Eq. (2.146), com $L_a = 0$, resulta

$$\frac{R_a}{K_t} T_m(s) + K_b s\theta_m(s) = E_a(s) \tag{2.156}$$

Tomando a transformada de Laplace inversa, obtemos

$$\frac{R_a}{K_t} T_m(t) + K_b \omega_m(t) = e_a(t) \tag{2.157}$$

onde a transformada de Laplace inversa de $s\theta_m(s)$ é $d\theta_m(t)/dt$ ou, alternativamente, $\omega_m(t)$.

Se uma tensão CC, e_a, for aplicada, o motor irá girar a uma velocidade constante, ω_m, com um torque constante, T_m. Em conseqüência, deixando de lado a relação funcional baseada no tempo da Eq. (2.157), existe a seguinte relação quando o motor estiver operando em estado estacionário com uma tensão CC aplicada na entrada:

$$\frac{R_a}{K_t} T_m + K_b \omega_m = e_a \tag{2.158}$$

Extraindo o valor de T_m, vem

$$T_m = -\frac{K_b K_t}{R_a}\omega_m + \frac{K_t}{R_a} e_a \tag{2.159}$$

A Eq. (2.159) é uma reta, T_m em função de ω_m, e está mostrada na Fig. 2.38. Este gráfico é chamado de *curva torque-velocidade*. A interseção com o eixo dos torques ocorre quando a velocidade angular alcança o valor zero. Esse valor de torque é chamado *torque de partida* ou torque com rotor bloqueado, T_{bloq}. Assim,

$$T_{\text{bloq}} = \frac{K_t}{R_a} e_a \tag{2.160}$$

A velocidade angular que ocorre quando o torque é zero é chamada de *velocidade sem carga* ou velocidade em vazio, ω_{vazio}. Assim,

$$\omega_{\text{vazio}} = \frac{e_a}{K_b} \tag{2.161}$$

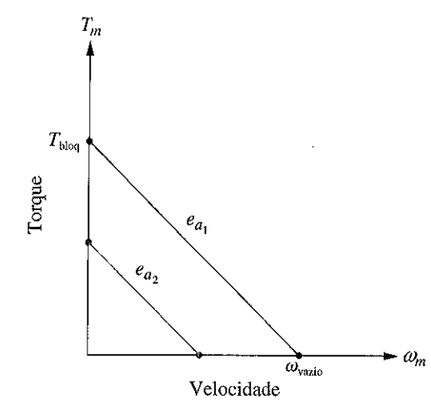


Fig. 2.38 Curvas torque-velocidade tendo como parâmetro a tensão de armadura, e_a

[14] Se os valores das constantes mecânicas não forem conhecidos, as constantes do motor podem ser determinadas por meio de testes de laboratório usando dados de resposta transitória ou dados de resposta de freqüência. O conceito de resposta transitória é tratado no Cap. 4; a resposta de freqüência é tratada no Cap. 10.

As constantes elétricas da função de transferência do motor podem ser determinadas a partir das Eqs. (2.160) e (2.161) como

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{\text{bloq}}}{e_a} \tag{2.162}$$

e

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{\text{vazio}}} \tag{2.163}$$

As constantes elétricas, K_t/R_a e K_b, podem ser determinadas com um teste dinamométrico do motor, o qual forneceria T_{bloq} e ω_{vazio} para um dado valor de e_a.

Exemplo 2.23

Função de transferência — motor CC e carga

Problema Dado o sistema e a curva torque-velocidade das Figs. 2.39(*a*) e (*b*), obter a função de transferência, $\theta_L(s)/E_a(s)$.

Solução Comece obtendo as constantes mecânicas, J_m e D_m, na Eq. (2.153). Com base nas Eqs. (2.155), a inércia total referida à armadura do motor é

$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 5 + 700\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 12 \tag{2.164}$$

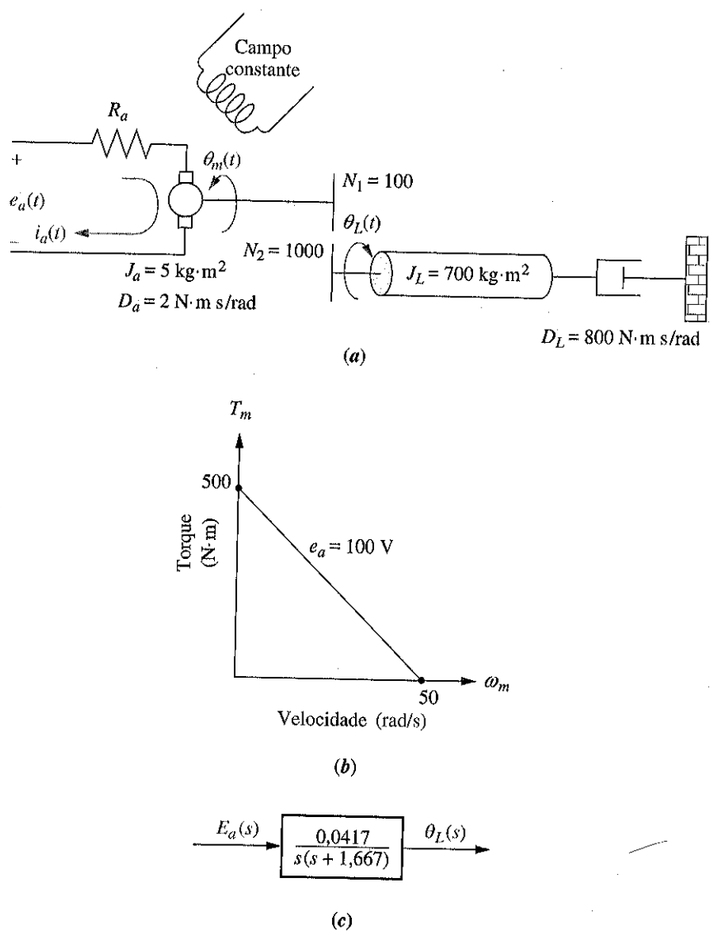


Fig. 2.39 a. Motor CC e carga; **b.** curva torque-velocidade; **c.** diagrama de blocos

e o amortecimento total referido à armadura do motor é

$$D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2 + 800\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10 \tag{2.165}$$

Agora obteremos as constantes elétricas, K_t/R_a e K_b. Da curva torque-velocidade na Fig. 2.39(*b*),

$$T_{\text{bloq}} = 500 \tag{2.166}$$

$$\omega_{\text{vazio}} = 50 \tag{2.167}$$

$$e_a = 100 \tag{2.168}$$

Portanto, as constantes elétricas são

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{\text{bloq}}}{e_a} = \frac{500}{100} = 5 \tag{2.169}$$

e

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{\text{vazio}}} = \frac{100}{50} = 2 \tag{2.170}$$

Substituindo as Eqs. (2.164), (2.165), (2.169) e (2.170) na Eq. (2.153) resulta

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{5/12}{s\left\{s + \frac{1}{12}\left[10 + (5)(2)\right]\right\}} = \frac{0{,}417}{s(s+1{,}667)} \tag{2.171}$$

A fim de determinar $\theta_L(s)/E_a(s)$, usamos a relação de engrenagens, $N_1/N_2 = 1/10$, e encontramos

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0{,}0417}{s(s+1{,}667)} \tag{2.172}$$

como mostrado na Fig. 2.39(*c*).

Exercício de Avaliação 2.11

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = \theta_L(s)/E_a(s)$, de um motor e carga mostrados na Fig. 2.40. A curva torque-velocidade é dada por $T_m = -8\omega_m + 200$ quando a tensão de entrada for 100 volts.

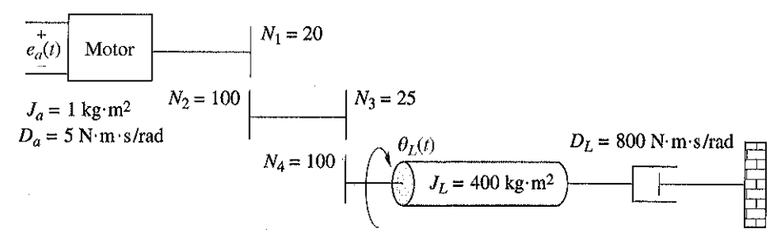


Fig. 2.40 Sistema eletromecânico para o Exercício de Avaliação 2.11

Resposta: $G(s) = \dfrac{1/20}{s[s + (15/2)]}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

2.9 Circuitos Elétricos Análogos

Nesta seção mostraremos aspectos comuns a sistemas de vários campos do conhecimento, mostrando que os sistemas mecânicos com os quais trabalhamos podem ser representados por circuitos elétricos equivalentes. Destacamos a semelhança entre as equações resultantes das leis de Kirchhoff para os sistemas elétricos e as equações de movimento dos sistemas mecânicos. Mostramos agora estes aspectos comuns de um modo bem mais convincente através da produção de circuitos elétricos equivalentes a sistemas mecânicos. As variáveis dos circuitos elétricos se comportam exatamente como as variáveis análogas do sistema mecânico. Na realidade, a conversão de sistemas

mecânicos em circuitos elétricos, antes de escrever as equações que os descrevem, constitui uma abordagem de solução de problemas que você deve perseguir.

O circuito elétrico que é análogo a um sistema de outra natureza é chamado circuito elétrico *análogo*. Os análogos podem ser obtidos comparando-se as equações de descrição, como as equações de movimento de um sistema mecânico, com as equações de malha ou de nó. Ao se comparar com as equações de malha, o circuito elétrico resultante é chamado *análogo série*. Quando comparado com as equações de nó, o circuito elétrico resultante é chamado *análogo paralelo*.

Análogo Série

Considere o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. 2.41(*a*), cuja equação de movimento é

$$(Ms^2 + f_v s + K)X(s) = F(s) \tag{2.173}$$

A equação de malha de Kirchhoff para o circuito *RLC* série mostrado na Fig. 2.41(*b*) é

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = E(s) \tag{2.174}$$

Como havíamos destacado anteriormente, a Eq. (2.173) não é diretamente análoga à Eq. (2.174) porque deslocamento e corrente não são grandezas análogas. Podemos criar uma analogia direta operando na Eq. (2.173) para converter deslocamento em velocidade dividindo e multiplicando o lado esquerdo por s, obtendo

$$\frac{Ms^2 + f_v s + K}{s} sX(s) = \left(Ms + f_v + \frac{K}{s}\right)V(s) = F(s) \tag{2.175}$$

Comparando as Eqs. (2.174) e (2.175), reconhecemos a soma de impedâncias e desenhamos o circuito mostrado na Fig. 2.41(*c*). A conversão está resumida na Fig. 2.41(*d*).

Quando se tem mais de um grau de liberdade, as impedâncias associadas com o movimento aparecem como elementos elétricos em série de uma malha, mas as impedâncias entre movimentos adjacentes são desenhadas como impedâncias elétricas em série entre as duas malhas correspondentes. Mostramos isto com um exemplo.

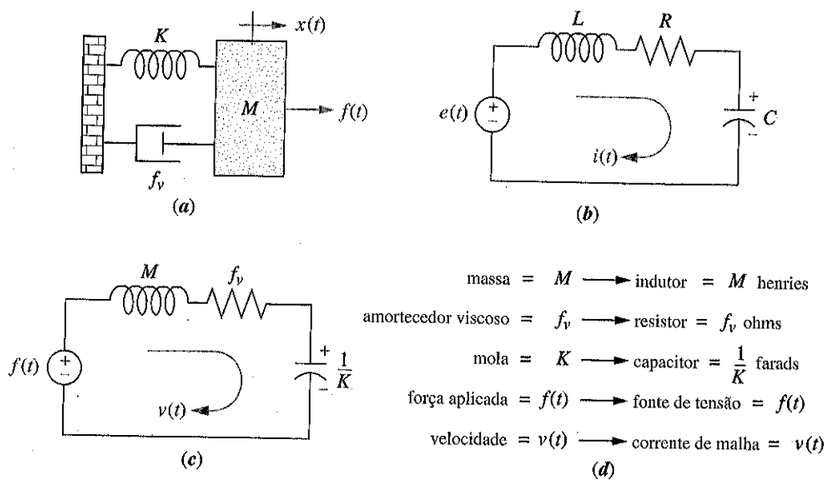


Fig. 2.41 Desenvolvimento de um análogo série: **a.** sistema mecânico; **b.** representação elétrica desejada; **c.** análogo série; **d.** parâmetros para o análogo série

Exemplo 2.24

Convertendo um sistema mecânico em um análogo série

Problema Desenhe um análogo série do sistema mecânico da Fig. 2.17(*a*).

Solução As Eqs. (2.118) são análogas às equações elétricas de malha depois da conversão de velocidade. Assim,

$$\left[M_1 s + (f_{v_1} + f_{v_3}) + \frac{(K_1 + K_2)}{s}\right]V_1(s) - \left(f_{v_3} + \frac{K_2}{s}\right)V_2(s) = F(s) \tag{2.176a}$$

$$-\left(f_{v_3} + \frac{K_2}{s}\right)V_1(s) + \left[M_2 s + (f_{v_2} + f_{v_3}) + \frac{(K_2 + K_3)}{s}\right]V_2(s) = 0 \tag{2.176b}$$

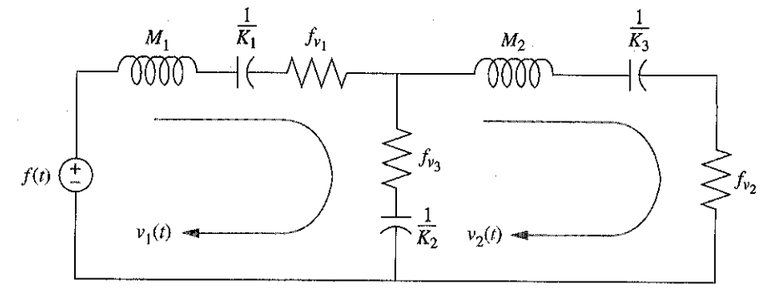


Fig. 2.42 Análogo série do sistema mecânico da Fig. 2.17(*a*)

Os coeficientes representam somas de impedâncias elétricas. As impedâncias mecânicas associadas a M_1 formam a primeira malha, onde as impedâncias entre as duas massas são comuns às duas malhas. As impedâncias associadas a M_2 formam a segunda malha. O resultado está mostrado na Fig. 2.42, onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são as velocidades de M_1 e M_2, respectivamente.

Análogo Paralelo

Um sistema também pode ser convertido em um análogo em paralelo equivalente. Considere o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. 2.43(*a*), cuja equação de movimento é dada pela Eq. (2.175). A equação de nó de Kirchhoff para o circuito *RLC* paralelo simples mostrado na Fig. 2.43(*b*) é

$$\left(Cs + \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls}\right)E(s) = I(s) \tag{2.177}$$

Comparando as Eqs. (2.175) e (2.177), identificamos a soma de admitâncias e desenhamos o circuito mostrado na Fig. 2.43(*c*). As conversões estão resumidas na Fig. 2.43(*d*).

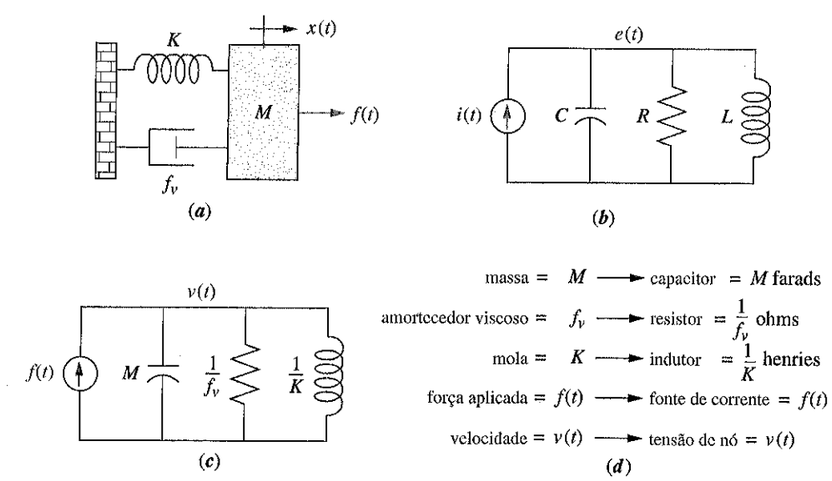


Fig. 2.43 Desenvolvimento de um análogo paralelo: **a.** sistema mecânico; **b.** representação elétrica desejada; **c.** análogo paralelo; **d.** parâmetros para o análogo paralelo

Quando se tem mais de um grau de liberdade, os componentes associados com o movimento aparecem como elementos elétricos em paralelo conectados a um nó, mas os componentes de movimentos adjacentes são desenhados como elementos elétricos em paralelo entre os dois nós correspondentes. Mostraremos isto com um exemplo.

Exemplo 2.25

Convertendo um sistema mecânico em um análogo em paralelo

Problema Desenhe um análogo em paralelo do sistema mecânico da Fig. 2.17(*a*).

Solução As Eqs. (2.176) são também análogas às equações elétricas de nós. Os coeficientes representam somas de admitâncias elétricas. As admitâncias associadas a M_1 formam os elementos conectados no primeiro nó, enquanto as admitâncias mecânicas entre as duas massas são comuns aos dois nós. As admitâncias mecânicas associadas a M_2 formam os elementos conectados ao segundo nó. O resultado está mostrado na Fig. 2.44, onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são as velocidades de M_1 e M_2, respectivamente.

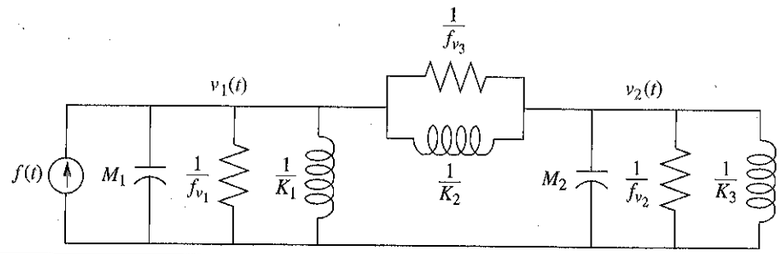


Fig. 2.44 Análogo paralelo do sistema mecânico da Fig. 2.17(*a*)

Exercício de Avaliação 2.12

Problema: Desenhar um análogo série e um análogo em paralelo para o sistema mecânico da Fig. 2.22.

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

2.10 Não-linearidades

Até aqui foram elaborados modelos de sistemas que podem ser descritos aproximadamente por equações diferenciais lineares, invariantes no tempo. Uma hipótese de *linearidade* estava implícita no desenvolvimento destes modelos. Nesta seção, definimos formalmente os termos *linear* e *não-linear* e mostramos como distinguir entre os dois. Na Seção 2.11 mostraremos como aproximar um sistema não-linear com um sistema linear de modo que possamos utilizar as técnicas de modelagem tratadas anteriormente neste capítulo (Hsu, 1968).

Um sistema linear possui duas propriedades: superposição e homogeneidade. A propriedade da *superposição* significa que a resposta na saída de um sistema à soma das entradas é a soma das respostas às entradas individuais. Assim, se uma entrada $r_1(t)$ gerar uma saída $c_1(t)$ e uma entrada $r_2(t)$ gerar uma saída $c_2(t)$, então uma entrada $r_1(t) + r_2(t)$ produzirá uma saída $c_1(t) + c_2(t)$. A propriedade da *homogeneidade* descreve a resposta de um sistema a uma multiplicação da entrada por um escalar. Especificamente, em um sistema linear, a propriedade da homogeneidade é demonstrada se para uma entrada $r_1(t)$ que gera uma saída $c_1(t)$, uma entrada $Ar_1(t)$ produzir uma saída $Ac_1(t)$; isto é, a multiplicação da entrada por um escalar faz com que a resposta seja multiplicada pelo mesmo escalar.

Podemos visualizar a linearidade como mostrado na Fig. 2.45. A Fig. 2.45(*a*) é um sistema linear onde a saída é sempre metade da entrada, ou $f(x) = 0{,}5x$, qualquer que seja o valor de x.* Em conseqüência, cada uma das propriedades dos sistemas lineares se aplica. Por exemplo, uma entrada de valor 1 produz uma saída de valor 1/2 e uma entrada de valor 2 produz uma saída de valor 1. Usando a superposição, uma entrada com valor igual à soma das entradas originais, ou seja, 3, produziria uma saída igual à soma das saídas individuais, isto é, 1,5. Com base na Fig. 2.45(*a*), uma entrada de valor 3 produz na realidade uma saída de 1,5.

Para testar a propriedade da homogeneidade, admita uma entrada com valor 2, que conduz a uma saída de valor 1. A multiplicação do valor desta entrada por 2 deverá produzir um valor de saída duas vezes maior. Com base na Fig. 2.45(*a*), uma entrada de valor 4 produz, na realidade, uma saída de valor 2. O leitor pode verificar que as propriedades da linearidade não se aplicam à relação mostrada na Fig. 2.45(*b*).

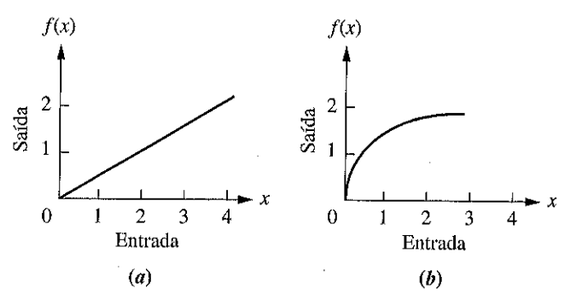


Fig. 2.45 a. Sistema linear; **b.** sistema não-linear

*O autor considera nos gráficos que x terá sempre valor positivo. (N.T.)

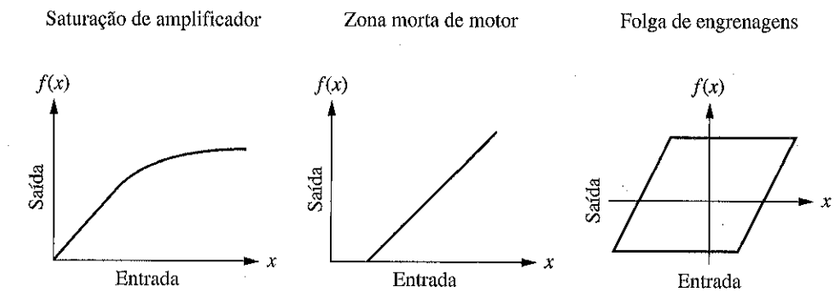


Fig. 2.46 Algumas não-linearidades físicas

A Fig. 2.46 mostra alguns exemplos de não-linearidades físicas. Um amplificador eletrônico é linear sobre uma faixa específica, mas apresenta a não-linearidade chamada *saturação* para valores elevados de tensão de entrada. Um motor que não responde a valores muito baixos de tensão de entrada devido ao atrito apresenta uma não-linearidade chamada *zona morta*. Engrenagens que não se ajustam perfeitamente apresentam uma não-linearidade chamada *folga* (*backlash*) como já explicada: a entrada se desloca sobre uma pequena faixa de valores sem que a saída responda. O leitor deve comprovar que as curvas mostradas na Fig. 2.46 não se ajustam às definições de linearidade sobre toda a faixa de valores. Um outro exemplo de subsistema não-linear é o detector de fase, usado no sistema PLL (*phase-locked loop*) de um receptor de rádio FM, cuja saída é o sinal senoidal da entrada.

O projetista pode muitas vezes construir uma aproximação linear de um sistema não-linear. As aproximações lineares simplificam a análise e o projeto do sistema e são usadas desde que os resultados produzam uma boa aproximação da realidade. Por exemplo, pode-se estabelecer uma relação linear em um ponto de uma curva não-linear se a faixa de valores de entrada em torno desse ponto for pequena e se a origem for transladada para esse ponto. Os amplificadores eletrônicos são um exemplo de dispositivos físicos que executam amplificação linear com pequenas excursões em torno de um ponto.

2.11 Linearização

Os sistemas elétricos e mecânicos tratados até aqui foram considerados lineares. Em conseqüência, se estiver presente algum componente não-linear, devemos linearizar o sistema antes de poder encontrar a função de transferência. Na última seção, definimos e discutimos não-linearidades; nesta seção mostraremos como conseguir aproximações lineares de sistemas não-lineares a fim de obter funções de transferência.

O primeiro passo é reconhecer o componente não-linear e escrever a equação diferencial não-linear. Ao linearizar uma equação diferencial não-linear, fazemos isto para valores pequenos do sinal de entrada em torno da solução de estado estacionário, situação na qual o pequeno sinal de entrada é igual a zero. Esta solução em estado estacionário é chamada de *equilíbrio* e é escolhida como o segundo passo no processo de linearização. Por exemplo, quando um pêndulo está em repouso, está em equilíbrio. O deslocamento angular é descrito por uma equação diferencial não-linear, mas pode ser expresso por uma equação diferencial linear para pequenas excursões em torno deste ponto de equilíbrio.

Em seguida, linearizamos a equação diferencial não-linear e depois aplicamos a transformada de Laplace sobre a equação diferencial linearizada, supondo condições iniciais nulas. Finalmente, separamos as variáveis de entrada e de saída e elaboramos a função de transferência. Vejamos primeiro como linearizar uma função; mais adiante você aplicará o método para a linearização de equações diferenciais.

Se supusermos um sistema não-linear operando em um ponto A, $[x_0, f(x_0)]$ na Fig. 2.47, é possível relacionar pequenas variações na entrada a variações na saída em torno do ponto por intermédio da inclinação da curva no

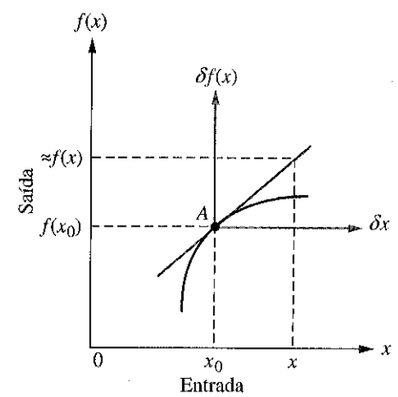


Fig. 2.47 Linearização em torno de um ponto A

ponto A. Assim, se a inclinação da curva no ponto A for m_a, então uma pequena excursão da entrada em torno do ponto A, δx, acarreta pequenas variações na saída, $\delta f(x)$, relacionado pela inclinação no ponto A. Portanto,

$$[f(x) - f(x_0)] \approx m_a(x - x_0) \tag{2.178}$$

da qual

$$\delta f(x) \approx m_a \delta x \tag{2.179}$$

e

$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(x - x_0) \approx f(x_0) + m_a \delta x \tag{2.180}$$

Esta relação é mostrada graficamente na Fig. 2.47, onde o novo conjunto de eixos, δx e $\delta f(x)$, é criado no ponto A, e $f(x)$ é aproximadamente igual a $f(x_0)$, a ordenada da nova origem, mais pequenas excursões, $m_a \delta x$, em torno do ponto A. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.26

Linearizando uma função

Problema Linearizar $f(x) = 5 \cos x$ em torno de $x = \pi/2$.

Solução Achamos primeiro que a derivada de $f(x)$ é $df/dx = (-5 \text{ sen } x)$. Em $x = \pi/2$, a derivada é -5. Além disso, $f(x_0) = f(\pi/2) = 5 \cos(\pi/2) = 0$. Por conseguinte, com base na Eq. (2.180), o sistema pode ser representado como $f(x) = -5\ \delta x$, para pequenas excursões de x em torno de $\pi/2$. O processo é mostrado graficamente na Fig. 2.48, onde a curva do co-seno se assemelha, na verdade, à reta de inclinação -5 próximo de $\pi/2$.

A discussão anterior pode ser formalizada usando a expansão em série de Taylor, que exprime o valor de uma função em termos do valor dessa função em um ponto particular, da excursão em torno desse ponto e das derivadas calculadas nesse ponto. A série de Taylor é mostrada na Eq. (2.181).

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots \tag{2.181}$$

Para pequenas excursões de x em torno de x_0, podemos desprezar os termos de ordem mais alta. A aproximação resultante conduz a uma relação em forma de reta entre a variação em $f(x)$ e as excursões em torno de x_0. Desprezando os termos de ordem mais elevada na Eq. (2.181), obtemos

$$f(x) - f(x_0) \approx \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) \tag{2.182}$$

ou

$$\delta f(x) \approx m|_{x=x_0}\, \delta x \tag{2.183}$$

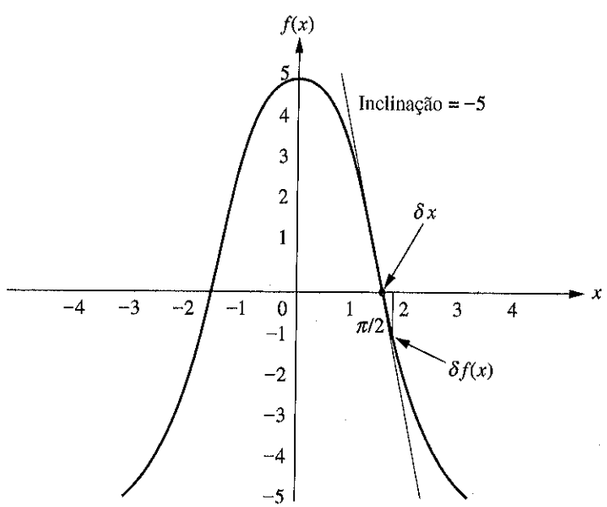


Fig. 2.48 Linearização de 5 *cos x em* torno de $x = \pi/2$

que é uma relação linear entre $\delta f(x)$ e δx para pequenas excursões a partir de x_0. É interessante notar que as Eqs. (2.182) e (2.183) são idênticas às Eqs. (2.178) e (2.179), que foram deduzidas intuitivamente. Os exemplos a seguir ilustram a linearização. O primeiro mostra a linearização de uma equação diferencial, enquanto o segundo exemplo aplica a linearização para obter uma função de transferência.

Exemplo 2.27

Linearização de uma equação diferencial

Problema Linearizar a Eq. (2.184) para pequenas excursões em torno de $x = \pi/4$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \cos x = 0 \tag{2.184}$$

Solução A presença do termo $\cos x$ torna esta equação não-linear. Como desejamos linearizar a equação em torno de $x = \pi/4$, fazemos $x = \delta x + \pi/4$, onde δx é uma pequena excursão em torno de $\pi/4$, e substituímos x na Eq. (2.184):

$$\frac{d^2\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt^2} + 2\frac{d\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt} + \cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{2.185}$$

Mas

$$\frac{d^2\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt^2} = \frac{d^2\delta x}{dt^2} \tag{2.186}$$

e

$$\frac{d\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} \tag{2.187}$$

Finalmente, o termo $\cos(\delta x + (\pi/4))$ pode ser linearizado por meio de uma série de Taylor truncada. Substituindo $f(x) = \cos(\delta x + (\pi/4))$, $f(x_0) = f(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ e $(x - x_0) = \delta x$ na Eq. (2.182) resulta

$$\cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left.\frac{d\cos x}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} \delta x = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x \tag{2.188}$$

Resolvendo a Eq. (2.188) para $\cos(\delta x + (\pi/4))$, obtemos

$$\cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x \tag{2.189}$$

Substituindo as Eqs. (2.186), (2.187) e (2.189) na Eq. (2.185), resulta a seguinte equação diferencial linearizada:

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + 2\frac{d\delta x}{dt} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.190}$$

Esta equação pode agora ser solucionada para δx, de onde se pode obter $x = \delta x + (\pi/4)$.

Embora a Eq. (2.184) não-linear seja homogênea, a Eq. (2.190) linearizada não é homogênea. A Eq. (2.190) possui uma função forçante no lado direito da igualdade. Este termo adicional pode ser encarado como uma entrada do sistema representado pela Eq. (2.184).

Uma outra observação a respeito da Eq. (2.190) é o sinal negativo no lado esquerdo da igualdade. O estudo de equações diferenciais nos diz que se as raízes da equação característica forem positivas, a solução homogênea crescerá sem limites em vez de tender para zero. Assim, este sistema linearizado em torno de $x = \pi/4$ não é estável.

Exemplo 2.28

Função de transferência — circuito elétrico não-linear

Problema Obter a função de transferência, $V_L(s)/V(s)$, para o circuito elétrico mostrado na Fig. 2.49, que contém um resistor não-linear cuja relação tensão-corrente é definida por $i_r = 2e^{0,1v_r}$, onde i_r e v_r são, respectivamente, a corrente e a tensão no resistor. Além disto, $v(t)$ na Fig. 2.49 é uma fonte de pequenos sinais.

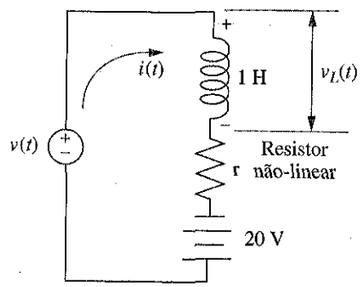


Fig. 2.49 Circuito elétrico não-linear

Solução Usaremos a lei de Kirchhoff das tensões para somar as tensões ao longo da malha e obter a equação diferencial não-linear, mas primeiro devemos resolver em termos da tensão sobre o resistor não-linear. Tomando o logaritmo natural da relação corrente-tensão do resistor, obtemos $v_r = 10 \ln \frac{1}{2} i_r$. Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões ao longo da malha, onde $i_r = i$, resulta

$$L\frac{di}{dt} + 10 \ln \frac{1}{2} i - 20 = v(t) \tag{2.191}$$

Em seguida, calculamos a solução de equilíbrio. Primeiro, façamos a fonte de pequenos sinais, $v(t)$, igual a zero. Calculamos agora a corrente de estado estacionário. Com $v(t) = 0$, o circuito consiste em uma bateria de 20 V em série com o indutor e com o resistor não-linear. Em estado estacionário, a tensão sobre o indutor será zero, uma vez que $v_L(t) = L di/dt$ e di/dt é zero no estado estacionário, admitindo uma bateria com tensão constante. Portanto, a tensão sobre o resistor, v_r, é 20 V. Usando a característica do resistor, $i_r = 2e^{0,1v_r}$, obtemos $i_r = i = 14,78$ A. Esta corrente, i_0, é o valor da corrente de equilíbrio do circuito. Portanto, $i = i_0 + \delta i$. Substituindo esta corrente na Eq. (2.191), resulta

$$L\frac{d(i_0 + \delta i)}{dt} + 10 \ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i) - 20 = v(t) \tag{2.192}$$

Usando a Eq. (2.182) para linearizar $\ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i)$, obtemos

$$\ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i) - \ln \frac{1}{2} i_0 = \left.\frac{d(\ln \frac{1}{2} i)}{di}\right|_{i=i_0} \delta i = \left.\frac{1}{i}\right|_{i=i_0} \delta i = \frac{1}{i_0}\delta i \tag{2.193}$$

ou

$$\ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i) = \ln \frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0}\delta i \tag{2.194}$$

Substituindo na Eq. (2.192), a equação linearizada se torna

$$L\frac{d\delta i}{dt} + 10\left(\ln \frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0}\delta i\right) - 20 = v(t) \tag{2.195}$$

Fazendo $L = 1$ e $i_0 = 14,78$, a equação diferencial linearizada final é

$$\frac{d\delta i}{dt} + 0,677\delta i = v(t) \tag{2.196}$$

Aplicando a transformada de Laplace, supondo condições iniciais nulas, e resolvendo em função de $\delta i(s)$, obtemos

$$\delta i(s) = \frac{V(s)}{s + 0,677} \tag{2.197}$$

Mas a tensão sobre o indutor em torno do ponto de equilíbrio é

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}(i_0 + \delta i) = L\frac{d\delta i}{dt} \tag{2.198}$$

Aplicando a transformada de Laplace,

$$V_L(s) = Ls\delta i(s) = s\delta i(s) \tag{2.199}$$

Substituindo a Eq. (2.197) na Eq. (2.199), resulta

$$V_L(s) = s\frac{V(s)}{s + 0,677} \tag{2.200}$$

da qual a função de transferência final é

$$\frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{s}{s + 0,677} \tag{2.201}$$

para pequenas excursões em torno de $i = 14,78$ ou, de forma equivalente, em torno de $v(t) = 0$.

Exercício de Avaliação 2.13

Problema: Obter a função de transferência linearizada, $G(s) = V(s)/I(s)$, para o circuito elétrico mostrado na Fig. 2.50. O circuito contém um resistor não-linear cuja relação tensão-corrente é definida por $i_r = e^{v_r}$. A fonte de corrente, $i(t)$, é um gerador de pequeno sinal.

Resposta: $G(s) = \dfrac{1}{s + 2}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

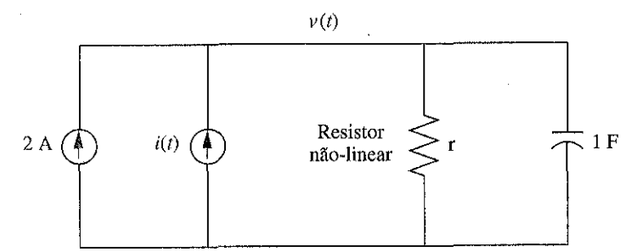


Fig. 2.50 Circuito elétrico não-linear para o Exercício de Avaliação 2.13

Estudos de Caso

Controle de Antena: Função de Transferência

Este capítulo mostrou que os sistemas físicos podem ser modelados matematicamente com funções de transferência. De um modo geral, os sistemas são compostos de subsistemas de diferentes tipos, como os elétricos, os mecânicos e os eletromecânicos.

O primeiro estudo de caso utiliza nosso problema em andamento do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, para mostrar como representar cada subsistema por uma função de transferência.

Problema Obter a função de transferência de cada subsistema do sistema de controle de posição de uma antena em azimute, mostrado na contracapa dianteira. Use a Configuração 1.

Solução Primeiro, identificamos os subsistemas individuais para os quais devemos obter funções de transferência; eles estão resumidos na Tabela 2.6. Prosseguimos no sentido de obter a função de transferência de cada subsistema.

Potenciômetro de Entrada; Potenciômetro de Saída Como os potenciômetros de entrada e de saída são configurados da mesma forma, suas funções de transferência serão iguais. *Desprezamos* a dinâmica dos potenciômetros e obtemos simplesmente a relação entre a tensão de saída e o deslocamento angular de entrada. Na posição central, a tensão de saída é zero. Cinco voltas no sentido de +10 volts ou no sentido de −10 volts produzem uma variação de tensão de 10 volts. Portanto, a função de transferência, $V_i(s)/\theta_i(s)$, dos potenciômetros é obtida dividindo a variação de tensão pelo deslocamento angular:

$$\frac{V_i(s)}{\theta_i(s)} = \frac{10}{10\pi} = \frac{1}{\pi} \tag{2.202}$$

Pré-amplificador; Amplificador de Potência As funções de transferência dos amplificadores são dadas no enunciado do problema. Dois fenômenos são *desconsiderados*. Primeiro, admitimos que a *saturação* nunca é alcançada. Segundo, a dinâmica do pré-amplificador é *desprezada*, uma vez que sua velocidade de resposta é muito maior que a do amplificador de potência. As funções de transferência de ambos os amplificadores foram dadas no enunciado do problema e são a relação da transformada de Laplace da tensão de saída pela transformada de Laplace da tensão de entrada. Portanto, para o pré-amplificador,

$$\frac{V_p(s)}{V_e(s)} = K \tag{2.203}$$

e para o amplificador de potência,

$$\frac{E_a(s)}{V_p(s)} = \frac{100}{s+100} \tag{2.204}$$

Motor e Carga O motor e sua carga são os seguintes. A função de transferência relacionando o deslocamento angular do eixo da armadura e a tensão de armadura é dada na Eq. (2.153). A inércia equivalente, J_m, é

$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{25}{250}\right)^2 = 0{,}02 + 1\frac{1}{100} = 0{,}03 \tag{2.205}$$

onde $J_L = 1$ é a inércia da carga em θ_o. O coeficiente de amortecimento equivalente, D_m, referido à armadura é

$$D_m = D_a + D_L\left(\frac{25}{250}\right)^2 = 0{,}01 + 1\frac{1}{100} = 0{,}02 \tag{2.206}$$

Tabela 2.6 Subsistemas do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute

Subsistema	Entrada	Saída
Potenciômetro de entrada	Rotação angular vista pelo usuário, $\theta_i(t)$	Tensão para o pré-amplificador $v_i(t)$
Pré-amplificador	Tensão a partir dos potenciômetros $v_e(t) = v_i(t) - v_o(t)$	Tensão para o amplificador de potência $v_p(t)$
Amplificador de potência	Tensão do pré-amplificador $v_p(t)$	Tensão para o motor $e_a(t)$
Motor	Tensão do amplificador de potência $e_a(t)$	Rotação angular para a carga, $\theta_o(t)$
Potenciômetro de saída	Rotação angular vista da carga, $\theta_o(t)$	Tensão para o pré-amplificador $v_o(t)$

onde D_L é o coeficiente de amortecimento viscoso referido a θ_o. Do enunciado do problema, $K_t = 0{,}5$ N·m/A, $K_t = 0{,}5$ V·s/rad e a resistência da armadura $R_a = 8$ ohms. Estes valores, juntamente com J_m e D_m, são substituídos na Eq. (2.153), resultando a função de transferência da tensão de armadura para o deslocamento angular, ou seja,

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_aJ_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right]} = \frac{2{,}083}{s(s+1{,}71)} \tag{2.207}$$

Para completar a função de transferência do motor, multiplicamos pela relação de engrenagem para chegar à função de transferência relacionando o deslocamento angular da carga à tensão de armadura:

$$\frac{\theta_o(s)}{E_a(s)} = 0{,}1\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{0{,}2083}{s(s+1{,}71)} \tag{2.208}$$

Os resultados são resumidos no diagrama de blocos e na tabela de parâmetros do diagrama de blocos (Configuração 1) mostrados na contracapa dianteira.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Consultando o diagrama esquemático do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente, calcular a função de transferência de cada subsistema. Use a Configuração 2. Registre seus resultados na tabela dos parâmetros do diagrama de blocos para uso em desafios de estudo de caso nos capítulos subseqüentes.

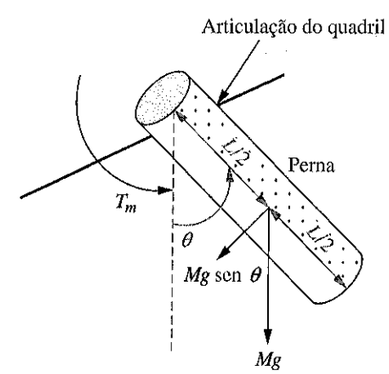
Função de Transferência de uma Perna Humana

Neste estudo de caso, vamos obter a função de transferência de um sistema biológico. O sistema é uma perna humana, que pivota em torno da articulação com o quadril. Neste problema, a componente do peso é não-linear, de modo que o sistema requer linearização antes do cálculo da função de transferência.

Problema A função de transferência de uma perna humana relaciona o deslocamento angular de saída em torno da articulação do fêmur com o quadril a um torque de entrada fornecido pelos músculos da perna. Um modelo simplificado da perna está mostrado na Fig. 2.51. O modelo *admite* um torque muscular aplicado, $T_m(t)$, amortecimento viscoso, D, na articulação do quadril, e inércia, J, em torno da mesma articulação.[15] Além disso, uma componente do peso da perna, Mg, onde M é a massa da perna e g é a aceleração da gravidade, cria um torque não-linear. *Supondo* que a perna possua densidade uniforme, o peso pode ser aplicado em $L/2$, onde L é o comprimento da perna (Milsum, 1996). Faça o seguinte:

a. Calcule o torque não-linear.
b. Obtenha a função de transferência, $\theta(s)/T_m(s)$, para pequenos ângulos de rotação, onde $\theta(s)$ é o deslocamento angular da perna em torno da articulação do fêmur com o quadril.

Fig. 2.51 Modelo cilíndrico de uma perna humana



[15] É conveniente enfatizar que J não é considerado em relação ao centro de massa, como foi suposto anteriormente no cálculo de momento de inércia nos sistemas mecânicos em rotação.

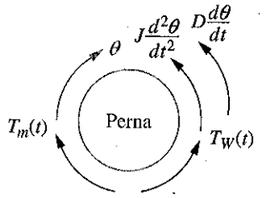


Fig. 2.52 Diagrama de corpo livre do modelo de perna

Solução Primeiro, calculamos o torque devido ao peso. O peso total da perna é Mg atuando verticalmente. A componente do peso na direção da rotação é Mg sen θ. Esta força é aplicada a uma distância $L/2$ da articulação. Portanto, o torque no sentido da rotação, $T_W(t)$, é $Mg(L/2)$sen θ. Em seguida, desenhamos o diagrama de corpo livre da perna, mostrando o torque aplicado, $T_m(t)$, o torque devido ao peso, $T_W(t)$, e os torques resistentes devidos à inércia e ao amortecimento viscoso (ver Fig. 2.52).

Somando os torques, obtemos

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} + Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = T_m(t) \tag{2.209}$$

Linearizamos o sistema em torno do ponto de equilíbrio, $\theta = 0$, a posição vertical da perna. Usando a Eq. (2.182), obtemos

$$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}0 = (\cos 0)\,\delta\theta \tag{2.210}$$

da qual, sen $\theta = \delta\theta$. Por outro lado, $Jd^2\theta/dt^2 = Jd^2\delta\theta/dt^2$ e $Dd\theta/dt = Dd\delta\theta/dt$. Logo, a Eq. (2.209) se torna

$$J\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + D\frac{d\delta\theta}{dt} + Mg\frac{L}{2}\delta\theta = T_m(t) \tag{2.211}$$

Observe que o torque devido ao peso se aproxima de um torque de mola sobre a perna. Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, resulta

$$\left(Js^2 + Ds + Mg\frac{L}{2}\right)\delta\theta(s) = T_m(s) \tag{2.212}$$

da qual se tem a função de transferência

$$\frac{\delta\theta(s)}{T_m(s)} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{D}{J}s + \frac{MgL}{2J}} \tag{2.213}$$

para pequenas excursões em torno do ponto de equilíbrio, $\theta = 0$.

Desafio Apresentamos agora um desafio de estudo de caso para testar seus conhecimentos dos objetivos deste capítulo. Embora o sistema físico seja diferente do de uma perna humana, o problema mostra os mesmos princípios — linearização seguida do cálculo da função de transferência.

Dado o circuito não-linear mostrado na Fig. 2.53, obter a função de transferência relacionando a tensão de saída sobre o resistor não-linear, $V_r(s)$, com a tensão da fonte de entrada, $V(s)$.

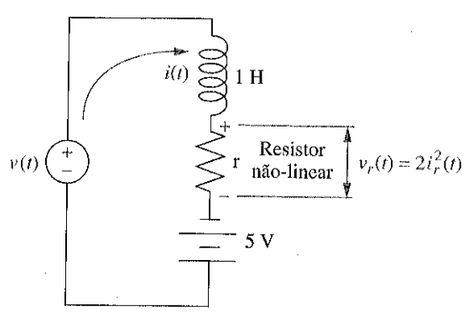


Fig. 2.53 Circuito elétrico não-linear

Sumário

Neste capítulo, discutimos como obter um modelo matemático, chamado *função de transferência*, para sistemas lineares e invariantes no tempo, de natureza elétrica, mecânica e eletromecânica. A função de transferência é definida como $G(s) = C(s)/R(s)$, ou seja, a relação da transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada. Esta relação é algébrica e também se adapta à modelagem de subsistemas interconectados.

Temos consciência de que o mundo físico consiste em mais sistemas do que os que ilustramos neste capítulo. Por exemplo, poderíamos ter aplicado a função de transferência na modelagem de sistemas hidráulicos, pneumáticos, térmicos e até mesmo econômicos. Naturalmente, devemos admitir que estes sistemas sejam lineares, ou possamos elaborar aproximações lineares, para usar essa técnica de modelagem.

Agora que dispomos da função de transferência, podemos calcular sua resposta a uma entrada específica. A resposta dos sistemas será tratada no Cap. 4. Para os que buscam a abordagem no espaço de estados, continuamos nossa discussão de modelagem no Cap. 3, onde usamos o domínio do tempo em vez do domínio de freqüência.

Perguntas de Revisão

1. Que modelos matemáticos permitem fácil interconexão de sistemas físicos?
2. A que classificação de sistemas se pode aplicar melhor a função de transferência?
3. Que transformação converte a solução de equações diferenciais em manipulações algébricas?
4. Defina a função de transferência.
5. Que hipótese é feita com respeito às condições iniciais ao se lidar com funções de transferência?
6. De que são chamadas as equações de sistemas mecânicos escritas para se calcular a função de transferência?
7. Se soubermos a forma geral que as equações de sistemas mecânicos tomam, que etapa evitamos no cálculo da função de transferência?
8. Por que as funções de transferência dos sistemas mecânicos parecem idênticas às funções de transferência de circuitos elétricos?
9. Qual a função executada pelas engrenagens?
10. Quais são as partes componentes das constantes mecânicas da função de transferência de um motor?
11. A função de transferência de um motor relaciona o deslocamento angular do eixo de saída com a tensão aplicada à armadura. Como é possível determinar a função de transferência que relaciona o deslocamento angular da carga e a tensão de armadura?
12. Resuma os passos seguidos para linearizar um sistema não-linear.

Problemas

1. Deduza a transformada de Laplace das seguintes funções do tempo:
   a. $u(t)$
   b. $tu(t)$
   c. sen $\omega t\, u(t)$
   d. cos $\omega t\, u(t)$
2. Usando os pares da transformada de Laplace da Tabela 2.1 e os teoremas da transformada de Laplace da Tabela 2.2, deduza a transformada de Laplace das seguintes funções do tempo:
   a. e^{-at} sen $\omega t\, u(t)$
   b. e^{-at} cos $\omega t\, u(t)$
   c. $t^3u(t)$
3. Repita o Problema 15 no Cap. 1, usando a transformada de Laplace. Admita que as funções forçantes são zero antes de $t = 0^-$.
4. Repita o Problema 16 no Cap. 1, usando a transformada de Laplace. Admita que as funções forçantes são zero antes de $t = 0^-$.

Matemática Simbólica

5. Use o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica para obter a transformada de Laplace das seguintes funções no domínio do tempo:
   a. $f(t) = 5t^2\cos(3t + 45°)$
   b. $f(t) = 5te^{-2t}\operatorname{sen}(4t + 60°)$

Matemática Simbólica

6. Use o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica para obter a transformada de Laplace inversa das seguintes funções no domínio de freqüência:
   a. $G(s) = \dfrac{(s^2 + 3s + 7)(s + 2)}{(s + 3)(s + 4)(s^2 + 2s + 100)}$
   b. $G(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{(s + 8)(s^2 + 8s + 3)(s^2 + 5s + 7)}$
7. Um sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:
   $$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + y = \frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 8x$$
   Obter a expressão da função de transferência do sistema, $Y(s)/X(s)$.

8. Para cada uma das seguintes funções de transferência, escreva a equação diferencial correspondente.

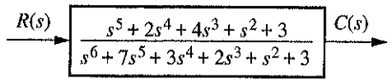
a. $\dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 7}$

b. $\dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{10}{(s + 7)(s + 8)}$

c. $\dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{s + 2}{s^3 + 8s^2 + 9s + 15}$

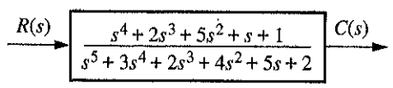
9. Escreva a equação diferencial do sistema mostrado na Fig. P2.1.

Fig. P2.1



10. Escreva a equação diferencial que é matematicamente equivalente ao diagrama de blocos da Fig. P2.2. Admita que $r(t) = 3t^3$.

Fig. P2.2



11. Um sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = 1$$

com as condições iniciais $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$. Mostre um diagrama de blocos do sistema, dando sua função de transferência e todas as entradas e saídas pertinentes. (Sugestão: as condições iniciais se mostrarão como entradas adicionais de um sistema efetivo com condições iniciais nulas.)

MATLAB

12. Use o MATLAB para gerar a função de transferência

$$G(s) = \frac{5(s + 15)(s + 26)(s + 72)}{s(s + 55)(s^2 + 5s + 30)(s + 56)(s^2 + 27s + 52)}$$

nas seguintes formas:

a. Relação de fatores

b. Relação de polinômios

MATLAB

13. Repita o Problema 12 para a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^4 + 25s^3 + 20s^2 + 15s + 42}{s^5 + 13s^4 + 9s^3 + 37s^2 + 35s + 50}$$

MATLAB

14. Use o MATLAB para gerar a expansão em frações parciais da seguinte função:

$$F(s) = \frac{10^4(s + 10)(s + 60)}{s(s + 40)(s + 50)(s^2 + 7s + 100)(s^2 + 6s + 90)}$$

Matemática Simbólica

15. Use o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica para digitar e construir objetos LTI nas formas polinomial e fatorada das seguintes funções no domínio de freqüência:

a. $G(s) = \dfrac{45(s^2 + 37s + 74)(s^3 + 28s^2 + 32s + 16)}{(s + 39)(s + 47)(s^2 + 2s + 100)(s^3 + 27s^2 + 18s + 15)}$

b. $G(s) = \dfrac{56(s + 14)(s^3 + 49s^2 + 62s + 53)}{(s^3 + 81s^2 + 76s + 65)(s^2 + 88s + 33)(s^2 + 56s + 77)}$

16. Obter a função de transferência, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, para cada circuito mostrado na Fig. P2.3.

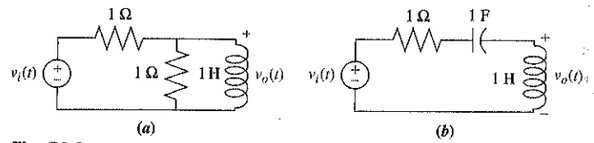


Fig. P2.3

17. Obter a função de transferência, $G(s) = V_L(s)/V(s)$, para cada circuito mostrado na Fig. P2.4.

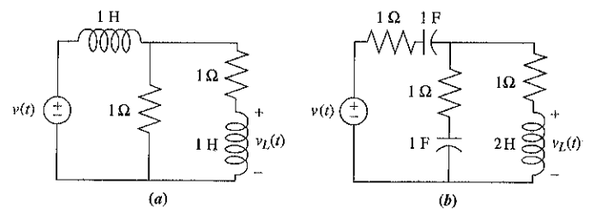


Fig. P2.4

18. Obter a função de transferência, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, para cada circuito mostrado na Fig. P2.5. Resolver o problema usando o método das malhas.

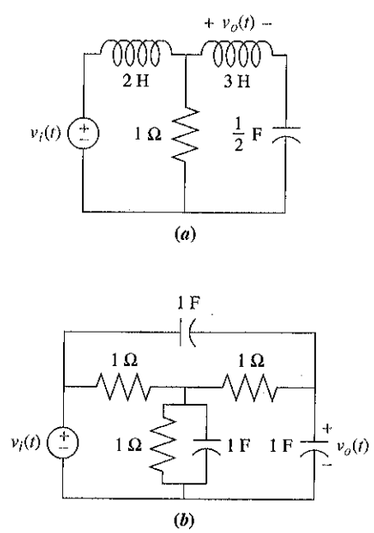


Fig. P2.5

19. Repita o Problema 18 usando o método dos nós.

20. **a.** Escreva, mas não resolva, as equações de malha e de nós para o circuito da Fig. P2.6.

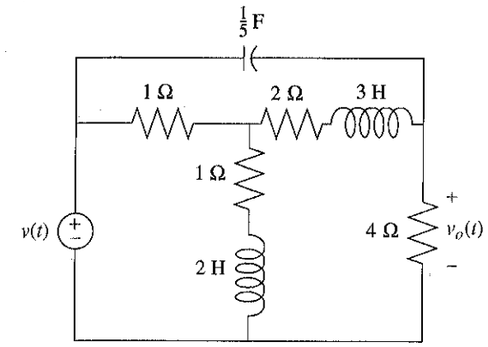


Fig. P2.6

Matemática Simbólica

b. Use o MATLAB, a *Toolbox* de Matemática Simbólica e as equações obtidas em (a) para calcular a função de transferência $G(s) = V_o(s)/V(s)$. Use as equações de malha e as equações de nós e mostre que ambas as escolhas levam à mesma função de transferência.

21. Obter a função de transferência, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, para cada circuito com amplificador operacional mostrado na Fig. P2.7.

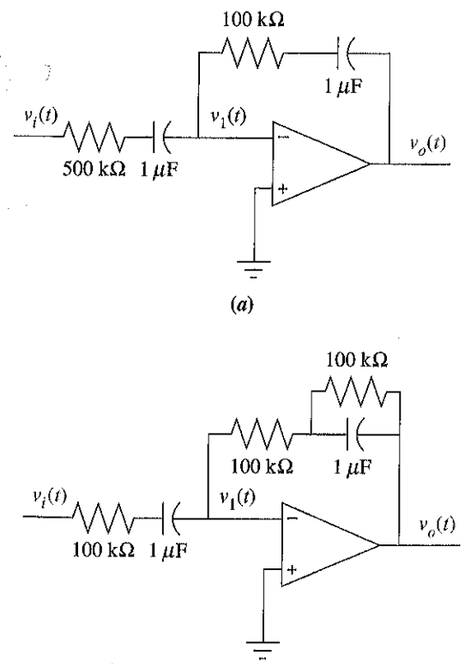


Fig. P2.7

22. Obter a função de transferência, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, para cada circuito com amplificador operacional mostrado na Fig. P2.8.

23. Obter a função de transferência, $G(s) = X_1(s)/F(s)$, para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P2.9.

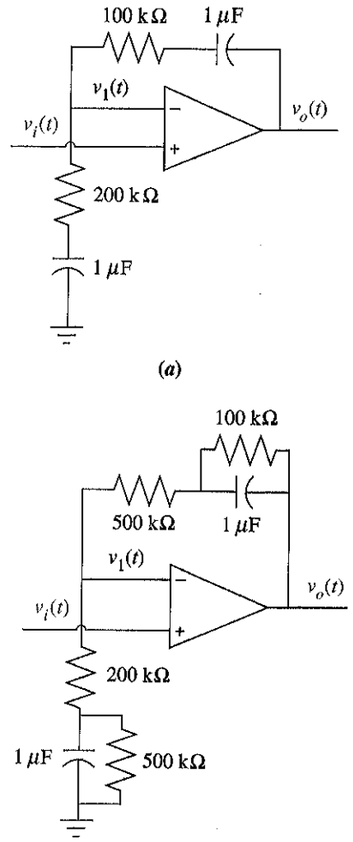


Fig. P2.8

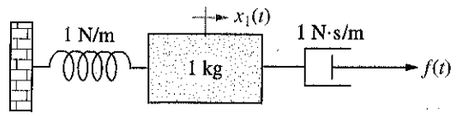


Fig. P2.9

24. Obter a função de transferência, $G(s) = X_2(s)/F(s)$, para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P2.10.

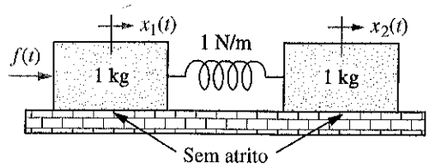


Fig. P2.10

25. Obter a função de transferência, $G(s) = X_2(s)/F(s)$, para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P2.11. (Sugestão: Posicione uma massa nula em $x_2(t)$.)

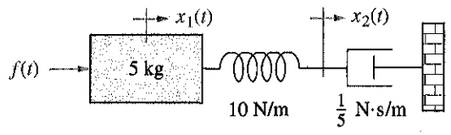


Fig. P2.11

26. Para o sistema da Fig. P2.12, obtenha a função de transferência, $G(s) = X_1(s)/F(s)$.

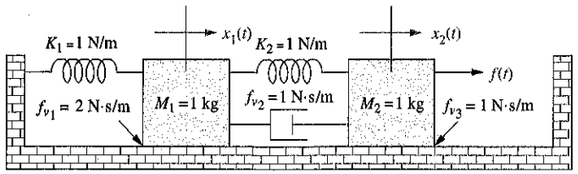


Fig. P2.12

27. Obter a função de transferência, $G(s) = X_3(s)/F(s)$, para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P2.13.

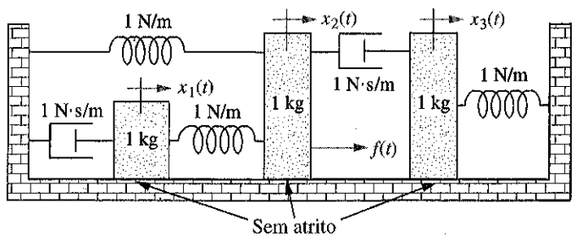


Fig. P2.13

28. Obter a função de transferência, $G(s) = X_3(s)/F(s)$, para cada um dos sistemas mostrados na Fig. P2.14.

29. Escreva, mas não resolva, as equações de movimento para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P2.15.

30. Para cada um dos sistemas mecânicos em rotação mostra dos na Fig. P2.16, escreva, mas não resolva, as equações de movimento.

31. Para o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.17, calcule a função de transferência, $G(s) = \theta_2(s)/T(s)$.

32. Para o sistema mecânico em rotação com engrenagens mostrado na Fig. P2.18, calcule a função de transferência, $G(s) = \theta_3(s)/T(s)$. As engrenagens possuem inércia e atrito, como mostrado.

33. Para o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.19, calcule a função de transferência, $G(s) = \theta_2(s)/T(s)$.

34. Obtenha a função de transferência, $G(s) = \theta_2(s)/T(s)$, para o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.20.

35. Obtenha a função de transferência, $G(s) = \theta_4/T(s)$, para o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.21.

36. Para o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.22, calcule a função de transferência, $G(s) = \theta_L(s)/T(s)$.

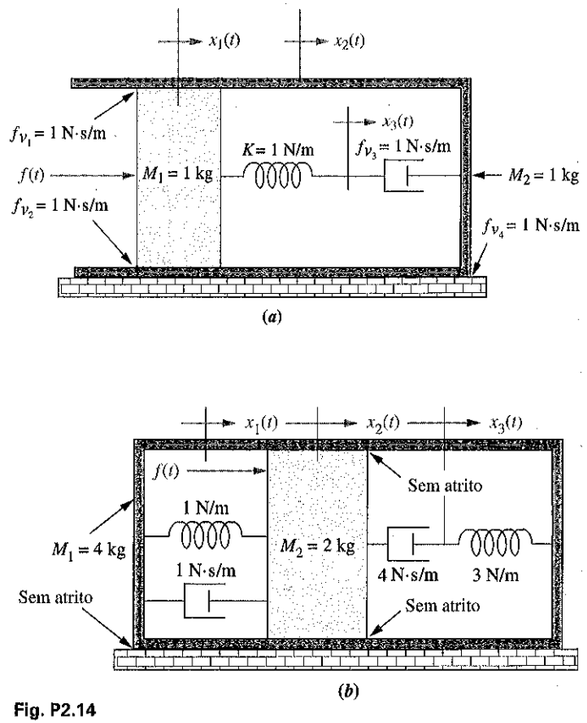


Fig. P2.14

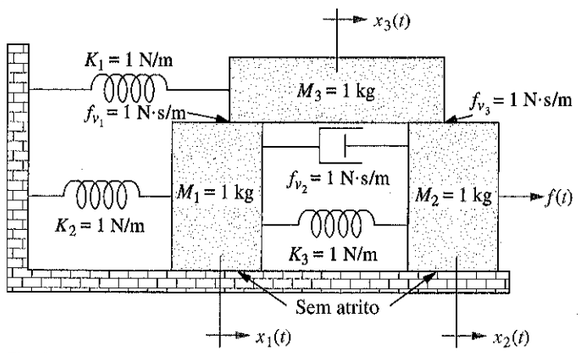


Fig. P2.15

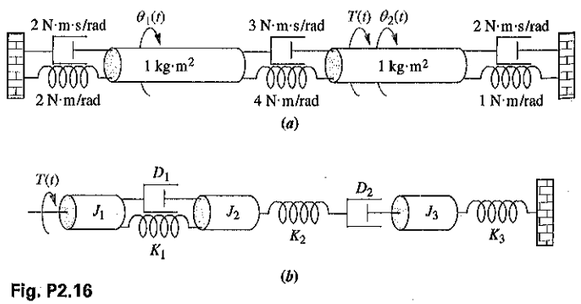


Fig. P2.16

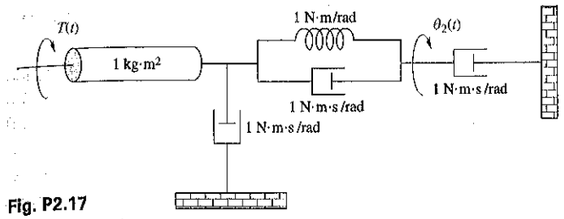


Fig. P2.17

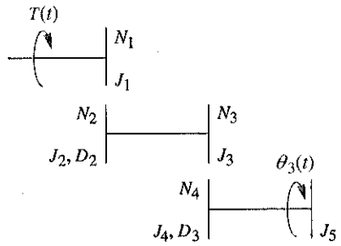


Fig. P2.18

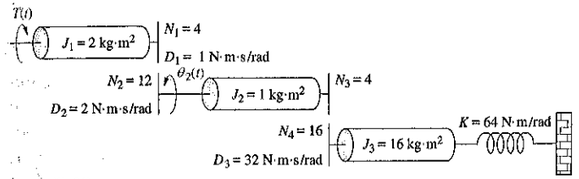


Fig. P2.19

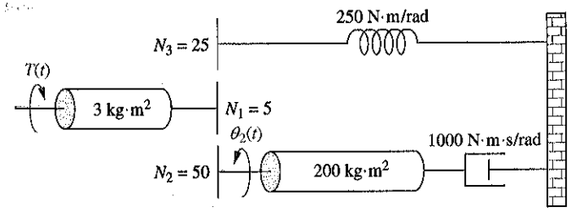


Fig. P2.20

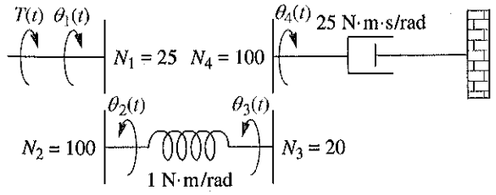


Fig. P2.21

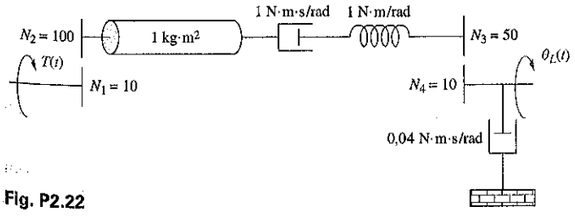


Fig. P2.22

37. Para o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.23, escreva as equações de movimento a partir das quais a função de transferência, $G(s) = \theta_1(s)/T(s)$, pode ser calculada.

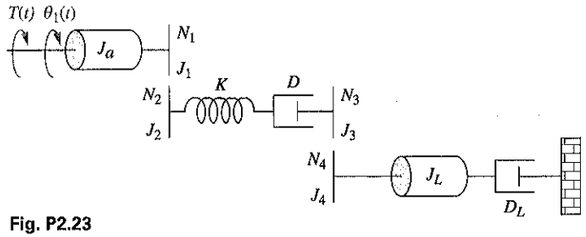


Fig. P2.23

38. Dado o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P2.24, obter a função de transferência, $G(s) = \theta_6(s)/\theta_1(s)$.

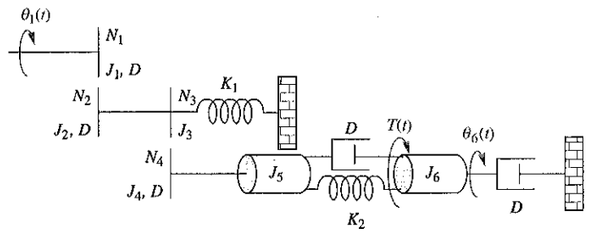


Fig. P2.24

39. No sistema mostrado na Fig. P2.25, a inércia, J, de raio, r, é obrigada a se mover somente sobre o eixo estacionário A. Entre os corpos J e M existe uma força de amortecimento viscoso em translação de valor f_v. Se uma força externa, $f(t)$, for aplicada à massa, obtenha a função de transferência, $G(s) = \theta(s)/F(s)$.

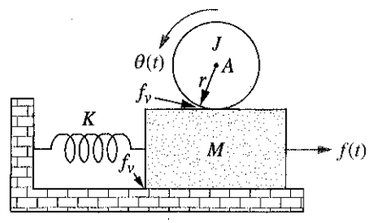


Fig. P2.25

40. Para o sistema misto dotado de rotação e de translação mostrado na Fig. P2.26, obter a função de transferência, $G(s) = X(s)/T(s)$.

41. Dado o sistema combinado de rotação e de translação mostrado na Fig. P2.26, obter a função de transferência, $G(s) = X(s)/T(s)$.

42. Para o motor, a carga e a curva torque-velocidade mostrados na Fig. P2.28, obter a função de transferência, $G(s) = \theta_L(s)/E_a(s)$.

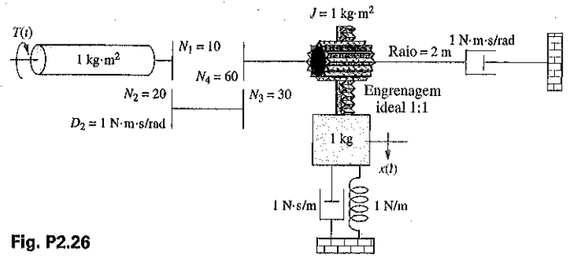


Fig. P2.26

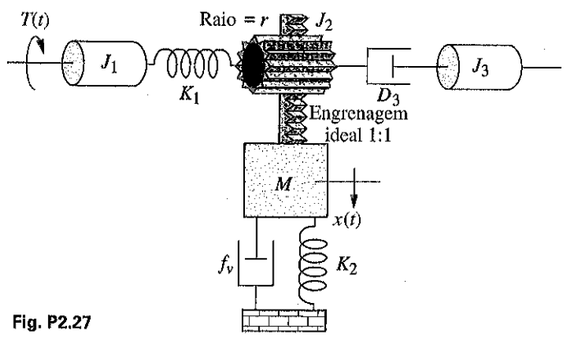
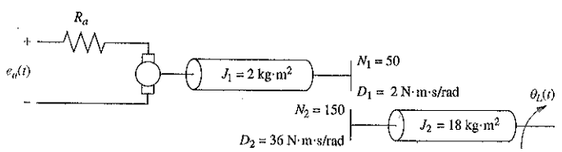


Fig. P2.27



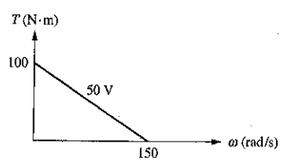


Fig. P2.28

43. O motor cuja característica torque-velocidade está mostrada na Fig. P2.29 aciona a carga mostrada no diagrama. Algumas das engrenagens possuem inércia. Obter a função de transferência, $G(s) = \theta_L(s)/E_a(s)$.

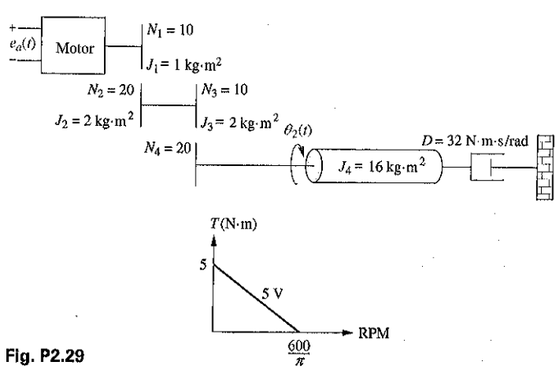


Fig. P2.29

44. Um motor CC fornece 50 N·m de torque a uma velocidade de 500 rad/s quando se aplicam 10 volts na armadura. Ele pára de girar sob essa tensão quando se solicita um torque de 100 N·m. Se a inércia e o amortecimento da armadura forem, respectivamente, 5 kg·m² e 1 N·m·s/rad, obter a função de transferência, $G(s) = \theta_L(s)/E_a(s)$, deste motor quando ele aciona uma carga com inércia de 100 kg·m² através de um trem de engrenagens, como está mostrado na Fig. P2.30.

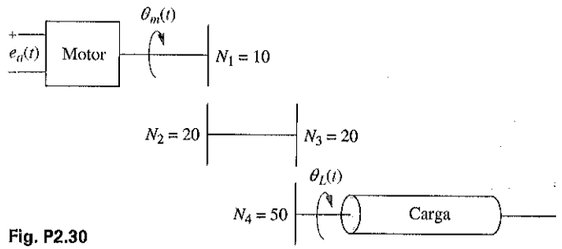


Fig. P2.30

45. Neste capítulo, deduzimos a função de transferência de um motor CC relacionando o deslocamento angular de saída com a tensão de armadura como entrada. Freqüentemente se deseja controlar o torque em vez do deslocamento angular. Deduza a função de transferência do motor que relaciona o torque de saída com a tensão de armadura na entrada.

46. Obtenha a função de transferência, $G(s) = X(s)/E_a(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P2.31.

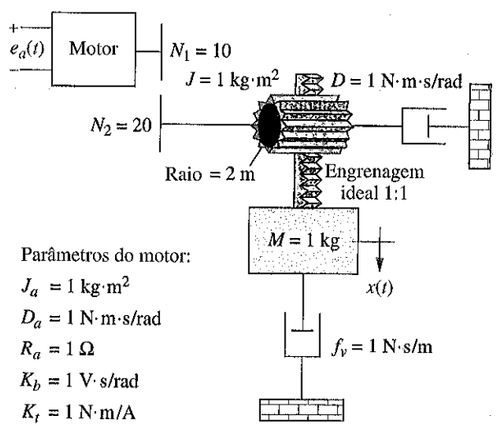


Fig. P2.31

47. Obtenha os análogos série e paralelo para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. 2.20 no texto.

48. Obtenha os análogos série e paralelo para os sistemas mecânicos em rotação na Fig. P2.16(*b*) nos problemas.

49. A saída, *c*, de um sistema se relaciona com a entrada, *r*, por meio de uma reta, $c = 5r + 7$. O sistema é linear?

50. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = f(x)$$

onde $f(x)$ é a entrada e é uma função da saída, x. Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, linearize a equação diferencial para pequenas excursões nas proximidades de

a. $x = 0$

b. $x = \pi$

51. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 31\frac{dx}{dt} + 30x = f(x)$$

onde $f(x)$ é a entrada e é uma função da saída, x. Se $f(x) = e^{-x}$, linearize a equação diferencial para x nas proximidades de 0.

52. Muitos sistemas são *seccionalmente* lineares (lineares por trechos). Isto é, sobre uma *grande* faixa de valores da variável, o sistema pode ser descrito linearmente. Um sistema com saturação de amplificador é um exemplo disto. Dada a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 15\frac{dx}{dt} + 50x = f(x)$$

admita que $f(x)$ se comporta como mostrado na Fig. P2.32. Escreva a equação diferencial para cada uma das seguintes faixas de x:

a. $-\infty < x < -2$

b. $-2 < x < 2$

c. $2 < x < \infty$

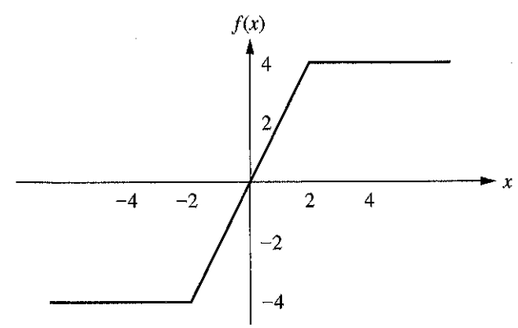


Fig. P2.32

53. Para o sistema mecânico em translação com uma mola não-linear mostrado na Fig. P2.33, obter a função de transferência, $G(s) = X(s)/F(s)$, para pequenas excursões em torno de $f(t) = 1$. A mola é definida por $x_s = 1 - e^{-f_s(t)}$, onde $x_s(t)$ é o deslocamento da mola e $f_s(t)$ é a força da mola.

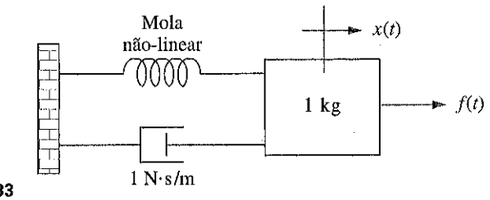


Fig. P2.33

54. Considere o distribuidor de bandejas para restaurantes mostrado na Fig. P2.34, que consiste em uma pilha vertical de bandejas sustentada por uma mola comprimida. À medida que cada uma das bandejas vai sendo removida, a redução de peso sobre o distribuidor faz com que as bandejas restantes sejam elevadas. Admita que a massa do sistema menos a massa da bandeja superior seja M, o atrito viscoso entre o êmbolo e as paredes laterais do cilindro seja f_v, a constante de mola seja K, e o peso de uma única bandeja seja W_D. Obter a função de transferência, $Y(s)/F(s)$, onde $F(s)$ é a redução de força em degrau sentida pelo sistema quando a bandeja superior da pilha é removida e $Y(s)$ é o deslocamento vertical do distribuidor no sentido para cima.

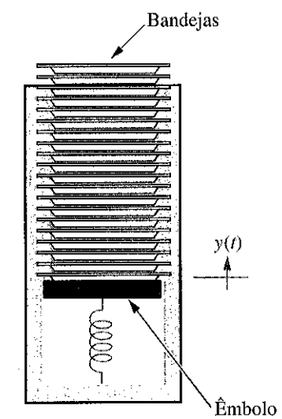


Fig. P2.34

Problema Progressivo de Análise e Projeto

55. Pantógrafo para ferrovia de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 discute o controle ativo de um mecanismo de pantógrafo para sistemas ferroviários de alta velocidade. O diagrama para o acoplamento do pantógrafo e da catenária está mostrado na Fig. P2.35(*a*). Admita o modelo simplificado mostrado na Fig. P2.35(*b*), onde a catenária é representada pela mola, $K_{méd}$ (O'Connor, 1997).

a. Obtenha a função de transferência, $G_1(s) = Y_{cat}(s)/F_{cima}(s)$, onde $y_{cat}(t)$ é o deslocamento da catenária e $f_{cima}(t)$ é a força para cima aplicada ao pantógrafo sob controle ativo.

b. Obtenha a função de transferência, $G_2(s) = Y_h(s)/F_{cima}(s)$, onde $y_h(t)$ é o deslocamento da parte superior do pantógrafo.

c. Obtenha a função de transferência, $G(s) = (Y_h(s) - Y_{cat}(s))/F_{cima}(s)$.

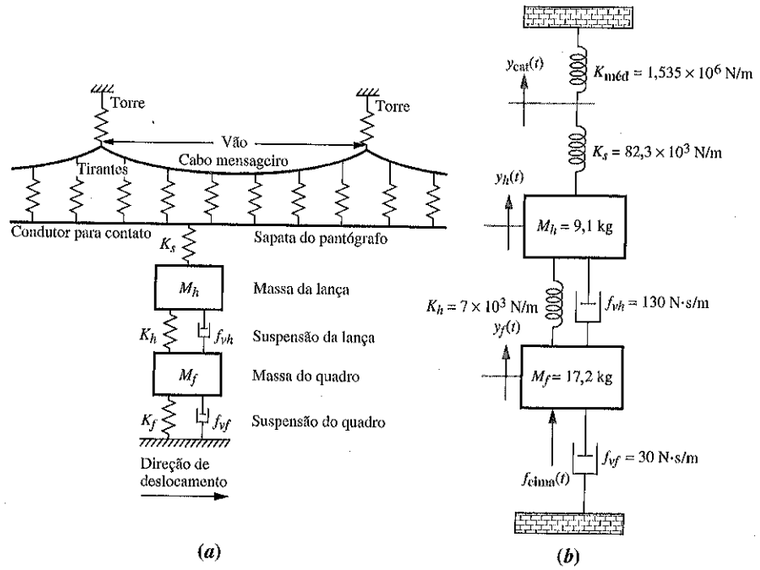


Fig. P2.35 a. Acoplamento do pantógrafo com a catenária; **b.** representação simplificada da força de controle ativo

Bibliografia

Aggarwal, J. K. *Notes on Nonlinear Systems.* Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.

Cannon, R. H., Jr. *Dynamics of Physical Systems.* McGraw-Hill, New York, 1967.

Carlson, L. E., and Griggs, G. E. *Aluminum Catenary System Quarterly Report.* Technical Report Contract Number DOT-FR-9154, U.S. Department of Transportation, 1980.

Cochin, I. *Analysis and Design of Dynamic Systems.* Harper and Row, New York, 1980.

Cook, P. A. *Nonlinear Dynamical Systems.* Prentice Hall, United Kingdom, 1986.

Davis, S. A., and Ledgerwood, B. K. *Electromechanical Components for Servomechanisms.* McGraw-Hill, New York, 1961.

Doebelin, E. O. *Measurement Systems Application and Design.* McGraw-Hill, New York, 1983.

Dorf, R. *Introduction to Electric Circuits.* 2nd ed. Wiley, New York, 1993.

D'Souza, A. *Design of Control Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Elkins, J. A. *A Method for Predicting the Dynamic Response of a Pantograph Running at Constant Speed under a Finite Length of Overhead Equipment.* Technical Report TN DA36, British Railways, 1976.

Franklin, G. F.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1986.

Hsu, J. C., and Meyer, A. U. *Modern Control Principles and Applications.* McGraw-Hill, New York, 1968.

Kailath, T. *Linear Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

Kermurjian, A. From the Moon Rover to the Mars Rover. *The Planetary Report,* July/August 1990, pp. 4–11.

Kuo, F. F. *Network Analysis and Synthesis.* Wiley, New York, 1966.

Lago, G., and Benningfield, L. M. *Control System Theory.* Ronald Press, New York, 1962.

Mablekos, V. E. *Electric Machine Theory for Power Engineers.* Harper & Row, Cambridge, MA, 1980.

Milsum, J. H. *Biological Control Systems Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1966.

Minorsky, N. *Theory of Nonlinear Control Systems.* McGraw-Hill, New York, 1969.

Nilsson, J. W., and Riedel, S. A. *Electric Circuits.* 5th ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1996.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

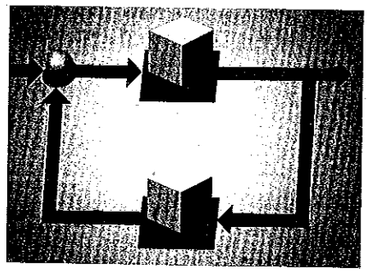
Ogata, K. *Modern Control Engineering.* 2nd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

Raven, F. H. *Automatic Control Engineering,* 5th ed. McGraw-Hill, New York, 1995.

Van Valkenburg, M. E. *Network Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

Vidyasagar, M. *Nonlinear Systems Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

CAPÍTULO 3



Modelagem no Domínio do Tempo

Espaço de Estados

Este capítulo trata somente de métodos no espaço de estados

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como obter um modelo matemático, chamado *representação no espaço de estados*, de sistemas lineares e invariantes no tempo.
- Como transformar modelos sob a forma de função de transferência em modelos no espaço de estados.
- Como linearizar uma representação no espaço de estados.

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrada na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de obter a representação no espaço de estados de cada subsistema.
- Dada uma descrição da forma como um medicamento flui através de um ser humano, você deverá ser capaz de obter a representação no espaço de estados para determinar as concentrações de medicamentos em compartimentos especificados do corpo humano. Você deverá ser capaz de aplicar os mesmos conceitos a um lençol aqüífero para determinar o nível de água do lençol.

3.1 Introdução

Para a análise e o projeto de sistemas de controle com retroação há duas abordagens. A primeira, que começamos a estudar no Cap. 2, é conhecida como *técnica clássica*, ou *no domínio de freqüência*. Esta abordagem é baseada na transformação de uma equação diferencial em uma função de transferência, gerando assim um modelo matemático do sistema que relaciona *algebricamente* uma representação da saída a uma representação da entrada. A substituição de uma equação diferencial por uma equação algébrica não somente simplifica a representação de subsistemas individuais, mas também simplifica a modelagem de subsistemas interconectados.

A principal desvantagem da abordagem clássica é sua aplicabilidade limitada: só pode ser usada em sistemas lineares e invariantes no tempo ou em sistemas que possam ser aproximados como tal.

A maior vantagem das técnicas no domínio de freqüência é que elas fornecem rapidamente informação sobre a estabilidade e sobre a resposta transitória. Portanto, podemos ver imediatamente o efeito produzido pela alteração de parâmetros do sistema até obter um projeto aceitável.

Com o advento da exploração espacial, os requisitos dos sistemas de controle aumentaram de escopo. A modelagem de sistemas usando equações diferenciais lineares e invariantes no tempo e as funções de transferência subseqüentes se tornaram inadequadas. A abordagem no *espaço de estados* (também referida como *abordagem moderna* ou no *domínio do tempo*) constitui um método unificado de modelagem, análise e projeto de uma gama ampla de sistemas. Por exemplo, a abordagem no espaço de estados pode ser usada para representar sistemas não-lineares dotados de folga, saturação e zona morta. Além disso, ela pode manipular, de forma adequada, sistemas com condições iniciais não-nulas. Os sistemas variantes no tempo (por exemplo, mísseis com níveis de fluido variável; a força de sustentação em um avião que voa ao longo de uma ampla faixa de altitudes) podem ser representados no espaço de estados. Muitos sistemas não têm apenas uma única entrada e uma única saída. Sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (por exemplo, um veículo submetido a uma entrada de direção e a uma entrada de velocidade e produzindo uma saída em direção e uma saída em velocidade) podem ser representados no espaço de estados sob forma compacta por meio de um modelo semelhante em forma e complexidade ao utilizado para sistemas com uma única entrada e uma única saída. A abordagem no domínio do tempo pode ser usada para representar sistemas com um computador digital na malha ou para modelar sistemas para simulação digital. Com o sistema simulado, pode-se obter a resposta variando os parâmetros do sistema — uma ferramenta de projeto muito importante. A abordagem no espaço de estados também é atraente devido à disponibilidade de inúmeros pacotes de software para computadores pessoais que utilizam modelos no espaço de estados.

A abordagem no domínio do tempo também pode ser usada para a mesma classe de sistemas modelados através das técnicas clássicas. Este modelo alternativo fornece ao projetista de sistemas de controle uma outra perspectiva para desenvolver projetos. Embora a abordagem no espaço de estados possa ser aplicada a uma ampla gama de sistemas, ela não é tão intuitiva quanto a abordagem clássica. O projetista deve se envolver com muitos cálculos antes que a interpretação física do modelo se torne aparente, enquanto, no controle clássico, uns poucos cálculos rápidos ou uma representação gráfica dos dados fornece a interpretação física.

Neste livro, a cobertura das técnicas no espaço de estados deve ser vista como uma introdução ao assunto, como um trampolim para estudos avançados e como uma abordagem alternativa das técnicas no domínio de freqüência. Limitaremos a abordagem no espaço de estados aos sistemas lineares, invariantes no tempo ou aos sistemas que possam ser linearizados pelos métodos do Cap. 2. O estudo de outras classes de sistemas está além do escopo deste livro. Como a análise e projeto no espaço de estados depende de matrizes e das operações com matrizes, você deve rever este assunto no Apêndice G, localizado no CD-ROM que acompanha este livro, antes de prosseguir.

3.2 Algumas Observações

Continuamos agora com o objetivo de estabelecer a abordagem no espaço de estados como um método alternativo para representar sistemas físicos. Esta seção estabelece o procedimento para a definição formal da representação no espaço de estados fazendo algumas observações a respeito dos sistemas e de suas variáveis. Na discussão a seguir, algumas partes do desenvolvimento foram colocadas em notas de rodapé para evitar obscurecer os aspectos principais com um excesso de equações e para assegurar que o conceito esteja claro. Embora usemos dois circuitos elétricos para ilustrar os conceitos, poderíamos facilmente ter usado um sistema mecânico ou qualquer outro sistema físico.

Mostramos agora que, para sistemas com muitas variáveis, como tensões em indutores, tensões em resistores e cargas em capacitores, necessitamos usar equações diferenciais para calcular apenas um subconjunto selecionado de variáveis do sistema porque todas as outras variáveis podem ser calculadas algebricamente a partir das variáveis do subconjunto. Nossos exemplos adotam a seguinte abordagem:

1. Selecionamos um *subconjunto* particular de todas as variáveis do sistema e chamamos as variáveis deste subconjunto de *variáveis de estado*.
2. Para um sistema de ordem n, escrevemos n *equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas* em termos das variáveis de estado.
3. Se conhecermos a condição inicial de todas as variáveis de estado em t_0 bem como a entrada do sistema para $t \geq t_0$, poderemos resolver as equações diferenciais simultâneas em função das variáveis de estado para $t \geq t_0$.

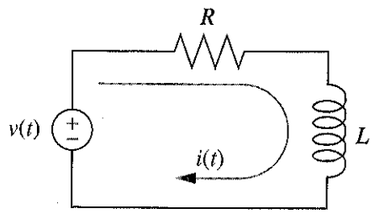


Fig. 3.1 Circuito *RL*

4. Combinamos *algebricamente* as variáveis de estado com a entrada e obtemos todas as outras variáveis do sistema para $t \geq t_0$. Chamamos esta equação algébrica de *equação de saída.*
5. Consideramos as equações de estado e as equações de saída uma representação viável do sistema. Chamamos esta representação de *representação do sistema no espaço de estados.*

Sigamos agora estes passos através de um exemplo. Considere o circuito *RL*, com uma corrente inicial $i(0)$, mostrado na Fig. 3.1.

1. Selecionamos a corrente, $i(t)$, para a qual escreveremos e resolvemos uma equação diferencial usando a transformada de Laplace.
2. Escrevemos a equação de malha,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v(t) \tag{3.1}$$

3. Aplicando a transformada de Laplace, usando o Item 7 da Tabela 2.2 e incluindo as condições iniciais, tem-se

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = V(s) \tag{3.2}$$

Admitindo que a entrada, $v(t)$, seja um degrau unitário, $u(t)$, cuja transformada de Laplace é $V(s) = 1/s$, calculamos $I(s)$ e obtemos

$$I(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right) + \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}} \tag{3.3}$$

de onde resulta

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) + i(0)e^{-(R/L)t} \tag{3.4}$$

A função $i(t)$ é um subconjunto de todas as variáveis possíveis do circuito que somos capazes de calcular com base na Eq. (3.4) se soubermos a condição inicial, $i(0)$, e a entrada, $v(t)$. Assim, $i(t)$ é uma variável de estado e a equação diferencial (3.1) é uma *equação de estado.*

4. Podemos agora resolver *algebricamente* todas as outras variáveis do circuito em termos de $i(t)$ e da tensão aplicada, $v(t)$. Por exemplo, a tensão sobre o resistor é

$$v_R(t) = Ri(t) \tag{3.5}$$

A tensão sobre o indutor é

$$v_L(t) = v(t) - Ri(t) \tag{3.6}$$ [1]

A derivada da corrente é

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}[v(t) - Ri(t)] \tag{3.7}$$ [2]

Assim, conhecendo-se a variável de estado, $i(t)$, e a entrada, $v(t)$, pode-se obter o valor ou *estado* de qualquer variável do circuito em qualquer instante de tempo, $t \geq t_0$. Portanto, as Eqs. (3.5) a (3.7), são *equações de saída.*

5. Como as variáveis de interesse estão completamente descritas pela Eq. (3.1) e pelas Eqs. (3.5) a (3.7), dizemos que a equação de estado (3.1) combinada com as equações de saída (3.5) a (3.7) formam uma representação viável do circuito, a qual dizemos ser uma *representação no espaço de estados.*

[1]Uma vez que $v_L(t) = v(t) - v_R(t) = v(t) - Ri(t)$.

[2]Uma vez que $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v_L(t) = \frac{1}{L}[v(t) - Ri(t)]$.

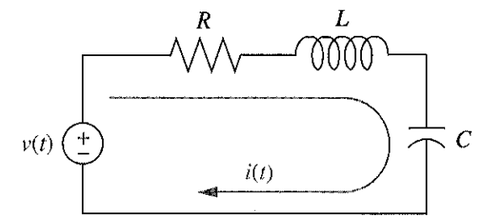


Fig. 3.2 Circuito *RLC*

A Eq. (3.1), que descreve a dinâmica do circuito, não é única. Esta equação poderia ter sido escrita em termos de qualquer outra variável do circuito. Por exemplo, substituindo $i = v_R/R$ na Eq. (3.1), resulta

$$\frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt} + v_R = v(t) \tag{3.8}$$

que pode ser resolvida conhecendo-se a condição inicial $v_R(0) = Ri(0)$ e conhecendo-se $v(t)$. Neste caso, a variável de estado é $v_R(t)$. De modo semelhante, todas as outras variáveis do circuito podem ser escritas agora em termos da variável de estado, $v_R(t)$, e da entrada, $v(t)$. Estendamos agora nossas observações a um sistema de segunda ordem, como o mostrado na Fig. 3.2.

1. Como o circuito é de segunda ordem, são necessárias duas equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, para resolver as duas variáveis de estado. Selecionamos $i(t)$ e $q(t)$, a carga do capacitor, como as duas variáveis de estado.
2. Escrevendo a equação de malha, resulta

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = v(t) \tag{3.9}$$

Expressando o resultado em função da carga, com o uso de $i(t) = dq/dt$, obtemos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t) \tag{3.10}$$

Mas uma equação diferencial de ordem n pode ser convertida em n equações diferenciais de primeira ordem, cada uma delas com a seguinte forma

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + b_i f(t) \tag{3.11}$$

onde cada x_i é uma variável de estado e os coeficientes a_{ij} e b_i são constantes nos sistemas lineares e invariantes no tempo. Dizemos que o membro da direita da Eq. (3.11) é uma *combinação linear* das variáveis de estado e da entrada, $f(t)$.

Podemos converter a Eq. (3.10) em duas equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, em termos de $i(t)$ e $q(t)$. A primeira equação pode ser $dq/dt = i$. A segunda equação pode ser formada substituindo $\int idt = q$ na Eq. (3.9) e resolvendo para di/dt. Resumindo as duas equações resultantes, temos

$$\frac{dq}{dt} = i \tag{3.12a}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t) \tag{3.12b}$$

3. Estas são as equações de estado e podem ser resolvidas simultaneamente para obter as variáveis de estado, $q(t)$ e $i(t)$, usando a transformada de Laplace e os métodos do Cap. 2, se conhecermos as condições iniciais para $q(t)$ e $i(t)$ e a entrada, $v(t)$.
4. Com base nessas duas equações, podemos calcular todas as outras variáveis do circuito. Por exemplo, a tensão sobre o indutor pode ser escrita em termos das variáveis de estado e da entrada como

$$v_L(t) = -\frac{1}{C}q(t) - Ri(t) + v(t) \tag{3.13}$$ [3]

A Eq. (3.13) é uma *equação de saída*; dizemos que $v_L(t)$ é uma *combinação linear* das variáveis de estado, $q(t)$ e $i(t)$, e da entrada, $v(t)$.

[3]Como $v_L(t) = L(di/dt) = -(1/C)\,q - Ri + v(t)$, onde di/dt pode ser obtido da Eq. (3.9) e $\int idt = q$.

5. As equações de estado (3.12) combinadas e a equação de saída (3.13) constituem uma representação viável do circuito, à qual chamamos de uma *representação no espaço de estados.*

Uma outra escolha de duas variáveis de estado pode ser feita, por exemplo, com $v_R(t)$ e $v_C(t)$, tensão no resistor e no capacitor, respectivamente. O sistema de equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, resultante será:

$$\frac{dv_R}{dt} = -\frac{R}{L}v_R - \frac{R}{L}v_C + \frac{R}{L}v(t) \qquad (3.14a)^4$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{RC}v_R \qquad (3.14b)$$

Novamente, estas equações diferenciais podem ser resolvidas para se obter as variáveis de estado se forem conhecidas as condições iniciais juntamente com a entrada $v(t)$. Além disso, todas as outras variáveis do circuito podem ser calculadas como combinação linear dessas variáveis de estado.

Há alguma restrição na escolha das variáveis de estado? Sim! A restrição é que nenhuma das variáveis de estado possa ser escrita como uma combinação linear das outras variáveis de estado. Por exemplo, se $v_R(t)$ for escolhida como variável de estado, então $i(t)$ não pode ser escolhida, porque $v_R(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $i(t)$, ou seja, $v_R(t) = Ri(t)$. Nestas circunstâncias, dizemos que as variáveis de estado são *linearmente dependentes.* As variáveis de estado devem ser *linearmente independentes*; isto é, nenhuma das variáveis de estado pode ser escrita como combinação linear das outras variáveis de estado, ou não teríamos informação suficiente para resolver as outras variáveis do sistema e teríamos até mesmo alguma dificuldade em escrever as próprias equações simultâneas.

As equações de estado e de saída podem ser escritas na forma matricial se o sistema for linear. Assim, as equações de estado, Eqs. (3.12), podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \qquad (3.15)$$

onde

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} dq/dt \\ di/dt \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}; \quad u = v(t)$$

A equação de saída, Eq. (3.13), pode ser escrita como

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \qquad (3.16)$$

onde

$$y = v_L(t); \quad \mathbf{C} = [-1/C \quad -R]; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \quad D = 1; \quad u = v(t)$$

Chamamos a combinação das Eqs. (3.15) e (3.16) de uma *representação no espaço de estados* do circuito da Fig. 3.2. Portanto, uma representação no espaço de estados consiste (1) nas equações diferenciais de primeira ordem, a partir das quais se pode obter a solução das variáveis de estado e (2) na equação algébrica de saída a partir da qual se pode obter a solução para as outras variáveis do sistema. A representação no espaço de estados não é única, uma vez que uma outra escolha de variáveis de estado conduz a uma representação diferente do mesmo sistema.

Nesta seção usamos dois circuitos elétricos para demonstrar alguns princípios que constituem os fundamentos da representação no espaço de estados. As representações desenvolvidas nesta seção foram de sistemas com uma única entrada e uma única saída, nos quais y, D e u nas Eqs. (3.15) e (3.16) são grandezas escalares. Em geral, os sistemas possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas. Nestes casos, y e u se transformam em grandezas na forma de vetor e D se torna uma matriz. Na Seção 3.3, iremos generalizar a representação para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas e resumir o conceito de representação no espaço de estados.

3.3 A Representação Geral no Espaço de Estados

Agora que representamos um circuito físico no espaço de estados e temos uma boa idéia sobre a terminologia e sobre o conceito, resumamos e generalizemos a representação por meio de equações diferenciais lineares. Primeiramente vamos formalizar algumas das definições com as quais nos deparamos na última seção.

[4]Como $v_R(t) = i(t)R$ e $v_C(t) = (1/C)\int i dt$, derivando $v_R(t)$ resulta $dv_R/dt = R(di/dt) = (R/L)v_L = (R/L)[v(t) - V_R - V_C]$, e derivando $v_C(t)$ vem $dv_C/dt = (1/C)i = (1/RC)v_R$.

Combinação linear: Uma combinação linear de n variáveis, x_i, para $i = 1$ a n, é dada pela seguinte soma, S:

$$S = K_n x_n + K_{n-1}x_{n-1} + \cdots + K_1 x_1 \qquad (3.17)$$

onde cada Ki é uma constante. *Independência linear:* Diz-se que um conjunto de variáveis é linearmente independente se nenhuma das variáveis puder ser escrita como uma combinação linear das outras. Por exemplo, dados x_1, x_2 e x_3, se $x_2 = 5x_1 + 6x_3$, então as variáveis não são linearmente independentes, uma vez que uma delas pode ser escrita como combinação linear das outras duas. Agora, o que deve ser verdade para que uma variável não possa ser escrita como combinação linear das outras variáveis? Considere o exemplo $K_2x_2 = K_1x_1 + K_3x_3$. Se nenhum $x_i = 0$, então qualquer x_i pode ser escrito como combinação linear das outras variáveis, a menos que todos $K_i = 0$. Formalmente, então, diz-se que as variáveis x_i, para $i = 1$ a n, são linearmente independentes se sua combinação linear, S, for igual a zero somente se todos os $Ki = 0$ e nenhum $x_i = 0$.

Variável de sistema: Qualquer variável que responda a uma entrada ou a condições iniciais em um sistema.

Variáveis de estado: O menor conjunto linearmente independente de variáveis de sistema tal que os valores dos membros do conjunto no instante t_0, juntamente com as funções forçantes conhecidas, determinam completamente o valor de todas as variáveis do sistema para todos os instantes de tempo $t \geqslant t_0$.

Vetor de estado: Um vetor cujos elementos são as variáveis de estado.

Espaço de estados: O espaço n-dimensional cujos eixos são as variáveis de estado. Este é um termo novo e está ilustrado na Fig. 3.3, onde se admitiu que as variáveis de estado são uma tensão em resistor, v_R, e uma tensão em capacitor, v_C. Estas variáveis formam os eixos do *espaço de estados.* Uma trajetória pode ser imaginada como sendo mapeada pelo vetor, $\mathbf{x}(t)$, para uma faixa de valores de t. Está mostrado, também, o vetor de estado no instante particular $t = 4$.

Equações de estado: Um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, com n variáveis, onde as n variáveis a serem resolvidas são as variáveis de estado.

Equação de saída: A equação algébrica que exprime as variáveis de saída de um sistema como combinações lineares das variáveis de estado e das entradas.

Agora que as definições foram estabelecidas formalmente, definimos a representação de um sistema no espaço de estados. Um sistema é representado no espaço de estados pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (3.19)$$

para $t \geqslant t_0$ e as condições iniciais, $\mathbf{x}(t_0)$, onde

$\mathbf{x}$ = vetor de estado
$\dot{\mathbf{x}}$ = derivada do vetor de estado em relação ao tempo
$\mathbf{y}$ = vetor resposta
$\mathbf{u}$ = vetor de entrada ou de controle
$\mathbf{A}$ = matriz de sistema
$\mathbf{B}$ = matriz de entrada
$\mathbf{C}$ = matriz de saída
$\mathbf{D}$ = matriz de ação avante

A Eq. (3.18) é chamada *equação de estado*, e o vetor $\mathbf{x}$, o *vetor de estado*, contém as variáveis de estado. A Eq. (3.18) pode ser resolvida para as equações de estado, o que será mostrado no Cap. 4. A Eq. (3.19) é chamada *equa-*

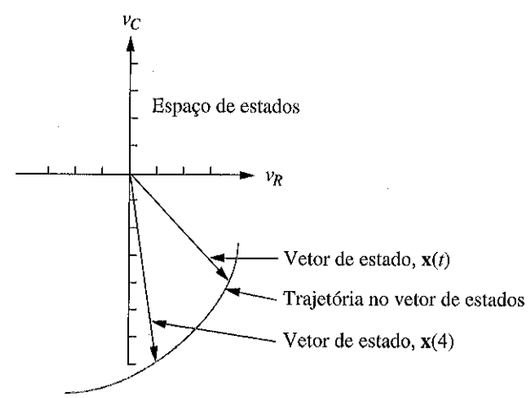


Fig. 3.3. Representação gráfica do espaço de estados e de um vetor de estado

ção de saída. Esta equação é usada para calcular quaisquer outras variáveis do sistema. Esta representação fornece o conhecimento completo de todas as variáveis do sistema em qualquer instante de tempo $t \geq t_0$.

Como exemplo, para um sistema de segunda ordem, linear, invariante no tempo, com uma entrada $v(t)$, as equações de estado poderiam ter a seguinte forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1v(t) \tag{3.20a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2v(t) \tag{3.20b}$$

onde x_1 e x_2 são as variáveis de estado. Se houver uma única saída, a equação de saída poderá ter a seguinte forma:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + d_1v(t) \tag{3.21}$$

A escolha de variáveis de estado para um dado sistema não é única. O requisito a ser atendido ao se escolherem as variáveis de estado é que elas sejam linearmente independentes e que se escolha um número mínimo.

3.4 Aplicando a Representação no Espaço de Estados

Nesta seção, vamos aplicar a formulação do espaço de estados à representação de sistemas físicos mais complicados. O primeiro passo para representar um sistema consiste em selecionar o vetor de estado, que deve ser escolhido de acordo com as seguintes considerações:

1. Devemos selecionar um número mínimo de variáveis de estado como componentes do vetor de estado. Este número mínimo de variáveis de estado é suficiente para descrever completamente o estado do sistema.
2. Os componentes do vetor de estado (isto é, este número mínimo de variáveis de estado) devem ser linearmente independentes.

Façamos uma revisão e esclareçamos estas declarações.

Variáveis de Estado Linearmente Independentes

Os componentes do vetor de estado devem ser linearmente independentes. Por exemplo, seguindo a definição de independência linear da Seção 3.3, se x_1, x_2 e x_3 forem escolhidas como variáveis de estado, mas $x_3 = 5x_1 + 4x_2$, então x_3 não é linearmente independente de x_1 e de x_2, uma vez que o conhecimento dos valores de x_1 e de x_2 produz o conhecimento do valor de x_3. Variáveis relacionadas por derivada são linearmente independentes. Por exemplo, a tensão em um indutor, v_L, é linearmente independente da corrente, i_L, através do indutor, uma vez que $v_L = Ldi_L/dt$. Assim, v_L não pode ser calculada como uma combinação linear da corrente, i_L.

Número Mínimo de Variáveis de Estado

Como saber qual o número mínimo de variáveis de estado a selecionar? Geralmente, o número mínimo necessário é igual à ordem da equação diferencial que descreve o sistema. Por exemplo, se o sistema for descrito por uma equação diferencial de terceira ordem, serão necessárias três equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, juntamente com três variáveis de estado. Segundo a perspectiva da função de transferência, a ordem da equação diferencial é a ordem do denominador da função de transferência depois do cancelamento dos fatores comuns ao numerador e ao denominador.

Na maioria dos casos, uma outra forma de determinar o número de variáveis de estado é contar o número de elementos armazenadores de energia independentes existentes no sistema.[5] O número destes elementos armazenadores de energia é igual à ordem da equação diferencial e ao número das variáveis de estado. Na Fig. 3.2 há dois elementos armazenadores de energia, o capacitor e o indutor. Por conseguinte, são necessárias duas variáveis de estado e duas equações de estado para o sistema.

Se for selecionado um número muito pequeno de variáveis de estado, pode ser impossível escrever equações de saída particulares, uma vez que algumas variáveis de sistema não poderão ser escritas como combinação linear de um número reduzido de variáveis de estado. Em muitos casos, não se poderá nem mesmo terminar de escrever as equações de estado, uma vez que as derivadas das variáveis de estado não podem ser expressas como combinações lineares do número reduzido de variáveis de estado.

Se você selecionar um número mínimo de variáveis de estado mas que não sejam linearmente independentes, no melhor dos casos você não conseguirá calcular todas as outras variáveis do sistema. No pior caso, não conseguirá terminar de escrever as equações de estado.

[5]Algumas vezes não é evidente, em um diagrama esquemático, o número de elementos armazenadores de energia independentes existentes. É possível que seja selecionado um número de elementos armazenadores de energia maior que o mínimo, levando a um vetor de estado cujo número de componentes é maior que o mínimo necessário e que as variáveis não sejam linearmente independentes. A escolha de elementos armazenadores de energia adicionais e dependentes acarreta uma matriz de sistema mais complexa e de maior ordem que as necessárias à solução das equações de estado.

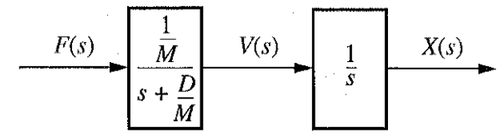


Fig. 3.4 Diagrama de blocos de um sistema massa e amortecedor

Freqüentemente o vetor de estado inclui mais que o número mínimo necessário de variáveis de estado. Há dois casos possíveis. Quase sempre, as variáveis de estado escolhidas são variáveis físicas do sistema, como posição e velocidade em sistemas mecânicos. Ocorrem casos em que estas variáveis, embora linearmente independentes, são também *desacopladas*. Isto é, algumas variáveis linearmente independentes não são necessárias para obter a solução das outras variáveis linearmente independentes ou de outras variáveis dependentes do sistema. Considere o caso de uma massa e de um amortecedor viscoso cuja equação diferencial é $M\,dv/dt + Dv = f(t)$, onde v é a velocidade da massa. Como esta é uma equação diferencial de primeira ordem, uma equação de estado é tudo o que é necessário para definir o sistema no espaço de estados com a velocidade como variável de estado. Além disso, como há um único elemento armazenador de energia, a massa, é necessária somente uma variável de estado para representar o sistema no espaço de estados. Contudo, a massa possui também uma posição associada, que é linearmente independente da velocidade. Se você quiser incluir a posição no vetor de estado junto com a velocidade, acrescentaremos então a posição como variável de estado, que é linearmente independente da outra variável de estado, a velocidade. A Fig. 3.4 ilustra o que está ocorrendo. O primeiro bloco é a função de transferência equivalente a $M\,dv/dt + Dv = f(t)$. O segundo bloco mostra que integramos a velocidade de saída para obter a saída em posição (ver Tabela 2.2, Item 10). Assim, se quisermos o deslocamento como saída, o denominador, ou a equação característica, aumenta a ordem de um para 2, em função do produto das duas funções de transferência. Muitas vezes, a inclusão de variáveis de estado adicionais torna mais simples escrever as equações de estado.

Um outro caso que aumenta o tamanho do vetor de estado ocorre quando a variável adicional não é linearmente independente dos outros membros do vetor de estado. Isto ocorre usualmente ao se escolher uma variável como variável de estado, mas não se torna evidente, de imediato, a dependência em relação às outras variáveis. Por exemplo, ao se usarem elementos armazenadores de energia para selecionar as variáveis de estado, a dependência da variável associada a um elemento armazenador em relação às variáveis dos outros elementos pode não ser reconhecida. Assim, a dimensão da matriz de sistema é aumentada desnecessariamente, e a solução para obter o vetor de estado, a ser tratada no Cap. 4, se torna mais difícil. Além do mais, o acréscimo de variáveis de estado dependentes influi na capacidade do projetista de utilizar os métodos de projeto no espaço de estados.[6]

Vimos na Seção 3.2 que a representação no espaço de estados não é única. O exemplo a seguir mostra uma técnica para selecionar variáveis de estado e representar sistemas no espaço de estados. Nossa abordagem consiste em escrever a equação simples da derivada para cada um dos elementos armazenadores de energia e expressar a derivada como uma combinação linear das variáveis de sistema e da entrada presentes na equação. Em seguida, selecionamos cada uma das variáveis que foram derivadas em relação ao tempo como variável de estado. Expressamos, então, todas as outras variáveis de sistema presentes nas equações em termos das variáveis de estado e de entrada. Finalmente, escrevemos as variáveis de saída como combinações lineares das variáveis de estado e de entrada.

Exemplo 3.1

Representação de um circuito elétrico

Problema Dado o circuito elétrico da Fig. 3.5, obter uma representação no espaço de estados se a saída for a corrente através do resistor.

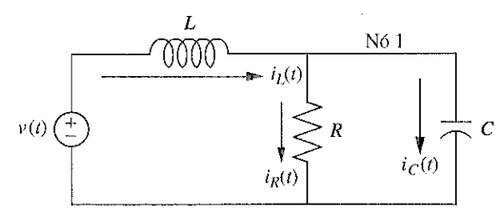


Fig. 3.5 Circuito elétrico para representação no espaço de estados

[6]Ver o Cap. 12 sobre as técnicas de projeto no espaço de estados.

Solução Os passos seguintes conduzirão a uma representação viável do circuito no espaço de estados.

Passo 1 Nomear as correntes de todos os ramos do circuito. Elas incluem i_L, i_R e i_C, como mostrado na Fig .3.5.
Passo 2 Selecionar as variáveis de estado escrevendo a equação da derivada relativa a todos os elementos armazenadores de energia, isto é, o indutor e o capacitor. Assim,

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C \tag{3.22}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L \tag{3.23}$$

Com base nas Eqs. (3.22) e (3.23), escolha como variáveis de estado as grandezas diferenciáveis, ou seja, v_C e i_L. Usando a Eq. (3.20) como guia, vemos que a representação no espaço de estados estará completa se o lado direito das Eqs. (3.22) e (3.23) puder ser escrito como uma combinação linear das variáveis de estado e da entrada.

Como i_C e v_L não são variáveis de estado, nosso próximo passo é expressar i_C e v_L como combinações lineares das variáveis de estado, v_C e i_L, e da entrada, $v(t)$.

Passo 3 Aplicar a teoria de circuitos, como as leis de Kirchhoff das tensões e das correntes, para obter i_C e v_L em termos das variáveis de estado, v_C e i_L. No Nó 1,

$$\begin{aligned} i_C &= -i_R + i_L \\ &= -\frac{1}{R}v_C + i_L \end{aligned} \tag{3.24}$$

que produz i_C em termos das variáveis de estado, v_C e i_L.
Ao longo da malha externa,

$$v_L = -v_C + v(t) \tag{3.25}$$

que produz v_L em termos da variável de estado, v_C, e da fonte de tensão, $v(t)$.

Passo 4 Substituir os resultados das Eqs. (3.24) e (3.25) nas Eqs. (3.22) e (3.23) para obter as seguintes equações de estado:

$$C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R}v_C + i_L \tag{3.26a}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_C + v(t) \tag{3.26b}$$

ou

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{C}i_L \tag{3.27a}$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_C + \frac{1}{L}v(t) \tag{3.27b}$$

Passo 5 Obter a equação de saída. Como a saída é $i_R(t)$,

$$i_R = \frac{1}{R}v_C \tag{3.28}$$

O resultado final da representação no espaço de estados é encontrado representando as Eqs. (3.27) e (3.28) sob a forma matricial vetorial que se segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v(t) \tag{3.29a}$$

$$i_R = [1/R \quad 0]\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \tag{3.29b}$$

onde o ponto sobre a derivada indica derivação em relação ao tempo.

A fim de tornar mais clara a representação de sistemas físicos no espaço de estados, veremos mais dois exemplos. O primeiro é um circuito elétrico com uma fonte controlada. Embora adotemos o mesmo procedimento do problema anterior, este exemplo conduzirá a uma maior complexidade na aplicação da análise de circuitos para obter as equações de estado. No segundo exemplo, obteremos a representação de um sistema mecânico no espaço de estados.

Exemplo 3.2

Representação de um circuito elétrico com fonte dependente

Problema Obter as equações de estado e de saída do circuito elétrico mostrado na Fig. 3.6 se o vetor de saída for $\mathbf{y} = [v_{R_2} \quad i_{R_2}]^T$, onde T significa a transposta do vetor.[7]

Solução Observa-se de pronto que este circuito possui uma fonte dependente de tensão.

Passo 1 Nomear as correntes de todos os ramos do circuito, como mostrado na Fig. 3.6.
Passo 2 Selecionar as variáveis de estado listando as relações tensão-corrente de todos os elementos armazenadores de energia:

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L \tag{3.30a}$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C \tag{3.30b}$$

Com base nas Eqs. (3.30), escolha como variáveis de estado as grandezas diferenciáveis. Portanto, as variáveis de estado, x_1 e x_2, são

$$x_1 = i_L; \qquad x_2 = v_C \tag{3.31}$$

Passo 3 Lembrando que a forma das equações de estado é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3.32}$$

vemos que a tarefa restante consiste em transformar o membro da direita das Eqs. (3.30) em combinações lineares das variáveis de estado e da fonte de corrente na entrada. Aplicando as leis de Kirchhoff das tensões e das correntes, obtemos v_L e i_C em termos das variáveis de estado e da fonte de corrente na entrada.

Ao longo da malha que contém L e C,

$$v_L = v_C + v_{R_2} = v_C + i_{R_2}R_2 \tag{3.33}$$

Mas no Nó 2, $i_{R_2} = i_C + 4v_L$. Substituindo esta relação de i_{R_2} na Eq. (3.33), resulta

$$v_L = v_C + (i_C + 4v_L)R_2 \tag{3.34}$$

Resolvendo para v_L, obtemos

$$v_L = \frac{1}{1 - 4R_2}(v_C + i_C R_2) \tag{3.35}$$

Como v_C é uma variável de estado, observe que precisamos somente obter i_C em termos das variáveis de estado. Assim teremos obtido o valor de v_L em termos das variáveis de estado.

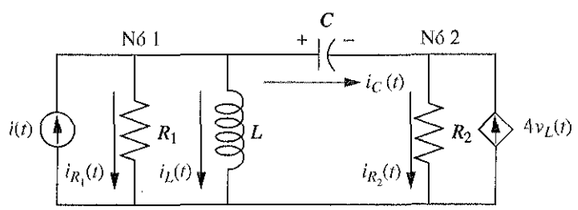


Fig. 3.6 Circuito elétrico para o Exemplo 3.2

[7]Veja o Apêndice G para uma discussão da transposta de matrizes e de vetores. O Apêndice G está no CD-ROM que acompanha o livro.

Por conseguinte, no Nó 1, podemos escrever a soma das correntes como

$$\begin{aligned} i_C &= i(t) - i_{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_{R_1}}{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_L}{R_1} - i_L \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $v_{R_1} = v_L$. As Eqs. (3.35) e (3.36) são duas equações relacionando v_L e i_C com as variáveis de estado i_L e v_C. Reescrevendo as Eqs. (3.35) e (3.36), obtemos duas equações simultâneas que produzem v_L e i_C como combinações lineares das variáveis de estado i_L e v_C:

$$(1 - 4R_2)v_L - R_2 i_C = v_C \tag{3.37a}$$

$$-\frac{1}{R_1}v_L - i_C = i_L - i(t) \tag{3.37b}$$

Resolvendo as Eqs. (3.37) simultaneamente para v_L e i_C, resulta

$$v_L = \frac{1}{\Delta}[R_2 i_L - v_C - R_2 i(t)] \tag{3.38}$$

e

$$i_C = \frac{1}{\Delta}\left[(1 - 4R_2)i_L + \frac{1}{R_1}v_C - (1 - 4R_2)i(t)\right] \tag{3.39}$$

onde

$$\Delta = -\left[(1 - 4R_2) + \frac{R_2}{R_1}\right] \tag{3.40}$$

Substituindo as Eqs. (3.38) e (3.39) nas Eqs. (3.30), simplificando e escrevendo o resultado em forma matricial vetorial, obtemos as seguintes equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/(L\Delta) & -1/(L\Delta) \\ (1 - 4R_2)/(C\Delta) & 1/(R_1 C\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/(L\Delta) \\ -(1 - 4R_2)/(C\Delta) \end{bmatrix} i(t) \tag{3.41}$$

Passo 4 Deduza a equação de saída. Como as variáveis de saída especificadas são v_{R_2} e i_{R_2}, observamos que ao longo da malha contendo C, L e R_2,

$$v_{R_2} = -v_C + v_L \tag{3.42a}$$

$$i_{R_2} = i_C + 4v_L \tag{3.42b}$$

Substituindo as Eqs. (3.38) e (3.39) nas Eqs. (3.42), obtemos v_{R_2} e i_{R_2} como combinações lineares das variáveis de estado, i_L e v_C. A equação de saída sob forma matricial vetorial é

$$\begin{bmatrix} v_{R_2} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/\Delta & -(1 + 1/\Delta) \\ 1/\Delta & (1 - 4R_1)/(\Delta R_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/\Delta \\ -1/\Delta \end{bmatrix} i(t) \tag{3.43}$$

No próximo exemplo vamos obter a representação no espaço de estados de um sistema mecânico. Ao lidar com sistemas mecânicos é mais conveniente obter as equações de estado diretamente das equações de movimento em vez de usar os elementos armazenadores de energia. Por exemplo, considere um elemento armazenador de energia como uma mola, onde $F = Kx$. Esta relação não contém a derivada de uma variável física como no caso de circuitos elétricos, onde $i = Cdv/dt$ para os capacitores e $v = Ldi/dt$ para os indutores. Assim, nos sistemas mecânicos, mudamos a escolha das variáveis de estado para posição e velocidade de cada ponto com movimento linearmente independente. No exemplo veremos que, embora haja três elementos armazenadores de energia, haverá quatro variáveis de estado; uma variável de estado adicional linearmente independente é incluída, por conveniência, ao se escrever as equações de estado. Deixamos para o leitor a tarefa de mostrar que este

sistema conduz a uma função de transferência de quarta ordem se for estabelecida uma relação entre o deslocamento de qualquer das massas e a força aplicada, e de terceira ordem se relacionarmos a velocidade de qualquer uma das massas à força aplicada.

Exemplo 3.3

Representação de um sistema mecânico em translação

Problema Obter as equações de estado para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. 3.7.

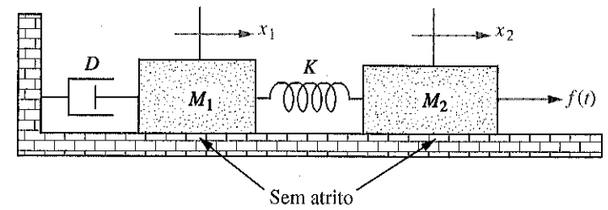


Fig. 3.7 Sistema mecânico em translação

Solução Primeiro, escreva as equações diferenciais para o circuito na Fig. 3.7, usando os métodos do Cap. 2 para obter as equações do movimento no domínio da transformada de Laplace. Em seguida, aplique a transformada de Laplace inversa a essas equações, supondo condições iniciais nulas, e obtenha

$$M_1\frac{d^2x_1}{t^2} + D\frac{dx_1}{dt} + Kx_1 - Kx_2 = 0 \tag{3.44}$$

$$-Kx_1 + M_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + Kx_2 = f(t) \tag{3.45}$$

Faça, agora, $d^2x_1/dt^2 = dv_1/dt$, $d^2x_2/dt^2 = dv_2/dt$ e escolha x_1, v_1, x_2 e v_2 como variáveis de estado. Em seguida, forme as duas equações de estado resolvendo a Eq. (3.44) para dv_1/dt e a Eq. (3.45) para dv_2/dt. Finalmente, acrescente $dx_1/dt = v_1$ e $dx_2/dt = v_2$ para completar o conjunto de equações de estado. Portanto,

$$\frac{dx_1}{dt} = + v_1 \tag{3.46a}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{K}{M_1}x_1 - \frac{D}{M_1}v_1 + \frac{K}{M_1}x_2 \tag{3.46b}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = + v_2 \tag{3.46c}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = +\frac{K}{M_2}x_1 - \frac{K}{M_2}x_2 + \frac{1}{M_2}f(t) \tag{3.46d}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K/M_1 & -D/M_1 & K/M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K/M_2 & 0 & -K/M_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/M_2 \end{bmatrix} f(t) \tag{3.47}$$

onde o ponto indica derivação em relação ao tempo. Qual a equação da saída se a variável de saída for $x_2(t)$?

Exercício de Avaliação 3.1

Problema: Obter a representação no espaço de estados do circuito elétrico mostrado na Fig. 3.8. A saída é $v_o(t)$.

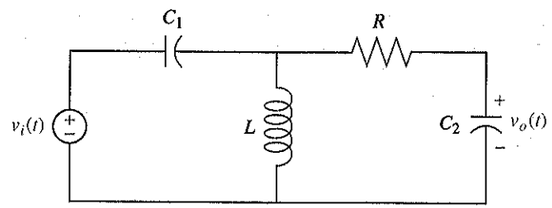


Fig. 3.8 Circuito elétrico para o Exercício de Avaliação 3.1.

Resposta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 1/C_1 & -1/C_1 \\ -1/L & 0 & 0 \\ 1/C_2 & 0 & -1/C_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]\mathbf{x}$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Exercício de Avaliação 3.2

Problema: Obter a representação no espaço de estados do sistema mecânico mostrado na Fig. 3.9, onde a saída é $x_3(t)$.

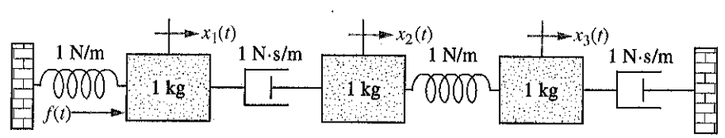


Fig. 3.9 Sistema mecânico em translação para o Exercício de Avaliação 3.2

Resposta:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\,\mathbf{z}$$

onde

$$\mathbf{z} = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_2 \quad x_3 \quad \dot{x}_3]^T$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

3.5 Convertendo uma Função de Transferência para o Espaço de Estados

Na última seção aplicamos a representação no espaço de estados a sistemas elétricos e mecânicos. Nesta seção vamos aprender como passar de uma representação em função de transferência para uma representação no espaço de estados. Uma vantagem da representação no espaço de estados é que ela pode ser usada para simular sistemas físicos em computador digital. Portanto, se quisermos simular um sistema representado por uma função de transferência, devemos primeiro converter a representação por função de transferência em representação no espaço de estados.

Primeiramente, selecionamos um conjunto de variáveis de estado, chamadas *variáveis de fase*, onde cada variável de estado subseqüente é a derivada da variável de estado anterior. No Cap. 5, iremos mostrar outras escolhas de variáveis de estado.

Comecemos mostrando como representar uma equação diferencial linear, genérica, de ordem n, e coeficientes constantes no espaço de estados sob a forma de variáveis de fase. Mostraremos, então, como aplicar esta representação a funções de transferência.

Considere a equação diferencial

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \tag{3.48}$$

Uma forma conveniente de selecionar variáveis de estado é escolher a saída, $y(t)$, e suas $(n-1)$ derivadas como variáveis de estado. Esta opção é chamada de escolha de *variáveis de fase*. Escolhendo as variáveis de estado, x_i, obtemos

$$x_1 = y \tag{3.49a}$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt} \tag{3.49b}$$

$$x_3 = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{3.49c}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \tag{3.49d}$$

e derivando ambos os membros

$$\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} \tag{3.50a}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{3.50b}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{d^3y}{dt^3} \tag{3.50c}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = \frac{d^ny}{dt^n} \tag{3.50d}$$

onde o ponto sobre o x significa derivada em relação ao tempo.

Substituindo as definições das Eqs. (3.49) nas Eqs. (3.50), calculamos as equações de estado como

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.51a}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.51b}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n \tag{3.51c}$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \tag{3.51d}$$

onde a Eq. (3.51*d*) foi obtida da Eq. (3.48) explicitando o valor de d^ny/dt^n e usando as Eqs. (3.49). As Eqs. (3.51) se transformam, sob forma matricial vetorial, em

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{3.52}$$

A Eq. (3.52) é a forma em variáveis de fase das equações de estado. Esta forma é reconhecida facilmente pelo padrão exclusivo de 1's e 0's e do negativo dos coeficientes da equação diferencial, escritos na ordem inversa, na última linha da matriz de sistema.

Finalmente, como a solução da equação diferencial é $y(t)$, ou x_1, a equação de saída é

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Em resumo, então, para converter uma função de transferência em equações de estado sob a forma de variáveis de fase, primeiramente transformamos a função de transferência em equação diferencial multiplicando em cruz e obtendo a transformada de Laplace inversa, supondo condições iniciais nulas. Em seguida, representamos a equação diferencial no espaço de estados sob a forma de variáveis de fase. Um exemplo ilustra o procedimento.

Exemplo 3.4

Convertendo uma função de transferência com termo constante em numerador

Problema Obter a representação no espaço de estados sob a forma de variáveis de fase da função de transferência mostrada na Fig. 3.10(*a*).

Solução

Passo 1 Obter a equação diferencial associada. Como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \tag{3.54}$$

multiplicando em cruz resulta

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s) \tag{3.55}$$

A equação diferencial correspondente é obtida aplicando a transformada de Laplace inversa, supondo condições iniciais zero:

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r \tag{3.56}$$

Passo 2 Escolher as variáveis de estado.

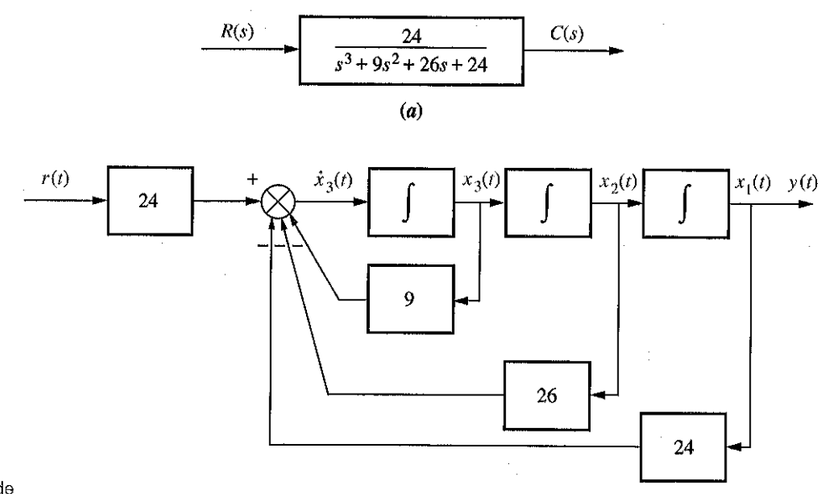


Fig. 3.10 a. Função de transferência; **b.** diagrama de blocos equivalente mostrando variáveis de fase. Nota: $y(t) = c(t)$

Escolhendo as variáveis de estado como as derivadas sucessivas, obtemos

$$x_1 = c \tag{3.57a}$$

$$x_2 = \dot{c} \tag{3.57b}$$

$$x_3 = \ddot{c} \tag{3.57c}$$

Derivando ambos os membros e fazendo uso das Eqs. (3.57) para achar $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$, e a Eq. (3.56) para determinar $\dddot{c}$ $\dot{x}_3$, obtemos as equações de estado. Como a saída é $c = x_1$, as equações de estado e de saída combinadas são

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.58a}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.58b}$$

$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r \tag{3.58c}$$

$$y = c = x_1 \tag{3.58d}$$

Em forma matricial vetorial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r \tag{3.59a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.59b}$$

Observe que a matriz de sistema possui os mesmos coeficientes do denominador da função de transferência mas com sinal negativo e na ordem inversa.

Neste ponto, podemos criar um diagrama de blocos equivalente para o sistema da Fig. 3.10(*a*), para ajudar a visualização das variáveis de estado. Desenhamos três blocos integradores como mostrado na Fig. 3.10(*b*) e designamos cada uma das saídas como variável de estado, $x_i(t)$, como assinalado. Como a entrada de cada integrador é $\dot{x}_i(t)$, usamos as Eqs. (3.58*a*), (3.58*b*) e (3.58*c*) para determinar a combinação dos sinais de entrada de cada integrador. Forme e nomeie cada uma das entradas. Finalmente, use a Eq. (3.58*d*) para compor e nomear a saída, $y(t) = c(t)$. O resultado final da Fig. 3.10(*b*) é um sistema equivalente à Fig. 3.10(*a*) que mostra explicitamente as variáveis de estado e fornece um retrato realista da representação no espaço de estados.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora os programas cap3p1 a cap3p4 no Apêndice B. Você aprenderá como representar a matriz de sistema **A**, a matriz de entrada **B** e a matriz de saída **C** usando o MATLAB. Você aprenderá como converter uma função de transferência em representação no espaço de estados com variáveis de fase. Para finalizar, o Exemplo 3.4 será resolvido usando o MATLAB.

A função de transferência do Exemplo 3.4 possui um termo constante no numerador. Se a função de transferência possuir um polinômio em s no numerador de grau inferior ao do polinômio do denominador, como mostrado na Fig. 3.11(*a*), o numerador e o denominador poderão ser manipulados separadamente. Primeiro, separamos a função de transferência em duas, associadas em cascata, como mostrado na Fig. 3.11(*b*); a primeira é o denominador, e a segunda, o próprio numerador. A primeira função de transferência com apenas o denominador é convertida na representação por variáveis de fase no espaço de estados como foi demonstrado no último exemplo. Portanto, a variável de fase x_1 é a saída e as outras variáveis de fase são variáveis internas do primeiro bloco, como mostrado na Fig. 3.11(*b*). A segunda função de transferência com apenas o numerador conduz a

$$Y(s) = C(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)\,X_1(s) \tag{3.60}$$

onde, depois de obtida a transformada de Laplace inversa com condições iniciais nulas,

$$y(t) = b_2\frac{d^2x_1}{dt^2} + b_1\frac{dx_1}{dt} + b_0x_1 \tag{3.61}$$

Mas os termos com derivadas são as definições das variáveis de fase obtidas no primeiro bloco. Assim, escrevendo-se os termos na ordem inversa para dar a forma de uma equação de saída,

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 \tag{3.62}$$

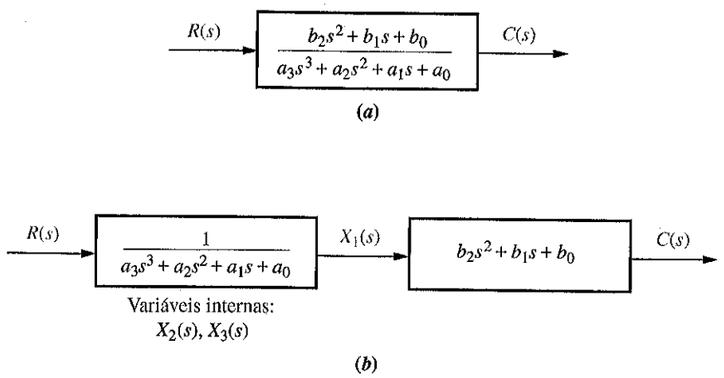


Fig. 3.11 Decompondo uma função de transferência

Portanto, o segundo bloco forma simplesmente uma combinação linear específica das variáveis de fase desenvolvidas no primeiro bloco.

Segundo uma outra perspectiva, o denominador da função de transferência conduz às equações de estado enquanto o numerador fornece a equação de saída. O próximo exemplo demonstra o procedimento.

Exemplo 3.5

Convertendo uma função de transferência com polinômio em numerador

Problema Obter a representação no espaço de estados da função de transferência mostrada na Fig. 3.12(*a*).

Solução Este problema difere do Exemplo 3.4, uma vez que o numerador apresenta um polinômio em s em vez de apenas um termo constante.

Passo 1 Separar o sistema em dois blocos em cascata, como mostrado na Fig. 3.12(*b*). O primeiro bloco contém o denominador, e o segundo, o numerador.

Passo 2 Obter as equações de estado para o bloco contendo o denominador. Observamos que o numerador do primeiro bloco é 1/24 do numerador do Exemplo 3.4. Portanto, as equações de estado são as mesmas, exceto que a matriz de entrada do sistema é 1/24 da matriz de entrada do Exemplo 3.4. Portanto, a equação de estado é

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -24 & -26 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} r \tag{3.63}$$

Passo 3 Introduzir o efeito do bloco com o numerador. O segundo bloco da Fig. 3.12(*b*), onde $b_2 = 1$, $b_1 = 7$ e $b_0 = 2$, estabelece que

$$C(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)X_1(s) = (s^2 + 7s + 2)X_1(s) \tag{3.64}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa com condições iniciais nulas, obtemos

$$c = \ddot{x}_1 + 7\dot{x}_1 + 2x_1 \tag{3.65}$$

Mas

$$x_1 = x_1$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\ddot{x}_1 = x_3$$

Portanto,

$$y = c(t) = b_2x_3 + b_1x_2 + b_0x_1 = x_3 + 7x_2 + 2x_1 \tag{3.66}$$

Assim, a última caixa da Fig. 3.11(*b*) "reúne" os estados e gera a equação de saída. Com base na Eq. (3.66),

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = [2 \quad 7 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{3.67}$$

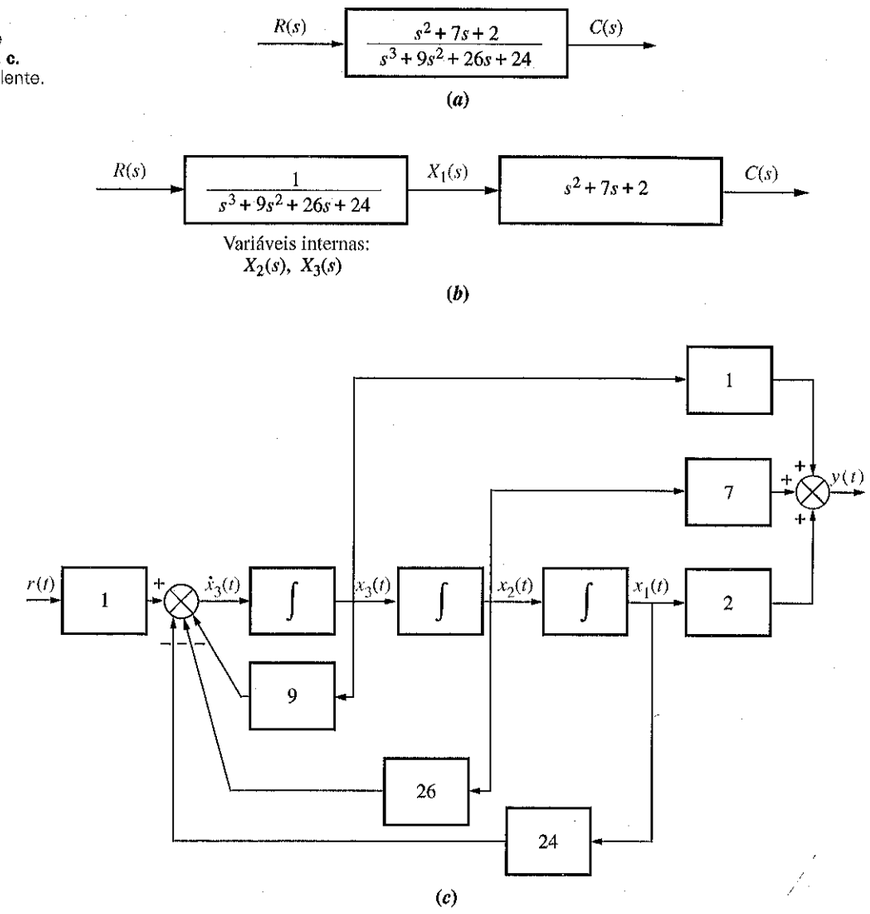


Fig. 3.12 a. Função de transferência; **b.** função de transferência decomposta; **c.** diagrama de blocos equivalente. Nota: $y(t) = c(t)$

Embora o segundo bloco da Fig. 3.12(*b*) mostre derivação, este bloco foi implementado sem derivações devido à partição aplicada à função de transferência. O último bloco reuniu simplesmente as derivadas que já tinham sido formadas no primeiro bloco.

Uma vez mais podemos produzir um diagrama de blocos que representa de modo realista o modelo no espaço de estados. O primeiro bloco da Fig. 3.12(*b*) é o mesmo da Fig. 3.10(*a*), exceto com relação ao valor da constante em numerador. Assim, na Fig. 3.12(*c*) reproduzimos a Fig. 3.10(*b*), exceto com relação à mudança da constante do numerador, que aparece como uma alteração no fator multiplicador da entrada. O segundo bloco da Fig. 3.12(*b*) é representado usando a Eq. (3.66), que forma a saída como uma combinação linear das variáveis de estado, como mostrado na Fig. 3.12(*c*).

Exercício de Avaliação 3.3

Problema: Obter as equações de estado e a equação de saída da representação em variáveis de fase da função de transferência, $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+7s+9}$.

Resposta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -9 & -7\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} r(t)$$

$$y = [1 \quad 2]\mathbf{x}$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

3.6 Convertendo do Espaço de Estados para a Função de Transferência

Nos Caps. 2 e 3, exploramos dois métodos para representar sistemas: (1) a representação em função de transferência e (2) a representação no espaço de estados. Na seção anterior unificamos as duas representações convertendo funções de transferência em representações no espaço de estados. Agora vamos nos mover na direção contrária e converter a representação no espaço de estados em função de transferência.

Dadas as equações de estado e de resposta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3.68a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{3.68b}$$

aplique a transformada de Laplace, supondo condições iniciais nulas:[8]

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.69a}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{3.69b}$$

Explicitando $\mathbf{X}(s)$ na Eq. (3.69*a*),

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.70}$$

ou

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.71}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Substituindo a Eq. (3.71) na Eq. (3.69*b*), resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)\\ &= [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)\end{aligned} \tag{3.72}$$

Chamamos a matriz $[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$ de matriz função de transferência, uma vez que ela relaciona o vetor de saída, $\mathbf{Y}(s)$, ao vetor de entrada, $\mathbf{U}(s)$. Mesmo quando $\mathbf{U}(s) = U(s)$ e $\mathbf{Y}(s) = Y(s)$ forem escalares, podemos obter a função de transferência.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{3.73}$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.6

Representação no espaço de estados para função de transferência

Problema Dado o sistema definido pelas Eqs. (3.74), obter a função de transferência, $T(s) = Y(s)/U(s)$, onde $U(s)$ é a entrada e $Y(s)$ é a saída.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u \tag{3.74a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} \tag{3.74b}$$

Solução A solução gira em torno da obtenção do termo $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ na Eq. (3.73).[9] Todos os outros termos já estão definidos. Assim, achemos primeiro $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

[8]A transformada de Laplace de um vetor é obtida aplicando-se a transformada de Laplace a cada componente. Como $\dot{\mathbf{x}}$ consiste na derivada das variáveis de estado, a transformada de Laplace de $\dot{\mathbf{x}}$ com condições iniciais nulas faz com que cada componente tenha a forma $sX_i(s)$, onde $X_i(s)$ é a transformada de Laplace da variável de estado. Pondo em evidência a variável complexa, s, em cada componente, resulta a transformada de Laplace de $\dot{\mathbf{x}}$ como $s\mathbf{X}(s)$ onde $\mathbf{X}(s)$, é um vetor coluna com componentes $X_i(s)$.

[9]Veja o Apêndice G, localizado no CD-ROM que acompanha este livro, onde se discute como calcular a matriz inversa.

Formemos agora $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 3s + 2) & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \tag{3.76}$$

Substituindo $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ na Eq. (3.73), onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

obtemos o resultado final para a função de transferência:

$$T(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \tag{3.77}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap3p5 no Apêndice B. Você aprenderá como converter uma representação no espaço de estados em função de transferência usando o MATLAB. Você deve praticar escrevendo um programa em MATLAB para resolver o Exemplo 3.6.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem executando os exercícios com MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa cap3ps1 no Apêndice E. Você aprenderá como usar a *Toolbox* de Matemática Simbólica para escrever matrizes e vetores. Você verá que a *Toolbox* de Matemática Simbólica fornece um modo alternativo de usar o MATLAB para resolver o Exemplo 3.6.

Exercício de Avaliação 3.4

Problema: Converter as equações de estado e a equação de saída mostradas nas Eqs. (3.78) em função de transferência.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -1{,}5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \tag{3.78a}$$

$$y = [1{,}5 \quad 0{,}625]\mathbf{x} \tag{3.78b}$$

Resposta: $G(s) = \dfrac{3s + 5}{s^2 + 4s + 6}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

No Exemplo 3.6, as equações de estado na forma de variáveis de fase foram convertidas em funções de transferência. No Cap. 5 veremos que outras formas, além da forma em variáveis de fase, podem ser usadas para representar sistemas no espaço de estados. O método para determinar a representação em função de transferência para estas outras formas é o mesmo que foi apresentado nesta seção.

3.7 Linearização

Uma vantagem essencial da representação no espaço de estados sobre a representação em função de transferência é a capacidade de representar sistemas com não-linearidades, como o mostrado na Fig. 3.13. A capacidade de representar sistemas não-lineares não implica a capacidade de resolver as equações de estado e de saída desses sistemas. Existem técnicas para a solução de algumas equações de estado não-lineares, mas este estudo está além do escopo deste livro. No Apêndice H, no CD-ROM que acompanha este livro, no entanto, você verá como usar o computador digital para resolver equações de estado. Este método também pode ser usado para equações de estado não-lineares.

Se estivermos interessados em pequenas perturbações em torno de um ponto de equilíbrio, como estivemos ao estudar linearização no Cap. 2, também podemos linearizar as equações de estado em torno do ponto de equilíbrio. A chave para a linearização em torno de um ponto de equilíbrio é, uma vez mais, a série de Taylor. No exemplo a seguir, escrevemos as equações de estado de um pêndulo simples, mostrando que podemos representar um sistema

Fig. 3.13 Robôs ambulantes, como o *Hannibal* mostrado aqui, podem ser usados para explorar ambientes hostis e terrenos acidentados, como os encontrados em outros planetas ou no interior de vulcões.

não-linear no espaço de estados; em seguida, linearizamos o pêndulo em torno do seu ponto de equilíbrio, a posição vertical com velocidade zero.

Exemplo 3.7

Representando um sistema não-linear

Problema Primeiro, represente o pêndulo simples mostrado na Fig. 3.14(*a*) (que poderia ser o modelo simples da perna do robô mostrado na Fig. 3.13) no espaço de estados: Mg é o peso, T é um torque aplicado na direção θ, e L é o comprimento do pêndulo. Admita que a massa seja uniformemente distribuída com o centro de massa em $L/2$. Em seguida, linearize as equações de estado em torno da posição de equilíbrio do pêndulo — a posição vertical, com velocidade angular nula.

Solução Primeiro, desenhe um diagrama de corpo livre como mostrado na Fig. 3.14(*c*). Somando os torques, temos

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta = T \tag{3.79}$$

onde J é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto de rotação. Selecione as variáveis de estado x_1 e x_2 como variáveis de fase. Fazendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = d\theta/dt$, escrevemos as equações de estado como

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.80a}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{MgL}{2J}\operatorname{sen}x_1 + \frac{T}{J} \tag{3.80b}$$

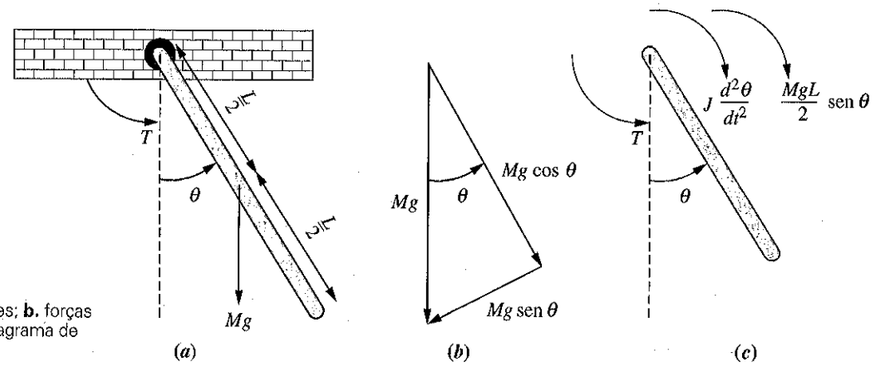


Fig. 3.14 a. Pêndulo simples; **b.** forças componentes de Mg; **c.** diagrama de corpo livre

onde $\dot{x}_2 = d^2\theta/dt^2$ é calculada a partir da Eq. (3.79).

Portanto, representamos um sistema não-linear no espaço de estados. É interessante notar que as Eqs. (3.80) não-lineares representam um modelo válido e completo do pêndulo, no espaço de estados, mesmo quando as condições iniciais não são nulas e mesmo quando os parâmetros, como a massa, variam no tempo. Em conseqüência, se desejarmos aplicar as técnicas clássicas e converter estas equações de estado em função de transferência, devemos linearizá-las. Façamos agora a linearização da equação em torno do ponto de equilíbrio, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, isto é, $\theta = 0$ e $d\theta/dt = 0$.

Perturbemos x_1 e x_2 em torno do ponto de equilíbrio, ou seja,

$$x_1 = 0 + \delta x_1 \tag{3.81a}$$

$$x_2 = 0 + \delta x_2 \tag{3.81b}$$

Usando a Eq. (2.182), obtemos

$$\operatorname{sen}x_1 - \operatorname{sen}0 = \left.\frac{d(\operatorname{sen}x_1)}{dx_1}\right|_{x_1=0}\delta x_1 = \delta x_1 \tag{3.82}$$

da qual,

$$\operatorname{sen}x_1 = \delta x_1 \tag{3.83}$$

Substituindo as Eqs. (3.81) e (3.83) na Eq. (3.80), resultam as seguintes equações de estado:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2 \tag{3.84a}$$

$$\dot{\delta x}_2 = -\frac{MgL}{2J}\delta x_1 + \frac{T}{J} \tag{3.84b}$$

que são lineares e constituem uma boa aproximação das Eqs. (3.80) para pequenas excursões em torno do ponto de equilíbrio. Qual é a equação de saída?

Exercício de Avaliação 3.5

Problema: Representar o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. 3.15 no espaço de estados em torno do deslocamento de equilíbrio. A mola é não-linear: a relação entre a força da mola, $f_s(t)$, e o seu deslocamento, $x_s(t)$, é $f_s(t) = 2x_s^2(t)$. A força aplicada é $f(t) = 10 + \delta f(t)$, onde $\delta f(t)$ é uma pequena força em torno de um valor constante de 10 N.

Admita que a saída seja o deslocamento da massa, $x(t)$.

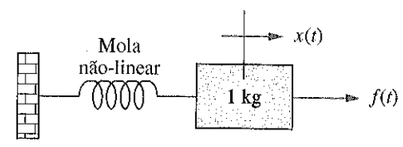


Fig. 3.15 Sistema mecânico em translação para o Exercício de Avaliação 3.5

Resposta:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\delta f(t)$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Estudos de Caso

Controle de Antena: Representação no Espaço de Estados

Neste capítulo tratamos da representação no espaço de estados de subsistemas físicos individuais. No Cap. 5, iremos reunir subsistemas individuais em sistemas de controle com retroação e representar o sistema total com retroação no espaço de estados. O Cap. 5 também irá mostrar como utilizar a representação no espaço de estados, via diagrama de fluxo de sinal, para interconectar esses subsistemas e permitir a representação no espaço de estados do sistema inteiro a malha fechada. No estudo de caso a seguir daremos uma olhada no sistema de controle de posição da antena em azimute e demonstraremos os conceitos deste capítulo através da representação de cada subsistema no espaço de estados.

Problema Obter a representação no espaço de estados sob a forma de variáveis de fase para cada subsistema dinâmico do sistema de controle de posição da antena em azimute, mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1). Por *dinâmico* entende-se o sistema que não alcança instantaneamente o estado estacionário. Por exemplo, um sistema descrito por uma equação diferencial de primeira ordem ou de ordem superior é um sistema dinâmico. Um ganho puro, por outro lado, constitui um exemplo de sistema não-dinâmico, uma vez que o estado estacionário é alcançado instantaneamente.

Solução No problema de estudo de caso do Cap. 2, foram identificados todos os subsistemas do sistema de controle de posição da antena em azimute. Descobrimos que o amplificador de potência e o motor com carga eram sistemas dinâmicos. O pré-amplificador e os potenciômetros são ganhos puros e assim respondem instantaneamente. Portanto, iremos obter a representação no espaço de estados somente do amplificador de potência e do motor com a carga.

Amplificador de Potência A função de transferência do amplificador de potência é dada na contracapa dianteira por $G(s) = 100/(s + 100)$. Converteremos esta função de transferência em uma representação correspondente no espaço de estados. Designando a entrada do amplificador de potência por $v_p(t)$ e a saída por $e_a(t)$,

$$G(s) = \frac{E_a(s)}{V_p(s)} = \frac{100}{(s + 100)} \tag{3.85}$$

Multiplicando em cruz, $(s + 100)E_a(s) = 100V_p(s)$, de onde se obtém a equação diferencial

$$\frac{de_a}{dt} + 100e_a = 100\,v_p(t) \tag{3.86}$$

Rearrumando a Eq. (3.86) chega-se à equação de estado com e_a como variável de estado:

$$\frac{de_a}{dt} = -100e_a + 100\,v_p(t) \tag{3.87}$$

Como a saída do amplificador de potência é $e_a(t)$, a equação de saída é

$$y = e_a \tag{3.88}$$

Motor e Carga Determinamos agora a representação no espaço de estados para o motor e a carga. Poderíamos, naturalmente, usar o diagrama de blocos do motor com a carga, mostrado na contracapa, para obter o resultado. Contudo, é mais informativo deduzir a representação no espaço de estados diretamente da física do motor sem ter de primeiro obter a função de transferência. Os elementos para a dedução foram tratados na Seção 2.8, mas são repetidos aqui por motivo de continuidade de raciocínio. Começando com a lei de Kirchhoff das tensões aplicada ao circuito da armadura, obtemos

$$e_a(t) = i_a(t)R_a + K_b\frac{d\theta_m}{dt} \tag{3.89}$$

onde $e_a(t)$ é a tensão de entrada da armadura, $i_a(t)$ é a corrente de armadura, R_a é a resistência da armadura, K_b é a constante da armadura, e θ_m é o deslocamento angular da armadura (rotor).

O torque, $T_m(t)$, produzido pelo motor é relacionado separadamente à corrente de armadura e à carga vista pela armadura. Conforme a Seção 2.8,

$$T_m(t) = K_t i_a(t) = J_m\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + D_m\frac{d\theta_m}{dt} \tag{3.90}$$

onde J_m é a inércia equivalente e D_m é o amortecimento viscoso equivalente, como vistos pela armadura.

Resolvendo a Eq. (3.90) para $i_a(t)$ e substituindo o resultado na Eq. (3.89), vem

$$e_a(t) = \left(\frac{R_aJ_m}{K_t}\right)\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \left(\frac{D_mR_a}{K_t} + K_b\right)\frac{d\theta_m}{dt} \tag{3.91}$$

Definindo as variáveis de estado x_1 e x_2 como

$$x_1 = \theta_m \tag{3.92a}$$

$$x_2 = \frac{d\theta_m}{dt} \tag{3.92b}$$

e substituindo na Eq. (3.91), obtemos

$$e_a(t) = \left(\frac{R_aJ_m}{K_t}\right)\frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{D_mR_a}{K_t} + K_b\right)x_2 \tag{3.93}$$

Resolvendo para dx_2/dt, vem

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_tK_b}{R_a}\right)x_2 + \left(\frac{K_t}{R_aJ_m}\right)e_a(t) \tag{3.94}$$

Usando as Eqs. (3.92) e (3.94), escrevemos as equações de estado como

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{3.95a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_tK_b}{R_a}\right)x_2 + \left(\frac{K_t}{R_aJ_m}\right)e_a(t) \tag{3.95b}$$

A saída, $\theta_o(t)$, é 1/10 do deslocamento da armadura, que é x_1. Portanto, a equação de saída é

$$y = 0{,}1x_1 \tag{3.96}$$

Em forma matricial vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{J_m}\left(D_m + \dfrac{K_tK_b}{R_a}\right) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_t}{R_aJ_m} \end{bmatrix}e_a(t) \tag{3.97a}$$

$$y = [0{,}1 \quad 0]\mathbf{x} \tag{3.97b}$$

Mas, conforme o problema de estudo de caso do Cap. 2, $J_m = 0{,}03$ e $D_m = 0{,}02$. Além disso, $K_t/R_a = 0{,}0625$ e $K_b = 0{,}5$. Substituindo os valores nas Eqs. (3.97), obtemos a representação final no espaço de estados.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1{,}71 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2{,}083 \end{bmatrix}e_a(t) \tag{3.98a}$$

$$y = [0{,}1 \quad 0]\mathbf{x} \tag{3.98b}$$

Desafio Apresentamos agora um problema para testar seus conhecimentos dos objetivos deste capítulo. Consultando o sistema de controle mostrado na contracapa dianteira, obtenha a representação no espaço de estados de cada subsistema dinâmico. Use a Configuração 2.

Absorção de Medicamentos

Uma vantagem da representação no espaço de estados sobre a representação através de função de transferência é a capacidade de enfocar as partes componentes de um sistema e escrever n equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, em vez de tentar representar o sistema por uma única equação diferencial de ordem n, como fizemos com a função de transferência. Além do mais, os sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas podem ser representados no espaço de estados com facilidade. Este estudo de caso demonstra ambos os conceitos.

Problema Na indústria farmacêutica, deseja-se descrever a distribuição de medicamentos pelo organismo. Um modelo simples divide o processo em compartimentos: a dosagem, o local de absorção, o sangue, os compartimentos periféricos e a urina. A taxa de variação da quantidade de medicamento em um compartimento é igual à vazão de entrada menos a vazão de saída. A Fig. 3.16 resume o sistema. Aqui, cada x_i é a quantidade de medicamento nesse compartimento particular (Lordi, 1972). Represente o sistema no espaço de estados, onde as saídas são as quantidades de medicamento em cada compartimento.

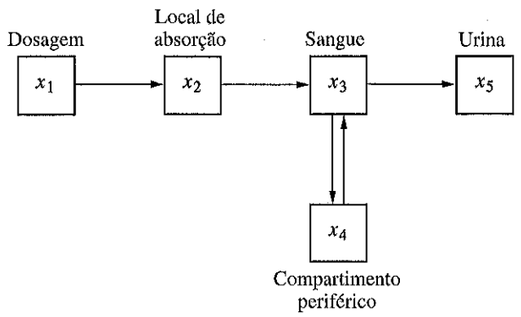


Fig. 3.16 Níveis de concentração de medicamentos em um ser humano

Solução A vazão de entrada de medicamento em um dado compartimento é proporcional à concentração do medicamento no compartimento anterior, e a vazão de saída de um dado compartimento é proporcional à concentração do medicamento no próprio compartimento. Escrevemos agora a vazão de cada compartimento.

A dosagem é liberada para o local de absorção a uma taxa proporcional à concentração na dosagem, ou seja,

$$\frac{dx_1}{dt} = -K_1x_1 \tag{3.99}$$

A vazão de entrada no local de absorção é proporcional à concentração do medicamento no local de dosagem. A vazão de saída do local de absorção que entra no sangue é proporcional à concentração de medicamento no local de absorção. Portanto,

$$\frac{dx_2}{dt} = K_1x_1 - K_2x_2 \tag{3.100}$$

De modo semelhante, a vazão líquida de entrada no sangue e no compartimento periférico é

$$\frac{dx_3}{dt} = K_2x_2 - K_3x_3 + K_4x_4 - K_5x_3 \tag{3.101}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = K_5x_3 - K_4x_4 \tag{3.102}$$

onde $(K_4x_4 - K_5x_3)$ é a vazão líquida que entra no sangue vinda do compartimento periférico. Por fim, a quantidade de medicamento na urina aumenta à medida que o sangue libera o medicamento para a urina a uma taxa proporcional à concentração do medicamento no sangue. Portanto,

$$\frac{dx_5}{dt} = K_3x_3 \tag{3.103}$$

As Eqs. (3.99) a (3.103) são as equações de estado. A equação de saída é um vetor que contém cada uma das quantidades, x_i. Assim, em forma matricial vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -(K_3+K_5) & K_4 & 0 \\ 0 & 0 & K_5 & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{3.104a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{3.104b}$$

Você deve estar imaginando como pode haver solução para estas equações sem que haja uma entrada. No Cap. 4, quando formos tratar da solução das equações de estado, veremos que as condições iniciais conduzem a soluções sem funções forçantes. Para este problema, uma condição inicial sobre a quantidade na dosagem, x_1, irá gerar as quantidades de medicamento em todos os outros compartimentos.

Desafio Apresentamos agora um problema para testar seus conhecimentos dos objetivos deste capítulo. O problema diz respeito ao armazenamento de água em aqüíferos. Os princípios são semelhantes aos usados para modelar a absorção de medicamentos.

Reservatórios subterrâneos de água, chamados aqüíferos, podem ser usados em regiões áridas pela agricultura e pela indústria. O sistema aqüífero consiste em um certo número de cisternas naturais interconectadas. A água natural flui através das rochas e do solo do sistema aqüífero, variando os níveis de água das cisternas a caminho do mar. Pode ser estabelecida uma política de conservação de água mediante a qual a água é bombeada entre as cisternas para evitar que se perca no mar.

Um modelo para o sistema aqüífero está mostrado na Fig. 3.17. Neste modelo o aqüífero é representado por três cisternas com nível de água h_i chamado *altura de carga*. Cada q_n é a vazão natural de água para o mar e é proporcional à diferença de alturas de carga entre duas cisternas contíguas, ou $q_n = G_n(h_n - h_{n-1})$, onde G_n é uma constante de proporcionalidade e as unidades de q_n são m³/ano.

A vazão resultante após o trabalho de engenharia consiste em três componentes, também medidos em m³/ano: (1) a vazão que sai das cisternas para irrigação e atividades industriais, q_{on}; (2) o recompletamento das cisternas a partir de poços, q_{in}, e (3) a vazão, q_{21}, criada pela política de conservação de água para evitar a perda no mar. Neste modelo, a água para irrigação e para a indústria será retirada somente dos Reservatórios 2 e 3. A conservação de água ocorrerá somente entre os Reservatórios 1 e 2, como a seguir. Seja H_1 a altura de carga referência para o Reservatório 1. Se o nível de água no Reservatório 1 cair abaixo de H_1, a água será bombeada do Reservatório 2 para o Reservatório 1 para repor a altura de carga. Se h_1 for maior que H_1, a água será bombeada de volta ao Reservatório 2, para evitar a perda para o mar. Chamando isto de *vazão de conservação*, q_{21}, podemos dizer que esta vazão é proporcional à diferença entre a altura de carga do Reservatório 1, h_1, e a altura de carga de referência, H_1, ou $q_{21} = G_{21}(H_1 - h_1)$.

A vazão líquida em um reservatório é proporcional à taxa de variação da altura de carga em cada reservatório. Portanto,

$$C_n dh_n/dt = q_{in} - q_{on} + q_{n+1} - q_n + q_{(n+1)n} - q_{n(n-1)}$$

(Kandel, 1973). Representar o sistema aqüífero no espaço de estados, onde as variáveis de estado e as saídas são as alturas de carga de cada reservatório.

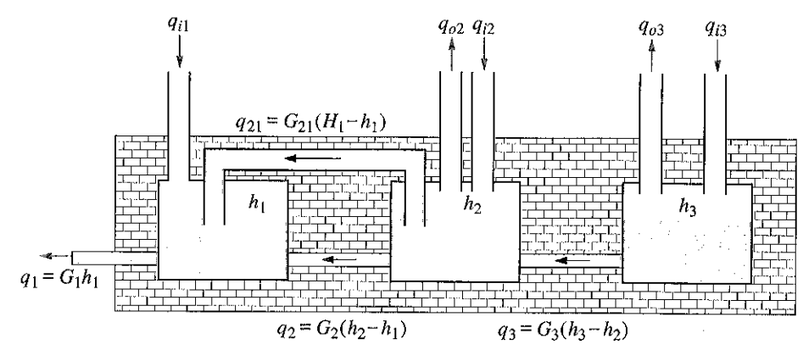


Fig. 3.17 Modelo de sistema aqüífero

Sumário

Neste capítulo tratamos da representação de sistemas físicos no espaço de estados, que tomou a forma de uma equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{3.105}$$

e de uma equação de saída

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{3.106}$$

para $t \geq t_0$, e condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$. O vetor $\mathbf{x}$ é chamado *vetor de estado* e contém variáveis, chamadas *variáveis de estado*. As variáveis de estado podem ser combinadas algebricamente com a entrada para formar a equação de saída, Eq. (3.106), da qual as outras variáveis de sistema podem ser obtidas. As variáveis de estado que podem representar grandezas físicas como corrente ou tensão devem ser escolhidas linearmente independentes. A

escolha das variáveis de estado não é única e afeta a forma tomada pelas matrizes **A**, **B**, **C** e **D**. Solucionaremos as equações de estado e de saída **x** e **y** no Cap. 4.

Neste capítulo, as funções de transferência foram representadas no espaço de estados. A forma escolhida foi a das variáveis de fase, que consiste em variáveis de estado derivadas sucessivas de cada uma delas. No espaço de estados tridimensional, a matriz de sistemas resultante, **A**, para a representação em variáveis de fase possui a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

onde os a_i são os coeficientes do polinômio característico ou o denominador da função de transferência. Discutimos também como passar da representação no espaço de estados para a representação em função de transferência.

Concluindo então, para os sistemas lineares e invariantes no tempo, a representação no espaço de estados é simplesmente uma outra maneira de modelar um sistema matematicamente. Uma grande vantagem de aplicar a representação no espaço de estados a esses sistemas lineares é que isto permite a simulação em computador. Programar o sistema em um computador digital e observar a resposta dele constitui uma ferramenta inestimável para análise e projeto. A simulação é tratada no Apêndice H no CD-ROM que acompanha o livro.

Perguntas de Revisão

1. Dê duas razões para modelar sistemas no espaço de estados.
2. Assinale uma vantagem da abordagem em função de transferência sobre a representação no espaço de estados.
3. Defina *variáveis de estado*.
4. Defina *estado*.
5. Defina *vetor de estado*.
6. Defina *espaço de estados*.
7. O que é necessário para representar um sistema no espaço de estados?
8. Um sistema de oitava ordem poderia ser representado no espaço de estados com quantas equações de estado?
9. Se as equações de estado são um sistema de equações diferenciais de primeira ordem cuja solução fornece as variáveis de estado, qual então a função exercida pela equação de saída?
10. O que significa *independência linear*?
11. Que fatores influenciam a escolha das variáveis de estado em todo sistema?
12. Qual a escolha conveniente de variáveis de estado para circuitos elétricos?
13. Se um circuito elétrico possuir três elementos armazenadores de energia, é possível ter uma representação com mais de três variáveis de estado? Explique.
14. O que significa a forma em variáveis de fase da equação de fase?

Problemas

1. Represente o circuito elétrico mostrado na Fig. P3.1 no espaço de estados, onde $v_o(t)$ é a saída.

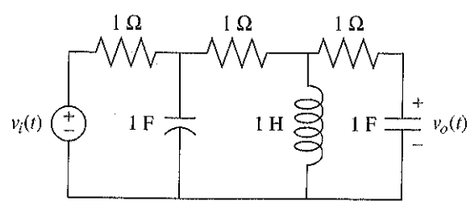


Fig. P3.1

2. Represente o circuito elétrico mostrado na Fig. P3.2 no espaço de estados, onde $i_R(t)$ é a saída.

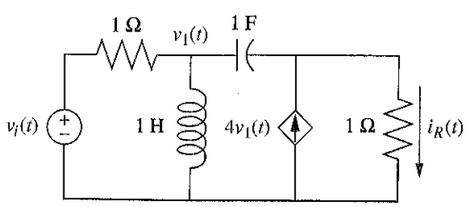


Fig. P3.2

3. Obtenha a representação do circuito elétrico mostrado na Fig. P3.3 no espaço de estados, onde $v_o(t)$ é a saída.

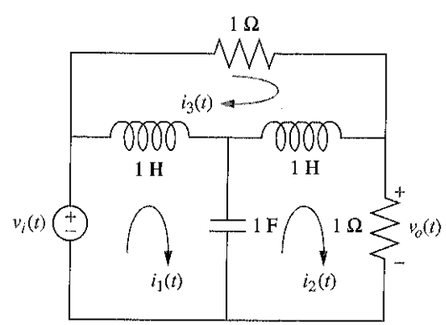


Fig. P3.3

4. Represente o sistema mostrado na Fig. P3.4 no espaço de estados, onde $x_3(t)$ é a saída.

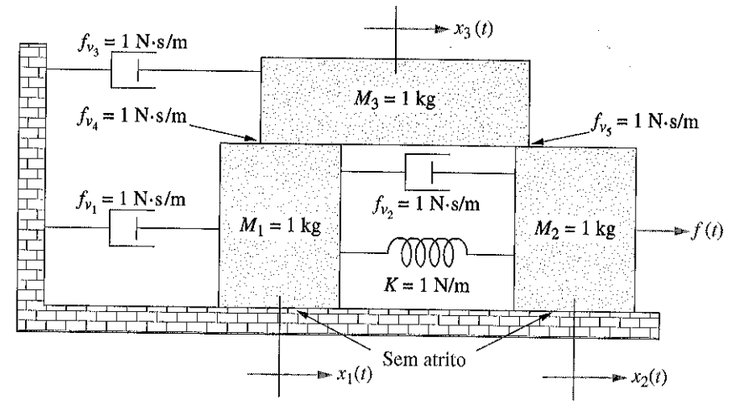


Fig. P3.4

5. Represente o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P3.5 no espaço de estados, onde $x_1(t)$ é a saída.

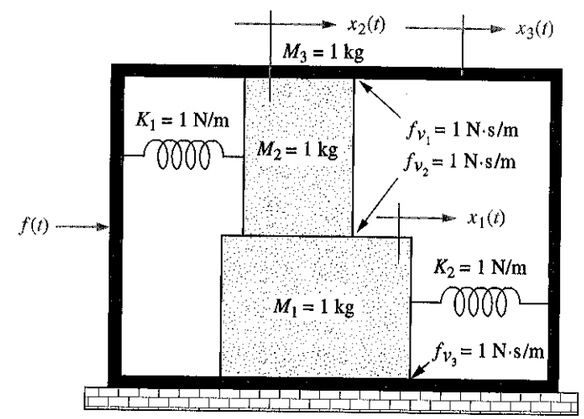


Fig. P3.5

6. Represente o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P3.6 no espaço de estados, onde $\theta_1(t)$ é a saída.

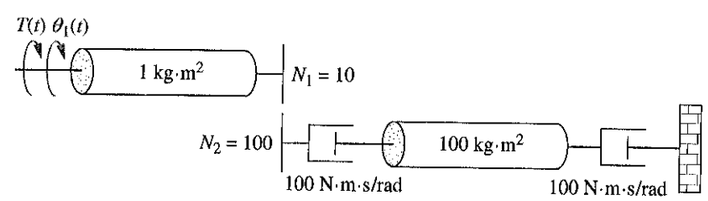


Fig. P3.6

7. Represente o sistema mostrado na Fig. P3.7 no espaço de estados, onde $\theta_L(t)$ é a saída.

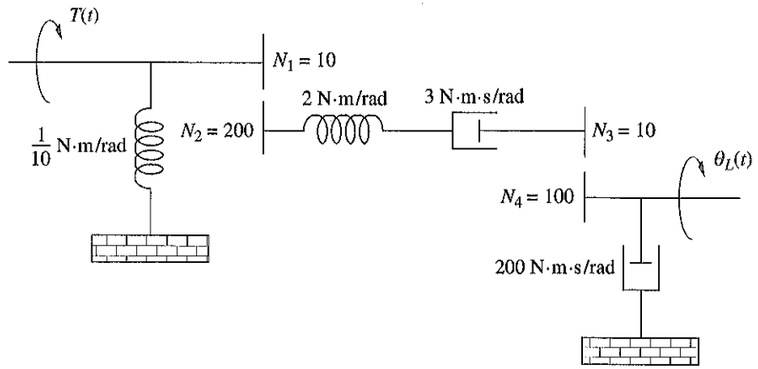


Fig. P3.7

8. Mostre que o sistema da Fig. 3.7 no texto conduz a uma função de transferência de quarta ordem se relacionarmos o deslocamento de qualquer das massas à força aplicada, e a um sistema de terceira ordem se relacionarmos a velocidade à força aplicada.

9. Obtenha a representação no espaço de estados em variáveis de fase para cada um dos sistemas mostrados na Fig. P3.8.

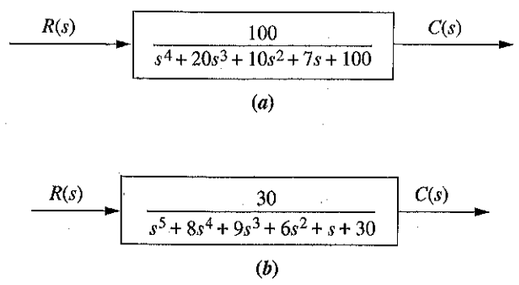


Fig. P3.8

MATLAB

10. Repita o Problema 9 usando o MATLAB.

11. Obtenha a representação no espaço de estados em variáveis de fase para cada um dos sistemas mostrados na Fig. P3.9.

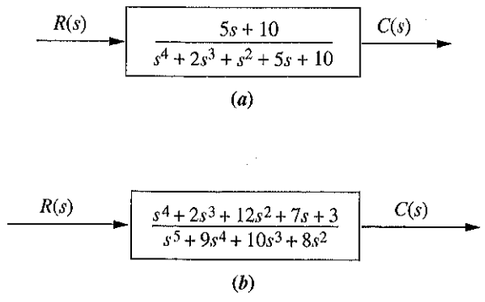


Fig. P3.9

MATLAB

12. Repita o Problema 11 usando o MATLAB.

13. Represente a seguinte função de transferência no espaço de estados. Dê sua resposta na forma matricial vetorial.

$$T(s) = \frac{(s^2 + 3s + 7)}{(s+1)(s^2 + 5s + 4)}$$

14. Obtenha a função de transferência, $G(s) = Y(s)/R(s)$, para cada um dos sistemas representados no espaço de estados.

a.
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} r$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}$$

b.
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} r$$
$$y = [1 \quad 3 \quad 6]\mathbf{x}$$

c.
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} r$$
$$y = [1 \quad -4 \quad 3]\mathbf{x}$$

MATLAB

15. Use o MATLAB para obter a função de transferência, $G(s) = Y(s)/R(s)$, para cada um dos sistemas representados no espaço de estados.

a.
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & -9 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} r$$
$$y = [1 \quad 3 \quad 4 \quad 6]\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ -7 & 6 & -3 & -4 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} r$$
$$y = [1 \quad -2 \quad -9 \quad 7 \quad 6]\mathbf{x}$$

Matemática Simbólica

16. Repita o Problema 15 usando o MATLAB, a *Toolbox* de Matemática Simbólica e a Eq. (3.73).

17. Os giroscópios são usados em veículos espaciais, aviões e navios para fazer navegação inercial. O giroscópio mostrado na Fig. P3.10 é um girômetro cujo movimento angular do quadro interno é restringido por meio de molas fixadas entre os quadros interno e externo (carcaça), como mostrado. Uma velocidade angular em torno do eixo z faz com que o rotor execute uma precessão em torno do eixo x. Assim, a entrada é uma velocidade angular em torno do eixo z e a saída é um deslocamento angular em torno do eixo x. Como o quadro externo é solidário ao veículo, o deslocamento angular em torno do eixo x é uma medida da velocidade angular do veículo em torno do eixo z. A equação do movimento é

$$J_x \frac{d^2\theta_x}{dt^2} + D_x \frac{d\theta_x}{dt} + K_x\theta_x = J\omega \frac{d\theta_z}{dt}$$

Represente o giroscópio no espaço de estados.

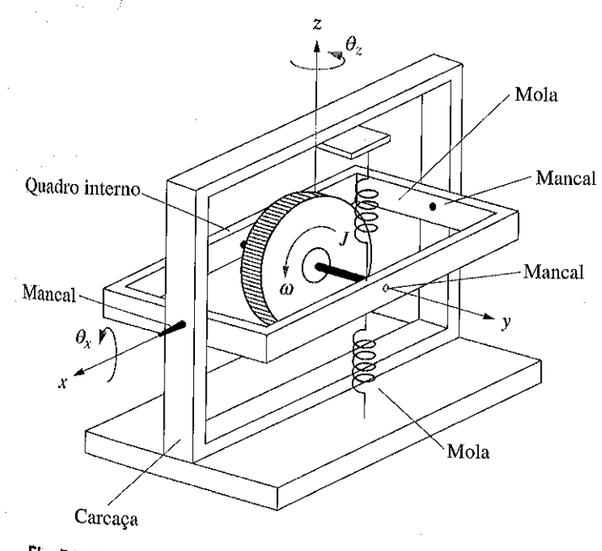


Fig. P3.10 Sistema giroscópico

18. Um míssil em vôo, como mostrado na Fig. P3.11, está submetido a diversas forças: empuxo, sustentação, arrasto e ação da gravidade. O míssil voa com um ângulo de ataque, α, em relação ao eixo longitudinal, criando sustentação. Para manobrar o míssil controla-se o ângulo, ϕ, do corpo do míssil em relação à vertical, movendo angularmente o motor propulsor na parte traseira. A função de transferência relacionando o ângulo, ϕ, ao deslocamento, δ, do motor é da forma

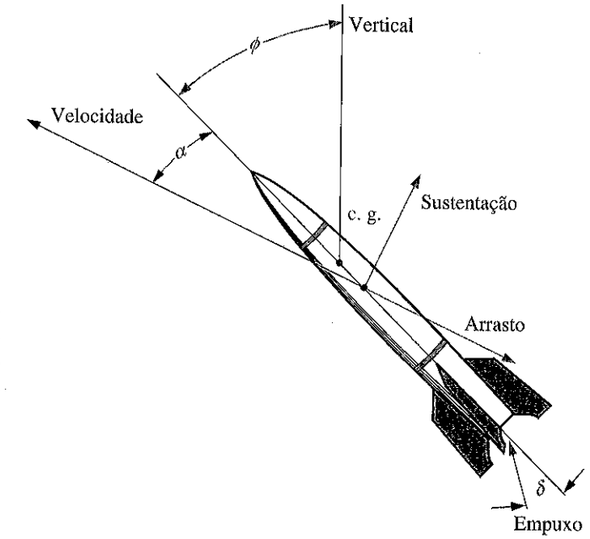


Fig. P3.11 Míssil

$$\frac{\Phi(s)}{\delta(s)} = \frac{K_a s + K_b}{K_3 s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_0}$$

Representar o controle de manobra do míssil no espaço de estados.

19. Dados o servomotor CC e a carga mostrados na Fig. P3.12, representar o sistema no espaço de estados, onde as variáveis de estado são a corrente de armadura, i_a, o deslocamento angular da carga, θ_L, e a velocidade angular da carga, ω_L. Admitir que a saída seja o deslocamento angular da armadura. Não desprezar o efeito da indutância.

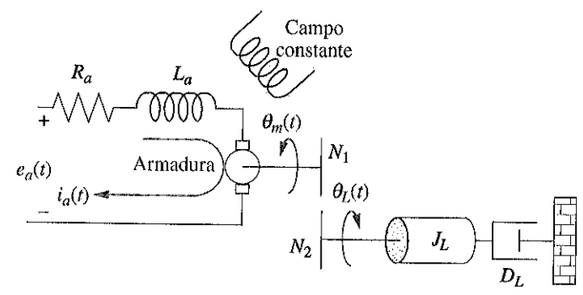


Fig. P3.12 Motor e carga

20. Considerar o sistema mecânico da Fig. P3.13. Se a mola for não-linear, e a força, F_s, necessária para deformá-la for $F_s = 2x_1^2$, representar o sistema no espaço de estados linearizado em torno de $x_1 = 1$ se a saída for x_2.

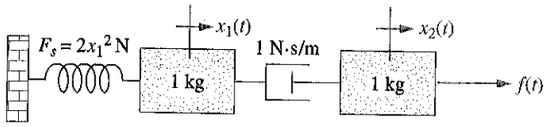


Fig. P3.13 Sistema mecânico não-linear

21. O retorno de robôs a um ponto de referência, baseado em imagens, pode ser implementado gerando-se os comandos de entrada de rumo para um sistema de manobra baseado no seguinte algoritmo de guiamento: suponha que o robô mostrado na Fig. P3.14(*a*) deva ir do ponto *R* para um alvo, ponto *T*, como mostrado na Fig. P3.14(*b*). Se $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$ e $\mathbf{R}_z$ são vetores do robô a cada marco de referência, *X*, *Y* e *Z*, respectivamente, e $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$ e $\mathbf{T}_z$ são vetores do alvo a cada marco de referência, respectivamente, então os comandos de rumo devem acionar o robô para minimizar $\mathbf{R}_x - \mathbf{T}_x$, $\mathbf{R}_y - \mathbf{T}_y$ e $\mathbf{R}_z - \mathbf{T}_z$ simultaneamente, uma vez que as diferenças tenderão a zero se o robô alcançar o alvo (Hong, 1992). Se a Fig. P3.14(*c*) representa o sistema de controle que manobra o robô, represente cada bloco — controlador, rodas e veículo — no espaço de estados.

22. Considerar a aeronave militar F4-E mostrada na Fig. P3.15(*a*), onde a aceleração normal, a_n, e a velocidade angular em arfagem, q, são controladas pela deflexão do profundor, δ_e, sobre os estabilizadores horizontais, e pela deflexão das superfícies aerodinâmicas dianteiras (*canards*), δ_c. Um comando de deflexão, δ_{com}, como mostrado na Fig. P3.15(*b*), é usado para efetuar uma alteração em ambas as deflexões δ_e e δ_c. As relações são

$$\frac{\delta_e(s)}{\delta_{com}(s)} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

$$\frac{\delta_c(s)}{\delta_{com}(s)} = \frac{K_c/\tau}{s + 1/\tau}$$

Estas deflexões produzem, através da dinâmica longitudinal da aeronave, a_n e q. As equações de estado descrevendo os efeitos de δ_{com} sobre a_n e q são dadas por (Cavallo, 1992).

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_n \\ \dot{q} \\ \dot{\delta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}702 & 50{,}72 & 263{,}38 \\ 0{,}22 & -1{,}418 & -31{,}99 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ q \\ \delta_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -272{,}06 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} \delta_{com}$$

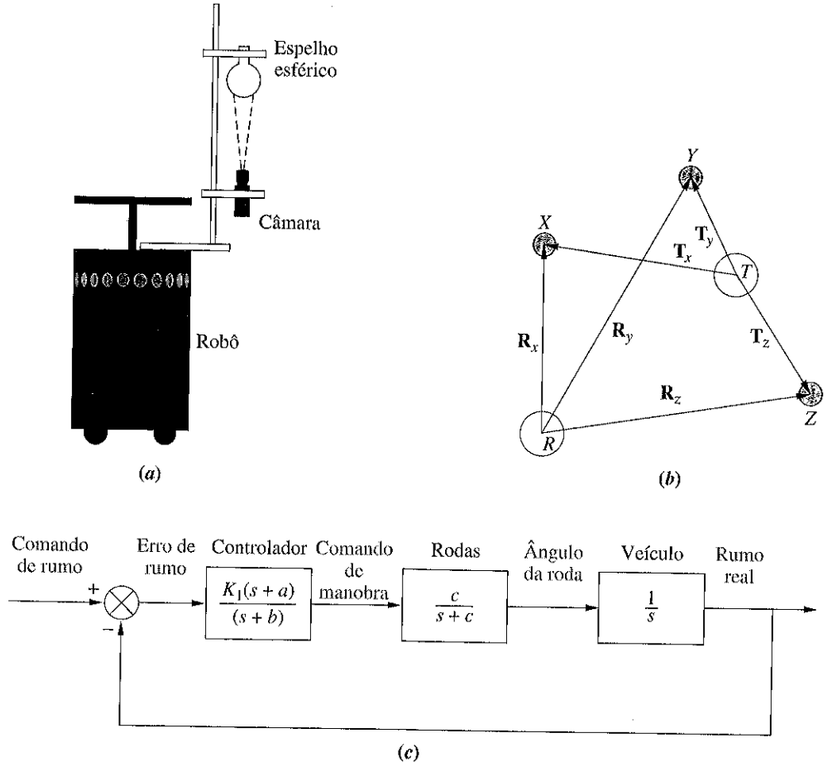


Fig. P3.14 a. Robô com sistema de imagem por televisão (© 1992 IEEE); **b.** diagrama vetorial mostrando o conceito por trás do acompanhamento automático baseado em imagem (© 1992 IEEE); **c.** sistema de controle de rumo

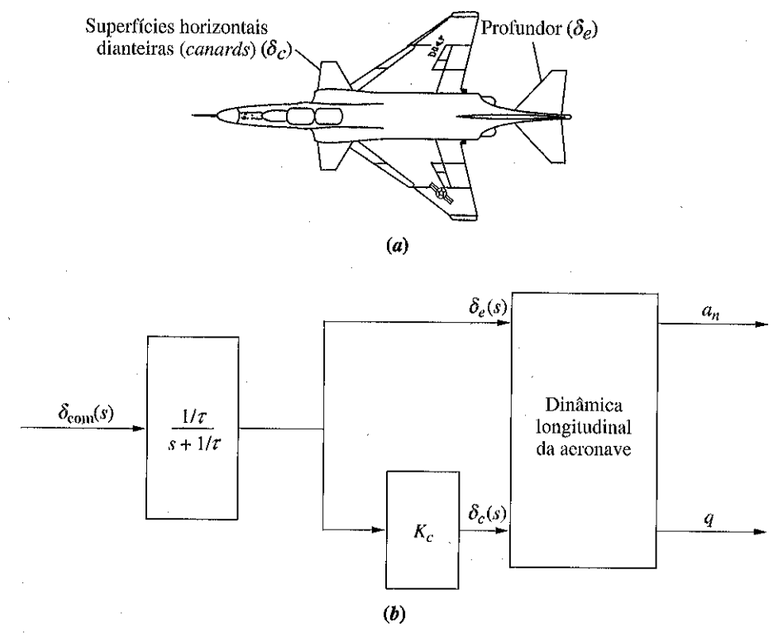


Fig. P3.15 a. F4-E com *canards* (© 1992 AIAA); **b.** sistema de controle de vôo a malha aberta (© 1992 AIAA)

Obter as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{A_n(s)}{\delta_{com}(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{Q(s)}{\delta_{com}(s)}$$

23. Os manipuladores robóticos modernos que atuam diretamente sobre o ambiente-alvo devem ser controlados de modo que as forças de impacto bem como as forças de estado estacionário não danifiquem o alvo. Ao mesmo tempo, o manipulador deve fornecer força suficiente para executar a tarefa. Para desenvolver um sistema de controle para regular estas forças, há necessidade de modelar o manipulador robótico e o ambiente-alvo. Supondo o modelo mostrado na Fig. P3.16, represente no espaço de estados, o manipulador e o ambiente sob as seguintes condições (Chiu, 1997):

a. O manipulador não está em contato com o ambiente-alvo.
b. O manipulador está em contato constante com o ambiente-alvo.

Problema Progressivo de Análise e Projeto

24. Pantógrafo para ferrovia de alta velocidade. A Fig. P2.35(*b*) mostra um modelo de sistema mecânico em translação relativo a um pantógrafo para ferrovia de alta velocidade, usado para fornecer energia elétrica a um trem a partir de uma catenária suspensa (O'Connor, 1997). Representar o pantógrafo no espaço de estados, onde a saída é o deslocamento da parte superior do pantógrafo, $y_h(t) - y_{cat}(t)$.

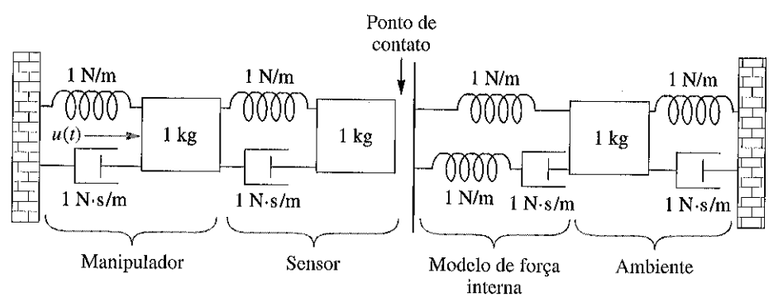


Fig. P3.16 Manipulador robótico e ambiente-alvo (© 1997 IEEE)

Bibliografia

Carlson, L. E., and Griggs, G. E. *Aluminum Catenary System Quarterly Report.* Technical Report Contract Number DOT-FR-9154, U.S. Department of Transportation 1980.

Cavallo, A.; De Maria, G.; and Verde, L. Robust Flight Control Systems: A Parameter Space Design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 5, September–October 1992, pp. 1207–1215.

Cereijo, M. R. State Variable Formulations. *Instruments and Control Systems,* December 1969, pp. 87–88.

Chiu, D. K., and Lee, S. Design and Experimentation of a Jump Impact Controller. *IEEE Control Systems,* June 1997, pp. 99–106.

Cochin, I. *Analysis and Design of Dynamic Systems.* Harper & Row, New York, 1980.

Elkins, J. A. *A Method for Predicting the Dynamic Response of a Pantograph Running at Constant Speed under a Finite Length of Overhead Equipment.* Technical Report TN DA36, British Railways, 1976.

Franklin, G. F.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

Hong, J.; Tan, X.; Pinette, B.; Weiss, R.; and Riseman, E. M. Image-Based Homing. *IEEE Control Systems,* February 1992, pp. 38–45.

Inigo, R. M. Observer and Controller Design for D.C. Positional Control Systems Using State Variables. *Transactions, Analog/Hybrid Computer Educational Society,* December 1974. West Long Branch, N.J., pp. 177–189.

Kailath, T. *Linear Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

Kandel, A. Analog Simulation of Groundwater Mining in Coastal Aquifers. *Transactions, Analog/Hybrid Computer Educational Society,* November 1973. West Long Branch, N.J., pp. 175–183.

Lordi, N. G. Analog Computer Generated Lecture Demonstrations in Pharmacokinetics. *Transactions, Analog/Hybrid Computer Educational Society,* November 1972. West Long Branch, N.J., pp. 217–222.

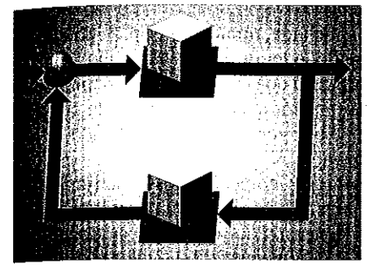
O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Philco Technological Center. *Servomechanism Fundamentals and Experiments.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

Riegelman, S., et al. Shortcomings in Pharmacokinetic Analysis by Conceiving the Body to Exhibit Properties of a Single Compartment. *Journal of Pharmaceutical Sciences,* vol. 57, no. 1, 1968, pp. 117–123.

Timothy, L. K., and Bona, B. E. *State Space Analysis: An Introduction.* McGraw-Hill, New York, 1968.

CAPÍTULO 4



Resposta no Domínio do Tempo

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como obter a resposta no domínio do tempo a partir da função de transferência.
- Como usar pólos e zeros para determinar a resposta de um sistema de controle.
- Como descrever quantitativamente a resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem.
- Como aproximar sistemas de maior ordem por sistemas de primeira e de segunda ordem.
- Como visualizar os efeitos de não-linearidades na resposta de sistemas no domínio do tempo.
- Como obter a resposta no domínio do tempo a partir da representação no espaço de estados.

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posição da antena em azimute mostrada na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de (1) prever, por inspeção, a forma da resposta de velocidade angular da carga a malha aberta, devida a uma entrada de tensão em degrau no amplificador de potência; (2) descrever quantitativamente a resposta transitória do sistema a malha aberta; (3) deduzir a expressão da saída em velocidade angular a malha aberta para uma entrada em degrau de tensão; (4) obter a representação no espaço de estados do sistema a malha aberta; (5) plotar a resposta do sistema a malha aberta a um degrau de velocidade usando simulação em computador.
- Dada a malha de controle em arfagem do Veículo Submersível Não-tripulado (UFSS)[1] mostrada na contracapa traseira, você deverá ser capaz de prever, obter e plotar a resposta da dinâmica do veículo a um comando de entrada em degrau. Além disso, você será capaz de calcular o efeito de zeros e de pólos de maior ordem do sistema sobre a resposta. Você também será capaz de calcular a resposta em rolamento de um navio no mar.

[1]Do inglês *Unmanned Free-Swimming Submersible.* (N.T.)

4.1 Introdução

No Cap. 2 mostramos como as funções de transferência podem representar sistemas lineares e invariantes no tempo. No Cap. 3 os sistemas foram representados diretamente no domínio do tempo por intermédio das equações de estado e de saída. Depois que o engenheiro obtém uma representação de um subsistema, este é analisado através das respostas transitória e de estado estacionário para ver se estas características conduzem ao comportamento desejado. Este capítulo se destina à análise da resposta transitória de sistemas.

Pareceria mais lógico prosseguir com a modelagem de sistemas a malha fechada, tratada no Cap. 5, do que interromper a seqüência de modelagem com a análise apresentada aqui. Contudo, o leitor não deverá ir tão longe na representação de sistemas sem conhecer como aplicar o esforço despendido. Em conseqüência, este capítulo demonstra as aplicações da representação de sistemas no cálculo da resposta transitória a partir do modelo do sistema. Logicamente, esta abordagem não está distante da realidade, uma vez que o engenheiro precisa, de fato, calcular a resposta de um subsistema antes de inseri-lo no sistema a malha fechada.

Depois de descrever uma ferramenta valiosa de análise e de projeto, pólos e zeros, começaremos a analisar nossos modelos para obter a resposta ao degrau de sistemas de primeira e de segunda ordem. A ordem se refere à ordem da equação diferencial equivalente que representa o sistema — a ordem do denominador da função de transferência depois do cancelamento de fatores comuns com o numerador ou o número de equações diferenciais de primeira ordem simultâneas necessárias para a representação no espaço de estados.

4.2 Pólos, Zeros e Resposta do Sistema

A resposta de saída de um sistema é a soma de duas respostas: a resposta *forçada* e a resposta *natural*.[2] Embora diversas técnicas, como a solução de equações diferenciais ou a aplicação da transformada de Laplace inversa, permitam calcular essa resposta, tais técnicas são trabalhosas e consomem muito tempo. A produtividade é favorecida pelas técnicas de análise e de projeto que produzam resultados com um mínimo de tempo. Se a técnica for tão rápida que seja possível obter o resultado desejado por inspeção, usamos algumas vezes o atributo *qualitativo* para descrever o método. O uso de pólos e zeros e de sua relação com a resposta de sistemas no domínio do tempo é uma dessas técnicas. O aprendizado dessa relação permite o "manuseio" qualitativo de problemas. O conceito de pólos e zeros, fundamental na análise e no projeto de sistemas de controle, simplifica o cálculo da resposta de um sistema. O leitor é encorajado a dominar os conceitos de pólos e zeros e suas aplicações a problemas ao longo do texto. Comecemos com duas definições.

Pólos de uma Função de Transferência

Os *pólos* de uma função de transferência são (1) os valores da variável, s, da transformada de Laplace que fazem com que a função de transferência se torne infinita ou (2) quaisquer raízes do denominador da função de transferência que sejam comuns às raízes do numerador.

Estritamente falando, os pólos de uma função de transferência satisfazem o (1) da definição. Por exemplo, as raízes do polinômio característico no denominador são valores de s que tornam a função de transferência infinita; portanto, são pólos. Contudo, se um fator do denominador puder ser cancelado com um fator igual do numerador, a raiz desse fator não mais fará com que a função de transferência se torne infinita. Em sistemas de controle, nos referimos à raiz do fator cancelado em denominador como pólo, mesmo que a função de transferência não se torne infinita para este valor. Daí termos incluído (2) na definição.

Zeros de uma Função de Transferência

Os *zeros* de uma função de transferência são (1) os valores da variável, s, da transformada de Laplace que fazem com que a função de transferência se torne igual a zero ou (2) quaisquer raízes do numerador da função de transferência que sejam comuns às raízes do denominador.

Estritamente falando, os zeros de uma função de transferência satisfazem o (1) da definição. Por exemplo, as raízes do polinômio do numerador são valores de s que tornam a função de transferência nula; portanto, são zeros. Contudo, se um fator do numerador puder ser cancelado com um fator igual do denominador, a raiz desse fator não mais fará com que a função de transferência se torne nula. Em sistemas de controle, nos referimos à raiz do fator cancelado em numerador como zero, mesmo que a função de transferência não se torne nula para este valor. Daí termos incluído (2) na definição.

Pólos e Zeros de um Sistema de Primeira Ordem: Um Exemplo

Dada a função de transferência $G(s)$ na Fig. 4.1(a), há um pólo em $s = -5$ e um zero em -2. Estes valores são plotados no plano complexo s na Fig. 4.1(b) usando um $\times$ para o pólo e um $\bigcirc$ para o zero. Para mostrar as propriedades dos pólos e zeros, obtenhamos a resposta do sistema a um degrau unitário. Multiplicando a função de transferência da Fig. 4.1(a) pela transformada de um degrau resulta

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5} \tag{4.1}$$

onde

$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s \to 0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s \to -5} = \frac{3}{5}$$

Assim,

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t} \tag{4.2}$$

Com base no desenvolvimento resumido na Fig. 4.1(c), tiramos as seguintes conclusões:

1. Um pólo da função de entrada gera a forma da resposta *forçada* (isto é, o pólo na origem gerou a função degrau na saída).
2. Um pólo da função de transferência gera a forma da resposta *natural* (isto é, o pólo em -5 gerou e^{-5t}).
3. Um pólo sobre o eixo real gera uma resposta *exponencial* da forma $e^{-\alpha t}$, onde $-\alpha$ é a localização do pólo sobre o eixo real. Assim, quanto mais à esquerda fique situado o pólo sobre o semi-eixo real negativo, tanto mais rápido será o decaimento da resposta transitória exponencial para zero (isto é, uma vez mais o pólo em -5 gerou e^{-5t}; ver Fig. 4.2 para o caso geral).
4. Os pólos e zeros geram as *amplitudes* para ambas as respostas, natural e forçada (isto pode ser visto a partir dos cálculos de A e B na Eq. (4.1)).

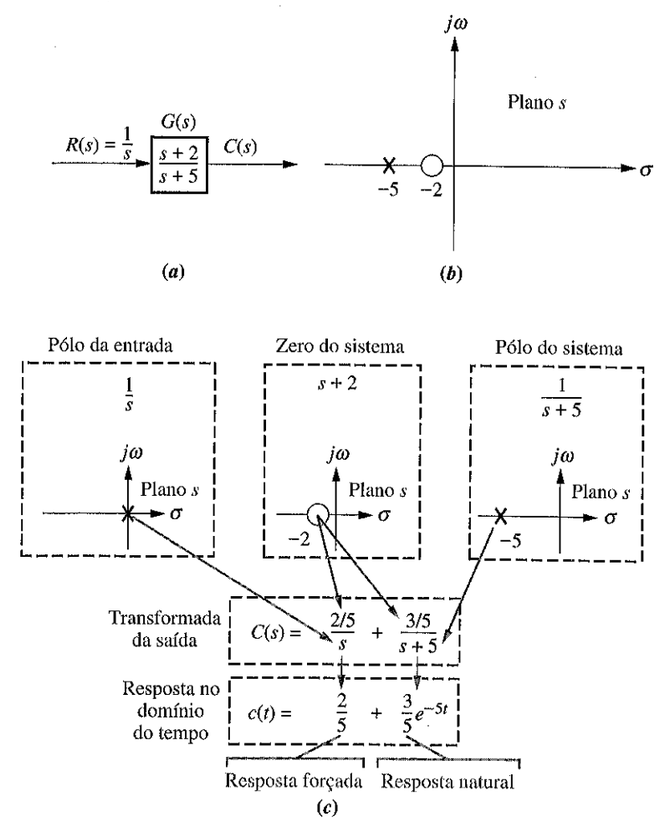


Fig. 4.1 a. Sistema mostrando entrada e saída; **b.** diagrama de pólos e zeros do sistema; **c.** evolução de uma resposta de sistema. Siga as setas voltadas para baixo para ver a evolução dos componentes da resposta gerada pelo pólo ou pelo zero.

[2] A resposta forçada é também chamada de *resposta em estado estacionário*, ou *solução particular*. A resposta natural é também chamada *solução homogênea*.

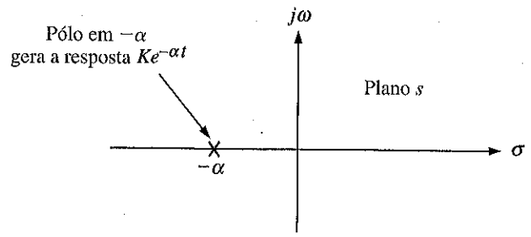


Fig. 4.2 Efeito de um pólo real sobre a resposta transitória

Vejamos agora um exemplo para mostrar a técnica de utilizar pólos para obter a forma da resposta do sistema. Aprenderemos a escrever a forma da resposta por inspeção. Cada pólo da função de transferência do sistema sobre o eixo real gera uma resposta exponencial que é uma componente da resposta natural. O pólo da entrada gera a resposta forçada.

Exemplo 4.1

Cálculo da resposta usando pólos

Problema Dado o sistema da Fig. 4.3, escrever a saída, $c(t)$, em termos genéricos. Especificar as partes forçada e natural da solução.

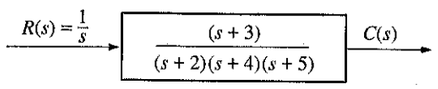


Fig. 4.3 Sistema para o Exemplo 4.1

Solução Por inspeção, cada pólo do sistema gera uma exponencial como parte da resposta natural. O pólo da entrada gera a resposta forçada. Por conseguinte,

$$C(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s}}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{\frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{(s+4)} + \frac{K_4}{(s+5)}}_{\text{Resposta natural}} \tag{4.3}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, obtemos

$$c(t) = \underbrace{K_1}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{K_2e^{-2t} + K_3e^{-4t} + K_4e^{-5t}}_{\text{Resposta natural}} \tag{4.4}$$

Exercício de Avaliação 4.1

Problema Um sistema possui uma função de transferência $G(s) = \dfrac{10\,(s+4)(s+6)}{(s+1)(s+7)(s+8)\,(s+10)}$.

Escrever, por inspeção, a saída, $c(t)$, em termos genéricos se a entrada for um degrau unitário.

Resposta: $c(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-7t} + De^{-8t} + Ee^{-10t}$.

Nesta seção, você aprendeu que os pólos determinam a natureza da resposta no domínio do tempo: os pólos da função de entrada determinam a forma da resposta forçada e os pólos da função de transferência determinam a forma da resposta natural. Os zeros e pólos da função de entrada ou da função de transferência contribuem para as amplitudes das partes componentes da resposta total. Para concluir, pólos sobre o eixo real geram respostas exponenciais. Discutiremos agora sistemas de primeira ordem, sem zeros, para definir uma especificação de desempenho deste sistema.

4.3 Sistemas de Primeira Ordem

Um sistema de primeira ordem sem zeros pode ser descrito pela função de transferência mostrada na Fig. 4.4(*a*). Se a entrada for um degrau unitário, onde $R(s) = 1/s$, a transformada de Laplace da resposta ao degrau será $C(s)$, onde

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)} \tag{4.5}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, a resposta ao degrau é dada por

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at} \tag{4.6}$$

onde o pólo da entrada situado na origem gerou a resposta forçada $c_f(t) = 1$, e o pólo do sistema em $-a$, como mostra a Fig. 4.4(*b*), gerou a resposta natural $c_n(t) = -e^{-at}$. A Eq. (4.6) está plotada na Fig. 4.5.

Examinemos a importância do parâmetro a, o único parâmetro necessário para descrever a resposta transitória. Quando $t = 1/a$,

$$e^{-at}\big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0{,}37 \tag{4.7}$$

ou

$$c(t)\big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at}\big|_{t=1/a} = 1 - 0{,}37 = 0{,}63 \tag{4.8}$$

Usamos agora as Eqs. (4.6), (4.7) e (4.8) para definir três especificações de desempenho da resposta transitória.

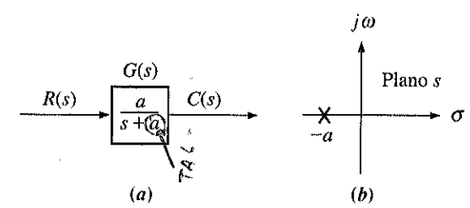


Fig. 4.4 a. Sistema de primeira ordem; **b.** gráfico do pólo

Constante de Tempo

Chamamos $1/a$ de *constante de tempo* da resposta. Com base na Eq. (4.7), podemos descrever a constante de tempo como o tempo necessário para que a resposta e^{-at} se reduza a 37% do seu valor inicial. Alternativamente, com base na Eq. (4.8), a constante de tempo é o tempo necessário para que a resposta ao degrau alcance 63% do seu valor final (ver Fig. 4.5).

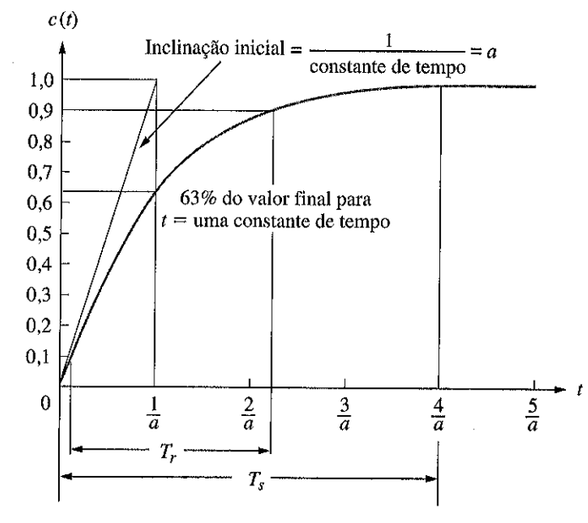


Fig. 4.5 Resposta de um sistema de primeira ordem a um degrau unitário

O inverso da constante de tempo é homogêneo a 1/segundos, ou seja, a freqüência. Assim, podemos chamar o parâmetro a de *freqüência exponencial*. Como a derivada de e^{-at} é $-a$ para $t = 0$, a é a taxa inicial de variação da exponencial em $t = 0$. Portanto, a constante de tempo pode ser considerada uma especificação da resposta transitória de um sistema de primeira ordem, uma vez que ela está relacionada com a velocidade com que o sistema responde a uma entrada em degrau.

A constante de tempo também pode ser calculada a partir do diagrama de pólos (ver Fig. 4.4(*b*)). Como o pólo da função de transferência é $-a$, podemos dizer que o pólo fica localizado no *inverso* da constante de tempo, e quanto mais longe do eixo imaginário ele se situe, tanto mais rápida será a resposta transitória.

Vejamos outras especificações da resposta transitória, como *tempo de subida*, T_r, e *tempo de assentamento*, T_s, como mostrado na Fig. 4.5.

Tempo de Subida, T_r

O *tempo de subida* é definido como o tempo necessário para que a forma de onda vá de 0,1 a 0,9 do seu valor final. O tempo de subida é obtido resolvendo a Eq. (4.6) para a diferença entre os valores de t para os quais $c(t) = 0{,}9$ e $c(t) = 0{,}1$. Portanto,

$$T_r = \frac{2{,}31}{a} - \frac{0{,}11}{a} = \frac{2{,}2}{a} \tag{4.9}$$

Tempo de Assentamento, T_s

O *tempo de assentamento* é definido como o tempo necessário para que a resposta alcance uma faixa de valores de 2% em torno do valor final e aí permaneça.[3] Fazendo $c(t) = 0{,}98$ na Eq. (4.6) e resolvendo em função de t, obtemos o tempo de assentamento como

$$T_s = \frac{4}{a} \tag{4.10}$$

Funções de Transferência de Primeira Ordem Obtidas Experimentalmente

Freqüentemente não é possível ou prático obter analiticamente a função de transferência de um sistema. Possivelmente o sistema é fechado e as partes componentes não são identificáveis facilmente. Como a função de transferência é uma representação do sistema relacionando a entrada à saída, a resposta do sistema ao degrau pode levar à obtenção de uma representação mesmo que não seja conhecida a construção interna. Com uma entrada em degrau, podemos medir a constante de tempo e o valor de estado estacionário, a partir de cujos valores podemos calcular a função de transferência.

Considere um sistema de primeira ordem simples, $G(s) = K/(s + a)$, cuja resposta ao degrau é

$$C(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)} \tag{4.11}$$

Se pudermos identificar os valores de K e de a a partir de ensaios em laboratório, poderemos obter a função de transferência do sistema.

Por exemplo, suponha que a resposta ao degrau unitário seja dada na Fig. 4.6. Constatamos que ela possui as características de primeira ordem vistas anteriormente, como ausência de ultrapassagem e inclinação inicial não-nula. A partir da resposta medimos a constante de tempo, isto é, o tempo necessário para que a amplitude alcance 63% do seu valor final. Como o valor final é cerca de 0,72, a constante de tempo é calculada onde a curva atinge o valor $0{,}63 \times 0{,}72 = 0{,}45$, ou seja cerca de 0,13 s. Em conseqüência, $a = 1/0{,}13 = 7{,}7$.

Para determinar K, nos damos conta de que, com base na Eq. (4.11), a resposta forçada alcança o valor estacionário $K/a = 0{,}72$. Substituindo o valor de a, obtemos $K = 5{,}54$. Assim, a função de transferência do sistema é $G(s) = 5{,}54/(s + 7{,}7)$. É interessante observar que a resposta da Fig. 4.6 foi gerada usando a função de transferência, $G(s) = 5/(s + 7)$.

Estendamos agora os conceitos de pólos e zeros e de resposta transitória aos sistemas de segunda ordem.

[3]Estritamente falando, esta é a definição de *tempo de assentamento de 2%*. Outros valores percentuais podem ser usados, como por exemplo 5%. Ao longo deste livro utilizaremos a expressão *tempo de assentamento* para nos referir ao tempo de assentamento de 2%.

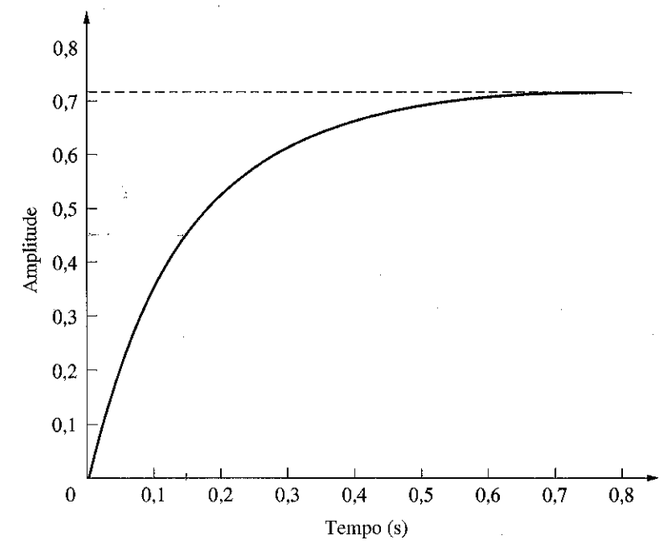


Fig. 4.6 Resultados de laboratório de um ensaio com resposta de um sistema ao degrau

Exercício de Avaliação 4.2

Problema Um sistema possui uma função de transferência $G(s) = \dfrac{50}{(s + 50)}$. Obter a constante de tempo, T_c, o tempo de assentamento, T_s, e o tempo de subida, T_r.

Respostas: $T_c = 0{,}02$ s, $T_s = 0{,}08$ s e $T_r = 0{,}044$ s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

4.4 Sistemas de Segunda Ordem: Introdução

Comparado com a simplicidade dos sistemas de primeira ordem, os sistemas de segunda ordem apresentam uma ampla gama de respostas que deve ser analisada e descrita. Enquanto nos sistemas de primeira ordem a variação de um parâmetro muda simplesmente a velocidade da resposta, as mudanças nos parâmetros do sistema de segunda ordem podem alterar a *forma* da resposta. Por exemplo, um sistema de segunda ordem pode apresentar características muito semelhantes às de um sistema de primeira ordem ou, dependendo dos valores dos componentes, apresentar oscilações puras ou amortecidas como resposta transitória.

Visando familiarizar o leitor com a gama variada de respostas antes de formalizar nossa discussão na próxima seção, veremos exemplos numéricos das respostas dos sistemas de segunda ordem mostradas na Fig. 4.7. Todos os exemplos são deduzidos a partir da Fig. 4.7(*a*), o caso geral, que tem dois pólos finitos e nenhum zero. O termo do numerador é simplesmente um escalar ou um fator multiplicativo da entrada que pode ter qualquer valor sem afetar a forma dos resultados deduzidos. Atribuindo valores apropriados a a e a b, podemos mostrar todas as formas possíveis de resposta transitória. A resposta ao degrau pode ser encontrada usando $C(s) = G(s)R(s)$, onde $R(s) = 1/s$, seguida de uma expansão em frações parciais e da aplicação da transformada de Laplace inversa. Os detalhes são deixados como problema de fim de capítulo, para o qual você deve rever a Seção 2.2.

Explicaremos agora cada uma das respostas e mostraremos como usar os pólos para determinar a natureza da resposta sem precisar executar o procedimento da expansão em frações parciais seguido da aplicação da transformada de Laplace inversa.

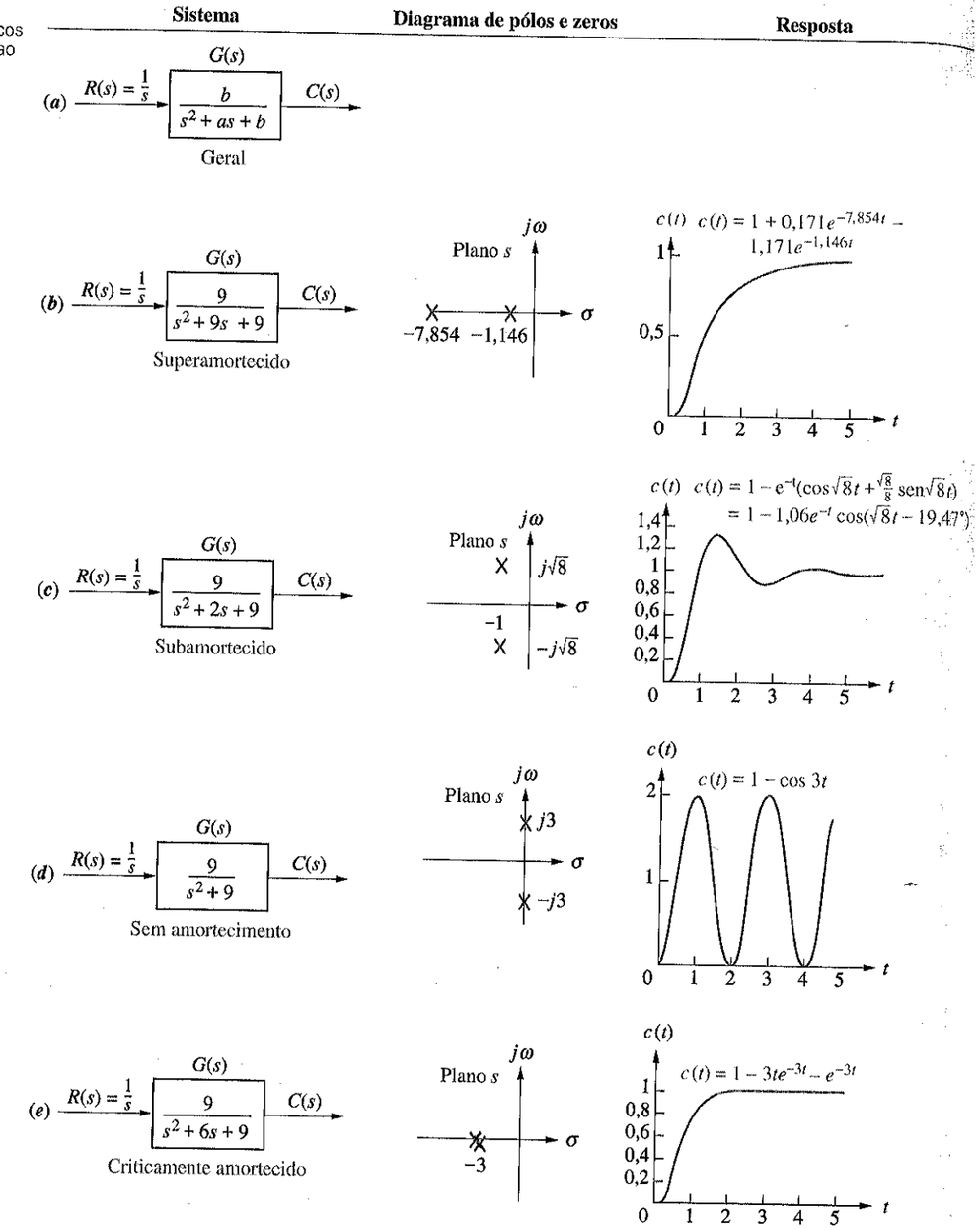
Resposta Superamortecida, Fig. 4.7(*b*)

Para esta resposta,

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)} = \frac{9}{s(s + 7{,}854)(s + 1{,}146)} \tag{4.12}$$

Esta função possui um pólo na origem que vem da entrada em degrau unitário e dois pólos reais provenientes do sistema. O pólo na origem devido à entrada gera uma resposta forçada de valor constante; cada um dos dois pólos do sistema, situados sobre o eixo real, gera uma resposta natural exponencial cuja freqüência exponencial é igual

Fig. 4.7 Sistemas de segunda ordem, gráficos de pólos e respostas ao degrau



à localização do pólo. Por conseguinte, a saída seria escrita como $c(t) = K_1 + K_2e^{-7,854t} + K_3e^{-1,146t}$. Esta resposta, mostrada na Fig. 4.7(*b*), é chamada *superamortecida*.[4] Observamos que os pólos nos falam da forma da resposta sem o cálculo enfadonho da transformada de Laplace inversa.

[4]Assim chamada porque o termo *superamortecido* se refere a uma grande absorção de energia pelo sistema, o que o impede de apresentar ultrapassagem e oscilação em torno do valor de estado estacionário para uma entrada em degrau. À medida que se reduz a absorção de energia, o sistema superamortecido se torna subamortecido e apresenta ultrapassagem.

Resposta Subamortecida, Fig. 4.7(c)

Para esta resposta,

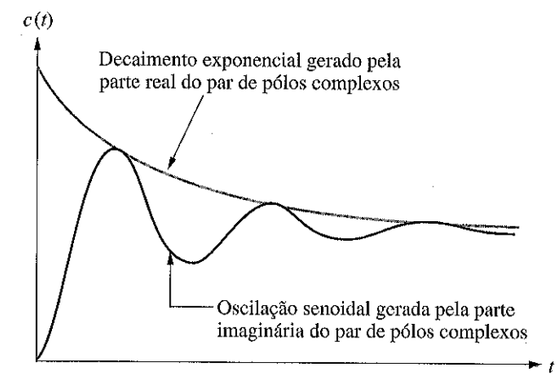
$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 2s + 9)} \tag{4.13}$$

Esta função possui um pólo na origem que vem da entrada em degrau unitário e dois pólos complexos provenientes do sistema. Compararemos agora a resposta do sistema de segunda ordem com os pólos que a produziram. Primeiro iremos comparar a localização do pólo com a função no domínio do tempo e, em seguida, compararemos a posição do pólo com o gráfico. Com base na Fig. 4.7(*c*), os pólos que geram a resposta natural estão situados em $s = -1 \pm j\sqrt{8}$. Comparando estes valores com $c(t)$ na mesma figura, vemos que a parte real do pólo coincide com a freqüência do decaimento exponencial da amplitude da senóide, enquanto a parte imaginária do pólo coincide com a freqüência da oscilação senoidal.

Comparemos agora a localização do pólo com o gráfico. A Fig. 4.8 mostra uma resposta senoidal amortecida genérica de um sistema de segunda ordem. A resposta transitória consiste em uma amplitude que decai exponencialmente, gerada pela parte real do pólo do sistema, multiplicada por uma forma de onda senoidal gerada pela parte imaginária do pólo. A constante de tempo do decaimento exponencial é igual ao inverso da parte real do pólo do sistema. O valor da parte imaginária é a freqüência real da senóide, como mostrado na Fig. 4.8. A esta freqüência da senóide é dado o nome de *freqüência de oscilação amortecida*, ω_d. Para finalizar, a resposta em estado estacionário (ao degrau unitário) foi gerada pelo pólo devido à entrada, localizada na origem. Chamamos este tipo de resposta mostrado na Fig. 4.8 de *resposta subamortecida*, que tende ao valor de estado estacionário através de uma resposta transitória que é uma oscilação amortecida.

O exemplo seguinte demonstra como o conhecimento da relação entre a localização do pólo e a resposta transitória pode levar rapidamente à forma da resposta sem calcular a transformada de Laplace inversa.

Fig. 4.8 Componentes da resposta ao degrau de sistema de segunda ordem gerados por pólos complexos

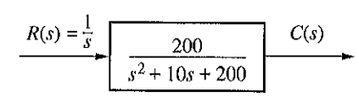


Exemplo 4.2

Forma da resposta subamortecida usando os pólos

Problema Escreva, por inspeção, a forma da resposta ao degrau do sistema da Fig. 4.9.

Fig. 4.9 Sistema para o Exemplo 4.2



Solução Primeiro, constatamos que a forma da resposta forçada do sistema é um degrau. Em seguida, obtemos a forma da resposta natural. Fatorando o denominador da função de transferência na Fig. 4.9, descobrimos que os pólos são $s = -5 \pm j13,23$. A parte real, -5, é a freqüência exponencial do amortecimento. É também o inverso da constante de tempo do decaimento das oscilações. A parte imaginária, 13,33, é a freqüência das oscilações

senoidais, em radianos por segundo.[5] Usando nossa discussão anterior e a Fig. 4.7(*c*) como guia, obtemos $c(t) = K_1 + e^{-5t}(K_2 \cos 13{,}23t + K_3 \operatorname{sen} 13{,}23t) = K_1 + K_4 e^{-5t}(\cos 13{,}23t - \phi)$, onde $\phi = \operatorname{tg}^{-1} K_3/K_2$, $K_4 = \sqrt{K_2^2 + K_3^2}$, e $c(t)$ é uma constante mais uma senóide amortecida exponencialmente.

Voltaremos à resposta subamortecida do sistema de segunda ordem nas Seções 4.5 e 4.6, onde iremos generalizar a discussão e deduzir alguns resultados que relacionam a posição do pólo a outros parâmetros da resposta.

Resposta sem Amortecimento, Fig. 4.7(*d*)

Para esta resposta,

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)} \tag{4.14}$$

Esta função possui um pólo na origem que vem da entrada em degrau unitário e dois pólos reais provenientes do sistema. O pólo na origem devido à entrada gera uma resposta forçada de valor constante, e os dois pólos do sistema, situados sobre o eixo imaginário em $\pm j3$, geram uma resposta natural senoidal cuja freqüência é igual à localização dos pólos sobre o eixo imaginário. Por conseguinte, a saída pode ser estimada como $c(t) = K_1 + K_4 \cos(3t - \phi)$. Este tipo de resposta, mostrado na Fig. 4.7(*d*), é chamado *sem amortecimento*. Observe que a ausência de uma parte real no par de pólos corresponde a uma exponencial que não decai. Matematicamente, a exponencial é $e^{-0t} = 1$.

Resposta Criticamente Amortecida, Fig. 4.7(*e*)

Para esta resposta,

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s + 3)^2} \tag{4.15}$$

Esta função possui um pólo na origem que vem da entrada em degrau unitário e dois pólos reais múltiplos provenientes do sistema. O pólo na origem devido à entrada gera uma resposta forçada de valor constante, e os dois pólos situados sobre o eixo real em -3 geram uma resposta natural consistindo em uma exponencial e uma exponencial multiplicada pelo tempo, onde a freqüência exponencial é igual à localização dos pólos reais. Por conseguinte, a saída seria escrita como $c(t) = K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-3t}$. Este tipo de resposta, mostrado na Fig. 4.7(*e*), é chamado *criticamente amortecido*. Respostas criticamente amortecidas são as mais rápidas possíveis sem a ultrapassagem que é característica da resposta subamortecida.

Resumiremos agora nossas observações. Nesta seção definimos as seguintes respostas naturais e obtivemos suas características:

1. *Respostas superamortecidas:*

   Pólos: Dois, reais, em $-\sigma_1$ e $-\sigma_2$.

   Resposta natural: Duas exponenciais com constantes de tempo com valor igual ao inverso das localizações dos pólos, ou seja

   $$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t}$$

2. *Respostas subamortecidas:*

   Pólos: Dois, complexos, em $-\sigma_d \pm j\omega_d$.

   Resposta natural: Senóide amortecida com uma envoltória exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da parte real do pólo. A freqüência angular da senóide, freqüência da oscilação amortecida, é igual à parte imaginária dos pólos, ou seja,

   $$c(t) = Ae^{-\sigma_d t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

3. *Respostas sem amortecimento:*

   Pólos: Dois, imaginários, em $\pm j\omega_1$.

   Resposta natural: Senóide não amortecida com freqüência angular igual à parte imaginária dos pólos, ou seja,

   $$c(t) = A \cos(\omega_1 t - \phi)$$

4. *Respostas criticamente amortecidas:*

   Pólos: Dois, reais, em $-\sigma_1$.

[5] Também chamada de freqüência angular. (N.T.)

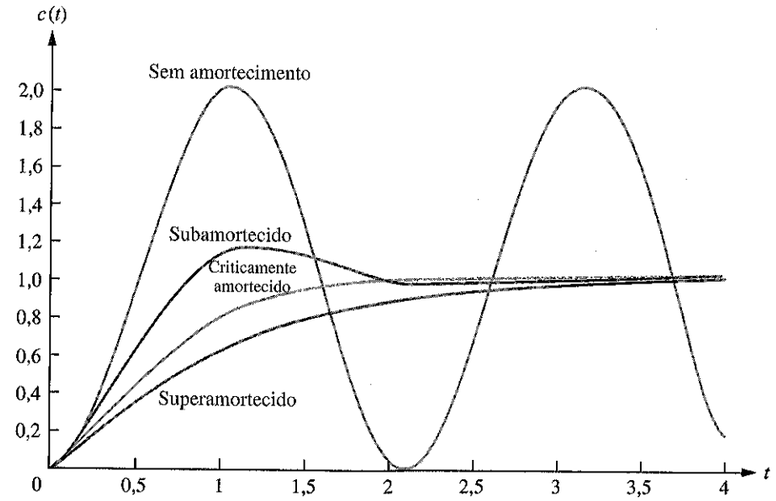


Fig. 4.10 Respostas ao degrau de sistemas de segunda ordem para os casos de amortecimento

Resposta natural: Um termo é uma exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da localização do pólo. Um outro termo é o produto de tempo, t, pela exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da localização do pólo, ou seja,

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 t e^{-\sigma_1 t}$$

As respostas ao degrau para os quatro casos de amortecimento discutidos nesta seção estão superpostas na Fig. 4.10. Observe que o caso criticamente amortecido caracteriza a separação entre os casos superamortecidos e os casos subamortecidos, e constitui a resposta mais rápida sem ultrapassagem.

Exercício de Avaliação 4.3

Problema: Escreva, por inspeção, a forma geral da resposta ao degrau para cada uma das seguintes funções de transferência:

a. $G(s) = \dfrac{400}{s^2 + 12s + 400}$

b. $G(s) = \dfrac{900}{s^2 + 90s + 900}$

c. $G(s) = \dfrac{225}{s^2 + 30s + 225}$

d. $G(s) = \dfrac{625}{s^2 + 625}$

Respostas:

a. $c(t) = A + Be^{-6t} \cos(19{,}08t + \phi)$

b. $c(t) = A + Be^{-78{,}54t} + Ce^{-11{,}46t}$

c. $c(t) = A + Be^{-15t} + Cte^{-15t}$

d. $c(t) = A + B \cos(25t + \phi)$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Na próxima seção, iremos formalizar e generalizar a discussão das respostas de segunda ordem e definir duas especificações usadas na análise e no projeto de sistemas de segunda ordem. Na Seção 4.6, focalizaremos o caso *subamortecido* e deduziremos algumas das especificações exclusivas desta resposta que utilizaremos mais adiante para análise e projeto.

4.5 O Sistema de Segunda Ordem Geral

Agora que nos familiarizamos com os sistemas de segunda ordem e suas respostas, iremos generalizar a discussão e estabelecer especificações quantitativas, definidas de modo que a resposta de um sistema de segunda ordem possa ser descrita para um projetista, sem a necessidade de esboçar a resposta. Nesta seção definimos duas especificações com significado físico. Estas grandezas podem ser usadas para descrever as características da resposta transitória de segunda ordem exatamente da mesma forma como as constantes de tempo descrevem a resposta de sistemas de primeira ordem. As duas grandezas são chamadas *freqüência natural* e *relação de amortecimento*. Definamos as grandezas formalmente.

Freqüência Natural, ω_n

A freqüência natural de um sistema de segunda ordem é a freqüência de oscilação do sistema sem amortecimento. Por exemplo, a freqüência de oscilação de um circuito *RLC* série com a resistência curto-circuitada será a freqüência natural.

Relação de Amortecimento, ζ

Antes de estabelecer nossa próxima definição, é necessária uma explanação. Já vimos que a resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem subamortecido é caracterizada por oscilações amortecidas. Nossa próxima definição é deduzida com base na necessidade de descrever quantitativamente esta oscilação de forma independente da escala de tempo. Assim, um sistema cuja resposta transitória durasse três ciclos em um milissegundo antes de atingir o estado estacionário teria a mesma medida de um sistema que percorresse três ciclos em um milênio antes de alcançar o estado estacionário. Por exemplo, a curva subamortecida na Fig. 4.10 apresenta uma medida associada que define sua forma. Esta medida permanece constante mesmo se mudarmos a base de tempo de segundos para milissegundos ou para milênios.

Uma definição viável para esta grandeza é a que compara a freqüência de decaimento exponencial da envoltória com a freqüência natural. Esta relação é constante qualquer que seja a escala de tempo da resposta. Além disso, o inverso, que é proporcional à relação entre o período natural e a constante de tempo exponencial, permanece o mesmo qualquer que seja a base de tempo.

Definimos a relação de amortecimento, ζ, como sendo

$$\zeta = \frac{\text{Freqüência exponencial de decaimento (rad/s)}}{\text{Freqüência natural (rad/s)}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\text{Período natural (s)}}{\text{Constante de tempo exponencial (s)}}$$

Revisemos agora nossa descrição do sistema de segunda ordem para levar em conta as novas definições. O sistema de segunda ordem geral mostrado na Fig. 4.7(*a*) pode ser transformado para mostrar as grandezas ζ e ω_n. Considere o sistema genérico

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \tag{4.16}$$

Sem amortecimento, os pólos estariam sobre o eixo $j\omega$, e a resposta seria uma senóide sem amortecimento. Para que os pólos sejam puramente imaginários, $a = 0$. Portanto,

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + b} \tag{4.17}$$

Por definição, a freqüência natural, ω_n, é a freqüência de oscilação deste sistema. Como os pólos deste sistema estão sobre o eixo $j\omega$ em $\pm j\sqrt{b}$,

$$\omega_n = \sqrt{b} \tag{4.18}$$

Portanto,

$$b = \omega_n^2 \tag{4.19}$$

Agora, o que é o termo a na Eq. (4.16)? Supondo o sistema subamortecido, os pólos complexos possuem uma parte real, σ, igual a $-a/2$. A magnitude deste valor é então a freqüência de decaimento exponencial descrita na Seção 4.4. Por conseguinte,

$$\zeta = \frac{\text{Freqüência exponencial de decaimento (rad/s)}}{\text{Freqüência natural (rad/s)}} = \frac{|\sigma|}{\omega_n} = \frac{a/2}{\omega_n} \tag{4.20}$$

de onde

$$a = 2\zeta\omega_n \tag{4.21}$$

Nossa função de transferência de segunda ordem genérica finalmente adquire a forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.22}$$

No exemplo a seguir determinamos os valores numéricos para ζ e ω_n igualando a função de transferência à Eq. (4.22).

Exemplo 4.3

Determinando ζ e ω_n para um sistema de segunda ordem

Problema Dada a função de transferência da Eq. (4.23), obter ζ e ω_n.

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4{,}2s + 36} \tag{4.23}$$

Solução Comparando as Eqs. (4.23) e (4.22), $\omega_n^2 = 36$, de onde $\omega_n = 6$. Além disso, $2\omega\zeta_n = 4{,}2$. Substituindo o valor de ω_n, $\zeta = 0{,}35$.

Agora que definimos ζ e ω_n, relacionemos estas grandezas à localização do pólo. Calculando os pólos da função de transferência na Eq. (4.22), resulta

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{4.24}$$

Da Eq. (4.24), constatamos que os vários casos de resposta de segunda ordem são uma função de ζ e estão resumidos na Fig. 4.11.[6]

No exemplo seguinte obteremos o valor numérico de ζ e determinaremos a natureza da resposta transitória.

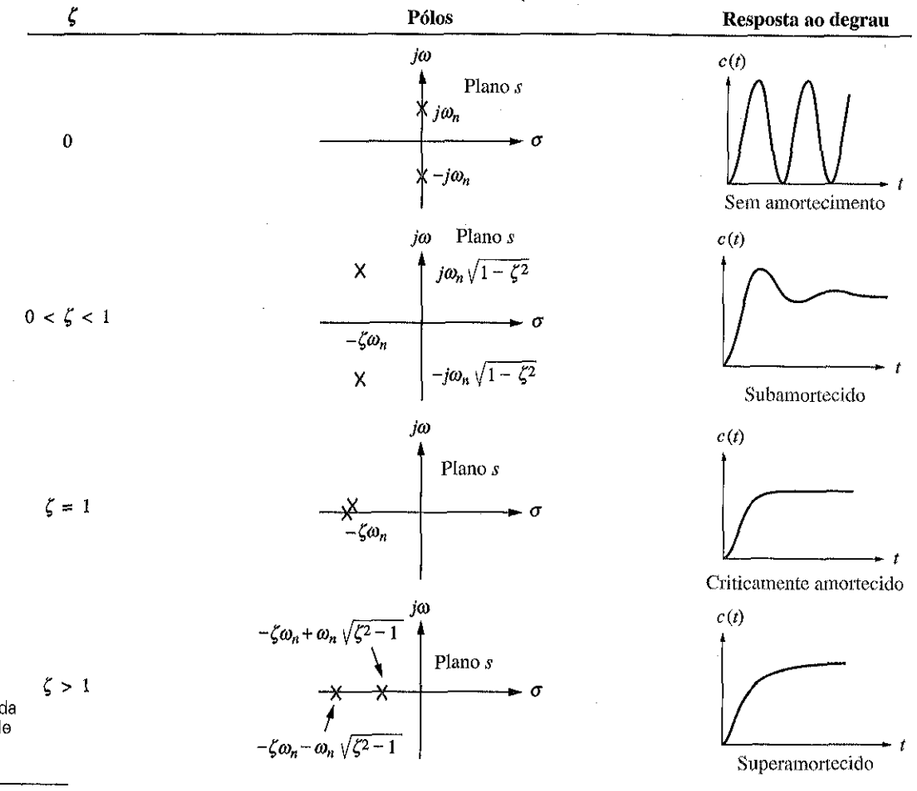


Fig. 4.11 Respostas de segunda ordem em função da relação de amortecimento

[6] O leitor deve verificar a Fig. 4.11 como exercício.

Exemplo 4.4

Caracterizando a resposta com base no valor de ζ

Problema Para cada um dos sistemas mostrados na Fig. 4.12, obter o valor de ζ e relatar o tipo de resposta esperado.

Solução Primeiro, identifique a forma desses sistemas com as formas mostradas nas Eqs. (4.16) e (4.22). Como $a = 2\zeta\omega_n$ e $\omega_n = \sqrt{b}$,

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}} \tag{4.25}$$

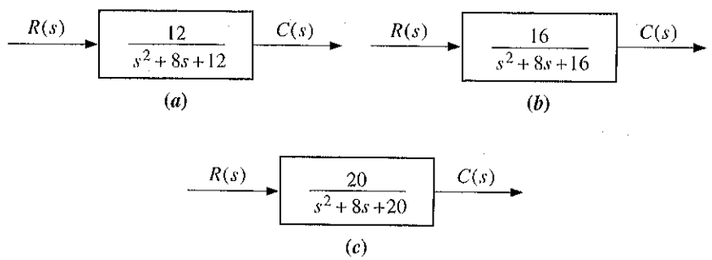


Fig. 4.12 Sistemas para o Exemplo 4.4

Usando os valores de a e de b de cada um dos sistemas da Fig. 4.12, obtemos $\zeta = 1{,}155$ para o sistema (a), que é, portanto, superamortecido, uma vez que $\zeta > 1$; $\zeta = 1$ para o sistema (b), que é, portanto, criticamente amortecido, e $\zeta = 0{,}894$ para o sistema (c), que é, portanto, subamortecido, uma vez que $\zeta = 1$.

Exercício de Avaliação 4.4

Problema: Para cada uma das funções de transferência do Exercício de Avaliação 4.3, faça o seguinte: (1) Obtenha os valores de ζ e de ω_n. (2) Caracterize a natureza da resposta.

Respostas:

a. $\zeta = 0{,}3$, $\omega_n = 20$, sistema subamortecido
b. $\zeta = 1{,}5$, $\omega_n = 30$, sistema superamortecido
c. $\zeta = 1$, $\omega_n = 15$, sistema criticamente amortecido
d. $\zeta = 0$, $\omega_n = 25$, sistema sem amortecimento

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção definimos duas especificações ou parâmetros de sistemas de segunda ordem: a freqüência natural, ω_n, e a relação de amortecimento, ζ. Vimos que a natureza da resposta obtida estava relacionada ao valor de ζ. A gama completa de respostas superamortecida, criticamente amortecida, subamortecida e sem amortecimento é produzida variando apenas a relação de amortecimento.

Agora que generalizamos a função de transferência de segunda ordem em termos de ζ e ω_n, analisemos a resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem *subamortecido*. Não será obtida apenas essa resposta em termos de ζ e de ω_n, mas serão definidas também outras especificações próprias do caso subamortecido.

4.6 Sistemas de Segunda Ordem Subamortecidos

O sistema de segunda ordem subamortecido, um modelo comum de problemas físicos, apresenta um comportamento único que deve ser desdobrado em itens. Tanto para a análise quanto para o projeto se faz necessária uma descrição detalhada da resposta subamortecida. Nosso primeiro objetivo é definir especificações associadas ao regime transitório de respostas subamortecidas. Em seguida, iremos relacionar estas especificações à localização de pólos, extraindo uma associação entre a localização dos pólos e a forma da resposta de segunda ordem subamortecida. Para finalizar, iremos vincular a localização dos pólos aos parâmetros do sistema, fechando assim a malha: uma resposta desejada gera os componentes do sistema que serão necessários para atendê-la.

Comecemos obtendo a resposta ao degrau do sistema de segunda ordem genérico da Eq. (4.22). A transformada da resposta, $C(s)$, é a transformada da entrada multiplicada pela função de transferência, ou seja

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.26}$$

onde se supõe $\zeta < 1$ (isto é, o caso subamortecido). Expandindo-se em frações parciais, através dos métodos descritos na Seção 2.2, Caso 3, resulta

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n) + \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \tag{4.27}$$

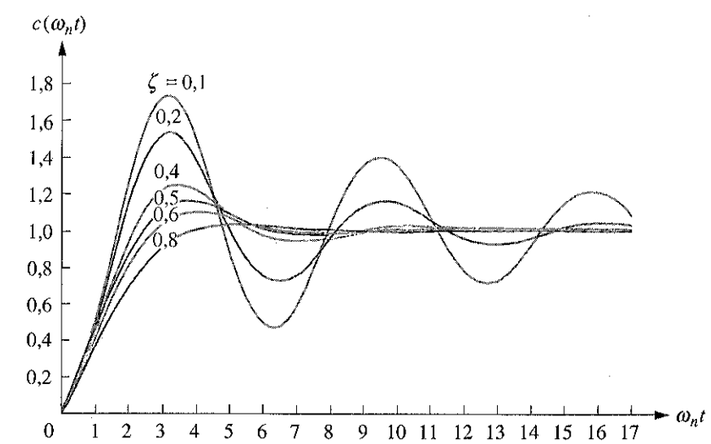
A aplicação da transformada de Laplace inversa (deixada, como exercício, para o leitor), fornece

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde $\phi = \operatorname{tg}^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$.

Na Fig. 4.13 aparece um gráfico desta resposta para diversos valores de ζ, traçado em função do eixo dos tempos normalizado, $\omega_n t$. Vemos agora a relação entre o valor de ζ e o tipo de resposta obtido: quanto menor o valor de ζ, tanto mais oscilatória será a resposta. A freqüência natural é um fator de escala do eixo dos tempos e não afeta a natureza da resposta em nenhum aspecto exceto o de colocá-la em escala, no tempo.

Fig. 4.13 Respostas de segunda ordem subamortecidas com os valores da relação de amortecimento



Definimos dois parâmetros, ζ e ω_n, associados aos sistemas de segunda ordem. Outros parâmetros associados à resposta subamortecida são a ultrapassagem percentual, o instante de pico, o tempo de assentamento e o tempo de subida. Estas especificações estão definidas como a seguir (ver também a Fig. 4.14):

1. *Instante de pico, T_p*: Tempo necessário para alcançar o primeiro valor de pico (máximo).
2. *Ultrapassagem percentual, %UP*: O quanto a forma de onda, no instante de pico, ultrapassa o valor de estado estacionário, final, expresso como uma percentagem do valor de estado estacionário.
3. *Tempo de assentamento, T_s*: Tempo necessário para que as oscilações amortecidas do regime transitório entrem e permaneçam no interior de uma faixa de valores de $\pm 2\%$ em torno do valor de estado estacionário.
4. *Tempo de subida, T_r*: Tempo necessário para que a forma de onda vá de 0,1 a 0,9 do valor final.

Observe que as definições de tempo de assentamento e de tempo de subida são fundamentalmente as mesmas para a resposta de primeira ordem. Todas as definições são também válidas para sistemas de ordem superior a 2, embora as expressões analíticas desses parâmetros não possam ser obtidas a menos que a resposta do sistema de ordem mais elevada possa ser aproximada como a de um sistema de segunda ordem, o que fizemos nas Seções 4.7 e 4.8.

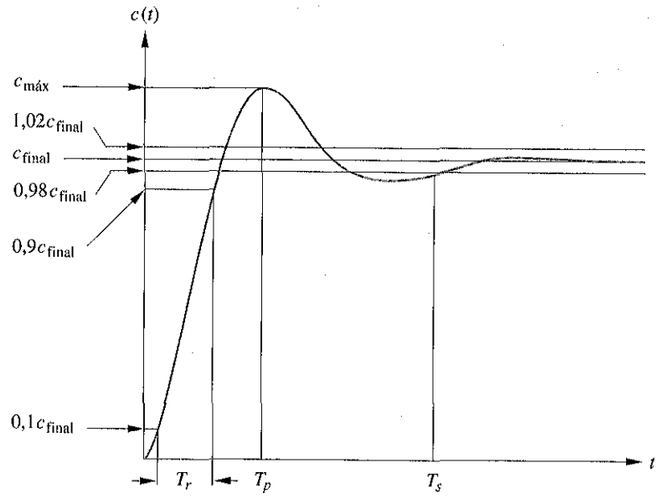


Fig. 4.14 Especificações da resposta de segunda ordem subamortecida

O tempo de subida, o tempo de assentamento e o instante de pico fornecem informação a respeito da velocidade da resposta transitória. Esta informação pode ajudar o projetista a determinar se a velocidade e a natureza da resposta degradam ou não o desempenho do sistema. Por exemplo, a velocidade total de um sistema de computação depende do tempo consumido pela cabeça de leitura e gravação de um acionador de disco flexível para alcançar o estado estacionário e efetuar uma leitura de dados; o conforto dos passageiros no interior de um carro depende em parte do sistema de suspensão e do número de oscilações produzidas ao passar sobre uma irregularidade na pista de rolamento.

Calculamos agora os valores de T_p, $\%UP$ e T_s como funções de ζ e de ω_n. Mais adiante, neste capítulo, relacionamos estas especificações à localização dos pólos do sistema. Não é possível obter uma expressão analítica precisa para o tempo de subida; em conseqüência, apresentamos um gráfico e uma tabela mostrando a relação entre ζ e o tempo de subida.

Cálculo de T_p

O valor de T_p é encontrado derivando $c(t)$ na Eq. (4.28) e obtendo o primeiro instante de passagem por zero depois de $t = 0$. Esta tarefa é simplificada através da "derivação" no domínio de freqüência usando o Item 7 da Tabela 2.2. Supondo condições iniciais nulas e usando a Eq. (4.26), obtemos

$$\mathcal{L}[\dot{c}(t)] = sC(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.29}$$

Completando os quadrados no denominador, temos

$$\mathcal{L}[\dot{c}(t)] = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} = \frac{\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \tag{4.30}$$

Portanto,

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \tag{4.31}$$

Igualando a derivada a zero, resulta

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t = n\pi \tag{4.32}$$

ou

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{4.33}$$

Cada valor de n fornece o instante da ocorrência de máximos e de mínimos locais. Fazendo $n = 0$, tem-se $t = 0$, o primeiro ponto na curva da Fig. 4.14 que possui inclinação nula. O primeiro ponto de pico, que ocorre no instante de pico, T_p, é encontrado fazendo $n = 1$ na Eq. (4.33):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{4.34}$$

Cálculo de $\%UP$

Com base na Fig. 4.14, a ultrapassagem percentual, $\%UP$, é dada por

$$\%UP = \frac{c_{\text{máx}} - c_{\text{final}}}{c_{\text{final}}} \times 100 \tag{4.35}$$

O termo $c_{\text{máx}}$ é obtido calculando o valor de $c(t)$ no instante de pico, $c(T_p)$. Usando a Eq. (4.34) para T_p e substituindo na Eq. (4.28), vem

$$\begin{aligned} c_{\text{máx}} = c(T_p) &= 1 - e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\pi\right) \\ &= 1 + e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Pela resposta ao degrau calculada na Eq. (4.28),

$$c_{\text{final}} = 1 \tag{4.37}$$

Substituindo as Eqs. (4.36) e (4.37) na Eq. (4.35), obtemos finalmente

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 \tag{4.38}$$

Observe que a ultrapassagem percentual é uma função somente da relação de amortecimento, ζ.

Enquanto a Eq. (4.38) permite que se calcule o valor de $\%UP$ dada a relação de amortecimento, ζ, o inverso da equação permite que se calcule o valor de ζ dada a ultrapassagem percentual, $\%UP$. O inverso é dado por

$$\zeta = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%UP/100)}} \tag{4.39}$$

A dedução da Eq. (4.39) é deixada como exercício para o leitor. A Eq. (4.38) (ou, de forma equivalente, a Eq. (4.39)) está plotada na Fig. 4.15.

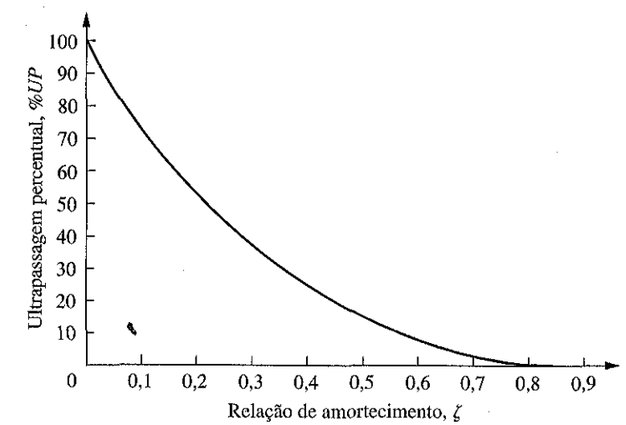


Fig. 4.15 Ultrapassagem percentual em função da relação de amortecimento

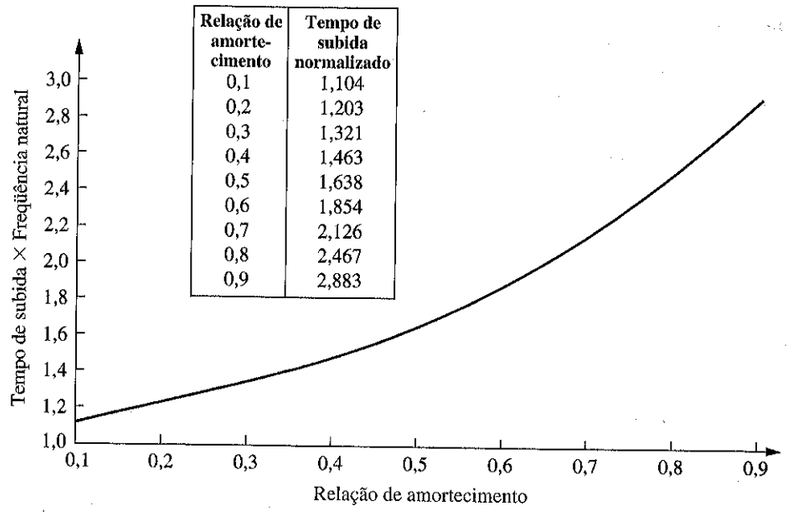
Cálculo de T_s

Para obter o tempo de assentamento, devemos encontrar o instante a partir do qual o valor de $c(t)$, na Eq. (4.28), entra e permanece no interior de uma faixa de $\pm 2\%$ em torno do valor de estado estacionário, c_{final}. Usando a nossa definição, o tempo de assentamento é o tempo necessário para que a amplitude da senóide amortecida da Eq. (4.28) alcance o valor 0,02, ou seja

$$e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0{,}02 \tag{4.40}$$

Esta equação é uma estimativa conservadora, uma vez que estamos admitindo que $\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi) = 1$ no tempo de assentamento. Resolvendo a Eq. (4.40) para obter o valor de t, resulta o tempo de assentamento

$$T_s = \frac{-\ln\left(0{,}02\sqrt{1 - \zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n} \tag{4.41}$$



Relação de amortecimento	Tempo de subida normalizado
0,1	1,104
0,2	1,203
0,3	1,321
0,4	1,463
0,5	1,638
0,6	1,854
0,7	2,126
0,8	2,467
0,9	2,883

Fig. 4.16 Tempo de subida normalizado versus relação de amortecimento para uma resposta de segunda ordem subamortecida

Você pode verificar que o numerador da Eq. (4.41) varia de 3,91 a 4,74 à medida que ζ varia de 0 a 0,9. Estabeleçamos, então, uma aproximação para o tempo de assentamento que será usada para todos os valores de ζ; seja, assim

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{4.42}$$

Cálculo de T_r

Não é possível determinar uma relação analítica precisa entre o tempo de subida e a relação de amortecimento, ζ. Contudo, usando um computador e a Eq. (4.28), podemos determinar o tempo de subida. Designamos primeiro $\omega_n t$ como variável de tempo normalizado e selecionamos um valor para ζ. Utilizando o computador, calculamos os valores de $\omega_n t$ que conduzem a $c(t) = 0{,}9$ e $c(t) = 0{,}1$. Subtraindo os dois valores de $\omega_n t$, tem-se o valor do tempo de subida normalizado, $\omega_n T_r$, para o valor selecionado de ζ. Continuando de modo semelhante para os outros valores de ζ, obtemos os resultados plotados na Fig. 4.16.[7] Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.5

Obtendo T_p, $\%UP$, T_s e T_r a partir de uma função de transferência

Problema Dada a função de transferência

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100} \tag{4.43}$$

Obter T_p, $\%UP$, T_s e T_r.

Solução ω_n e ζ são calculados, respectivamente, como 10 e 0,75. Substitua agora ζ e ω_n nas Eqs. (4.34), (4.38) e (4.42) e obtenha respectivamente $T_p = 0{,}475$ s, $\%UP = 2{,}838$ e $T_s = 0{,}533$ s. Usando a tabela na Fig. 4.16, o tempo de subida normalizado é de aproximadamente 2,3 s. Dividindo por ω_n, resulta $T_r = 0{,}23$ s. Este problema demonstra que podemos obter T_p, $\%UP$, T_s e T_r sem recorrer à tarefa tediosa de aplicar a transformada de Laplace inversa, traçar a resposta e efetuar medidas no gráfico resultante.

Temos agora expressões que relacionam o instante de pico, a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento à freqüência natural e à relação de amortecimento. Relacionemos agora estas grandezas com a localização dos pólos que produzem estas características.

[7] A Fig. 4.16 pode ser aproximada pelos seguintes polinômios: $\omega_n Tr = 1{,}76\zeta^3 - 0{,}417\zeta^2 + 1{,}039\zeta + 1$ (erro máximo inferior a ½% para $0 < \zeta < 0{,}9$) e $\zeta = 0{,}115\,(\omega_n T_r)^3 - 0{,}883\,(\omega_n T_r)^2 + 2{,}54\,(\omega_n T_r) - 1{,}738$ (erro máximo menor que 5% para $0{,}1 < \zeta < 0{,}9$). Os polinômios foram obtidos usando a função **polyfit** do MATLAB.

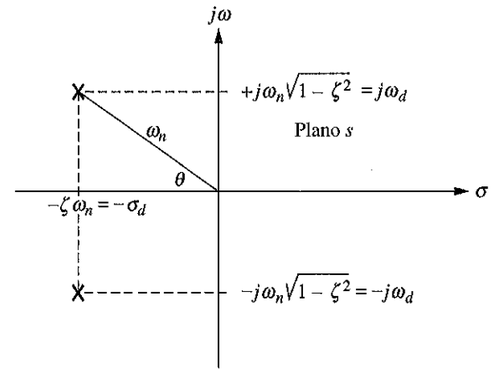


Fig. 4.17 Diagrama de pólos de um sistema de segunda ordem subamortecido

O gráfico dos pólos relativo a um sistema de segunda ordem subamortecido genérico, mostrado anteriormente na Fig. 4.11, é reproduzido e expandido na Fig. 4.17 para maior clareza. Vemos, com base no teorema de Pitágoras, que a distância radial da origem ao pólo é a freqüência natural, ω_n, e $\cos\theta = \zeta$.

Agora, comparando as Eqs. (4.34) e (4.42) com a localização dos pólos, calculamos o instante de pico e o tempo de assentamento em termos da localização dos pólos. Por conseguinte,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{4.44}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d} \tag{4.45}$$

onde ω_d é a parte imaginária do pólo, chamada *freqüência amortecida de oscilação*, e σ_d é a magnitude da parte real do pólo, chamada *freqüência exponencial amortecida*.

A Eq. (4.44) mostra que T_p é inversamente proporcional à parte imaginária do pólo. Como as retas horizontais no plano s são linhas de valores imaginários constantes, elas são também linhas de instante de pico constante. De modo semelhante, a Eq. (4.45) nos diz que o tempo de assentamento é inversamente proporcional à parte real do pólo. Como as retas verticais do plano s são as linhas de valor real constante, elas são também linhas de tempo de assentamento constante. Para finalizar, como $\zeta = \cos\theta$, as linhas radiais são linhas de valores constantes de ζ. Como a ultrapassagem percentual é função somente de ζ, as linhas radiais são, por conseguinte, linhas de valores constantes de ultrapassagem percentual, $\%UP$. Estes conceitos estão esboçados na Fig. 4.18, onde estão rotuladas linhas de valores constantes de T_p, T_s e $\%UP$ no plano s.

Neste ponto, podemos entender o significado da Fig. 4.18 examinando a resposta real ao degrau de sistemas sendo comparados. Na Fig. 4.19(a) estão esboçadas as respostas ao degrau de sistemas em que os pólos são deslo-

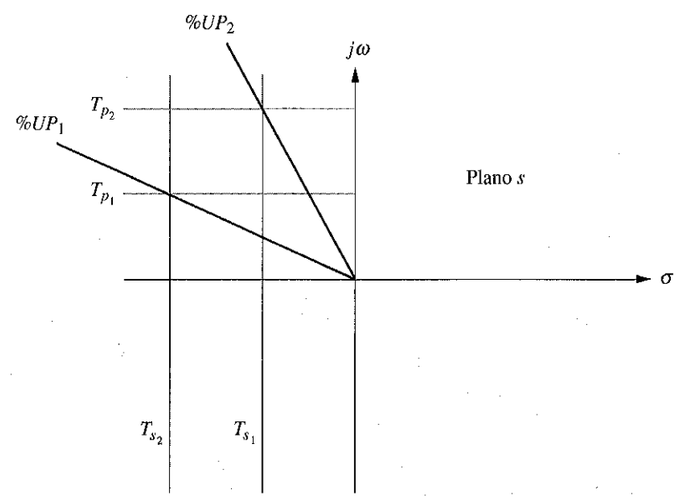


Fig. 4.18 Linhas de valores constantes para tempo de pico, T_p, tempo de assentamento, T_s, e ultrapassagem percentual, $\%UP$
Nota: $T_{s_2} < T_{s_1}$; $T_{p_2} < T_{p_1}$; $\%UP_1 < \%UP_2$

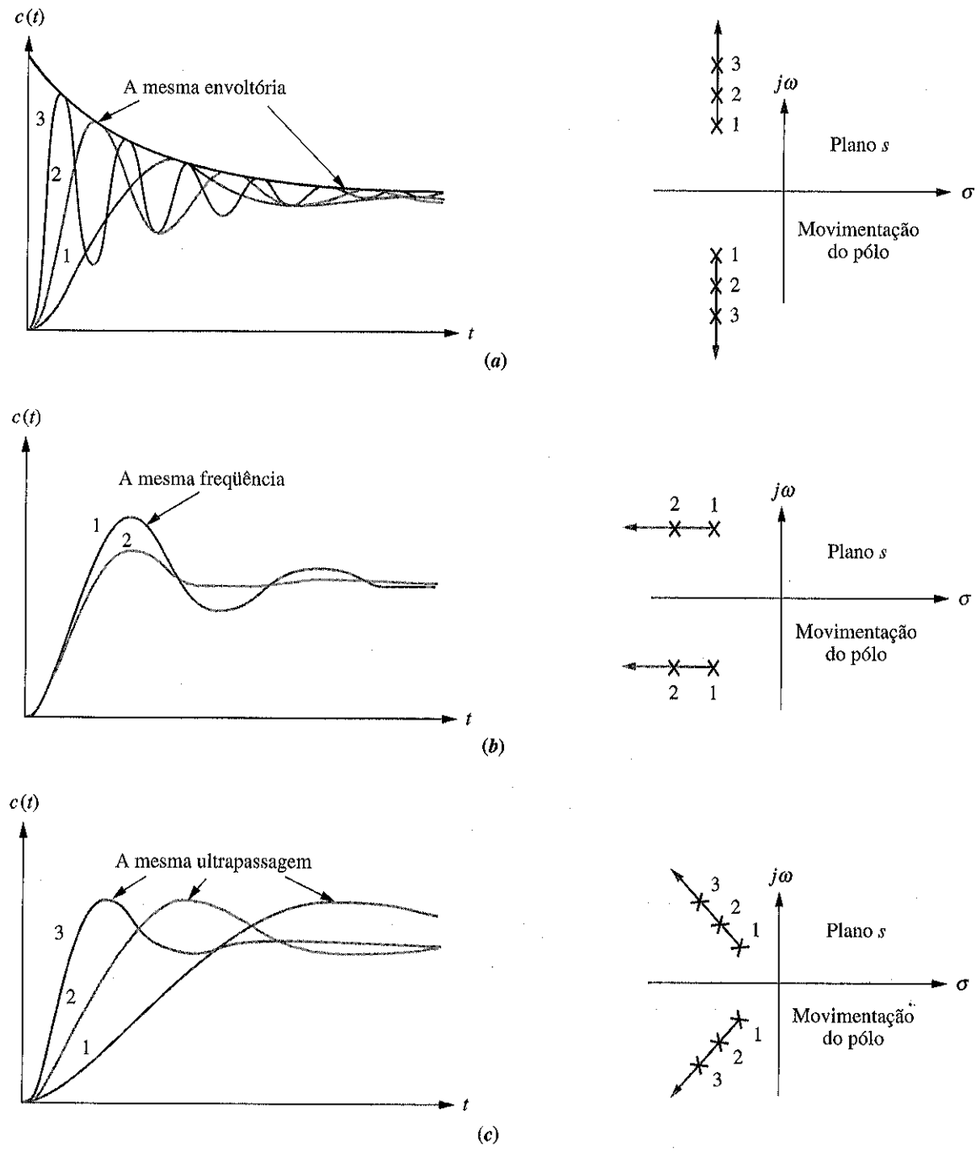


Fig. 4.19 Respostas ao degrau de sistemas de segunda ordem subamortecidos à medida que os pólos se movem:
a. com parte real constante;
b. com parte imaginária constante;
c. com relação de amortecimento constante.

cados na vertical, mantendo a parte real constante. À medida que os pólos se deslocam na vertical, no sentido indicado, a freqüência aumenta, mas a envoltória permanece a mesma, uma vez que a parte real não está sendo modificada. A figura mostra uma exponencial envoltória constante, embora a resposta senoidal esteja mudando a freqüência. Como todas as curvas se ajustam sob a mesma curva de decaimento exponencial, o tempo de assentamento é praticamente o mesmo para todas as formas de onda. Note que à medida que a ultrapassagem aumenta o tempo de subida diminui.

Desloquemos os pólos para a direita e para a esquerda. Como a parte imaginária agora será constante, o movimento dos pólos produz as respostas da Fig. 4.19(*b*). Aqui a freqüência permanece constante ao longo da faixa de variação da parte real. À medida que os pólos se deslocam para a esquerda, a resposta é amortecida mais rapidamente, enquanto a freqüência permanece a mesma. Observe que o instante de pico é o mesmo para todas as formas de onda porque a parte imaginária permanece a mesma.

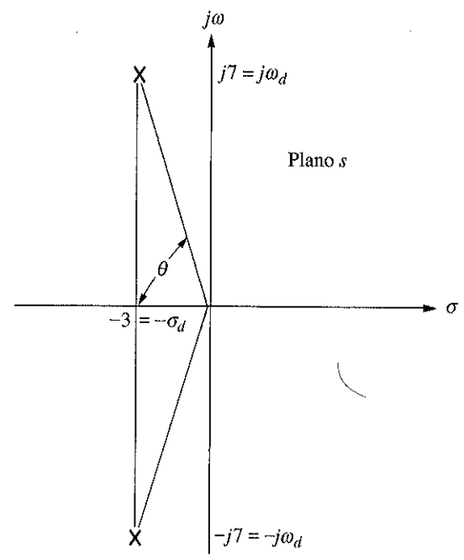
O deslocamento dos pólos ao longo de uma linha radial constante conduz às respostas mostradas na Fig. 4.19(*c*). Aqui, a ultrapassagem percentual permanece a mesma. Observe também que todas as respostas se parecem, exceto com relação à velocidade. Quanto mais longe da origem estiverem os pólos, tanto mais rápida será a resposta. Concluímos esta seção com alguns exemplos que demonstram a relação entre a localização dos pólos e as especificações da resposta dos sistemas de segunda ordem subamortecidos. O primeiro exemplo trata de análise. O segundo é um problema de projeto simples consistindo em um sistema físico cujos valores de componentes desejamos escolher para atender uma especificação de resposta transitória.

Exemplo 4.6

Determinar T_p, $\%UP$ e T_s com base na localização de pólos

Problema Dado o diagrama de pólos mostrado na Fig. 4.20, determinar ζ, ω_n, T_p, $\%UP$ e T_s.

Fig. 4.20 Diagrama de pólos para o Exemplo 4.6



Solução A relação de amortecimento é dada por $\zeta = \cos\theta = \cos[\text{arc tg}(7/3)] = 0{,}394$. A freqüência natural, ω_n, é a distância radial da origem ao pólo, ou seja, $\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7{,}616$. O instante de pico é

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0{,}449 \text{ segundo} \tag{4.46}$$

A ultrapassagem percentual é

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 26\% \tag{4.47}$$

O tempo de assentamento aproximado é

$$T_s = \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1{,}333 \text{ segundo} \tag{4.48}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap4p1 no Apêndice B. Você aprenderá como gerar um polinômio de segunda ordem a partir dos dois pólos complexos bem como extrair e usar os coeficientes do polinômio para calcular T_p, $\%UP$ e T_s. Este exercício usa o MATLAB para resolver o problema no Exemplo 4.6.

Exemplo 4.7

Projeto

Resposta transitória através do projeto de componente

Problema Dado o sistema mostrado na Fig. 4.21, obter J e D para uma ultrapassagem percentual de 20% e um tempo de assentamento de 2 segundos para um torque de entrada, $T(t)$, em degrau.

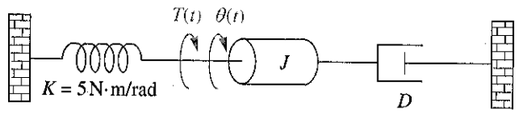


Fig. 4.21 Sistema mecânico em rotação para o Exemplo 4.7

Solução Primeiro, a função de transferência do sistema é

$$G(s) = \frac{1/J}{s^2 + \frac{D}{J}s + \frac{K}{J}} \tag{4.49}$$

Da função de transferência,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \tag{4.50}$$

e

$$2\zeta\omega_n = \frac{D}{J} \tag{4.51}$$

Mas, do enunciado do problema,

$$T_s = 2 = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{4.52}$$

ou $\zeta\omega_n = 2$. Por conseguinte,

$$2\zeta\omega_n = 4 = \frac{D}{J} \tag{4.53}$$

Além disso, das Eqs. (4.50) e (4.52),

$$\zeta = \frac{4}{2\omega_n} = 2\sqrt{\frac{J}{K}} \tag{4.54}$$

Com base na Eq. (4.39), uma ultrapassagem de 20% implica $\zeta = 0{,}456$. Em conseqüência, da Eq. (4.54)

$$\zeta = 2\sqrt{\frac{J}{K}} = 0{,}456 \tag{4.55}$$

Portanto

$$\frac{J}{K} = 0{,}052 \tag{4.56}$$

Do enunciado do problema, $K = 5$ N·m/rad. Combinando este valor com as Eqs. (4.53) e (4.56), $D = 1{,}04$ N·m·s/rad, e $J = 0{,}26$ kg·m².

Funções de Transferência de Segunda Ordem Obtidas Experimentalmente

Da mesma forma como obtivemos experimentalmente a função de transferência de um sistema de primeira ordem, podemos fazer em relação a um sistema que apresenta uma resposta típica de segunda ordem, subamortecida. Uma vez mais podemos medir na curva de resposta em laboratório a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento, de onde é possível obter os pólos e, por conseguinte, o denominador. O numerador pode ser encontrado, como nos sistemas de primeira ordem, do conhecimento dos valores esperado e medido em estado estacionário. Um problema no fim do capítulo ilustra a estimação da função de transferência de um sistema de segunda ordem a partir da resposta ao degrau.

Exercício de Avaliação 4.5

Problema: Obter ζ, ω_n, T_s, T_p, T_r e $\%UP$ de um sistema cuja função de transferência é $G(s) = \dfrac{361}{s^2 + 16s + 361}$.

Respostas: $\zeta = 0{,}421$, $\omega_n = 19$ rad/s, $T_s = 0{,}5$ s, $T_p = 0{,}182$ s, $T_r = 0{,}079$ s e $\%UP = 23{,}3\%$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Agora que acabamos de analisar sistemas com dois pólos, como a inclusão de um outro pólo afeta a resposta? Responderemos esta pergunta na próxima seção.

4.7 Resposta de Sistemas com Pólos Adicionais

Na última seção analisamos sistemas com um e com dois pólos. Deve ser enfatizado que as expressões matemáticas que descrevem a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico foram deduzidas somente para sistemas com dois pólos complexos e sem zeros. Se um sistema como o mostrado na Fig. 4.22 possuir mais de dois pólos ou possuir zeros, não podemos usar essas expressões para calcular as especificações de desempenho que deduzimos. Contudo, sob certas condições, sistemas com mais de dois pólos e com zeros podem ser aproximados como sistemas de segunda ordem que possuem apenas dois *pólos dominantes* complexos. Uma vez justificada esta aproximação, podemos aplicar as expressões matemáticas de ultrapassagem percentual, de tempo de assentamento e de instante de pico a esses sistemas de ordem mais elevada usando a localização dos pólos dominantes. Nesta seção investigamos o efeito de um pólo adicional sobre a resposta de segunda ordem. Na próxima seção analisamos o efeito de adicionar um zero a um sistema com dois pólos.

Vejamos agora as condições que devem existir a fim de ser possível aproximar o comportamento de um sistema com três pólos pelo de um sistema com dois pólos. Considere um sistema dotado de três pólos com dois deles complexos e um terceiro sobre o eixo real. Admitindo que os pólos complexos estejam em $-\zeta\omega_n \pm \sqrt{1-\zeta^2}$ e que o pólo real esteja em $-\alpha_r$, a resposta do sistema ao degrau pode ser determinada a partir da expansão em frações parciais. Assim, a transformada da saída é

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+\zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s+\alpha_r} \tag{4.57}$$

ou, no domínio do tempo

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}(B\cos\omega_d t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_d t) + De^{-\alpha_r t} \tag{4.58}$$

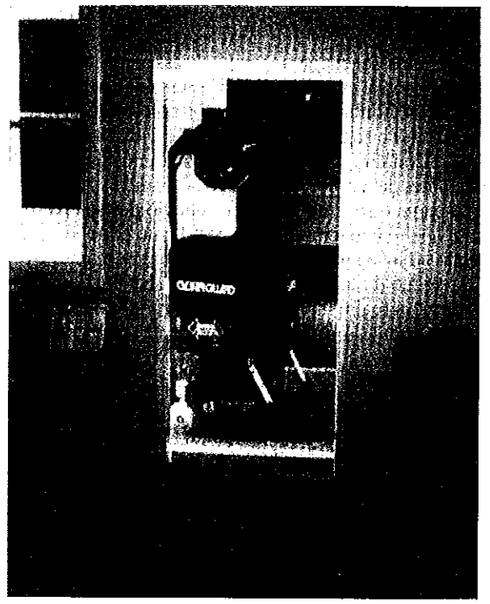


Fig. 4.22 Robô de segurança Cybermotion SR3 em serviço. O robô se desloca usando um sistema de navegação por ultra-sons e percursos definidos por programas transmitidos a partir de um computador, eliminando a necessidade de guiamento por meio de tiras sobre o piso. Possui recursos de vídeo bem como sensores de temperatura, umidade, detecção de incêndio, intrusão e gases.

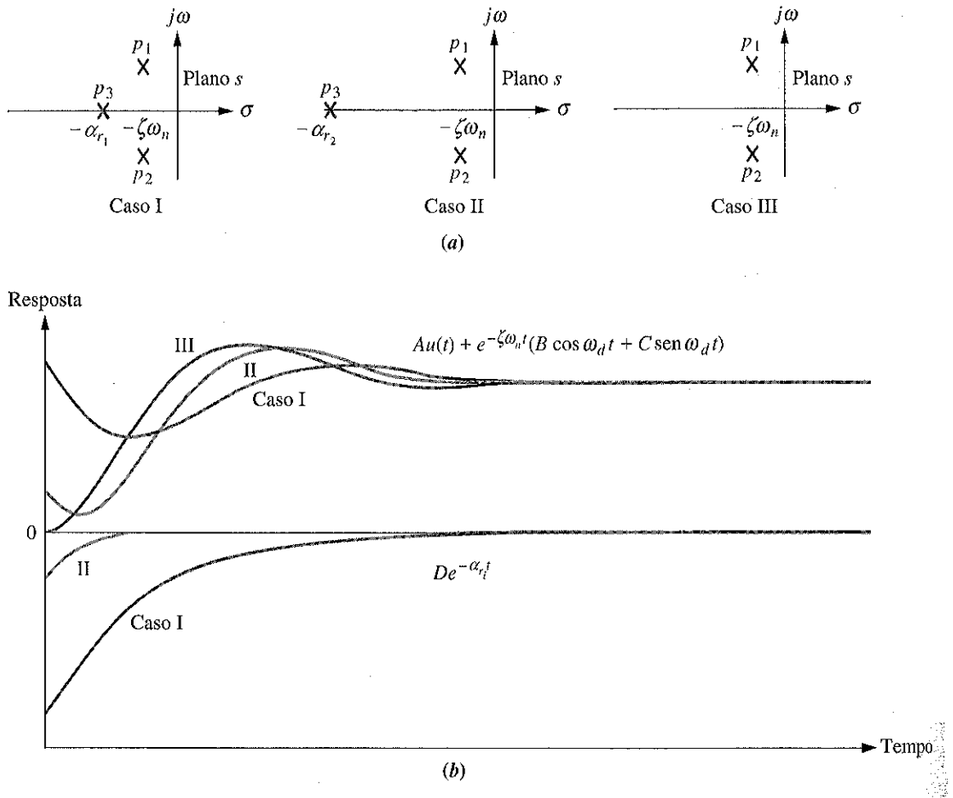


Fig. 4.23 Respostas dos componentes de um sistema com três pólos: **a.** diagrama de pólos; **b.** respostas dos componentes: o pólo não-dominante está próximo de um par de segunda ordem dominante (Caso I), longe do par (Caso II) e no infinito (Caso III)

As partes componentes de $c(t)$ estão mostradas na Fig. 4.23 para três casos de α_r. No Caso I, $\alpha_r = \alpha_{r1}$ e não é muito maior que $\zeta\omega_n$; para o Caso II, $\alpha_r = \alpha_{r2}$ e é muito maior que $\zeta\omega_n$; e para o Caso III, $\alpha_r = \infty$ Voltemos nossa atenção para a Eq. (4.58) e para a Fig. 4.23.

Se $\alpha_r >> \zeta\omega_n$ (Caso II), a exponencial pura desaparecerá muito mais rapidamente que a resposta de segunda ordem amortecida ao degrau. Se o termo da exponencial pura se reduz a um valor insignificante no instante da primeira ultrapassagem, os parâmetros como ultrapassagem percentual, tempo de assentamento e instante de pico serão gerados pela componente da resposta ao degrau de segunda ordem subamortecida. Por conseguinte, a resposta total se aproximará da resposta de um sistema de segunda ordem puro (Caso III).

Se α_r não for muito maior que $\zeta\omega_n$ (Caso I), a resposta transitória do pólo real não se tornará insignificante no instante da primeira ultrapassagem ou no tempo de assentamento gerado pelo par de segunda ordem. Neste caso o valor do decaimento exponencial é importante e o sistema não pode ser representado como um sistema de segunda ordem.

A pergunta seguinte é: quão longe dos pólos dominantes deve ficar situado o terceiro pólo para que o seu efeito sobre a resposta de segunda ordem possa ser desprezado? A resposta depende, naturalmente, da exatidão que se deseja obter. Contudo, neste livro, consideramos que o decaimento exponencial se torna insignificante depois de cinco constantes de tempo. Assim, se o pólo real estiver à esquerda dos pólos dominantes, cinco vezes mais distante, admite-se que o sistema seja representado por seu par de pólos de segunda ordem dominantes.

E com respeito à magnitude do decaimento exponencial? Poderá ocorrer que o seu valor seja tão grande que a contribuição no instante de pico não seja insignificante? Podemos mostrar, através da expansão em frações parciais, que o resíduo do terceiro pólo, em um sistema de três pólos com pólos de segunda ordem dominantes e sem zeros, decrescerá realmente em magnitude à medida que o terceiro pólo seja deslocado, cada vez mais longe, no semiplano da esquerda. Admita uma resposta ao degrau, $C(s)$, de um sistema com três pólos:

$$C(s) = \frac{bc}{s(s^2 + as + b)(s + c)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + as + b} + \frac{D}{s + c} \tag{4.59}$$

onde se supõe que o pólo não-dominante esteja situado em $-c$ sobre o eixo real e que a resposta em estado estacionário tenda para a unidade. Calculando as constantes no numerador de cada termo,

$$A = 1; \qquad B = \frac{ca - c^2}{c^2 + b - ca} \tag{4.60a}$$

$$C = \frac{ca^2 - c^2a - bc}{c^2 + b - ca}; \qquad D = \frac{-b}{c^2 + b - ca} \tag{4.60b}$$

À medida que o pólo não dominante tende a ∞, ou $c \to \infty$,

$$A = 1; \qquad B = -1; \qquad C = -a; \qquad D = 0 \tag{4.61}$$

Portanto, neste exemplo, D, o resíduo do pólo não-dominante e sua resposta, se torna zero à medida que o pólo não-dominante tende para infinito.

O projetista também pode preferir desistir de uma análise rigorosa de resíduos, uma vez que todos os projetos de sistema devem ser simulados para determinar a aceitação final. Neste caso, o engenheiro de sistemas de controle pode usar a regra prática das "cinco vezes" como uma condição necessária mas não suficiente para aumentar a confiança na aproximação de segunda ordem durante o projeto, mas em seguida simular o projeto concluído.

Vejamos um exemplo que compara as respostas de dois sistemas com três pólos com a de um sistema de segunda ordem.

Exemplo 4.8

Comparação das respostas de sistemas com três pólos

Problema Obter a resposta ao degrau de cada uma das funções de transferência mostradas nas Eqs. (4.62) a (4.64) e compará-las.

$$T_1(s) = \frac{24{,}542}{s^2 + 4s + 24{,}542} \tag{4.62}$$

$$T_2(s) = \frac{245{,}42}{(s + 10)(s^2 + 4s + 24{,}542)} \tag{4.63}$$

$$T_3(s) = \frac{73{,}626}{(s + 3)(s^2 + 4s + 24{,}542)} \tag{4.64}$$

Solução A resposta ao degrau, $C_i(s)$, para a função de transferência, $T_i(s)$, pode ser obtida multiplicando-se a função de transferência por $1/s$, uma entrada em degrau. Usando a expansão em frações parciais seguida da aplicação da transformada de Laplace inversa, obtém-se a resposta, $c_i(t)$. Deixando os detalhes como exercício para o leitor, os resultados são

$$c_1(t) = 1 - 1{,}09e^{-2t}\cos(4{,}532t - 23{,}8°) \tag{4.65}$$

$$c_2(t) = 1 - 0{,}29e^{-10t} - 1{,}189e^{-2t}\cos(4{,}532t - 53{,}34°) \tag{4.66}$$

$$c_3(t) = 1 - 1{,}14e^{-3t} + 0{,}707e^{-2t}\cos(4{,}532t + 78{,}63°) \tag{4.67}$$

As três respostas estão plotadas na Fig. 4.24. Observe que $c_2(t)$, com um terceiro pólo em −10 e o mais afastado em relação aos pólos dominantes, é a melhor aproximação para $c_1(t)$, a resposta de um sistema de segunda ordem puro; $c_3(t)$, com um terceiro pólo próximo dos pólos dominantes, produz o maior erro.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap4p2 no Apêndice B. Você aprenderá como gerar resposta ao degrau de uma função de transferência e como plotar a resposta diretamente ou coletar os pontos para

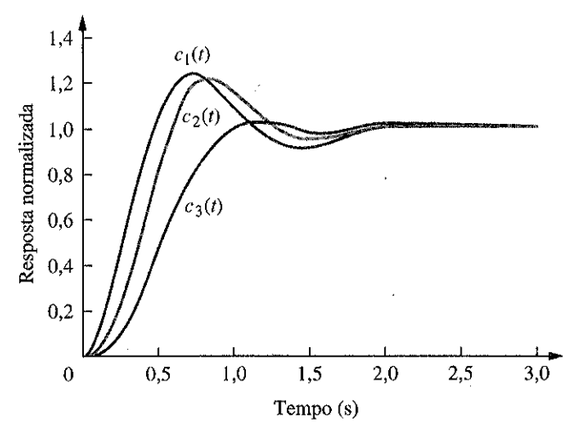


Fig. 4.24 Respostas ao degrau dos sistemas $T_1(s)$, $T_2(s)$ e $T_3(s)$

uso futuro. No exemplo, mostramos como coletar os pontos e usá-los em seguida para criar um gráfico múltiplo, como colocar um título no gráfico e como rotular os eixos e as curvas para produzir o gráfico da Fig. 4.24 e resolver o Exemplo 4.8.

Simulink

As respostas podem ser obtidas, alternativamente, usando o Simulink. O Simulink é um pacote de software que é integrado com o MATLAB visando fornecer uma interface gráfica de usuário (GUI) para definir sistemas e gerar respostas. O leitor é encorajado a estudar o Apêndice C, que contém um tutorial sobre o Simulink bem como alguns exemplos. Um dos exemplos ilustrativos, o Exemplo C1, resolve o Exemplo 4.8 usando o Simulink.

Ferramenta GUI

Um outro método de obter as respostas dos sistemas é através do uso do visualizador LTI Viewer do MATLAB. Uma vantagem do LTI Viewer é que ele mostra os valores de tempo de assentamento, do instante de pico, do máximo da resposta e o valor final no gráfico da resposta ao degrau. O leitor é encorajado a estudar o Apêndice D, que contém um tutorial sobre o LTI Viewer bem como alguns exemplos. Um dos exemplos ilustrativos, o Exemplo D1, resolve o Exemplo 4.8 usando o LTI Viewer.

Exercício de Avaliação 4.6

Problema: Determinar a validade de uma aproximação de segunda ordem para cada uma das funções de transferência mostradas a seguir.

a. $G(s) = \dfrac{700}{(s+15)(s^2+4s+100)}$

b. $G(s) = \dfrac{360}{(s+4)(s^2+2s+90)}$

Respostas:
a. A aproximação de segunda ordem é válida.
b. A aproximação de segunda ordem não é válida.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

4.8 Resposta de Sistema com Zeros

Agora que vimos o efeito de um pólo adicional, acrescentemos um zero ao sistema de segunda ordem. Na Seção 4.2, vimos que os zeros de uma resposta afetam o resíduo, ou amplitude, de uma componente da resposta mas não afetam a natureza da resposta — exponencial, senoidal amortecida, e assim por diante. Nesta seção adicionamos um zero real a um sistema com dois pólos. O zero será adicionado primeiramente no semiplano da esquerda, em seguida no semiplano da direita, e seu efeito será observado e analisado. Concluímos a seção falando sobre cancelamento de pólo com zero.

Começando com um sistema de segunda ordem com pólos em $(-1 \pm j2{,}828)$, adicionamos, consecutivamente, zeros em -3, -5 e -10. Os resultados, normalizados ao valor de estado estacionário, estão plotados na Fig. 4.25. Podemos constatar: quanto mais próximo estiver o zero dos pólos dominantes, tanto maior será seu efeito sobre a resposta transitória. À medida que o zero se afasta dos pólos dominantes, a resposta tende à do sistema com dois pólos. Esta análise pode ser raciocinada por meio da expansão em frações parciais. Se admitirmos um grupo de

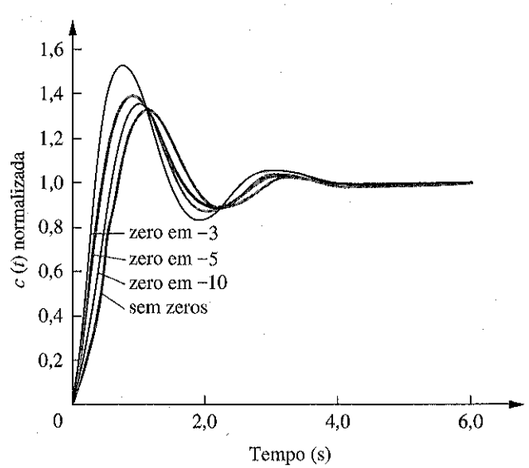


Fig. 4.25 Efeito de adicionar um zero a um sistema com dois pólos

pólos e um zero distante dos pólos, o resíduo de cada um deles será afetado da mesma forma pelo zero. Em conseqüência, as amplitudes relativas permanecem apreciavelmente as mesmas. Por exemplo, admita a expansão em frações parciais mostrada na Eq. (4.68):

Obs se a ≠

$$T(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)} = \frac{A}{s+b} + \frac{B}{s+c}$$
$$= \frac{(-b+a)/(-b+c)}{s+b} + \frac{(-c+a)/(-c+b)}{s+c} \qquad (4.68)$$

Se o zero estiver afastado dos pólos, então a é grande em comparação com b e c, e

$$T(s) \approx a\left[\frac{1/(-b+c)}{s+b} + \frac{1/(-c+b)}{s+c}\right] = \frac{a}{(s+b)(s+c)} \qquad (4.69)$$

Portanto, o zero se assemelha a um simples fator de ganho e não muda as amplitudes relativas dos componentes da resposta.

Uma outra forma de olhar o efeito de um zero, mais geral, é a seguinte (Franklin, 1991): seja $C(s)$ a resposta de um sistema, $T(s)$, com um numerador unitário. Se adicionarmos um zero à função de transferência, gerando $(s + a)T(s)$, a transformada de Laplace da resposta será

$$(s+a)C(s) = sC(s) + aC(s) \qquad (4.70)$$

Assim, a resposta de um sistema com um zero consiste em duas partes: a derivada da resposta original e uma versão em escala da resposta original. Se a, o negativo do zero, for muito grande, a transformada de Laplace da resposta será aproximadamente $aC(s)$, ou seja, uma versão em escala da resposta original. Se a não for muito grande, a resposta terá uma componente adicional consistindo na derivada da resposta original. À medida que a se torna menor, o termo que corresponde à derivada contribui mais para a resposta e tem um efeito maior. Para as respostas ao degrau, a derivada é, usualmente, positiva nos instantes iniciais da resposta. Assim, para pequenos valores de a, devemos esperar um valor maior de ultrapassagem nos sistemas de segunda ordem porque o termo derivativo será aditivo nas proximidades da primeira ultrapassagem. Este raciocínio é corroborado através da Fig. 4.25.

Ocorre um fenômeno interessante quando a é negativo, colocando o zero no semiplano da direita. Com base na Eq. (4.70), vemos que o termo derivativo, que é normalmente positivo nos instantes iniciais, será de sinal contrário ao termo da resposta em escala. Portanto, se o termo derivativo, $sC(s)$, for maior que o termo em escala, $aC(s)$, a resposta seguirá inicialmente a derivada em direção oposta à da resposta em escala. O resultado referente a um sistema de segunda ordem está mostrado na Fig. 4.26, onde o sinal da entrada foi invertido de modo a produzir um valor positivo em estado estacionário. Observe que a resposta começa a se orientar em direção negativa, embora o valor final seja positivo. Os sistemas que apresentam este fenômeno são conhecidos como *sistemas de fase não-mínima*. Se uma motocicleta ou um avião forem de fase não-mínima, virarão inicialmente para a esquerda ao serem comandados para manobrar para a direita. Vejamos agora um exemplo de circuito elétrico de fase não-mínima.

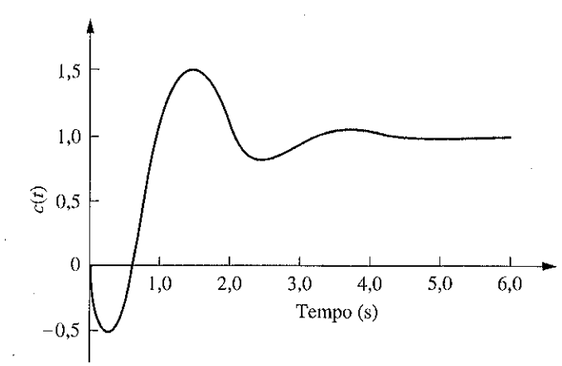


Fig. 4.26 Resposta ao degrau de um sistema de fase não-mínima

Exemplo 4.9

Função de transferência de um sistema de fase não-mínima

Problema

a. Obter a função de transferência, $V_o(s)/V_i(s)$, do circuito com amplificador operacional mostrado na Fig. 4.27.

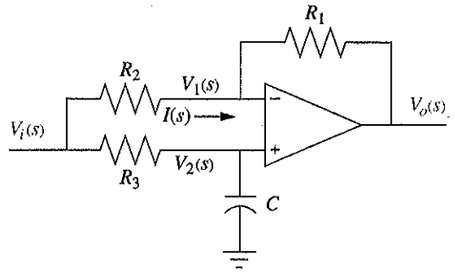


Fig. 4.27 Circuito elétrico de fase não-mínima

b. Se $R_1 = R_2$, este circuito é conhecido como filtro passa-todas, uma vez que deixa passar sinais senoidais de uma faixa ampla de freqüências sem atenuar ou amplificar sua magnitude (Dorf, 1993). Aprenderemos mais sobre resposta de freqüência no Cap. 10. Por enquanto, sejam $R_1 = R_2$, $R_3C = 1/10$ e obtenhamos a resposta do filtro a um degrau. Mostrar que as partes componentes da resposta podem ser identificadas com as da Eq. (4.70).

Solução

a. Recordando, com base no Cap. 2, que o amplificador possui uma elevada impedância de entrada, a corrente, $I(s)$, através de R_1 e de R_2, é a mesma e é igual a

$$I(s) = \frac{V_i(s) - V_o(s)}{R_1 + R_2} \tag{4.71}$$

Além disso,

$$V_o(s) = A(V_2(s) - V_1(s)) \tag{4.72}$$

Mas

$$V_1(s) = I(s)R_1 + V_o(s) \tag{4.73}$$

Substituindo a Eq. (4.71) na Eq. (4.73)

$$V_1(s) = \frac{1}{R_1 + R_2}(R_1V_i(s) + R_2V_0(s)) \tag{4.74}$$

Usando a divisão de tensão,

$$V_2(s) = V_i(s)\frac{1/Cs}{R_3 + \dfrac{1}{Cs}} \tag{4.75}$$

Substituindo as Eqs. (4.74) e (4.75) na Eq. (4.72) e simplificando os resultados

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{A(R_2 - R_1R_3Cs)}{(R_3Cs + 1)(R_1 + R_2(1 + A))} \tag{4.76}$$

Como o amplificador operacional possui um ganho, A, muito grande, façamos A tender para infinito. Assim, após as simplificações

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 - R_1R_3Cs}{R_2R_3Cs + R_2} = -\frac{R_1}{R_2}\frac{\left(s - \dfrac{R_2}{R_1R_3C}\right)}{\left(s + \dfrac{1}{R_3C}\right)} \tag{4.77}$$

b. Fazendo $R_1 = R_2$ e $R_3C = 1/10$,

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\left(s - \dfrac{1}{R_3C}\right)}{\left(s + \dfrac{1}{R_3C}\right)} = -\frac{(s - 10)}{(s + 10)} \tag{4.78}$$

Para uma entrada em degrau, calculamos a resposta como foi sugerido pela Eq. (4.70):

$$C(s) = -\frac{(s - 10)}{s(s + 10)} = -\frac{1}{s + 10} + 10\frac{1}{s(s + 10)} = sC_o(s) - 10C_o(s) \tag{4.79}$$

onde

$$C_o(s) = -\frac{1}{s(s + 10)} \tag{4.80}$$

é a transformada de Laplace da resposta com um zero. Expandindo a Eq. (4.79) em frações parciais,

$$C(s) = -\frac{1}{s + 10} + 10\frac{1}{s(s + 10)} = -\frac{1}{s + 10} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 10} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s + 10} \tag{4.81}$$

ou a resposta com um zero é

$$c(t) = -e^{-10t} + 1 - e^{-10t} = 1 - 2e^{-10t} \tag{4.82}$$

Além do mais, da Eq. (4.80)

$$C_o(s) = -\frac{1/10}{s} + \frac{1/10}{s + 10} \tag{4.83}$$

ou a resposta com um zero é

$$c_o(t) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{10}e^{-10t} \tag{4.84}$$

As respostas normalizadas estão plotadas na Fig. 4.28. Observe o reverso instantâneo da resposta de fase não-mínima, $c(t)$.

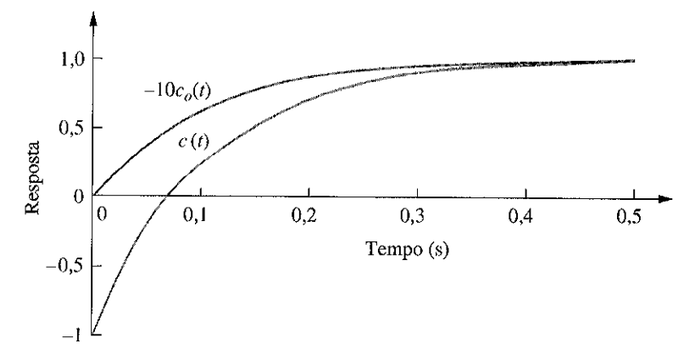


Fig. 4.28 Resposta ao degrau do circuito de fase não-mínima da Fig. 4.27 ($c(t)$) e a resposta ao degrau normalizada de um circuito equivalente sem o zero ($-10c_0(t)$)

Vamos concluir esta seção falando a respeito de cancelamento de pólo com zero e seu efeito sobre a capacidade de efetuar aproximações de sistemas por meio de funções de transferência de segunda ordem. Admita um sistema de três pólos com um zero, como está mostrado na Eq. (4.85). Se o termo do pólo, $(s + p_3)$, e o termo do zero, $(s + z)$, se cancelarem, ficaremos com

$$T(s) = \frac{K\cancel{(s + z)}}{\cancel{(s + p_3)}(s^2 + as + b)} \tag{4.85}$$

como função de transferência de segunda ordem. De uma outra perspectiva, se o zero em $-z$ estiver muito próximo do pólo em $-p_3$, então a expansão em frações parciais da Eq. (4.85) mostrará que o resíduo do decaimento exponencial é muito menor que a amplitude da resposta de segunda ordem. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.10

Calculando o cancelamento de pólo com zero usando resíduos

Problema Para cada uma das funções respostas nas Eqs. (4.86) e (4.87), determine se há cancelamento entre o zero e o pólo mais próximo do zero. Para a função em que o cancelamento seja válido, obtenha a resposta aproximada.

$$C_1(s) = \frac{26{,}25(s + 4)}{s(s + 3{,}5)(s + 5)(s + 6)} \tag{4.86}$$

$$C_2(s) = \frac{26{,}25(s + 4)}{s(s + 4{,}01)(s + 5)(s + 6)} \tag{4.87}$$

Solução A expansão em frações parciais da Eq. (4.86) é

$$C_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{3,5}{s+5} + \frac{3,5}{s+6} - \frac{1}{s+3,5} \tag{4.88}$$

O resíduo do pólo em −3,5, que é o mais próximo do zero em −4, é igual a −1 e não é insignificante em relação aos outros resíduos. Em conseqüência, não pode ser feita, para $C_1(s)$, a aproximação da resposta ao degrau de segunda ordem. A expansão em frações parciais para $C_2(s)$ é

$$C_2(s) = \frac{0,87}{s} - \frac{5,3}{s+5} + \frac{4,4}{s+6} + \frac{0,033}{s+4,01} \tag{4.89}$$

O resíduo do pólo em −4,01, que é o mais próximo do zero em −4, é igual a 0,033, cerca de duas ordens de grandeza abaixo dos outros resíduos. Em conseqüência, fazemos uma aproximação de segunda ordem desprezando a resposta gerada pelo pólo em −4,01:

$$c_2(s) \approx \frac{0,87}{s} - \frac{5,3}{s+5} + \frac{4,4}{s+6} \tag{4.90}$$

e a resposta $c_2(t)$ é aproximadamente

$$c_2(t) \approx 0,87 - 5,3e^{-5t} + 4,4e^{-6t} \tag{4.91}$$

Exercício de Avaliação 4.7

Problema: Determinar a validade de uma aproximação de segunda ordem da resposta ao degrau para cada uma das funções de transferência mostradas a seguir.

a. $G(s) = \dfrac{185,71(s+7)}{(s+6,5)(s+10)(s+20)}$

b. $G(s) = \dfrac{197,14(s+7)}{(s+6,9)(s+10)(s+20)}$

Respostas:

a. Não é válida uma aproximação de segunda ordem.
b. É válida uma aproximação de segunda ordem.

A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção examinamos os efeitos de zeros e pólos adicionais à função de transferência sobre a resposta. Na próxima seção vamos acrescentar não-linearidades do tipo discutido na Seção 2.10 e ver quais os efeitos que elas têm sobre a resposta do sistema.

4.9 Efeitos das Não-linearidades sobre a Resposta no Domínio do Tempo

Nesta seção vamos examinar qualitativamente os efeitos de não-linearidades sobre a resposta no domínio do tempo de sistemas físicos. Nos exemplos a seguir, inserimos nos sistemas não-linearidades como saturação, zona morta e folgas, mostradas na Fig. 2.46, para mostrar os efeitos destas não-linearidades sobre as respostas lineares.

As respostas foram obtidas usando o Simulink, um pacote de software de simulação integrado ao MATLAB para fornecer uma interface gráfica de usuário (GUI). Os leitores que desejarem aprender como usar o Simulink para gerar respostas não-lineares devem consultar o tutorial do Simulink no Apêndice C. Os diagramas de blocos do Simulink estão incluídos em todas as respostas a seguir.

Admitamos o motor com carga do Estudo de Caso sobre o Controle de Antena do Cap. 2 e vejamos a velocidade angular da carga, $\omega_o(s)$, onde $\omega_o(s) = 0,1s\theta_m(s) = 0,2083E_a(s)/(s + 1,71)$ com base na Eq. (2.208). Se acionarmos o motor com uma entrada em degrau através de um amplificador de ganho unitário que satura em ±5 volts, a Fig. 4.29 mostra que o efeito da saturação do amplificador é limitar a velocidade obtida.

O efeito de uma zona morta sobre o ângulo de saída do eixo acionado por um motor com engrenagens está mostrado na Fig. 4.30. Aqui, uma vez mais estamos considerando o motor com carga e engrenagens do Estudo de Caso do Controle de Antena do Cap. 2. A zona morta está presente quando o motor não consegue responder a valores pequenos de tensão. A entrada do motor é um sinal senoidal escolhido para permitir evidenciar os efeitos da zona morta. A resposta começa quando a tensão de entrada do motor excede um limiar. Observa-se uma amplitude menor quando a zona morta está presente.

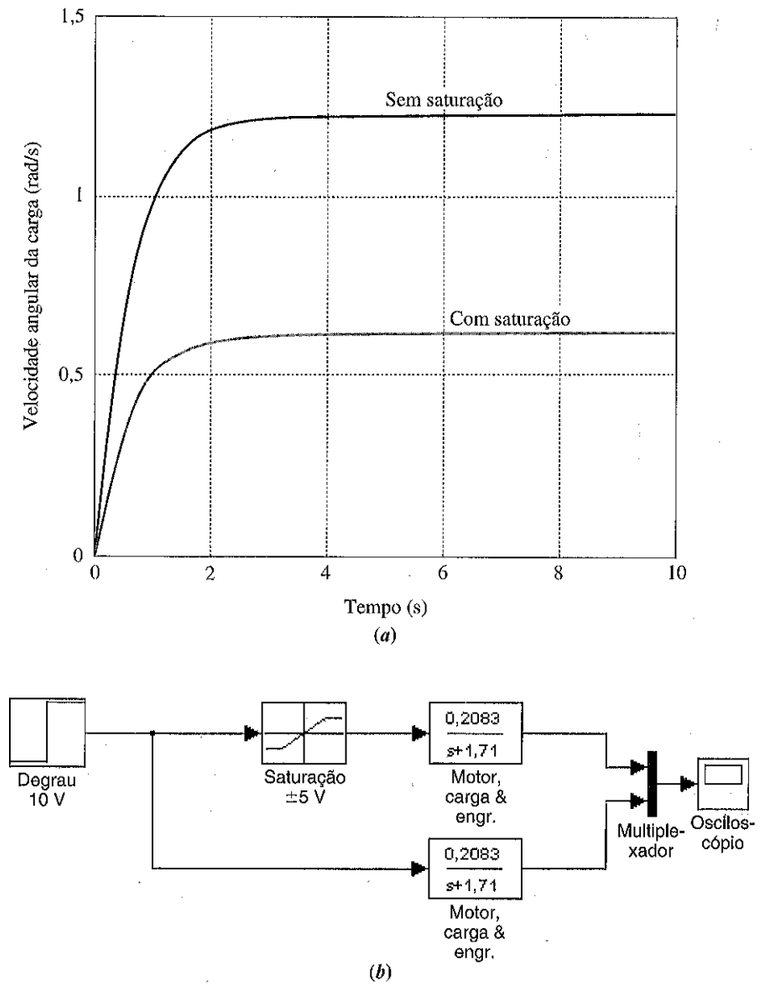
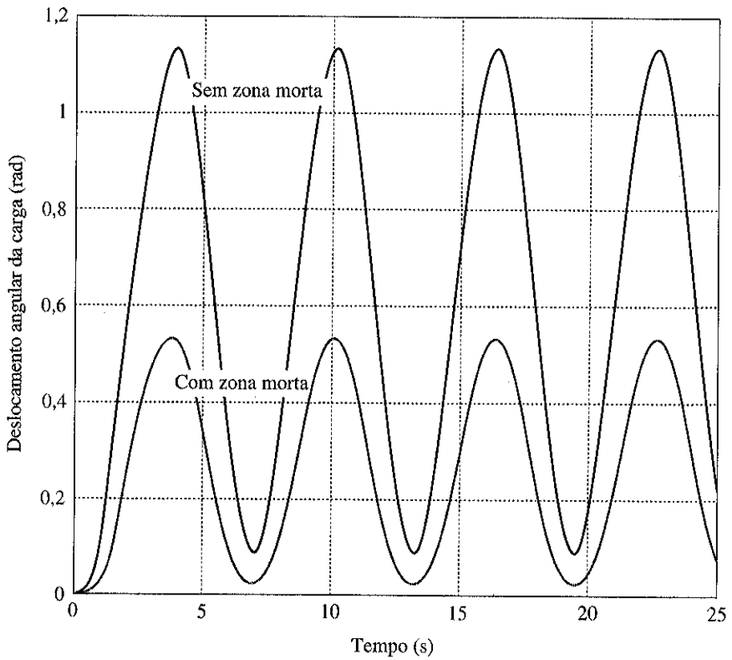
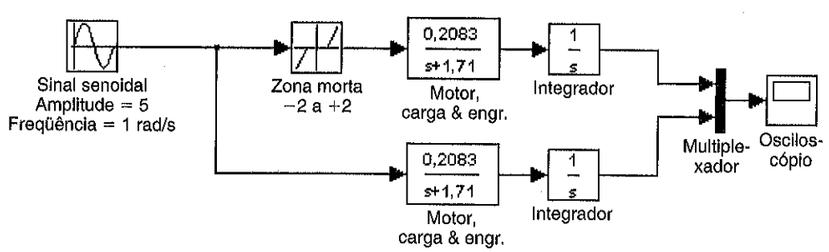


Fig. 4.29 a. Efeito da saturação do amplificador sobre a resposta de velocidade angular da carga; **b.** diagrama de blocos em Simulink



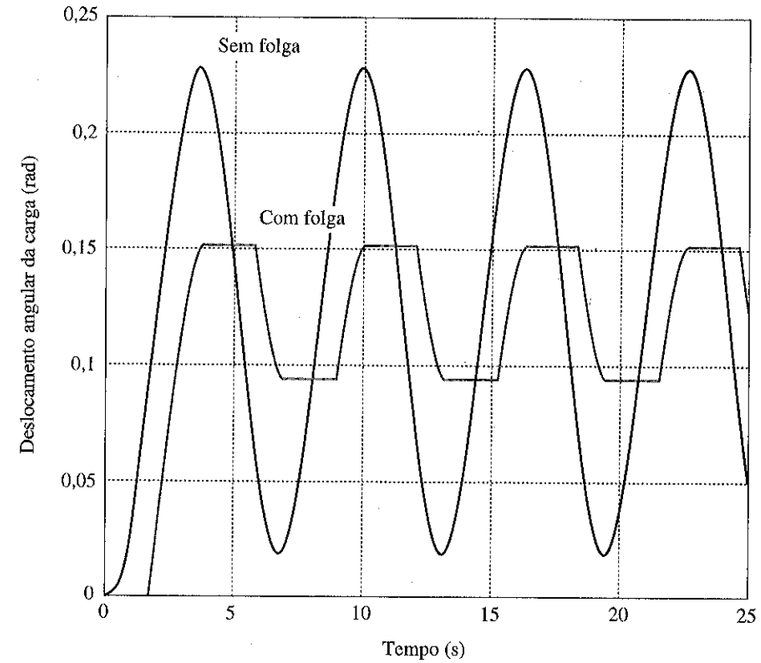
(*a*)



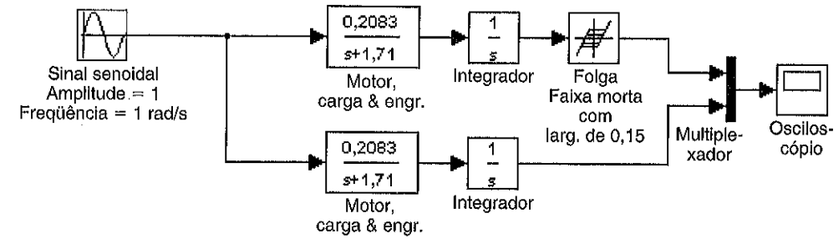
(*b*)

Fig. 4.30 a. Efeito da zona morta sobre a resposta de deslocamento angular da carga; **b.** diagrama de blocos em Simulink

Fig. 4.31 a. Efeito da folga sobre a resposta de deslocamento angular da carga; **b.** diagrama de blocos em Simulink



(*a*)



(*b*)

O efeito de folgas (*backlash*) sobre o eixo de saída acionado por um motor com engrenagens está mostrado na Fig. 4.31. Aqui, uma vez mais, estamos considerando o motor com carga e engrenagens do Estudo de Caso do Controle de Antena do Cap. 2. A entrada do motor é, mais uma vez, um sinal senoidal escolhido para permitir evidenciar os efeitos da folga nas engrenagens acionadas pelo motor. Quando o motor inverte o sentido de rotação, o eixo de saída permanece parado no início do movimento de inversão de sentido. Quando as engrenagens finalmente ultrapassam a folga de contato, o eixo de saída começa a girar no sentido oposto. A resposta resultante é bastante diferente da resposta de um sistema linear sem folga.

Exercício de Avaliação 4.8

Problema: Usar o Simulink do MATLAB para reproduzir a Fig. 4.31.

Resposta: Ver Fig. 4.31.

Agora que vimos os efeitos de não-linearidades sobre a resposta no domínio do tempo, retornemos aos sistemas lineares. Até aqui nossa cobertura sobre os sistemas lineares lidou com obtenção da resposta em função do tempo usando a transformada de Laplace no domínio de freqüência. Uma outra forma de obter a resposta é usar as técnicas no espaço de estados no domínio do tempo. Este tópico é o tema das duas próximas seções.

Espaço de Estados

4.10 Solução das Equações de Estado através da Transformada de Laplace

No Cap. 3, os sistemas foram modelados no espaço de estados, onde a representação consistiu em uma equação de estado e em uma equação de saída. Nesta seção, usamos a transformada de Laplace para resolver as equações de estado a fim de obter os vetores de estado e de saída.

Considere a equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.92}$$

e a equação de saída

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{4.93}$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação de estado, resulta

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{4.94}$$

A fim de separar $\mathbf{X}(s)$, substitua $s\mathbf{X}(s)$ por $s\mathbf{I}\mathbf{X}(s)$, onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade $n \times n$, e n é a ordem do sistema. Combinando todos os termos em $\mathbf{X}(s)$, obtemos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{4.95}$$

Resolvendo para $\mathbf{X}(s)$ através da pré-multiplicação de ambos os membros da Eq. (4.95) por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, a solução final para $\mathbf{X}(s)$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\\ &= \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)]\end{aligned} \tag{4.96}$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação de saída, resulta

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{4.97}$$

Autovalores e Pólos da Função de Transferência

Vimos que os pólos da função de transferência determinam a natureza da resposta transitória do sistema. Haverá uma entidade equivalente na representação no espaço de estados que forneça a mesma informação? Na Seção 5.8 definiremos formalmente as raízes de $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ (ver denominador da Eq. (4.96)) como os *autovalores* da matriz de sistema $\mathbf{A}$.[8] Mostremos que os autovalores são iguais aos pólos da função de transferência. Sejam a saída, $\mathbf{Y}(s)$, e a entrada, $\mathbf{U}(s)$, grandezas escalares, $Y(s)$ e $U(s)$, respectivamente. Além disso, para ficar de acordo com a definição de função de transferência, seja $\mathbf{x}(0)$, vetor de estado inicial, igual a $\mathbf{0}$, o vetor nulo. Substituindo a Eq. (4.96) na Eq. (4.97) e resolvendo em termos da função de transferência, $Y(s)/U(s)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \mathbf{C}\left[\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\right]\mathbf{B} + \mathbf{D}\\ &= \frac{\mathbf{C}\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D}\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\end{aligned} \tag{4.98}$$

As raízes do denominador da Eq. (4.98) são os pólos da função de transferência. Como os denominadores das Eqs. (4.96) e (4.98) são idênticos, os pólos do sistema são iguais aos autovalores. Por conseguinte, se um sistema for representado no espaço de estados, podemos obter os pólos a partir de $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Seremos mais formais sobre estes fatos quando formos discutir estabilidade no Cap. 6.

O exemplo a seguir mostra como resolver as equações de estado com o uso da transformada de Laplace e também como obter os autovalores e pólos do sistema.

[8]Algumas vezes é usado o símbolo λ em vez da variável complexa s ao resolver as equações de estado sem usar a transformada de Laplace. Assim, é comum ver a equação característica escrita também como $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

Exemplo 4.11

Solução por transformada de Laplace; autovalores e pólos

Problema Dado o sistema representado no espaço de estados pelas Eqs. (4.99)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} \tag{4.99a}$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x} \tag{4.99b}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.99c}$$

faça o seguinte:

a. Resolva a equação de estado precedente e obtenha a saída para uma dada entrada exponencial.
b. Obtenha os autovalores e os pólos do sistema.

Solução

a. Resolveremos o problema determinando as partes componentes da Eq. (4.96) e em seguida fazendo a substituição na Eq. (4.97). Primeiramente, obtemos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ por comparação da Eq. (4.99a) com a Eq. (4.92). Como

$$s\mathbf{I} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

então

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix} \tag{4.101}$$

e

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 9s + 26) & (s+9) & 1 \\ -24 & s^2 + 9s & s \\ -24s & -(26s + 24) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \tag{4.102}$$

Como $\mathbf{U}(s)$, a transformada de Laplace de e^{-t}, é $1/(s+1)$, $\mathbf{X}(s)$ pode ser calculado. Reescrevendo a Eq. (4.96) como

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \tag{4.103}$$

e usando $\mathbf{B}$ e $\mathbf{x}(0)$ com base nas Eqs. (4.99a) e (4.99c), respectivamente, obtemos

$$X_1(s) = \frac{(s^3 + 10s^2 + 37s + 29)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{4.104a}$$

$$X_2(s) = \frac{(2s^2 - 21s - 24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{4.104b}$$

$$X_3(s) = \frac{s(2s^2 - 21s - 24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{4.104c}$$

A equação de saída é determinada a partir da Eq. (4.99b). Executando as adições indicadas, resulta

$$Y(s) = [1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = X_1(s) + X_2(s) \tag{4.105}$$

ou

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{(s^3 + 12s^2 + 16s + 5)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\\ &= \frac{-6{,}5}{s+2} + \frac{19}{s+3} - \frac{11{,}5}{s+4}\end{aligned} \tag{4.106}$$

onde o pólo em -1 cancelou um zero em -1. Aplicando a transformada de Laplace inversa,

$$y(t) = -6{,}5e^{-2t} + 19e^{-3t} - 11{,}5e^{-4t} \tag{4.107}$$

b. O denominador da Eq. (4.102), que é $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, é também o denominador da função de transferência do sistema. Assim $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ fornece tanto os pólos do sistema como os autovalores -2, -3 e -4.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem executando os exercícios com MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa cap4ps1 no Apêndice E. Você aprenderá como resolver as equações de estado para obter a resposta da saída usando a transformada de Laplace. O Exemplo 4.11 será resolvido usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica.

Exercício de Avaliação 4.9

Problema: Dado o sistema representado no espaço de estados pelas Eqs. (4.108),

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \tag{4.108a}$$

$$y = [1 \quad 3]\,\mathbf{x} \tag{4.108b}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.108c}$$

faça o seguinte:

a. Resolva para $y(t)$ usando as técnicas do espaço de estados e da transformada de Laplace.

b. Obtenha os autovalores e os pólos do sistema.

Respostas:

a. $y(t) = -0{,}5e^{-t} - 12e^{-2t} + 17{,}5e^{-3t}$

b. -2, -3.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Espaço de Estados

4.11 Solução das Equações de Estado no Domínio do Tempo

Veremos agora uma outra técnica para resolver as equações de estado. Em vez de usar a transformada de Laplace, vamos resolver as equações diretamente no domínio do tempo empregando um método estreitamente relacionado com a solução clássica de equações diferenciais. Descobriremos que a solução final consiste em duas partes que são diferentes das respostas forçada e natural.

Admita, primeiramente, a equação de estado homogênea da forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{4.109}$$

Como se deseja calcular $\mathbf{x}$, admitamos uma solução por série, exatamente como fizemos nas equações diferenciais escalares elementares. Assim,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \mathbf{b}_{k+1} t^{k+1} + \cdots \tag{4.110}$$

Substituindo a Eq. (4.110) na Eq. (4.109), obtemos

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + (k+1)\mathbf{b}_{k+1} t^k + \cdots \\ &\quad = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \mathbf{b}_{k+1} t^{k+1} + \cdots) \end{aligned} \tag{4.111}$$

Igualando os coeficientes semelhantes resulta

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \tag{4.112a}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \tag{4.112b}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \tag{4.112c}$$

$$\mathbf{b}_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{b}_0 \tag{4.112d}$$

$$\vdots$$

Substituindo estes valores na Eq. (4.110) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 t^k \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{b}_0 t^{k+1} + \cdots \\ &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right)\mathbf{b}_0 \end{aligned} \tag{4.113}$$

Mas, da Eq. (4.110),

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0 \tag{4.114}$$ [9]

Portanto,

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right)\mathbf{x}(0) \tag{4.115}$$

Seja

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right) \tag{4.116}$$

onde $e^{\mathbf{A}t}$ é simplesmente uma notação para a matriz formada pelo membro da direita da Eq. (4.116). Usamos esta definição porque o membro da direita da Eq. (4.116) lembra a expansão em série de potências de e^{at}, ou seja

$$e^{at} = \left(1 + at + \frac{1}{2}a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}a^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right) \tag{4.117}$$

Usando a Eq. (4.115), temos

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{4.118}$$

Damos um nome especial à matriz $e^{\mathbf{A}t}$: ela se chama *matriz de transição de estados*,[10] uma vez que executa uma transformação sobre $\mathbf{x}(0)$, transportando $\mathbf{x}$ do estado inicial, $\mathbf{x}(0)$, para o estado $\mathbf{x}(t)$ em qualquer instante t. O símbolo, $\mathbf{\Phi}(t)$, é usado para designar $e^{\mathbf{A}t}$. Assim,

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \tag{4.119}$$

e

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \tag{4.120}$$

Há algumas propriedades de $\mathbf{\Phi}(t)$ que utilizaremos mais tarde na solução de $\mathbf{x}(t)$. Da Eq. (4.120),

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{x}(0) \tag{4.121}$$

Assim, a primeira propriedade de $\mathbf{\Phi}(t)$ é

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \tag{4.122}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Além disso, derivando a Eq. (4.120) e igualando-a à Eq. (4.109), resulta

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{4.123}$$

a qual, em $t = 0$, fornece

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \tag{4.124}$$

Portanto, a segunda propriedade de $\mathbf{\Phi}(t)$ decorre da Eq. (4.124):

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \tag{4.125}$$

[9]Neste desenvolvimento consideramos o instante inicial, t_0, como sendo igual a zero. De um modo mais geral, $t_0 \neq 0$. Depois de concluir este desenvolvimento através da Eq. (4.133), o leitor interessado deve consultar o Apêndice I no CD-ROM que acompanha este livro para obter uma solução mais geral em termos do instante inicial $t_0 \neq 0$.

[10]A matriz de transição de estados aqui é referente ao instante inicial $t_0 = 0$. A dedução no Apêndice I no CD-ROM que acompanha o livro, para $t_0 \neq 0$ fornece $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\mathbf{x}(t_0)$.

Em resumo, a solução do sistema homogêneo, ou não forçado, é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \tag{4.126}$$

onde

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \tag{4.127}$$

e

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \tag{4.128}$$

Resolvamos agora o problema forçado, ou não-homogêneo. Dada a equação de estado forçada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.129}$$

rearranje e multiplique ambos os lados por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.130}$$

Percebendo claramente que o membro da esquerda é igual à derivada do produto $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.131}$$

Integrando ambos os lados, vem

$$[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)]\Big|_0^t = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{4.132}$$

uma vez que $e^{-\mathbf{A}t}$ calculada em $t = 0$ é a matriz identidade (da Eq. (4.116)). Resolvendo a Eq. (4.132) em termos de $\mathbf{x}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \\ &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{4.133}$$

onde $\mathbf{\Phi}(t) = e^{-\mathbf{A}t}$ por definição.

A integral na Eq. (4.133) é chamada *integral de convolução*. Observe que o primeiro termo do membro da direita da equação é a resposta devida ao vetor de estado inicial. Observe também que ele é o único termo que depende apenas do vetor de estado inicial e não da entrada. Chamamos esta parte de *resposta à entrada zero*, uma vez que corresponde à resposta total se a entrada for zero. O segundo termo, a integral de convolução, depende somente da entrada, $\mathbf{u}$, e da matriz de entrada, $\mathbf{B}$, não do vetor de estado inicial. Chamamos esta parte da resposta de *resposta no estado zero*, uma vez que corresponde à resposta total se o vetor de estado inicial for zero. Há, portanto, uma partição da resposta diferente da resposta forçada/natural que vimos ao resolver equações diferenciais. Nas equações diferenciais, as constantes arbitrárias da resposta natural eram calculadas com base nas condições iniciais e nos valores iniciais da resposta forçada e de suas derivadas. Portanto, as amplitudes da resposta natural são uma função das condições iniciais da saída e da entrada. Na Eq. (4.133), a resposta à entrada zero não depende dos valores iniciais da entrada e de suas derivadas. Depende somente das condições iniciais do vetor de estado. O exemplo seguinte mostra claramente a diferença de partição. Preste bastante atenção ao fato de que, no resultado final, a resposta no estado zero contém não somente a solução forçada, mas também partes do que se chamou anteriormente de resposta natural. Veremos na solução que a resposta natural está distribuída ao longo da resposta à entrada zero e da resposta no estado zero.

Antes de prosseguir com o exemplo, examinemos a forma dos elementos de $\mathbf{\Phi}(t)$ para os sistemas lineares e invariantes no tempo. O primeiro termo da Eq. (4.96), a transformada de Laplace da resposta de sistema não forçado, é a transformada da Eq. (126):

$$\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \mathcal{L}[\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{4.134}$$

de onde se pode ver que $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ é a *transformada de Laplace da matriz de transição de estados*, $\mathbf{\Phi}(t)$. Já vimos que o denominador de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ é um polinômio em s cujas raízes são os pólos do sistema. Este polinômio é obtido da equação $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\right] = \mathbf{\Phi}(t) \tag{4.135}$$

cada termo de $\mathbf{\Phi}(t)$ deve ser a soma de exponenciais geradas pelos pólos do sistema.

Resumamos os conceitos com dois exemplos numéricos. O primeiro resolve as equações de estado diretamente no domínio do tempo. O segundo exemplo utiliza a transformada de Laplace para resolver a matriz de transição de estados através da transformada de Laplace inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Exemplo 4.12

Solução no domínio do tempo

Problema Para a equação de estado e o vetor de estado inicial mostrados nas Eqs. (4.136), onde $u(t)$ é um degrau unitário, determine a matriz de transição de estados e em seguida calcule $\mathbf{x}(t)$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \tag{4.136a}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.136b}$$

Solução Como a equação de estado está na forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{4.137}$$

obtenha os autovalores usando $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Em conseqüência, $s^2 + 6s + 8 = 0$, de onde $s_1 = -2$ e $s_2 = -4$. Como cada termo da matriz de transição é a soma de respostas geradas pelos pólos (autovalores), supomos que a matriz de transição de estados seja da forma

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (K_1e^{-2t} + K_2e^{-4t}) & (K_3e^{-2t} + K_4e^{-4t}) \\ (K_5e^{-2t} + K_6e^{-4t}) & (K_7e^{-2t} + K_8e^{-4t}) \end{bmatrix} \tag{4.138}$$

A fim de obter os valores das constantes, vamos usar as propriedades da matriz de transição de estados. Como

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \tag{4.139}$$

$$K_1 + K_2 = 1 \tag{4.140a}$$

$$K_3 + K_4 = 0 \tag{4.140b}$$

$$K_5 + K_6 = 0 \tag{4.140c}$$

$$K_7 + K_8 = 1 \tag{4.140d}$$

e uma vez que

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \tag{4.141}$$

então

$$-2K_1 - 4K_2 = 0 \tag{4.142a}$$

$$-2K_3 - 4K_4 = 1 \tag{4.142b}$$

$$-2K_5 - 4K_6 = -8 \tag{4.142c}$$

$$-2K_7 - 4K_8 = -6 \tag{4.142d}$$

As constantes são calculadas usando quatro vezes duas equações simultâneas. Por exemplo, a Eq. (140*a*) pode ser resolvida simultaneamente com a Eq. (142*a*) para fornecer os valores de K_1 e de K_2. Procedendo de modo semelhante, podemos determinar todas as outras constantes. Portanto,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \tag{4.143}$$

Além do mais,

$$\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)}\right) \\ (-e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-4(t-\tau)}) \end{bmatrix} \tag{4.144}$$

Em conseqüência, o primeiro termo da Eq. (4.133) é

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) \end{bmatrix} \tag{4.145}$$

O último termo da Eq. (4.133) é

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau - \frac{1}{2}e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \\ -e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau + 2e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \tag{4.146}$$

Observe, como tinha sido anunciado, que a Eq. (4.146), a resposta no estado zero, contém não somente a resposta forçada, 1/8, mas também termos da forma Ae^{-2t} e Be^{-4t} que são parte do que se chamou anteriormente de resposta natural. Contudo, os coeficientes A e B não são dependentes das condições iniciais.

O resultado final é encontrado somando-se as Eqs. (4.145) e (4.146). Portanto,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} + \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{7}{8}e^{-4t} \\ -\frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \tag{4.147}$$

Exemplo 4.13

Matriz de transição de estados através da transformada de Laplace

Problema Encontre a matriz de transição de estados do Exemplo 4.12, usando $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Solução Usamos o fato de que $\mathbf{\Phi}(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Assim, obtemos primeiro $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ como

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & (s+6) \end{bmatrix} \tag{4.148}$$

de onde

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8} \end{bmatrix} \tag{4.149}$$

Expandindo cada um dos termos da matriz em frações parciais, vem

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right) & \left(\frac{1/2}{s+2} - \frac{1/2}{s+4}\right) \\ \left(\frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4}\right) & \left(\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right) \end{bmatrix} \tag{4.150}$$

Finalmente, aplicando a transformada de Laplace inversa a cada um dos termos, obtemos

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \tag{4.151}$$

equação diferencial no espaço de estados sob a forma de variáveis de fase. Um exemplo ilustra o procedimento.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem executando os exercícios com MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa cap4ps2 no Apêndice E. Você aprenderá como resolver as equações de estado para obter a resposta da saída usando a integral de convolução. Os Exemplos 4.12 e 4.13 serão resolvidos usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica.

Os sistemas representados no espaço de estados podem ser simulados em computador digital. Podem ser usados programas, como o MATLAB, com esta finalidade. Alternativamente, o usuário pode escrever programas especializados como discutido no Apêndice H.1 no CD-ROM que acompanha o livro.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap4p3 no Apêndice B. Este exercício usa o MATLAB para simular a resposta ao degrau de sistemas representados no espaço de estados. Além de aprender a gerar a resposta ao degrau, você aprenderá como especificar a faixa de valores para o eixo dos tempos no gráfico.

Exercício de Avaliação 4.10

Problema: Dado o sistema representado no espaço de estados pelas Eqs. (4.152):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t} \tag{4.152a}$$

$$y = [2 \quad 1]\mathbf{x} \tag{4.152b}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.152c}$$

faça o seguinte:

a. Calcule a matriz de transição de estados.
b. Calcule o vetor de estado usando a integral de convolução.
c. Obtenha a saída, $y(t)$.

Respostas:

a. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}\right) & \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}\right) \\ \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}\right) & \left(-\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-4t}\right) \end{bmatrix}$

b. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{10}{3}e^{-t} - e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-4t}\right) \\ \left(-\frac{5}{3}e^{-t} + e^{-2t} + \frac{8}{3}e^{-4t}\right) \end{bmatrix}$

c. $y(t) = 5e^{-t} - e^{-2t}$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Estudos de Caso

Controle de uma Antena: Resposta a Malha Aberta

Neste capítulo fazemos uso das funções de transferência deduzidas no Cap.2 e das equações de estado deduzidas no Cap. 3, para obter a resposta na saída de um sistema a malha aberta. Mostramos também a importância dos pólos de um sistema na determinação da resposta transitória. O estudo de caso a seguir utiliza estes conceitos para analisar uma parte a malha aberta do sistema de controle de posição de uma antena em azimute. A função de transferência a malha aberta com que iremos lidar consiste em um amplificador de potência e um motor com carga.

Problema Para o diagrama esquemático do sistema de controle de posição em azimute mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1), suponha um sistema a malha aberta (canal de retroação desconectado).

a. Prever, por inspeção, a forma da resposta da velocidade angular de saída a um degrau de tensão na entrada do amplificador.
b. Encontrar a relação de amortecimento e a freqüência natural do sistema a malha aberta.
c. Deduzir a expressão analítica completa para a resposta da velocidade angular da carga em malha aberta, a um degrau de tensão na entrada do amplificador, usando as funções de transferência.

Espaço de Estados

d. Obter as equações de estado e de saída a malha aberta.

MATLAB

e. Usar o MATLAB para obter um gráfico da resposta em velocidade angular da carga, a malha aberta, a um degrau de tensão na entrada.

Solução As funções de transferência do amplificador de potência, motor e carga, como mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1) foram discutidas no estudo de caso do Cap. 2. Os dois subsistemas estão mostrados interconectados na Fig. 4.32(*a*). Deduzindo a saída em posição angular do motor e da carga através da multiplicação por s, obtemos a velocidade angular de saída, ω_o, como está mostrado na Fig. 4.32(*a*). A função de transferência equivalente representando os três blocos na Fig. 4.32(*a*) é o produto das funções de transferência individuais e está mostrada na Fig. 4.32(*b*).[11]

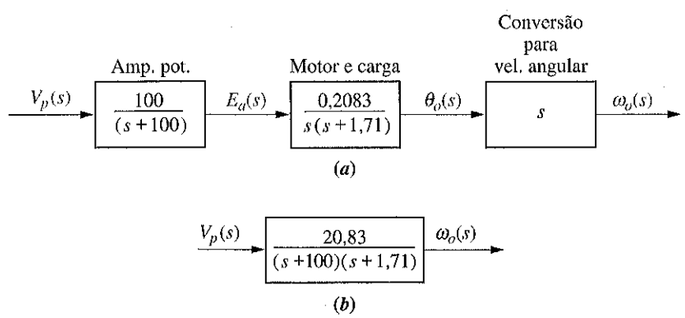


Fig. 4.32 Sistema de controle de posição de uma antena em azimute para velocidade angular: **a.** percurso à frente; **b.** percurso à frente equivalente

a. Usando a função de transferência mostrada na Fig. 4.32(*b*), podemos prever a natureza da resposta ao degrau. A resposta ao degrau consiste em uma resposta em estado estacionário gerada pela entrada em degrau e na resposta transitória, que é a soma de duas exponenciais geradas pelos pólos da função de transferência. Assim, a forma da resposta é

$$\omega_o(t) = A + Be^{-100t} + Ce^{-1{,}71t} \tag{4.153}$$

[11]Esta relação produto será deduzida no Cap. 5.

b. A relação de amortecimento e a freqüência natural do sistema a malha aberta podem ser obtidas expandindo-se o denominador da função de transferência. Como a função de transferência a malha aberta é

$$G(s) = \frac{20{,}83}{s^2 + 101{,}71s + 171} \tag{4.154}$$

$\omega_n = \sqrt{171} = 13{,}08$ e $\zeta = 3{,}89$ (superamortecido).

c. Para deduzir a resposta em velocidade angular para uma entrada em degrau, multiplicamos a função de transferência da Eq. (4.154) pela entrada em degrau, $1/s$, e obtemos

$$\omega_o(s) = \frac{20{,}83}{s(s+100)(s+1{,}71)} \tag{4.155}$$

Expandindo em frações parciais, obtemos

$$\omega_o(s) = \frac{0{,}122}{s} + \frac{2{,}12 \times 10^{-3}}{s+100} - \frac{0{,}124}{s+1{,}71} \tag{4.156}$$

Passando para o domínio do tempo, vem

$$\omega_o(t) = 0{,}122 + (2{,}12 \times 10^{-3})e^{-100t} - 0{,}124e^{-1{,}71t} \tag{4.157}$$

Espaço de Estados

d. Primeiramente converta a função de transferência para a representação no espaço de estados. Usando a Eq. (4.154), temos

$$\frac{\omega_o(s)}{V_p(s)} = \frac{20{,}83}{s^2 + 101{,}71s + 171} \tag{4.158}$$

Multiplicando em cruz e aplicando a transformada de Laplace inversa com condições iniciais nulas, temos

$$\ddot{\omega}_o + 101{,}71\dot{\omega}_o + 171\omega_o = 20{,}83v_p \tag{4.159}$$

Definindo as variáveis de fase como

$$x_1 = \omega_o \tag{4.160a}$$

$$x_2 = \dot{\omega}_o \tag{4.160b}$$

e usando a Eq. (4.159), se escrevem as equações de estado

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.161a}$$

$$\dot{x}_2 = -171x_1 - 101{,}71x_2 + 20{,}83v_p \tag{4.161b}$$

onde $v_p = 1$, um degrau unitário. Como $x_1 = \omega_o$ é a saída, a equação de saída é

$$y = x_1 \tag{4.162}$$

As Eqs. (4.161) e (4.162) podem ser programadas para se obter a resposta ao degrau usando o MATLAB ou métodos alternativos descritos no Apêndice H.1 no CD-ROM anexo ao livro.

MATLAB

e. Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap4p4 no Apêndice B. Este exercício usa o MATLAB para traçar a resposta ao degrau.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Vá ao sistema de controle de posição de uma antena em azimute mostrado na contracapa da frente (Configuração 2). Admita um sistema a malha aberta (canal de retroação desconectado) e faça o seguinte:

a. Preveja a resposta de velocidade angular a malha aberta do sistema amplificador de potência, motor e carga a uma entrada em degrau de tensão aplicada ao amplificador de potência.
b. Encontre a relação de amortecimento e a freqüência natural do sistema a malha aberta.
c. Deduza a resposta da velocidade angular em malha aberta do sistema amplificador de potência, motor e carga a um degrau de tensão de entrada, usando as funções de transferência.

Espaço de Estados

d. Obtenha as equações de estado e de saída a malha aberta.

MATLAB

e. Use o MATLAB para obter um gráfico da resposta em velocidade angular a malha aberta, a um degrau de tensão na entrada.

Veículo Submersível Não-tripulado (UFSS): Resposta a Malha Aberta em Arfagem

Um veículo UFSS está mostrado na Fig. 4.33. A profundidade do veículo é controlada da seguinte maneira: Durante o movimento à frente, a superfície do profundor é defletida de um certo ângulo selecionado. Esta deflexão faz com que o veículo gire em torno do eixo de arfagem. A arfagem do veículo cria uma força vertical que faz com que o veículo suba ou submerja. O sistema de controle de arfagem do veículo é usado aqui e nos capítulos subseqüentes como um estudo de caso para demonstrar os conceitos tratados. O diagrama de blocos para o sistema de controle de arfagem está mostrado na Fig. 4.34 e na contracapa traseira para referência futura (Johnson, 1980). Neste estudo de caso, investigamos a resposta no domínio do tempo da dinâmica do veículo que relaciona o ângulo de arfagem de saída com o ângulo de entrada no profundor.

Problema A função de transferência relacionando o ângulo de arfagem, $\theta(s)$, ao ângulo do profundor, $\delta_e(s)$, para o veículo UFSS é

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-0{,}125(s + 0{,}435)}{(s + 1{,}23)(s^2 + 0{,}226s + 0{,}0169)} \tag{4.163}$$

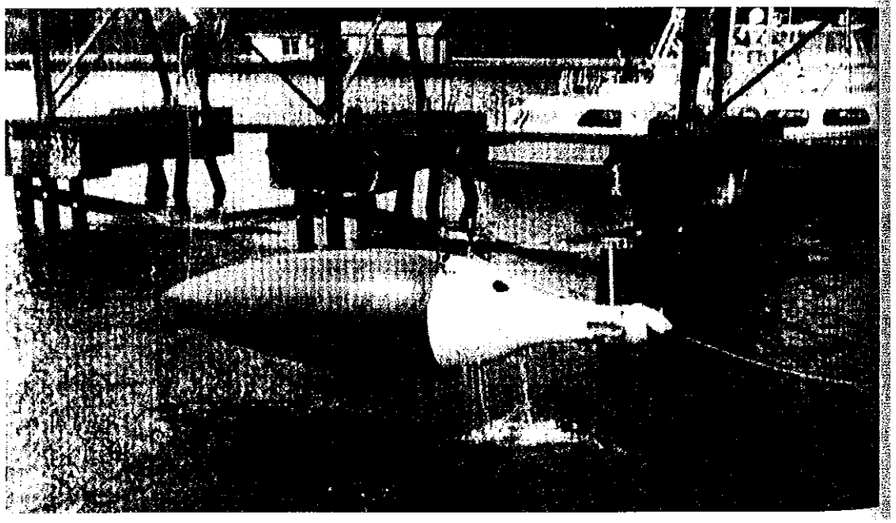


Fig. 4.33 Veículo Submersível Não Tripulado (UFSS)

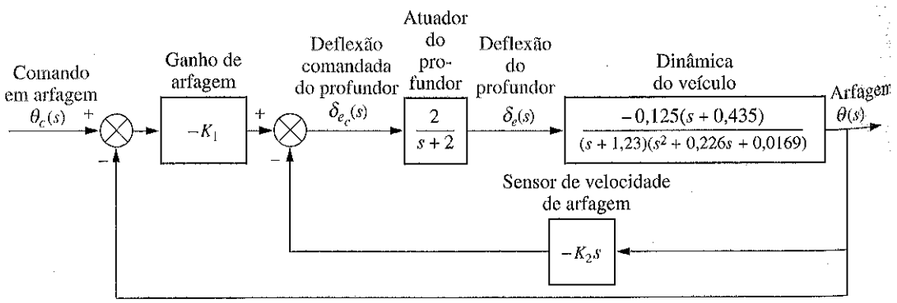


Fig. 4.34 Malha de controle em arfagem do veículo UFSS

a. Usando apenas os pólos de segunda ordem mostrados na função de transferência, prever a ultrapassagem percentual, o tempo de subida, o instante de pico e o tempo de assentamento.
b. Usando a transformada de Laplace, encontre a expressão analítica para a resposta do ângulo de arfagem para uma deflexão em degrau da superfície do profundor, como entrada.
c. Calcule os efeitos do pólo e do zero adicionais sobre a validade da aproximação de segunda ordem.
d. Plote a resposta da dinâmica do sistema ao degrau e verifique suas conclusões encontradas no item (c).

Solução

a. Usando o polinômio $s^2 + 0{,}226s + 0{,}0169$, obtemos $\omega_n^2 = 0{,}0169$ e $2\zeta\omega_n = 0{,}226$. Assim, $\omega_n = 0{,}13$ rad/s e $\zeta = 0{,}869$. Por conseguinte, $\%UP = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100 = 0{,}399\%$. Da Fig. 4.16, $\omega_n T_r = 2{,}75$, ou seja, $T_r = 21{,}2$ s. Para obter o instante de pico usamos $T_p = \pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 48{,}9$ s. Finalmente, o tempo de assentamento é $T_s = 4/\zeta\omega_n = 35{,}4$ s.
b. A fim de se conseguir um valor final positivo em (d), vamos obter a resposta do sistema a um degrau unitário negativo, compensando o sinal negativo da função de transferência. Usando expansão em frações parciais, a transformada de Laplace da resposta, $\theta(s)$, é

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \frac{0{,}125(s + 0{,}435)}{s(s + 1{,}23)(s^2 + 0{,}226s + 0{,}0169)} \\ &= 2{,}616\frac{1}{s} + 0{,}0645\frac{1}{s + 1{,}23} \\ &\quad - \frac{2{,}68(s + 0{,}113) + 3{,}478\sqrt{0{,}00413}}{(s + 0{,}113)^2 + 0{,}00413}\end{aligned} \tag{4.164}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa,

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 2{,}616 + 0{,}0645e^{-1{,}23t} \\ &\quad - e^{-0{,}113t}(2{,}68\cos 0{,}0643t + 3{,}478\ \text{sen}\, 0{,}0643t) \\ &= 2{,}616 + 0{,}0645e^{-1{,}23t} - 4{,}39e^{-0{,}113t}\cos(0{,}0643t + 52{,}38°)\end{aligned} \tag{4.165}$$

c. Observando as amplitudes relativas entre o coeficiente do termo $e^{-1{,}23t}$ e o do termo do co-seno na Eq. (4.165), vemos que há um cancelamento de efeitos entre o pólo em $-1{,}23$ e o zero em $-0{,}435$. Além disso, o pólo em $-1{,}23$ está afastado do eixo $j\omega$ mais de cinco vezes o que distam os pólos dominantes em $-0{,}113 \pm j0{,}0643$. Concluímos que a resposta será próxima da que foi prevista.
d. Plotando a Eq. (4.165) ou usando uma simulação em computador, obtemos a resposta ao degrau mostrada na Fig. 4.35. Constatamos, na realidade, uma resposta próxima da que foi prevista.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap4p5 no Apêndice B. Este exercício usa o MATLAB para obter ζ, ω_n, T_s, T_p e T_r e plotar a resposta ao degrau. Uma tabela é usada para obter T_r. O exercício aplica os conceitos ao problema em pauta.

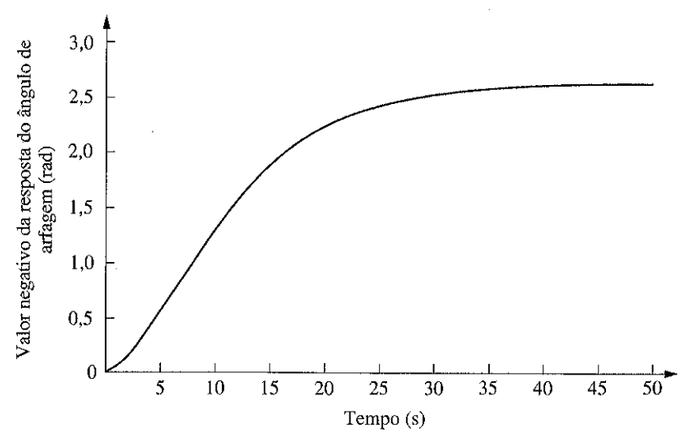


Fig. 4.35 Resposta do controle em arfagem do veículo UFSS a um degrau negativo

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Este problema usa os mesmos princípios que foram aplicados ao veículo UFSS: No mar, os navios são submetidos a movimento segundo o eixo de rolamento, como está mostrado na Fig. 4.36. Superfícies que se projetam lateralmente, chamadas estabilizadores, são usadas para reduzir este movimento de rolamento. Os estabilizadores podem ser posicionados por um sistema de controle a malha fechada que consiste em componentes como os atuadores e sensores dos estabilizadores, bem como na dinâmica de rolamento do navio. Admita que a dinâmica de rolamento, que relaciona o ângulo de rolamento de saída, $\theta(s)$, a um torque perturbador de entrada, $T_D(s)$, seja

$$\frac{\theta(s)}{T_D(s)} = \frac{2{,}25}{(s^2 + 0{,}5s + 2{,}25)} \tag{4.166}$$

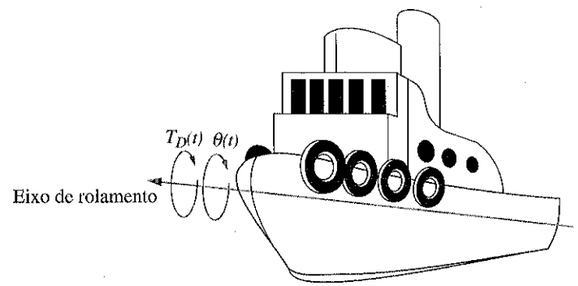


Fig. 4.36 Uma embarcação no mar, mostrando o eixo de rolamento

Faça o seguinte:

a. Determine a freqüência natural, a relação de amortecimento, o instante de pico, o tempo de assentamento, o tempo de subida e a ultrapassagem percentual.

b. Determine a expressão analítica para a resposta da saída a um degrau unitário de tensão na entrada.

MATLAB

c. Use o MATLAB para resolver os itens (a) e (b) e para plotar a resposta obtida em (b).

Sumário

Neste capítulo, usamos os modelos de sistema desenvolvidos nos Caps. 2 e 3 e obtivemos a saída para uma determinada entrada, usualmente um degrau. A resposta ao degrau fornece um quadro claro da resposta transitória do sistema. Executamos esta análise para dois tipos de sistemas, de *primeira* e de *segunda ordem*, representativos de muitos sistemas físicos. Formalizamos, então, nossas descobertas e chegamos a especificações numéricas que descrevem as respostas.

Para os sistemas de primeira ordem dotados de um único pólo sobre o eixo real, a especificação da resposta transitória deduzida foi a *constante de tempo*. A constante de tempo é o inverso do valor do posicionamento do pólo sobre o eixo real. Esta especificação fornece uma indicação da velocidade da resposta transitória. Em particular, a constante de tempo é o tempo necessário para que a resposta ao degrau alcance 63% do seu valor final.

Os sistemas de segunda ordem são mais complexos. Dependendo dos valores dos componentes do sistema, os sistemas de segunda ordem podem exibir quatro tipos de comportamento:

1. Superamortecido
2. Subamortecido
3. Sem amortecimento
4. Criticamente amortecido

Descobrimos que os pólos da entrada geram a resposta forçada, enquanto os pólos do sistema produzem a resposta transitória. Se os pólos do sistema forem reais, o sistema apresentará um comportamento *superamortecido*. Estas respostas exponenciais possuem constantes de tempo iguais ao inverso do valor das localizações dos pólos. Pólos puramente imaginários levam a oscilações senoidais *sem amortecimento* cuja freqüência angular é igual à magnitude do pólo imaginário. Os sistemas com pólos complexos mostram respostas *subamortecidas*. A parte real dos pólos complexos define a envoltória de decaimento exponencial, e a parte imaginária define a freqüência angular de oscilação. A envoltória de decaimento exponencial possui uma constante de tempo igual ao inverso do valor da parte real dos pólos, e a senóide possui uma freqüência angular igual à parte imaginária dos pólos.

Para todos os casos de segunda ordem desenvolvemos as especificações chamadas *relação de amortecimento*, ζ, e *freqüência natural*, ω_n. A relação de amortecimento fornece uma idéia sobre a natureza da resposta transitória e o quanto de ultrapassagem e de oscilação ocorrerá independente da escala de tempo. A freqüência natural fornece uma indicação da velocidade da resposta.

Descobrimos que o valor de ζ determina a forma da resposta natural de segunda ordem:

- Se $\zeta = 0$, a resposta será sem amortecimento.
- Se $\zeta < 1$, a resposta será subamortecida.
- Se $\zeta = 1$, a resposta será criticamente amortecida.
- Se $\zeta > 1$, a resposta será superamortecida.

A freqüência natural é a freqüência de oscilação se todo o amortecimento for retirado. Ela atua como um fator de escala da resposta, como pode ser visto com base na Eq. (4.28), na qual a variável independente pode ser considerada $\omega_n t$.

Para o caso subamortecido, definimos diversas especificações para a resposta transitória, incluindo:

- Ultrapassagem percentual, $\%UP$
- Instante de pico, T_p
- Tempo de assentamento, T_s
- Tempo de subida, T_r

O valor do instante de pico é inversamente proporcional à parte imaginária do pólo complexo. Assim, linhas horizontais no plano s definem linhas de valores constantes para o instante de pico. A ultrapassagem percentual é uma função somente da relação de amortecimento. Conseqüentemente, linhas radiais são linhas de ultrapassagem percentual constante. Finalmente, o tempo de assentamento é inversamente proporcional à parte real do pólo complexo. Em conseqüência, linhas verticais no plano s são linhas de tempo de assentamento constante.

Descobrimos que o instante de pico, a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento estão relacionados com a localização dos pólos. Assim, podemos projetar as respostas transitórias estabelecendo uma relação entre uma resposta desejada e uma localização de pólos e, em seguida, relacionando essa localização de pólos a uma função de transferência e a componentes do sistema.

Os efeitos de não-linearidades, como saturação, zona morta e folga foram explorados usando o Simulink do MATLAB.

Neste capítulo, calculamos também a resposta no domínio do tempo usando a abordagem do espaço de estados. A resposta obtida a partir deste enfoque foi separada em *resposta à entrada zero* e *resposta no estado zero*, enquanto o método de resposta no domínio de freqüência conduziu a uma resposta total dividida nas componentes *resposta natural* e *resposta forçada*.

No próximo capítulo usaremos as especificações de resposta transitória desenvolvidas aqui para analisar e projetar sistemas que consistem na interconexão de diversos subsistemas. Veremos como reduzir esses sistemas a uma única função de transferência a fim de aplicar os conceitos definidos no Cap. 4.

Perguntas de Revisão

1. Nomeie a especificação de desempenho de sistemas de primeira ordem.
2. O que nos diz a especificação de desempenho de um sistema de primeira ordem?
3. Em um sistema com uma entrada e com uma saída, que pólos geram a resposta em estado estacionário?
4. Em um sistema com uma entrada e com uma saída, que pólos geram a resposta transitória?
5. A parte imaginária de um pólo gera que parte de uma resposta?
6. A parte real de um pólo gera que parte de uma resposta?
7. Qual a diferença entre freqüência natural e freqüência de oscilações amortecidas?
8. Se um pólo se deslocar mantendo constante o valor da parte imaginária, o que haverá de comum com as respostas?
9. Se um pólo se deslocar mantendo constante o valor da parte real, o que haverá de comum com as respostas?
10. Se um pólo se deslocar ao longo de uma radial que se estende a partir da origem, o que haverá de comum com as respostas?
11. Liste cinco especificações de um sistema de segunda ordem subamortecido.
12. Para a Pergunta 11, quantas especificações determinam completamente a resposta?
13. Que locais de pólos caracterizam (1) o sistema subamortecido, (2) o sistema superamortecido e (3) o sistema criticamente amortecido?
14. Designe duas condições sob as quais a resposta gerada por um pólo possa ser desprezada.
15. Como você pode justificar o cancelamento de pólo com zero?

Espaço de Estados

16. A solução das equações de estado fornece a resposta de saída do sistema? Explique.

Espaço de Estados

17. Qual a relação entre $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, que apareceu durante a solução das equações de estado através da transformada de Laplace, e a matriz de transição de estados, que apareceu durante a solução clássica da equação de estado?

Espaço de Estados

18. Nomeie uma vantagem importante de usar técnicas no domínio do tempo para a solução da resposta.

Espaço de Estados

19. Nomeie uma vantagem importante de usar técnicas no domínio da freqüência para a solução da resposta.

Espaço de Estados

20. Quais as três informações que devem ser dadas a fim de ser possível resolver a resposta de saída de um sistema usando técnicas no espaço de estados?

Espaço de Estados

21. Como encontrar os pólos de um sistema a partir das equações de estado?

Problemas

1. Deduza as respostas na saída de todas as partes da Fig. 4.7.
2. Obtenha a resposta, $c(t)$, de cada um dos sistemas mostrados na Fig. P4.1. Determine também a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de assentamento para cada caso.

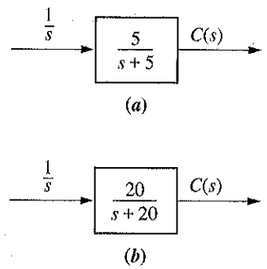


Fig. P4.1

MATLAB

3. Plote as respostas ao degrau relativas ao Problema 2 usando o MATLAB.
4. Determine a tensão no capacitor do circuito mostrado na Fig. P4.2 quando a chave fechar em $t = 0$. Admita condições iniciais nulas. Determine também a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de assentamento para a tensão no capacitor.

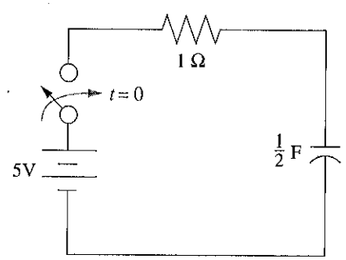


Fig. P4.2

MATLAB

5. Plote as respostas ao degrau relativas ao Problema 4 usando o MATLAB. Determine, a partir dos gráficos, a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de assentamento.
6. Determine o deslocamento, $x(t)$, na Fig. P4.3 quando a força aplicada for um degrau unitário. Suponha condições iniciais nulas e despreze a massa de todos os componentes. Determine também a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de assentamento para o deslocamento.

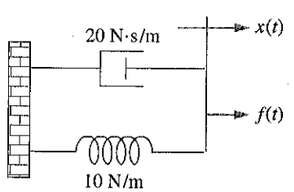


Fig. P4.3

MATLAB

7. Plote as respostas ao degrau relativas ao Problema 6 usando o MATLAB. Determine, a partir dos gráficos, a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de assentamento.
8. Para cada uma das funções de transferência mostradas abaixo, determine a localização dos pólos e dos zeros, plote-os no plano s e, em seguida, escreva uma expressão para a forma geral da resposta ao degrau sem resolver utilizando a transformada de Laplace inversa. Enuncie a natureza de cada uma das respostas (isto é, superamortecida, subamortecida, etc.).

a. $T(s) = \dfrac{2}{s+2}$

b. $T(s) = \dfrac{5}{(s+3)(s+6)}$

c. $T(s) = \dfrac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$

d. $T(s) = \dfrac{20}{s^2+6s+144}$

e. $T(s) = \dfrac{s+2}{s^2+9}$

f. $T(s) = \dfrac{(s+5)}{(s+10)^2}$

MATLAB

9. Use o MATLAB para obter os pólos de

$$T(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^4+6s^3+4s^2+7s+2}$$

Espaço de Estados

10. Determine a função de transferência e os pólos do sistema representado no espaço de estados a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB

11. Repita o Problema 10 usando o MATLAB.
12. Escreva a forma geral da tensão no capacitor do circuito elétrico mostrado na Fig. P4.4.

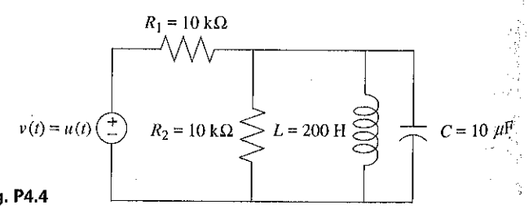


Fig. P4.4

MATLAB

13. Use o MATLAB para plotar a tensão no capacitor do Problema 12.
14. Resolva para $x(t)$ no sistema mostrado na Fig. P4.5 quando $f(t)$ for um degrau unitário.

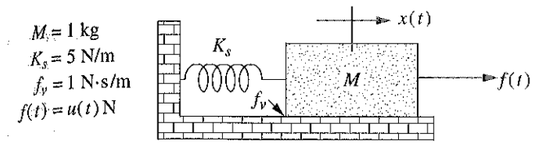


Fig. P4.5

15. O sistema mostrado na Fig. P4.6 tem uma entrada em degrau unitário. Determinar a resposta como uma função do tempo. Supor que o sistema é subamortecido. Observe que o resultado é a Eq. (4.28).

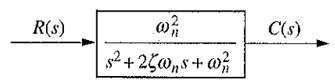


Fig. P4.6

16. Deduza a expressão da relação de amortecimento em função da ultrapassagem percentual, Eq. (4.39).
17. Calcule a resposta exata de cada sistema do Problema 8 usando as técnicas da transformada de Laplace e compare os resultados com os obtidos nesse problema.
18. Determine a relação de amortecimento e a freqüência natural de cada sistema de segunda ordem do Problema 8 e mostre que o valor da relação de amortecimento está em conformidade com o tipo de resposta (isto é, subamortecido, superamortecido, etc.) previsto nesse problema.
19. Um sistema possui uma relação de amortecimento de 0,5, uma freqüência natural de 100 rad/s e um ganho estático de 1. Obter a resposta do sistema a um degrau unitário de entrada.
20. Para cada um dos sistemas de segunda ordem a seguir, determine os valores de ζ, ω_n, T_s, T_p, T_r e $\%UP$.

a. $T(s) = \dfrac{121}{s^2+13{,}2s+121}$

b. $T(s) = \dfrac{0{,}04}{s^2+0{,}02s+0{,}04}$

c. $T(s) = \dfrac{1{,}05\times10^7}{s^2+1{,}6\times10^3 s+1{,}05\times10^7}$

MATLAB

21. Repita o Problema 20 usando o MATLAB. Utilize a estimativa do programa de computador para as especificações dadas e plote as respostas ao degrau. Estime o tempo de subida com base nos gráficos.

Ferramenta GUI

22. Utilize o visualizador LTI Viewer do MATLAB e obtenha o tempo de assentamento, o instante de pico, o tempo de subida e a ultrapassagem percentual para cada um dos sistemas no Problema 20.
23. Para cada par de especificações de sistemas de segunda ordem a seguir, determine a localização do par de pólos de segunda ordem.
    a. $\%UP = 12\%$; $T_s = 0{,}6$ s
    b. $\%UP = 17\%$; $T_p = 0{,}5$ s
    c. $T_s = 7$ s; $T_p = 3$ s
24. Determine a função de transferência de segunda ordem que apresenta uma ultrapassagem de 12,3% e um tempo de assentamento de 1 segundo.
25. Para o sistema mostrado na Fig. P4.7 faça o seguinte:
    a. Determine a função de transferência $G(s) = X(s)/F(s)$.
    b. Determine ζ, ω_n, $\%UP$, T_s, T_p e T_r.

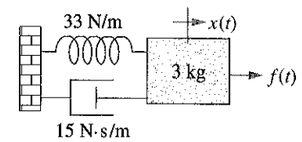


Fig. P4.7

26. No sistema mostrado na Fig. P4.8 é aplicado um degrau de torque em $\theta_1(t)$. Determinar:
    a. A função de transferência $G(s) = \theta_2(s)/T(s)$.
    b. A ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico para $\theta_2(t)$.

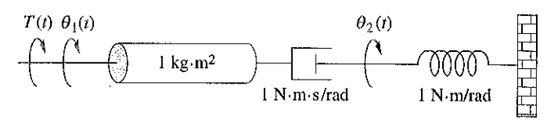


Fig. P4.8

27. Deduza a resposta ao degrau unitário para cada uma das funções de transferência no Exemplo 4.8.
28. Determine a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento, o tempo de subida e o instante de pico para

$$T(s) = \frac{14{,}145}{(s^2+1{,}204s+2{,}829)(s+5)}$$

29. Para cada uma das respostas ao degrau unitário mostradas na Fig. P4.9, determine a função de transferência do sistema.

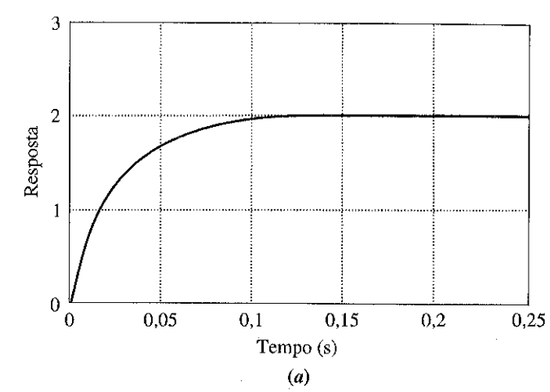
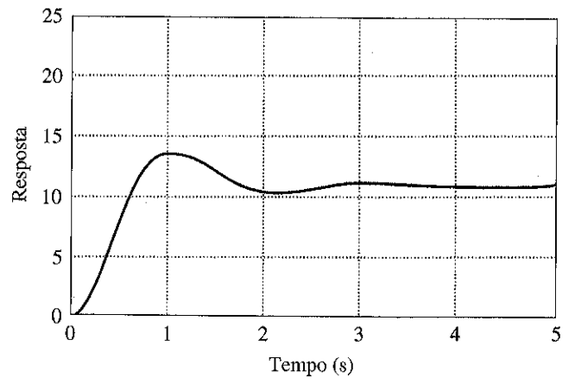
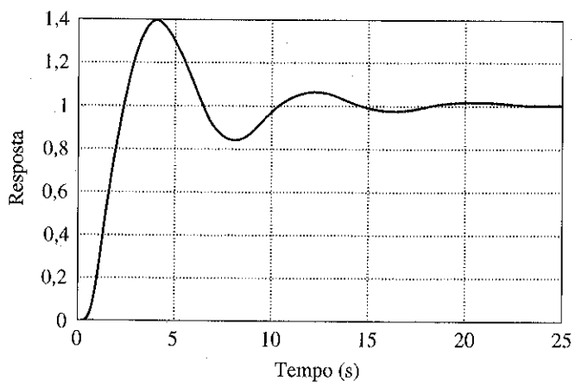


Fig. P4.9 Continua



(*b*)



(*c*)

Fig. P4.9 Continuação

30. Determine se a aproximação de cancelamento de pólos com zeros pode ser feita em relação às seguintes funções de transferência. Se ela for possível, determine a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento, o tempo de subida e o instante de pico.

a. $C(s) = \dfrac{(s+3)}{s(s+2)(s^2+3s+10)}$

b. $C(s) = \dfrac{(s+2{,}5)}{s(s+2)(s^2+4s+20)}$

c. $C(s) = \dfrac{(s+2{,}1)}{s(s+2)(s^2+s+5)}$

d. $C(s) = \dfrac{(s+2{,}01)}{s(s+2)(s^2+5s+20)}$

MATLAB

31. Usando o MATLAB, plote a resposta no domínio do tempo do Problema 30(*a*) e, a partir do gráfico, determine a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento, o tempo de subida e o instante de pico.

32. Para cada uma das seguintes funções de transferência com zeros, determine as partes componentes da resposta ao degrau unitário: (1) a derivada da resposta sem um zero e (2) a resposta sem um zero, posta em escala com o negativo do valor do zero. Além disso, determine e plote a resposta total. Descreva o comportamento de fase não-mínima.

a. $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+3s+36}$

b. $G(s) = \dfrac{s-2}{s^2+3s+36}$

Simulink

33. Use o Simulink do MATLAB para obter a resposta ao degrau de um sistema,

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+10}$$

sob as seguintes condições:

a. O sistema é linear e acionado por um amplificador cujo ganho é 10.
b. Um amplificador cujo ganho é 10 aciona o sistema. O amplificador satura em ±0,25 volt. Descrever o efeito da saturação sobre a saída do sistema.
c. Um amplificador cujo ganho é 10 aciona o sistema. O amplificador satura em ±0,25 volt. O sistema aciona um trem de engrenagens que possui folga. A largura da zona morta devida à folga é de 0,02 rad. Descrever o efeito da saturação e da folga sobre a saída do sistema.

Espaço de Estados

34. Um sistema é representado pelas equações de estado e de saída dadas a seguir. Sem resolver as equações de estado, determine os pólos do sistema.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Espaço de Estados

35. Um sistema é representado pelas equações de estado e de saída dadas a seguir. Sem resolver as equações de estado, determine
a. A equação característica
b. Os pólos do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Espaço de Estados

36. Dada a seguinte representação no espaço de estados de um sistema, determinar $Y(s)$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\operatorname{sen} 3t$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

37. Dado o seguinte sistema representado no espaço de estados, calcular $Y(s)$ usando o método da transformada de Laplace para solução da equação de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espaço de estados

38. Resolva a seguinte equação de estado e a equação de saída para $y(t)$, onde $u(t)$ é o degrau unitário. Use o método da transformada de Laplace.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

39. Calcule $y(t)$ para o seguinte sistema representado no espaço de estados, onde $u(t)$ é o degrau unitário. Use o método da transformada de Laplace para resolver as equações de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB

40. Use o MATLAB para plotar a resposta ao degrau do Problema 39.

Matemática Simbólica

41. Repita o Problema 39 usando a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB e a Eq. (4.96). Além disso, execute seu programa com uma condição inicial, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Espaço de Estados

42. Usando os métodos clássicos somente (não o da transformada de Laplace), calcule a matriz de transição de estados, o vetor de estado e a saída do sistema representado a seguir

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

43. Usando os métodos clássicos somente (não o da transformada de Laplace), calcule a matriz de transição de estados, o vetor de estado e a saída do sistema representado a seguir, onde $u(t)$ é um degrau unitário.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

44. Calcule $y(t)$ para o seguinte sistema representado no espaço de estados, onde $u(t)$ é um degrau unitário. Use a abordagem clássica para resolver a equação de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matemática Simbólica

45. Repita o Problema 44 usando a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB e a Eq. (4.133). Além disso, execute seu programa com uma condição inicial, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Espaço de Estados

46. Usando os métodos descritos no Apêndice H.1 no CD-ROM que acompanha o livro, simule o seguinte sistema e plote a resposta ao degrau. Confira os valores esperados de ultrapassagem percentual, instante de pico e tempo de assentamento.

$$T(s) = \frac{1}{s^2+0{,}8s+1}$$

Espaço de Estados

47. Usando os métodos descritos no Apêndice H.1 no CD-ROM que acompanha o livro, simule o seguinte sistema e plote a saída, $y(t)$, para uma entrada em degrau.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

48. Um ser humano responde a um estímulo visual com uma resposta física, como está mostrado na Fig. P4.10. A função de transferência que relaciona a resposta física, $P(s)$, a um comando visual, $V(s)$, é

$$G(s) = \frac{P(s)}{V(s)} = \frac{(s+0{,}5)}{(s+2)(s+5)}$$

(Stefani, 1973). Faça o seguinte:

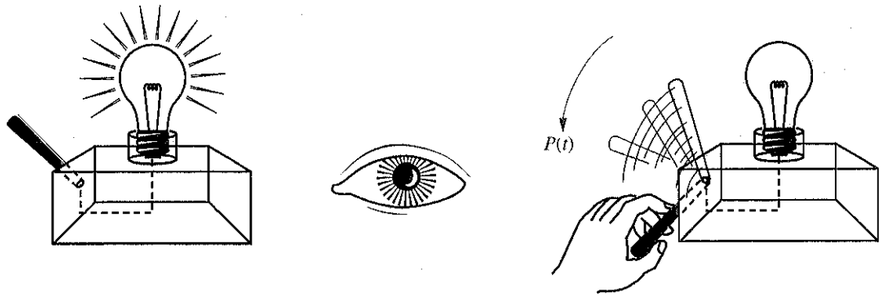
a. Calcule a resposta a um degrau unitário de entrada usando a transformada de Laplace.

Espaço de Estados

b. Represente a função de transferência no espaço de estados.

MATLAB

c. Use o MATLAB para simular o sistema e obter um gráfico da resposta ao degrau.



Passo 1: Ligar a fonte luminosa — Passo 2: Reconhecer a fonte luminosa — Passo 3: Responder à fonte luminosa

Fig. P4.10 Passos para determinar a função de transferência relacionando a saída física de um sistema a um comando visual de entrada

49. Os robôs industriais são usados em uma infinidade de aplicações. A Fig. P4.11 mostra um robô usado para movimentar sacas de cerca de 25 kg de sal grosso empregando um cabeçote a vácuo para suspender as sacas antes de posicioná-las. O robô é capaz de movimentar até 12 sacas por minuto (Schneider, 1992). Admita como modelo para o controlador a malha aberta da junta articulada e o processo

$$G_e(s) = \frac{\omega_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K}{(s+10)(s^2+4s+10)}$$

onde $\omega_o(s)$ *é a* transformada de Laplace da velocidade angular da junta articulada do robô e $V_i(s)$ é a tensão aplicada ao controlador.

a. Calcule a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento, o instante de pico e o tempo de subida da resposta da velocidade da junta a malha aberta para um degrau de tensão de entrada. Justifique todas as hipóteses de segunda ordem.

Espaço de Estados

b. Represente o sistema a malha aberta no espaço de estados.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou qualquer outro programa para simular o sistema e comparar os resultados com os obtidos no item (a).

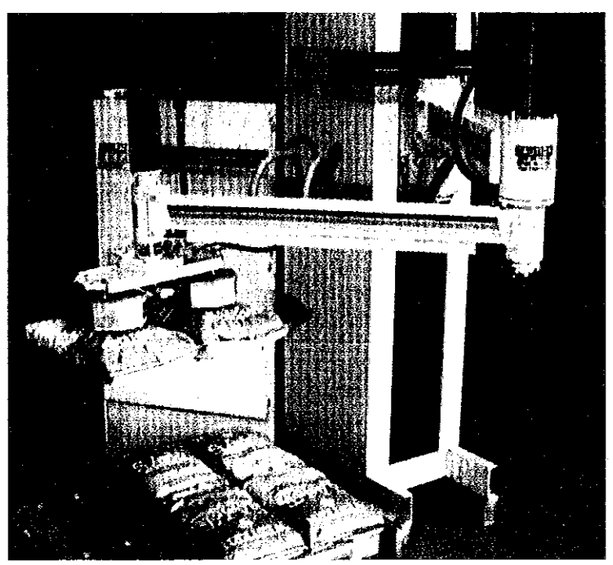


Fig. P4.11 O sistema de vácuo do robô suspende duas sacas de sal

50. A anestesia induz relaxamento muscular (paralisia) e inconsciência no paciente. O relaxamento muscular pode ser monitorado usando os sinais de um eletromiograma dos nervos da mão; a inconsciência pode ser monitorada usando a média da pressão arterial do sistema cardiovascular. O medicamento anestésico é uma mistura de isoflurano e atracúrio. Um modelo aproximado para relacionar o relaxamento muscular com a percentagem de isoflurano na mistura é

$$\frac{P(s)}{U(s)} = \frac{7{,}63 \times 10^{-2}}{s^2 + 1{,}15s + 0{,}28}$$

onde $P(s)$ é o relaxamento muscular medido como uma fração da paralisia total (normalizada como unidade) e $U(s)$ é o percentual de isoflurano na mistura (Linkens, 1992).

a. Determinar a relação de amortecimento e a freqüência natural da resposta transitória da paralisia.

b. Determinar o valor máximo da paralisia percentual se for utilizada uma mistura com 2% de isoflurano.

c. Plotar a resposta da paralisia ao degrau se for utilizada uma mistura com 1% de isoflurano.

d. Que percentagem de isoflurano deveria ser usada para uma paralisia de 100%?

51. Para tratar um ataque de asma aguda injeta-se por via intravenosa o medicamento teofilina. A taxa de variação da concentração do medicamento no sangue é igual à diferença entre a concentração injetada e a concentração eliminada. A concentração injetada é $i(t)/V_d$, onde $i(t)$ é a vazão do medicamento por peso e V_d é o volume aparente e depende do paciente. A concentração eliminada é dada por $k_{10}c(t)$, onde $c(t)$ é a concentração atual do medicamento no sangue e k_{10} é a constante de taxa de eliminação. A concentração de teofilina no sangue é crítica — se for muito baixa, o medicamento é ineficaz; se for muito alta, o medicamento é tóxico (Jannett, 1992). Você ajudará o médico com seus cálculos.

a. Deduza uma equação relacionando a concentração de medicamento desejada, C_D, com a taxa a ser injetada por peso do medicamento, I_R.

b. Deduza uma equação que nos dirá quanto tempo o medicamento deve ser aplicado para se obter a concentração desejada no sangue. Use ambos: o tempo de subida e o tempo de assentamento.

c. Determine a taxa de teofilina a injetar se $V_D = 600$ ml, $k_{10} = 0{,}07\ \text{h}^{-1}$ e o nível necessário de medicamento no sangue é 12 mcg/ml (mcg significa microgramas). Ver Jannett (1992) para uma descrição dos valores dos parâmetros.

d. Determine o tempo de subida e o tempo de assentamento para as constantes do item (c).

Problemas de Projeto

52. Obtenha uma equação que relacione o tempo de assentamento de 2% ao valor de f_v para o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P4.12. Despreze a massa de todos os componentes.

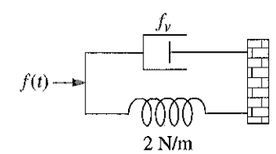


Fig. P4.12

53. Considere o sistema mecânico em translação mostrado na Fig. P4.13. Uma força de 1 lbf, $f(t)$, é aplicada em $t = 0$. Se $M = 1$, determinar K e f_v de modo que a resposta seja caracterizada por uma ultrapassagem percentual de 20% e uma freqüência de oscilação amortecida de 10 rad/s.

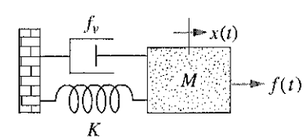


Fig. P4.13

54. Dado o sistema mecânico em translação da Fig. P4.13, onde $K = 1$ e $f(t)$ é um degrau unitário, determinar os valores de M e f_v que produzem uma resposta com 30% de ultrapassagem e um tempo de assentamento de 10 s.

55. Determinar J e K no sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P4.14 com os quais se produz uma resposta a um degrau de torque na entrada com 30% de ultrapassagem e tempo de assentamento de 4 s.

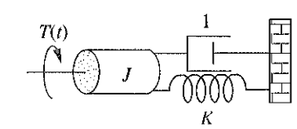


Fig. P4.14

56. Dado o sistema mostrado na Fig. P4.15, obter o amortecimento, D, que produz uma ultrapassagem de 30% na resposta em deslocamento angular para uma entrada de torque em degrau.

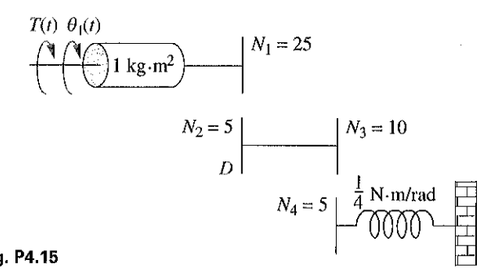


Fig. P4.15

57. Para o sistema mostrado na Fig. P4.16, obter N_1/N_2, de modo que o tempo de assentamento para uma entrada de torque em degrau seja de 16 s.

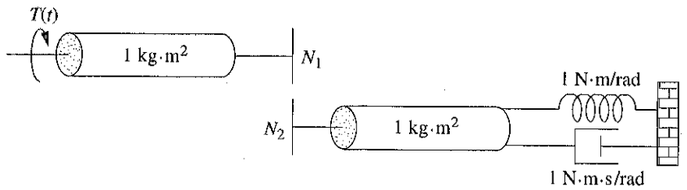


Fig. P4.16

58. Determinar M e K, mostrados no sistema da Fig. P4.17, para produzir $x(t)$ com 10% de ultrapassagem e tempo de assentamento de 10 s como resposta a um degrau de entrada no torque do motor, $T_m(t)$.

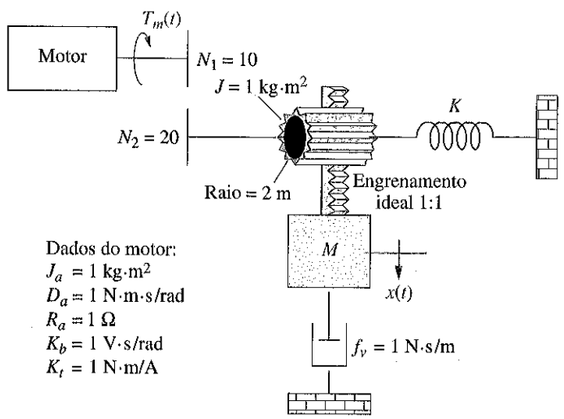


Fig. P4.17

59. Se, no circuito mostrado na Fig. P4.18, $v_i(t)$ for uma tensão em degrau, obter o valor do resistor de modo que seja vista uma tensão sobre o capacitor com uma ultrapassagem de 20%. $C = 10^{-6}$F e $L = 1$ H.

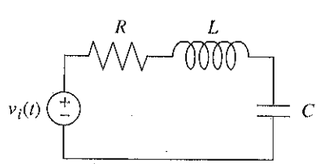


Fig. P4.18

60. Dado o circuito da Fig. P4.18, onde $C = 10\ \mu$F, obter R e L para produzir uma tensão sobre o capacitor com 15% de ultrapassagem e um tempo de assentamento de 2 ms. A entrada, $v(t)$, é um degrau unitário.

61. Para o circuito mostrado na Fig. P4.19, obter os valores de R_2 e C para produzir uma tensão sobre o capacitor com 15% de ultrapassagem e um tempo de assentamento de 1 ms com a entrada $v_i(t)$ em degrau unitário.

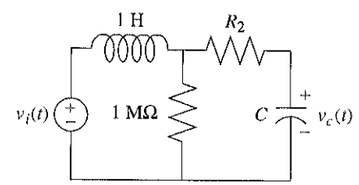


Fig. P4.19

Espaço de Estados

62. As bombas hidráulicas são usadas como entradas de circuitos hidráulicos para fornecer a pressão de alimentação, exatamente da mesma forma como as fontes de tensão suprem os circuitos elétricos. Podem ser encontradas aplicações de circuitos hidráulicos nas indústrias de robôs e aeronáutica, onde os atuadores hidráulicos são usados para movimentar partes componentes. A Fig. P4.20 mostra as partes internas de uma bomba. Uma culatra contendo êmbolos igualmente espaçados gira em torno do eixo i. Uma placa distribuidora, ajustada segundo um determinado ângulo, faz com que as guias na extremidade dos êmbolos os desloquem para dentro e para fora. Quando os êmbolos se movem através da porta de admissão estão em expansão, e quando se deslocam através da porta de descarga estão se retraindo e comprimindo fluido de entrada. Os atuadores grande e pequeno nas partes superior e inferior, respectivamente, controlam o ângulo da placa distribuidora, α. O ângulo α afeta o tamanho do curso do êmbolo. Em conseqüência, é possível regular a vazão de descarga da bomba controlando o ângulo

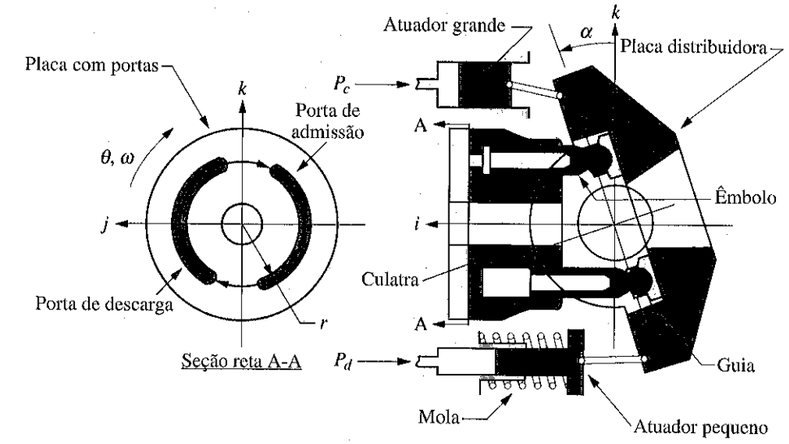


Fig. P4.20 Diagrama de uma bomba hidráulica

da placa. Admita que a equação de estado da bomba hidráulica seja

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (3{,}45 - 14000K_c) & -0{,}255 \times 10^{-9} \\ 0{,}499 \times 10^{11} & -3{,}68 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -3{,}45 + 14000K_c \\ -0{,}499 \times 10^{11} \end{bmatrix} \alpha_0, \text{ onde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ P_d \end{bmatrix}$$

e P_d seja a pressão de descarga da bomba (Manring, 1996). Obter o valor do ganho de vazão do controlador, K_c, de modo que a relação de amortecimento dos pólos do sistema seja 0,9.

Problema Progressivo de Análise e Projeto

63. Pantógrafo para ferrovia de alta velocidade. O Problema 55(*c*) no Cap. 2 pediu que você obtivesse $G(s) = (Y_h(s) - Y_{cat}(s))/F_{cima}(s)$ (O'Connor, 1997).

a. Use os pólos dominantes desta função de transferência e estime valores de ultrapassagem percentual, relação de amortecimento, freqüência natural, tempo de assentamento, instante de pico e tempo de subida.

b. Determine se é valida a aproximação de segunda ordem.

MATLAB

c. Obtenha a resposta de *G(s)* ao degrau e compare os resultados com os do item (a).

Bibliografia

Dorf, R. C. *Introduction to Electric Circuits*, 2d ed. Wiley, New York, 1993.

Franklin, G. F.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*, 2d ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.

Good, M. C.; Sweet, L. M.; and Strobel, K. L. Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, March 1985, pp. 53–59.

Jannett, T. C., and Aragula, S. Simulation of Adaptive Control of Theophylline Concentrations. *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 32–37.

Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description.* NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1980.

Kuo, B. C. *Automatic Control Systems*, 5th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

Linkens, D. A. Adaptive and Intelligent Control in Anesthesia. *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 6–11.

Manring, N. D., and Johnson, R. E. Modeling and Designing a Variable-Displacement Open-Loop Pump. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 118, June 1996, pp. 267–271.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ogata, K. *Modern Control Engineering,* 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

Philips, C. L., and Nagle, H. T. *Digital Control Systems Analysis and Design.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

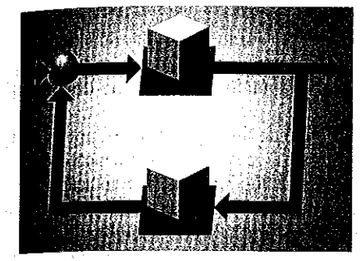
Sawusch, M. R., and Summers, T. A. *1001 Things to Do with Your Macintosh.* TAB Books, Blue Ridge Summit, PA, 1984.

Schneider, R. T. Pneumatic Robots Continue to Improve. *Hydraulics & Pneumatics,* October 1992, pp. 38–39.

Stefani, R. T. Modeling Human Response Characteristics. COED Application Note No. 33, Computers in Education Division of ASEE, 1973.

Timothy, L. K., and Bona, B. E. *State Space Analysis: An Introduction.* McGraw-Hill, New York, 1968.

CAPÍTULO 5



Redução de Subsistemas Múltiplos

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como reduzir diagramas de blocos de subsistemas múltiplos a um único bloco representando a função de transferência relacionando a entrada com a saída.
- Como analisar e projetar a resposta transitória de sistemas constituídos de subsistemas múltiplos.

Espaço de Estados

- Como representar, no espaço de estados, sistemas constituídos de subsistemas múltiplos.

Espaço de Estados

- Como passar de uma representação alternativa de um sistema a outra no espaço de estados.

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posição da antena em azimute mostrada na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de (a) obter a função de transferência que representa a relação entre a entrada e a saída do sistema; (b) obter a representação no espaço de estados do sistema a malha fechada; (c) prever, por meio de um modelo simplificado, o percentual de ultrapassagem, o tempo de assentamento e o instante de pico da resposta ao degrau do sistema a malha fechada; (e) com base no modelo simplificado, projetar o ganho do sistema de modo a atender requisitos da resposta transitória.

Espaço de Estados

- Dado o Veículo Submersível Não Tripulado, UFSS, mostrado na contracapa traseira, você deverá ser capaz de representar, no espaço de estados, os sistemas de controle de arfagem e de rumo.

5.1 Introdução

Trabalhamos até aqui com subsistemas simples representados por um diagrama de blocos com entrada e saída. Contudo, os sistemas mais complexos são representados pela interligação de muitos subsistemas. Como podemos calcular a resposta de uma função de transferência simples, desejamos representar os subsistemas múltiplos por meio de uma única função de transferência. Podemos assim aplicar as técnicas analíticas dos capítulos anteriores e obter informação sobre a resposta transitória de todo o sistema.

Neste capítulo, os subsistemas múltiplos são representados de duas formas: (1) como diagramas de blocos e (2) como diagramas de fluxo de sinal. Embora nenhuma das duas representações esteja limitada a uma técnica particular de análise e projeto, os diagramas de blocos são usados comumente para análise e projeto no domínio de freqüência, e os diagramas de fluxo de sinal para análise no espaço de estados.

Os diagramas de fluxo de sinal representam funções de transferência por meio de linhas, e os sinais, por meio de pequenos círculos (nós). A operação de soma fica implícita. Para mostrar o quanto é conveniente a utilização dos diagramas de fluxo de sinal para análise e projeto no espaço de estados, consideremos a Fig. 3.10. A representação gráfica da função de transferência é tão simples quanto a Fig. 3.10(*a*). Contudo, a representação gráfica de sistemas no espaço de estados requer a indicação de cada uma das variáveis de estado, como na Fig. 3.10(*b*). Neste exemplo, um simples bloco de função de transferência requer sete blocos e uma junção somadora para mostrar de forma explícita as variáveis de estado. Assim, os diagramas de fluxo de sinal apresentam vantagens em relação aos diagramas de blocos, como o da Fig. 3.10(*b*): podem ser esboçados mais rapidamente, são mais compactos e destacam as variáveis de estado.

Desenvolveremos técnicas para reduzir cada uma das representações a uma única função de transferência. Para reduzir os diagramas de blocos será usada a álgebra de diagramas de blocos; para reduzir os diagramas de fluxo de sinal, a regra de Mason. Deve-se enfatizar, novamente, que estes métodos são usados na forma como são descritos. Contudo, como veremos a seguir, qualquer dos métodos poderá ser utilizado para análise e projeto no domínio de freqüência ou no espaço de estados.

5.2 Diagramas de Blocos

Como você já sabe, um subsistema é representado por um bloco com uma entrada, uma saída e uma função de transferência. Muitos sistemas são formados de diversos subsistemas, como na Fig. 5.1. Ao se interligar subsistemas, alguns elementos novos devem ser acrescentados ao diagrama de blocos. Estes novos elementos são as *junções de soma* e os *pontos de coleta de sinal*. Todas as partes componentes de um diagrama de blocos de um sistema linear e invariante no tempo estão mostradas na Fig. 5.2. A característica da junção somadora mostrada na Fig.

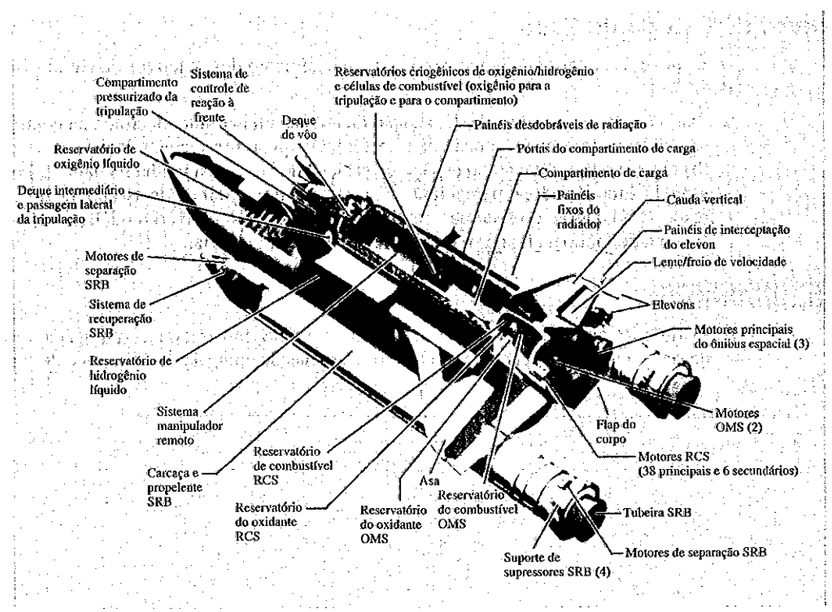


Fig. 5.1 O ônibus espacial é constituído de diversos subsistemas. Você pode identificar os que são sistemas de controle ou partes de sistemas de controle?

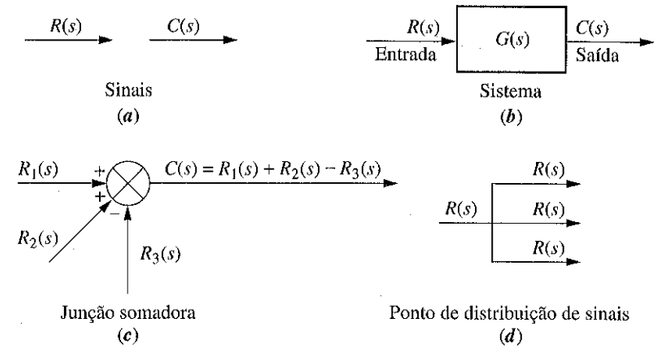


Fig. 5.2 Componentes de um diagrama de blocos de um sistema linear e invariante no tempo

5.2(*c*) é: o sinal de saída, $C(s)$, é a soma algébrica dos sinais de entrada, $R_1(s)$, $R_2(s)$ e $R_3(s)$. A figura mostra três entradas, mas é possível um número qualquer de entradas. Um ponto de coleta de sinal, como o mostrado na Fig. 5.2(*d*), distribui o sinal de entrada, $R(s)$, inalterado, para diversos pontos de saída.

Examinaremos agora algumas topologias comuns na interconexão de subsistemas e deduziremos a representação da função de transferência de cada uma delas. Estas topologias comuns constituirão a base no procedimento de redução de sistemas mais complicados a um único bloco.

Associação em Cascata

A Fig. 5.3(*a*) mostra um exemplo de subsistemas associados em cascata. Estão mostrados os valores dos sinais intermediários na saída de cada subsistema. Cada sinal é obtido através do produto da entrada pela função de transferência. A função de transferência equivalente, $G_e(s)$, mostrada na Fig. 5.3(*b*), é a transformada de Laplace da saída dividida pela transformada de Laplace da entrada com base na Fig. 5.3(*a*), ou seja,

$$G_e(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s) \tag{5.1}$$

que é o produto das funções de transferência dos subsistemas.

A Eq. 5.1 foi obtida com base na suposição de que os subsistemas interconectados não afetam os subsistemas adjacentes. Isto é, a saída de um subsistema permanece a mesma esteja ou não conectado ao subsistema subseqüente. Se ocorrer mudança na saída, o subsistema subseqüente carrega o subsistema anterior, e a função de transferência equivalente não é mais o produto das funções de transferência individuais. O circuito da Fig. 5.4(*a*) demonstra este conceito. Sua função de transferência é

$$G_1(s) = \frac{V_1(s)}{V_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{R_1C_1}}{s + \dfrac{1}{R_1C_1}} \tag{5.2}$$

De modo semelhante, o circuito da Fig. 5.4(*b*) tem a seguinte função de transferência:

$$G_2(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\dfrac{1}{R_2C_2}}{s + \dfrac{1}{R_2C_2}} \tag{5.3}$$

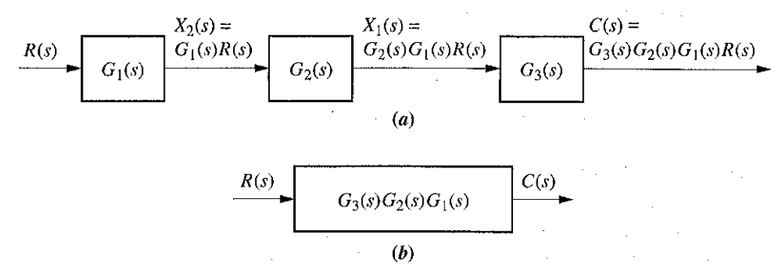


Fig. 5.3 a. Subsistemas em cascata; **b.** função de transferência equivalente

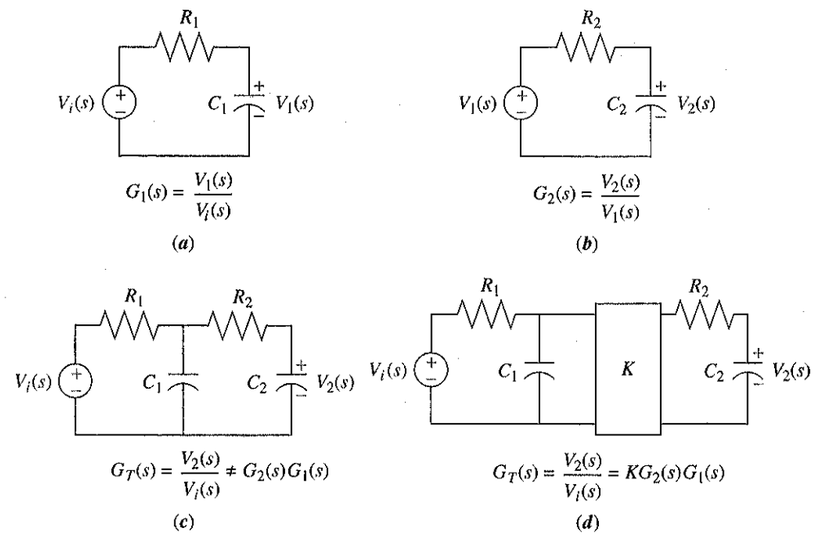


Fig. 5.4 Efeito de carga em sistemas em cascata

Se os circuitos forem conectados em cascata, como na Fig. 5.4(*c*), você pode verificar que a função de transferência obtida a partir das equações de malha ou de nó é

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + \left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_2} + \dfrac{1}{R_2C_1}\right)s + \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}} \tag{5.4}$$

Mas, usando a Eq. (5.1),

$$G(s) = G_2(s)G_1(s) = \frac{\dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + \left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_2}\right)s + \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}} \tag{5.5}$$

As Eqs. (5.4) e (5.5) não são iguais: a Eq. (5.4) possui um termo a mais no coeficiente de s no denominador e está correta.

Uma forma de evitar o carregamento é usar um amplificador entre os dois circuitos, como mostrado na Fig. 5.4(*d*). O amplificador apresenta uma impedância de entrada elevada, e assim não carrega o circuito precedente. Ao mesmo tempo, apresenta uma impedância de saída baixa, de modo a se comportar como uma fonte de tensão ideal para o circuito subseqüente. Com o amplificador incluído, a função de transferência equivalente é o produto das funções de transferência pelo ganho, K, do amplificador.

Associação em Paralelo

A Fig. 5.5 mostra um exemplo de subsistemas em paralelo. Uma vez mais, podemos obter a função de transferência equivalente, escrevendo a saída de cada subsistema. Os subsistemas em paralelo possuem uma entrada comum e uma saída formada pela soma algébrica das saídas de todos os subsistemas. A função de transferência equivalente, $G_e(s)$, é a transformada da saída dividida pela transformada da entrada, com base na Fig. 5.5(*a*), ou seja,

$$G_e(s) = \pm G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s) \tag{5.6}$$

que é a soma algébrica das funções de transferência dos subsistemas; ela aparece na Fig. 5.5(*b*).

Associação com Retroação

A terceira topologia é a forma com retroação, que será vista repetidamente nos capítulos subseqüentes. Os sistemas com retroação constituem a base de nosso estudo da engenharia de sistemas de controle. No Cap. 1 definimos os sistemas a malha aberta e a malha fechada e ressaltamos as vantagens dos sistemas de controle a malha fechada

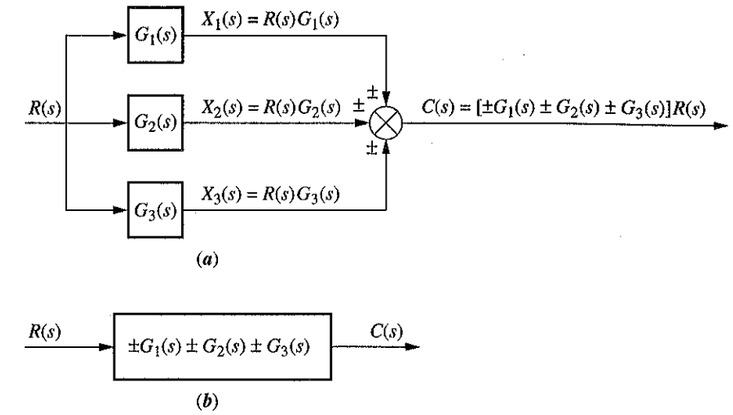


Fig. 5.5 a. Subsistemas em paralelo; **b.** função de transferência equivalente

ou com retroação, sobre os sistemas a malha aberta. À medida que formos avançando, focalizaremos a análise e o projeto de sistemas com retroação.

Obtenhamos a função de transferência que representa o sistema da entrada para a saída. O sistema com retroação típico, descrito detalhadamente no Cap. 1, está mostrado na Fig. 5.6(*a*); um modelo simplificado está mostrado na Fig. 5.6(*b*).[1] Voltando nossa atenção para o modelo simplificado,

$$E(s) = R(s) \mp C(s)H(s) \tag{5.7}$$

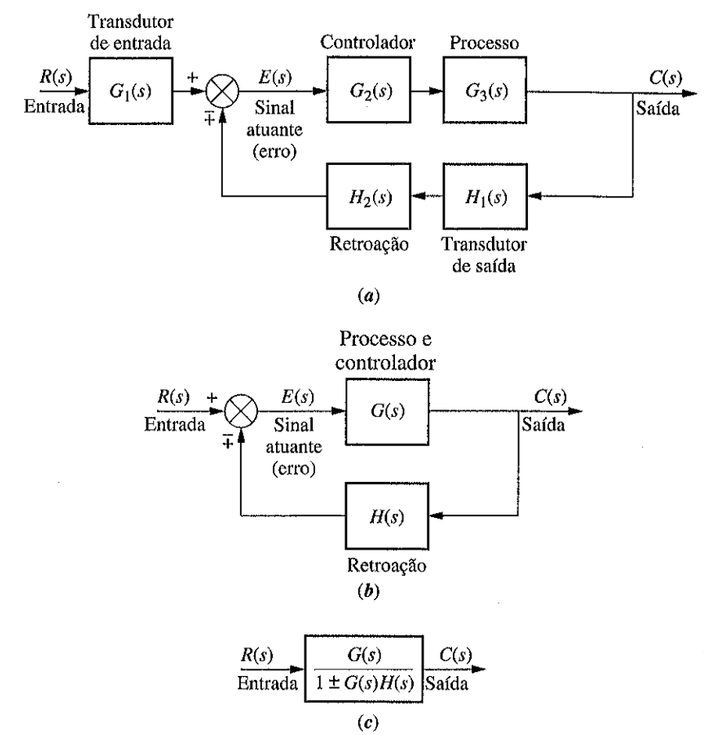


Fig. 5.6 a. Sistema de controle com retroação; **b.** modelo simplificado; **c.** função de transferência equivalente

[1]Diz-se que o sistema tem *retroação negativa* se o sinal na junção de soma é negativo, e que tem *retroação positiva* se o sinal é positivo.

Mas como $C(s) = G(s)E(s)$,

$$E(s) = \frac{C(s)}{G(s)} \tag{5.8}$$

Substituindo a Eq. (5.8) na Eq. (5.7) e determinando a função de transferência, $C(s)/R(s) = G_e(s)$, obtemos a função de transferência equivalente, ou *a malha fechada*, mostrada na Fig. 5.6(*c*),

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} \tag{5.9}$$

O produto, $G(s)H(s)$, na Eq. (5.9) é chamado de *função de transferência a malha aberta*, ou *ganho de malha*.

Até aqui, exploramos três configurações diferentes para subsistemas múltiplos. Determinamos a função de transferência equivalente para cada uma delas. Como estas três formas são combinadas em estruturas complexas nos sistemas físicos, a identificação destas topologias constitui um pré-requisito para se obter a função de transferência equivalente de um sistema complexo. Nesta seção iremos reduzir sistemas complexos compostos de diversos subsistemas a uma única função de transferência equivalente.

Movendo Blocos para Criar Formas Conhecidas

Antes de iniciar a redução de diagramas de blocos, devemos explicar que as formas comuns (cascata, paralela e retroação) nem sempre ocorrem de modo evidente nesses diagramas. Por exemplo, na forma com retroação, se houver um ponto de coleta de sinal logo após a junção somadora, não poderemos usar a fórmula da retroação para reduzir o sistema a um único bloco. Esse sinal desaparece e não há meio de restabelecer o ponto de coleta de sinal.

Nesta subseção discutiremos os deslocamentos básicos de blocos que podem ser usados para estabelecer formas conhecidas quando elas quase existem. Em particular, explicaremos como deslocar blocos à esquerda e à direita de junções de soma e de pontos de coleta de sinal.

A Fig. 5.7 mostra diagramas de blocos equivalentes formados ao se deslocarem funções de transferência à esquerda e à direita de uma junção somadora, e a Fig. 5.8 mostra diagramas de blocos equivalentes formados ao se deslocarem funções de transferência à esquerda e à direita de um ponto de coleta de sinal. Nos diagramas, o símbolo ≡ significa "equivalente a." Estas equivalências, juntamente com as formas estudadas anteriormente, podem ser usadas para reduzir diagramas de blocos a uma única função de transferência. Em cada caso das Figs. 5.7 e 5.8, a equivalência pode ser verificada acompanhando-se os sinais desde a entrada até a saída e reconhecendo-se que os sinais de saída são idênticos. Por exemplo, na Fig. 5.7(*a*), os sinais $R(s)$ e $X(s)$ são multiplicados por $G(s)$ antes de chegar à saída. Portanto, ambos os diagramas de blocos são equivalentes, com $C(s) = R(s)G(s) \mp X(s)G(s)$.[2] Na

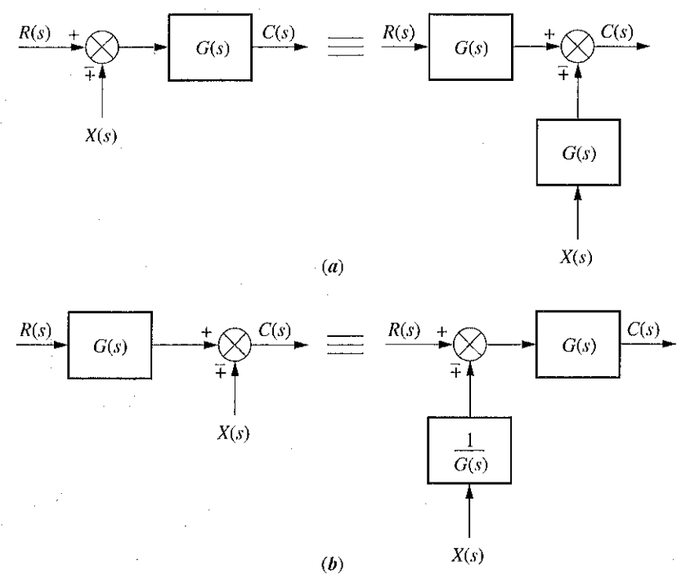


Fig. 5.7 Álgebra de diagrama de blocos para junções de soma — formas equivalentes de deslocar um bloco **a.** à esquerda da junção somadora; **b.** à direita da junção somadora

[2]O autor considera o caso escalar onde é possível comutar o sinal com a função de transferência. Isto não se aplica aos sistemas multivariáveis onde a função de transferência é uma matriz e os sinais deixam de ser escalares, em geral. (N. T.)

Fig. 5.8 Álgebra de diagrama de blocos para junções de aquisição de sinais — formas equivalentes de deslocar um bloco **a.** à esquerda da junção de aquisição de sinais; **b.** à direita da junção de aquisição de sinais

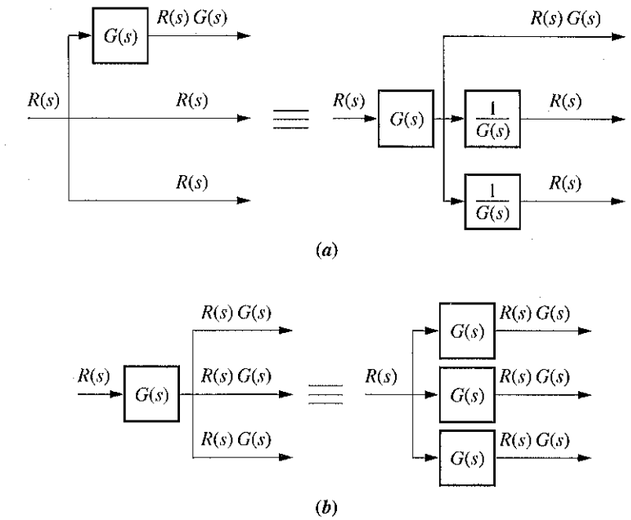


Fig. 5.7(*b*), $R(s)$ é multiplicada por $G(s)$ antes de chegar à saída, mas $X(s)$ não é. Portanto, ambos os diagramas de blocos na Fig. 5.7(*b*) são equivalentes, com $C(s) = R(s)G(s) \mp X(s)$. Em relação aos pontos de coleta de sinal, um raciocínio semelhante conduz aos diagramas de blocos das Figs. 5.8(*a*) e (*b*).

Reunamos agora toda a discussão em alguns exemplos de redução de diagrama de blocos.

Exemplo 5.1

Redução de diagrama de blocos através de formas conhecidas

Problema Reduzir o diagrama de blocos mostrado na Fig. 5.9 a uma única função de transferência.

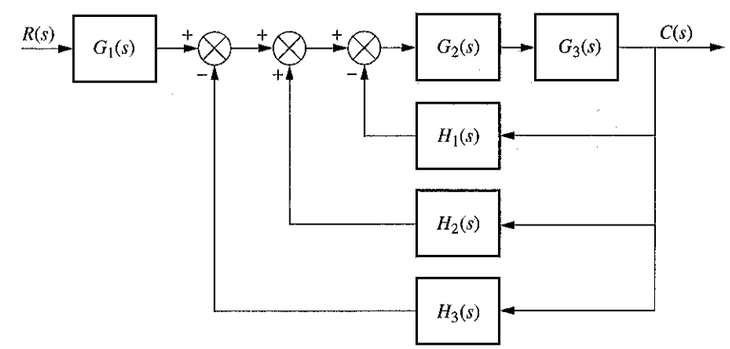


Fig. 5.9 Diagrama de blocos para o Exemplo 5.1

Solução Resolvemos o problema seguindo os passos da Fig. 5.10. Primeiramente, podemos fundir as três junções de soma em uma única, como mostrado na Fig. 5.10(*a*).

Segundo, reconhecemos que as três funções de retroação, $H_1(s)$, $H_2(s)$ e $H_3(s)$ estão conectadas em paralelo. Elas são alimentadas a partir de uma fonte de sinal comum e suas saídas são adicionadas algebricamente. A função equivalente é $H_1(s) - H_2(s) + H_3(s)$. Reconhecemos também que $G_2(s)$ e $G_3(s)$ estão conectadas em cascata. Assim, a função de transferência equivalente é o produto $G_3(s)G_2(s)$. Os resultados destes passos estão mostrados na Fig. 5.10(*b*).

Para concluir, o sistema com retroação é reduzido e multiplicado por $G_1(s)$ para produzir a função de transferência equivalente mostrada na Fig. 5.10(*c*).

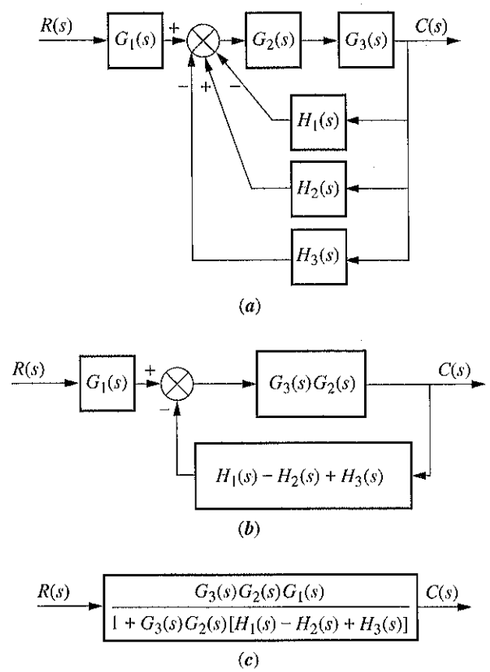


Fig. 5.10 Etapas na solução do Exemplo 5.1: **a.** reunir as junções de soma em uma única; **b.** formar o sistema em cascata equivalente no canal de ação à frente e o sistema paralelo equivalente no canal de retroação; **c.** formar o sistema com retroação equivalente e multiplicar por $G_1(s)$ em cascata

Exemplo 5.2

Redução de diagrama de blocos por meio de deslocamento de blocos

Problema Reduzir o sistema mostrado na Fig. 5.11 a uma única função de transferência.

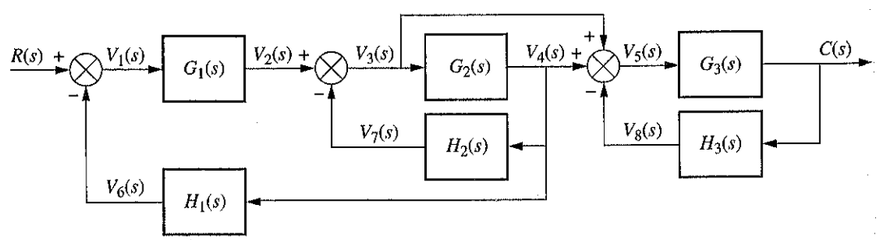


Fig. 5.11 Diagrama de blocos para o Exemplo 5.2

Solução Neste exemplo utilizamos as formas equivalentes mostradas nas Figs. 5.7 e 5.8. Primeiramente, desloque $G_2(s)$ para trás, à esquerda do ponto de coleta de sinal, para criar subsistemas em paralelo e reduza o sistema em retroação formado por $G_3(s)$ e $H_3(s)$. Este resultado é mostrado na Fig. 5.12(*a*).

Segundo, reduza o par em paralelo composto de $1/G_2(s)$ e da unidade, e empurre $G_1(s)$ para a frente, à direita da junção somadora, criando subsistemas em paralelo no canal de retroação. Estes resultados estão mostrados na Fig. 5.12(*b*).

Terceiro, reúna em uma única as junções de soma, adicione os elementos do canal de retroação e combine os dois últimos blocos em cascata. A Fig. 5.12(*c*) mostra estes resultados.

Quarto, use a expressão matemática da retroação a fim de obter a Fig. 5.12(*d*).

Finalmente, multiplique os dois blocos em cascata para obter o resultado mostrado na Fig. 5.12(*e*).

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap5p1 no Apêndice B para executar a redução de diagrama de blocos.

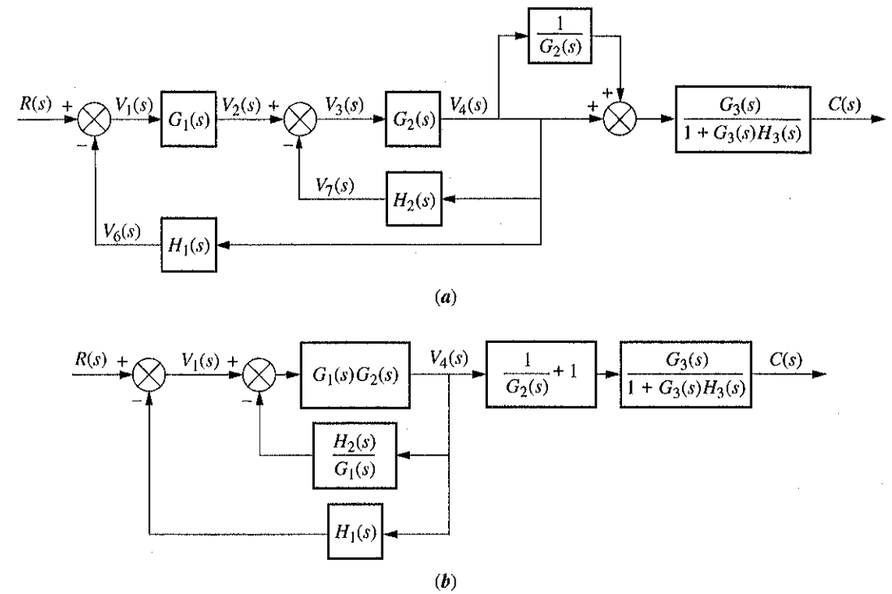


Fig. 5.12 Etapas na redução do diagrama de blocos para o Exemplo 5.2

Exercício de Avaliação 5.1

Problema: Obter a função de transferência equivalente, $T(s) = C(s)/R(s)$, relativa ao sistema mostrado na Fig. 5.13.

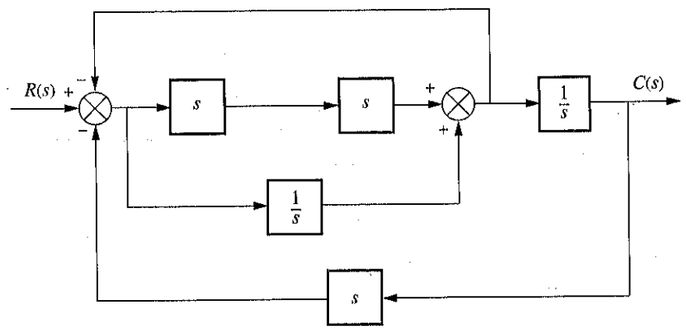


Fig. 5.13 Diagrama de blocos para o Exercício de Avaliação 5.1

Resposta: $T(s) = \dfrac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$.

A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção examinamos a equivalência de várias configurações de diagramas de blocos contendo sinais, sistemas, junções de soma e pontos de coleta. Essas configurações foram as formas em cascata, paralela e com retroação. Ao longo da redução de diagrama de blocos, procuramos produzir estas formas facilmente reconhecidas e, em seguida, reduzir o diagrama de blocos a uma única função de transferência. Na próxima seção examinaremos algumas aplicações da redução de diagrama de blocos.

5.3 Análise e Projeto de Sistemas com Retroação

Uma aplicação imediata dos princípios da Seção 5.2 é a análise e o projeto de sistemas com retroação que se reduzem a sistemas de segunda ordem. Podem ser determinados, então, a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento, o instante de pico e o tempo de subida, com base na função de transferência equivalente.

Considere o sistema mostrado na Fig. 5.14, que pode modelar um sistema de controle como o controle de posição de uma antena em azimute. Por exemplo, a função de transferência, $K/s(s + a)$, pode modelar os amplificadores, o motor, a carga e o trem de engrenagens. Com base na Eq. (5.9), a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, para este sistema é

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} \tag{5.10}$$

onde K modela o ganho do amplificador, isto é, a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada. À medida que K varia, os pólos se deslocam ao longo das três faixas de operação de um sistema de segunda ordem: superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido. Por exemplo, para K entre 0 e $a^2/4$, os pólos do sistema são reais e estão situados em

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4K}}{2} \tag{5.11}$$

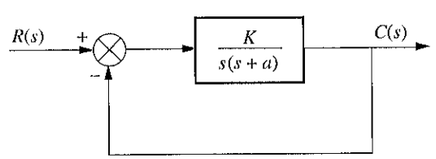


Fig. 5.14 Sistema de controle com retroação, de segunda ordem

À medida que K aumenta, os pólos se deslocam sobre o eixo real e o sistema permanece superamortecido até $K = a^2/4$. Para este valor de ganho, ou esta amplificação, ambos os pólos são iguais e o sistema é criticamente amortecido.

Para valores de ganho superiores a $a^2/4$, o sistema é subamortecido, com pólos complexos situados em

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{\sqrt{4K - a^2}}{2} \tag{5.12}$$

Daí em diante, à medida que K aumenta, a parte real permanece constante e a parte imaginária cresce. Portanto, o instante de pico diminui e a ultrapassagem percentual aumenta, enquanto o tempo de assentamento permanece constante. Vejamos dois exemplos que aplicam os conceitos a sistemas de controle com retroação. No primeiro exemplo determinamos uma resposta transitória do sistema. No segundo, projetamos o ganho para atender um requisito da resposta transitória.

Exemplo 5.3

Determinando a resposta transitória

Problema Para o sistema mostrado na Fig. 5.15, obter o instante de pico, a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento.

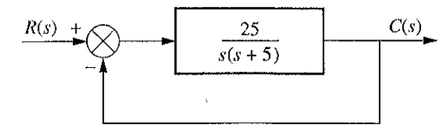


Fig. 5.15 Sistema com retroação para o Exemplo 5.3

Solução A função de transferência a malha fechada obtida da Eq. (5.9) é

$$T(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25} \tag{5.13}$$

Da Eq. (4.18)

$$\omega_n = \sqrt{25} = 5 \tag{5.14}$$

Da Eq. (4.21)

$$2\zeta\omega_n = 5 \tag{5.15}$$

Substituindo a Eq. (5.14) na Eq. (5.15) e calculando ζ, resulta

$$\zeta = 0{,}5 \tag{5.16}$$

Usando os valores de ζ e de ω_n juntamente com as Eqs. (4.34), (4.38) e (4.42), encontramos, respectivamente,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0{,}726\,\text{s} \tag{5.17}$$

$$\%UP = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100 = 16{,}303 \tag{5.18}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1{,}6\,\text{s} \tag{5.19}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap5p2 no Apêndice B. Você aprenderá como executar redução de diagramas de blocos seguida do cálculo da resposta transitória do sistema a malha fechada para obter T_p, $\%UP$ e T_s. Para terminar, você aprenderá como usar o MATLAB para gerar a resposta ao degrau do sistema a malha fechada. Este exercício usa o MATLAB para resolver o problema no Exemplo 5.3.

Simulink

O Simulink do MATLAB fornece um método alternativo para simular sistemas com retroação para obter a resposta no domínio do tempo. Os estudantes que estiverem executando os exercícios MATLAB e desejarem explorar os recursos adicionais do Simulink deverão consultar agora o Apêndice C, Tutorial do Simulink. O Exemplo C.3 inclui uma discussão e um exemplo a respeito do uso do Simulink para simular sistemas com retroação em que há não-linearidades.

Exemplo 5.4

Projeto de ganho para resposta transitória

Problema Projetar o valor de ganho, K, para o sistema de controle com retroação da Fig. 5.16, de modo que sistema responda com uma ultrapassagem percentual de 10%.

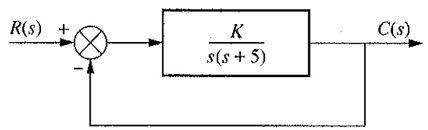


Fig. 5.16 Sistema com retroação para o Exemplo 5.4

Solução A função de transferência a malha fechada do sistema é

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + K} \tag{5.20}$$

Da Eq. (5.20),

$$2\zeta\omega_n = 5 \tag{5.21}$$

e

$$\omega_n = \sqrt{K} \tag{5.22}$$

Portanto,

$$\zeta = \frac{5}{2\sqrt{K}} \tag{5.23}$$

Como a ultrapassagem percentual é função unicamente de ζ, a Eq. (5.23) mostra que a ultrapassagem percentual é uma função de K.

Uma ultrapassagem de 10% acarreta $\zeta = 0{,}591$. Substituindo este valor de relação de amortecimento na Eq. (5.23) e solucionando em termos de K, resulta

$$K = 17{,}9 \tag{5.24}$$

Neste problema, embora sejamos capazes de projetar com vista à ultrapassagem percentual, não poderíamos escolher o tempo de assentamento como critério de projeto, uma vez que, qualquer que seja o valor escolhido para K, as partes reais dos pólos complexos da Eq. (5.20), −2,5, permanecem constantes.

Exercício de Avaliação 5.2

Problema: Para um sistema de controle com retroação unitária e função de transferência no canal de ação à frente $G(s) = \dfrac{16}{s(s+a)}$, projetar o valor de a de modo que a resposta ao degrau do sistema a malha fechada apresente uma ultrapassagem de 5%.

Resposta: $a = 5{,}52$.

A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

5.4 Diagramas de Fluxo de Sinal

Os diagramas de fluxo de sinal são uma alternativa aos diagramas de blocos. Diferentemente destes últimos, que consistem em blocos, de sinais, em junções de soma e em pontos de coleta, os diagramas de fluxo de sinal consistem somente em *arcos*, que representam sistemas, e em *nós*, que representam sinais. Tais elementos estão mostrados, respectivamente, nas Figs. 5.17(*a*) e (*b*). Um sistema é representado por uma linha com uma seta mostrando o sentido do fluxo de sinal através do sistema. Junto da linha escrevemos a função de transferência. Um sinal é um nó com o nome do sinal escrito nas proximidades.

A Fig. 5.17(*c*) mostra a interconexão de sistemas e de sinais. Cada sinal é a soma dos sinais que chegam ao nó respectivo. Por exemplo, o sinal $V(s) = R_1(s)G_1(s) - R_2(s)G_2(s) + R_3(s)G_3(s)$. O sinal $C_2(s) = V(s)G_5(s) = R_1(s)G_1(s)G_5(s) - R_2(s)G_2(s)G_5(s) + R_3(s)G_3(s)G_5(s)$. O sinal $C_3(s) = -V(s)G_6(s) = -R_1(s)G_1(s)G_6(s) + R_2(s)G_2(s)G_6(s) - R_3(s)G_3(s)G_6(s)$. Observe que ao se somar um sinal negativo associamos o símbolo − ao sistema e não a uma junção somadora, como no caso dos diagramas de blocos.

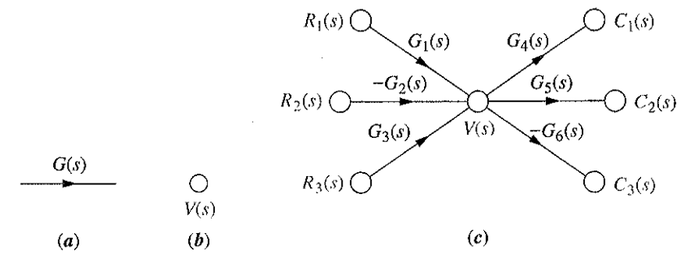


Fig. 5.17 Componentes de um diagrama de fluxo de sinal: **a.** sistema; **b.** sinal; **c.** interconexão de sistemas e sinais

Para mostrar o paralelo existente entre os diagramas de blocos e os de fluxo de sinal, iremos selecionar algumas das formas de diagramas de blocos da Seção 5.2 e convertê-las em diagramas de fluxo de sinal no Exemplo 5.5. Em cada um dos casos primeiramente convertemos os sinais em nós e em seguida interligamos os nós por meio dos arcos de sistema. No Exemplo 5.6, converteremos um diagrama de blocos intricado em diagrama de fluxo de sinal.

Exemplo 5.5

Convertendo diagramas de blocos comuns em diagramas de fluxo de sinal

Problema Converter as associações em cascata, em paralelo e com retroação dos diagramas de blocos mostradas nas Figs. 5.3(*a*), 5.5(*a*) e 5.6(*b*), respectivamente, em diagramas de fluxo de sinal.

Solução Começamos, em cada caso, desenhando os nós dos sinais do sistema em pauta. Em seguida interligamos os nós com os arcos de sistema. Os nós de sinal relativos às formas em cascata, em paralelo e com retroação estão mostrados, respectivamente, nas Figs. 5.18(*a*), (*c*) e (*e*).

A interconexão dos nós com ramos que representam os subsistemas estão mostrados nas Figs. 5.18(*b*), (*d*) e (*f*), respectivamente, para as formas em cascata, em paralelo e com retroação.

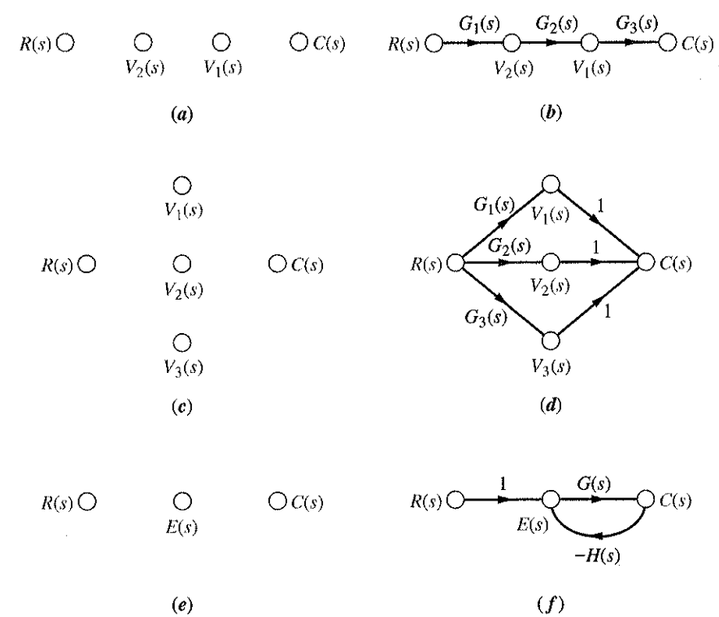


Fig. 5.18 Construindo diagramas de fluxo de sinal: **a.** nós de sistemas em cascata com base na Fig. 5.3(*a*)); **b.** diagrama de fluxo de sinal com sistemas em cascata; **c.** nós de sistemas em paralelo (com base na Fig. 5.5(*a*)); **d.** diagrama de fluxo de sinal com sistemas em paralelo; **e.** nós de sistemas com retroação (com base na Fig. 5.6(*b*)); **f.** diagrama de fluxo de sinal de sistema com retroação

Exemplo 5.6

Convertendo um diagrama de blocos em diagrama de fluxo de sinal

Problema Converter o diagrama de blocos da Fig. 5.11 em diagrama de fluxo de sinal.

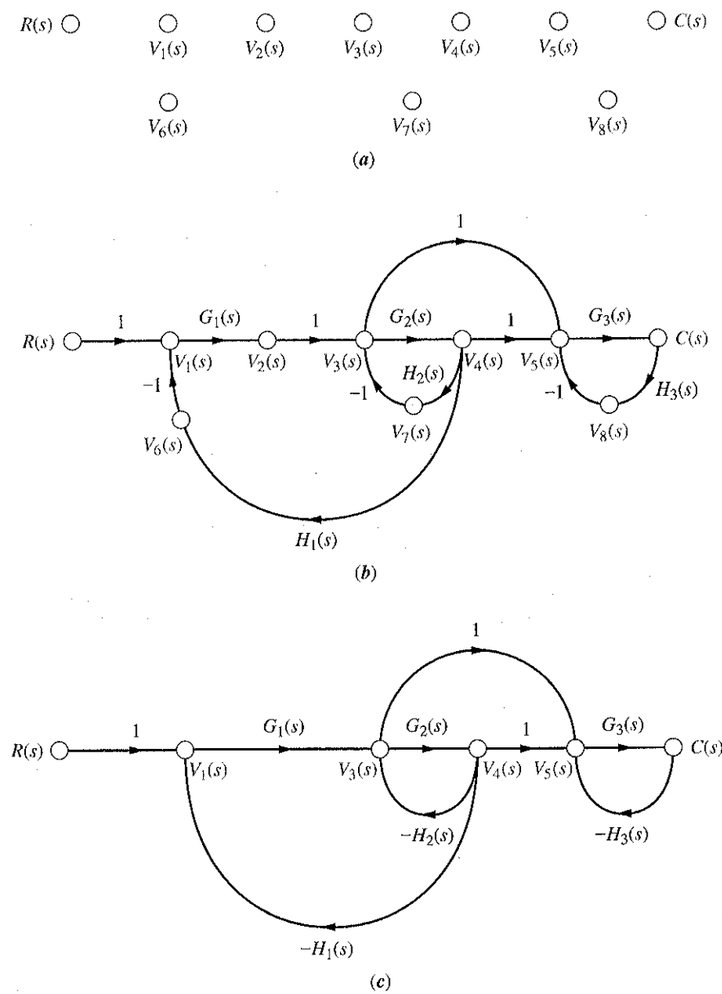


Fig. 5.19 Desenvolvimento de diagramas de fluxo de sinal: **a.** nós de sinal; **b.** diagrama de fluxo de sinal; **c.** diagrama de fluxo de sinal simplificado

Solução Comece desenhando os nós de sinal, como mostrado na Fig. 5.19(*a*). Em seguida, interconecte os nós, mostrando o sentido do fluxo de sinal e identificando cada função de transferência. O resultado está mostrado na Fig. 5.19(*b*). Observe que os sinais de menos nas junções de soma do diagrama de blocos são representados pelos negativos das funções de transferência nos diagramas de fluxo de sinal. Para concluir, se desejado, simplifique o diagrama de fluxo reduzindo-o à forma mostrada na Fig. 5.19(*c*), através da eliminação de sinais com um único fluxo de entrada e um único fluxo de saída, como $V_2(s)$, $V_6(s)$, $V_7(s)$ e $V_8(s)$.

Exercício de Avaliação 5.3

Problema: Converter o diagrama de blocos da Fig. 5.13 em diagrama de fluxo de sinal.

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

5.5 Regra de Mason

No início deste capítulo, mostramos como reduzir diagramas de blocos a uma única função de transferência. Agora estamos preparados para mostrar uma técnica de reduzir diagramas de fluxo de sinal a funções de transferência únicas relacionando a saída do sistema à entrada.

A técnica de redução de diagramas de blocos estudada na Seção 5.2 requer a aplicação sucessiva das relações fundamentais a fim de obter a função de transferência do sistema. Ao contrário disto, a regra de Mason para reduzir o diagrama de fluxo de sinal a uma única função de transferência requer a aplicação de uma fórmula. A fórmula foi deduzida por S. J. Mason ao relacionar o diagrama de fluxo de sinal ao sistema de equações simultâneas que pode ser escrito a partir do diagrama (Mason, 1953).

De um modo geral, pode ser complicado implementar a fórmula sem cometer erros. Especificamente, a existência daquilo que chamaremos mais tarde de malhas disjuntas aumenta a complexidade da fórmula. No entanto, muitos sistemas não possuem malhas disjuntas. Para estes sistemas, você achará a regra de Mason mais fácil de usar que a redução de diagrama de blocos.

A fórmula de Mason possui diversos componentes que devem ser calculados. Primeiro, devemos nos certificar de ter entendido corretamente as definições dos componentes. Em seguida, devemos ter bastante cautela no cálculo dos componentes. Para finalizar, discutimos algumas definições aplicáveis aos diagramas de fluxo de sinal; em seguida, enunciamos a regra de Mason e fazemos um exemplo.

Definições

Ganho de malha: O produto dos ganhos dos ramos obtidos ao longo de um percurso que começa em um nó e termina no mesmo nó sem passar por nenhum outro nó mais de uma vez e segue o sentido do fluxo de sinal. Para exemplos de ganhos de malha, veja a Fig. 5.20. Há quatro ganhos de malha:

1. $G_2(s)H_1(s)$ (5.25a)
2. $G_4(s)H_2(s)$ (5.25b)
3. $G_4(s)G_5(s)H_3(s)$ (5.25c)
4. $G_4(s)G_6(s)H_3(s)$ (5.25d)

Ganho de percurso avante: O produto dos ganhos obtidos ao longo de um percurso que começa em um nó de entrada e termina no nó de saída no sentido do fluxo de sinal.

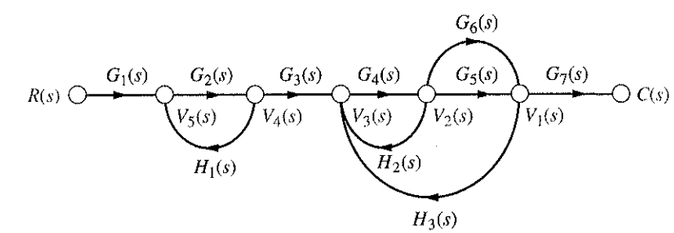


Fig. 5.20 Diagrama de fluxo de sinal para demonstrar a regra de Mason

Exemplos de ganhos de percurso à frente são mostrados também na Fig. 5.20. Há dois ganhos de percurso avante:

1. $G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_7(s)$ (5.26a)
2. $G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s)G_7(s)$ (5.26b)

Malhas disjuntas: Malhas que não possuem nós em comum; malhas que não se tocam. Na Fig. 5.20, a malha $G_2(s)H_1(s)$ não toca as malhas $G_4(s)H_2(s)$, $G_4(s)G_5(s)H_3(s)$ e $G_4(s)G_6(s)H_3(s)$.

Ganho de malhas disjuntas: O produto dos ganhos de malha de malhas disjuntas consideradas duas a duas, três a três, quatro a quatro, etc. Na Fig. 5.20, o produto dos ganhos de malha $G_2(s)H_1(s)$ e $G_4(s)H_2(s)$ é um ganho de malhas disjuntas consideradas duas a duas. Resumindo, todos os três ganhos de malhas disjuntas consideradas duas a duas são

1. $[G_2(s)H_1(s)][G_4(s)H_2(s)]$ (5.27a)
2. $[G_2(s)H_1(s)][G_4(s)G_5(s)H_3(s)]$ (5.27b)
3. $[G_2(s)H_1(s)][G_4(s)G_6(s)H_3(s)]$ (5.27c)

O produto de ganhos de malha $[G_4(s)\ G_5(s)\ H_3(s)]\ [G_4(s)\ G_6(s)\ H_3(s)]$ não é um ganho de malhas disjuntas, uma vez que estas duas malhas possuem nós em comum. Em nosso exemplo, não há ganhos de malhas disjuntas consideradas três a três, uma vez que não existem três malhas disjuntas entre elas.

Agora estamos prontos para enunciar a regra de Mason.

Regra de Mason

A função de transferência, $C(s)/R(s)$, de um sistema representado por um diagrama de fluxo de sinal é

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta} \tag{5.28}$$

onde

k = número de percursos avante
T_k = ganho do k-ésimo percurso direto
$\Delta = 1 - \Sigma$ ganhos de malha $+ \Sigma$ ganhos de malhas disjuntas duas a duas $- \Sigma$ ganhos de malhas disjuntas três a três $+ \Sigma$ ganhos de malhas disjuntas quatro a quatro $- \ldots$
$\Delta_k = \Delta - \Sigma$ ganhos de malha em Δ que tocam o k-ésimo percurso avante. Em outras palavras Δ_k é formado eliminando-se de Δ os ganhos de malha que tocam o k-ésimo percurso à frente.

Observe a alternância de sinais dos componentes de Δ. O exemplo a seguir elucidará a regra de Mason.

Exemplo 5.7

Função de transferência via regra de Mason

Problema Obter a função de transferência, $C(s)/R(s)$, referente ao diagrama de fluxo de sinal da Fig. 5.2

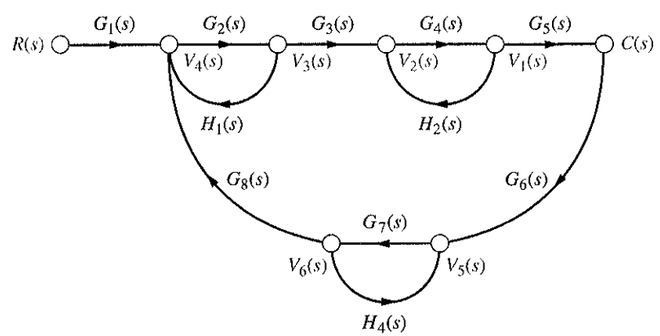


Fig. 5.21 Diagrama de fluxo de sinal para o Exemplo 5.7

Solução Primeiro, identifique os *ganhos de percurso avante*. Neste exemplo, há somente um:

$$G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s) \tag{5.29}$$

Segundo, identifique os *ganhos de malha*. Há quatro, como se seguem:

1. $G_2(s)H_1(s)$ (5.30a)
2. $G_4(s)H_2(s)$ (5.30b)
3. $G_7(s)H_4(s)$ (5.30c)
4. $G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)$ (5.30d)

Terceiro, identifique as *malhas disjuntas duas a duas*. Com base nas Eqs. (5.30) e na Fig. 5.21, podemos ver que a malha 1 não toca a malha 2, a malha 1 não toca a malha 3 e a malha 2 não toca a malha 3. Observe que as malhas 1, 2 e 3 tocam, todas elas, a malha 4. Portanto, as combinações de malhas disjuntas, duas a duas, são as seguintes:

Malha 1 e malha 2:	$G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)$	(5.31a)
Malha 1 e malha 3:	$G_2(s)H_1(s)G_7(s)H_4(s)$	(5.31b)
Malha 2 e malha 3:	$G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)$	(5.31c)

Finalmente, as *malhas disjuntas três a três* são:

$$\text{Malhas 1, 2 e 3: } G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s) \tag{5.32}$$

Agora, com base na Eq. (5.28) e suas definições, formamos Δ e Δ_k. Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- [G_2(s)H_1(s) + G_4(s)H_2(s) + G_7(s)H_4(s) \\ &\quad + G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)] \\ &+ [G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s) + G_2(s)H_1(s)G_7(s)H_4(s) \\ &\quad + G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)] \\ &- [G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)]\end{aligned} \tag{5.33}$$

Formamos Δ_k eliminando de Δ os ganhos de malha que tocam o k-ésimo percurso direto:

$$\Delta_1 = 1 - G_7(s)H_4(s) \tag{5.34}$$

As expressões (5.29), (5.33) e (5.34) são substituídas agora na Eq. (5.28), produzindo a função de transferência:

$$G(s) = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{[G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)][1 - G_7(s)H_4(s)]}{\Delta} \tag{5.35}$$

Como há somente um único percurso à frente, $G(s)$ consiste em um único termo em vez da soma de termos, cada um deles proveniente de um percurso avante.

Exercício de Avaliação 5.4

Problema: Use a regra de Mason para obter a função de transferência do diagrama de fluxo de sinal mostrado na Fig. 5.19(*c*). Observe que este é o mesmo sistema usado no Exemplo 5.2 para obter a função de transferência através da redução de diagrama de blocos.

Resposta:

$$T(s) = \frac{G_1(s)G_3(s)[1 + G_2(s)]}{[1 + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)][1 + G_3(s)H_3(s)]}$$

A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Espaço de Estados

5.6 Diagramas de Fluxo de Sinal das Equações de Estado

Nesta seção desenhamos diagramas de fluxo de sinal a partir das equações de estado. Primeiramente, este processo ajudará a visualização das variáveis de estado. Mais adiante, desenharemos primeiro os diagramas de fluxo de sinal e em seguida escreveremos representações alternativas de um sistema no espaço de estados.

Considere as seguintes equações de estado e de saída:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2r \tag{5.36a}$$
$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5r \tag{5.36b}$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 7r \tag{5.36c}$$
$$y = -4x_1 + 6x_2 + 9x_3 \tag{5.36d}$$

Primeiramente, identifique três nós como variáveis de estado, x_1, x_2 e x_3, e três nós, posicionados à esquerda de cada uma das variáveis de estado, como derivadas das variáveis de estado, como na Fig. 5.22(*a*). Identifique também um nó como entrada, r, e um outro nó como saída, y.

Em seguida, interconecte as variáveis de estado e suas derivadas com a integração, $1/s$, como mostrado na Fig. 5.22(*b*). Então, usando as Eqs. (5.36), alimente cada um dos nós com os sinais indicados. Por exemplo, com base na Eq. (5.36*a*), $\dot{x}_2$ recebe $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2r$ conforme mostrado na Fig. 5.22(*c*). De modo semelhante, $\dot{x}_2$ recebe $-6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5r$, conforme mostrado na Fig. 5.22(*e*). Finalmente, usando a Eq. (5.36*d*), a saída, y, recebe $-4x_1 + 6x_2 + 9x_3$, conforme mostrado na Fig. 5.22(*f*), a representação final, em variáveis de fase, em que as variáveis de estado são as saídas dos integradores.

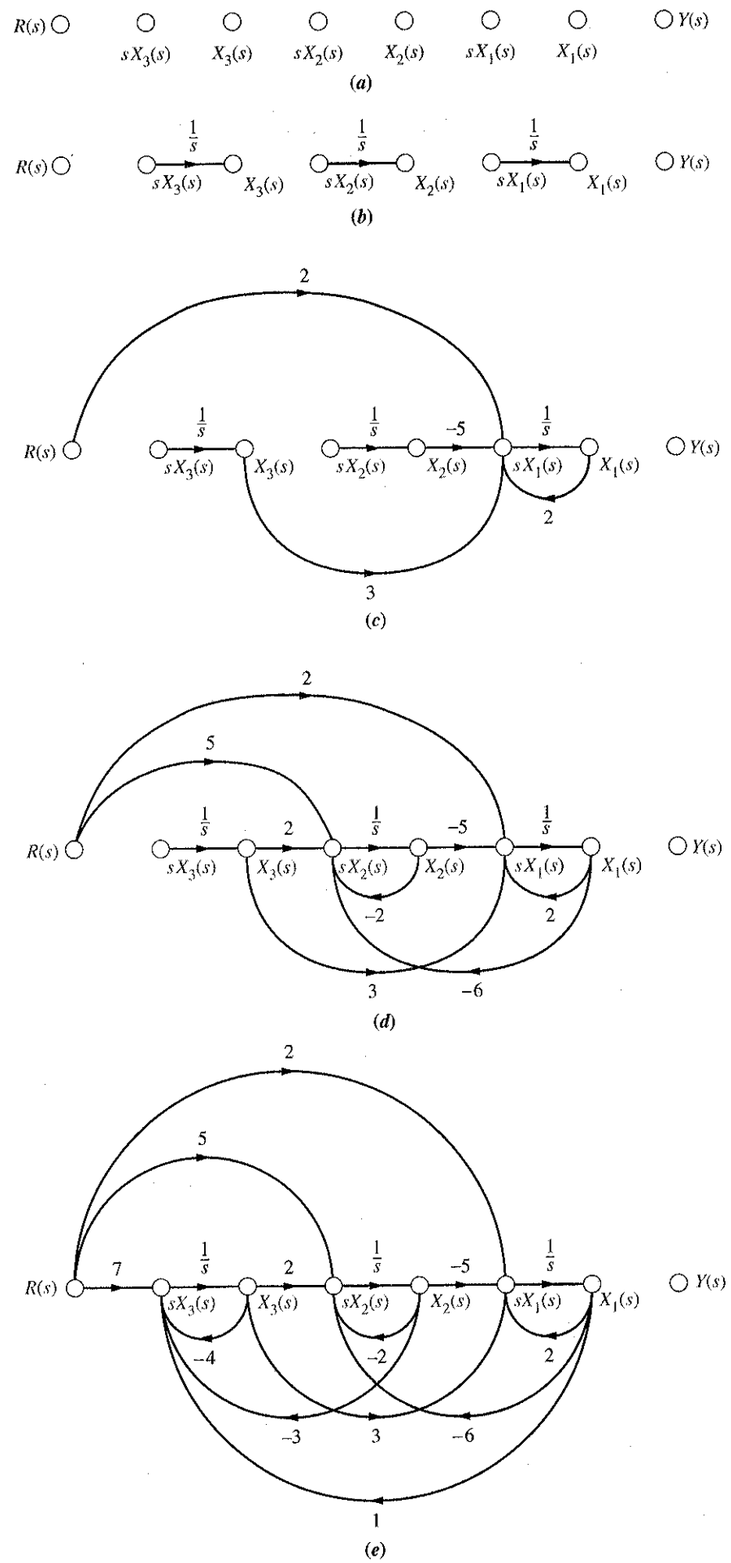
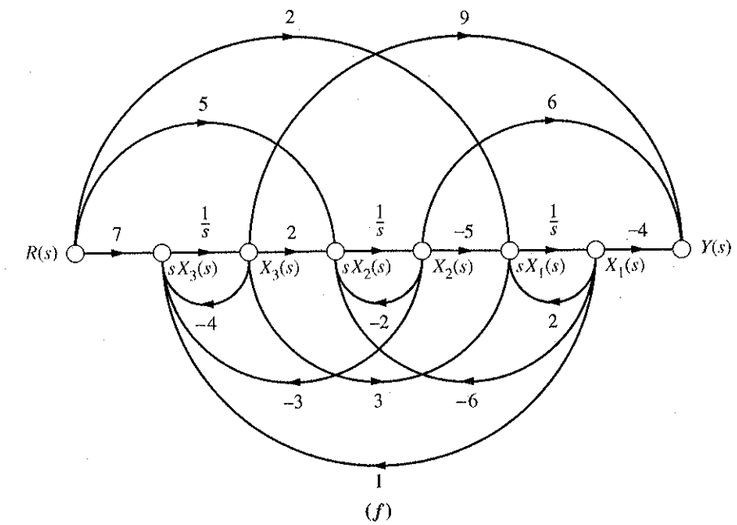


Fig. 5.22 Estágios de desenvolvimento de um diagrama de fluxo de sinal para o sistema das Eqs. 5.36: **a.** posicionar os nós; **b.** interligar as variáveis de estado e suas derivadas; **c.** formar dx_1/dt; **d.** formar dx_2/dt; **e.** formar dx_3/dt *(a figura continua)*

Fig. 5.22 (continuação) **f.** formar a saída



Exercício de Avaliação 5.5

Problema: Esboce um diagrama de fluxo de sinal para as seguintes equações de estado e de saída:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}$$

Resposta: A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Na próxima seção, o modelo em diagrama de fluxo de sinal ajudará a visualizar o processo de determinação de representações alternativas de um mesmo sistema no espaço de estados. Veremos que, embora o sistema seja o mesmo do ponto de vista da entrada e da saída, as representações no espaço de estados podem ser muitas e variadas.

Espaço de Estados

5.7 Representações Alternativas no Espaço de Estados

No Cap. 3, os sistemas foram representados no espaço de estados usando variáveis de fase. Contudo, a modelagem de sistemas no espaço de estados pode assumir muitas formas de representação além da que resulta com as variáveis de fase. Embora cada uma delas apresente a mesma saída para uma determinada entrada, o engenheiro pode preferir uma delas em particular por diversas razões. Por exemplo, um conjunto de variáveis de estado, com sua representação exclusiva, pode modelar as variáveis físicas reais de um sistema, como as saídas de amplificadores e de filtros.

Um outro motivo para escolher um conjunto particular de variáveis de estado e um determinado modelo no espaço de estados pode ser a facilidade de solução. Como veremos, uma escolha particular de variáveis de estado pode desacoplar o sistema de equações diferenciais simultâneas. Neste caso, cada uma das equações diferenciais é escrita em função de uma única variável de estado e a solução é efetuada através da solução individual de n equações diferenciais de primeira ordem.

A facilidade de modelagem é uma outra razão para uma escolha particular de variáveis de estado. Certas escolhas podem facilitar a conversão do subsistema para a representação no espaço de estados utilizando características reconhecíveis do modelo. O engenheiro aprende rapidamente como, por inspeção, escrever as equações de estado e de saída e esboçar o diagrama de fluxo de sinal. Estes sistemas transformados geram a definição das variáveis de estado. Veremos agora diversas formas de representação e mostraremos como produzir cada uma delas no espaço de estados.

Forma em Cascata

Mostramos que os sistemas podem ser representados no espaço de estados escolhendo as variáveis de fase como variáveis de estado, isto é, variáveis que são as derivadas sucessivas uma da outra. Esta não é, de forma alguma, a única escolha. Retornando ao sistema da Fig. 3.10(*a*), a função de transferência pode ser representada alternativamente como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{5.37}$$

A Fig. 5.23 mostra uma representação deste sistema em diagrama de blocos formada pela associação em cascata dos termos da Eq. (5.37). A saída de cada bloco de sistema de primeira ordem foi rotulada como variável de estado. Estas variáveis de estado não são variáveis de fase.

Mostraremos agora como usar o diagrama de fluxo de sinal para obter a representação deste sistema no espaço de estados. Para escrever as equações de estado com o novo conjunto de variáveis de estado, será útil esboçar primeiramente o diagrama de fluxo de sinal, usando a Fig. 5.23 como guia. O diagrama de fluxo de sinal relativo a cada um dos sistemas de primeira ordem pode ser obtido transformando o bloco correspondente em uma equação diferencial equivalente. A função de transferência de cada um dos blocos é da forma

$$\frac{C_i(s)}{R_i(s)} = \frac{1}{(s+a_i)} \tag{5.38}$$

Multiplicando em cruz, obtemos

$$(s+a_i)C_i(s) = R_i(s) \tag{5.39}$$

Depois de aplicar a transformada de Laplace inversa, temos

$$\frac{dc_i(t)}{dt} + a_i c_i(t) = r_i(t) \tag{5.40}$$

Resolvendo para $dc_i(t)/dt$, resulta

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -a_i c_i(t) + r_i(t) \tag{5.41}$$

A Fig. 5.24(*a*) mostra a implementação da Eq. (5.41) em diagrama de fluxo de sinal. Aqui, uma vez mais, foi suposto um nó $c_i(t)$ como saída de um integrador, cuja derivada é formada na entrada.

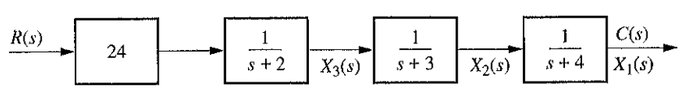


Fig. 5.23 Representação do sistema da Fig. 3.10 com sistemas de primeira ordem em cascata

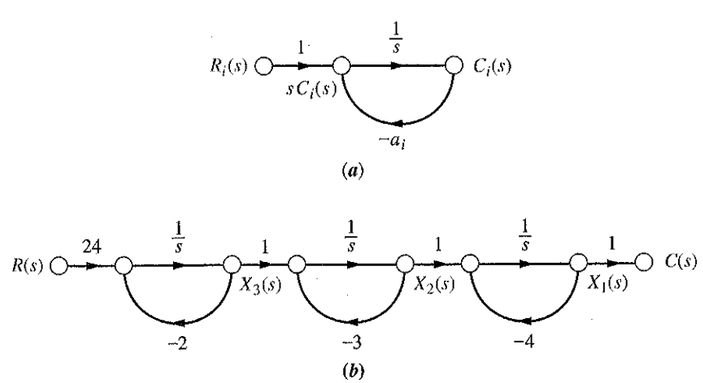


Fig. 5.24 a. Subsistema de primeira ordem; **b.** diagrama de fluxo de sinal para o sistema da Fig. 5.23

Colocando em cascata as funções de transferência mostradas na Fig. 5.24(*a*), chega-se à representação de sistema mostrada na Fig. 5.24(*b*).[3] Escreva agora as equações de estado para a nova representação do sistema. Lembre-se de que a derivada da variável de estado será a entrada do integrador:

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 \tag{5.42a}$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 \tag{5.42b}$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + 24r \tag{5.42c}$$

A equação de saída pode ser escrita por inspeção a partir da Fig. 5.24(*b*):

$$y = c(t) = x_1 \tag{5.43}$$

A representação no espaço de estados é concluída reescrevendo as Eqs. (5.42) e (5.43) na forma matricial vetorial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r \tag{5.44a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\,\mathbf{x} \tag{5.44b}$$

Comparando as Eqs. (5.44) com a Fig. 5.24(*b*), podemos formar um quadro expressivo do significado de alguns componentes da equação de estado. Para a discussão a seguir, queira retornar à forma geral das equações de estado e de saída, Eqs. (3.18) e (3.19). Por exemplo, a matriz **B** é a matriz de entrada, uma vez que contém os termos que acoplam a entrada $r(t)$ ao sistema. Em particular, a constante 24 aparece tanto na entrada do diagrama de fluxo de sinal, como mostrado na Fig. 5.24(*b*), como na matriz de entrada nas Eqs. (5.44). A matriz **C** é a matriz de saída, uma vez que contém a constante que acopla a variável de estado, x_1, à saída, $c(t)$. Finalmente, a matriz **A** é a matriz de sistema, uma vez que ela contém os termos relativos ao sistema interno em si mesmo. Na forma das Eqs. (5.44), a matriz de sistema contém realmente os pólos do sistema ao longo da diagonal.

Compare as Eqs. (5.44) à representação com variáveis de fase nas Eqs. (3.59). Nessa representação, o polinômio característico do sistema aparecia ao longo da última linha, enquanto na representação atual as raízes da equação característica aparecem ao longo da diagonal.

Forma Paralela

Uma outra opção que pode ser usada para representar sistemas é a forma paralela. Esta forma conduz a uma matriz **A** diagonal, desde que não haja pólo como raiz repetida da equação característica.

Enquanto a forma anterior foi obtida colocando-se em cascata subsistemas de primeira ordem, a forma paralela é deduzida a partir de uma expansão em frações parciais da função de transferência do sistema. Efetuando uma expansão em frações parciais da função de transferência do nosso exemplo, obtemos

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{12}{(s+2)} - \frac{24}{(s+3)} + \frac{12}{(s+4)} \tag{5.45}$$

A Eq. (5.45) representa a soma de subsistemas individuais de primeira ordem. Para obter um diagrama de fluxo de sinal, resolva primeiro em $R(s)$,

$$C(s) = R(s)\frac{12}{(s+2)} - R(s)\frac{24}{(s+3)} + R(s)\frac{12}{(s+4)} \tag{5.46}$$

e reconheça que $C(s)$ é a soma de três termos. Cada termo é um subsistema de primeira ordem tendo $R(s)$ como entrada. A formulação desta idéia como diagrama de fluxo de sinal resulta na representação mostrada na Fig. 5.25.

Uma vez mais, usamos o diagrama de fluxo de sinal como meio auxiliar na obtenção das equações de estado. Por inspeção, as saídas dos integradores são as variáveis de estado e as entradas dos integradores suas derivadas. Escrevemos as equações de estado somando os sinais nas entradas dos integradores:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 12r \tag{5.47a}$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 - 24r \tag{5.47b}$$

$$\dot{x}_3 = -4x_3 + 12r \tag{5.47c}$$

[3]Observe que $X_3(s)$ e o nó seguinte não podem ser reunidos em um único nó, uma vez que a entrada do primeiro integrador seria alterada pela retroação de $X_2(s)$, e o sinal $X_3(s)$ seria perdido. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $X_2(s)$ e o próximo nó.

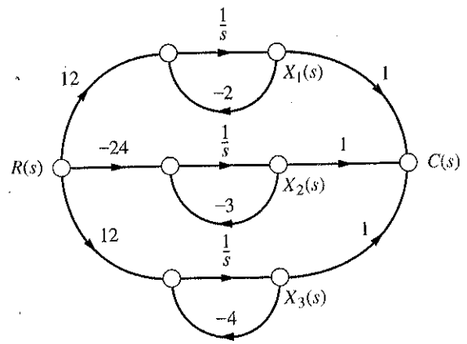


Fig. 5.25 Representação em diagrama de fluxo de sinal da Eq. (5.45)

A equação de saída é encontrada somando-se os sinais que dão $c(t)$:

$$y = c(t) = x_1 + x_2 + x_3 \tag{5.48}$$

Sob forma matricial vetorial, as Eqs. (5.47) e (5.48) se tornam

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 12 \end{bmatrix} r \tag{5.49}$$

e

$$y = [1 \quad 1 \quad 1]\,\mathbf{x} \tag{5.50}$$

Assim, nossa terceira representação do sistema da Fig. 3.10(*a*) conduz a uma matriz de sistema diagonal. Qual a vantagem desta representação? Cada uma das equações é uma equação diferencial de primeira ordem em uma única variável. Em conseqüência, poderemos resolver estas equações de forma independente. As equações são chamadas de *desacopladas*.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap5p3 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para converter uma função de transferência em uma representação no espaço de estados de forma especificada. O exercício resolve o exemplo anterior representando a função de transferência da Eq. (5.45) por um modelo no espaço de estados na forma paralela da Eq. (5.49).

Se o denominador da função de transferência possuir raízes reais repetidas, ainda assim é possível deduzir a forma paralela a partir da expansão em frações parciais. Contudo, a matriz de sistema não será diagonal. Por exemplo, considere o sistema,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)} \tag{5.51}$$

que pode ser expandido em frações parciais:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)} \tag{5.52}$$

Procedendo como anteriormente, o diagrama de fluxo de sinal para a Eq. (5.22) está mostrado na Fig. 5.26. O termo $-1/(s+1)$ foi formado criando-se o fluxo de sinal de $X_2(s)$ para $C(s)$. Agora, a partir da Fig. 5.26, podemos escrever, por inspeção, as equações de estado e de saída, como a seguir:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{5.53a}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2r \tag{5.53b}$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + r \tag{5.53c}$$

$$y = c(t) = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 \tag{5.53d}$$

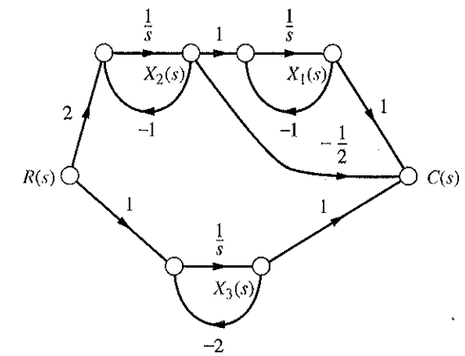


Fig. 5.26 Representação em diagrama de fluxo de sinal da Eq. (5.52)

ou, sob forma matricial vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{5.54a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{5.54b}$$

Esta matriz de sistema, embora não seja diagonal, possui os pólos do sistema ao longo da diagonal. Observe o valor 1 acima da diagonal principal no caso de raiz repetida. A forma da matriz de sistema é conhecida como *forma canônica de Jordan*.

Forma Canônica do Controlador

Uma outra representação que usa variáveis de fase é chamada de *forma canônica do controlador*, assim designada devido ao seu uso no projeto de controladores, que será abordado no Cap. 12. Esta forma é obtida da representação em variáveis de fase simplesmente reordenando essas variáveis na ordem inversa. Por exemplo, considere a função de transferência,

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \tag{5.55}$$

A forma em variáveis de fase foi deduzida no Exemplo 3.5 como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{5.56a}$$

$$y = [2 \quad 7 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{5.56b}$$

onde $y = c(t)$. Renumerando as variáveis de fase em ordem inversa resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{5.57a}$$

$$y = [2 \quad 7 \quad 1]\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{5.57b}$$

Finalmente, rearranjando as Eqs. (5.57) em ordem numérica crescente, vem a forma canônica do controlador[4]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9 & -26 & -24\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} r \tag{5.58a}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 7 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{5.58b}$$

A Fig. 5.27 mostra os passos que foram seguidos para obter o diagrama de fluxo de sinal. Observe que a forma canônica do controlador é obtida simplesmente pela renumeração das variáveis de fase em ordem contrária. As Eqs. (5.56) podem ser obtidas da Fig. 5.27(*a*), e as Eqs. (5.58), da Fig. 5.27(*b*).

Observe que a forma em variáveis de fase e a forma canônica do controlador contêm os coeficientes do polinômio característico na linha superior ou inferior, respectivamente. As matrizes de sistema que contêm os coeficientes do polinômio característico são chamadas matrizes *companheiras* do polinômio característico. A forma em variáveis de fase e a forma canônica do controlador resultam, respectivamente, em uma matriz de sistema companheira inferior e superior. As matrizes companheiras também podem ter os coeficientes do polinômio característico na coluna da esquerda ou da direita. Na próxima subseção discutiremos uma destas representações.

Forma Canônica do Observador

A forma *canônica do observador*, assim designada por seu uso no projeto de observadores (tratado no Cap. 12), é uma representação que conduz a matriz de sistema a uma forma matriz companheira à esquerda. Como exemplo, o sistema modelado pela Eq. (5.55) será representado nesta forma. Comece dividindo todos os termos do numerador e do denominador pela maior potência de s, s^3, e obtenha

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{1}{s} + \dfrac{7}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}}{1 + \dfrac{9}{s} + \dfrac{26}{s^2} + \dfrac{24}{s^3}} \tag{5.59}$$

Multiplicando em cruz, resulta

$$\left[\frac{1}{s} + \frac{7}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right]R(s) = \left[1 + \frac{9}{s} + \frac{26}{s^2} + \frac{24}{s^3}\right]C(s) \tag{5.60}$$

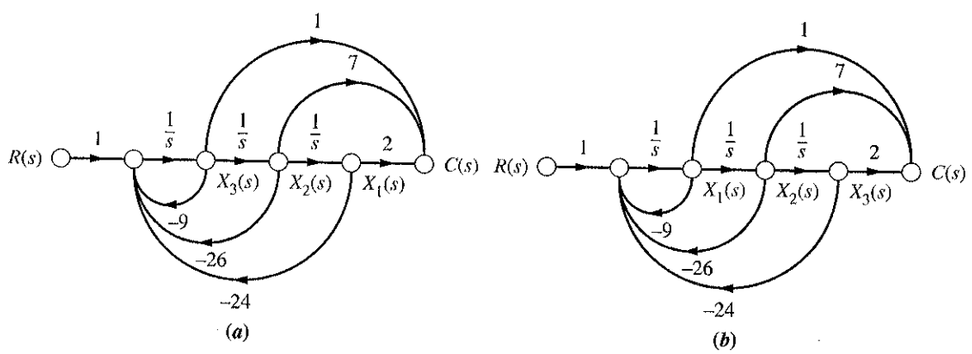


Fig. 5.27 Diagramas de fluxo de sinal para obter formas de representação no espaço de estados relativas a $G(s) = C(s)/R(s) = (s^2 + 7s + 2)/(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)$: **a.** forma em variáveis de fase; **b.** forma canônica do controlador

[4]O leitor que estiver usando o MATLAB para converter funções de transferência em representação no espaço de estados através do comando **tf2ss**, perceberá que o MATLAB apresenta os resultados sob forma canônica do controlador.

Combinando os termos de mesma potência de integração, vem

$$C(s) = \frac{1}{s}[R(s) - 9C(s)] + \frac{1}{s^2}[7R(s) - 26C(s)] + \frac{1}{s^3}[2R(s) - 24C(s)] \tag{5.61}$$

ou

$$C(s) = \frac{1}{s}\left[[R(s) - 9C(s)] + \frac{1}{s}\left([7R(s) - 26C(s)] + \frac{1}{s}[2R(s) - 24C(s)]\right)\right] \tag{5.62}$$

A Eq. (5.61) ou a Eq. (5.62) pode ser usada para esboçar o diagrama de fluxo de sinal. Comece com três integrações, como mostrado na Fig. 5.28(*a*).

Usando a Eq. (5.61), o primeiro termo nos diz que a saída $C(s)$ é formada, em parte, pela integração de $[R(s) - 9C(s)]$. Formamos assim $[R(s) - 9C(s)]$ na entrada do integrador mais próximo da saída, $C(s)$, como mostrado na Fig. 5.28(*b*). O segundo termo nos diz que o termo $[7R(s) - 26C(s)]$ deve ser integrado duas vezes. Forme agora $[7R(s) - 26C(s)]$ na entrada do segundo integrador. Finalmente, o último termo da Eq. (5.61) nos diz que $[2R(s) - 24C(s)]$ deve ser integrado três vezes. Forme $[2R(s) - 24C(s)]$ na entrada do primeiro integrador.

Identificando as variáveis de estado como saída dos integradores, escrevemos as seguintes equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -9x_1 + x_2 + r \tag{5.63a}$$

$$\dot{x}_2 = -26x_1 + x_3 + 7r \tag{5.63b}$$

$$\dot{x}_3 = -24x_1 + 2r \tag{5.63c}$$

A equação de saída, com base na Fig. 5.28(*b*), é

$$y = c(t) = x_1 \tag{5.64}$$

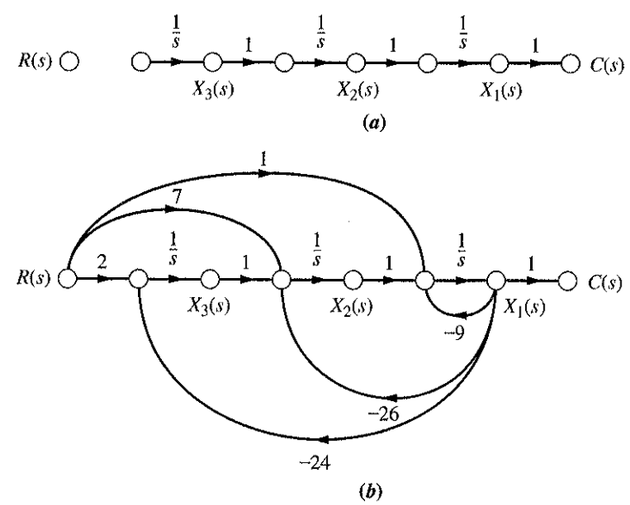
Na forma matricial vetorial, as Eqs. (5.63) e (5.65) se tornam

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}-9 & 1 & 0\\ -26 & 0 & 1\\ -24 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}1\\ 7\\ 2\end{bmatrix} r \tag{5.65a}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{5.65b}$$

Observe que a forma das Eqs. (5.65) é semelhante à forma com variáveis de fase, com exceção de que os coeficientes do denominador da função de transferência estão na primeira coluna e que os coeficientes do numerador formam a matriz de entrada **B**. Observe, também, que a forma canônica do observador possui uma matriz **A** que é a transposta da forma canônica do controlador, um vetor **B** que é o transposto do vetor **C** da forma canônica do controlador e um vetor **C** que é o transposto do vetor **B** da forma canônica do controlador. Dizemos, como conseqüência, que estas duas formas são *duais*. Assim, se um sistema for descrito por **A**, **B** e **C**, seu dual será descrito por $\mathbf{A}_D = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}_D = \mathbf{C}^T$ e $\mathbf{C}_D = \mathbf{B}^T$. Você pode verificar o significado da dualidade comparando os diagramas de fluxo de sinal de um sistema e de seu dual, Figs. 5.27(*b*) e 5.28(*b*), respectivamente. O diagrama de fluxo de sinal

Fig. 5.28 Diagrama de fluxo de sinal para as variáveis da forma canônica do observador: **a.** planejamento; **b.** implementação



do dual pode ser obtido a partir do diagrama de fluxo original invertendo-se todas as setas, trocando as variáveis de estado por suas derivadas e vice-versa, e intercambiando $C(s)$ e $R(s)$, invertendo os papéis da entrada e da saída.

Concluímos esta seção com um exemplo que mostra a aplicação das formas discutidas anteriormente a um sistema de controle com retroação.

Exemplo 5.8

Representação de sistemas com retroação no espaço de estado

Problema Representar, no espaço de estados, o sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 5.29. Modele a função de transferência do canal de ação à frente na forma em cascata.

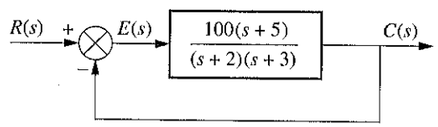


Fig. 5.29 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 5.8

Solução Primeiro, modelamos a função de transferência do canal de ação à frente na forma em cascata. O ganho de 100, o pólo em -2 e o pólo em -3 são mostrados em cascata na Fig. 5.30(*a*). O zero em -5 foi obtido usando o método de implementar zeros para um sistema representado na forma de variáveis de fase discutido na Seção 3.5.

Em seguida, adicionamos os percursos de retroação e de entrada, como mostrado na Fig. 5.30(*b*). Escreva, agora, por inspeção, as equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \tag{5.66a}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 100(r - c) \tag{5.66b}$$

Mas, da Fig. 5.30(*b*),

$$c = 5x_1 + (x_2 - 3x_1) = 2x_1 + x_2 \tag{5.67}$$

Substituindo a Eq. (5.67) na Eq. (5.66*b*), obtemos as equações de estado para o sistema:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \tag{5.68a}$$

$$\dot{x}_2 = -200x_1 - 102x_2 + 100r \tag{5.68b}$$

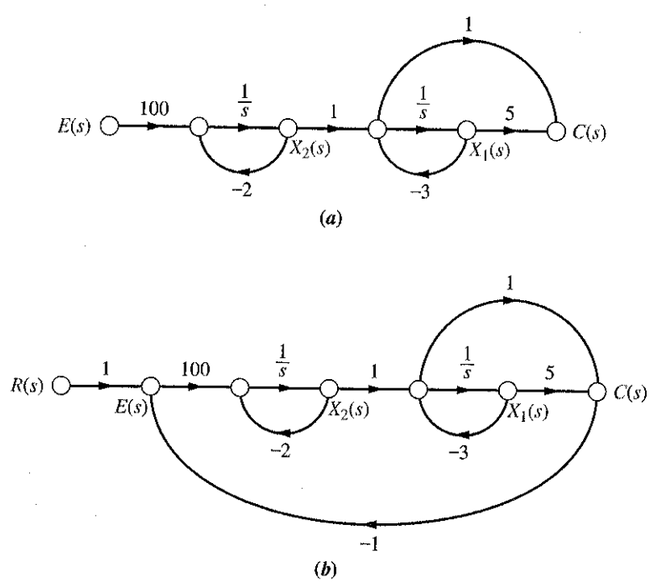


Fig. 5.30 Criando um diagrama de fluxo de sinal para o sistema da Fig. 5.29: **a.** função de transferência à frente; **b.** sistema completo

A equação de saída é a mesma que a Eq. (5.67), ou seja,

$$y = c(t) = 2x_1 + x_2 \tag{5.69}$$

Em forma matricial vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} r \tag{5.70a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{5.70b}$$

Exercício de Avaliação 5.6

Problema: Representar, no espaço de estados, o sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 5.29. Modele a função de transferência do canal de ação à frente na forma canônica do controlador.

Resposta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -105 & -506 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [100 \quad 500]\mathbf{x}$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção usamos funções de transferência e diagramas de fluxo de sinal para representar sistemas em paralelo, em cascata, nas formas canônica do controlador e canônica do observador, além da forma em variáveis de fase. Usando a função de transferência, $C(s)/R(s) = (s + 3)/[(s + 4)(s + 6)]$ como exemplo, a Fig. 5.31 compara as formas mencionadas anteriormente. Observe a dualidade das formas canônicas do controlador e do observador como demonstrado por seus diagramas de fluxo de sinal e suas equações de estado respectivos. Na próxima seção exploraremos a possibilidade de transformação entre representações sem utilizar funções de transferência e diagramas de fluxo de sinal.

Espaço de Estados

5.8 Transformações de Similaridade

Na Seção 5.7 vimos que os sistemas podem ser representados com diferentes variáveis de estado, mesmo que a função de transferência que relaciona a saída com a entrada permaneça a mesma. As diversas formas de equações de estado foram obtidas manipulando a função de transferência, esboçando um diagrama de fluxo de sinal e então escrevendo as equações de estado com base no diagrama de fluxo de sinal. Estes sistemas são chamados *similares*. Embora suas representações no espaço de estados sejam diferentes, os sistemas similares possuem a mesma função de transferência e, portanto, os mesmos pólos e autovalores.

A pergunta agora é como fazer transformações entre sistemas similares de um conjunto de equações de estado para outro sem usar função de transferência e diagramas de fluxo de sinal.

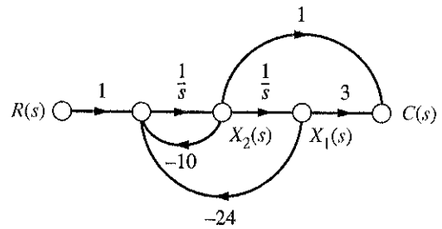
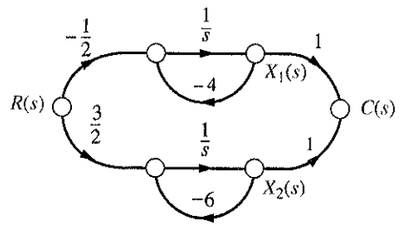
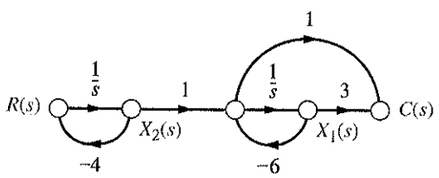
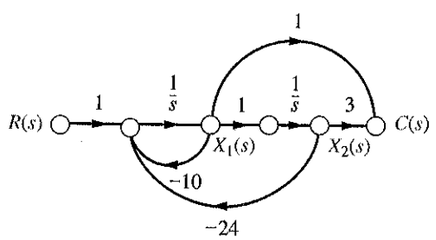
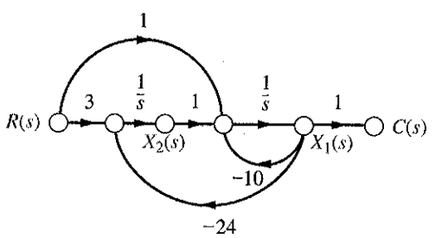
Exprimindo um Vetor Qualquer em Termos de Vetores de Bases

Comecemos revendo a representação de grandezas vetoriais no espaço. No Cap. 3 aprendemos que as variáveis de estado formam os eixos do espaço de estados. Usando um sistema de segunda ordem como exemplo, a Fig. 5.32 mostra dois conjuntos de eixos, x_1x_2 e z_1z_2.[1] Assim um vetor, $\mathbf{x}$, no espaço de estados pode ser escrito em termos das variáveis de estado ou eixos, x_1 e x_2, ou se o chamarmos de $\mathbf{z}$, das variáveis de estado ou eixos, z_1 e z_2.[5] Em outras palavras, o mesmo vetor pode ser expresso em termos de diferentes variáveis de estado. Desta discussão começamos a ver que a transformação de um conjunto de equações de estado em outro pode ser simplesmente a transformação de um conjunto de eixos em outro. Vejamos com maior profundidade esta possibilidade esclarecendo inicialmente as formas segundo as quais se representam vetores no espaço.

Vetores unitários $\mathbf{U}_{x_1}$ e $\mathbf{U}_{x_2}$, que são colineares com os eixos x_1 e x_2, formam vetores linearmente independentes chamados vetores de *base* do espaço x_1x_2. Qualquer vetor do espaço pode ser escrito de duas maneiras. Primeiro, ele pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base. Esta combinação linear implica uma

[5]Estes eixos são mostrados como sendo ortogonais (a 90° um do outro) por uma questão de clareza. Em geral, os eixos necessitam ser apenas linearmente independentes e não ortogonais. A independência linear impede que os eixos sejam colineares.

Fig. 5.31 Formas no espaço de estados para $C(s)/R(s) = (s+3)/[(s+4)(s+6)]$. Nota: $y = c(t)$

Forma	Função de Transferência	Diagrama de Fluxo de Sinal	Equações de Estado
Variáveis de fase	$\frac{1}{(s^2+10s+24)} * (s+3)$		$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$ $y = [3 \quad 1]\mathbf{x}$
Paralela	$\frac{-1/2}{(s+4)} + \frac{3/2}{s+6}$		$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} r$ $y = [1 \quad 1]\mathbf{x}$
Cascata	$\frac{1}{(s+4)} * \frac{(s+3)}{(s+6)}$		$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$ $y = [-3 \quad 1]\mathbf{x}$
Canônica do controlador	$\frac{1}{(s^2+10s+24)} * (s+3)$		$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & -24 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$ $y = [1 \quad 3]\mathbf{x}$
Canônica do observador	$\frac{\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}}{1 + \frac{10}{s} + \frac{24}{s^2}}$		$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -24 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} r$ $y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$

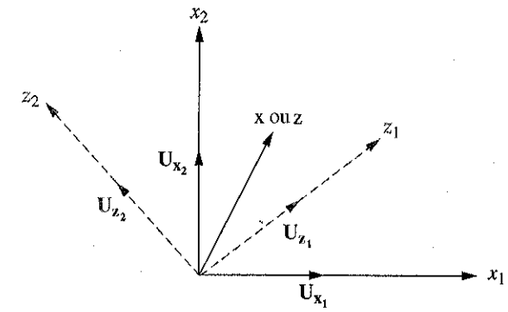
soma de vetores dos vetores da base para formar o vetor em pauta. Segundo, ele pode ser escrito em termos de suas componentes ao longo dos eixos. Resumindo estas duas formas de escrever um vetor, temos

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{U}_{x_1} + x_2\mathbf{U}_{x_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

De modo semelhante, o mesmo vetor, que agora será chamado de **z**, pode ser escrito em termos dos vetores da base no espaço z_1z_2,

$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{U}_{z_1} + z_2\mathbf{U}_{z_2} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{5.72}$$

Fig. 5.32 Transformações no espaço de estados



Transformações de Vetores

Qual é a relação entre os componentes de **x** e de **z** nas Eqs. (5.71) e (5.72)? Em outras palavras, como transformamos o vetor **x** no vetor **z** e vice-versa? Para começar, vamos supor que os vetores unitários $\mathbf{U}_{z_1}$ e $\mathbf{U}_{z_2}$, que são colineares com z_1 e z_2 e são vetores de base do espaço z_1z_2, também possam ser escritos em termos dos vetores de base do espaço x_1x_2. Portanto,

$$\mathbf{U}_{z_1} = p_{11}\mathbf{U}_{x_1} + p_{21}\mathbf{U}_{x_2} \tag{5.73a}$$

$$\mathbf{U}_{z_2} = p_{12}\mathbf{U}_{x_1} + p_{22}\mathbf{U}_{x_2} \tag{5.73b}$$

Substituindo as Eqs. (5.73) na Eq. (5.72) e levando em conta que os vetores **z** e **x** são iguais, tem-se **x** em termos dos componentes de z, ou

$$\mathbf{x} = (z_1p_{11} + z_2p_{12})\mathbf{U}_{x_1} + (z_1p_{21} + z_2p_{22})\mathbf{U}_{x_2} = \begin{bmatrix} z_1p_{11} + z_2p_{12} \\ z_1p_{21} + z_2p_{22} \end{bmatrix} \tag{5.74}$$

que é equivalente a

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Pz} \tag{5.75}$$

e

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \tag{5.76}$$

Podemos imaginar a Eq. (5.75) como uma transformação que toma o vetor **z** no plano z_1z_2 e o transforma em um vetor **x** do plano x_1x_2. Portanto, se pudermos achar **P**, poderemos efetuar a transformação entre as duas representações no espaço de estados.

Determinando a Matriz de Transformação, P

Podemos obter a matriz de transformação, **P**, a partir das Eqs. (5.73). Como conhecemos todas as grandezas vetoriais na equação, podemos resolvê-las em termos dos p_{ij}. Observe que as colunas de **P** são as coordenadas dos vetores da base do espaço z_1z_2 expressos como combinações lineares dos vetores da base no espaço x_1x_2, como mostrado nas Eqs. (5.73). Portanto, a primeira coluna de **P** é $\mathbf{U}_{z_1}$ e a segunda coluna é $\mathbf{U}_{z_2}$. Particionando **P**, obtemos

$$\mathbf{P} = [\mathbf{U}_{z_1}\mathbf{U}_{z_2}] \tag{5.77}$$

Vejamos um exemplo de transformação de um vetor de um espaço em outro.

Exemplo 5.9

Transformações de um vetor para uma nova base

Problema Transforme o vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5.78}$$

expresso na base de vetores,

$$\mathbf{U}_{x_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{U}_{x_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{U}_{x_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{5.79}$$

em um vetor expresso no seguinte sistema:

$$\mathbf{U}_{z_1} = \begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{U}_{z_2} = \begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{U}_{z_3} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{5.80}$$

Solução Usando a Eq. (5.72) como guia, o vetor **z** pode ser escrito em termos dos vetores da base, $\mathbf{U}_{zi}$,

$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{U}_{z_1} + z_2\mathbf{U}_{z_2} + z_3\mathbf{U}_{z_3} \tag{5.81}$$

Substituindo os valores de cada $\mathbf{U}_{zi}$ expresso como componentes dos vetores da base $\mathbf{U}_{xi}$, a Eq. (5.81) é transformada em componentes de **x**,

$$\mathbf{x} = z_1\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} + z_2\begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} + z_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0z_1 + 0z_2 + z_3\\(1/\sqrt{2})z_1 - (1/\sqrt{2})z_2 + 0z_3\\(1/\sqrt{2})z_1 + (1/\sqrt{2})z_2 + 0z_3\end{bmatrix} \tag{5.82}$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix} = \mathbf{Pz} \tag{5.83}$$

Como previsto, as colunas de **P** são os vetores da base do espaço z_1z_2 (Eqs. (5.80)). Além disso,

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0 & 0{,}707 & 0{,}707\\0 & -0{,}707 & 0{,}707\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2{,}83\\0\\1\end{bmatrix} \tag{5.84}$$

Em resumo, o vetor $\mathbf{x} = [1\ 2\ 2]^T$ no espaço x_1x_2 se transforma em $\mathbf{z} = [2{,}83\ 0\ 1]^T$ no espaço z_1z_2; portanto, **x** e **z** são o mesmo vetor expresso em sistemas de coordenadas diferentes.

Agora que somos capazes de transformar um vetor de estado em diferentes sistemas de coordenadas, vejamos como transformar a representação no espaço de estados de uma base em outra.

Transformando as Equações de Estado

Vimos que um mesmo vetor pode ser expresso em termos de diferentes bases de vetores. Esta conversão resulta na seleção de um conjunto diferente de variáveis de estado para representar a mesma função de transferência do sistema.

Convertamos agora uma representação no espaço de estados com o vetor de estado **x** em uma representação no espaço de estados com o vetor de estado **z**. Considere a representação no espaço de estados mostrada nas Eqs. (5.85).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{5.85a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{5.85b}$$

Seja $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$, com base na Eq. (5.75). Portanto

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{APz} + \mathbf{Bu} \tag{5.86a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{CPz} + \mathbf{Du} \tag{5.86b}$$

Pré-multiplicando a Eq. (5.75*a*) por $\mathbf{P}^{-1}$, resulta

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{5.87a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{CPz} + \mathbf{Du} \tag{5.87b}$$

As Eqs. (5.87) são uma representação alternativa de um sistema no espaço de estados. A matriz de sistema transformada é $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, a matriz de entrada é $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, a matriz de saída é **CP** e a matriz de ação à frente permanece **D**.

Mostraremos agora que a função de transferência, $T(s) = Y(s)/U(s)$, que relaciona a saída à entrada do sistema representado pelas Eqs. (5.87), é a mesma do sistema representado pelas Eqs. (5.85) se **y** e **u** forem escalares, $y(t)$ e $u(t)$.

Com base na Eq. (3.73), a função de transferência para o sistema das Eqs. (5.85) é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5.88}$$

A função de transferência do sistema das Eqs. (5.87) pode ser encontrada substituindo-se as matrizes equivalentes de saída, de sistema, de entrada e de ação à frente na Eq. (5.88). Assim, a função de transferência do sistema definido pelas Eqs. (5.87) é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{CP}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5.89}$$

Fazendo uso sucessivo do teorema da inversão de matrizes, $(\mathbf{MN})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$, obtemos

$$T(s) = \mathbf{CP}\left[\mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= \mathbf{C}\left[\mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\mathbf{P}^{-1}\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5.90}$$

Como $(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\mathbf{P}^{-1} = (s\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})$,

$$T(s) = \mathbf{C}\left[\mathbf{P}(s\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= \mathbf{C}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5.91}$$

que é idêntica à Eq. (5.88). Como a função de transferência é a mesma, os pólos e zeros do sistema se conservam invariantes com a transformação.

Podemos mostrar mais formalmente que os autovalores não se alteram com a transformação de similaridade. A equação característica do sistema antes da transformação é $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Depois da transformação, a equação característica é $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})$. Mas, $\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}$. Por conseguinte, a equação característica após a transformação pode ser escrita como

$$\det(s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \det\left[\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}\right] = 0 \tag{5.92}$$

Como o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes,

$$\det\left[\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}\right] = \det(\mathbf{P}^{-1})\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\det(\mathbf{P}) = 0 \tag{5.93}$$

Mas,

$$\det(\mathbf{P}^{-1})\det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{I}) = 1 \tag{5.94}$$

Portanto,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{5.95}$$

Vejamos um exemplo de transformação do vetor de estado e de representação de sistema no espaço de estados.

Exemplo 5.10

Transformação de similaridade sobre as equações de estado

Problema Dado o sistema representado no espaço de estados pelas Eqs. (5.96),

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{5.96a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} \tag{5.96b}$$

transformar o sistema em um novo conjunto de variáveis de estado, $\mathbf{z}$, onde as novas variáveis de estado se relacionam com as variáveis de estado originais, $\mathbf{x}$, através de

$$z_1 = 2x_1 \tag{5.97a}$$

$$z_2 = 3x_1 + 2x_2 \tag{5.97b}$$

$$z_3 = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \tag{5.97c}$$

Solução Das Eqs. (5.76) e (5.97),

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \tag{5.98}$$

Usando as Eqs. (5.87) como guia,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}75 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1{,}5 & 1 & 0 \\ -1{,}25 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ -2{,}5 & 0{,}4 & -6{,}2 \end{bmatrix} \tag{5.99}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}75 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} = [0{,}5 \quad 0 \quad 0] \tag{5.101}$$

Por conseguinte, o sistema transformado é

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -1{,}5 & 1 & 0 \\ -1{,}25 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ -2{,}5 & 0{,}4 & -6{,}2 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u \tag{5.102a}$$

$$y = [0{,}5 \quad 0 \quad 0]\mathbf{z} \tag{5.102b}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap5p4 no Apêndice B. Você aprenderá como executar transformações de similaridade. Este exercício usa o MATLAB para fazer o Exemplo 5.10.

Até aqui tratamos da transformação de sistemas entre bases de vetores de espaço de estados diferentes. Uma das vantagens principais de obter estes sistemas similares torna-se evidente na transformação em um sistema que apresenta uma matriz diagonal.

Diagonalizando uma Matriz de Sistema

Na Seção 5.7 vimos que a forma paralela de um diagrama de fluxo de sinal pode conduzir a uma matriz de sistema diagonal. Uma matriz de sistema diagonal apresenta a vantagem de cada equação de estado ser função de uma única variável de estado. Portanto, cada equação diferencial pode ser resolvida independentemente das outras equações. Dizemos que as equações estão *desacopladas*.

Em vez de usar expansão em frações parciais e diagramas de fluxo de sinal, podemos desacoplar um sistema usando transformações de matrizes. Se encontrarmos a matriz correta, $\mathbf{P}$, a matriz de sistema transformada, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, será uma matriz diagonal. Por conseguinte, estamos procurando uma transformação para um outro espaço de estados onde a matriz de sistema seja diagonal. Este novo espaço de estados também possui vetores de base situados ao longo de suas variáveis de estado. Damos um nome especial a todos os vetores colineares com os vetores da base do novo sistema que conduz a uma matriz de sistema diagonal: eles são chamados *autovetores*. Portanto, as coordenadas dos autovetores formam as colunas da matriz de transformação, $\mathbf{P}$, como demonstramos na Eq. (5.77).

Primeiro, definamos formalmente os autovetores a partir de uma outra perspectiva e em seguida mostremos que eles possuem a propriedade que acabamos de descrever. Depois definiremos os autovalores. Finalmente, mostraremos como diagonalizar uma matriz.

Definições

Autovetor: Os autovetores da matriz $\mathbf{A}$ são todos os vetores, $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$, que através da transformação $\mathbf{A}$ se tornam múltiplos deles próprios; isto é,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{5.103}$$

onde os λ_i são constantes.

A Fig. 5.33 mostra esta definição de autovetores. Se $\mathbf{A}\mathbf{x}$ não for colinear com $\mathbf{x}$ depois da transformação, como na Fig. 5.33(*a*), $\mathbf{x}$ não será um autovetor. Se $\mathbf{A}\mathbf{x}$ for colinear com $\mathbf{x}$ depois da transformação, como na Fig. 5.33(*b*), $\mathbf{x}$ será um autovetor.

Autovalor: Os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são os valores de λ_i que satisfazem a Eq. (5.103) para $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$.

Para obter os autovetores, rearranjamos a Eq. (5.103). Os autovetores, $\mathbf{x}_i$, satisfazem

$$\mathbf{0} = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_i \tag{5.104}$$

Resolvendo para $\mathbf{x}_i$ através da multiplicação à esquerda de ambos os membros por $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, vem

$$\mathbf{x}_i = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \frac{adj\,(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})}{det\,(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{0} \tag{5.105}$$

Como $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$, existe solução não-nula se

$$\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{5.106}$$

de onde podemos determinar os autovalores, λ_i.

Agora estamos prontos para mostrar como obter os autovetores, $\mathbf{x}_i$. Primeiro, achamos os autovalores, λ_i, usando $\det(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, e então usamos a Eq. (5.103) para determinar os autovetores.

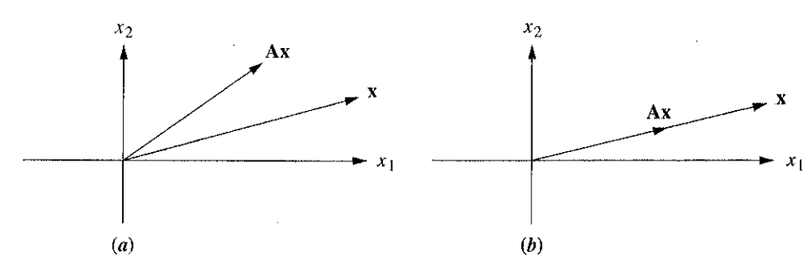


Fig. 5.33 Para ser um autovetor, a transformação $\mathbf{A}\mathbf{x}$ deve ser colinear com $\mathbf{x}$; portanto, em (a) $\mathbf{x}$ não é um autovetor; em (b), é

Exemplo 5.11

Determinação de autovetores

Problema Obter os autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.107}$$

Solução Os autovetores, $\mathbf{x}_i$, satisfazem a Eq. (5.104). Primeiramente, usamos $\det(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ para obter os autovalores, λ_i, para a Eq. (5.104):

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -1 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 6\lambda + 8 \tag{5.108}$$

de onde resultam os autovalores $\lambda = -2$ e -4.

Usando a Eq. (5.103) sucessivamente para cada autovalor, temos

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda\mathbf{x}_i$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{5.109}$$

ou

$$-3x_1 + x_2 = -2x_1 \tag{5.110a}$$

$$x_1 - 3x_2 = -2x_2 \tag{5.110b}$$

de onde $x_1 = x_2$. Portanto,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}c\\ c\end{bmatrix} \tag{5.111}$$

Usando o outro autovalor, -4, temos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}c\\ -c\end{bmatrix} \tag{5.112}$$

Usando as Eqs. (5.111) e (5.112), uma escolha de autovetores é

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \tag{5.113}$$

Vamos mostrar agora que se os autovetores da matriz $\mathbf{A}$ forem escolhidos como uma base da transformação, $\mathbf{P}$, a matriz de sistema resultante será diagonal. Seja a matriz de transformação $\mathbf{P}$ constituída pelos autovetores de $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}_i$,

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n] \tag{5.114}$$

Como $\mathbf{x}_i$ são autovetores, $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, que podem ser escritos de forma equivalente como um sistema de equações expresso por

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \tag{5.115}$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores, λ_i, ao longo da diagonal, e $\mathbf{P}$ é definida na Eq. (5.114). Resolvendo a Eq. (5.115) para $\mathbf{D}$ através da multiplicação à esquerda por $\mathbf{P}^{-1}$, obtemos

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \tag{5.116}$$

que é a matriz de sistema da Eq. (5.87).

Em resumo, através da transformação $\mathbf{P}$, consistindo nos autovetores da matriz de sistema, o sistema transformado é diagonal, com os autovalores ao longo da diagonal da matriz de sistema. O sistema transformado é idêntico ao obtido usando a expansão em frações parciais da função de transferência com raízes reais distintas.

No Exemplo 5.11, obtivemos os autovetores de um sistema de segunda ordem. Continuemos com esse problema e diagonalizemos a matriz de sistema.

Exemplo 5.12

Diagonalizando um sistema no espaço de estados

Problema Dado o sistema das Eqs. (5.117), obter o sistema diagonal que é similar.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u \tag{5.117a}$$

$$y = [2 \quad 3]\,\mathbf{x} \tag{5.117b}$$

Solução Primeiro, determine os autovalores e autovetores. Este passo foi executado no Exemplo 5.11. Forme, em seguida, a matriz de transformação $\mathbf{P}$, cujas colunas são constituídas pelos autovetores.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{5.118}$$

Finalmente, forme as matrizes similares de sistema, de entrada e de saída, respectivamente.

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix} \tag{5.119a}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\ -1/2\end{bmatrix} \tag{5.119b}$$

$$\mathbf{CP} = [2 \quad 3]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = [5 \quad -1] \tag{5.119c}$$

Substituindo as Eqs. (5.119) nas Eqs. (5.87), obtemos

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix}3/2\\ -1/2\end{bmatrix}u \tag{5.120a}$$

$$y = [5 \quad -1]\,\mathbf{z} \tag{5.120b}$$

Observe que a matriz de sistema é diagonal com os autovalores ao longo da diagonal.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o programa cap5p5 no Apêndice B. Este problema, que usa o MATLAB para diagonalizar um sistema, é semelhante (mas não igual) ao Exemplo 5.12.

Exercício de Avaliação 5.7

Problema: Para o sistema representado no espaço de estados por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ -4 & -6\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 4]\,\mathbf{x}$$

converter o sistema em outro onde o novo vetor de estado, $\mathbf{z}$, é

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Resposta:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix}6{,}5 & -8{,}5\\ 9{,}5 & -11{,}5\end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix}-3\\ -11\end{bmatrix}u$$

$$y = [0{,}8 \quad -1{,}4]\,\mathbf{z}$$

A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Exercício de Avaliação 5.8

Problema: Para o sistema original do Exercício de Avaliação 5.7, obter o sistema diagonal que é similar.

Resposta:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix}18{,}39\\ 20\end{bmatrix}u$$

$$y = [-2{,}121 \quad 2{,}6]\,\mathbf{z}$$

A resposta completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção aprendemos como mudar de uma representação a outra no espaço de estados, para um mesmo sistema, através de transformações de matrizes em vez da manipulação de funções de transferência e de diagrama de fluxo de sinal. Estas diferentes representações são ditas *similares*. As características de sistemas similares são que as funções de transferência relacionando entrada e saída são iguais, como o são os autovalores e pólos. Uma transformação particularmente útil foi a conversão de um sistema com autovalores reais, distintos, em uma matriz de sistema diagonal.

Resumiremos agora os conceitos de representação de sistemas por meio de diagramas de blocos e de diagramas de fluxo de sinal, primeiro através de problemas de estudo de caso; em seguida por meio de um resumo escrito. Nossos estudos de caso incluem o sistema de controle de posição de uma antena em azimute e de um Veículo Submersível Não Tripulado (UFSS). A redução de diagrama de blocos é importante para a análise e o projeto destes sistemas bem como dos sistemas de controle a bordo do *Alvin* (Fig. 5.34), usado para explorar os destroços do *Titanic* a 13.000 pés de profundidade (cerca de 4000 metros) no oceano Atlântico em julho de 1986 (Ballard, 1987).

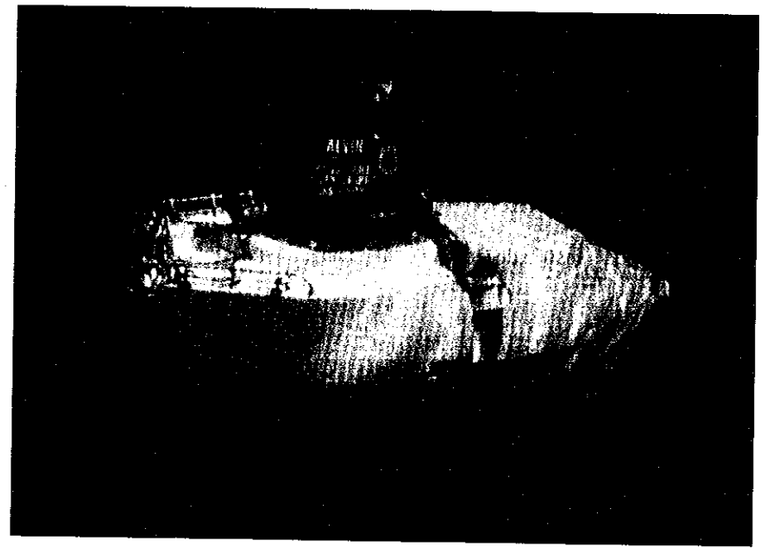


Fig. 5.34 *Alvin*, um submersível tripulado, explorou os destroços do *Titanic* com o *Jason Júnior*, um robô teleguiado por meio de um cabo.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de uma Antena: Resposta a Malha Fechada

Este capítulo mostrou que sistemas físicos podem ser modelados matematicamente com funções de transferência e em seguida interconectados para formar um sistema com retroação. Os modelos matemáticos interconectados podem ser reduzidos a uma única função de transferência representando o sistema da entrada para a saída. Esta função de transferência, a função de transferência a malha fechada, é utilizada então para determinar a resposta do sistema.

O seguinte estudo de caso mostra como reduzir os subsistemas do sistema de controle de posição de uma antena em azimute a uma única função de transferência a malha fechada para analisar e projetar as características da resposta transitória.

Problema Dado o sistema de controle de posição de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1),

a. Obtenha a função de transferência a malha fechada usando redução de diagrama de blocos.

Espaço de Estados

b. Represente cada um dos subsistemas por meio de um diagrama de fluxo de sinal e obtenha a representação no espaço de estados do sistema a malha fechada a partir do diagrama de fluxo de sinal.

c. Use o diagrama de fluxo de sinal encontrado no item **(b)** juntamente com a regra de Mason para determinar a função de transferência a malha fechada.

d. Substitua o amplificador de potência por uma função de transferência de ganho unitário e calcule os seguintes parâmetros do sistema a malha fechada: instante de pico, ultrapassagem percentual e tempo de assentamento para $K = 1000$.

e. Para o sistema de (d), deduza a expressão da resposta ao degrau do sistema a malha fechada.

f. Para o modelo simplificado de (d), determine o valor de K que conduz a uma ultrapassagem de 10%.

Solução Cada função de transferência de subsistema foi calculada no estudo de caso no Cap. 2. Vamos primeiramente reuni-las no diagrama de blocos do sistema de controle com retroação, a malha fechada, mostrado na Fig. 5.35(*a*).

a. Os passos adotados para reduzir o diagrama de blocos a uma única função de transferência a malha fechada relacionando o deslocamento angular de saída ao deslocamento angular de entrada estão mostrados na Fig. 5.35(*a*)-(*d*). Na Fig. 5.35(*b*), o potenciômetro de entrada foi empurrado para a direita da junção somadora, criando um sistema com retroação unitária. Na Fig. 5.35(*c*), todos os blocos da função de transferência de ação à frente foram multiplicados, formando uma função de transferência de ação à frente equivalente. Finalmente, aplicou-se a expressão matemática da retroação, levando à função de transferência a malha fechada na Fig. 5.35(*d*).

Espaço de Estados

b. Para obter o diagrama de fluxo de sinal de cada subsistema, usamos as equações de estado deduzidas no estudo de caso no Cap. 3. O diagrama de fluxo de sinal do amplificador de potência foi extraído das equações de estado das Eqs. (3.87) e (3.88) e o diagrama de fluxo de sinal do motor e da carga foi retirado da equação de estado da Eq. (3.98). Os outros subsistemas são ganhos puros. O diagrama de fluxo de sinal da Fig. 5.35(*a*) está mostrado na Fig. 5.36 e consiste em sistemas interligados.

As equações de estado são escritas a partir da Fig. 5.36. Primeiramente, defina as saídas dos integradores como variáveis de estado. Por conseguinte, o vetor de estado é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_a \end{bmatrix} \tag{5.121}$$

Usando a Fig. 5.36, escrevemos, por inspeção, as equações de estado:

$$\dot{x}_1 = + x_2 \tag{5.122a}$$

$$\dot{x}_2 = -1{,}71x_2 + 2{,}083e_a \tag{5.122b}$$

$$\dot{e}_a = -3{,}18Kx_1 - 100e_a + 31{,}8K\theta_i \tag{5.122c}$$

juntamente com a equação de saída,

$$y = \theta_o = 0{,}1x_1 \tag{5.123}$$

onde $1/\pi = 0{,}318$.

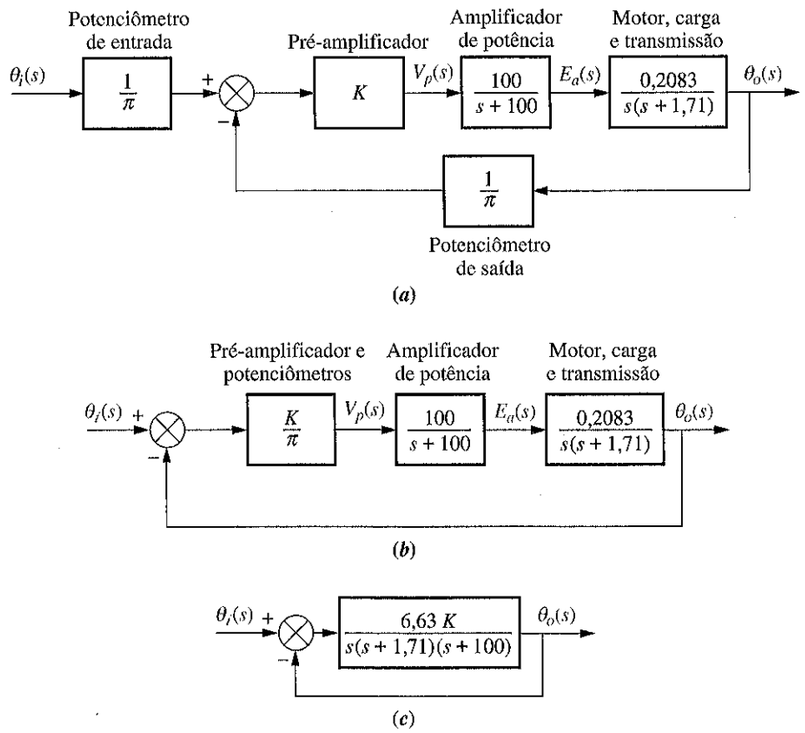


Fig. 5.35 Redução de diagrama de blocos relativo ao sistema de controle de posição da antena em azimute: **a.** original; **b.** empurrando o potenciômetro da entrada para a direita da junção somadora; **c.** mostrando a função de transferência equivalente do percurso à frente; **d.** função de transferência a malha fechada final

Em forma matricial vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,71 & 2,083 \\ -3,18K & 0 & -100 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 31,8K \end{bmatrix}\theta_i \tag{5.124a}$$

$$y = [0,1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} \tag{5.124b}$$

c. Aplicamos agora a regra de Mason à Fig. 5.36 para deduzir a função de transferência a malha fechada do sistema de controle de posição da antena em azimute. Obtenha primeiro os ganhos de percurso à frente. Com base na Fig. 5.36, há somente um ganho de percurso:

$$T_1 = \left(\frac{1}{\pi}\right)(K)(100)\left(\frac{1}{s}\right)(2,083)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)(0,1) = \frac{6,63K}{s^3} \tag{5.125}$$

Em seguida, identifique os ganhos a malha fechada. Há três: a malha do amplificador de potência, $G_{L1}(s)$, com e_a na saída; a malha do motor, $G_{L2}(s)$, com x_2 na saída, e a malha do sistema total, $G_{L3}(s)$, com θ_o na saída.

$$G_{L1}(s) = \frac{-100}{s} \tag{5.126a}$$

$$G_{L2}(s) = \frac{-1,71}{s} \tag{5.126b}$$

$$G_{L3}(s) = (K)(100)\left(\frac{1}{s}\right)(2,083)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)(0,1)\left(\frac{-1}{\pi}\right) = \frac{-6,63K}{s^3} \tag{5.126c}$$

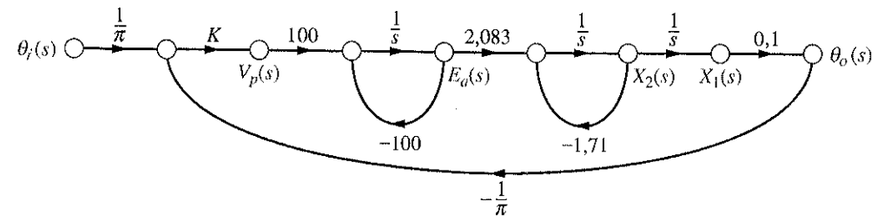


Fig. 5.36 Diagrama de fluxo de sinal relativo ao sistema de controle de posição da antena em azimute

Somente $G_{L1}(s)$ e $G_{L2}(s)$ são malhas que não se tocam. Portanto, o ganho das malhas disjuntas é

$$G_{L1}(s)G_{L2}(s) = \frac{171}{s^2} \tag{5.127}$$

Formando Δ e Δ_k na Eq. (5.28), temos

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - [G_{L1}(s) + G_{L2}(s) + G_{L3}(s)] + [G_{L1}(s)G_{L2}(s)] \\ &= 1 + \frac{100}{s} + \frac{1,71}{s} + \frac{6,63K}{s^3} + \frac{171}{s^2}\end{aligned} \tag{5.128}$$

e

$$\Delta_1 = 1 \tag{5.129}$$

Substituindo as Eqs. (5.125), (5.128) e (5.129) na Eq. (5.28), obtemos a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{6,63K}{s^3 + 101,71s^2 + 171s + 6,63K} \tag{5.130}$$

d. Substituindo o amplificador de potência com ganho unitário e ajustando em 1000 o ganho, K, do pré-amplificador na Fig. 5.35(*b*), resulta a função de transferência de ação à frente, $G(s)$,

$$G(s) = \frac{66,3}{s(s+1,71)} \tag{5.131}$$

Usando a expressão da retroação para calcular a função de transferência a malha fechada, obtemos

$$T(s) = \frac{66,3}{s^2 + 1,71s + 66,3} \tag{5.132}$$

Com base no denominador, $\omega_n = 8,14$ e $\zeta = 0,105$. Usando as Eqs. (4.34), (4.38) e (4.42), o instante de pico = 0,388 s, a ultrapassagem percentual = 71,77% e o tempo de assentamento = 4,68 s.

e. A transformada de Laplace da resposta ao degrau é obtida multiplicando-se primeiramente a Eq. (5.132) por $1/s$, uma entrada em degrau unitário, e efetuando a expansão em frações parciais:

$$\begin{aligned}C(s) &= \frac{66,3}{s(s^2 + 1,71s + 66,3)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1,71}{s^2 + 1,71s + 66,3} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s + 0,855) + 0,106(8,097)}{(s + 0,855)^2 + (8,097)^2}\end{aligned} \tag{5.133}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, encontramos

$$c(t) = 1 - e^{-0,855t}(\cos 8,097t + 0,106 \operatorname{sen} 8,097t) \tag{5.134}$$

f. Para o modelo simplificado, temos

$$G(s) = \frac{0,0663K}{s(s+1,71)} \tag{5.135}$$

de onde se calcula a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{0,0663K}{s^2 + 1,71s + 0,0663K} \tag{5.136}$$

Com base na Eq. (4.39), uma ultrapassagem percentual de 10% conduz a $\zeta = 0{,}591$. Usando o denominador da Eq. (5.136), $\omega_n = \sqrt{0{,}0663K}$ e $2\zeta\omega_n = 1{,}71$. Portanto,

$$\zeta = \frac{1{,}71}{2\sqrt{0{,}0663K}} = 0{,}591 \tag{5.137}$$

de onde $K = 31{,}6$.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Referindo-se ao sistema de controle de posição de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 2) faça o seguinte:

a. Determine a função de transferência a malha fechada usando redução de diagrama de blocos.

Espaço de Estados

b. Represente cada subsistema por um diagrama de fluxo de sinal e obtenha a representação no espaço de estados do sistema a malha fechada a partir do diagrama de fluxo de sinal.
c. Use o diagrama de fluxo de sinal obtido em (b), juntamente com a regra de Mason, para determinar a função de transferência a malha fechada.
d. Substitua o amplificador de potência por uma função de transferência unitária e calcule, para o sistema a malha fechada, a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico para $K = 5$.
e. Para o sistema usado em (d), deduza a expressão da resposta ao degrau a malha fechada.
f. Para o modelo em (d), determine o valor do ganho, K, do pré-amplificador que resulta em 15% de ultrapassagem.

Espaço de Estados

Veículo Submersível Não Tripulado (UFSS): Representação do Controle do Ângulo de Arfagem

Retornamos ao veículo UFSS apresentado nos estudos de caso no Cap. 4 (Johnson, 1980). Representaremos, no espaço de estados, o sistema de controle do ângulo de arfagem usado para o controle de profundidade.

Problema Considere o diagrama de blocos da malha de controle em arfagem do veículo UFSS mostrado na contracapa traseira. O ângulo de arfagem, θ, é controlado por um comando em ângulo de arfagem, θ_c, o qual, juntamente com a retroação do ângulo de arfagem e da velocidade angular em arfagem, determina a deflexão do profundor, δ_e, que atua sobre a dinâmica do veículo para determinar o ângulo de arfagem. Faça $K_1 = K_2 = 1$ e execute o seguinte:

a. Desenhe o diagrama de fluxo de sinal relativo a cada um dos subsistemas, assegurando-se de que o ângulo de arfagem, a velocidade de arfagem e a deflexão do profundor estejam representados como variáveis de estado. Em seguida, interligue os subsistemas.
b. Use o diagrama de fluxo de sinal obtido em (a) para representar a malha de controle de arfagem no espaço de estados.

Solução

a. A dinâmica do veículo é dividida em duas funções de transferência, para as quais é traçado um diagrama de fluxo de sinal. A Fig. 5.37 mostra essa divisão juntamente com a função de transferência do atuador do profundor. Cada bloco é esboçado em forma de variáveis de fase, de modo que as variáveis de estado sejam variáveis particulares do sistema. Este resultado está mostrado na Fig. 5.38(*a*). Os percursos de retroação são adicionados em seguida para completar o diagrama de fluxo de sinal, mostrado na Fig. 5.38(*b*).

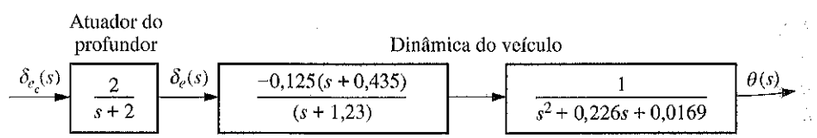


Fig. 5.37 Diagramas de blocos do profundor e da dinâmica do veículo UFSS, do qual pode ser extraído um diagrama de fluxo de sinal

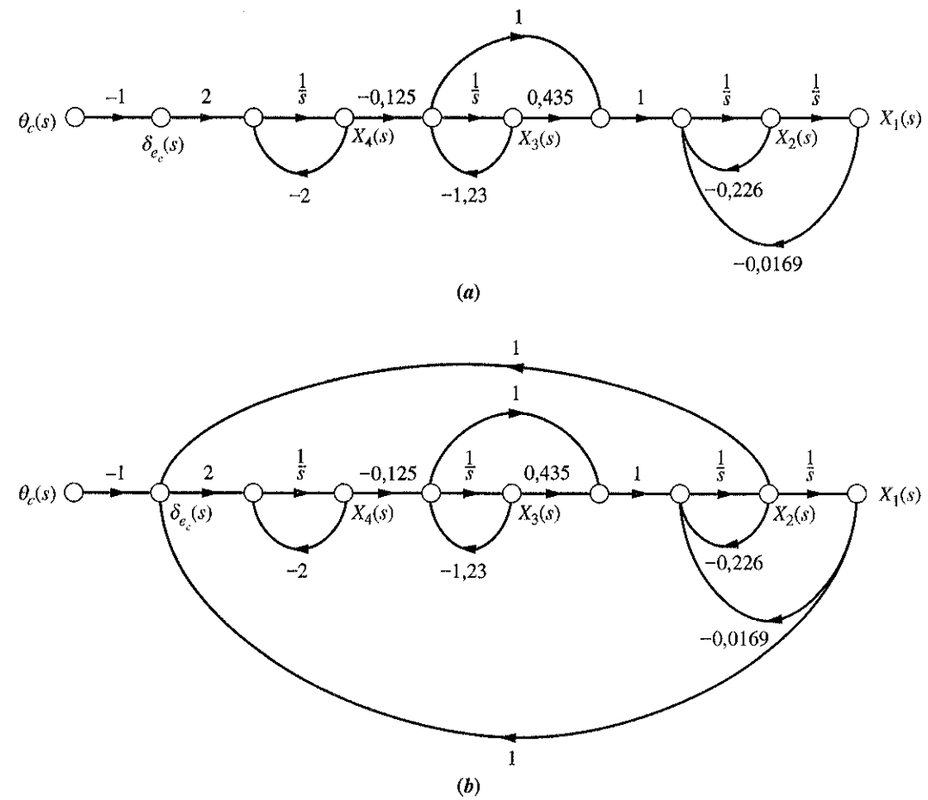


Fig. 5.38 Representação em diagrama de fluxo de sinal do sistema de controle em arfagem do veículo UFSS: **a.** sem retroação de posição e de velocidade; **b.** com retroação de posição e de velocidade (Nota: As variáveis necessárias explicitamente são: $x_1 = u$, $x_2 = d\theta/dt$, e $x_4 = \delta_e$)

b. Por inspeção, as derivadas das variáveis de estado x_1 a x_4 são escritas como

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{5.138a}$$

$$\dot{x}_2 = -0{,}0169x_1 - 0{,}226x_2 + 0{,}435x_3 - 1{,}23x_3 - 0{,}125x_4 \tag{5.138b}$$

$$\dot{x}_3 = -1{,}23x_3 - 0{,}125x_4 \tag{5.138c}$$

$$\dot{x}_4 = 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 2\theta c \tag{5.138d}$$

Finalmente, a saída $y = x_1$.

As equações de estado e a equação de saída, sob forma matricial vetorial, são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}0169 & -0{,}226 & -0{,}795 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & -1{,}23 & -0{,}125 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\theta_c \tag{5.139a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,\mathbf{x} \tag{5.139b}$$

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. O veículo UFSS é manobrado através do sistema de controle de rumo mostrado na Fig. 5.39 e repetido na contracapa traseira. Um comando de rumo é a entrada. A entrada e a retroação do rumo efetivo do veículo submersível e a velocidade de guinada são usados para gerar um comando para o leme que manobra o veículo (Johnson, 1980). Faça $K_1 = K_2 = 1$ e execute o seguinte:

a. Esboce o diagrama de fluxo de sinal da cada subsistema, certificando-se de que o ângulo de rumo, a velocidade de guinada e a deflexão do leme sejam representados como variáveis de estado. Interligue, em seguida, os subsistemas.

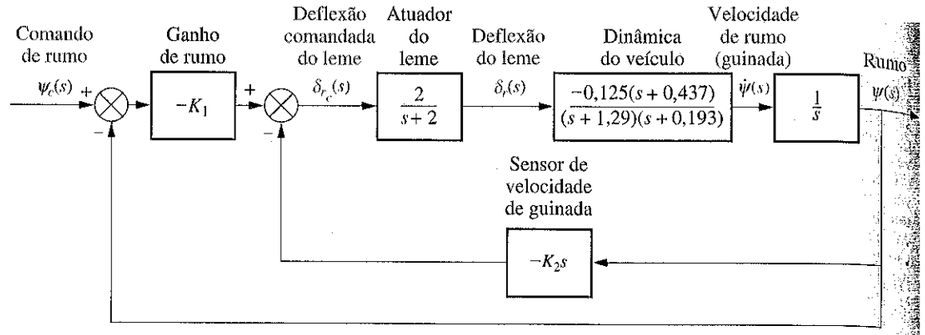


Fig. 5.39 Diagrama de blocos do sistema de controle rumo do veículo UFSS

b. Use o diagrama de fluxo de sinal obtido em (a) para representar a malha de controle de rumo no espaço de estados.

MATLAB

c. Use o MATLAB para representar o sistema de controle de rumo do UFSS no espaço de estados na forma canônica do controlador.

Sumário

Um dos objetivos deste capítulo foi aprender a representar subsistemas múltiplos através de diagramas de blocos e de diagramas de fluxo de sinal. Um outro objetivo foi ser capaz de reduzir ambas as representações de diagrama de blocos e de diagrama de fluxo de sinal a uma única função de transferência.

Vimos que um diagrama de blocos de um sistema linear e invariante no tempo consistia em quatro elementos: *sinais*, *sistemas*, *junções de soma* e *pontos de coleta de sinais*. Estes elementos foram reunidos dentro de três configurações fundamentais: *cascata*, *paralela* e com *retroação*. Foram deduzidas, então, algumas operações básicas: deslocar sistemas em relação a junções de soma e a pontos de coleta de dados.

Uma vez reconhecidas as formas e operações básicas, poderíamos reduzir diagramas de blocos complicados a uma única função de transferência relacionando entrada e saída. Aplicamos em seguida os métodos do Cap. 4 para análise e projeto do comportamento transitório de um sistema de segunda ordem. Vimos que o ajuste do ganho de um sistema de controle com retroação nos deu um controle parcial da resposta transitória.

A representação em diagrama de fluxo de sinal de sistemas lineares e invariantes no tempo consiste em dois elementos: nós, que representam sinais, e linhas com setas, que representam subsistemas. As junções de soma e os pontos de coleta de sinais estão implícitos nos diagramas de fluxo de sinal. Estas representações gráficas são úteis na visualização do significado das variáveis de estado. Além disso, elas podem ser traçadas em primeiro lugar como um auxílio na obtenção das equações de estado de um sistema.

A *regra de Mason* foi usada para deduzir a função de transferência a partir do diagrama de fluxo de sinal. Esta fórmula substituiu as técnicas de redução de diagrama de blocos. A regra de Mason parece complicada, mas o seu uso fica simplificado quando não há malhas sem pontos comuns. Em muitos destes casos a função de transferência pode ser escrita, por inspeção, com menos trabalho que na técnica de redução de diagramas de fluxo de sinal.

Para finalizar, vimos que os sistemas podem ser representados no espaço de estados usando diferentes conjuntos de variáveis. Nos três últimos capítulos foram tratadas as formas: *variáveis de fase*, *cascata*, *canônica do controlador* e *canônica do observador*. Uma representação particular pode ser escolhida porque um conjunto de variáveis de estado possui um significado físico ou porque é mais fácil resolver as equações de estado sob uma forma particular.

No próximo capítulo, discutiremos a estabilidade de sistemas. Sem estabilidade não é possível começar o projeto de um sistema visando à resposta transitória desejada. Descobriremos como saber se um sistema é estável e qual o efeito dos valores dos parâmetros sobre a estabilidade dos sistemas.

Perguntas de Revisão

1. Nomeie os quatro componentes de um diagrama de blocos de um sistema linear, invariante no tempo.
2. Nomeie três formas básicas de interligar subsistemas.
3. Para cada uma das formas da pergunta anterior, enuncie como é encontrada a função de transferência equivalente.
4. Além do conhecimento das formas básicas discutidas nas Perguntas 2 e 3, que outras equivalências você precisa conhecer a fim de efetuar a redução de diagramas de blocos?
5. Para um sistema de controle com retroação simples, de segunda ordem, do tipo mostrado na Fig. 5.14, descreva o efeito que as variações do ganho do percurso à frente, K, apresenta sobre a resposta transitória.

6. Para um sistema de controle com retroação simples, de segunda ordem, do tipo mostrado na Fig. 5.14, descreva as variações na relação de amortecimento à medida que o ganho, K, aumenta de valor na região subamortecida.
7. Nomeie os dois componentes de um diagrama de fluxo.
8. Como são mostradas as junções de soma nos diagramas de fluxo de sinal?
9. Se um percurso à frente tocar todas as malhas, qual será o valor de Δ_k?

Espaço de Estados

10. Nomeie cinco tipos de representação de sistemas no espaço de estados.

Espaço de Estados

11. Quais as duas formas de representação no espaço de estados que são encontradas usando o mesmo método?

Espaço de Estados

12. Qual a forma de representação no espaço de estados que conduz a uma matriz diagonal?

Espaço de Estados

13. Quando a matriz de sistema for diagonal, quais as grandezas situadas ao longo da diagonal?

Espaço de Estados

14. Quais os termos situados ao longo da diagonal da matriz de sistema de uma representação na forma canônica de Jordan?

Espaço de Estados

15. Qual a vantagem em ter uma representação com uma matriz de sistema diagonal?

Espaço de Estados

16. Indique duas razões para se representar sistemas com formas alternativas.

Espaço de Estados

17. Para que espécie de sistema se deveria usar a forma canônica do observador?

Espaço de Estados

18. Descreva as transformações do vetor de estado a partir da perspectiva de bases diferentes.

Espaço de Estados

19. Qual é a definição de um autovetor?

Espaço de Estados

20. Com base na definição de um autovetor, o que é um autovalor?

Espaço de Estados

21. Qual a importância de usar autovetores como vetores de base em uma transformação de sistemas?

Problemas

1 Reduza o diagrama de blocos mostrado na Fig. P5.1 a uma única função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$. Use os seguintes métodos:

a. Redução de diagrama de blocos.

MATLAB

b. MATLAB

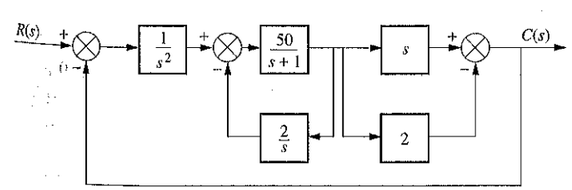


Fig. P5.1

2. Obtenha a função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P5.2, usando redução de diagramas de blocos.

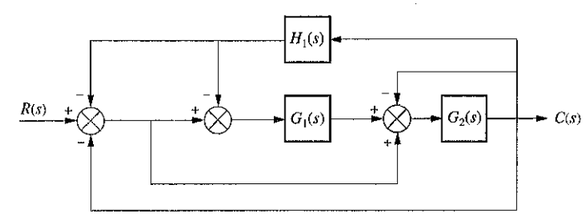


Fig. P5.2

3. Obtenha a função de transferência equivalente, $T(s) = C(s)/R(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P5.3.

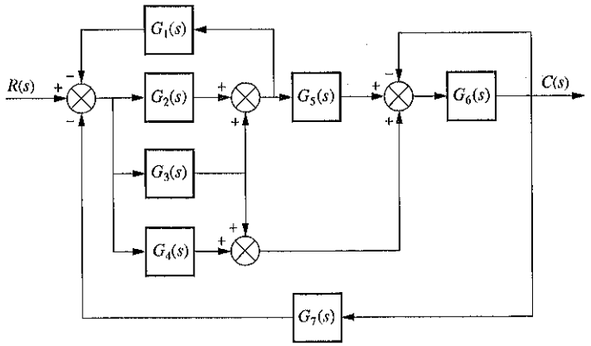


Fig. P5.3

4. Reduza o sistema mostrado na Fig. P5.4 a uma única função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$.

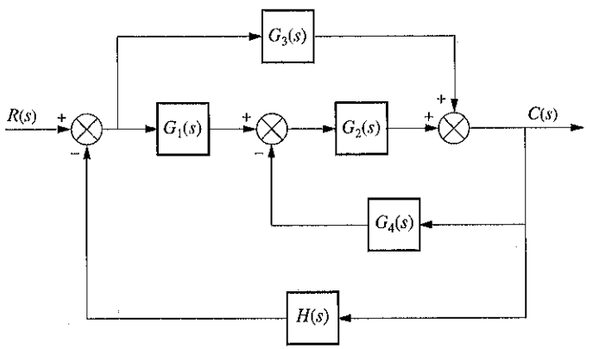


Fig. P5.4

5. Obtenha a função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P5.5. Use os seguintes métodos:

a. Redução de diagrama de blocos.

MATLAB

b. MATLAB. Use as seguintes funções de transferência: $G_1(s) = 1/(s + 7)$, $G_2(s) = 1/(s^2 + 2s + 3)$, $G_3(s) = 1/(s + 4)$, $G_4(s) = 1/s$, $G_5(s) = 5/(s + 7)$, $G_6(s) = 1/(s^2 + 5s + 10)$, $G_7(s) = 3/(s + 2)$, $G_8(s) = 1/(s+ 6)$.

Sugestão: Use os comandos **append** e **connect** da *Toolbox* de Sistema de Controle do MATLAB.

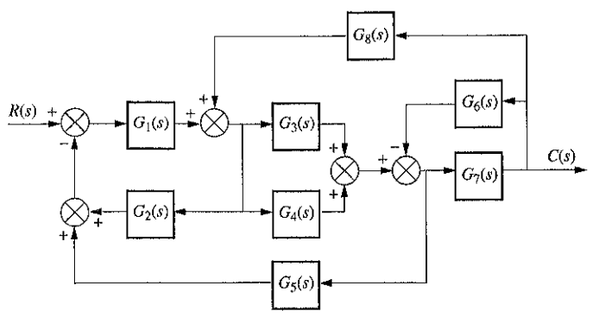


Fig. P5.5

6. Reduza o diagrama de blocos mostrado na Fig. P5.6 a um único bloco, $T(s) = C(s)/R(s)$.

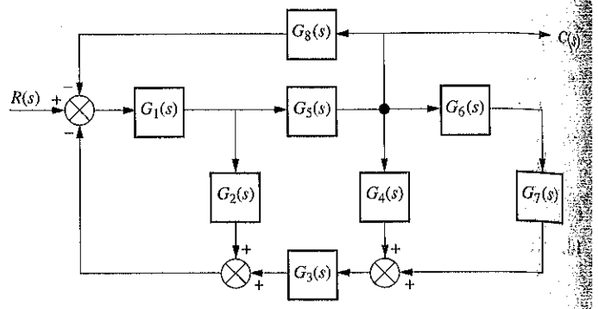


Fig. P5.6

7. Determine o sistema com retroação unitária que é equivalente ao mostrado na Fig. P5.7.

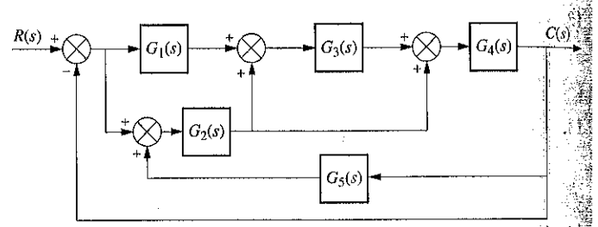


Fig. P5.7

8. Dado o diagrama de blocos de um sistema mostrado na Fig. P5.8, obtenha a função de transferência, $G(s) = \theta_{22}(s)/\theta_{11}(s)$.

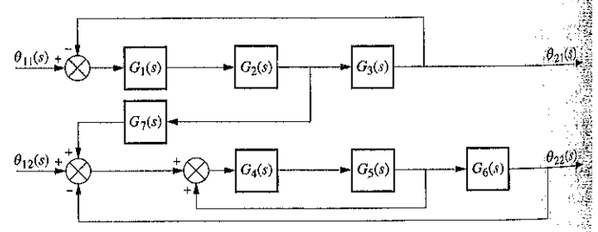


Fig. P5.8

9. Reduza o diagrama de blocos mostrado na Fig. P5.9 a um único bloco, $T(s) = C(s)/R(s)$.

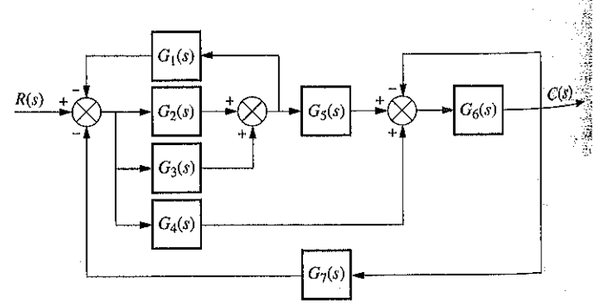


Fig. P5.9

10. Reduza o diagrama de blocos mostrado na Fig. P5.10 a um único bloco representando a função de transferência $T(s) = C(s)/R(s)$.

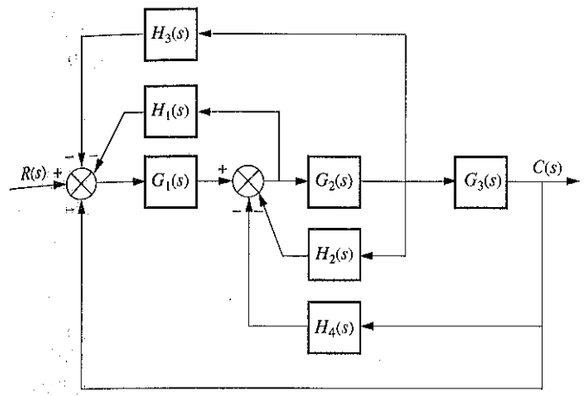


Fig. P5.10

11. Para o sistema mostrado na Fig. P5.11, determinar a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico para uma entrada em degrau se a resposta for subamortecida. (Será? Por quê?)

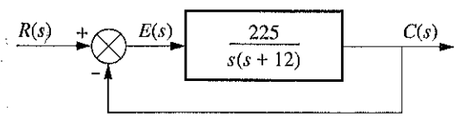


Fig. P5.11

12. Para o sistema mostrado na Fig. P5.12, determinar a saída, $c(t)$, se a entrada, $r(t)$, for um degrau unitário.

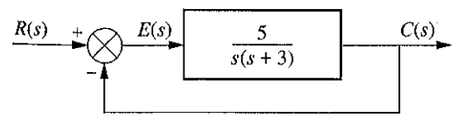


Fig. P5.12

13. Para o sistema mostrado na Fig. P5.13, determinar os pólos da função de transferência a malha fechada, $T(s) = C(s)/R(s)$.

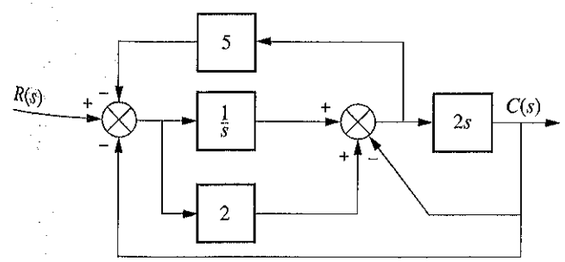


Fig. P5.13

14. Para o sistema mostrado na Fig. P5.14, determinar o valor de K para o qual a resposta a um degrau unitário apresenta 20% de ultrapassagem.

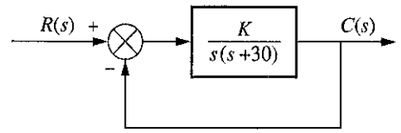


Fig. P5.14

15. Para o sistema mostrado na Fig. P5.15, determinar os valores de K e de α para os quais a resposta a um degrau unitário apresenta um tempo de assentamento de 0,2 s e uma ultrapassagem de 30%.

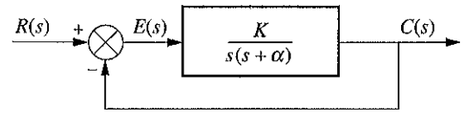


Fig. P5.15

16. Para o sistema mostrado na Fig. P5.16, determinar os valores de K_1 e de K_2 para os quais a resposta do sistema a malha fechada a um degrau apresenta um instante de pico de 1 s e um tempo de assentamento de 2 s.

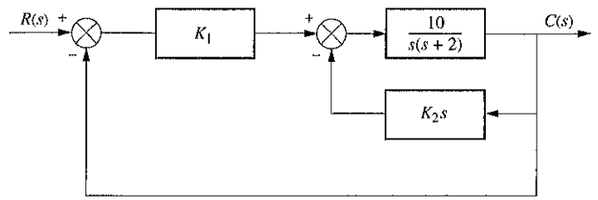


Fig. P5.16

17. Para o sistema mostrado na Fig. P5.17, determinar o seguinte:

a. O bloco único equivalente que representa a função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$.

b. A relação de amortecimento, a freqüência natural, a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento, o instante de pico, o tempo de subida e a freqüência de oscilação amortecida.

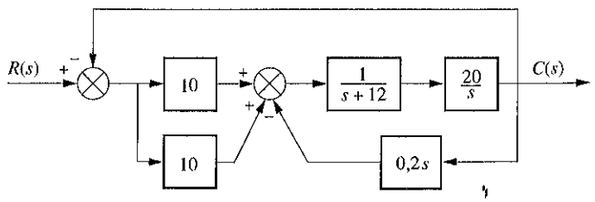


Fig. P5.17

18. Para o sistema mostrado na Fig. P5.18, determinar ζ, ω_n, a ultrapassagem percentual, o instante de pico, o tempo de subida e o tempo de assentamento.

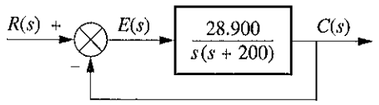


Fig. P5.18

19. Um motor e um gerador são reunidos em um sistema para acionar uma carga, como mostrado na Fig. P5.19. Se a tensão de saída do gerador for $e_g(t) = K_f i_f(t)$, onde $i_f(t)$ é a corrente de campo do gerador, determinar a função de transferência, $G(s) = \theta_o(s)/E_i(s)$. Para o gerador, $K_f = 2\ \Omega$. Para o motor, $K_t = 1$ N·m/A e $K_b = 1$ V·s/rad.

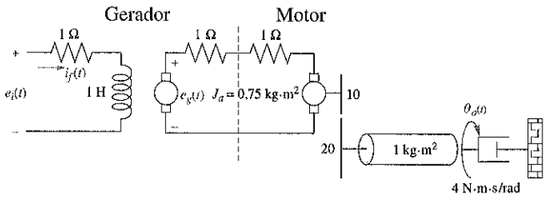


Fig. P5.19

20. Determinar $G(s) = E_o(s)/T(s)$ para o sistema mostrado na Fig. P5.20.

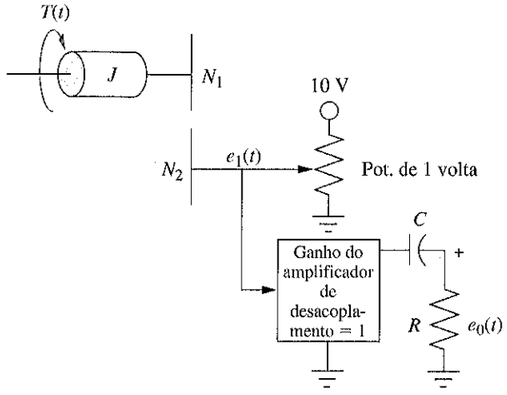


Fig. P5.20

21. Determinar a função de transferência, $G(s) = E_o(s)/T(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P5.21.

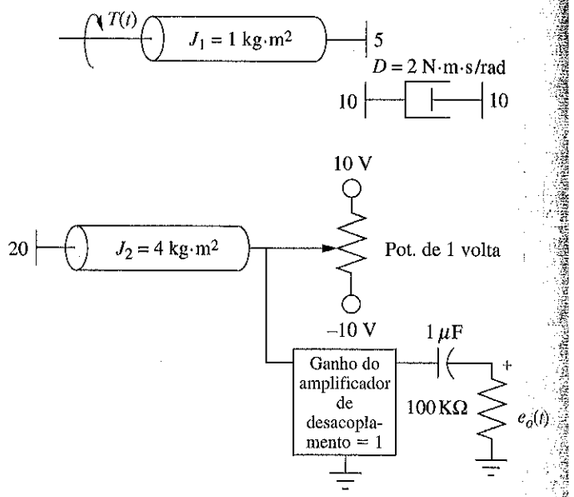


Fig. P5.21

22. Dê nome aos sinais e desenhe o diagrama de fluxo de sinal para os diagramas de blocos mostrados nos seguintes problemas:

a. 1
b. 3
c. 5

Espaço de Estados

23. Esboce um diagrama de fluxo de sinal para cada uma das seguintes equações de estado.

a. $$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0]\,\mathbf{x}$$

b. $$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 2 \quad 0]\,\mathbf{x}$$

c. $$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 3 \quad 2]\,\mathbf{x}$$

Espaço de Estados

24. Dado o sistema a seguir, esboce um diagrama de fluxo de sinal e obtenha sua representação no espaço de estados nas seguintes formas:
a. Variáveis de fase.
b. Cascata.

$$G(s) = \frac{5}{s(s+6)(s+8)}$$

Espaço de Estados

25. Repita o Problema 24 para

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+6)}$$

26. Usando a regra de Mason, determinar a função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P5.22.

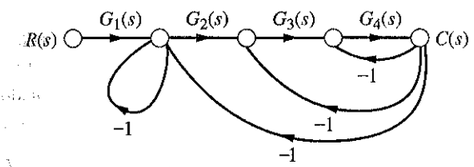


Fig. P5.22

27. Usando a regra de Mason, determinar a função de transferência, $T(s) = C(s)/R(s)$, para o sistema mostrado na Fig. P5.23.

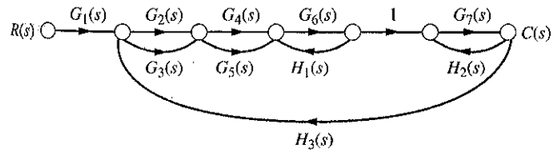


Fig. P5.23

28. Use a regra de Mason para determinar a função de transferência da Fig. 5.13.

29. Use a redução de diagrama de blocos para determinar a função de transferência da Fig. 5.21 e compare a resposta com a obtida através da regra de Mason.

Espaço de Estados

30. Represente os seguintes sistemas no espaço de estados na forma canônica de Jordan. Desenhe os diagramas de fluxo de sinal.

a. $G(s) = \dfrac{(s+1)(s+2)}{(s+3)^2(s+4)}$ **b.** $G(s) = \dfrac{(s+2)}{(s+5)^2(s+7)^2}$

c. $G(s) = \dfrac{(s+3)}{(s+2)^2(s+4)(s+5)}$

Espaço de Estados

31. Represente os seguintes sistemas no espaço de estados na forma de variáveis de fase. Desenhe os diagramas de fluxo de sinal.

a. $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+7}$ **b.** $G(s) = \dfrac{s^2+2s+6}{s^3+5s^2+2s+1}$

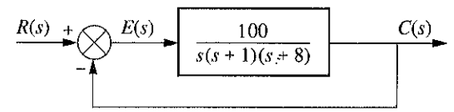
c. $G(s) = \dfrac{s^3+2s^2+7s+1}{s^4+3s^3+5s^2+6s+4}$

Espaço de Estados

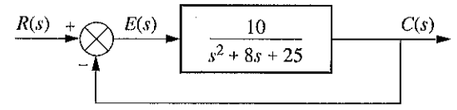
32. Repita o Problema 31 e represente cada um dos sistemas nas formas canônicas do controlador e do observador.

Espaço de Estados

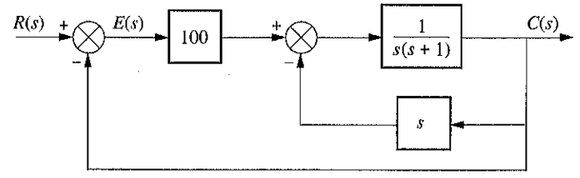
33. Represente os sistemas de controle com retroação mostrados na Fig. P5.24 no espaço de estados. Quando possível, represente as funções de transferência a malha aberta em cascata separadamente e complete a malha de retroação com o percurso de sinal ligando a saída à entrada. Esboce o diagrama de fluxo de sinal de forma a obter o que for mais próximo possível de uma correspondência biunívoca com o diagrama de blocos:



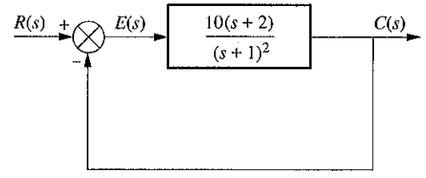
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

Fig. P5.24

Espaço de Estados

34. Dado o sistema mostrado na Fig. P5.25,

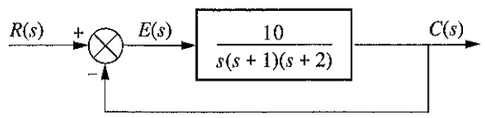


Fig. P5.25

a. represente-o no espaço de estados na forma de variáveis de fase;
b. represente-o no espaço de estados em outras formas além da representação em variáveis de fase.

35. Repita o Problema para o sistema mostrado na Fig. P5.26.

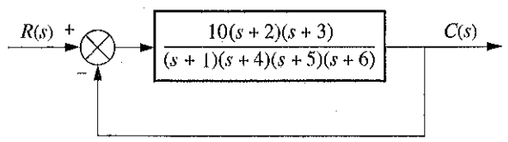


Fig. P5.26

MATLAB

36. Use o MATLAB para resolver o Problema 35.

Espaço de Estados

37. Represente o sistema mostrado na Fig. P5.27 no espaço de estados onde $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $x_4(t)$, como mostrado, são variáveis de estado, $c(t)$ é a saída e $x_2(t)$ é uma variável interna da função de transferência $X_1(s)/X_3(s)$.

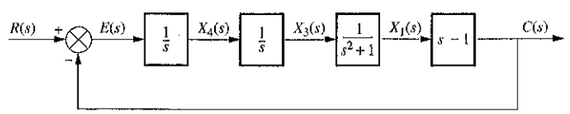


Fig. P5.27

38. Considere o sistema mecânico em rotação mostrado na Fig. P5.28.
a. Represente o sistema por um diagrama de fluxo de sinal.

Espaço de Estados

b. Represente o sistema no espaço de estados sendo $\theta_2(t)$ a saída.

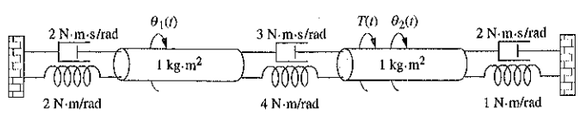


Fig. P5.28

MATLAB

39. Dado um sistema com retroação unitária cuja função de transferência do canal de ação à frente é

Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{7}{s(s+9)(s+12)}$$

use o MATLAB para representar o sistema a malha fechada no espaço de estados nas formas:
a. Com variáveis de fase.
b. Paralela.

Espaço de Estados

40. Considere os subsistemas em cascata mostrados na Fig. P5.29. Se $G_1(s)$ for representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 r$$
$$y_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1$$

e $G_2(s)$ for representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 y_1$$
$$y_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2$$

mostre que o sistema completo pode ser representado no espaço de estados por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$y_2 = [\mathbf{0} \mid \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

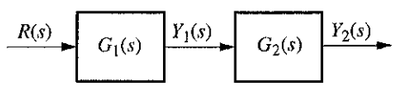


Fig. P5.29

Espaço de Estados

41. Considere os subsistemas em paralelo mostrados na Fig. P5.30. Se $G_1(s)$ for representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 r$$
$$y_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1$$

e $G_2(s)$ for representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 r$$
$$y_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2$$

mostre que o sistema completo pode ser representado no espaço de estados por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} r$$

$$y = [\mathbf{C}_1 \mid \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

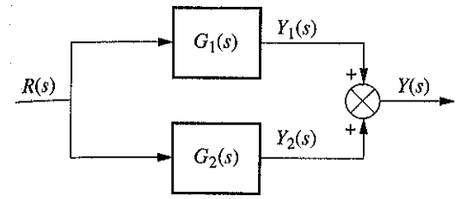


Fig. P5.30

42. Considere os subsistemas mostrados na Fig. P5.31 e interligados para formar um sistema com retroação. Se $G(s)$ for representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 e$$
$$y = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1$$

e $H(s)$ for representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 y$$
$$p = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2$$

mostre que o sistema a malha fechada pode ser representado no espaço de estados por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \hline \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$y = [\mathbf{C}_1 \mid \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

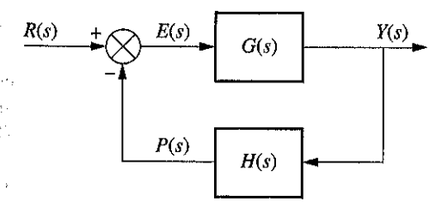


Fig. P5.31

Espaço de Estados

43. Dado o sistema representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [2 \quad 5 \quad 3]\mathbf{x}$$

convertê-lo em um outro cujo novo vetor de estado, $\mathbf{z}$, é

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Espaço de Estados

44. Repita o Problema 43 para o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad -3 \quad 4]\mathbf{x}$$

e para a seguinte transformação no vetor de estado:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Espaço de Estados

45. Diagonalize o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} r$$

$$y = [-1 \quad 1 \quad 2]\mathbf{x}$$

Espaço de Estados

46. Repita o Problema 45 para o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 7 \\ 18{,}25 & 6{,}25 & -11{,}75 \\ -7{,}25 & -2{,}25 & 5{,}75 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad -2 \quad 4]\mathbf{x}$$

MATLAB

47. Diagonalize o sistema do Problema 46 usando o MATLAB.

48. Durante o lançamento, o ônibus espacial é manobrado através de comandos gerados pelos cálculos do computador de guiamento. Estes comandos estão sob a forma de atitude do veículo, velocidades angulares e acelerações de atitude obtidas, respectivamente, a partir de medidas realizadas pela unidade de referência inercial do veículo, pelo conjunto de girômetros e pelo conjunto de acelerômetros. O piloto automático digital de lançamento utiliza os erros entre os valores comandados de atitude, velocidades angulares e acelerações para pivotar os motores principais do sistema de propulsão (vetorização do empuxo) e os foguetes de propelente sólido para produzir a atitude desejada para o veículo. O sistema de controle de atitude do veículo espacial emprega o mesmo método dos sistemas de controle de arfagem, rolamento e guinada. Um modelo simplificado do sistema de controle de arfagem está mostrado na Fig. P5.32.[6]
a. Determinar a função de transferência a malha fechada relacionando a arfagem real à arfagem comandada. Suponha que todas as demais entradas sejam iguais a zero.
b. Determinar a função de transferência a malha fechada relacionando a velocidade de arfagem real à velocidade de arfagem comandada. Suponha que todas as demais entradas sejam iguais a zero.
c. Determinar a função de transferência a malha fechada relacionando a aceleração em arfagem real à aceleração

[6]Fonte de informação básica para este problema: Rockwell International.

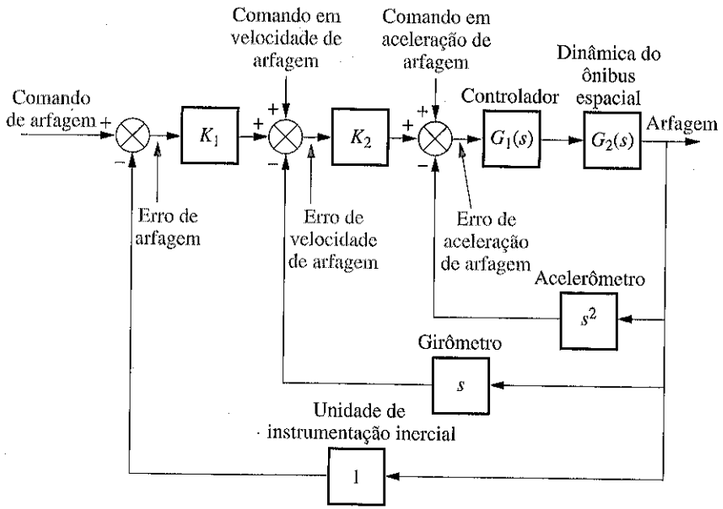


Fig. P5.32 Sistema de controle de arfagem do ônibus espacial (simplificado)

em arfagem comandada. Suponha que todas as demais entradas sejam iguais a zero.

Espaço de Estados

49. Um modulador de rádio em AM gera o produto da forma de onda portadora pela forma de onda da mensagem como mostrado na Fig. P5.33 (Kurland, 1971). Representar o sistema no espaço de estados quando a portadora for uma senóide de freqüência $\omega = a$, e a mensagem for uma senóide de freqüência $\omega = b$. Observe que este sistema é não-linear por causa do multiplicador.

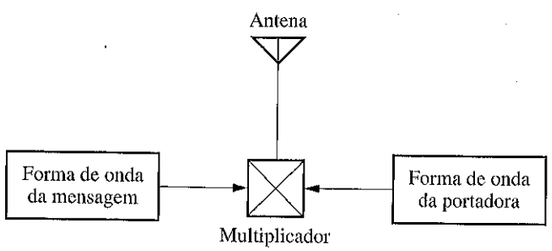


Fig. P5.33 Modulador em AM

50. Um modelo para o movimento angular do olho humano consiste no sistema a malha fechada mostrado na Fig. P5.34, onde a posição do objeto é a entrada, e a posição do olho, a saída. O cérebro envia sinais aos músculos que movimentam o olho. Estes sinais consistem na diferença entre a posição do objeto e as informações de posição e velocidade angular do olho enviadas pelos tendões dos músculos. A movimentação do olho é modelada como uma inércia e um amortecimento viscoso e se supõe que não há elasticidade (mola)(Milhorn, 1966). Supondo que os retardos no cérebro e no sistema nervoso sejam irrelevantes, obter a função de transferência do sistema de controle de posição.

51. Um robô transportador Assistente, mostrado na Fig. P5.35(*a*), é usado para fazer distribuição em uma instalação hospitalar. O robô pode distribuir alimentação, medicamentos, material de laboratório e relatórios sobre pacientes (Evans, 1992). Dado o diagrama de blocos simplificado do sistema de controle do ângulo de manobra do robô, como mostrado na Fig. P5.35(*b*), faça o seguinte;

a. Determine a função de transferência a malha fechada.

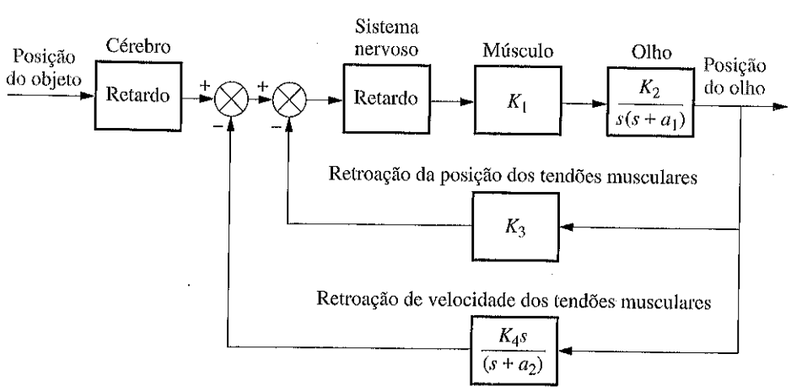
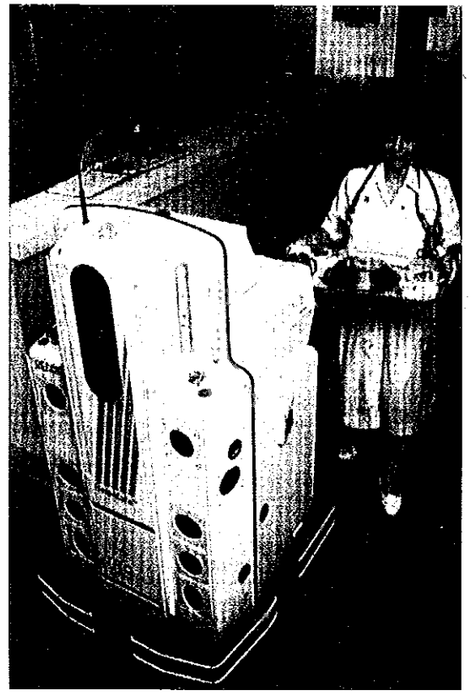
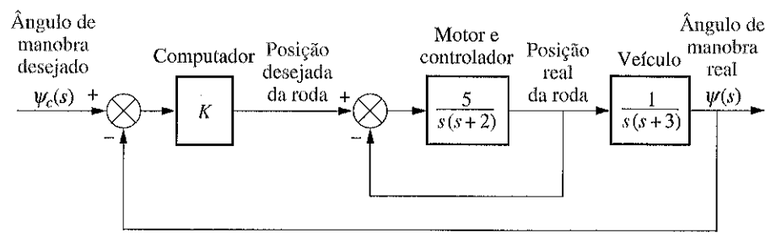


Fig.P5.34 Sistema de controle com retroação representando o movimento do olho humano

Fig. P5.35 a. Robô Assistente usado para serviço de entrega em hospitais; **b.** diagrama de blocos simplificado para o controle do ângulo de rumo



(*a*)



(*b*)

Espaço de Estados

b. Represente o sistema no espaço de estados, tendo como entrada o ângulo de manobra desejado, como saída o ângulo de manobra real e, dentre as variáveis de estado, a posição real da roda e o ângulo real de manobra.

MATLAB

c. Simule o sistema a malha fechada usando o MATLAB. Obtenha a resposta ao degrau unitário para diferentes valores de K que produzem respostas de sistemas passando de superamortecidos a subamortecidos e instáveis.

52. Máquinas de ensaios de carga controladas automaticamente são usadas para testar a confiabilidade de produtos sob condições de uso real. A máquina de ensaios consiste em uma estrutura de carregamento e no corpo de prova, como mostrado na Fig. P5.36(*a*). O carregamento desejado é a entrada por meio de uma tensão, $e_i(t)$, aplicada a um amplificador de corrente. O carregamento de saída é medido através de uma tensão, $e_c(t)$, proveniente de uma célula de carga que mede o carregamento aplicado ao corpo de prova. A Fig. P5.36(*b*) mostra um modelo aproximado do sistema de ensaio de carregamento sem compensação (Bailey, 1992).

Espaço de Estados

a. Modele o sistema no espaço de estados.

MATLAB

b. Simule a resposta ao degrau usando o MATLAB. A resposta é predominantemente de primeira ou de segunda ordem? Descreva as características da resposta que necessitam de correção.

Espaço de Estados

53. Considere o avião F4-E do Problema 22, Cap. 3. Se a função de transferência a malha aberta relacionando a acelera-

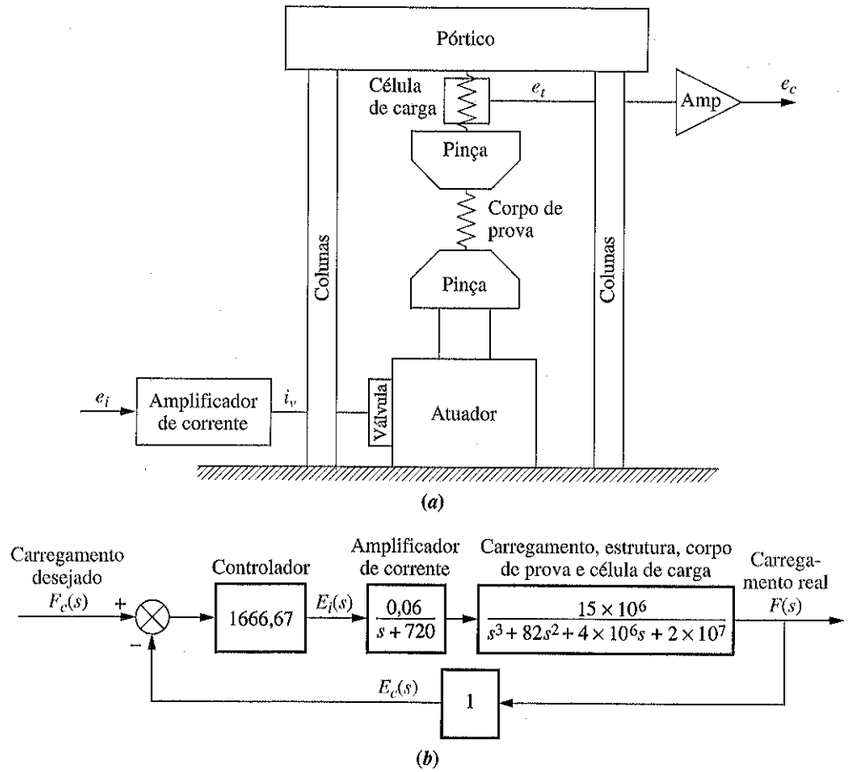


Fig. P5.36 a. Máquina de ensaio de carga (© 1992 IEEE); **b.** diagrama de blocos aproximado

ção normal, A_n, ao comando de deflexão de entrada, $\delta_c(s)$, for aproximada como

$$\frac{A_n(s)}{\delta_c(s)} = \frac{-272(s^2 + 1,9s + 84)}{(s + 14)(s - 1,8)(s + 4,9)}$$

(Cavallo, 1992), obtenha a representação no espaço de estados nas seguintes formas:

a. Variáveis de fase.
b. Canônica do controlador.
c. Canônica do observador.
d. Cascata.
e. Paralela.

54. Obter a função de transferência a malha fechada do sistema de controle de arfagem do veículo UFSS mostrado na contracapa traseira (Johnson, 1980).

MATLAB

55. Repita o Problema 54 usando o MATLAB.

Simulink

56. Use o Simulink para plotar os efeitos das não-linearidades sobre a resposta ao degrau a malha fechada do sistema de controle de posição da antena em azimute. Este sistema está mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1). Em particular, considere isoladamente cada uma das seguintes não-linearidades: saturação (±5 V), folga (largura da folga 0,15), zona morta (−2 a +2), bem como a resposta linear. Admita que o ganho do pré-amplificador seja 100 e que o degrau de entrada seja de 2 rad.

57. O Problema 12 no Cap. 1 descreve uma válvula solenóide proporcional de alta velocidade. Um subsistema da válvula é a bobina do solenóide mostrada na Fig. P5.37. A corrente através da bobina, L, gera um campo magnético que produz uma força para operar a válvula. A Fig. P5.37 pode ser representada em diagrama de blocos (Vaughan, 1996).

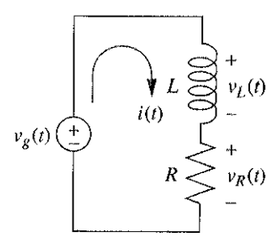


Fig. P5.37 Circuito da bobina de um solenóide

a. Deduzir um diagrama de blocos de um sistema com retroação que represente o circuito da bobina, no qual a tensão aplicada, $v_g(t)$, seja a entrada, a tensão aplicada à bobina, $v_L(t)$, seja a tensão de erro, e a corrente, $i(t)$, seja a saída.
b. Para o diagrama de blocos obtido em (a), determinar a transformada de Laplace da corrente de saída, $I(s)$.
c. Resolva o circuito da Fig. P5.37 em termos de $I(s)$ e compare o resultado com o do item (b).

Problemas de Projeto

58. O motor e a carga mostrados na Fig. P5.38(*a*) são usados como parte de um sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P5.38(*b*). Obter o valor do coeficiente de atrito viscoso, D_L, que deve ser usado a fim de se obter uma resposta transitória a malha fechada apresentando uma ultrapassagem de 20%.

59. Suponha que o motor cuja função de transferência está mostrada na Fig. P5.39(*a*) seja utilizado como percurso de ação à frente de um sistema a malha fechada com retroação unitária.

a. Calcule a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento esperados.
b. Você deseja melhorar a resposta obtida em (a). Como o motor e as constantes do motor não podem ser alterados, inserem-se um amplificador e um tacômetro (gerador de tensão) na malha, como mostrado na Fig. P5.39(*b*). Determine os valores de K_1 e K_2 no sistema para resultar uma relação de amortecimento de 0,5. A freqüência natural do sistema antes da inclusão do tacômetro é de 10 rad/s.

60. O sistema mostrado na Fig. P5.40 terá sua resposta transitória modificada pela inclusão de um tacômetro. Projete K_1 e K_2 no sistema de modo a obter uma relação de amortecimento de 0,5. A freqüência natural do sistema antes da inclusão do tacômetro é de 10 rad/s.

61. O sistema mecânico mostrado na Fig. P5.41(*a*) é usado como parte do sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P5.41(*b*). Determinar os valores de M e D para que resultem em uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento de 2 s.

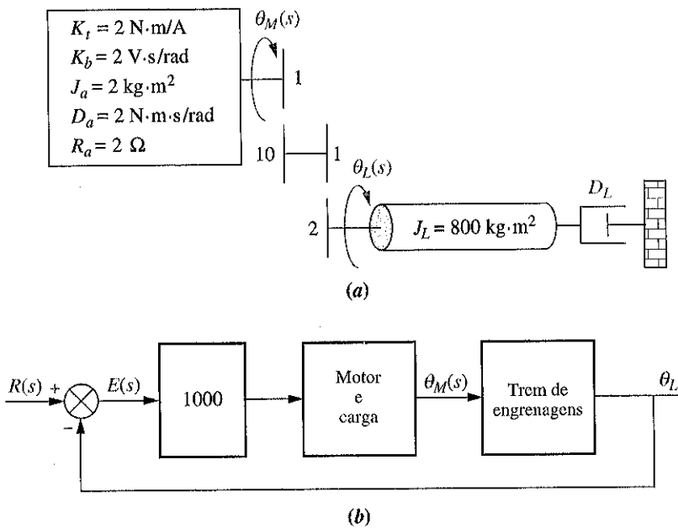


Fig. P5.38 Controle de posição; **a.** motor e carga; **b.** diagrama de blocos

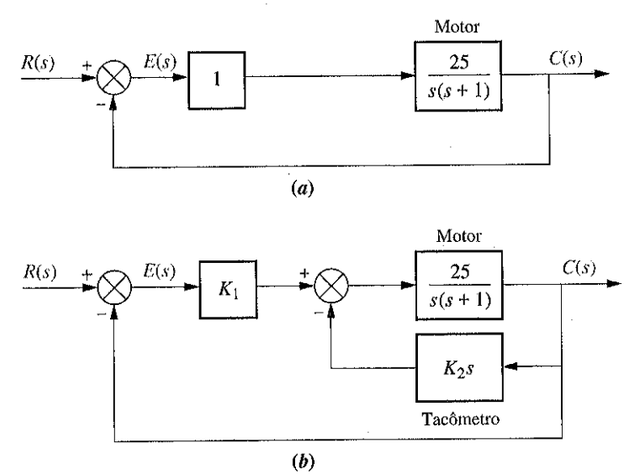


Fig. P5.39 a. Controle de posição; **b.** controle de posição com tacômetro

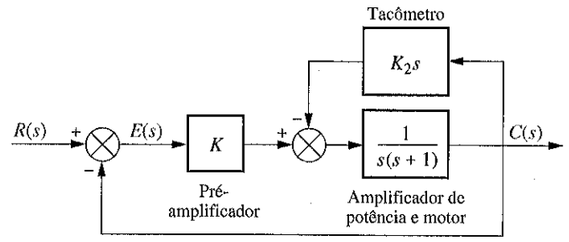


Fig. P5.40 Controle de posição

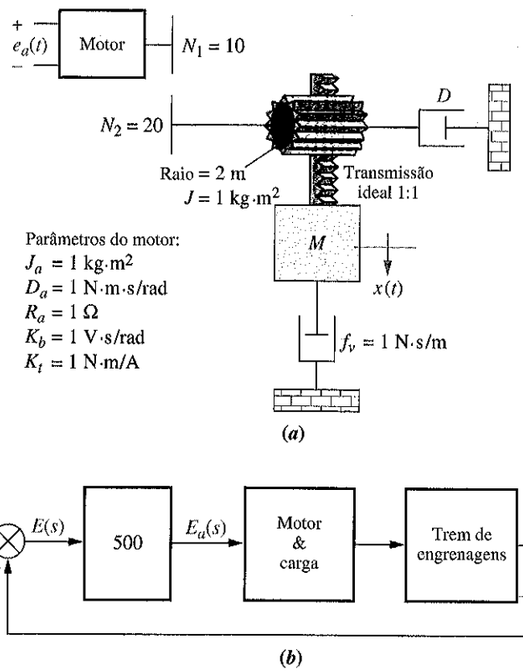


Fig. P5.41 a. Motor e carga; **b.** Motor e carga no sistema com retroação

Problema Progressivo de Análise e Projeto

62. Pantógrafo para ferrovia de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 discute o controle ativo do mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade. Nesse problema você obteve um diagrama de blocos funcional relacionando a força de saída (*real*) à força de entrada (saída *desejada*). No Problema 55, Cap. 2, você obteve a função de transferência relativa à dinâmica do pantógrafo; isto é, a função de transferência relacionando o deslocamento da mola que modela a sapata à força aplicada, ou $G(s) = (Y_h(s) - Y_{cat}(s))/F_{cima}(s)$ (O'Connor, 1997). Criamos agora uma malha de controle ativo do pantógrafo acrescentando os seguintes componentes e seguindo o diagrama de blocos funcional obtido no Problema 17, Cap. 1: transdutor de entrada ($G_i(s) = 1/100$), controlador ($G_c(s) = K$), atuador ($G_a(s) = 1/1000$), mola do pantógrafo ($K_s = 82{,}3 \times 10^3$ N/m) e sensor ($H_o(s) = 1/100$).

a. Usando o diagrama de blocos funcional da solução encontrada para o Problema 17 do Cap. 1 e a dinâmica do pantógrafo, $G(s)$, obtida no Problema 55 do Cap. 2, construa um diagrama de blocos do sistema de controle ativo do pantógrafo.

b. Obtenha a função de transferência a malha fechada relativa ao diagrama de blocos obtido no item (a), quando $K = 1000$.

Espaço de Estados

c. Represente a dinâmica do pantógrafo na forma de variáveis de fase e obtenha a representação no espaço de estados para o sistema a malha fechada quando $K = 1000$.

Bibliografia

Bailey, F. N.; Cockburn, J. C.; and Dee, A. Robust Control for High-Performance Materials Testing. *IEEE Control Systems*, April 1992, pp. 63–70.

Ballard, R. D. *The Discovery of the Titanic*, Warner Books, Inc., New York, 1987.

Cavallo, A.; De Maria, G.; and Verde, L. Robust Flight Control Systems: A Parameter Space Design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 5, September–October 1992, pp. 1207–1215.

Evans, J.; Krishnamurthy, B.; Barrows, B.; Skewis, T.; and Lumelsky, V. Handling Real-World Motion Planning: A Hospital Transport Robot. *IEEE Control Systems*, February 1992, pp. 15–20.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J., Jr.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems*. 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description*. NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1980.

Kurland, M., and Papson, T. P. Analog Computer Simulation of Linear Modulation Systems. *Transactions of the Analog/Hybrid Computer Educational Society*, January 1971, pp. 9–18.

Mason, S. J. Feedback Theory—Some Properties of Signal-Flow Graphs. *Proc. IRE*, September 1953, pp. 1144–1156.

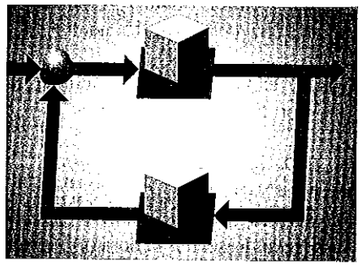
Milhorn, H. T., Jr. *The Application of Control Theory to Physiological Systems*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1966.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Timothy, L. K., and Bona, B. E. *State Space Analysis: An Introduction*. McGraw-Hill, New York, 1968.

Vaughan, N. D., and Gamble, J. B. The Modeling and Simulation of a Proportional Solenoid Valve. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 118, March 1996, pp. 120–125.

CAPÍTULO 6



Estabilidade

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo, iremos aprender o seguinte:

- Como determinar a estabilidade de um sistema representado por uma função de transferência
- Como determinar a estabilidade de um sistema representado no espaço de estados.

Espaço de Estados

- Como determinar parâmetros de sistema para obter estabilidade

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posição da antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de obter a faixa de valores do ganho do pré-amplificador para manter o sistema estável.
- Dado o Veículo Submersível Não Tripulado, UFSS, mostrado na contracapa traseira, você deverá ser capaz de determinar a faixa de valores de ganho para obter a estabilidade do sistema de controle de arfagem e de rumo.

6.1 Introdução

No Cap. 1, dissemos que três requisitos integram o projeto de sistemas de controle: resposta transitória, estabilidade e erro de estado estacionário. Tratamos até aqui da resposta transitória, à qual voltaremos novamente no Cap. 8. Agora estamos prontos para discutir o próximo requisito, a estabilidade.

A estabilidade é a especificação mais importante do sistema. Se um sistema é instável, a resposta transitória e os erros de estado estacionário deixam de ter significado. Um sistema instável não pode ser projetado para atender uma resposta transitória específica ou um requisito de erro de estado estacionário. O que é então *estabilidade*? Há muitas definições de estabilidade, dependendo do tipo de sistema ou do ponto de vista que se adota. Nesta seção nos limitaremos aos sistemas lineares e invariantes no tempo.

Na Seção 1.5 mostraremos que é possível controlar a saída de um sistema se a resposta de estado estacionário consistir somente na resposta forçada. Mas a resposta total de um sistema é a soma das respostas forçada e natural, ou seja

$$c(t) = c_{\text{forçada}}(t) + c_{\text{natural}}(t) \tag{6.1}$$

Usando estes conceitos, apresentamos as seguintes definições de estabilidade, instabilidade e estabilidade marginal:

Um sistema linear e invariante no tempo é *estável* se a resposta natural tender a zero quando o tempo tender a infinito.

Um sistema linear e invariante no tempo é *instável* se a resposta natural crescer, sem limites, à medida que o tempo tender para infinito.

Um sistema linear e invariante no tempo é *marginalmente estável* quando a resposta natural nem cresce nem se atenua, permanecendo constante ou oscilante, à medida que o tempo tende para infinito.

Dessa forma, a definição de estabilidade implica que restará somente a resposta forçada quando a resposta natural tender a zero.

Essas definições dependem de uma descrição da resposta natural. Quando se procura a resposta total, pode ser difícil separar a resposta natural da resposta forçada. Contudo, nos damos conta de que, se a entrada for limitada e a resposta total não estiver tendendo para infinito, então a resposta natural não poderá obviamente estar tendendo para infinito à medida que o tempo tender para infinito. Se a entrada for ilimitada, ao ver uma resposta total ilimitada não se poderá chegar a qualquer conclusão a respeito da estabilidade do sistema: não se poderá dizer se a resposta total é ilimitada porque a resposta forçada é ilimitada ou porque a resposta natural é ilimitada. Em decorrência disso, nossa definição alternativa de estabilidade, a que diz respeito à resposta total e implica a primeira definição baseada na resposta natural, é:

Um sistema é estável se *toda* entrada limitada gerar uma saída limitada.

Chamamos este enunciado de definição de estabilidade entrada-limitada saída-limitada, ou estabilidade BIBO.*

Produzamos agora uma definição alternativa de instabilidade baseada na resposta total em vez de na resposta natural. Percebemos que se a entrada for limitada mas a resposta total for ilimitada, o sistema é instável, uma vez que podemos concluir que a resposta natural tende para infinito à medida que o tempo tende para infinito. Se a entrada for ilimitada, veremos uma resposta total ilimitada, e não se poderá extrair qualquer conclusão a respeito da estabilidade do sistema: não se poderá dizer se a resposta total é ilimitada porque a resposta forçada é ilimitada ou porque a resposta natural é ilimitada. Em decorrência disso, nossa definição alternativa de instabilidade, a que diz respeito à resposta total, é:

Um sistema é instável se *alguma* entrada limitada gerar uma saída ilimitada.

Estas definições ajudam a esclarecer a anterior sobre estabilidade marginal: a estabilidade marginal significa, na verdade, que o sistema é estável em relação a alguns tipos de entrada e instável em relação a outros. Por exemplo, mostraremos que se a resposta natural não for amortecida, uma entrada senoidal de amplitude limitada de mesma freqüência produzirá uma resposta natural com oscilações crescentes. Portanto, o sistema aparece como estável para todas as entradas limitadas exceto com relação a esta senóide. Dessa forma, os sistemas marginalmente estáveis segundo as definições da resposta natural são incluídos como sistemas instáveis segundo as definições BIBO.

Façamos um resumo das definições de estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo.
Usando a resposta natural:

1. Um sistema é estável se a resposta natural tender a zero quando o tempo tender a infinito.
2. Um sistema é instável se a resposta natural tender a infinito quando o tempo tender a infinito.

*Do inglês Bounded-Input Bounded-Output. (N.T.)

3. Um sistema é estável de forma marginal se a resposta natural não decair nem crescer, mas permanecer constante ou oscilar.

Usando a resposta total (estabilidade BIBO):

1. Um sistema é estável se *toda* entrada limitada gerar uma saída ilimitada.
2. Um sistema é instável se *alguma* entrada limitada gerar uma saída ilimitada.

Fisicamente, um sistema instável cuja resposta natural cresça sem limites poderia causar danos ao sistema, a instalações adjacentes, ou à vida humana. Em muitas ocasiões, os sistemas são projetados com limites de parada para evitar uma perda de controle. Da perspectiva do gráfico da resposta no domínio do tempo de um sistema físico, a instabilidade se evidencia através de transitórios que crescem sem limites, conseqüentemente, a resposta total não tende a um valor de estado estacionário ou a outra resposta forçada.[1] Como determinar se um sistema é estável?

Focalizemos as definições de estabilidade com base na resposta natural. Convém lembrar, a partir dos estudos dos pólos dos sistemas, que pólos no semiplano da esquerda produzem como resposta natural exponenciais decrescentes ou senóides amortecidas. Estas respostas naturais tendem a zero à medida que o tempo tende a infinito. Dessa forma, se os pólos de sistema a malha fechada estiverem no semiplano s da esquerda, e portanto tendo parte real negativa, o sistema é estável. Isto é, os *sistemas estáveis possuem função de transferência a malha fechada com pólos somente no semiplano da esquerda.*

Pólos no semiplano da direita conduzem a respostas naturais crescentes de forma exponencial ou a respostas naturais senoidais de amplitude exponencialmente crescente. Estas respostas naturais tendem a infinito quando o tempo tende a infinito. Portanto, se os pólos do sistema a malha fechada estiverem no semiplano s da direita, tendo por isso parte real positiva, o sistema é instável. Além disso, pólos de multiplicidade maior que um no eixo imaginário conduzem à soma de respostas da forma $At^n \cos(\omega t + \phi)$, onde $n = 1, 2, \ldots$, que também tende a infinito quando o tempo tender a infinito. Dessa forma, os *sistemas instáveis possuem função de transferência a malha fechada com pelo menos um pólo no semiplano s da direita e/ou pólos de multiplicidade maior que um no eixo imaginário.*

Finalmente, um sistema dotado de pólos de multiplicidade 1 no eixo imaginário produz como resposta natural oscilações senoidais puras. Estas respostas não aumentam nem diminuem de amplitude. Portanto, *os sistemas marginalmente estáveis apresentam função de transferência a malha fechada com somente pólos de multiplicidade 1 no eixo imaginário e pólos no semiplano s da esquerda.*

Como exemplo, a resposta ao degrau unitário do sistema estável da Fig. 6.1(*a*) é comparada com a de um sistema instável da Fig. 6.1(*b*). As respostas, também mostradas na Fig. 6.1, evidenciam que enquanto as oscilações nos sistemas estáveis diminuem, nos instáveis, crescem sem limite. Observe também que, neste caso, a resposta do sistema estável, em estado estacionário, tende ao valor um.

Nem sempre é simples determinar se um sistema de controle com retroação é estável. Infelizmente, um problema típico que ocorre é mostrado na Fig. 6.2. Embora conheçamos os pólos da função de transferência do canal direto na Fig. 6.2(*a*), não conhecemos a localização dos pólos do sistema a malha fechada equivalente da Fig. 6.2(*b*) sem antes fatorar ou de alguma forma calcular as raízes.

Contudo, sob certas circunstâncias, podemos chegar a algumas conclusões sobre a estabilidade do sistema. Primeiro, se a função de transferência a malha fechada possuir somente pólos no semiplano da esquerda, então os fatores do denominador da função de transferência a malha fechada consistirão em produtos de termos como $(s + a_i)$, onde a_i é real e positivo, ou complexo com parte real positiva. O produto destes termos é um polinômio com todos os coeficientes positivos.[2] Nenhum termo do polinômio pode estar faltando, uma vez que isso implicaria o cancelamento de coeficientes positivos e negativos ou fatores de raízes sobre o eixo imaginário, o que não é o caso. Portanto, uma condição suficiente para que o sistema seja instável é que os sinais de todos os coeficientes do denominador da função de transferência a malha fechada não sejam iguais. Se estiverem faltando potências de s, o sistema é instável ou, na melhor das hipóteses, marginalmente estável. Infelizmente, se todos os coeficientes do denominador estiverem presentes e forem positivos, não dispomos de informação definitiva sobre a localização dos pólos do sistema.

Se o método descrito no parágrafo anterior não for suficiente, poderá ser usado um computador para determinar a estabilidade calculando as localizações das raízes do denominador da função de transferência a malha fechada. Atualmente, até mesmo as calculadoras manuais podem determinar as raízes de um polinômio. Há, contudo, outro método para testar a estabilidade sem ter que calcular as raízes do denominador. Vamos discutir este método na próxima seção.

[1]Deve-se ter cuidado em estabelecer distinção entre resposta natural crescente sem limites e resposta forçada, como rampa e exponenciais, que também crescem sem limites. Os sistemas cujas respostas forçadas tendem a infinito são estáveis desde que suas respostas naturais tendam à zero.

[2]Os coeficientes também podem ser convertidos todos em coeficientes negativos multiplicando-se o polinômio por -1. Esta operação não altera a localização das raízes.

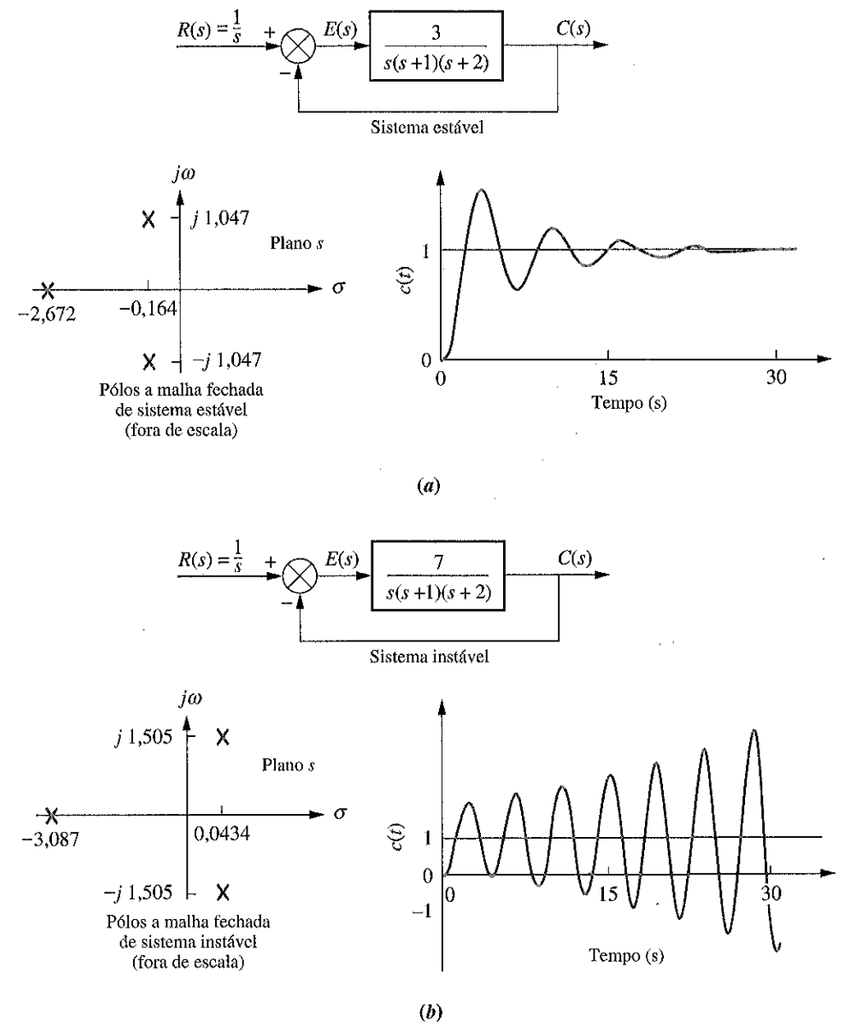


Fig. 6.1 Pólos a malha fechada e natureza da resposta:
a. sistema estável;
b. sistema instável

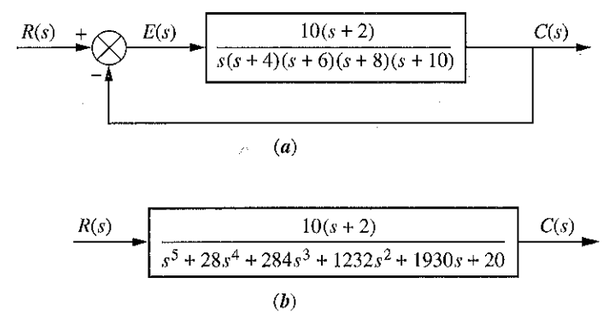


Fig. 6.2 Causa comum de problemas na determinação de pólos a malha fechada:
a. sistema original;
b. sistema equivalente

6.2 Critério de Routh-Hurwitz

Nesta seção vamos aprender um método que fornece informação sobre a estabilidade sem precisar calcular os pólos do sistema a malha fechada. Usando este método, podemos dizer quantos pólos do sistema a malha fechada estão no semiplano da esquerda, no semiplano da direita, e sobre o eixo $j\omega$. (Observe que dissemos *quantos*, e não *onde*.) Podemos determinar o número de pólos em cada seção de plano s, mas não podemos obter suas coordenadas. O método é chamado de *critério de Routh-Hurwitz* para estabilidade (Routh, 1905).

O método requer dois passos: (1) gerar uma tabela de dados chamada de *tabela de Routh*, e (2) interpretar a tabela de Routh para dizer quantos pólos do sistema a malha fechada estão no semiplano da esquerda, no semiplano da direita, e sobre o eixo $j\omega$. Nesta seção vamos construir e interpretar uma tabela de Routh básica. Na próxima seção vamos considerar dois casos especiais que podem ocorrer ao se gerar esta tabela de dados.

Produzindo uma Tabela de Routh Básica

Observe a função de transferência a malha fechada equivalente mostrada na Fig. 6.3. Como estamos interessados nos pólos do sistema, focalizamos nossa atenção no denominador. Primeiro criamos o arranjo tabular mostrado na Tabela 6.1 (tabela de Routh). Começamos rotulando as linhas segundo as potências de s, começando pela da maior potência do denominador da função de transferência a malha fechada, até s^0. Em seguida, iniciamos o preenchimento das duas primeiras linhas da tabela. Começamos a primeira linha com o coeficiente da maior potência de s no denominador seguido dos demais, em ordem salteada. Na segunda linha, começamos com o coeficiente da segunda maior potência em s e incluímos todos os coeficientes que foram omitidos na primeira maior potência de s, todos os outros coeficientes que foram omitidos na primeira.

As demais posições são preenchidas como a seguir. Cada uma das células é preenchida com o valor negativo dos determinantes formados com os elementos das duas linhas anteriores dividido pelo elemento da primeira coluna diretamente acima da linha sendo calculada. A coluna da esquerda do determinante é sempre a primeira coluna das duas linhas anteriores, e a coluna do lado direito do determinante é formada com os elementos da coluna acima e à direita. A tabela se completa quando todas as linhas estiverem concluídas até s^0. A Tabela 6.2 é a tabela de Routh completa. Vejamos um exemplo.

Fig. 6.3 Função de transferência a malha fechada equivalente

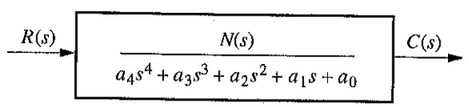


Tabela 6.1 Leiaute inicial da tabela de Routh

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

Tabela 6.2 Tabela de Routh completa

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Exemplo 6.1

Criando uma tabela de Routh

Problema Construa a tabela de Routh relativa ao sistema mostrado na Fig. 6.4(*a*).

Solução O primeiro passo é encontrar o sistema a malha fechada equivalente, porque desejamos testar o denominador desta função, e não o da função de transferência direta, quanto a localização dos pólos. Usando a expressão da retroação, obtemos o sistema equivalente da Fig. 6,4(*b*). O critério de Routh-Hurwitz será aplicado a este denominador. Primeiro rotule as linhas com as potências de s a partir de s^3 até s^0 na coluna vertical, como mostrado na Tabela 6.3. Depois, forme a primeira linha da tabela, usando os coeficientes do denominador da função de transferência a malha fechada. Inicie com o coeficiente da maior potência e salte, alternadamente, todas as outras potências de s. Forme agora a segunda linha com os coeficientes do denominador omitidos no passo anterior. As linhas subseqüentes são formadas com determinantes, como mostrado na Tabela 6.2.

Fig. 6.4
a. sistema com retroação para o Exemplo 6.1;
b. sistema a malha fechada equivalente

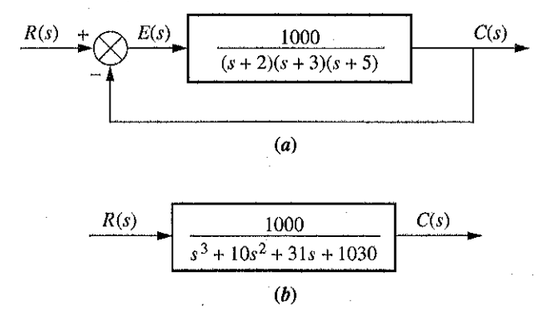


Tabela 6.3 Tabela de Routh completa para o Exemplo 6.1

s^3	1	31	0
s^2	~~10~~ 1	~~1030~~ 103	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

Por conveniência, podemos multiplicar qualquer linha da tabela de Routh por um valor positivo constante, sem afetar as linhas abaixo dela. Isto pode ser demonstrado examinando as expressões completas e verificando que qualquer constante multiplicativa de uma linha anterior é cancelada. A segunda linha da Tabela 6.3, por exemplo, foi multiplicada por 1/10. Veremos adiante que devemos ter cuidado para não multiplicar a linha por uma constante negativa.

Interpretando a Tabela de Routh Básica

Agora que sabemos como gerar a tabela de Routh, vejamos como interpretá-la. A tabela de Routh básica se aplica aos sistemas com pólos nos semiplanos da esquerda e da direita. Sistemas com pólos imaginários e o tipo de tabela de Routh que resulta serão discutidos na próxima seção. Enunciado de maneira simples, o critério de Routh-Hurwitz estabelece que *o número de raízes de um polinômio que estão no semiplano da direita é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna.*

Se a função de transferência a malha fechada tiver todos os pólos no semiplano s da esquerda, o sistema é estável. Assim, um sistema é estável se não ocorrer mudança de sinal na primeira coluna da tabela de Routh. Por exemplo, a Tabela 6.3 tem duas mudanças de sinal na primeira coluna. A primeira mudança de sinal ocorre de 1 na linha s^2 para –72 na linha s^1. A segunda ocorre de –72 na linha s^1 para 103 na linha s^0. Dessa forma, o sistema da Fig. 6.4 é instável, visto que há dois pólos no semiplano s da direita.

Exercício de Avaliação 6.1

Problema: Construa uma tabela de Routh e diga quantas raízes do seguinte polinômio estão no semiplano da direita e no semiplano da esquerda.

$$P(s) = 3s^7 + 9s^6 + 6s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 2s + 6$$

Resposta: Quatro no semiplano da direita (spd); três no semiplano da esquerda (spe). A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Agora que descrevemos como gerar e interpretar uma tabela de Routh básica, vejamos dois casos especiais que podem ocorrer.

6.3 Critério de Routh-Hurwitz: Casos Especiais

Dois casos especiais podem ocorrer: (1) a tabela de Routh algumas vezes terá um zero *somente na primeira coluna* de uma linha, ou (2) a tabela de Routh apresentará uma *linha inteira* de zeros. Examinemos o primeiro caso.

Zero Somente na Primeira Coluna

Se o primeiro elemento de uma linha for zero, a divisão por zero seria necessária para formar a próxima linha. Para evitar isto, atribui-se um valor épsilon, ϵ, em substituição ao zero na primeira coluna. Faz-se, então com que ϵ tenda a zero por valores positivos ou negativos, após o que os sinais dos elementos da primeira coluna podem ser determinados. Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.2

Estabilidade via método do épsilon

Problema Determine a estabilidade da função de transferência a malha fechada,

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3} \tag{6.2}$$

Solução A solução é mostrada na Tabela 6.4. Formamos a tabela de Routh usando o denominador da Eq. (6.2). Comece montando a tabela de Routh de cima para baixo até a linha onde o zero aparece somente na primeira coluna (a linha s^3). Depois, substitua o zero por um número pequeno, ϵ, e complete a tabela. Para começar a interpretação, devemos primeiro admitir um sinal, positivo ou negativo, para a grandeza ϵ. A Tabela 6.5 mostra a primeira coluna da Tabela 6.4, junto com os sinais resultantes para uma escolha de ϵ positivo e de ϵ negativo.

Tabela 6.4 Tabela de Routh completa para o Exemplo 6.2

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}$ ϵ	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

Tabela 6.5 Determinando os sinais da primeira coluna de uma tabela de Routh com zero como primeiro elemento de uma linha

Rótulo	Primeira Coluna	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	+	+
s^4	2	+	+
s^3	$\cancel{0}$ ϵ	+	–
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	–	+
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	+	+
s^0	3	+	+

Se for escolhido ϵ positivo, a Tabela 6.5 mostrará uma mudança de sinal da linha s^3 para a linha s^2, e existirá outra mudança de sinal da linha s^2 para a linha s^1. Portanto, o sistema é instável e tem dois pólos no semiplano da direita.

Alternativamente, podemos escolher ϵ negativo. A Tabela 6.5 mostrará então uma mudança de sinal da linha s^4 para a linha s^3. Uma outra mudança de sinal ocorrerá da linha s^3 para a linha s^2. Nosso resultado é exatamente o mesmo que o resultante da escolha de ϵ positivo. Dessa forma o sistema é instável, com dois pólos no semiplano da direita

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem executando os exercícios com MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa cap6ps1 no Apêndice E. Você aprenderá como calcular os valores das células na tabela de Routh mesmo se a tabela contiver objetos simbólicos, como ϵ. Você verá que a *Toolbox* de Matemática Simbólica e o MATLAB fornecem uma forma alternativa de gerar a tabela de Routh para o Exemplo 6.2.

Um outro método que pode ser usado quando um zero aparece somente na primeira coluna de uma linha é deduzido com base na propriedade de polinômios com raízes recíprocas. A distribuição dessas raízes no plano complexo se mantém igual. Isso se dá porque o recíproco do valor de uma raiz não a desloca para outra região. Dessa forma, se pudermos encontrar o polinômio que tem as raízes recíprocas do original, é possível que a tabela de Routh relativa a esse novo polinômio não tenha zero na primeira coluna. Este método é computacionalmente mais fácil que o método de épsilon já descrito. Mostramos agora que o polinômio que estamos procurando, o que tem as raízes recíprocas, é simplesmente o polinômio original com os coeficientes escritos em ordem inversa (Phillips, 1991).

Admita a equação

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{6.3}$$

Se s for substituído por $1/d$, então d terá raízes que são recíprocas de s. Fazendo esta substituição na Eq. (6.3),

$$\left(\frac{1}{d}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{d}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{d}\right) + a_0 = 0 \tag{6.4}$$

Fatorando $(1/d)^n$,

$$\left(\frac{1}{d}\right)^n \left[1 + a_{n-1}\left(\frac{1}{d}\right)^{-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{d}\right)^{(1-n)} + a_0\left(\frac{1}{d}\right)^{-n}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{d}\right)^n [1 + a_{n-1}d + \cdots + a_1 d^{(n-1)} + a_0 d^n] = 0 \tag{6.5}$$

Dessa forma, o polinômio com raízes recíprocas é um polinômio com os coeficientes em ordem inversa. Vamos refazer o exemplo anterior para mostrar a vantagem computacional deste método.

Tabela 6.6 Tabela de Routh para o Exemplo 6.3

s^5	3	6	2
s^4	5	3	1
s^3	4,2	1,4	
s^2	1,33	1	
s^1	−1,75		
s^0	1		

Exemplo 6.3

Estabilidade via coeficientes na inversa

Problema Determine a estabilidade da função de transferência a malha fechada,

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3} \tag{6.6}$$

Solução Primeiro escreva um polinômio que tenha raízes recíprocas do denominador da Eq. (6.6). Pela nossa discussão, este polinômio é formado escrevendo-se o denominador da Eq. (6.6) em ordem inversa das potências de s. Portanto,

$$D(s) = 3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1 \tag{6.7}$$

Formamos a tabela de Routh como mostrada na Tabela 6.6 usando a Eq. (6.7). Como há duas mudanças de sinal, o sistema é instável e possui dois pólos no semiplano da direita. Este é o mesmo resultado obtido no Exemplo 6.2. Note que a Tabela 6.6 não tem um zero na primeira coluna.

Linha Completa de Zeros

Vejamos agora o segundo caso especial. Algumas vezes, ao construir uma tabela de Routh, descobrimos uma linha completa de zeros porque há um polinômio par como fator do polinômio original. Este caso deve ser manipulado de modo diferente do caso de um zero somente na primeira coluna de uma linha. Vejamos um exemplo que demonstra como construir e interpretar a tabela de Routh quando estiver presente uma linha completa de zeros.

Exemplo 6.4

Estabilidade via tabela de Routh com linha de zeros

Problema Determine o número de pólos no semiplano da direita da função de transferência a malha fechada,

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56} \tag{6.8}$$

Solução Inicie formando a tabela de Routh relativa ao denominador da Eq. (6.8) (veja a Tabela 6.7). Multiplicamos toda a segunda linha por 1/7, por conveniência. Paramos na terceira linha, uma vez que a linha completa é formada de zeros, e usamos o procedimento seguinte. Primeiro, retornamos à linha imediatamente acima da linha de zeros e formamos um polinômio auxiliar, usando os elementos dessa linha como coeficientes. O polinômio começará com a potência de s correspondente à linha imediatamente acima da linha de zeros e continuará salteando alternadamente as outras potências de s. Dessa forma, o polinômio formado neste exemplo é

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8 \tag{6.9}$$

Depois, derivamos o polinômio com relação a s e obtemos

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0 \tag{6.10}$$

Tabela 6.7 Tabela de Routh para o Exemplo 6.4

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

Finalmente, usamos os coeficientes da Eq. (6.10) para substituir a linha de zeros. Novamente, por conveniência, a terceira linha é multiplicada por 1/4 depois de substituir os zeros.

O restante da tabela é formado de modo direto seguindo a estrutura padrão mostrada na Tabela 6.2. A Tabela 6.7 mostra que todos os elementos na primeira coluna são positivos. Portanto, não há pólos no semiplano da direita.

Vejamos um pouco mais sobre o caso que resulta em uma linha completa de zeros. Uma linha completa de zeros aparecerá na tabela de Routh quando um polinômio estritamente par ou estritamente ímpar for um fator do polinômio original. Por exemplo, $s^4 + 5s^2 + 7$ é um polinômio par; possui somente potências pares de s. Os polinômios pares possuem somente raízes que são simétricas em relação à origem.[3] Esta simetria pode ocorrer sob diversas situações quanto ao posicionamento das raízes: (1) raízes simétricas e reais, (2) raízes simétricas e imaginárias, (3) raízes quadrantais. A Fig. 6.5 mostra exemplos destes casos. Cada caso ou combinação destes casos vai gerar um polinômio par.

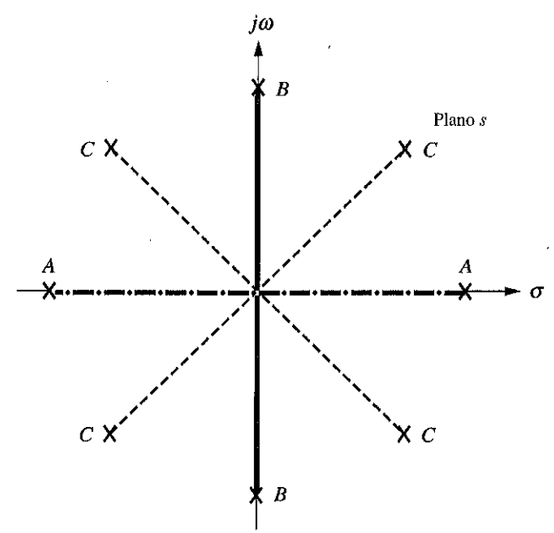


Fig. 6.5 Localização das raízes para a geração de polinômios pares: *A*, *B*, *C* ou qualquer das combinações

A: Raízes reais e simétricas em relação à origem
B: Raízes imaginárias e simétricas em relação à origem
C: Raízes quadrantais e simétricas em relação à origem

[3] O polinômio $s^5 + 5s^3 + 7s$ é um exemplo de polinômio ímpar; possui unicamente potências ímpares de s. Os polinômios ímpares são o produto de um polinômio par por uma potência ímpar de s. Portanto, o termo constante de um polinômio ímpar estará sempre faltando.

É este polinômio par o responsável pelo aparecimento da linha de zeros. Dessa forma, uma linha de zeros nos diz que existe um polinômio par cujas raízes são simétricas em relação à origem. Algumas dessas raízes podem estar sobre o eixo $j\omega$. Por outro lado, visto que as raízes $j\omega$ são simétricas em relação à origem, se não tivermos uma linha de zeros não poderemos ter raízes $j\omega$.

Uma outra característica da tabela de Routh para o caso em questão é que a linha anterior à linha de zeros contém o polinômio par que é fator do polinômio original. Finalmente, tudo a partir da linha contendo o polinômio par até o final da tabela de Routh é um teste somente do polinômio par. Coloquemos estes fatos reunidos em um exemplo.

Exemplo 6.5

Distribuição de pólos através da tabela de Routh com linha de zeros

Problema Para a função de transferência,

$$T(s) = \frac{20}{s^8 + s^7 + 12s^6 + 22s^5 + 39s^4 + 59s^3 + 48s^2 + 38s + 20} \tag{6.11}$$

diga quantos pólos estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda, e no eixo $j\omega$.

Tabela 6.8 Tabela de Routh para o Exemplo 6.5

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	-10 -1	-20 -2	10 1	20 2	0
s^5	20 1	60 3	40 2	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	0 4 2	0 6 3	0 0 0	0	0
s^2	$\frac{3}{2}$ 3	2 4	0	0	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s^0	4	0	0	0	0

Solução Use o denominador da Eq. (6.11) e forme a tabela de Routh segundo a Tabela 6.8. Por conveniência, a linha s^6 é multiplicada por 1/10, e a linha de s^5 é multiplicada por 1/20. Na linha s^3, obtém-se uma linha de zeros. Retornando uma linha acima de s^4, extraímos o polinômio, $P(s)$, como

$$P(s) = s^4 + 3s^2 + 2 \tag{6.12}$$

Este polinômio par dividirá o denominador da Eq. (6.11); por conseguinte, é um fator. Fazendo a derivada com relação a s para obter os coeficientes que irão substituir a linha de zeros na linha s^3, encontramos

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 6s + 0 \tag{6.13}$$

Substitua a linha de zeros por 4, 6 e 0 e multiplique a linha por 1/2 por conveniência. Finalmente, continue a tabela até a linha de s^0, usando o procedimento padrão. Como interpretaremos agora a tabela de Routh?

Como todos os elementos a partir do polinômio par na linha s^4 para baixo até a linha s^0 são um teste do polinômio par, começamos a tirar algumas conclusões sobre as raízes do polinômio par. Não há mudanças de sinal a partir da linha s^4 até a linha s^0. Dessa forma, o polinômio par não tem pólos no semiplano da direita. Uma vez que não existem pólos no semiplano da direita, não há pólos no semiplano da esquerda devido ao requisito de simetria. Portanto, o polinômio par, Eq. (6.12), deve ter todos os quatro pólos sobre o eixo $j\omega$.[4] Estes resultados estão resumidos na primeira coluna da Tabela 6.9.

Tabela 6.9 Resumo da localização de pólos para o Exemplo 6.5

Par (quarta ordem)	Resto (quarta ordem)	Total (oitava ordem)
0 spd	2 spd	2 spd
0 spe	2 spe	2 spe
4 $j\omega$	0 $j\omega$	4 $j\omega$

Nota: spd = semiplano da direita, spe = semiplano da esquerda.

As raízes restantes do polinômio total são calculadas a partir da linha s^8 para baixo até a linha s^4. Percebemos duas mudanças de sinal: uma da linha s^7 para a linha s^6 e outra da linha s^6 para a linha s^5. Assim, o resto do polinômio deve ter duas raízes no semiplano da direita. Estes resultados estão incluídos na Tabela 6.9 na coluna **Resto**. A contagem final é a soma das raízes de cada componente, o polinômio par e o resto do polinômio total, como mostrado na coluna **Total** da Tabela 6.9. Assim, o sistema tem dois pólos no semiplano da direita, dois pólos no semiplano da esquerda, e quatro pólos no eixo $j\omega$; é instável devido aos pólos no semiplano da direita.

Resumiremos agora o que aprendemos sobre polinômios que geram linhas completas de zeros na tabela de Routh. Estes polinômios têm um fator par com raízes simétricas em relação à origem. O polinômio par aparece na tabela de Routh na linha imediatamente acima da linha de zeros. Todos os elementos na tabela a partir da linha do polinômio par até o final da tabela aplicam-se somente ao polinômio par. Portanto, o número de mudanças de sinal desde a linha do polinômio par até o final da tabela é igual ao número de raízes no semiplano da direita do polinômio par. Por causa da simetria das raízes em relação à origem, o polinômio par deve ter o mesmo número de raízes no semiplano da esquerda que o de raízes no semiplano da direita. Deduzindo as raízes do semiplano da direita e do semiplano da esquerda do número total, saberemos quantas raízes restantes devem estar sobre o eixo $j\omega$.

Todos os elementos da tabela de Routh do início desta até a linha do polinômio par aplicam-se somente ao fator restante do polinômio original depois que o polinômio par for extraído. Para este fator, o número de mudanças de sinal, do começo da tabela até a linha do polinômio par, é igual ao número de raízes no semiplano da direita. As raízes restantes são raízes no semiplano da esquerda. Não pode haver raízes $j\omega$ incluídas no resto do polinômio.

Exercício de Avaliação 6.2

Problema: Use o critério de Routh-Hurwitz para saber quantos pólos do seguinte sistema a malha fechada, $T(s)$, estão no spd, no spe e sobre o eixo $j\omega$.

$$T(s) = \frac{s^3 + 7s^2 - 21s + 10}{s^6 + s^5 - 6s^4 + 0s^3 - s^2 - s + 6}$$

Resposta: Dois no spd, dois no spe e dois sobre o eixo $j\omega$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Demonstremos a utilidade do critério de Routh-Hurwitz com alguns exemplos adicionais.

6.4 Critério de Routh-Hurwitz: Exemplos Adicionais

As duas seções anteriores introduziram o critério de Routh-Hurwitz. Agora precisamos demonstrar a aplicação do método a um certo número de problemas de análise e de projeto.

Exemplo 6.6

Routh-Hurwitz Padrão

Problema Determine o número de pólos no semiplano da esquerda, no semiplano da direita e no eixo $j\omega$ relativos ao sistema da Fig. 6.6.

[4]Uma condição necessária para que haja estabilidade é que as raízes $j\omega$ possuam multiplicidade um. O polinômio par deverá ser verificado quanto à existência de raízes $j\omega$ múltiplas. Neste caso, a existência de raízes $j\omega$ múltiplas conduziria a um polinômio de quarta ordem como um quadrado perfeito. Como a Eq. (6.12) não é um quadrado perfeito, as quatro raízes $j\omega$ são distintas.

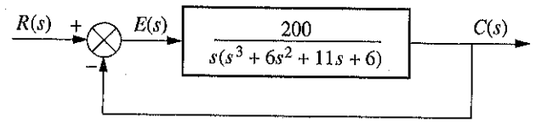


Fig. 6.6 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 6.6

Solução Primeiro, determine a função de transferência a malha fechada como

$$T(s) = \frac{200}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 200} \tag{6.14}$$

Tabela 6.10 Tabela de Routh para o Exemplo 6.6

s^4	1	11	200
s^3	~~6~~ 1	~~6~~ 1	
s^2	~~10~~ 1	~~200~~ 20	
s^1	−19		
s^0	20		

A tabela de Routh relativa ao denominador da Eq. (6.14) é mostrada na Tabela 6.10. Para maior clareza, deixamos em branco a maioria das células com zeros. Na linha s^1 há um coeficiente negativo; dessa forma, temos duas mudanças de sinal. O sistema é instável, visto que tem dois pólos no semiplano da direita e dois pólos no semiplano da esquerda. O sistema não pode ter pólos em $j\omega$, pois não apareceu nenhuma linha de zeros na tabela de Routh.

O próximo exemplo demonstra a ocorrência de um zero somente na primeira coluna de uma linha.

Exemplo 6.7

Routh-Hurwitz com zero na primeira coluna

Problema Determine o número de pólos no semiplano da esquerda, no semiplano da direita e no eixo $j\omega$ para o sistema da Fig. 6.7.

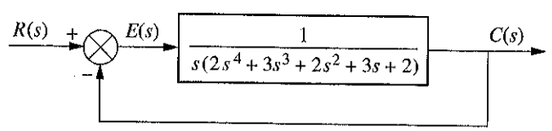


Fig. 6.7 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 6.7

Solução A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{1}{2s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \tag{6.15}$$

Forme a tabela de Routh mostrada na Tabela 6.11 usando o denominador da Eq. (6.15). Um zero aparece na primeira coluna da linha s^3. Como a linha completa não é zero, substitua simplesmente o zero por uma quantidade pequena, ϵ, e continue a tabela. Fazendo ϵ uma quantidade positiva pequena, descobrimos que o primeiro termo da linha s^2 é negativo. Dessa forma, existem duas mudanças de sinal, e o sistema é instável, com dois pólos no semiplano da direita. Os pólos restantes estão no semiplano da esquerda.

Podemos também usar a abordagem alternativa, onde produzimos um polinômio cujas raízes são as recíprocas do original. Usando o denominador da Eq. (6.15), formamos um polinômio escrevendo os coeficientes em ordem inversa:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + 2 \tag{6.16}$$

Tabela 6.11 Tabela de Routh para o Exemplo 6.7

s^5	2	2	2
s^4	3	3	1
s^3	~~0~~ ϵ	$\frac{4}{3}$	
s^2	$\frac{3\epsilon - 4}{\epsilon}$	1	
s^1	$\frac{12\epsilon - 16 - 3\epsilon^2}{9\epsilon - 12}$		
s^0	1		

Tabela 6.12 Tabela de Routh alternativa para o Exemplo 6.7

s^5	1	3	3
s^4	2	2	2
s^3	2	2	
s^2	~~0~~ ϵ	2	
s^1	$\frac{2\epsilon - 4}{\epsilon}$		
s^0	2		

A tabela de Routh para este polinômio é mostrada na Tabela 6.12. Infelizmente, neste caso também produzimos um zero somente na primeira coluna da linha s^2. Contudo, esta tabela é mais fácil de trabalhar do que a Tabela 6.11. A Tabela 6.12 conduz aos mesmos resultados que a Tabela 6.11 — dois pólos no semiplano da esquerda e dois pólos no semiplano da direita. O sistema é instável.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap6p1 no Apêndice B. Você aprenderá como executar a redução de diagrama de blocos para encontrar $T(s)$ seguido pelo cálculo dos pólos do sistema a malha fechada para determinar a estabilidade. Este exercício usa o MATLAB para fazer o Exemplo 6.7.

No próximo exemplo vamos ver aparecer uma linha completa de zeros juntamente com a possibilidade de raízes imaginárias.

Exemplo 6.8

Routh-Hurwitz com linha de zeros

Problema Determine o número de pólos no semiplano da esquerda, no semiplano da direita e no eixo $j\omega$ para o sistema da Fig. 6.8. Chegue a conclusões sobre a estabilidade do sistema a malha fechada.

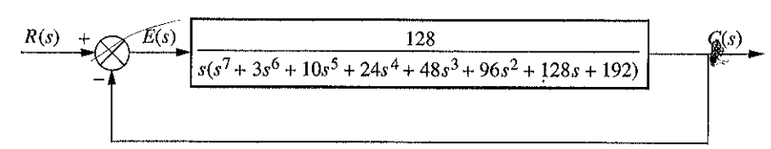


Fig. 6.8 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 6.8

Solução A função de transferência a malha fechada para o sistema da Fig. 6.8 é

$$T(s) = \frac{128}{s^8 + 3s^7 + 10s^6 + 24s^5 + 48s^4 + 96s^3 + 128s^2 + 192s + 128} \tag{6.17}$$

Usando o denominador, construa a tabela de Routh, como mostrado na Tabela 6.13. Uma linha de zeros aparece na linha s^5. Em conseqüência, o denominador da função de transferência a malha fechada deve ter um polinômio par como fator. Retorne à linha s^6 e forme o polinômio par:

$$P(s) = s^6 + 8s^4 + 32s^2 + 64 \tag{6.18}$$

Derive este polinômio com relação a s para formar os coeficientes que substituirão a linha de zeros:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 6s^5 + 32s^3 + 64s + 0 \tag{6.19}$$

Tabela 6.13 Tabela de Routh para o Exemplo 6.8

s^8	1	10	48	128	128
s^7	$\cancel{3}$ 1	$\cancel{24}$ 8	$\cancel{96}$ 32	$\cancel{192}$ 64	
s^6	$\cancel{2}$ 1	$\cancel{16}$ 8	$\cancel{64}$ 32	$\cancel{128}$ 64	
s^5	$\cancel{0}$ $\cancel{6}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{32}$ 16	$\cancel{0}$ $\cancel{64}$ 32	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0	
s^4	$\frac{8}{3}$ 1	$\frac{64}{3}$ 8	$\cancel{64}$ 24		
s^3	$\cancel{-8}$ -1	$\cancel{-40}$ -5			
s^2	$\cancel{3}$ 1	$\cancel{24}$ 8			
s^1	3				
s^0	8				

Troque a linha de zeros na linha s^5 pelos coeficientes da Eq. (6.19) e multiplique tudo por 1/2, por conveniência. Em seguida, complete a tabela.

Observamos que há duas mudanças de sinal entre a linha s^6 do polinômio par e a linha no final da tabela. Portanto, o polinômio par tem dois pólos no semiplano da direita. Por causa da simetria em relação à origem, o polinômio par deve ter um número igual de pólos no semiplano da esquerda. Então, o polinômio par tem dois pólos no semiplano da esquerda. Visto que o polinômio par é de sexta ordem, os dois pólos restantes devem estar sobre o eixo $j\omega$.

Tabela 6.14 Resumo da localização de pólos para o Exemplo 6.8

Par (sexta ordem)	Resto (segunda ordem)	Total (oitava ordem)
7 spd	0 spd	2 spd
2 spe	2 spe	4 spe
$2j\omega$	$0j\omega$	$2j\omega$

Nota: spd = semiplano da direita, spe = semiplano da esquerda.

Não há mudança de sinal no começo da tabela até o polinômio par na linha s^6. Então, o resto do polinômio não tem pólos no semiplano da direita. Os resultados estão resumidos na Tabela 6.14. O sistema tem dois pólos no semiplano da direita, quatro pólos no semiplano da esquerda, e dois pólos no eixo $j\omega$, os quais são de multiplicidade de um. O sistema a malha fechada é instável por causa dos pólos no semiplano da direita.

O critério de Routh-Hurwitz fornece a prova realista de que mudanças no valor do ganho de um sistema de controle com retroação acarretam diferenças na resposta transitória devidas a alterações na localização dos pólos a malha fechada. O próximo exemplo demonstra este conceito. Veremos que para os sistemas de controle como os mostrados na Fig. 6.9, as variações de ganho podem mover pólos de regiões estáveis do plano para o eixo $j\omega$ e em seguida para o interior do semiplano da direita.

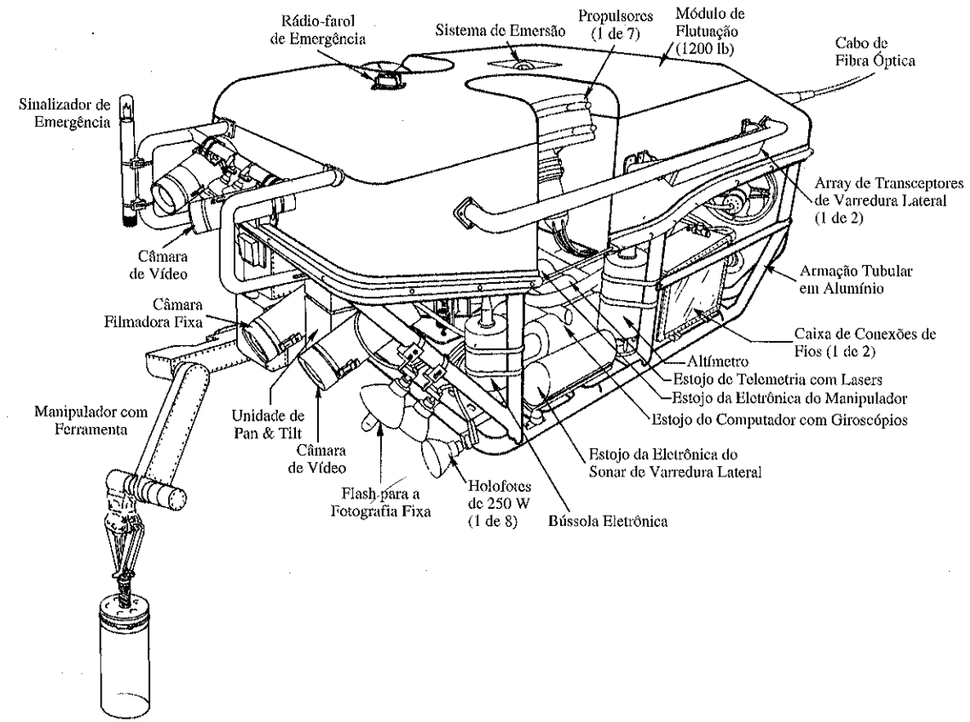


Fig. 6.9 *Jason* é um veículo subaquático controlado remotamente que foi usado para explorar os destroços do *Lusitânia*. O manipulador e a câmara constituem alguns dos sistemas de controle do veículo.

Exemplo 6.9

Projeto de estabilidade via Routh-Hurwitz

Problema Determine a faixa de valores do ganho, K, para o sistema da Fig. 6.10 que fará com que o sistema a seja estável, instável e marginalmente estável. Suponha $K > 0$.

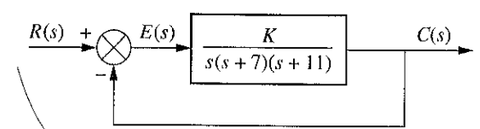


Fig. 6.10 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 6.9

Solução Primeiro, determine a função de transferência a malha fechada como

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K} \tag{6.20}$$

Em seguida, forme a tabela de Routh, como mostrado na Tabela 6.15.

Tabela 6.15 Tabela de Routh para o Exemplo 6.9

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

Uma vez que K é considerado positivo, percebemos que todos os elementos na primeira coluna são sempre positivos exceto o da linha s^1. Este elemento pode ser positivo, zero, ou negativo, dependendo do valor de K. Se $K < 1386$, todos os termos na primeira coluna serão positivos, e portanto não haverá mudança de sinal, o sistema terá três pólos no semiplano da esquerda e será *estável*.

Se $K > 1386$, o termo s^1 na primeira coluna será negativo. Haverá duas mudanças de sinal, indicando que o sistema tem dois pólos no semiplano da direita e um pólo no semiplano da esquerda, o que torna o sistema *instável*.

Se $K = 1386$, teremos uma linha completa de zeros, o que poderia significar pólos $j\omega$. Retornando à linha de s^2 e trocando K por 1386, formaremos o polinômio par:

$$P(s) = 18s^2 + 1386 \tag{6.21}$$

Derivando com relação a s, temos

$$\frac{dP(s)}{ds} = 36s + 0 \tag{6.22}$$

Substituindo a linha de zeros pelos coeficientes da Eq. (6.22), obteremos a tabela de Routh-Hurwitz mostrada na Tabela 6.16 para o caso de $K = 1386$.

Tabela 6.16 Tabela de Routh para o Exemplo 6.9 com $K = 1386$

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	~~0~~ 36	
s^0	1386	

Como não existe mudança de sinal do polinômio par (linha s^2) até o fim da tabela, o polinômio par tem suas duas raízes sobre o eixo $j\omega$ com multiplicidade um. Como não há mudança de sinal acima do polinômio par, a raiz restante está no semiplano da esquerda. Em conseqüência, o sistema é *marginalmente estável*.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB deverão executar agora o programa cap6p2 no Apêndice B. Você aprenderá como construir um laço para determinar a faixa de valores que leva à estabilidade. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 6.9.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem executando os exercícios com MATLAB e quiserem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica devem executar agora o programa cap6ps2 no Apêndice E. Você aprenderá como usar a *Toolbox* de Matemática Simbólica para calcular os valores das células em uma tabela de Routh mesmo quando a tabela contém objetos simbólicos, como um ganho variável, K. Você verá que a *Toolbox* de Matemática Simbólica e o MATLAB conduzem a uma forma alternativa de resolver o Exemplo 6.9.

O critério de Routh-Hurwitz é freqüentemente usado em aplicações limitadas à fatoração de polinômios contendo fatores pares. Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.10

Fatorando através de Routh-Hurwitz

Problema Fatore o polinômio

$$s^4 + 3s^3 + 30s^2 + 30s + 200 \tag{6.23}$$

Solução Forme a tabela de Routh mostrada na Tabela 6.17. Notamos que a linha de s^1 é uma linha de zeros. Forme agora o polinômio par na linha de s^2:

$$P(s) = s^2 + 10 \tag{6.24}$$

Tabela 6.17 Tabela de Routh para o Exemplo 6.10

s^4	1	30	200
s^3	~~3~~ 1	~~30~~ 10	
s^2	~~20~~ 1	~~200~~ 10	
s^1	~~0~~ 2	~~0~~ 0	
s^0	10		

Este polinômio é derivado em relação a s para completar a tabela de Routh. Contudo, como ele é um fator do polinômio original da Eq. (6.23), dividindo a Eq. (6.23) pela Eq. (6.24) resulta o outro fator, $(s^2 + 3s + 20)$. Portanto,

$$\begin{aligned} s^4 + 3s^3 + 30s^2 + 30s + 200 &= (s^2 + 10)(s^2 + 3s + 20) \\ &= (s + j3{,}1623)(s - j3{,}1623) \\ &\quad \times (s + 1{,}5 + j4{,}213)(s + 1{,}5 - j4{,}213) \end{aligned} \tag{6.25}$$

Exercício de Avaliação 6.3

Problema: Para um sistema com retroação unitária com função de transferência no canal direto

$$G(s) = \frac{K(s + 20)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

determine a faixa de valores de K que faz o sistema ser estável.

Resposta: $0 < K < 2$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Espaço de Estados

6.5 Estabilidade no Espaço de Estados

Até este ponto, examinamos a estabilidade do ponto de vista do plano s. Agora vamos ver a estabilidade pela perspectiva do espaço de estados. Na Seção 4.10, mencionamos que os valores dos pólos do sistema são iguais aos autovalores da matriz de sistema, $\mathbf{A}$. Estabelecemos que os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ eram soluções da equação $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, que também levava aos pólos da função de transferência. Os autovalores apareceram novamente na Seção 5.8, onde foram formalmente definidos e usados para diagonalizar uma matriz. Mostremos agora formalmente que os autovalores e os pólos do sistema têm os mesmos valores.

Revendo a Seção 5.8, os autovalores da matriz, $\mathbf{A}$, são valores de λ que permitem uma solução não-trivial (diferente de $\mathbf{0}$) para $\mathbf{x}$ na equação

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \tag{6.26}$$

Para resolver os valores de λ que de fato permitem uma solução para $\mathbf{x}$, reorganizamos a Eq. (6.26) como se segue:

$$\lambda\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{6.27}$$

ou

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.28}$$

Resolvendo para $\mathbf{x}$ resulta

$$\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} \tag{6.29}$$

ou

$$\mathbf{x} = \frac{\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{0} \tag{6.30}$$

Vemos que todas as soluções serão o vetor nulo, exceto para o caso de zero no denominador. Uma vez que esta é a única condição onde os elementos de **x** serão 0/0, ou indeterminados, este é o único caso onde é possível uma solução diferente de zero.

Os valores de λ são calculados forçando o denominador a zero:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{6.31}$$

Esta equação determina os valores de λ para os quais existe uma solução diferente de zero para **x** na Eq. (6.26). Na Seção 5.8 definimos **x** como *autovetores* e os valores de λ como os autovalores da matriz **A**.

Relacionemos agora os autovalores da matriz de sistema, **A**, aos pólos do sistema. No Cap. 3 deduzimos a equação da função de transferência do sistema a partir das equações de estado [Eq. (3.73)]. A função de transferência do sistema tem $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ no denominador devido à presença de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Por conseguinte,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{6.32}$$

é a equação característica do sistema a partir da qual os pólos podem ser obtidos.

Uma vez que as Eqs. (6.31) e (6.32) são idênticas, com exceção da mudança de nome da variável, concluímos que os autovalores da matriz **A** são idênticos aos pólos do sistema. Assim, podemos determinar a estabilidade de um sistema representado no espaço de estados encontrando os autovalores da matriz de sistema, **A**, e determinando suas localizações no plano s.

Exemplo 6.11

Estabilidade no espaço de estados

Problema Dado o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6.33a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} \tag{6.33b}$$

descubra quantos pólos estão no semiplano da esquerda, no semiplano da direita e sobre o eixo $j\omega$.

Solução Forme primeiro $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Agora encontre o $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 - 6s^2 - 7s - 52 \tag{6.35}$$

Usando este polinômio, forme a tabela de Routh, como mostrado na Tabela 6.18.

Tabela 6.18 Tabela de Routh para o Exemplo 6.11

s^3	1	-7
s^2	$\cancel{-6}\ -3$	$\cancel{-52}\ -26$
s^1	$-\frac{\cancel{47}}{3}\ -1$	$\cancel{0}\ 0$
s^0	-26	

Como existe uma mudança de sinal na primeira coluna, o sistema tem um pólo no semiplano da direita e dois pólos no semiplano da esquerda. É, portanto, instável.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB deverão executar agora o programa cap6p3 no Apêndice B. Você aprenderá como determinar a estabilidade de um sistema representado no espaço de estados obtendo os autovalores da matriz de sistema. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 6.11.

Exercício de Avaliação 6.4

Problema: Para o seguinte sistema representado no espaço de estados, descubra quantos pólos estão no semiplano da esquerda, no semiplano da direita e sobre o eixo $j\omega$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}$$

Resposta: Dois no spd e um no spe.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção, calculamos a estabilidade dos sistemas de controle com retroação a partir da perspectiva do espaço de estados. Como os pólos a malha fechada e os autovalores do sistema são os mesmos, o requisito de estabilidade de um sistema representado no espaço de estados diz que os autovalores não podem estar no semiplano da direita do plano s nem serem múltiplos sobre o eixo $j\omega$.

Podemos obter os autovalores das equações de estado sem ter de primeiro convertê-las à função de transferência para achar os pólos: a equação, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, fornece os autovalores diretamente. Se $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, um polinômio em s, não puder ser fatorado facilmente, podemos aplicar o critério de Routh-Hurwitz para calcular quantos autovalores estão em cada região do plano s.

Resumiremos agora este capítulo, primeiro com estudos de casos e em seguida com um resumo escrito. Nossos estudos de caso englobam o sistema de controle de posição da antena e o UFSS. A estabilidade é importante para esses sistemas como o é o sistema mostrado na Fig. 6.11.

Fig. 6.11 O Robô FANUC M-400 pode ser configurado com 4 ou 5 graus de liberdade. É visto aqui movimentando e empilhando caixas.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de Antena: Projeto de Estabilidade por Intermédio do Ganho

Este capítulo tratou dos elementos de estabilidade. Vimos que sistemas estáveis têm seus pólos a malha fechada no semiplano esquerdo do plano s. À medida que o ganho de malha seja variado, as localizações dos pólos também o serão, criando a possibilidade de que os pólos possam se deslocar para o interior do semiplano direito do plano s, o que resulta em instabilidade. O ajuste apropriado do ganho é essencial para a estabilidade dos sistemas a malha fechada. O estudo de caso a seguir mostra o ajuste adequado do ganho de malha para assegurar a estabilidade.

Problema Seja o sistema de controle de posição de uma antena em azimute mostrado na contracapa da frente (Configuração 1). Determine a faixa de valores do ganho do pré-amplificador necessária para manter o sistema a malha fechada estável.

Solução A função de transferência a malha fechada foi deduzida nos estudos de caso do Cap. 5 como:

$$T(s) = \frac{6{,}63K}{s^3 + 101{,}71s^2 + 171s + 6{,}63K} \tag{6.36}$$

Usando o denominador, crie a tabela de Routh mostrada na Tabela 6.19. A terceira linha da tabela mostra que uma linha de zeros ocorre se $K = 2623$. Este valor de K torna o sistema marginalmente estável. Contudo, não haverá mudanças de sinal na primeira coluna se $0 < K < 2623$. Concluímos que, para estabilidade, $0 < K < 2623$.

Tabela 6.19 Tabela de Routh para o estudo de caso do controle de antena

s^3	1	171
s^2	101,71	$6{,}63K$
s^1	$17392{,}41 - 6{,}63K$	0
s^0	$6{,}63K$	

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Vá ao sistema de controle de posição de uma antena em azimute mostrado na contracapa da frente (Configuração 2). Determine a faixa de valores de ganho do pré-amplificador capaz de manter o sistema a malha fechada estável.

Projeto

Veículo UFSS: Projeto de Estabilidade por Intermédio do Ganho

Para este estudo de caso, retornamos ao veículo UFSS e estudamos a estabilidade do sistema de controle de arfagem, usado para controle de profundidade. Especificamente, encontramos a faixa de valores do ganho de arfagem que mantém a malha de controle de arfagem estável.

Problema A malha de controle de arfagem do veículo UFSS (Johnson, 1980) é mostrada na contracapa traseira. Faça $K_2 = 1$ e determine a faixa de valores de K_1 que assegura que o sistema de controle de arfagem a malha fechada é estável.

Solução O primeiro passo é reduzir o sistema de controle de arfagem a uma única função de transferência a malha fechada. A função de transferência do canal direto equivalente, $G_e(s)$, é

$$G_e(s) = \frac{0{,}25K_1(s + 0{,}435)}{s^4 + 3{,}456s^3 + 3{,}457s^2 + 0{,}719s + 0{,}0416} \tag{6.37}$$

Com retroação unitária, a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, é

$$T(s) = \frac{0{,}25K_1(s + 0{,}435)}{s^4 + 3{,}456s^3 + 3{,}457s^2 + (0{,}719 + 0{,}25K_1)s + (0{,}0416 + 0{,}109K_1)} \tag{6.38}$$

O denominador da Eq. (6.38) é agora usado para formar a tabela de Routh mostrada da Tabela 6.20.

Tabela 6.20 Tabela de Routh para o estudo de caso do veículo UFSS

s^4	1	3,457	$0{,}0416 + 0{,}109K_1$
s^3	3,456	$0{,}719 + 0{,}25K_1$	
s^2	$11{,}228 - 0{,}25K_1$	$0{,}144 + 0{,}377K_1$	
s^1	$\dfrac{-0{,}0625K_1^2 + 1{,}324K_1 + 7{,}575}{11{,}228 - 0{,}25K_1}$		
s^0	$0{,}144 + 0{,}377K_1$		

Nota: Observe que algumas linhas foram multiplicadas por um valor constante positivo, para simplificar as contas.

Observando a primeira coluna, as linha s^4 e s^3 são positivas. Dessa forma, todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos para haver estabilidade. Para que a primeira coluna da linha s^2 seja positiva, $-\infty < K_1 < 44{,}91$. Para que a primeira coluna da linha s^1 seja positiva, o numerador deve ser positivo, visto que o denominador é positivo com base no passo anterior. A solução para o termo do segundo grau no numerador fornece raízes de $K_1 = -4{,}685$ e 25,87. Em conseqüência, para que o numerador seja positivo, $-4{,}685 < K_1 < 25{,}87$. Finalmente, para que a primeira coluna da linha s^0 seja positiva, $-0{,}382 < K_1 < \infty$. Usando todas as três condições, a estabilidade será assegurada se $-0{,}382 < K_1 < 25{,}87$.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seu conhecimento dos objetivos deste capítulo: para o sistema de controle de rumo do veículo UFSS (Johnson, 1980) mostrado na contracapa de trás e apresentado no desafio do estudo de caso do UFSS no Cap. 5, faça o seguinte:

a. Determine a faixa de valores de ganho da malha de controle de rumo que assegura a estabilidade do veículo. Faça $K_2 = 1$.

MATLAB

b. Repita (a) usando o MATLAB.

Em nossos estudos de caso, calculamos as faixas de valores de ganho para assegurar a estabilidade. O leitor deve estar ciente de que, embora estas faixas resultem em estabilidade, o ajuste do ganho dentro destes limites pode não fornecer as características desejadas para a resposta transitória ou para o erro de estado estacionário. Nos Caps. 9 e 11 vamos explorar as técnicas de projeto, que não a do ajuste de ganho puro e simples, as quais propiciam maior flexibilidade na obtenção das características desejadas. Finalizamos este capítulo com um resumo dos conceitos de estabilidade.

Sumário

Neste capítulo exploramos os conceitos da estabilidade do sistema tanto do ponto de vista tradicional quanto do enfoque no espaço de estados. Descobrimos que, para os sistemas lineares, a estabilidade é baseada na resposta natural que tende a zero quando o tempo tende a infinito. Por outro lado, se a resposta natural crescer sem limites, a resposta forçada é dominada pela resposta natural, e assim perdemos o controle. Esta condição é conhecida como *instabilidade*. Há uma terceira possibilidade: a resposta natural pode não decair nem crescer sem limites, mas oscilar. Neste caso, o sistema é dito *marginalmente estável*.

Também usamos uma definição alternativa de estabilidade onde a resposta natural não é referida explicitamente. Esta definição é baseada na resposta total e diz que um sistema é estável se a toda entrada limitada corresponder uma saída limitada (BIBO) e instável se alguma entrada limitada produzir uma saída ilimitada.

Matematicamente, a estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo pode ser determinada com base na localização dos pólos a malha fechada:

- Se os pólos estiverem somente no semiplano da esquerda, o sistema é estável.
- Se houver algum pólo no semiplano da direita, o sistema é instável.
- Se os pólos estiverem no eixo $j\omega$ e no semiplano da esquerda, o sistema é marginalmente estável desde que os pólos sobre o eixo $j\omega$ sejam de multiplicidade unitária; será instável se houver pólos múltiplos em $j\omega$.

Infelizmente, embora os pólos a malha aberta possam ser conhecidos, sabemos que nos sistemas de ordem superior é difícil encontrar os pólos a malha fechada sem o uso de um computador.

O *critério de Routh-Hurwitz* nos permite saber quantos pólos estão em cada uma das seções do plano s sem fornecer as coordenadas dos pólos. Saber tão-somente que há pólos no semiplano da direita é o suficiente para determinar que um sistema é instável. Sob certas condições limitadas, quando um polinômio par está presente, a tabela de Routh pode ser usada para fatorar a equação característica do sistema.

A obtenção da estabilidade com base na representação de um sistema no espaço de estados é calcada no mesmo conceito — a localização das raízes da equação característica. Estas raízes são equivalentes aos autovalores da matriz de sistema e podem ser encontradas resolvendo $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Novamente, o critério de Routh-Hurwitz pode ser aplicado a este polinômio. O ponto a destacar é que a representação do espaço de estados de um sistema não precisa ser convertida em função de transferência para que se examine a estabilidade. No próximo capítulo veremos os erros no estado estacionário, o último dos três requisitos importantes dos sistemas de controle que enfatizamos.

Perguntas de Revisão

1. Que parte da resposta é responsável por determinar a estabilidade de um sistema linear?
2. O que acontece à resposta mencionada na Pergunta 1 que cria instabilidade?
3. O que aconteceria ao sistema físico que se tornasse instável?
4. Por que os sistemas marginalmente estáveis são considerados instáveis sob a definição BIBO de estabilidade?
5. Onde devem estar localizados os pólos dos sistemas de modo a assegurar que os sistemas não sejam instáveis?
6. O que nos afirma o critério de Routh-Hurwitz?
7. Sob que condições o critério de Routh-Hurwitz facilmente nos diria a localização real dos pólos a malha fechada do sistema?
8. O que faz aparecer um zero somente na primeira coluna da tabela de Routh?
9. O que faz aparecer uma linha inteira de zeros na tabela de Routh?
10. Por que algumas vezes multiplicamos uma linha inteira de uma tabela de Routh por uma constante positiva?
11. Por que não multiplicamos uma linha inteira da tabela de Routh por uma constante negativa?
12. Se a tabela de Routh apresentar duas mudanças de sinal acima da linha correspondente ao polinômio par e cinco mudanças de sinal abaixo da mesma linha, quantos pólos do sistema estão no semiplano da direita?
13. A presença de uma linha completa de zeros significa sempre que o sistema tem pólos $j\omega$?
14. Se um sistema de sétima ordem apresentar uma linha de zeros na linha s^3 e duas mudanças de sinal abaixo da linha s^4, quantos pólos em $j\omega$ o sistema tem?

Espaço de Estados

15. É verdade que os autovalores da matriz de sistema são os pólos a malha fechada?

Espaço de Estados

16. Como determinamos os autovalores?

Problemas

1. Diga quantas raízes do seguinte polinômio estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

$$P(s) = s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 4s^2 + s + 3$$

2. Usando a tabela de Routh, diga quantos pólos da seguinte função de transferência estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

$$T(s) = \frac{s + 8}{s^5 - s^4 + 4s^3 - 4s^2 + 3s - 2}$$

3. A função de transferência a malha fechada de um sistema é

$$T(s) = \frac{s^2 + 7s + 10}{s^6 + 2s^4 - s^2 - 2}$$

Determine quantos pólos a malha fechada estão situados no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

4. Quantos pólos estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda, e sobre o eixo $j\omega$ para o sistema a malha aberta da Fig. P6.1?

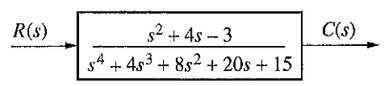


Fig. P6.1

5. Quantos pólos estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$ para o sistema a malha aberta da Fig. P6.2?

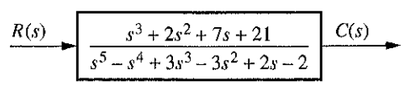


Fig. P6.2

MATLAB

6. Use o MATLAB para encontrar as localizações dos pólos do sistema do Problema 5.

Matemática Simbólica

7. Use o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica para gerar uma tabela de Routh para resolver o Problema 2.

8. Determine se o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 é estável se

$$G(s) = \frac{240}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$$

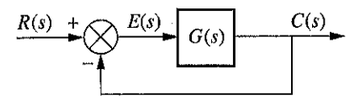


Fig. P6.3

MATLAB

9. Use o MATLAB para encontrar as localizações dos pólos do sistema do Problema 8.

10. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{1}{4s^2(s^2 + 1)}$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, encontre a região do plano s onde estão situados os pólos do sistema a malha fechada.

11. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{4}{s(s^6 - 2s^5 + 2s^4 - 4s^3 - s^2 + 2s - 2)}$$

descubra quantos pólos da função de transferência a malha fechada estão situados no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

12. Usando o critério de Routh-Hurwitz e o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{1}{2s^3 + s^2 + 2s}$$

diga se o sistema a malha fechada é ou não estável.

13. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{8}{s(s^6 - 2s^5 - s^4 + 2s^3 + 4s^2 - 8s - 4)}$$

diga quantos pólos a malha fechada estão localizados no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

MATLAB

14. Repita o Problema 13 usando o MATLAB.

15. Considere a seguinte tabela de Routh. Note que a linha de s^5 era originalmente toda de zeros. Diga quantas raízes do polinômio original estavam no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

s^7	1	2	−1	−2
s^6	1	2	−1	−2
s^5	3	4	−1	0
s^4	1	−1	−3	0
s^3	7	8	0	0
s^2	−15	−21	0	0
s^1	−9	0	0	0
s^0	−21	0	0	0

16. Para o sistema da Fig. P6.4, diga quantos pólos a malha fechada estão situados no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$. Note que há retroação positiva.

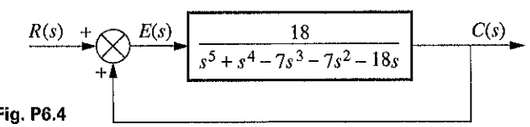


Fig. P6.4

17. Usando o critério de Routh-Hurwitz, descubra quantos pólos a malha fechada do sistema mostrado na Fig. P6.5 situam-se no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

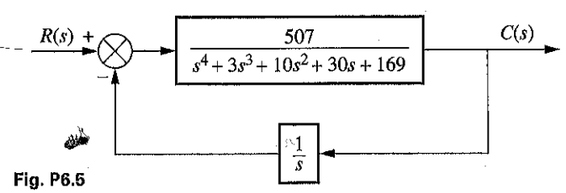


Fig. P6.5

18. Determine se o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$

pode ser instável.

19. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s + 6)}{s(s + 1)(s + 3)}$$

determine a faixa de valores de K para assegurar a estabilidade.

20. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Determine a faixa de valores de K para estabilidade.

MATLAB

21. Repita o Problema 20 usando o MATLAB.

Matemática Simbólica

22. Use o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica para gerar uma tabela de Routh em função de K para resolver o Problema 20.

23. Encontre a faixa de valores de K para estabilidade para o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s-2)}{(s^2+3)}$$

24. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^4(s+2)}$$

encontre a faixa de valores de K para estabilidade.

25. Encontre a faixa de valores do ganho, K, para assegurar estabilidade do sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s-2)(s+4)(s+5)}{(s^2+3)}$$

26. Encontre a faixa de valores do ganho, K, para assegurar estabilidade do sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)}$$

27. Usando o critério de Routh-Hurwitz, encontre o valor de K que irá produzir oscilações no sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+15)(s+27)(s+38)}$$

28. Use o critério de Routh-Hurwitz para encontrar a faixa de valores de K para a qual o sistema da Fig. P6.6 seja estável.

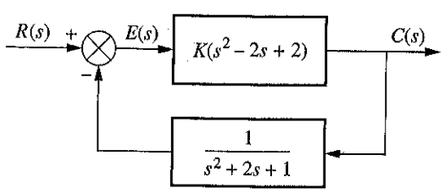


Fig. P6.6

29. Repita o Problema 28 para o sistema da Fig. P6.7.

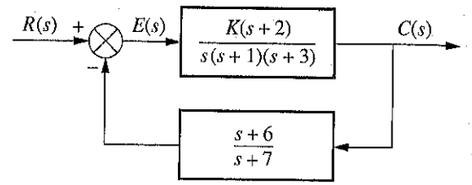


Fig. P6.7

30. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$$

encontre o seguinte:

a. A faixa de valores de K que mantém o sistema estável.
b. O valor de K que faz o sistema oscilar.
c. A freqüência de oscilação quando K é ajustado no valor que faz o sistema oscilar.

31. Repita o Problema 30 para

$$G(s) = \frac{K(s-1)(s-2)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

32. Para o sistema mostrado na Fig. P6.8, encontre o valor do ganho, K, que fará o sistema oscilar. Encontre, também, a freqüência de oscilação.

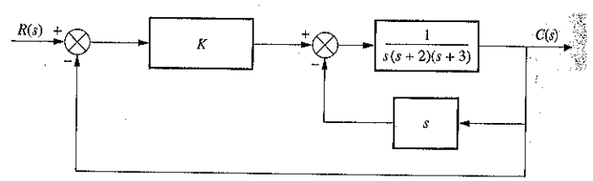


Fig. P6.8

33. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{Ks(s+2)}{(s^2-4s+8)(s+3)}$$

a. Encontre a faixa de valores de K para estabilidade.
b. Encontre a freqüência de oscilação quando o sistema for marginalmente estável.

MATLAB

34. Repita o Problema 33 usando o MATLAB.

35. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)}$$

encontre a faixa de valores de K para a qual haverá somente dois pólos a malha fechada no semiplano da direita.

36. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^3(s+4)}$$

a. Encontre a faixa de valores de K para estabilidade.
b. Encontre a freqüência de oscilação quando o sistema for marginalmente estável.

37. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+10)(s^2+4s+5)}$$

a. Determine a faixa de valores de K para estabilidade.
b. Determine a freqüência de oscilação quando o sistema for marginalmente estável.

38. Usando o critério de Routh-Hurwitz e o sistema com retroação unitária da Fig. P6.3 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$

a. Encontre a faixa de valores de K para estabilidade.
b. Encontre o valor de K para estabilidade marginal.
c. Encontre a localização real dos pólos a malha fechada quando o sistema for marginalmente estável.

39. Encontre a faixa de valores de K para manter estável o sistema mostrado na Fig. P6.9.

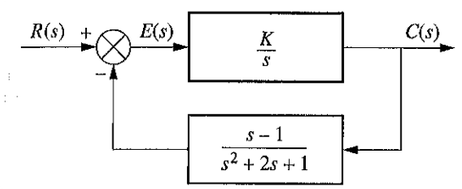


Fig. P6.9

40. Encontre o valor de K no sistema da Fig. P6.10 que posicionará os pólos a malha fechada como mostrados.

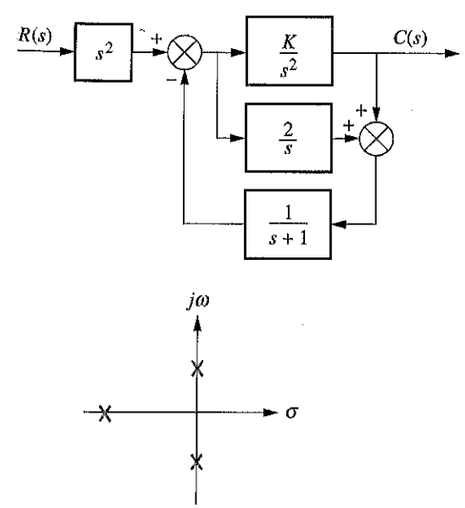


Fig. P6.10 Sistema a malha fechada com gráfico dos pólos

41. A função de transferência a malha fechada de um sistema é

$$T(s) = \frac{s^2 + K_1 s + K_2}{s^4 + K_1 s^3 + K_2 s^2 + 5s + 1}$$

Determine a faixa de valores de K_1 a fim de que o sistema seja estável. Qual a relação entre K_1 e K_2 para estabilidade?

42. Para a função de transferência a seguir, determine as restrições sobre K_1 e K_2 tais que a função tenha somente dois pólos em $j\omega$.

$$T(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^4 + K_1 s^3 + s^2 + K_2 s + 1}$$

43. A função de transferência relacionando a velocidade de saída da turbina (rpm) à vazão de entrada de combustível da câmara de combustão principal (lb/h) de um avião de combate STOL[1], ignorando o acoplamento entre a velocidade de saída da turbina e o comando de controle em arfagem, é (Schierman, 1992)

$$G(s) = \frac{1{,}3s^7 + 90{,}5s^6 + 1970s^5 + 15.000s^4 + 3120s^3 - 41.300s^2 - 5000s - 1840}{s^8 + 103s^7 + 1180s^6 + 4040s^5 + 2150s^4 - 8960s^3 - 10.600s^2 - 1550s - 415}$$

a. Encontre quantos pólos estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.
b. O sistema a malha aberta é estável?

Espaço de Estados

44. Um sistema é representado no espaço de estados como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Determine quantos autovalores estão no semiplano da direita, no semiplano da esquerda e sobre o eixo $j\omega$.

MATLAB

Espaço de Estados

45. Use o MATLAB para encontrar os autovalores do sistema a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Espaço de Estados

46. O seguinte sistema no espaço de estados representa o percurso direto de um sistema com retroação unitária. Use o critério de Routh-Hurwitz para determinar se o sistema a malha fechada é estável.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

MATLAB

47. Repita o Problema 46 usando o MATLAB.

[1]Da sigla em inglês *Short TakeOff and Landing* (decolagem e pouso em pista curta). (N.T.)

Problemas de Projeto

48. Um modelo para a malha de arfagem de um avião é mostrado na Fig. P6.11. Determine a faixa de valores do ganho, K, que manterá o sistema estável. O sistema pode ser instável para valores positivos de K?

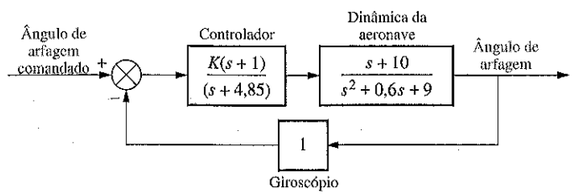
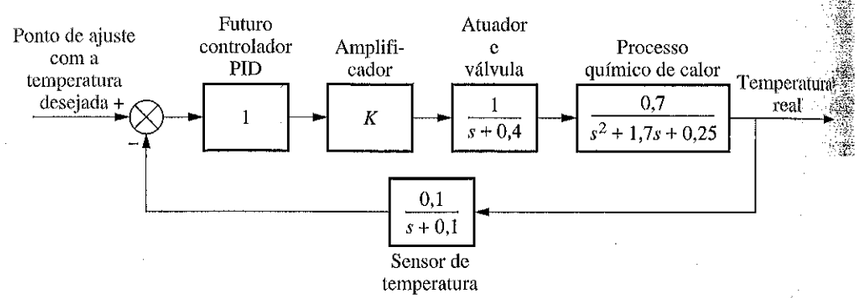


Fig. P6.11 Modelo da malha de arfagem de um avião

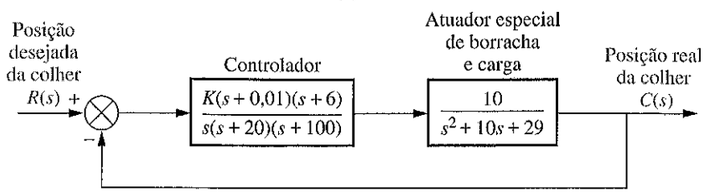
49. Uma aplicação comum dos sistemas de controle é a regulação de temperatura de processos químicos (Fig. P6.12). A vazão de entrada do reagente químico no processo é controlada por um atuador e uma válvula. O reagente faz com que a temperatura no reator se modifique. Esta temperatura é sentida e comparada com a temperatura de referência desejada (*set point*) em malha fechada, em que a vazão do reagente é ajustada para fornecer a temperatura desejada. No Cap. 9 aprenderemos como os controladores PID são usados para melhorar o desempenho dos sistemas de controle de processos. A Fig. P6.12 mostra o sistema de controle antes da inclusão do controlador PID. O controlador PID é substituído por uma caixa com ganho unitário. Para este sistema, anterior ao projeto do controlador PID, determine a faixa de valores do ganho de amplificador, K, para manter o sistema estável.

Fig. P6.12 Diagrama de blocos de um sistema de controle de processo químico



50. Um braço robótico chamado *Soft Arm* pode ser usado como parte de um sistema para alimentar pessoas com deficiência (veja a Fig. P6.13(*a*)). O sistema de controle guia a colher até a comida e então a posiciona perto da boca do paciente. O braço usa um atuador especial de borracha com controle pneumático.* Este tipo de atuador consiste em tubos de borracha cobertos com cordas de fibra. O atuador reduz o comprimento quando a pressão pneumática aumenta e se expande quando a pressão diminui. Esta expansão e contração no comprimento pode acionar uma polia ou outro dispositivo. Uma câmara de vídeo fornece a visão para o robô e para a malha de rastreamento (Kara, 1992). Considere o diagrama de bloco simplificado mostrado na Fig. P6.13(*b*) para regular o posicionamento da colher a uma determinada distância da boca. Encontre a faixa de valores de K para estabilidade. (É recomendado o uso de um programa com capacidade simbólica.)

(*a*)



(*b*)

Fig. P6.13 a. *Soft Arm* usado para alimentar pessoas; **b.** diagrama de blocos simplificado

*A designação em inglês deste tipo de atuador é *rubbertuator* (atuador de borracha) e não possui equivalente em português. (N. T.)

51. Muitas vezes se necessita de um avião para rebocar outro, como no caso de alvos aéreos ou de planadores. Para estabilizar o veículo rebocado e evitar que ele gire segundo os eixos de rolamento, arfagem e guinada, é instalado um piloto automático a bordo do veículo rebocado. Admita que o diagrama de blocos mostrado na Fig. P6.14 representa o sistema de controle do ângulo de rolamento do piloto automático (Cochran, 1992). Determine a faixa de valores de K para manter estável o ângulo de rolamento.

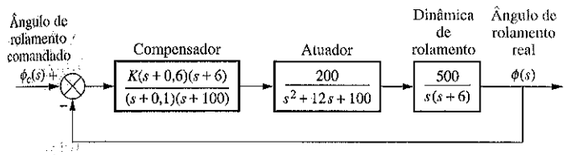


Fig. P6.14 Controle do ângulo de rolamento de um veículo rebocado

52. Os esforços de corte devem ser mantidos constantes durante as operações de usinagem para evitar mudanças na velocidade do eixo ou na posição do trabalho. Essas mudanças deterioram a precisão das dimensões das peças que estão sendo trabalhadas. Propõe-se um sistema para controlar a força de corte. O processo a controlar é difícil de modelar, uma vez que os fatores que afetam a força de corte são variantes no tempo e não podem ser previstos facilmente. Supondo, contudo, o modelo simplificado do controle da força de corte mostrado na Fig. P6.15, use o critério de Routh-Hurwitz para encontrar a faixa de valores de K para manter o sistema estável (Rober, 1997).

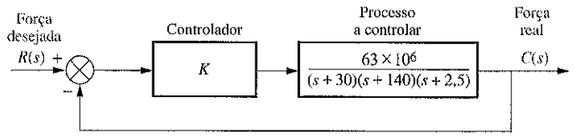
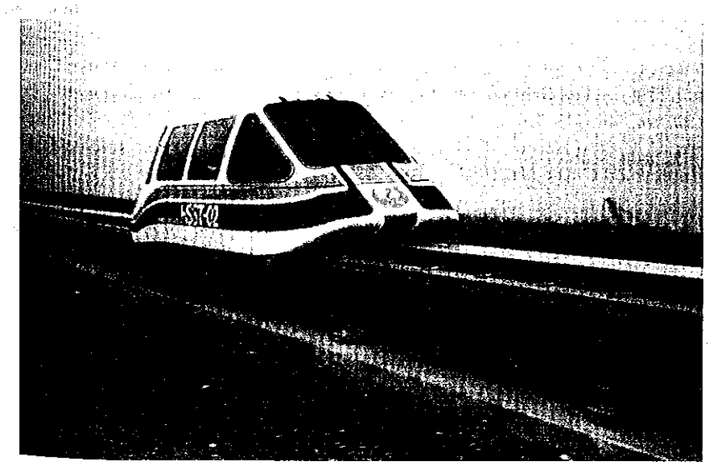
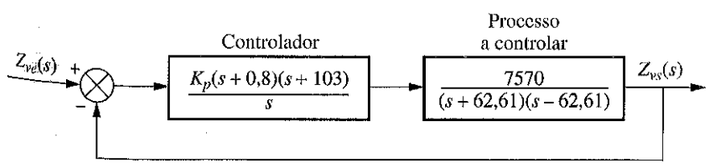


Fig. P6.15 Sistema de controle da força de corte

53. Os sistemas de transporte que usam a levitação magnética podem alcançar uma alta velocidade, visto que o atrito de contato com o trilho é eliminado (veja Fig. P6.16(*a*)). Podem ser usados eletroímãs para produzir a força necessária para suspender o veículo. A Fig.



(*a*)



(*b*)

Fig. P6.16 a. Sistema de transporte com levitação magnética; **b.** diagrama de blocos simplificado (© 1998 IEEE)

P6.16(*b*) é um modelo de simulação de um sistema de controle que pode ser usado para regular o entreferro magnético. Na figura, $Z_{ve}(s)$ representa tensão proporcional ao espaço de levitação desejada, ou entreferro. $Z_{vs}(s)$ representa uma tensão proporcional ao espaço de levitação real. A planta modela a resposta dinâmica do veículo ao sinal do controlador (Bittar, 1998). Use o critério de Routh-Hurwtiz para encontrar a faixa de valores de ganho, *K*, para manter o sistema a malha fechada estável.

Problema Progressivo de Análise e Projeto

54. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 trata do controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade. No Problema 62(*a*), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle pantográfico ativo. Usando a solução do Problema 62(*a*) no Cap. 5 e o critério de Routh-Hurwitz, determine a faixa de valores de ganho do controlador, *K*, que manterá o sistema estável (O'Connor, 1997).

Bibliografia

Ballard, R. D. The Riddle of the Lusitania, *National Geographic*, April 1994, National Geographic Society, Washington, DC, 1994, pp. 68–85.

Bittar, A., and Sales, R. M. H_2 and H_∞ Control for MagLev Vehicles. *IEEE Control Systems*, vol. 18, no. 4, August 1998, pp. 18–25.

Cochran, J. E.; Innocenti, M.; No, T. S.; and Thukral, A. Dynamics and Control of Maneuverable Towed Flight Vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 5, September–October 1992, pp. 1245–1252.

D'Azzo, J., and Houpis, C. H. *Linear Control System Analysis and Design*. 3d ed. McGraw-Hill, New York, 1988.

Dorf, R. C. *Modern Control Systems*. 5th ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J., Jr.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems*. 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description*. NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1980.

Kara, A.; Kawamura, K.; Bagchi, S.; and El-Gamal, M. Reflex Control of a Robotic Aid System to Assist the Physically Disabled. *IEEE Control Systems*, June 1992, pp. 71–77.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Phillips, C. L., and Harbor, R. D. *Feedback Control Systems*. 2d ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

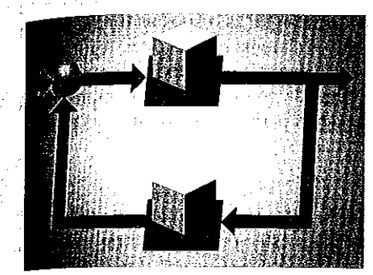
Rober, S. J.; Shin, Y. C.; and Nwokah, O. D. I. A Digital Robust Controller for Cutting Force Control in the End Milling Process. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 119, June 1997, pp. 146–152.

Routh, E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. 6th ed. Macmillan, London, 1905.

Schierman, J. D., and Schmidt, D. K. Analysis of Airframe and Engine Control Interactions and Integrated Flight/Propulsion Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 6, November–December 1992, pp. 1388–1396.

Timothy, L. K., and Bona, B. E. *State Space Analysis: An Introduction*. McGraw-Hill, New York, 1968.

CAPÍTULO 7



Erros de Estado Estacionário

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como determinar o erro de estado estacionário de um sistema com retroação unitária
- Como especificar o desempenho de erro de estado estacionário de um sistema
- Como determinar o erro de estado estacionário devido a perturbações na entrada
- Como determinar o erro de estado estacionário de sistemas com retroação não-unitária
- Como projetar parâmetros do sistema que permitam atender especificações de desempenho de erro de estado estacionário
- Como determinar o erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrada na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de obter o ganho do pré-amplificador de modo a atender as especificações de desempenho de erro de estado estacionário.
- Dado o gravador de videodisco a laser, você deverá ser capaz de obter o ganho necessário que permita o sistema gravar em um disco com irregularidades na superfície.

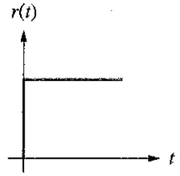
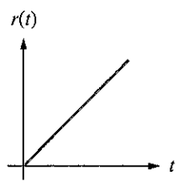
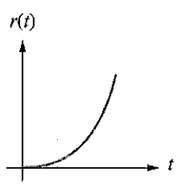
7.1 Introdução

No Cap. 1 vimos que a análise e o projeto de sistemas de controle enfoca três especificações: (1) resposta transitória, (2) estabilidade e (3) erro de estado estacionário, levando em consideração a robustez do projeto juntamente com considerações econômicas e sociais. Os princípios básicos da análise transitória foram deduzidos no Cap. 4 para sistemas de primeira e de segunda ordem. Estes conceitos serão revistos no Cap. 8, onde serão estendidos aos sistemas de ordem mais elevada. A estabilidade foi tratada no Cap. 6, onde vimos que as respostas forçadas eram excedidas pelas respostas naturais cujos valores cresciam sem limites quando o sistema era instável. Agora, estamos prontos para examinar os erros de estado estacionário. Vamos defini-los e deduzir os métodos para controlá-los. Ao longo do desenvolvimento, vamos constatar que o projeto de sistemas de controle impõe compromissos entre a resposta transitória desejada, o erro de estado estacionário e os requisitos para que o sistema seja estável.

Definição e Entradas de Teste

O *erro de estado estacionário* é a diferença entre a entrada e a saída para uma entrada de teste quando $t \to \infty$. As entradas de teste (sinais de teste) usadas para análise e projeto de erro de estado estacionário estão resumidas na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 Formas de onda dos sinais de teste para o cálculo dos erros de estado estacionário em sistemas de controle de posição

Forma de onda	Nome	Interpretação física	Função no domínio do tempo	Transformada de Laplace
	Degrau	Posição constante	1	$\frac{1}{s}$
	Rampa	Velocidade constante	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parábola	Aceleração constante	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

A fim de explicar como estes sinais de teste são usados, suponhamos um sistema de controle de posição, em que a posição de saída segue a posição comandada na entrada. As entradas em degrau representam posição constante e, por conseguinte, são úteis para determinar a capacidade do sistema de controle em se posicionar com relação a um alvo estacionário, como um satélite em órbita geoestacionária (ver Fig. 7.1). Um sistema de controle de posicionamento de antena constitui exemplo de sistema cuja exatidão pode ser testada usando entradas em degrau.

Entradas em rampa representam entradas com velocidade constante em um sistema de controle de posição com a amplitude da entrada crescendo linearmente com o tempo. Estas formas de onda podem ser usadas para testar a capacidade do sistema para seguir uma entrada linearmente crescente, ou, em outras palavras, de rastrear um alvo com velocidade constante. Por exemplo, um sistema de controle de posição para rastrear um satélite que se move no céu com velocidade angular constante, como o mostrado na Fig. 7.1, seria testado com uma entrada em rampa para se calcular o erro de estado estacionário entre a posição angular do satélite e a posição angular do sistema de controle.

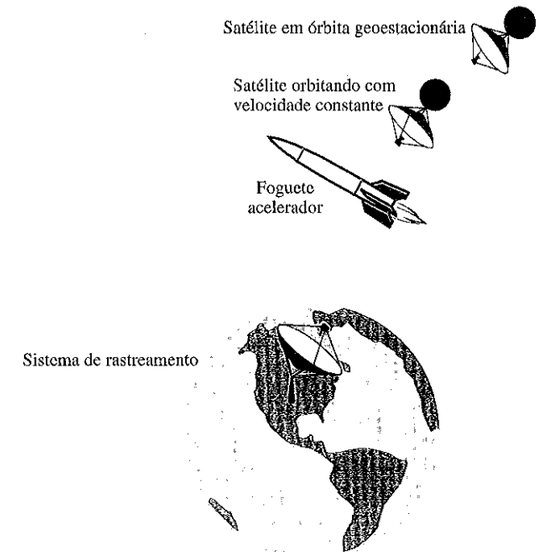


Fig. 7.1 As entradas de teste para análise e projeto de erro de estado estacionário variam com o tipo de alvo

Para concluir, as parábolas, cujas segundas derivadas são constantes, representam entradas de aceleração constante em sistemas de controle de posição e podem ser usadas para representar alvos sendo acelerados, como o míssil da Fig. 7.1, na determinação do desempenho quanto a erro de estado estacionário.

Aplicação a Sistemas Estáveis

Uma vez que estamos interessados na diferença entre a entrada e a saída de sistemas de controle com retroação, depois que o estado estacionário for alcançado, nossa discussão se limita aos sistemas estáveis, onde a resposta natural tende a zero quando $t \to \infty$. Os sistemas instáveis representam perda de controle do estado estacionário e não são aceitáveis definitivamente. As expressões deduzidas para calcular o erro de estado estacionário podem ser aplicadas erroneamente aos sistemas instáveis. Assim, ao efetuar a análise e o projeto do erro de estado estacionário, o engenheiro deve verificar a estabilidade do sistema. Na prática, você deve testar alguns sistemas quanto à estabilidade.

Calculando os Erros de Estado Estacionário

Examinemos o conceito de erros de estado estacionário. Na Fig. 7.2(*a*) são mostradas uma entrada em degrau e duas saídas possíveis. A saída 1 apresenta erro de estado estacionário nulo, e a saída 2, um erro de estado estacio-

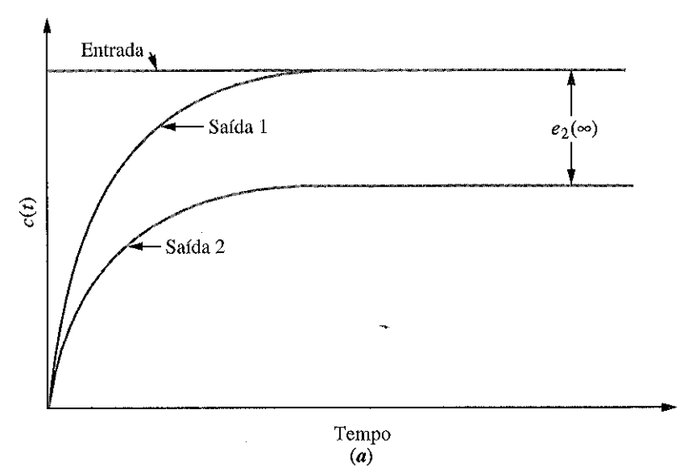
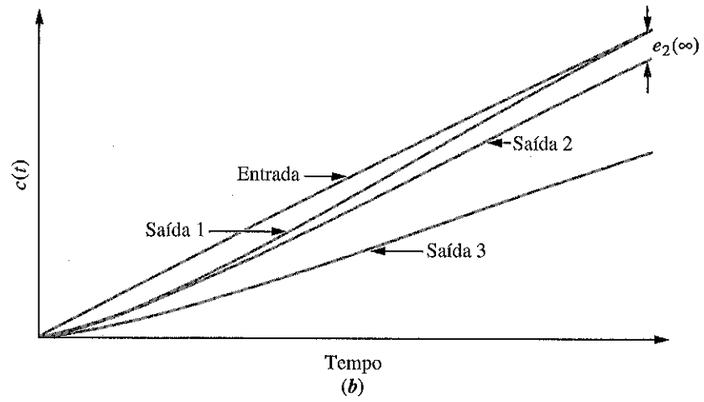


Fig. 7.2 Erro de estado estacionário: a, entrada em degrau (*continua*)

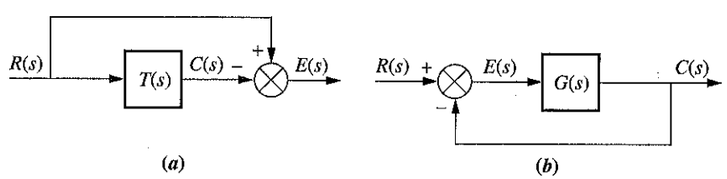
Fig. 7.2 ***(continuação)***
b. entrada em rampa



nário, $e_2(\infty)$, finito. Um exemplo semelhante é mostrado na Fig. 7.2(*b*), na qual a entrada em rampa é comparada com a saída 1, que apresenta erro de estado estacionário nulo, e a saída 2, que apresenta um erro de estado estacionário, $e_2(\infty)$, finito, medido verticalmente entre a entrada e a saída 2, depois que os transitórios desaparecem. Para a entrada em rampa, há uma outra possibilidade. Se a inclinação da saída for diferente da inclinação da entrada, resulta a saída 3 mostrada na Fig. 7.2(*b*). Aqui o erro de estado estacionário é infinito ao medi-lo verticalmente entre a entrada e a saída 3, depois que o transitório desaparece e t tende ao infinito.

Observemos agora o erro com base no diagrama de blocos mais geral. Como o erro é a diferença entre a entrada e a saída de um sistema, admitimos uma função de transferência a malha fechada, $T(s)$, e formamos o erro, $E(s)$, efetuando a diferença entre a entrada e a saída, como mostrado na Fig. 7.3(*a*). Aqui estamos interessados no valor de estado estacionário, ou valor final, de $e(t)$. Nos sistemas com retroação unitária, $E(s)$ aparece conforme mostrado na Fig. 7.3(*b*). Neste capítulo, primeiramente estudaremos e deduziremos as expressões do erro de estado estacionário dos sistemas com retroação unitária; em seguida estenderemos os resultados a sistemas com retroação não-unitária. Antes de começar nosso estudo de erros de estado estacionário de sistemas com retroação unitária, vejamos as fontes de erro com as quais vamos lidar.

Fig. 7.3 Erro de sistema de controle a malha fechada:
a. representação geral;
b. representação para sistemas com retroação unitária

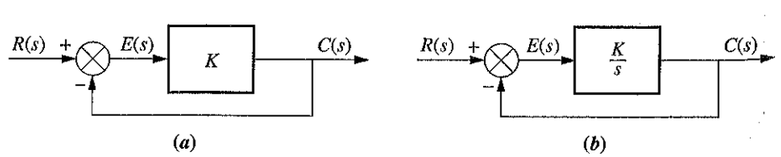


Fontes de Erro de Estado Estacionário

Muitos dos erros de estado estacionário nos sistemas de controle se originam em não-linearidades, como folgas de engrenagens e em um motor cujo movimento só começa a ocorrer depois que a tensão de entrada ultrapassa um certo limiar. O comportamento não-linear como fonte de erro de estado estacionário, embora constitua um tópico de estudo viável, está além do escopo de um texto sobre sistemas de controle lineares. Os erros de estado estacionário que estudamos aqui são erros que decorrem da configuração do sistema em si e do tipo de entrada aplicada.

Por exemplo, observe o sistema da Fig. 7.4(*a*), onde $R(s)$ é a entrada, $C(s)$ é a saída e $E(s) = R(s) - C(s)$ é o erro. Considere uma entrada em degrau. Em estado estacionário, se $c(t)$ for igual a $r(t)$, $e(t)$ será zero. Mas, com um ganho puro, K, o erro, $e(t)$, não pode ser zero se $c(t)$ deva ser finito e não-nulo. Assim, em virtude da configuração do sistema (um ganho puro K no percurso direto), deve existir um erro. Se chamarmos de $c_{estado\ estacionário}$ o valor de

Fig. 7.4 Sistemas com:
a. erro de estado estacionário finito para uma entrada em degrau;
b. erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau



estado estacionário da saída e de $e_{estado\ estacionário}$ o valor de estado estacionário do erro, então $c_{estado\ estacionário} = Ke_{estado\ estacionário}$, ou seja,

$$e_{estado\ estacionário} = \frac{1}{K} c_{estado\ estacionário} \tag{7.1}$$

Por conseguinte, o valor de $e_{estado\ estacionário}$ será tanto menor quanto maior for o valor de K, para produzir um valor semelhante de $c_{estado\ estacionário}$. A conclusão que podemos tirar é que, com um ganho puro no percurso direto, sempre haverá um erro de estado estacionário para uma entrada em degrau. Este erro diminui à medida que o valor de K aumenta.

Se o ganho do percurso direto for substituído por um integrador, como mostrado na Fig. 7.4(*b*), haverá um erro nulo no estado estacionário da resposta a uma entrada em degrau. O raciocínio é o seguinte: à medida que $c(t)$ aumentar, $e(t)$ irá diminuir, uma vez que $e(t) = r(t) - c(t)$. Esta diminuição irá continuar até que o erro se anule, mas continuará a existir um valor para $c(t)$, uma vez que um integrador pode ter saída constante mesmo sem entrada. Por exemplo, um motor pode ser representado simplesmente como um integrador. Uma tensão aplicada ao motor produzirá uma rotação. Quando a tensão aplicada for removida, o motor irá parar e permanecer na posição de saída presente. Como ele não retorna à posição inicial, obtemos um deslocamento angular de saída sem que haja entrada no motor. Portanto, um sistema semelhante à Fig. 7.4(*b*), que utiliza um motor no percurso direto, pode ter erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau.

Examinamos qualitativamente dois casos para mostrar como é possível que um sistema apresente diferentes características de erro de estado estacionário, dependendo da configuração adotada. Iremos agora formalizar os conceitos e deduzir as relações entre os erros de estado estacionário e a configuração de sistema que gera esses erros.

7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

O erro de estado estacionário pode ser calculado com base na função de transferência a malha fechada do sistema, $T(s)$, ou com base na função de transferência a malha aberta, $G(s)$, nos sistemas com retroação unitária. Vamos começar deduzindo o erro de estado estacionário em termos da função de transferência a malha fechada, $T(s)$, a fim de apresentar o assunto e as definições. Em seguida, obtemos uma visão abrangente sobre os fatores que afetam o erro de estado estacionário utilizando em nossos cálculos a função de transferência a malha aberta, $G(s)$, nos sistemas com retroação unitária. Mais adiante no capítulo, iremos generalizar esta discussão para sistemas com retroação não-unitária.

Erro de Estado Estacionário em Termos de $T(s)$

Considere a Fig. 7.3(*a*). Para determinar $E(s)$, o erro entre a entrada, $R(s)$, e a saída, $C(s)$, escrevemos

$$E(s) = R(s) - C(s) \tag{7.2}$$

Mas,

$$C(s) = R(s)T(s) \tag{7.3}$$

Substituindo a Eq. (7.3) na Eq. (7.2), simplificando e resolvendo em $E(s)$, resulta

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)] \tag{7.4}$$

Embora a Eq. (7.4) permita calcular $e(t)$ para qualquer instante de tempo t, estamos interessados no valor final do erro, $e(\infty)$. Aplicando o teorema do valor final,[1] que nos permite usar o valor final de $e(t)$ sem precisar obter a transformada de Laplace inversa de $E(s)$, e em seguida fazer t tender a infinito, obtemos

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) \tag{7.5}$$ [2]

[1]O teorema do valor final é deduzido a partir da transformada de Laplace da derivada. Assim,

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0-)$$

À medida que $s \to 0$,

$$\int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)\,dt = f(\infty) - f(0-) = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0-)$$

ou

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Para erros de estado estacionário finitos, o teorema do valor final só é válido se $F(s)$ possuir pólos apenas no semiplano da esquerda e, no máximo, um pólo na origem. Contudo, podem ser obtidos resultados corretos que conduzem a erros de estado estacionário infinitos quando $F(s)$ possuir mais de um pólo na origem (ver D'Azzo e Houpis, 1988). Se $F(s)$ possuir pólos no semiplano da direita ou pólos sobre o eixo imaginário que não na origem, o teorema do valor final não é válido.

[2]Válido somente se (1) $E(s)$ possuir pólos apenas no semiplano da esquerda e na origem e (2) a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, for estável. Observe que ao se usar a Eq. (7.5) é possível obter resultados numéricos para sistemas instáveis. Estes resultados, no entanto, não possuem qualquer significado.

Substituindo a Eq. (7.4) na Eq. (7.5) resulta

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sR(s)[1 - T(s)] \tag{7.6}$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 7.1

Erro de estado estacionário em termos de $T(s)$

Problema Determinar o erro de estado estacionário para o sistema da Fig. 7.3(*a*) se $T(s) = 5/(s^2 + 7s + 10)$ e a entrada for um degrau unitário.

Solução Com base no enunciado do problema, $R(s) = 1/s$ e $T(s) = 5/(s^2 + 7s + 10)$. Substituindo na Eq. (7.4) vem

$$E(s) = \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 7s + 10)} \tag{7.7}$$

Como $T(s)$ é estável e, em conseqüência, $E(s)$ não possui pólos no semiplano da direita, nem sobre o eixo $j\omega$ nem na origem, podemos aplicar o teorema do valor final. Substituindo a Eq. (7.7) na Eq. (7.5) obtemos $e(\infty) = 1/2$.

Erro de Estado Estacionário em Termos de $G(s)$

Muitas vezes, temos o sistema configurado como sistema com retroação unitária com uma função de transferência, $G(s)$, no percurso direto. Embora possamos obter a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, e proceder então como na subseção anterior, obtemos uma maior compreensão na análise e no projeto exprimindo o erro de estado estacionário em termos de $G(s)$ em vez de $T(s)$.

Considere o sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 7.3(*b*). Como a retroação, $H(s)$, é igual a 1, o sistema possui retroação unitária. A implicação disto é que o erro $E(s)$ é realmente o erro entre a entrada, $R(s)$, e a saída, $C(s)$. Portanto, se calcularmos $E(s)$, teremos uma expressão do erro. Aplicaremos em seguida o teorema do valor final, Item 11 na Tabela 2.2, para calcular o erro de estado estacionário.

Escrevendo $E(s)$ a partir da Fig. 7.3(*b*), obtemos

$$E(s) = R(s) - C(s) \tag{7.8}$$

Mas,

$$C(s) = E(s)G(s) \tag{7.9}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (7.9) na Eq. (7.8) e resolvendo em $E(s)$, vem

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \tag{7.10}$$

Aplicamos agora o teorema do valor final, Eq. (7.5). Neste ponto, em um cálculo numérico, devemos verificar se o sistema a malha fechada é estável usando, por exemplo, o critério de Routh-Hurwitz. Por enquanto, contudo, suponhamos que o sistema a malha fechada seja estável e façamos a substituição da Eq. (7.10) na Eq. (7.5), obtendo

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \tag{7.11}$$

A Eq. (7.11) permite calcular o erro de estado estacionário, $e(\infty)$, dadas a entrada, $R(s)$, e o sistema, $G(s)$. Substituiremos agora diversos tipos de entrada $R(s)$ e extrairemos conclusões a respeito das relações que existem entre o sistema a malha aberta, $G(s)$, e a natureza do erro de estado estacionário, $e(\infty)$.

Os três sinais de teste que usamos para estabelecer as especificações das características de estado estacionário de sistemas de controle estão mostrados na Tabela 7.1. Tomemos cada uma das entradas e calculemos seu efeito no erro de estado estacionário usando a Eq. (7.11).

Entrada em Degrau Usando a Eq. (7.11) com $R(s) = 1/s$, obtemos

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} \tag{7.12}$$

O termo

$$\lim_{s \to 0} G(s)$$

é o ganho estático da função de transferência do percurso direto, uma vez que a variável s, a variável da freqüência, está tendendo a zero. A fim de se ter o erro de estado estacionário igual a zero,

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \infty \tag{7.13}$$

Portanto, para satisfazer a Eq. (7.13), $G(s)$ deve ter a seguinte forma

$$G(s) \equiv \frac{(s + z_1)(s + z_2)\cdots}{s^n(s + p_1)(s + p_2)\cdots} \tag{7.14}$$

e para que o limite seja infinito, o denominador deve ser igual a zero à medida que s tende a zero. Portanto, $n \geq 1$; isto é, pelo menos um dos pólos deve estar na origem. Como a divisão por s no domínio de freqüência corresponde à integração no domínio do tempo (ver Tabela 2.2, Item 10), estamos também dizendo que deve haver pelo menos uma integração no percurso direto. A resposta de estado estacionário para este caso de erro estacionário nulo é semelhante à mostrada na Fig. 7.2(*a*), saída 1.

Se não houver integrações, então $n = 0$. Usando a Eq. (7.14), temos

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \tag{7.15}$$

que é finita e conduz a um erro finito, com base na Eq. (7.12). A Fig. 7.12(*a*), saída 2, é um exemplo deste caso de erro de estado estacionário finito.

Em resumo, para uma entrada em degrau aplicada a um sistema com retroação unitária, o erro de estado estacionário será zero se houver, pelo menos, uma integração pura no percurso direto. Se não houver integrações, então haverá um erro finito não-nulo. Este resultado é comparável à discussão qualitativa na Seção 7.1, onde descobrimos que um ganho puro conduz a um erro de estado estacionário constante para uma entrada em degrau, mas que um integrador conduz a um erro nulo para o mesmo tipo de entrada. Vamos repetir agora o desenvolvimento para uma entrada em rampa.

Entrada em Rampa Usando a Eq. (7.11), com $R(s) = 1/s^2$, obtemos

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)} \tag{7.16}$$

Para ter erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa, devemos ter

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = \infty \tag{7.17}$$

Para satisfazer a Eq. (7.17), $G(s)$ deve ter a mesma forma da Eq. (7.14), exceto que $n \geq 2$. Em outras palavras, deve haver pelo menos duas integrações no percurso direto. Um exemplo de erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa está mostrado na Fig. 7.2(*b*), saída 1.

Se houver apenas uma integração no percurso direto, então, considerando a Eq. (7.14),

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \tag{7.18}$$

que é finita em vez de infinita. Usando a Eq. (7.16), constatamos que esta configuração conduz a um erro constante, como mostrado na Fig. 7.2(*b*), saída 2.

Se não houver integrações no percurso direto, então

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = 0 \tag{7.19}$$

e o erro de estado estacionário seria infinito e conduziria a rampas divergentes, como mostrado na Fig. 7.2(*b*), saída 3. Finalmente, vamos repetir o desenvolvimento para uma entrada parabólica.

Entrada Parabólica Usando a Eq. (7.11), com $R(s) = 1/s^3$, obtemos

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 + s^2G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2G(s)} \tag{7.20}$$

Para ter erro de estado estacionário nulo para uma entrada em parábola, devemos ter

$$\lim_{s \to 0} s^2G(s) = \infty \tag{7.21}$$

Para satisfazer a Eq. (7.21), $G(s)$ deve ter a mesma forma da Eq. (7.14), exceto que $n \geq 3$. Em outras palavras, deve haver pelo menos três integrações no percurso direto.

Se houver apenas duas integrações no percurso direto, então,

$$\lim_{s \to 0} s^2G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \tag{7.22}$$

que é finita em vez de infinita. Usando a Eq. (7.20), constatamos que esta configuração conduz a um erro constante.

Se houver somente uma ou nenhuma integração no percurso direto, então

$$\lim_{s\to 0} s^2G(s) = 0 \tag{7.23}$$

e o erro de estado estacionário será infinito. Dois exemplos vão demonstrar estes conceitos.

Exemplo 7.2

Erros de estado estacionário em sistemas sem integração

Problema Determinar os erros de estado estacionário para as entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$ no sistema mostrado na Fig. 7.5. A função $u(t)$ é o degrau unitário.

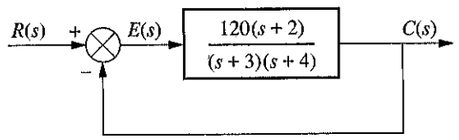


Fig. 7.5 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 7.2

Solução Verificamos, primeiro, se o sistema a malha fechada é realmente estável. Neste exemplo vamos desconsiderar os detalhes. Em seguida, veremos que o erro de estado estacionário para a entrada $5u(t)$, cuja transformada de Laplace é $5/s$, será cinco vezes maior que o obtido através da Eq. (7.12), ou seja,

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{5}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21} \tag{7.24}$$

que acarreta uma resposta semelhante à da saída 2 da Fig. 7.2(*a*).

Para a entrada $5tu(t)$, cuja transformada de Laplace é $5/s^2$, o erro de estado estacionário será cinco vezes maior que o obtido através da Eq. (7.16), ou seja,

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{0} = \infty \tag{7.25}$$

que acarreta uma resposta semelhante à da saída 3 da Fig. 7.2(*b*).

Para a entrada $5t^2u(t)$, cuja transformada de Laplace é $10/s^3$, o erro de estado estacionário será 10 vezes maior que o obtido através da Eq. (7.20), ou seja,

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{10}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{10}{0} = \infty \tag{7.26}$$

Exemplo 7.3

Erros de estado estacionário em sistemas com uma integração

Problema Determinar os erros de estado estacionário para as entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$ no sistema mostrado na Fig. 7.6. A função $u(t)$ é o degrau unitário.

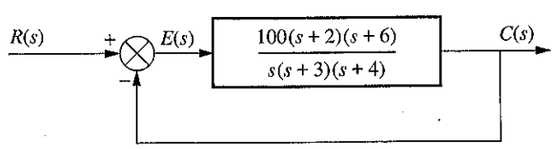


Fig. 7.6 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 7.3

Solução Verificamos, primeiro, se o sistema a malha fechada é realmente estável. Neste exemplo vamos desconsiderar os detalhes. Em seguida, observamos que, devido ao fato de termos uma integração no percurso direto, o erro de estado estacionário para algumas das formas de onda de entrada será menor que o obtido no Exemplo 7.2. Para a entrada $5u(t)$, cuja transformada de Laplace é $5/s$, o erro de estado estacionário será cinco vezes maior que o obtido através da Eq. (7.12), ou seja,

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{5}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{\infty} = 0 \tag{7.27}$$

que acarreta uma resposta semelhante à da saída 1 da Fig. 7.2(*a*). Observe que a integração do percurso direto conduz a um valor nulo do erro para uma entrada em degrau, em vez do valor finito obtido no Exemplo 7.2.

Para a entrada $5tu(t)$, cuja transformada de Laplace é $5/s^2$, o erro de estado estacionário será cinco vezes maior que o obtido através da Eq. (7.16), ou seja,

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \tag{7.28}$$

que acarreta uma resposta semelhante à da saída 2 da Fig. 7.2(*b*). Observe que a integração do percurso direto conduz a um erro finito para uma entrada em rampa em vez do valor infinito obtido no Exemplo 7.2.

Para a entrada $5t^2u(t)$, cuja transformada de Laplace é $10/s^3$, o erro de estado estacionário será 10 vezes maior que o obtido através da Eq. (7.20), ou seja,

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{10}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{10}{0} = \infty \tag{7.29}$$

Observe que a integração do percurso direto não traz nenhuma melhoria quanto ao erro de estado estacionário para uma entrada parabólica obtido no Exemplo 7.2.

Exercício de Avaliação 7.1

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{10(s+20)(s+30)}{s(s+25)(s+35)}$$

a. Determinar o erro de estado estacionário para as seguintes entradas: $15u(t)$, $15tu(t)$ e $15t^2u(t)$.
b. Repetir para

$$G(s) = \frac{10(s+20)(s+30)}{s^2(s+25)(s+35)(s+50)}$$

Respostas:

a. O sistema a malha fechada é estável. Para $15u(t)$, $e_{degrau}(\infty) = 0$; para $15tu(t)$, $e_{rampa}(\infty) = 2{,}1875$; para $15t^2u(t)$, $e_{parábola}(\infty) = \infty$.
b. O sistema a malha fechada é instável. Os cálculos não podem ser feitos.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Continuaremos com o nosso foco nos sistemas com retroação unitária negativa e definiremos parâmetros que podem ser usados como especificações de desempenho de erro em estado estacionário, de modo semelhante aos parâmetros para a especificação da resposta transitória: relação de amortecimento, freqüência natural, tempo de assentamento, ultrapassagem percentual etc. Essas especificações de erro de estado estacionário são chamadas *constantes de erro estático*. Vejamos como são definidas, como calculá-las e, na próxima seção, como usá-las em projeto.

Constantes de Erro Estático

Na seção anterior deduzimos as seguintes relações para o erro de estado estacionário. Para uma entrada em degrau, $u(t)$,

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} \tag{7.30}$$

Para uma entrada em rampa, $tu(t)$,

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} \tag{7.31}$$

Para uma entrada parabólica, $t^2u(t)$,

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} \tag{7.32}$$

Os três termos no denominador, para os quais se calcula o limite, determinam o erro de estado estacionário. Chamamos estes limites de *constantes de erro estático*. Individualmente, seus nomes são

Constante de posição, K_p, onde

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \tag{7.33}$$

Constante de velocidade, K_v, onde

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \tag{7.34}$$

Constante de aceleração, K_a, onde

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) \tag{7.35}$$

Como vimos, estas grandezas, dependendo da forma de $G(s)$, podem ter os valores zero, constante finita, ou infinito. Como a constante de erro aparece no denominador do erro de estado estacionário, Eqs. (7.30) a (7.32), o valor do erro de estado estacionário diminui à medida que a constante de erro estático aumenta.

Na Seção 7.2 calculamos o erro de estado estacionário usando o teorema do valor final. Um método alternativo utiliza as constantes de erro estático. Seguem alguns exemplos.

Exemplo 7.4

Erro de estado estacionário por intermédio das constantes de erro estático

Problema Para cada um dos sistemas da Fig. 7.7, calcule as constantes de erro estático e obtenha o erro esperado para entradas padronizadas em degrau, rampa e parábola.

Solução Verificamos, primeiro, se o sistema a malha fechada é realmente estável. Neste exemplo vamos desconsiderar os detalhes. Com relação à Fig. 7.7(a), segue-se,

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{500 \times 2 \times 5}{8 \times 10 \times 12} = 5{,}208 \tag{7.36}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0 \tag{7.37}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = 0 \tag{7.38}$$

Portanto, para uma entrada em degrau,

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0{,}161 \tag{7.39}$$

Para uma entrada em rampa,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \infty \tag{7.40}$$

Portanto, para uma entrada em parábola,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty \tag{7.41}$$

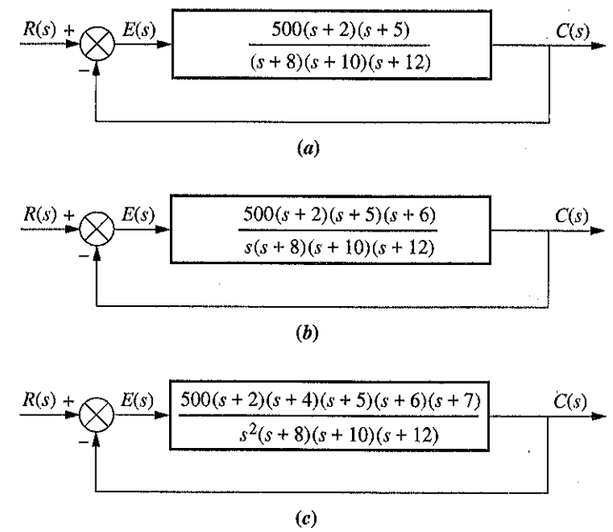


Fig. 7.7 Sistemas de controle com retroação para o Exemplo 7.4

Agora, com relação à Fig. 7.7(b),

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \tag{7.42}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{500 \times 2 \times 5 \times 6}{8 \times 10 \times 12} = 31{,}25 \tag{7.43}$$

e

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = 0 \tag{7.44}$$

Portanto, para uma entrada em degrau,

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \tag{7.45}$$

Para uma entrada em rampa,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{31{,}25} = 0{,}032 \tag{7.46}$$

Para uma entrada em parábola,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty \tag{7.47}$$

Finalmente, com relação à Fig. 7.7(c),

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \tag{7.48}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \infty \tag{7.49}$$

e

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = \frac{500 \times 2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{8 \times 10 \times 12} = 875 \tag{7.50}$$

Portanto, para uma entrada em degrau,

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \tag{7.51}$$

Para uma entrada em rampa,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0 \tag{7.52}$$

Para uma entrada em parábola,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{875} = 1{,}14 \times 10^{-3} \tag{7.53}$$

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap7p1 no Apêndice B. Você aprenderá como testar a estabilidade do sistema, como calcular as constantes de erro estático e o erro de estado estacionário com o MATLAB. Este exercício usa o MATLAB para fazer o Exemplo 7.4, para o sistema (b).

Tipo de Sistema

Continuemos com o nosso foco nos sistemas com retroação unitária negativa. Os valores das constantes de erro estático, uma vez mais, dependem da forma de $G(s)$, especialmente do número de integrações puras no percurso direto. Como os erros de estado estacionário dependem do número de integrações no percurso direto, damos um nome a este atributo do sistema. Dado o sistema da Fig. 7.8, definimos o *tipo de sistema* pelo valor de n no denominador ou, de forma equivalente, pelo número de integrações puras no percurso direto. Portanto, um sistema com $n = 0$ é um sistema Tipo 0. Se $n = 1$ ou $n = 2$, o sistema correspondente é do Tipo 1 ou do Tipo 2.

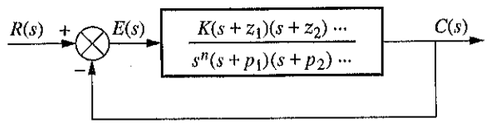


Fig. 7.8 Sistema de controle com retroação para definição do tipo de sistema

A Tabela 7.2 reúne os conceitos de erro de estado estacionário, constantes de erro estático e tipo de sistema. A tabela mostra as constantes de erro estático e os erros de estado estacionário como funções da forma de onda do sinal de entrada e do tipo de sistema.

Tabela 7.2 Relações entre entrada, tipo de sistema, constantes de erro estático e erros de estado estacionário

		Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
Entrada	**Expressão do erro de estado estacionário**	**Constante de erro estático**	**Erro**	**Constante de erro estático**	**Erro**	**Constante de erro estático**	**Erro**
Degrau $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constante	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constante	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constante	$\frac{1}{K_a}$

Exercício de Avaliação 7.2

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{1000(s+8)}{(s+7)(s+9)}$$

a. Determinar o tipo de sistema, K_p, K_v e K_a.
b. Utilize as respostas de (a) para determinar os erros de estado estacionário para os sinais de entrada padronizados em degrau, rampa e parábola.

Respostas:

a. O sistema a malha fechada é estável. Tipo de sistema = Tipo 0. $K_p = 127$, $K_v = 0$ e $K_a = 0$.
b. $e_{degrau}(\infty) = 7{,}8 \times 10^{-3}$; $e_{rampa}(\infty) = \infty$; $e_{parábola}(\infty) = \infty$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção definimos os erros de estado estacionário, as constantes de erro estático e o tipo de sistema. Serão formuladas agora as especificações para os erros de estado estacionário de um sistema de controle, seguidas de alguns exemplos.

7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

As constantes de erro estático podem ser usadas para especificar as características de erro de estado estacionário de sistemas de controle como o mostrado na Fig. 7.9. De modo semelhante ao uso da relação de amortecimento, ζ, do tempo de assentamento, T_s, do instante de pico, T_p, e da ultrapassagem percentual, $\%UP$, como especificações da resposta transitória de sistemas de controle, as constantes de posição, K_p, de velocidade, K_v, e de aceleração, K_a, podem ser utilizadas como especificações de erros de estado estacionário nos sistemas de controle. Veremos bem cedo a riqueza de informações contidas na especificação de uma constante de erro estático.

Por exemplo, se um sistema de controle tiver como especificação $K_v = 1000$, podemos chegar a diversas conclusões:

1. O sistema é estável.
2. O sistema é do Tipo 1, uma vez que sistemas do Tipo 1 possuem valores finitos de K_v. Lembre-se de que $K_v = 0$ para sistemas do Tipo 0, ao passo que $K_v = \infty$ para sistemas do Tipo 2.
3. Uma entrada em rampa é o sinal de teste. Como K_v é especificado por meio de uma constante finita e o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa é inversamente proporcional a K_v, sabemos que o sinal de teste é uma rampa.
4. O erro de estado estacionário entre a rampa de entrada e a rampa de saída é $1/K_v$, por unidade da inclinação da rampa de entrada.

Vejamos dois exemplos que demonstram a análise e o projeto usando as constantes de erro estático.

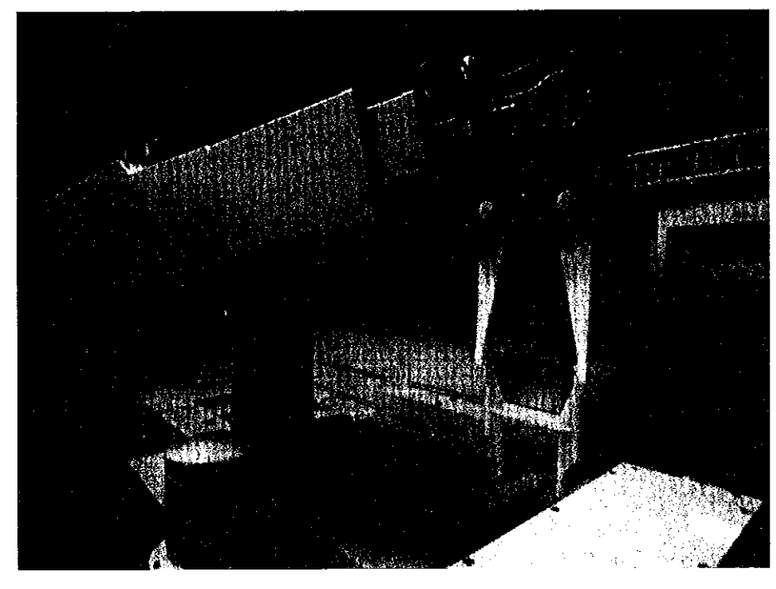


Fig. 7.9 Robô usado na fabricação de memórias de acesso aleatório (RAMs) em semicondutor semelhantes às utilizadas nos computadores pessoais. O erro de estado estacionário constitui uma consideração importante no projeto de robôs para linhas de montagem.

Exemplo 7.5

Interpretando a especificação do erro de estado estacionário

Problema Que informações estão contidas na especificação $K_p = 1000$?

Solução O sistema é estável. O sistema é do Tipo 0, uma vez que somente os sistemas do Tipo 0 apresentam valor finito de K_p. Para os sistemas do Tipo 1 e do Tipo 2, $K_p = \infty$. O sinal de teste aplicado à entrada é um degrau, uma vez que se especificou o valor de K_p. Para concluir, o erro por unidade de degrau é

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 1000} = \frac{1}{1001} \tag{7.54}$$

Exemplo 7.6

Projeto de ganho para atender a especificação do erro de estado estacionário

Problema Dado o sistema de controle da Fig. 7.10, obter o valor de K de modo que o erro de estado estacionário seja 10%.

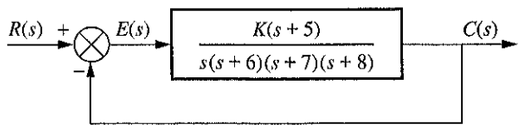


Fig. 7.10 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 7.6

Solução Como o sistema é do Tipo 1, o erro enunciado no problema deve ser aplicado para uma entrada em rampa, uma vez que somente a rampa produz um erro finito em sistemas do Tipo 1. Portanto,

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0{,}1 \tag{7.55}$$

Em conseqüência,

$$K_v = 10 = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{K \times 5}{6 \times 7 \times 8} \tag{7.56}$$

que leva a

$$K = 672 \tag{7.57}$$

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz, vemos que o sistema é estável para este valor de ganho.

Embora este ganho satisfaça os critérios de erro de estado estacionário e de estabilidade, pode não levar a uma resposta transitória desejada. No Cap. 9 vamos projetar sistemas de controle com retroação para atender todas as três especificações.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap7p2 no Apêndice B. Você aprenderá como determinar o ganho de modo a atender a especificação de erro de estado estacionário com o MATLAB. Este exercício usa o MATLAB para fazer o Exemplo 7.6.

Exercício de Avaliação 7.3

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{K(s + 12)}{(s + 14)(s + 18)}$$

Obter o valor de K que leva a um erro de 10% em estado estacionário.

Resposta: $K = 189$.

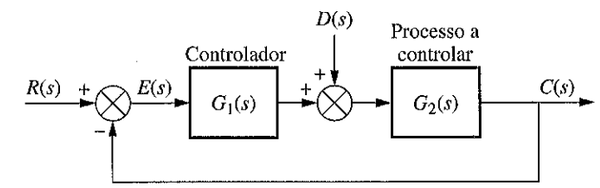
A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Este exemplo e exercício completam nossa discussão sobre sistemas com retroação unitária. Nas seções restantes, iremos lidar com erros de estado estacionário devidos a perturbações e com erros de estado estacionário em sistemas de controle com retroação não-unitária.

7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Os sistemas de controle com retroação são usados para compensar perturbações ou entradas indesejáveis que atuam sobre o sistema. A vantagem de se utilizar a retroação é que, independentemente de quais sejam essas perturbações, podemos projetar o sistema para seguir o sinal de entrada, com erro pequeno ou nulo, como vamos demonstrar. A Fig. 7.11 mostra um sistema de controle com retroação com uma perturbação, $D(s)$, injetada entre o controlador e o processo a controlar. Vamos deduzir de novo a expressão do erro de estado estacionário com a perturbação incluída.

Fig. 7.11 Sistema de controle com retroação com perturbação



A transformada da saída é dada por

$$C(s) = E(s)G_1(s)G_2(s) + D(s)G_2(s) \tag{7.58}$$

Mas

$$C(s) = R(s) - E(s) \tag{7.59}$$

Substituindo a Eq. (7.59) na Eq. (7.58) e resolvendo em $E(s)$, obtemos

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}D(s) \tag{7.60}$$

onde podemos assimilar a expressão $1/[1 + G_1(s)G_2(s)]$ a uma função de transferência relacionando $E(s)$ a $R(s)$ e $-G_2(s)/[1 + G_1(s)G_2(s)]$ a uma função de transferência relacionando $E(s)$ a $D(s)$.

Para determinar o valor de estado estacionário do erro, aplicamos o teorema do valor final[3] à Eq. (7.60) e obtemos

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s) - \lim_{s \to 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}D(s) = e_R(\infty) + e_D(\infty) \tag{7.61}$$

onde

$$e_R(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s)$$

e

$$e_D(\infty) = -\lim_{s \to 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}D(s)$$

O primeiro termo, $e_R(\infty)$, é o erro de estado estacionário devido a $R(s)$, que já obtivemos. O segundo termo, $e_D(\infty)$, é o erro de estado estacionário devido à perturbação. Exploremos as condições que devem existir sobre $e_D(\infty)$ para que o erro devido à perturbação seja reduzido.

Neste ponto devemos elaborar algumas considerações sobre $D(s)$, sobre o controlador e sobre o processo a controlar. Primeiro, vamos supor uma perturbação em degrau, $D(s) = 1/s$. Substituindo este valor no segundo termo da Eq. (7.61), $e_D(\infty)$, a componente do erro de estado estacionário devida à perturbação em degrau é obtida por

$$e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \to 0} G_1(s)} \tag{7.62}$$

[3]Lembre-se de que o teorema do valor final só pode ser aplicado se o sistema for estável, isto é, se as raízes de $[1 + G_1(s)G_2(s)]$ estiverem no semiplano da esquerda.

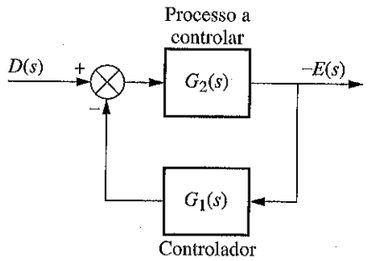


Fig. 7.12 Sistema da Fig. 7.11 rearrumado para mostrar a perturbação como entrada e o erro como saída, com $R(s) = 0$

Esta equação mostra que o erro de estado estacionário produzido por uma perturbação em degrau pode ser reduzido aumentando-se o ganho estático de $G_1(s)$ ou decrescendo o ganho estático de $G_2(s)$.

Este conceito está mostrado na Fig. 7.12, na qual o sistema da Fig. 7.11 foi rearrumado de modo que a perturbação, $D(s)$, é representada como entrada, e o erro, $E(s)$, como saída, com $R(s)$ igualado a zero. Se desejarmos minimizar o valor de estado estacionário de $E(s)$, mostrado como saída na Fig. 7.12, devemos ou aumentar o ganho estático de $G_1(s)$, de modo que um valor menor de $E(s)$ seja encaminhado de volta para igualar o valor de estado estacionário de $D(s)$, ou diminuir o ganho estático de $G_2(s)$, o que leva então a um menor valor de $e(\infty)$, como previsto na expressão matemática da retroação.

Vejamos um exemplo e calculemos o valor numérico do erro de estado estacionário devido a uma perturbação.

Exemplo 7.7

Erro de estado estacionário devido a uma perturbação em degrau

Problema Determinar a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau para o sistema da Fig. 7.13.

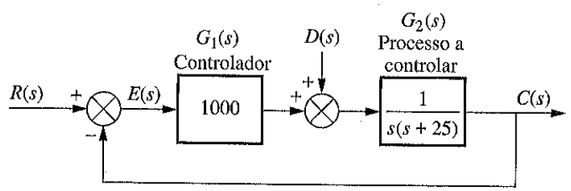


Fig. 7.13 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 7.7

Solução O sistema é estável. Usando a Fig. 7.12 e a Eq. (7.62), obtemos

$$e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{G_2(s)} + \lim\limits_{s\to 0} G_1(s)} = -\frac{1}{0 + 1000} = -\frac{1}{1000} \tag{7.63}$$

O resultado mostra que o erro de estado estacionário produzido por uma perturbação em degrau é inversamente proporcional ao ganho estático de $G_1(s)$. Neste exemplo o ganho estático de $G_2(s)$ é infinito.

Exercício de Avaliação 7.4

Problema: Calcular a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau no sistema da Fig. 7.14.

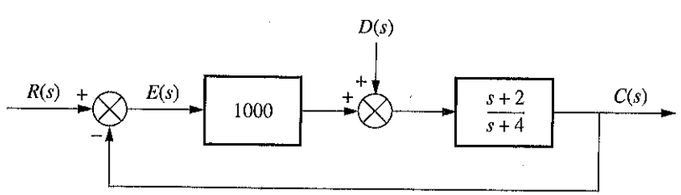


Fig. 7.14 Sistema para o Exercício de Avaliação 7.4

Resposta: $e_D(\infty) = -9{,}98 \times 10^{-4}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

7.6 Erro de Estado Estacionário para Sistemas com Retroação Não-Unitária

Os sistemas de controle muitas vezes não apresentam retroação unitária por causa da compensação utilizada para melhorar o desempenho ou por causa do modelo físico do sistema. O percurso de retroação pode ser um ganho puro com valor diferente de um ou possuir alguma representação dinâmica.

Um sistema com retroação geral, mostrando o transdutor de entrada, $G_1(s)$, o controlador e o processo, $G_2(s)$, e a retroação, $H(s)$, está representado na Fig. 7.15(*a*). Deslocando o transdutor de entrada para a direita da junção somadora resulta o sistema com retroação não-unitária geral mostrado na Fig. 7.15(*b*), onde $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ e $H(s) = H_1(s)/G_1(s)$. Observe que, diferentemente do sistema com retroação unitária, no qual $H(s) = 1$, o erro não é a diferença entre a entrada e a saída. Neste caso, chamamos o sinal de saída da junção somadora de *sinal atuante*, $E_a(s)$. Se $r(t)$ e $c(t)$ tiverem as mesmas unidades, podemos determinar o erro de estado estacionário, $e(\infty) = r(\infty) - c(\infty)$. O primeiro passo é mostrar explicitamente $E(s) = R(s) - C(s)$ no diagrama de blocos.

Considere o sistema de controle com retroação não-unitária mostrado na Fig. 7.15(*b*) e construa um sistema com retroação unitária somando e subtraindo percursos de retroação unitária, como mostrado na Fig. 7.15(*c*). Esta etapa requer que as unidades dos sinais de entrada e de saída sejam as mesmas. Em seguida, combine $H(s)$ com a retroação unitária negativa, como mostrado na Fig. 7.15(*d*). Finalmente, combine o sistema de retroação consistindo em $G(s)$ e $[H(s)-1]$, deixando um percurso direto equivalente e uma retroação unitária, como mostrado na Fig. 7.15(*e*). Observe que a figura final mostra $E(s) = R(s) - C(s)$ explicitamente.

O exemplo a seguir resume os conceitos de erro de estado estacionário, tipo de sistema e constantes de erro estático em sistemas com retroação não-unitária.

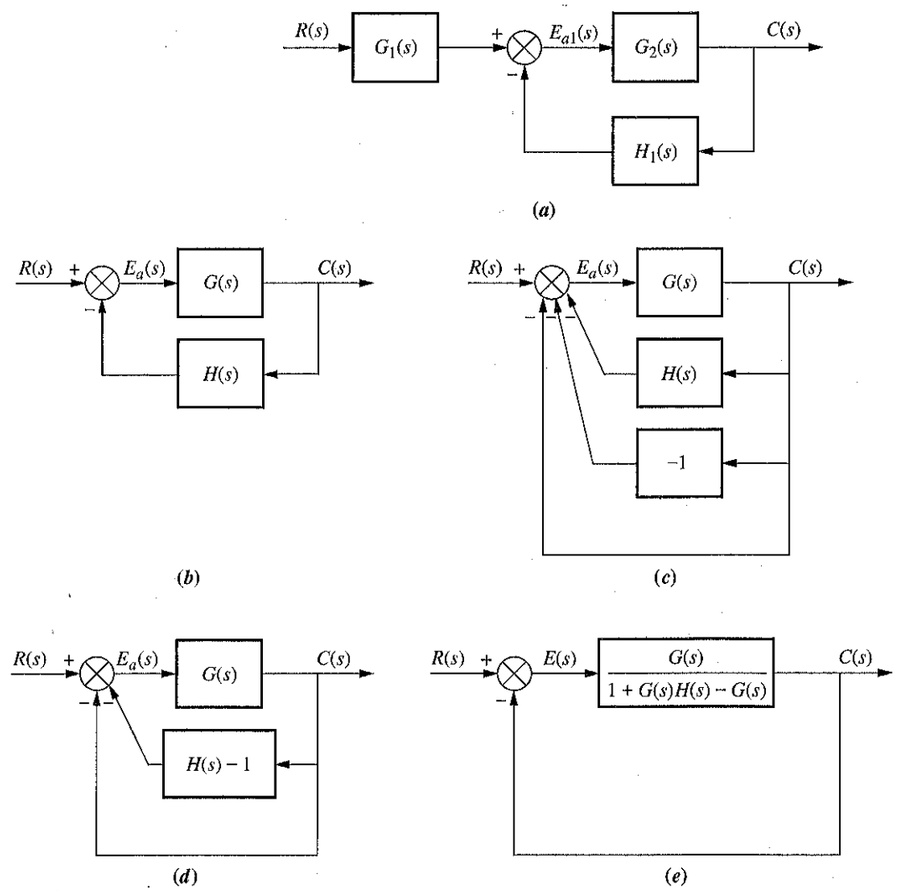


Fig. 7.15 Formando um sistema com retroação unitária equivalente a partir de um sistema geral com retroação não-unitária

Exemplo 7.8

Erro de estado estacionário em sistemas com retroação não-unitária

Problema Para o sistema mostrado na Fig. 7.16, determine o tipo do sistema, a constante de erro associada ao tipo de sistema e o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário. Admita que as unidades da entrada e da saída sejam as mesmas.

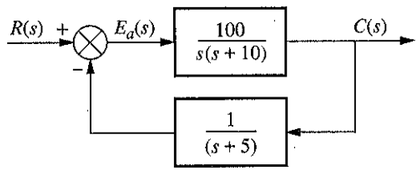


Fig. 7.16 Sistema de controle com retroação não-unitária para o Exemplo 7.8

Solução Depois de determinar que o sistema é realmente estável, poderíamos impulsivamente declarar o sistema como do Tipo 1. Isto pode não ser verdade, uma vez que há um elemento com retroação não-unitária e o sinal atuante sobre o processo a controlar não é a diferença entre a entrada e a saída. O primeiro passo na solução do problema é converter o sistema da Fig. 7.16 em um sistema equivalente com retroação unitária. Usando a função de transferência equivalente do percurso direto da Fig. 7.15(*e*), juntamente com

$$G(s) = \frac{100}{s(s+10)} \tag{7.64}$$

e

$$H(s) = \frac{1}{(s+5)} \tag{7.65}$$

obtemos

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s) - G(s)} = \frac{100(s+5)}{s^3 + 15s^2 - 50s - 400} \tag{7.66}$$

Por conseguinte, o sistema é do Tipo 0, uma vez que não há integrações puras na Eq. (7.66). A constante de erro estático apropriada é, então, K_p, cujo valor é

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_e(s) = \frac{100 \times 5}{-400} = -\frac{5}{4} \tag{7.67}$$

O erro de estado estacionário, $e(\infty)$, vale

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1-(5/4)} = -4 \tag{7.68}$$

O valor negativo do erro de estado estacionário implica que o degrau de saída é maior que o degrau de entrada.

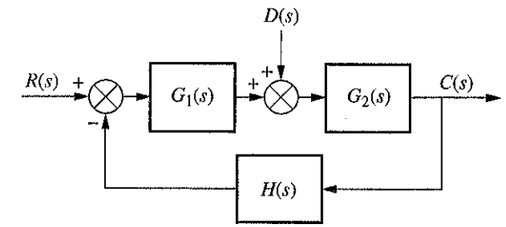
Para continuar nossa discussão sobre o erro de estado estacionário de sistemas com retroação não-unitária, vejamos o sistema geral da Fig. 7.17, que possui tanto uma perturbação quanto uma retroação não-unitária. Iremos deduzir uma equação geral para o erro de estado estacionário e em seguida determinar os parâmetros do sistema com o objetivo de levar o erro a zero para entradas e perturbações em degrau.[4]

O erro de estado estacionário deste sistema, $e(\infty) = r(\infty) - c(\infty)$, é

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left\{\left[1 - \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\right]R(s) - \left[\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\right]D(s)\right\} \tag{7.69}$$

[4]Os detalhes da dedução estão incluídos como problema no fim deste capítulo.

Fig. 7.17 Sistema de controle com retroação não-unitária com perturbação



Agora, limitando a discussão a entradas e perturbação em degrau, onde $R(s) = D(s) = 1/s$, a Eq. (7.69) se torna

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \left\{\left[1 - \frac{\lim_{s\to 0}[G_1(s)G_2(s)]}{\lim_{s\to 0}[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]}\right] - \left[\frac{\lim_{s\to 0} G_2(s)}{\lim_{s\to 0}[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]}\right]\right\} \tag{7.70}$$

Para erro nulo,

$$\frac{\lim_{s\to 0}[G_1(s)G_2(s)]}{\lim_{s\to 0}[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\lim_{s\to 0} G_2(s)}{\lim_{s\to 0}[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]} = 0 \tag{7.71}$$

As Eqs. (7.71) podem ser sempre atendidas se (1) o sistema for estável, (2) $G_1(s)$ for um sistema do Tipo 1, (3) $G_2(s)$ for um sistema do Tipo 0 e (4) $H(s)$ for um sistema do tipo 0 com ganho estático unitário.

Para concluir esta seção, vamos discutir a obtenção do valor de estado estacionário do sinal atuante, $E_{a1}(s)$, na Fig. 7.15(*a*). Para esta tarefa não há necessidade de que as unidades de entrada e de saída sejam iguais, uma vez que estaremos determinando o valor em estado estacionário da diferença entre sinais de uma junção somadora, que têm as mesmas unidades.[5] O sinal atuante em estado estacionário relativo à Fig. 7.15(*a*) é

$$e_{a1}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)H_1(s)} \tag{7.72}$$

A demonstração é deixada ao leitor no conjunto de problemas ao final deste capítulo.

Exemplo 7.9

Sinal atuante em estado estacionário nos sistemas com retroação não-unitária

Problema Para o sistema mostrado na Fig. 7.16, determine o sinal atuante em estado estacionário para uma entrada em degrau unitário. Repita o problema para uma entrada em rampa unitária.

Solução Use a Eq. (7.22) com $R(s) = 1/s$, um degrau unitário, $G_1(s) = 1$, $G_2(s) = 100/[s(s + 10)]$ e $H(s) = 1/(s + 5)$. Constate, também, que $e_{a1}(\infty) = e_a(\infty)$, uma vez que $G_1(s) = 1$. Por conseguinte,

$$e_a(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s\left(\frac{1}{s}\right)}{1 + \left(\frac{100}{s(s+10)}\right)\left(\frac{1}{(s+5)}\right)} = 0 \tag{7.73}$$

Agora, use a Eq. (7.72) com $R(s) = 1/s^2$, uma rampa unitária, e obtenha

$$e_a(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s\left(\frac{1}{s^2}\right)}{1 + \left(\frac{100}{s(s+10)}\right)\left(\frac{1}{(s+5)}\right)} = \frac{1}{2} \tag{7.74}$$

---

[5]Para maior clareza, o erro de estado estacionário é a diferença, em regime permanente, entre os sinais de entrada e de saída. O sinal atuante em estado estacionário é a diferença, em regime permanente, na saída da junção somadora. Ao responder as perguntas sobre erro de estado estacionário nos problemas, exemplos e exercícios de avaliação estaremos supondo que as unidades dos sinais de entrada e de saída sejam iguais.

Exercício de Avaliação 7.5

Problema:

a. Determinar o erro de estado estacionário, $e(\infty) = r(\infty) - c(\infty)$, para uma entrada em degrau dado o sistema com retroação não-unitária da Fig. 7.18. Repita o problema para uma entrada em rampa unitária. Considere que as unidades dos sinais de entrada e de saída sejam iguais.

b. Determinar o estado estacionário do sinal atuante, $e_a(\infty)$, para uma entrada em degrau dado o sistema com retroação não-unitária da Fig. 7.18. Repita o problema para uma entrada em rampa unitária.

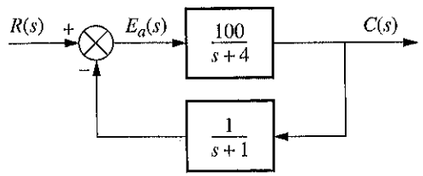


Fig. 7.18 Sistema com retroação não-unitária para o Exercício de Avaliação 7.5

Respostas:

a. $e_{degrau}(\infty) = 3{,}846 \times 10^{-2}$; $e_{rampa}(\infty) = \infty$.
b. Para uma entrada em degrau unitário, $e_a(\infty) = 3{,}846 \times 10^{-2}$; para uma entrada em rampa unitária $e_a(\infty) = \infty$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção aplicamos a análise de erro de estado estacionário a sistemas com retroação não-unitária. Em presença de retroação não-unitária, o sinal atuante sobre a planta não é o erro real — diferença entre a entrada e a saída. Com retroação não-unitária, podemos escolher entre (1) determinar o erro de estado estacionário de sistemas onde as unidades de entrada e de saída sejam iguais ou (2) determinar o sinal atuante em estado estacionário.

Deduzimos, também, uma expressão geral para o erro de estado estacionário de um sistema com retroação unitária submetido a uma perturbação. Usamos esta equação para determinar os atributos de subsistemas de modo que houvesse erro nulo para entradas em degrau e perturbações em degrau.

Antes de finalizar este capítulo, discutiremos um tópico muito significativo não só para os erros de estado estacionário, mas também, de um modo geral, ao longo do procedimento de projetar sistemas de controle.

7.7 Sensibilidade

Ao longo do procedimento de projeto, o engenheiro precisa avaliar em que extensão a variação de parâmetros afeta o comportamento do sistema. Idealmente, a variação de valores dos parâmetros devida à temperatura ou a outras causas não deve afetar sensivelmente o desempenho. O grau segundo o qual alterações nos parâmetros do sistema afetam as funções de transferência e, portanto, o desempenho, é chamado de *sensibilidade*. Um sistema com sensibilidade zero (isto é, em que as alterações nos parâmetros do sistema não afetam o seu desempenho) é o ideal. Quanto maior for a sensibilidade, menos desejável será o efeito de uma variação de parâmetro.

Por exemplo, suponhamos a função, $F = K/(K + a)$. Se $K = 10$ e $a = 100$, então $F = 0{,}091$. Se o parâmetro a triplicar de valor para 300, então $F = 0{,}032$. Vemos que uma mudança relativa no parâmetro a de $(300 - 100)/100 = 2$ (isto é, 200% de alteração no valor de a) resulta em uma mudança na função F de $(0{,}032 - 0{,}091)/0{,}091 = -0{,}65$ (isto é, −65% de alteração no valor de F). Por conseguinte, a função F possui uma sensibilidade reduzida a mudanças de valores do parâmetro a. A seguir, veremos que uma outra vantagem da retroação é que, em geral, ela confere sensibilidade reduzida a variações de parâmetros.

Com base na discussão anterior, formalizemos uma definição de sensibilidade: *Sensibilidade* é a relação entre a variação relativa de uma função e a variação relativa de um parâmetro quando esta tende a zero. Isto é,

$$S_{F:P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\text{Variação percentual na função, } F}{\text{Variação percentual no parâmetro, } P}$$

$$= \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta F / F}{\Delta P / P}$$

$$= \lim_{\Delta P \to 0} \frac{P}{F} \frac{\Delta F}{\Delta P}$$

que se reduz a

$$S_{F:P} = \frac{P}{F} \frac{\delta F}{\delta P} \tag{7.75}$$

Apliquemos agora a definição, primeiro a uma função de transferência a malha fechada e depois ao erro de estado estacionário.

Exemplo 7.10

Sensibilidade de uma função de transferência a malha fechada

Problema Dado o sistema da Fig. 7.19, calcular a sensibilidade da função de transferência a variações do parâmetro a. Como você poderia reduzir a sensibilidade?

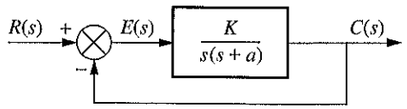


Fig. 7.19 Sistema de controle com retroação não-unitária para os Exemplos 7.10 e 7.11

Solução A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} \tag{7.76}$$

Usando a Eq. (7.75), a sensibilidade é dada por

$$S_{T:a} = \frac{a}{T}\frac{\delta T}{\delta a} = \frac{a}{\left(\dfrac{K}{s^2 + as + K}\right)}\left(\frac{-Ks}{(s^2 + as + K)^2}\right) = \frac{-as}{s^2 + as + K} \tag{7.77}$$

que é, em parte, uma função do valor de s. Qualquer que seja o valor de s, contudo, um aumento em K reduz a sensibilidade da função de transferência a malha fechada a variações do parâmetro a.

Exemplo 7.11

Sensibilidade do erro de estado estacionário com uma entrada em rampa

Problema Dado o sistema da Fig. 7.19, determinar a sensibilidade do erro de estado estacionário a variações do parâmetro K e do parâmetro a.

Solução O erro de estado estacionário do sistema é

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{a}{K} \tag{7.78}$$

A sensibilidade de $e(\infty)$ a variações no parâmetro a é

$$S_{e:a} = \frac{a}{e}\frac{\delta e}{\delta a} = \frac{a}{a/K}\left[\frac{1}{K}\right] = 1 \tag{7.79}$$

A sensibilidade de $e(\infty)$ a variações no parâmetro K é

$$S_{e:K} = \frac{K}{e}\frac{\delta e}{\delta K} = \frac{K}{a/K}\left[\frac{-a}{K^2}\right] = -1 \tag{7.80}$$

Portanto, alterações no parâmetro a ou no parâmetro K se refletem diretamente em $e(\infty)$ e não há redução nem aumento de sensibilidade. O sinal negativo na Eq. (7.80) indica uma redução no valor de $e(\infty)$ para um aumento de K. Ambos os resultados poderiam ser obtidos diretamente a partir da Eq. (7.78) uma vez que $e(\infty)$ é diretamente proporcional ao parâmetro a e inversamente proporcional ao parâmetro K.

Exemplo 7.12

Sensibilidade do erro de estado estacionário com uma entrada em degrau

Problema Determinar a sensibilidade do erro de estado estacionário a variações do parâmetro K e do parâmetro a para o sistema mostrado na Fig. 7.20 com uma entrada em degrau.

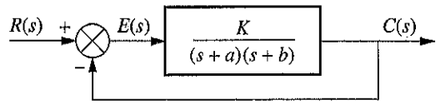


Fig. 7.20 Sistema de controle com retroação não-unitária para o Exemplo 7.12

Solução O erro de estado estacionário deste sistema do Tipo 0 é

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\dfrac{K}{ab}} = \frac{ab}{ab+K} \tag{7.81}$$

A sensibilidade de $e(\infty)$ a variações do parâmetro a é

$$S_{e:a} = \frac{a}{e}\frac{\delta e}{\delta a} = \frac{a}{\left(\dfrac{ab}{ab+K}\right)}\frac{(ab+K)b - ab^2}{(ab+K)^2} = \frac{K}{ab+K} \tag{7.82}$$

A sensibilidade de $e(\infty)$ a variações do parâmetro K é

$$S_{e:K} = \frac{K}{e}\frac{\delta e}{\delta K} = \frac{K}{\left(\dfrac{ab}{ab+K}\right)}\frac{-ab}{(ab+K)^2} = \frac{-K}{ab+K} \tag{7.83}$$

As Eqs. (7.82) e (7.83) mostram que a sensibilidade a variações do parâmetro K e do parâmetro a é menor que um para valores positivos de a e de b. Assim, a retroação neste caso produz sensibilidade reduzida a variações de ambos os parâmetros.

Exercício de Avaliação 7.6

Problema: Determinar a sensibilidade do erro de estado estacionário a variações de K no sistema da Fig. 7.21.

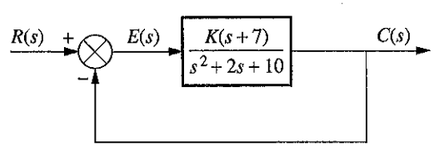


Fig. 7.21 Sistema para o Exercício de Avaliação 7.6

Resposta: $S_{e:k} = \dfrac{-7K}{10+7K}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção definimos sensibilidade e mostramos que em alguns casos a retroação reduz a sensibilidade do erro de estado estacionário a variações dos parâmetros do sistema. O conceito de sensibilidade pode ser aplicado também a outras medidas de desempenho dos sistemas de controle; não é limitado à sensibilidade do desempenho do erro de estado estacionário.

7.8 Erro de Estado Estacionário de Sistemas no Espaço de Estados

Até aqui, calculamos o erro de estado estacionário de sistemas modelados por função de transferência. Nesta seção discutiremos como calcular o erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados. Serão tratados dois métodos para calcular o erro de estado estacionário: (1) análise através do teorema do valor final e (2) análise através da substituição da entrada. Consideraremos estes métodos individualmente.

Análise através do Teorema do Valor Final

Um sistema com uma entrada e uma saída representado no espaço de estados pode ser analisado em relação ao erro de estado estacionário usando-se o teorema do valor final e a função de transferência a malha fechada, Eq. (3.73),

deduzida em termos da representação no espaço de estados. Considere o sistema a malha fechada representado no espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{7.84a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{7.84b}$$

A transformada de Laplace do erro é

$$E(s) = R(s) - Y(s) \tag{7.85}$$

Mas

$$Y(s) = R(s)T(s) \tag{7.86}$$

onde $T(s)$ é a função de transferência a malha fechada. Substituindo a Eq. (7.86) na Eq. (7.85), obtemos

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)] \tag{7.87}$$

Usando a Eq. (3.73) para $T(s)$, obtemos

$$E(s) = R(s)[1 - \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] \tag{7.88}$$

Aplicando o teorema do valor final, temos

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)[1 - \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] \tag{7.89}$$

Apliquemos o resultado a um exemplo.

Exemplo 7.13

Erro de estado estacionário usando o teorema do valor final

Problema Calcular o erro de estado estacionário do sistema descrito pelas Eqs. (7.90) para entradas em degrau unitário e em rampa unitária. Use o teorema do valor final.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.90}$$

Solução Substituindo as Eqs. (7.90) na Eq. (7.89), obtemos

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sR(s)\left(1 - \frac{s+4}{s^3+6s^2+13s+20}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} sR(s)\left(\frac{s^3+6s^2+12s+16}{s^3+6s^2+13s+20}\right) \tag{7.91}$$

Para um degrau unitário, $R(s) = 1/s$, e $e(\infty) = 4/5$. Para uma rampa unitária, $R(s) = 1/s^2$ e $e(\infty) = \infty$. Observe que o sistema se comporta como um sistema do Tipo 0.

Análise através da Substituição de Entrada

Um outro método para análise do estado estacionário que evita a obtenção da inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ e que pode ser estendido a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas substitui a entrada juntamente com uma solução admitida para as equações de estado (Hostetter, 1989). Iremos deduzir os resultados para entradas em degrau e em rampa.

Entradas em Degrau Dadas as equações de estado, Eqs. (7.84), se a entrada for um degrau unitário onde $r = 1$, uma solução para $\mathbf{x}$, em estado estacionário, $\mathbf{x}_{ss}$, é

$$\mathbf{x}_{ss} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \mathbf{V} \tag{7.92}$$

onde V_i é constante. Além disso,

$$\dot{\mathbf{x}}_{ss} = \mathbf{0} \tag{7.93}$$

Substituindo $r = 1$, um degrau unitário, juntamente com as Eqs. (7.92) e (7.93) nas Eqs. (7.84) resulta

$$\mathbf{0} = \mathbf{AV} + \mathbf{B} \tag{7.94a}$$

$$y_{ss} = \mathbf{CV} \tag{7.94b}$$

onde y_{ss} é o valor de estado estacionário da saída. Resolvendo em $\mathbf{V}$, vem

$$\mathbf{V} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{7.95}$$

Mas o erro de estado estacionário é a diferença entre a entrada em estado estacionário e a saída em estado estacionário. O resultado final do erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário de um sistema representado no espaço de estados é

$$e(\infty) = 1 - y_{ss} = 1 - \mathbf{CV} = 1 + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \tag{7.96}$$

Entradas em Rampa Para entradas em rampa unitária, $r = t$, uma solução em estado estacionário para $\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x}_{ss} = \begin{bmatrix} V_1 t + W_1 \\ V_2 t + W_2 \\ \vdots \\ V_n t + W_n \end{bmatrix} = \mathbf{V}t + \mathbf{W} \tag{7.97}$$

onde V_i e W_i são constantes. Por conseguinte,

$$\dot{\mathbf{x}}_{ss} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \mathbf{V} \tag{7.98}$$

Substituindo $r = t$ juntamente com as Eqs. (7.97) e (7.98) nas Eqs. (7.84), resulta

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{V}t + \mathbf{W}) + \mathbf{B}t \tag{7.99a}$$

$$y_{ss} = \mathbf{C}(\mathbf{V}t + \mathbf{W}) \tag{7.99b}$$

A fim de equilibrar a Eq. (7.99a), igualamos as matrizes coeficientes de t, $\mathbf{AV} = -\mathbf{B}$, ou seja,

$$\mathbf{V} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{7.100}$$

Igualando os termos constantes na Eq. (7.99a), temos $\mathbf{AW} = \mathbf{V}$, ou

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} \tag{7.101}$$

Substituindo as Eqs. (7.100) e (7.101) na Eq. (7.99b), resulta

$$y_{ss} = \mathbf{C}[-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t + \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})] = -\mathbf{C}[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t + (\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B}] \tag{7.102}$$

Portanto, o erro de estado estacionário é

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty}(t - y_{ss}) = \lim_{t\to\infty}[(1 + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})t + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B}] \tag{7.103}$$

Observe que para se usar este método é necessário que a matriz $\mathbf{A}^{-1}$ exista. Isto é, $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Vamos mostrar agora o uso das Eqs. (7.96) e (7.103) na determinação dos erros de estado estacionário para entradas em degrau e entradas em rampa.

Exemplo 7.14

Erro de estado estacionário usando substituição da entrada

Problema Calcular o erro de estado estacionário do sistema descrito pelas Eqs. (7.90) para entradas em degrau unitário e em rampa unitária. Use a substituição da entrada.

Solução Para uma entrada em degrau, o erro de estado estacionário dado pela Eq. (7.96) é

$$e(\infty) = 1 + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \tag{7.104}$$

onde as matrizes $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são as seguintes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [-1 \quad 1 \quad 0] \tag{7.105}$$

Para uma entrada em rampa, usando a Eq. (7.103), temos

$$e(\infty) = [\lim_{t\to\infty}[(1 + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})t + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B}] = \lim_{t\to\infty}(0{,}8t + 0{,}08) = \infty \tag{7.106}$$

Exercício de Avaliação 7.7

Problema: Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau dado o sistema representado no espaço de estados pelas equações a seguir. Calcule o erro de estado estacionário usando ambos os métodos: teorema do valor final e substituição da entrada.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

Resposta: $e_{degrau}(\infty) = 2/3$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Neste capítulo cobrimos o cálculo do erro de estado estacionário de sistemas representados por funções de transferência bem como de sistemas representados no espaço de estados. Para os sistemas representados no espaço de estados foram apresentados dois métodos: (1) teorema do valor final e (2) substituição de entrada.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de Antena: Projeto de Erro de Estado Estacionário por Intermédio do Ganho

Este capítulo mostrou como determinar os erros de estado estacionário em sistemas de controle para entradas em degrau, em rampa e em parábola. Aprendemos também como calcular o ganho para atender um requisito de erro em estado estacionário. Este estudo de caso em andamento utiliza nosso sistema de controle de posição da antena em azimute para resumir os conceitos.

Problema Seja o sistema de controle de posição de uma antena em azimute mostrado na contracapa da frente (Configuração 1):

a. Determine o erro de estado estacionário, em termos do ganho K, para entradas em degrau, rampa e parábola.
b. Determine o valor do ganho, K, que conduz a um erro de 10% em estado estacionário.

Solução

a. O diagrama de blocos simplificado do sistema está mostrado na contracapa da frente. O erro de estado estacionário é dado por

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \tag{7.107}$$

Com base no diagrama de blocos, depois de deslocar o bloco referente ao potenciômetro para a direita do ponto de soma, a função de transferência equivalente do canal direto é

$$G(s) = \frac{6{,}63K}{s(s + 1{,}71)(s + 100)} \tag{7.108}$$

Para determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau, use $R(s) = 1/s$ junto com a Eq. (7.108) e substitua estes resultados na Eq. (7.107). O resultado é $e(\infty) = 0$.

Para determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa, use $R(s) = 1/s^2$ junto com a Eq. (7.108) e substitua estes resultados na Eq. (7.107). O resultado é $e(\infty) = 25{,}79//K$.

Para determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em parábola, use $R(s) = 1/s^3$ junto com a Eq. (7.108) e substitua estes resultados na Eq. (7.107). O resultado é $e(\infty) = \infty$.

b. Como o sistema é do Tipo 1, um erro de estado estacionário de 10% deve se referir a uma entrada em rampa. Esta é a única entrada que gera um erro de estado estacionário finito e não-nulo. Portanto, para uma entrada em rampa unitário,

$$e(\infty) = 0{,}1 = \frac{1}{K_v} = \frac{(1{,}71)(100)}{6{,}63K} = \frac{25{,}79}{K} \tag{7.109}$$

de onde $K = 257{,}9$. Você deve verificar se o valor de K está dentro da faixa de valores que assegura a estabilidade do sistema. No estudo de caso do controle de antena do último capítulo, foi determinada como faixa de valores de ganho que assegura a estabilidade o intervalo $0 < K < 2623{,}29$. Portanto, o sistema é estável com um ganho de 257,9.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo: voltando ao sistema de controle de posição de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 2), faça o seguinte:

a. Determine o erro de estado estacionário, em termos do ganho K, para entradas em degrau, rampa e parábola.
b. Determine o valor do ganho, K, que conduz a um erro de 20% em estado estacionário.

Projeto

Gravador de Videodisco a Laser

Como segundo estudo de caso, vejamos um sistema de focalização de gravação em um videodisco a laser.

Problema Para gravar em um videodisco a laser, um feixe de 0,5 μm deve ser focalizado sobre o meio de gravação para usinar rebaixos que representam o material do programa. O feixe estreito de laser requer que a lente focalizadora seja posicionada com uma exatidão de $\pm 0{,}1$ μm. A Fig. 7.22 mostra o modelo de um sistema de controle com retroação da lente focalizadora.

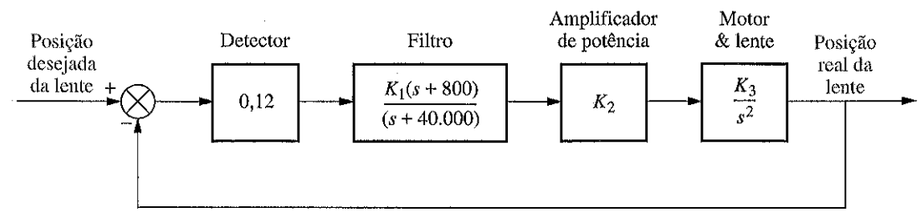
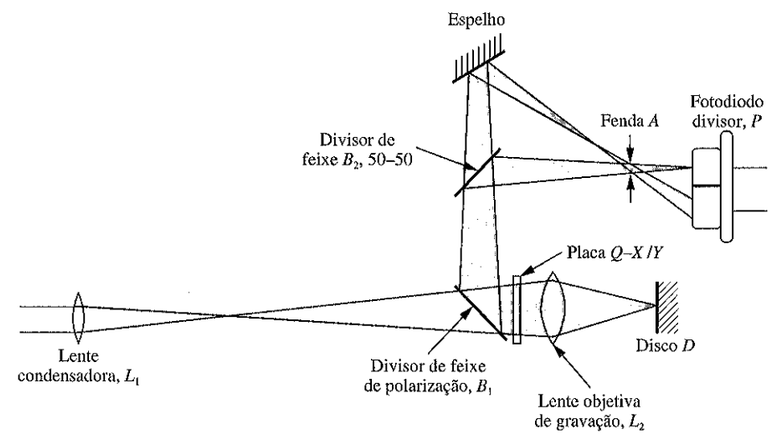
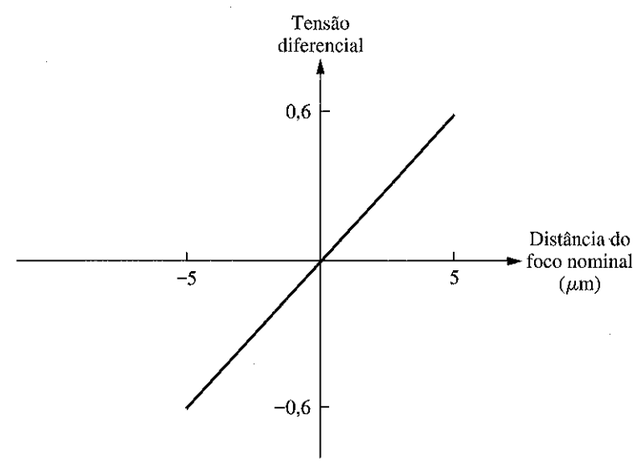


Fig. 7.22 Gravação de videodisco a laser: sistema de controle de foco do feixe de gravação

O sensor detecta a distância entre a lente focalizadora e o videodisco medindo o grau de focalização como mostrado na Fig. 7.23(*a*). O feixe de laser refletido pelo disco, D, é repartido por meio dos divisores de feixe B_1 e B_2 e focalizado atrás da abertura A. O restante é refletido pelo espelho e focalizado em frente da abertura A. A quantidade de luz de cada feixe que passa através da abertura depende de quão longe esteja o ponto focal do feixe em relação à abertura. Cada um dos lados do fotodiodo divisor, P, mede a intensidade de cada um dos feixes. Portanto, à medida que a distância entre o disco e a lente objetiva de gravação varia, o mesmo ocorre com o ponto focal de cada um dos feixes. Como resultado, a tensão relativa detectada por cada uma das partes do fotodiodo se altera. Quando o feixe estiver fora de foco, um dos lados do fotodiodo fornece uma tensão maior. Quando o feixe está no foco, as tensões de saída de ambos os lados do fotodiodo serão iguais.



(*a*)



(*b*)

Fig. 7.23 Gravação de videodisco a laser: **a.** óptica do detector de foco; **b.** função de transferência linearizada para o detector de foco

Um modelo simplificado do detector é uma linha reta relacionando uma saída de tensão diferencial entre os dois elementos do fotodiodo à distância do videodisco a laser ao foco nominal. Um gráfico linearizado da relação entrada-saída do detector está mostrado na Fig. 7.23(*b*) (Isailović, 1985). Suponha que uma ondulação no disco produza uma perturbação (no pior caso) no foco de $10t^2$ μm. Determinar o valor de $K_1K_2K_3$ de modo a atender a exatidão de focalização requerida pelo sistema.

Solução Como o sistema é do Tipo 2, ele pode responder a entradas parabólicas com erro finito. Podemos admitir que a perturbação tem o mesmo efeito de uma entrada de $10t^2$ μm. A transformada de Laplace de $10t^2$ é $20/s^3$, ou seja, 20 unidades maior que a unidade de aceleração usada para deduzir a equação geral do erro para uma entrada em parábola. Portanto, $e(\infty) = 20/K_a$. Mas $K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$.

Com base na Fig. 7.22, $K_a = 0{,}0024K_1K_2K_3$. Além disso, com base no enunciado do problema, o erro deve ser inferior a 0,1 μm. Por conseguinte, $e(\infty) = 8333{,}33/K_1K_2K_3 = 0{,}1$. Portanto $K_1K_2K_3 \geq 83.333{,}3$ e o sistema é estável.

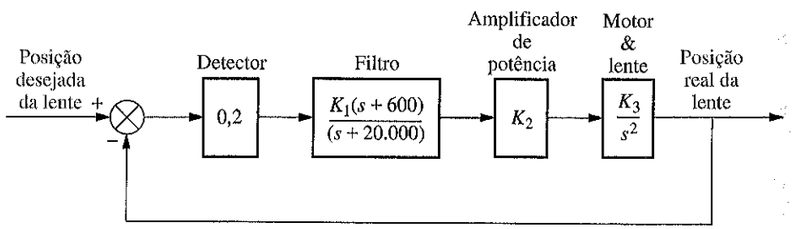
Desafio Damos agora a você um problema para testar seu conhecimento dos objetivos deste capítulo: Dado o sistema de gravação de videodisco a laser cujo diagrama de blocos está mostrado na Fig. 7.24, faça o seguinte:

a. Se o sistema de focalização necessita ser posicionado com uma exatidão de $\pm$ 0,005 μm, obter o valor de $K_1K_2K_3$ se a ondulação no disco conduzir a uma perturbação (pior caso) no foco de $15t^2\mu$m.

b. Use o critério de Routh-Hurwitz para mostrar que o sistema é estável quando as condições de (*a*) forem atendidas.

MATLAB **c.** Use o MATLAB para mostrar que o sistema é estável quando as condições de (*a*) forem atendidas.

Fig. 7.24 Sistema de foco de gravação em videodisco a laser



Sumário

Neste capítulo exploramos a análise e o projeto de sistemas de controle com retroação com respeito aos erros de estado estacionário. Os erros de estado estacionário estudados resultaram exclusivamente da configuração do sistema. Com base na configuração do sistema e em um grupo de sinais de teste selecionados, a saber, degraus, rampas e parábolas, foi possível analisar ou projetar o desempenho de erro de estado estacionário do sistema. Quanto maior for o número de integrações puras no percurso direto de um sistema, maior será o grau de exatidão, supondo que o sistema seja estável.

Os erros de estado estacionário dependem do tipo de sinal de teste na entrada. Aplicando o teorema do valor final a sistemas estáveis, o erro de estado estacionário para entradas em degrau unitário é

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)} \tag{7.110}$$

O erro de estado estacionário para entradas em rampa com velocidade unitária é

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} \tag{7.111}$$

e para entradas em parábola com aceleração unitária é

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} \tag{7.112}$$

Os termos levados ao limite nas Eqs. (7.110) a (7.112) são chamados de *constantes de erro estático*. Começando com a Eq. (7.110), os termos em denominador levados ao limite são chamados, respectivamente, de *constante de posição*, *constante de velocidade* e *constante de aceleração*. As constantes de erro estático constituem especificações de erro de estado estacionário nos sistemas de controle. Ao especificar uma constante de erro estático, está sendo enunciado o número de integrações puras no percurso direto, o sinal de teste usado e o erro de estado estacionário esperado.

Uma outra definição coberta neste capítulo foi a de *tipo de sistema*. O tipo de sistema é o número de integrações puras no percurso direto supondo um sistema com retroação unitária. Aumentando-se o tipo de sistema diminui o erro de estado estacionário enquanto o sistema se mantiver estável.

Como o erro de estado estacionário é, na maioria dos casos, inversamente proporcional à constante de erro estático, quanto maior a constante de erro estático, tanto menor o erro de estado estacionário. Aumentando-se o ganho do sistema aumenta a constante de erro estático. Por conseguinte, de um modo geral, aumentando-se o ganho do sistema diminui o erro de estado estacionário enquanto o sistema se mantiver estável.

Os sistemas com retroação não-unitária foram manipulados deduzindo-se um sistema com retroação unitária equivalente cujas características de erro de estado estacionário seguiam todos os desenvolvimentos anteriores. O método ficou restrito a sistemas onde as unidades das grandezas de entrada e de saída eram iguais.

Vimos também como a retroação reduz o erro de estado estacionário de um sistema devido a perturbações. Com a retroação, o efeito de uma perturbação pode ser reduzido através de ajustes no ganho do sistema.

Finalmente, calculamos o erro de estado estacionário para sistemas representados no espaço de estados, usando o método do teorema do valor final e o método de substituição da entrada.

No próximo capítulo iremos examinar o lugar das raízes, uma poderosa ferramenta de análise e de projeto de sistemas de controle.

Perguntas de Revisão

1. Cite duas fontes de erro de estado estacionário.
2. Um sistema de controle de posição, rastreando com uma diferença constante em velocidade, conduz a que erro de posição em estado estacionário?
3. Cite os sinais de teste usados para avaliar o erro de estado estacionário.
4. Quantas integrações no percurso direto são necessárias para que os erros de estado estacionário sejam nulos com relação a cada um dos sinais de teste listados na Pergunta 3?
5. O aumento no ganho do sistema tem que efeito sobre o erro de estado estacionário?
6. Para uma entrada em degrau, o erro de estado estacionário é aproximadamente igual ao inverso da constante de erro estático se qual condição for verdadeira?
7. Qual a relação exata entre as constantes de erro estático e os erros de estado estacionário para entradas em rampa e parábola?
8. Quais informações estão contidas na especificação $K_p = 10.000$?
9. Defina *tipo de sistema*.
10. A função de transferência do canal direto de um sistema de controle possui três pólos em -1, -2 e -3. Qual o tipo de sistema?
11. Qual o efeito da retroação sobre as perturbações?
12. Para uma perturbação em degrau na entrada de um processo a controlar, descreva o efeito do controlador e do ganho da planta no sentido de minimizar o efeito da perturbação.
13. Se o sistema possuir retroação não-unitária, o sinal atuante do percurso direto é o erro do sistema?
14. Como são analisados e projetados os sistemas com retroação não-unitária quanto aos erros de estado estacionário?
15. Defina, em palavras, *sensibilidade* e descreva o objetivo da engenharia de sistemas de controle no que se aplica à sensibilidade.
16. Cite dois métodos para calcular o erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados.

Problemas

1. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{450(s+8)(s+12)(s+15)}{s(s+38)(s^2+2s+28)}$$

determinar os erros de estado estacionário para as seguintes entradas de teste: $25u(t)$, $37tu(t)$, $47t^2u(t)$.

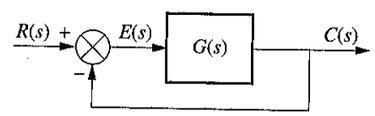


Fig. P7.1

2. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{20(s+3)(s+4)(s+8)}{s^2(s+2)(s+15)}$$

determinar o erro de estado estacionário se a entrada for $30t^2$.

3. Para o sistema mostrado na Fig. P7.2, qual o erro de estado estacionário esperado para uma entrada de $15u(t)$?

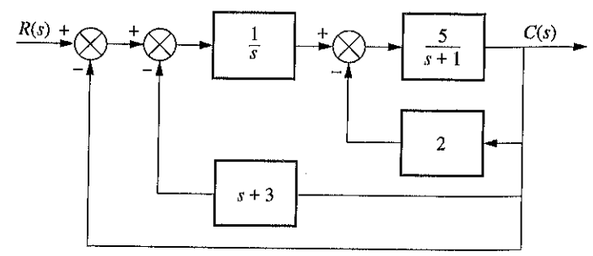


Fig. P7.2

4. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{500}{(s+20)(s^2+4s+10)}$$

determinar o erro de estado estacionário para as seguintes entradas: $40u(t)$, $70tu(t)$ e $80t^2u(t)$.

5. Um sinal $t^3u(t)$ é aplicado à entrada de um sistema com retroação unitária do Tipo 3, como mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{30(s+1)(s+2)(s+3)}{s^3(s+5)(s+10)}$$

Determinar o erro de posição em estado estacionário.

6. O erro de velocidade em estado estacionário de um sistema é definido como

$$\left(\frac{dr}{dt} - \frac{dc}{dt}\right)\Bigg|_{t\to\infty}$$

onde r é a entrada do sistema e c é a saída. Determinar o erro de velocidade em estado estacionário para uma entrada $t^3u(t)$ aplicada a um sistema com retroação unitária cuja função de transferência do percurso direto é

$$G(s) = \frac{100(s+1)(s+2)}{s^2(s+3)(s+10)}$$

7. Qual é o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau de 15 unidades aplicada ao sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{1000(s+12)(s+25)(s+32)}{(s+61)(s+73)(s+87)}$$

8. Um sistema possui $K_p = 3$. Qual o erro de estado estacionário esperado para as entradas $8u(t)$ e $8ut(t)$?

9. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{5000}{s(s+75)}$$

a. Qual a ultrapassagem percentual esperada para uma entrada em degrau unitário?
b. Qual o tempo de assentamento para uma entrada em degrau?
c. Qual o erro de estado estacionário para uma entrada $5u(t)$?
d. Qual o erro de estado estacionário para uma entrada $5tu(t)$?
e. Qual o erro de estado estacionário para uma entrada $5t^2u(t)$?

10. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{100(s+2)(s+9)}{s(s+18)(s+\alpha)(s+10)}$$

determinar o valor de α que produz $K_v = 1000$.

11. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+4)(s+6)}{s^2(s+5)(s+7)}$$

determinar o valor de K que produz uma constante de erro estático de 10.000.

12. Para o sistema mostrado na Fig. P7.3:
a. Determinar K_p, K_v e K_a.
b. Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada de $50u(t)$, $50tu(t)$ e $50t^2u(t)$.
c. Diga qual é o tipo do sistema.

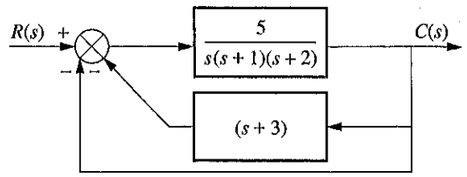


Fig. P7.3

13. Um sistema do Tipo 3 com retroação unitária é submetido a uma entrada t^3. Determinar o erro de posição em estado estacionário quando a função de transferência do percurso direto for

$$G(s) = \frac{1000(s^2+4s+20)(s^2+20s+15)}{s^3(s+2)(s+10)}$$

14. Determinar o tipo do sistema representado na Fig. P7.4.

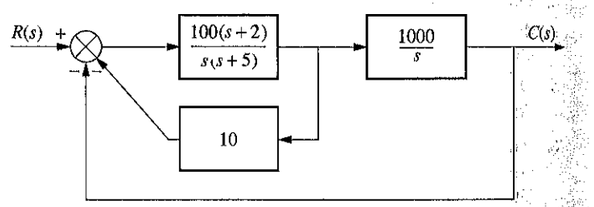


Fig. P7.4

15. O erro de estado estacionário é definido como sendo a diferença em posição entre a entrada e a saída quando o tempo tende para infinito. Definamos um erro de velocidade em estado estacionário, que é a diferença em velocidade entre entrada e saída. Deduza uma expressão para o erro em velocidade, $\dot{e}(\infty) = \dot{r}(\infty) - \dot{c}(\infty)$ e complete a Tabela P7.1, para o erro em velocidade.

Tabela P7.1

		Tipo		
		0	1	2
Entrada	Degrau			
	Rampa			
	Parábola			

16. Para o sistema mostrado na Fig. P7.5:
a. Que valor de K produz um erro de posição em estado estacionário de 0,01 para uma entrada de $(1/10)t$?

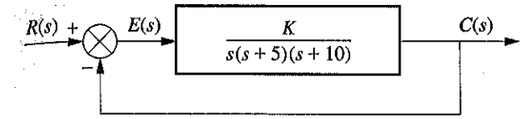


Fig. P7.5

b. Qual o valor de K_v para valor de K obtido em (a)?
c. Qual o valor mínimo possível do erro de posição em estado estacionário para a entrada fornecida em (a)?

17. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+10)}$$

determinar o valor de Ka de modo que uma rampa com inclinação de 15 produza, em regime permanente, um de erro de 0,003 quando comparada com a saída.

18. Dado o sistema mostrado na Fig. P7.6, projetar o valor de K de modo que para uma entrada $100tu(t)$ haja um erro de 0,01 em regime permanente.

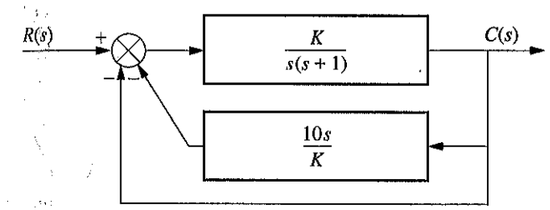


Fig. P7.6

19. Determinar o valor de K para que o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$$

apresente um erro de estado estacionário de 0,01 quando a entrada for $10t^2u(t)$.

20. O sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s^2+3s+30)}{s^n(s+5)}$$

deve ter um erro de 1/6000 entre uma entrada $10tu(t)$ e a saída em estado estacionário.
a. Determinar K e n para atender a especificação.
b. Quais os valores de K_p, K_v e K_a?

21. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s^2+2s+5)}{(s+2)^2(s+3)}$$

a. Determinar o tipo de sistema.
b. Que erro pode ser esperado para uma entrada de $10u(t)$?
c. Que erro pode ser esperado para uma entrada de $10tu(t)$?

22. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+10)}{s(s+2)(s+20)}$$

determinar o valor de K que conduz a um erro de estado estacionário de 0,1 para uma entrada em rampa $50tu(t)$.

23. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s^2+10s+26)}$$

determinar o valor de K que conduz a um erro de estado estacionário de 5%.

24. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+8)(s+10)}$$

determinar o valor mínimo possível do erro de posição em estado estacionário se for aplicada uma entrada em rampa. O que estabelece restrição sobre o erro?

25. O sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+\alpha)}{(s+\beta)^2}$$

deve ser projetado para atender as seguintes especificações: erro de estado estacionário para uma entrada em degrau = 0,1; relação de amortecimento = 0,5; freqüência natural = $\sqrt{10}$. Determinar K, α e β.

26. Um sistema de segunda ordem, com retroação unitária, deve seguir uma entrada em rampa com as seguintes especificações: o erro de posição em estado estacionário deve diferir da entrada em posição de 0,01 da velocidade de entrada; a freqüência natural do sistema a malha fechada deve ser 10 rad/s. Determine o seguinte:
a. Tipo do sistema
b. Expressão exata da função de transferência do percurso direto
c. Relação de amortecimento do sistema a malha fechada

27. O sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+\alpha)}{s(s+\beta)}$$

deve ser projetado para atender os seguintes requisitos: erro de posição em estado estacionário para uma entrada em rampa unitária igual a 1/10; os pólos a malha fechada localizados em $-1 \pm j1$. Determinar K, α e β para atender as especificações.

28. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K}{s^n(s+a)}$$

determinar os valores de n, K e a a fim de atender as especificações de 10% de ultrapassagem percentual e $K_v = 100$.

29. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P7.1, onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

Determinar o seguinte:
a. K e a para que forneçam $K_v = 1000$ e uma ultrapassagem de 20%
b. K e a para que forneçam um erro de estado estacionário de 1% e uma ultrapassagem de 10%

30. Dado o sistema da Fig. P7.7, determinar o seguinte:
a. A função de transferência a malha fechada
b. O tipo de sistema
c. O erro de estado estacionário para uma entrada $5u(t)$
d. O erro de estado estacionário para uma entrada $5tu(t)$
e. Discutir a validade das respostas dadas a (c) e (d).

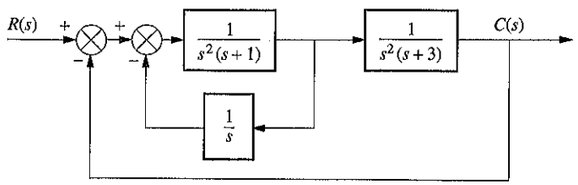


Fig. P7.7

31. Repita o Problema 30 para o sistema mostrado na Fig. P7.8.

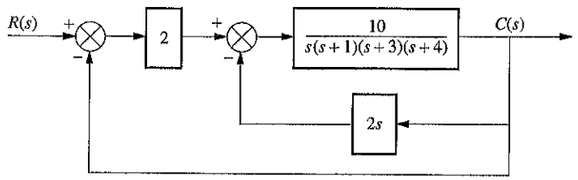


Fig. P7.8

MATLAB

32. Para o sistema mostrado na Fig. P7.9, use o MATLAB para obter o seguinte:
a. O tipo de sistema
b. K_p, K_v e K_a
c. O valor de estado estacionário para as entradas $30u(t)$, $30tu(t)$ e $30t^2u(t)$

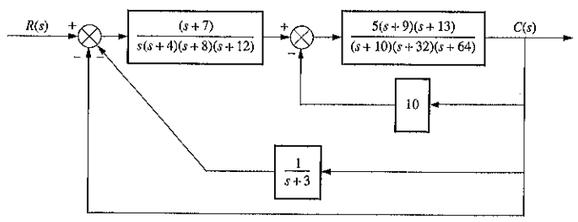


Fig. P7.9

33. O sistema da Fig. P7.10 deve atender as seguintes especificações: $K_v = 10$; $\zeta = 0{,}5$. Determinar os valores de K_1 e K_f necessários ao atendimento das especificações.

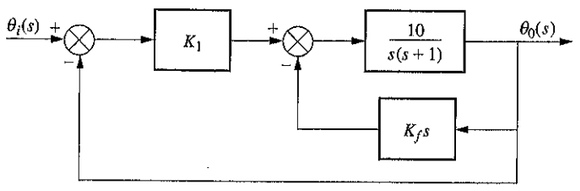


Fig. P7.10

34. Determine o erro total em estado estacionário devido a uma entrada em degrau unitário e a uma perturbação em degrau unitário no sistema da Fig. P7.11.

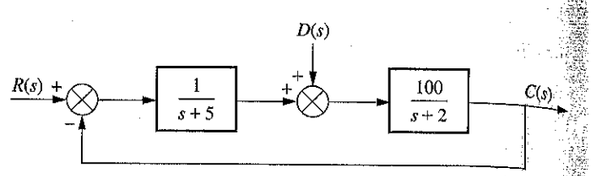


Fig. P7.11

35. Projetar os valores de K_1 e K_2 no sistema da Fig. P7.12 para atender as seguintes especificações: a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau unitário é $-0{,}000012$; a componente do erro de estado estacionário devida a uma entrada em rampa unitária é 0,003.

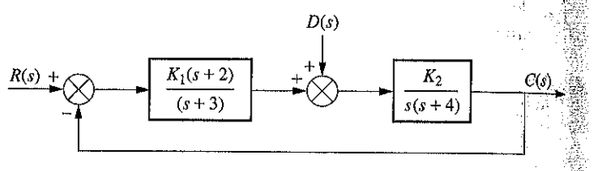


Fig. P7.12

36. Deduza a Eq. (7.72) no texto, o valor final do sinal atuante para sistemas com retroação não-unitária.

37. Para cada um dos sistemas mostrados na Fig. P7.13, determine o seguinte:
a. O tipo do sistema
b. A constante de erro estático apropriada
c. A forma de onda que conduz à constante de erro
d. O erro de estado estacionário para uma entrada unitária da forma de onda obtida em (c)
e. O valor de estado estacionário do sinal atuante

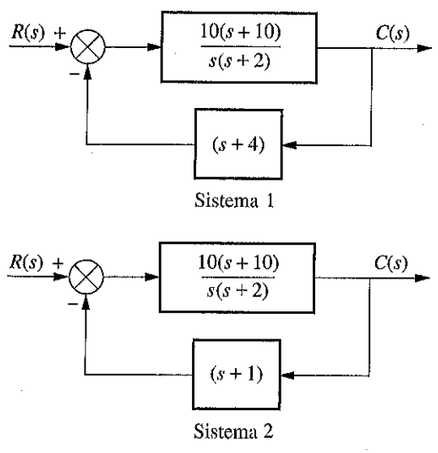


Fig. P7.13 Sistemas de controle com retroação não-unitária

38. Para cada um dos sistemas mostrados na Fig. P7.14, determine a constante de erro estático apropriada, bem como o erro de estado estacionário, $r(\infty) - c(\infty)$, para entradas em degrau unitário, rampa unitária e parábola unitária.

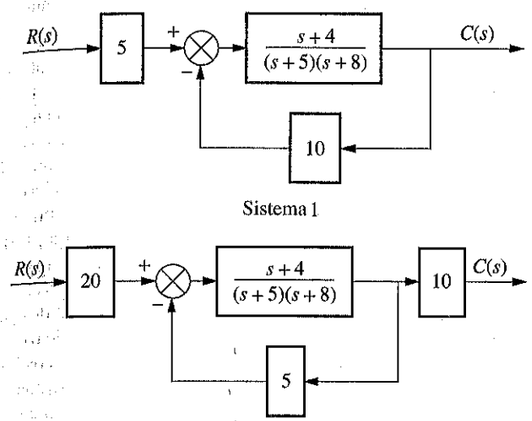


Fig. P7.14

39. Dado o sistema mostrado na Fig. P7.15, determine o seguinte:
a. O tipo do sistema
b. O valor de K que conduza um erro de estado estacionário de 0,1%

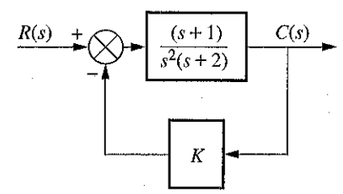


Fig. P7.15

40. Para o sistema mostrado na Fig. P7.16:
a. Qual é o tipo do sistema?
b. Qual a constante de erro apropriada?
c. Qual o valor da constante de erro apropriada?
d. Qual é o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário?

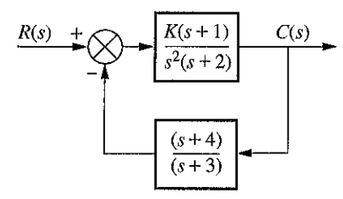


Fig. P7.16

MATLAB

41. Para o sistema mostrado na Fig. P7.17, use o MATLAB para determinar o seguinte, com $K = 10$ e $K = 10^6$:
a. O tipo do sistema
b. K_p, K_v e K_a
c. O erro de estado estacionário para as entradas $30u(t)$, $30tu(t)$ e $30t^2u(t)$

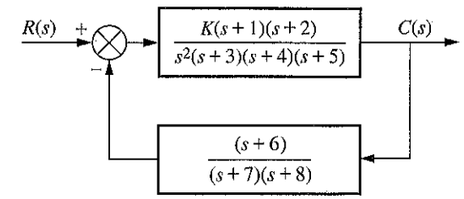


Fig. P7.17

42. Deduza a Eq. (7.69) no texto.

43. Dado o sistema mostrado na Fig. P7.18, faça o seguinte:
a. Deduza a expressão do erro, $E(s) = R(s) - C(s)$, em termos de $R(s)$ e $D(s)$.
b. Deduza o erro de estado estacionário, $e(\infty)$, se $R(s)$ e $D(s)$ forem funções degrau unitário.
c. Determine os atributos de $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $H(s)$ para que o erro de estado estacionário se torne zero.

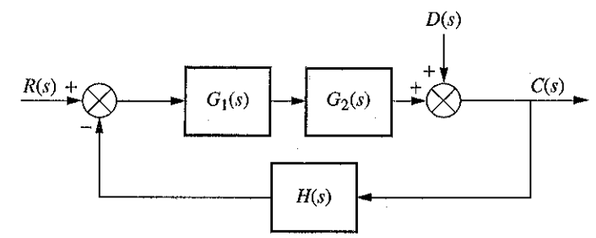


Fig. P7.18 Sistema com entrada e perturbação

44. Dado o sistema mostrado na Fig. P7.19, determinar a sensibilidade do erro de estado estacionário ao parâmetro a. Suponha uma entrada em degrau. Trace o gráfico da sensibilidade como uma função do parâmetro a.

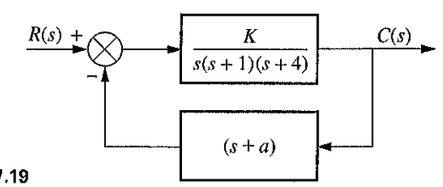


Fig. P7.19

45. Para o sistema mostrado na Fig. P7.20, determinar a sensibilidade do erro de estado estacionário a variações em K_1 e K_2, quando $K_1 = 100$ e $K_2 = 0{,}1$. Admita que tanto a entrada quanto a perturbação sejam em degrau.

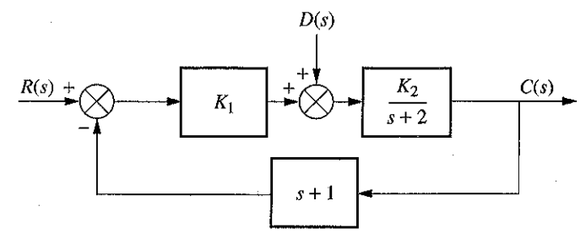


Fig. P7.20 Sistema com entrada e perturbação

46. Para cada um dos seguintes sistemas a malha fechada, determine o erro de estado estacionário para entradas em de-

grau unitário e em rampa unitária. Utilize tanto o método do teorema do valor final quanto o da substituição de entrada.

a. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -3 & -10 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r; \qquad y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

b. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -9 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r; \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

c. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -9 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} r; \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

47. Um sistema de direção de um automóvel fornece uma distância real de saída, $X(s)$, para uma entrada de distância desejada, $X_C(s)$, como mostrado na Fig. P7.21(*a*). Toda diferença, $X_e(s)$, entre a distância comandada e a distância real é convertida em um comando de velocidade, $V_C(s)$, pelo controlador e aplicada ao acelerador do veículo. O veículo responde ao comando de velocidade com uma velocidade, $V(s)$, e é produzido um deslocamento, $X(s)$. O controle de velocidade, $G_2(s)$, é, ele próprio, a malha fechada, como mostrado na Fig. P7.21(*b*). Aqui, a diferença, $V_e(s)$, entre a velocidade comandada, $V_C(s)$, e a velocidade real do veículo, $V(s)$, aciona um motor que desloca o acelerador do automóvel de $Y_C(s)$ (Stefani, 1978). Determine o erro de estado estacionário da malha de controle de velocidade se a função de transferência do motor e do amplificador, $G_3(s) = K/[s(s+1)]$. Admita que $G_4(s)$ seja um sistema de primeira ordem, onde um deslocamento máximo de 1 m do cabo do acelerador (aproximadamente 30 cm) equivale a uma velocidade de 100 km/h, com o automóvel atingindo 60 km/h em 10 segundos.

48. Um diagrama de blocos simplificado de um instrumento usado para medir concentração de oxigênio está mostrado na Fig. P7.22. O instrumento utiliza as propriedades paramagnéticas de um jato de oxigênio. Um corpo de pequenas dimensões é posicionado em um jato de oxigênio cuja concentração é $R(s)$ e é submetido a um campo magnético. O torque aplicado ao corpo, $K_1R(s)$, devido ao campo magnético, é uma função da concentração do oxigênio. O deslocamento do corpo, $\theta(s)$, é detectado e uma tensão, $C(s)$, proporcional ao deslocamento se desenvolve. Esta tensão é usada para criar um campo eletrostático que aplica um torque, $K_3C(s)$, ao corpo em sentido oposto ao que é produzido pelo campo magnético. Quando o corpo fica em repouso, a tensão de saída representa a intensidade do torque magnético, que, por sua vez, se relaciona com a concentração de oxigênio (Chesmond, 1982). Determinar o erro de estado estacionário entre a tensão de saída, representando a concentração de oxigênio, e a concentração de oxigênio de entrada. Como você poderia reduzir o erro a zero?

49. A estação espacial *Freedom*, mostrada na Fig. P7.23(*a*), manterá seus painéis solares apontados na direção do Sol. Se admitirmos que o diagrama de blocos simplificado da Fig. P7.23(*b*)

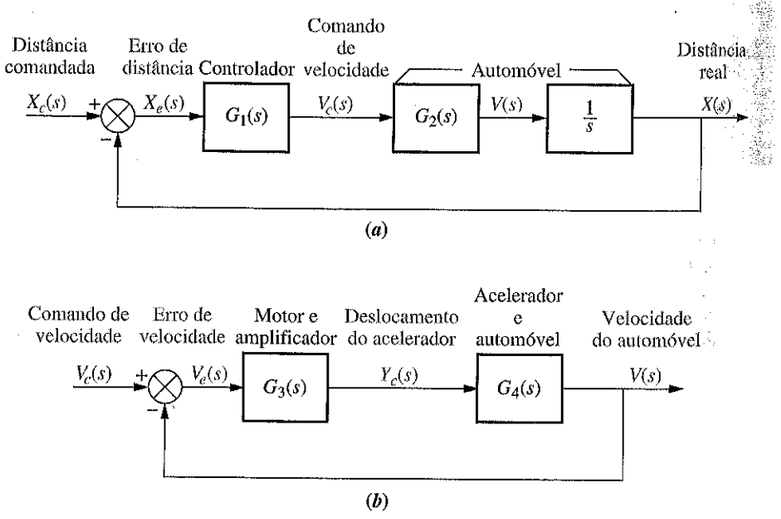


Fig. P7.21 Sistema de direção de um automóvel
a. sistema de controle de deslocamento;
b. malha de controle de velocidade

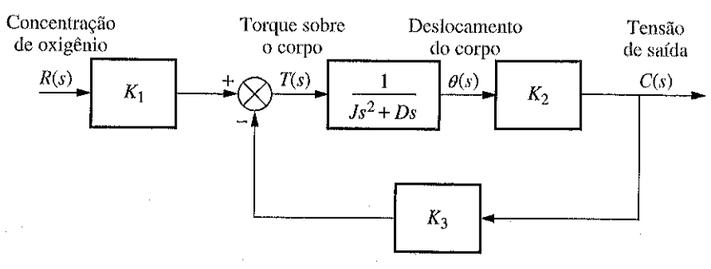


Fig. P7.22 Diagrama de blocos de um analisador paramagnético de oxigênio

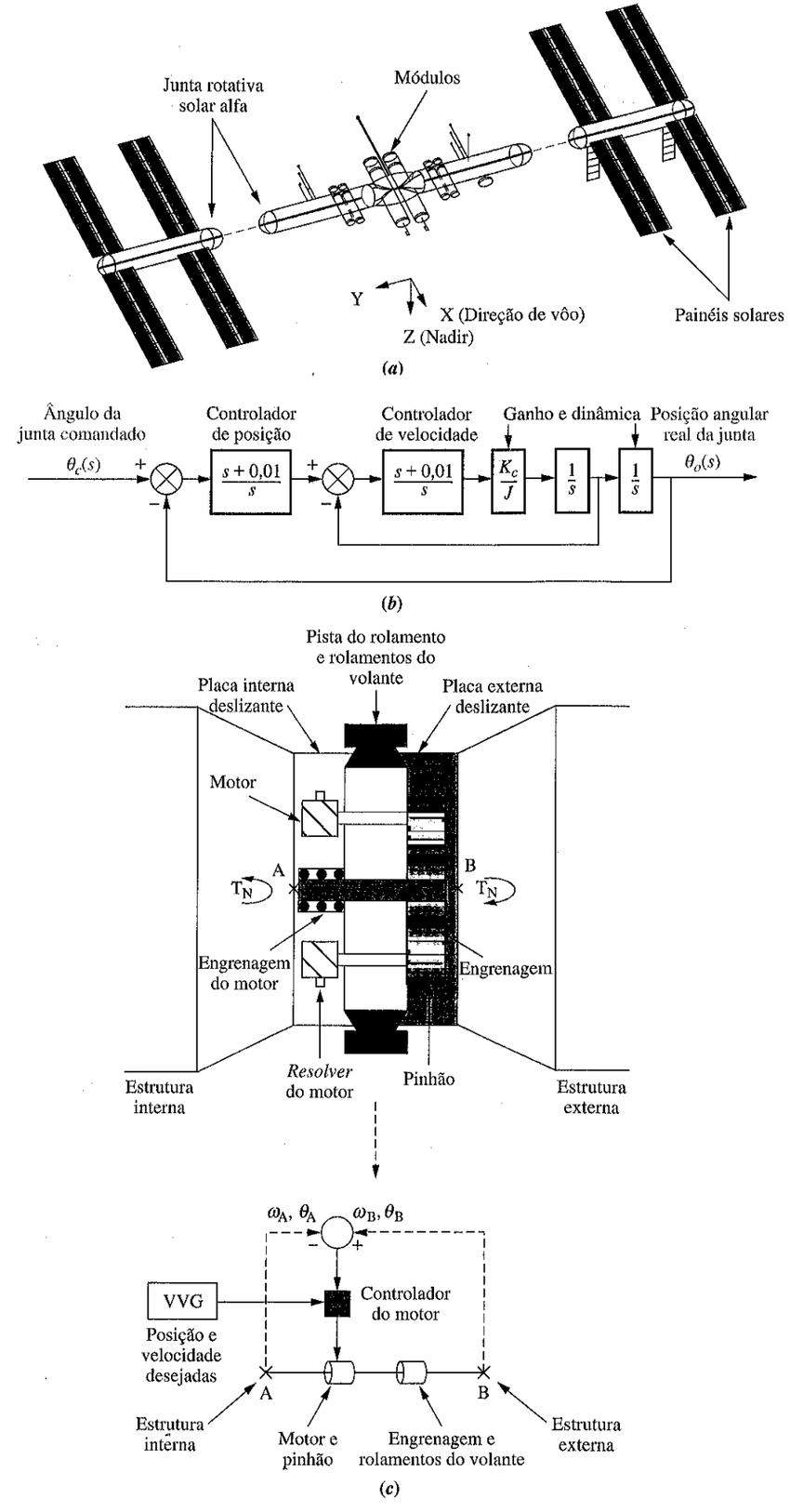


Fig. P7.23 Estação espacial *Freedom*:
a. configuração (© 1992 AIAA)
b. diagrama de blocos simplificado
c. cadeia de acionamento da junta alfa e sistema de controle (© 1992 AIAA)

representa o sistema de rastreamento solar que será usado para girar o painel por intermédio de juntas rotativas chamadas *juntas rotativas solares alfa* (Fig. P7.23(*c*)), determinar (Kumar, 1992):

a. O erro de estado estacionário para comandos em degrau
b. O erro de estado estacionário para comandos em rampa
c. O erro de estado estacionário para comandos em parábola
d. A faixa de valores K_c/J para tornar o sistema estável

Problemas de Projeto

50. A seguinte especificação se aplica a um controle de posição: $K_v = 10$. Dispõe-se de um amplificador com ganho variável, K_2, com o qual se aciona um motor. Dispõe-se também de dois potenciômetros de uma volta aos quais são aplicados $\pm 3\pi$ volts. Dispõe-se de um motor cuja função de transferência é

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s(s+\alpha)}$$

onde $\theta_m(s)$ é a posição angular do rotor do motor e $E_a(s)$ é a tensão da armadura. Os componentes estão interligados como mostrado na Fig. P7.24.

A função de transferência do motor é determinada experimentalmente de acordo com o procedimento a seguir. O motor e a carga são acionados separadamente aplicando-se à armadura uma onda em forma de pulso retangular de grande amplitude e de curta duração (isto é, um impulso unitário). Um registro oscilográfico da resposta mostra que o motor atingiu 63% do seu valor final na saída 0,5 segundo depois da aplicação do pulso. Além disso, com 10 volts CC aplicados à armadura, a velocidade de saída constante foi de 100 rad/s. Esboce o diagrama de blocos completo do sistema, especificando a função de transferência de cada um dos componentes do diagrama de blocos.

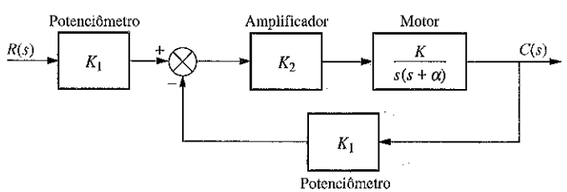


Fig. P7.24 Sistema de controle de posição

51. Um barco descreve uma trajetória circular em torno de um navio que está usando um radar de rastreamento. A velocidade do barco é de 20 nós (20 milhas náuticas por hora) e ele está circulando o navio a uma distância de 1 milha náutica, como visto na Fig. P7.25(*a*). Um modelo simplificado do sistema de rastreamento está mostrado na Fig. P7.25(*b*). Determinar o valor de K de modo que o barco seja mantido no centro do feixe de radar com um erro inferior a 0,1 grau.

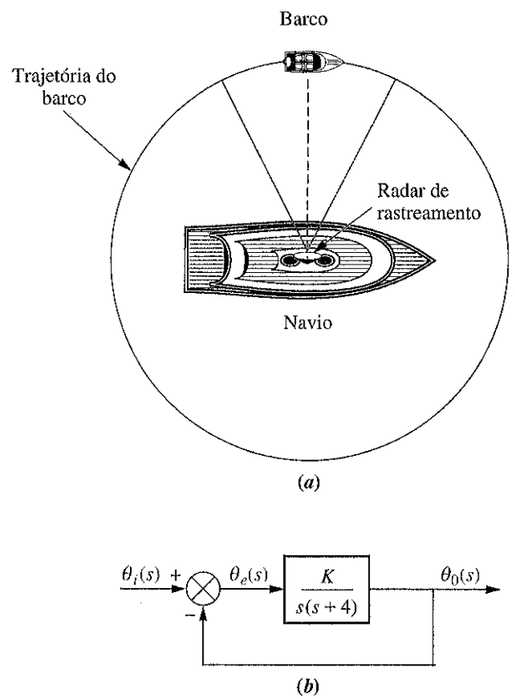


Fig. P7.25 Barco rastreado pelo radar do navio
a. arranjo físico;
b. diagrama de blocos do sistema de rastreamento

52. A Fig. P7.26 mostra o diagrama simplificado de um piloto na malha de controle de atitude de rolamento de um helicóptero Black Hawk UH–60A de dois motores com um único rotor principal (Hess, 1993).

a. Determine o tipo de sistema.
b. A resposta do piloto determina o valor de K_1. Ache o valor de K_1 para que a constante de erro estático apropriada seja de 700.
c. Um piloto com um valor de K_1 encontrado no item (*b*) poderia ser contratado para pilotar o helicóptero?

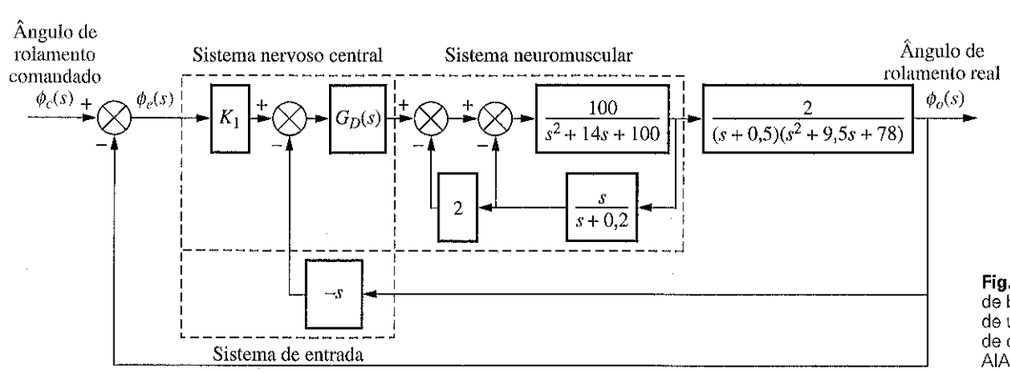


Fig. P7.26 Diagrama de blocos simplificado de um piloto na malha de controle (© 1992 AIAA)

53. O controle de movimento, que inclui o controle de posição ou o controle de força, é usado em robótica e em máquinas de usinagem. O controle de força requer que o projetista considere duas fases: movimento com contacto e movimento sem contacto. A Fig. P7.27(*a*) é um diagrama de um sistema mecânico para o controle de força no movimento com contacto. Um comando de força, $F_{cmd}(s)$, é a entrada do sistema, enquanto a saída, $F(s)$, é a força de contacto controlada.

Na figura, um motor é usado como atuador de força. A saída de força do atuador é aplicada ao objeto através de um sensor de força. Uma representação do sistema em diagrama de blocos está mostrada na Fig. P7.27(*b*). K_2 é a retroação de velocidade usada para melhorar a resposta transitória. O sistema é implementado efetivamente por uma malha elétrica (não representada) que controla a corrente de armadura do motor para produzir o torque de saída desejado. Lembre-se de que $T_m = K_t i_a$ (Ohnishi, 1996). Determine uma expressão para a faixa de valores de K_2 para manter um erro de força em estado estacionário abaixo de 10% para entradas de força comandada em rampa.

54. O Problema 49 no Cap. 4 descreve um controlador a malha aberta de uma articulação e o processo de um robô industrial. A função de transferência do controlador e do processo é

$$G_e(s) = \frac{\omega_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K}{(s+10)(s^2+4s+10)}$$

onde $\omega_o(s)$ é a transformada de Laplace da velocidade angular da articulação do robô e $V_i(s)$ é a tensão de entrada do controlador. Admita que $G_e(s)$ seja a função de transferência do percurso direto do controle de velocidade com um transdutor de entrada e um sensor, cada um deles representado por um ganho constante de valor 3 (Schneider, 1992).

a. Determine o valor do ganho, K, para minimizar o erro de estado estacionário entre a velocidade angular de entrada comandada da articulação e a velocidade angular real da articulação.
b. Qual o erro de estado estacionário para o valor de K encontrado em (*a*)?
c. Para que tipo de entrada o projeto do item (*a*) se aplica?

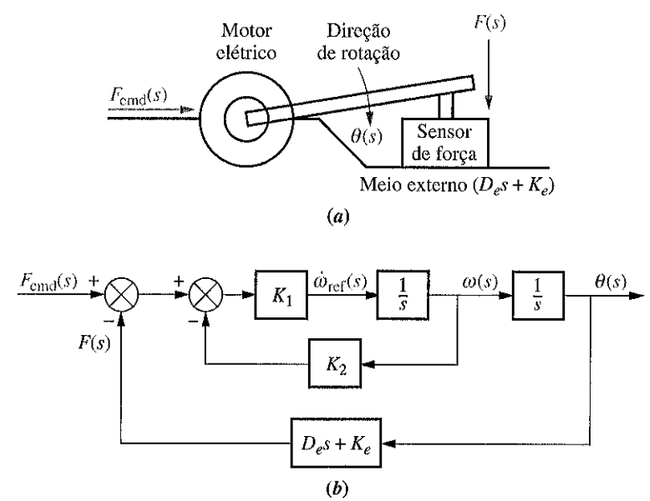


Fig. P7.27 a. Malha de controle mecânico de força de movimento com contacto (© 1996 IEEE); **b.** diagrama de blocos (© 1996 IEEE)

Problema Progressivo de Análise e Projeto

55. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 trata do controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade. No Problema 62(*a*), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle pantográfico ativo. Use a solução do Problema 62(*a*) no Cap. 5 parra executar a análise e o projeto de desempenho de erro em estado estacionário a seguir (O'Connor, 1997):

a. Determinar o tipo de sistema.
b. Determinar o valor do ganho do controlador, K, que minimiza o erro de força em estado estacionário.
c. Qual é o valor mínimo do erro de força em estado estacionário?

Bibliografia

Chesmond, C. J. *Control System Technology.* E. Arnold, London, 1982.

D'Azzo, J. J., and Houpis, C. H. *Feedback Control System Analysis and Design Conventional and Modern.* 3d ed. McGraw-Hill, New York, 1988.

Hess, R. A.; Malsbury, T.; and Atencio, A., Jr. Flight Simulator Fidelity Assessment in a Rotorcraft Lateral Translation Maneuver. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 16, no. 1, January--February 1993, pp. 79–85.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J., Jr.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems.* 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Isailović, J. *Videodisc and Optical Memory Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

Kumar, R. R.; Cooper, P. A.; and Lim, T. W. Sensitivity of Space Station Alpha Joint Robust Controller to Structural Modal Parameter Variations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 6, November–December 1992, pp. 1427–1433.

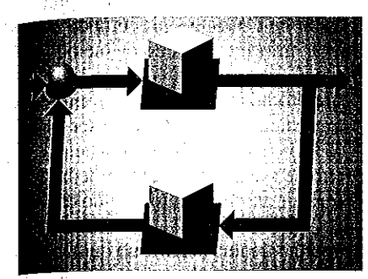
O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ohnishi, K.; Shibata, M.; and Murakami, T. Motion Control for Advanced Mechatronics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics,* vol. 1, no. 1, March 1996, pp. 56–67.

Schneider, R. T. Pneumatic Robots Continue to Improve. *Hydraulics & Pneumatics,* October 1992, pp. 38–39.

Stefani, R. T. Design and Simulation of an Automobile Guidance and Control System. *Transactions, Computers in Education Division of ASEE,* January 1978, pp. 1–9.

CAPÍTULO 8



Técnicas do Lugar das Raízes

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- A definição de lugar das raízes
- Como esboçar um lugar das raízes
- Como refinar o esboço de um lugar das raízes
- Como usar o lugar das raízes para encontrar os pólos de um sistema a malha fechada
- Como usar o lugar das raízes para descrever de forma quantitativa as alterações na resposta transitória e a estabilidade de um sistema quando um parâmetro é variado
- Como usar o lugar das raízes para projetar um valor de parâmetro de modo a atender uma especificação de resposta transitória em sistemas de segunda ordem e de ordem superior

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de obter o ganho do pré-amplificador para determinar uma especificação de resposta transitória.
- Dado o sistema de controle de rumo ou de guinada do veículo UFSS mostrado na contracapa traseira, você será capaz de traçar o lugar das raízes e projetar o ganho para atender uma especificação de resposta transitória. Você será então capaz de calcular outras características de desempenho.

8.1 Introdução

O lugar das raízes, uma apresentação gráfica dos pólos a malha fechada em função da variação de um parâmetro de sistema, é um poderoso método de análise e projeto visando à estabilidade e à resposta transitória (Evans, 1948; 1950). Os sistemas de controle com retroação são difíceis de compreender de um ponto de vista qualitativo e portanto dependem fundamentalmente de matemática. O lugar das raízes tratado neste capítulo é uma técnica gráfica que nos oferece a descrição qualitativa do desempenho de um sistema de controle que estamos procurando e que também serve como uma poderosa ferramenta quantitativa fornecedora de mais informações que os métodos já discutidos.

Até este ponto, ganhos e outros parâmetros de sistema foram projetados para produzir uma resposta transitória desejada apenas com relação a sistemas de primeira e segunda ordens. Embora o lugar das raízes possa ser usado para resolver o mesmo tipo de problema, sua força real reside na capacidade de fornecer soluções para sistemas de ordem maior que dois. Por exemplo, sob determinadas condições, um parâmetro de sistema de quarta ordem pode ser projetado para produzir um determinado percentual de ultrapassagem e tempo de assentamento usando os conceitos estudados no Cap. 4.

O lugar das raízes pode ser usado para descrever qualitativamente o desempenho de um sistema no qual vários parâmetros são mudados. Por exemplo, o efeito de se variar o ganho sobre o percentual de ultrapassagem, tempo de assentamento e instante de pico pode ser evidenciado de forma clara. A descrição qualitativa pode então ser verificada através de análise quantitativa.

Além da resposta transitória, o lugar das raízes também fornece uma representação gráfica da estabilidade do sistema. Podemos ver claramente as faixas de valores de estabilidade, as faixas de valores de instabilidade, e as condições que fazem com que o sistema entre em oscilação.

Antes de apresentar o lugar das raízes façamos uma revisão de dois conceitos dos quais dependemos para a discussão: (1) o problema do sistema de controle, e (2) números complexos e suas representações como vetores.

O Problema dos Sistemas de Controle

Encontramos anteriormente no Cap. 6 o problema dos sistemas de controle: enquanto os pólos da função de transferência a malha aberta são facilmente determinados (comumente são conhecidos por inspeção e não se alteram com mudanças no ganho do sistema), os pólos da função de transferência a malha fechada são mais difíceis de determinar (normalmente não podem ser encontrados sem fatorar o polinômio característico do sistema a malha fechada, o denominador da função de transferência a malha fechada), e além disso, os pólos a malha fechada se alteram quando se muda o valor do ganho do sistema.

Um sistema de controle com retroação a malha fechada típico é mostrado na Fig. 8.1(*a*). A função de transferência a malha aberta foi definida no Cap. 5 como $KG(s)H(s)$. Geralmente, podemos determinar os pólos de $KG(s)H(s)$, uma vez que estes pólos se originam de uma simples associação em cascata de subsistemas de primeira ou de segunda ordens. Além do mais, variações em K não afetarão a localização de qualquer dos pólos dessa função. Por outro lado, não podemos determinar os pólos de $T(s) = KG(s)/[1 + KG(s)H(s)]$, a menos que fatoremos o denominador. Além disso, os pólos de $T(s)$ se alteram com K. Demonstremos.

Fazendo

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \tag{8.1}$$

e

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} \tag{8.2}$$

por conseguinte

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)} \tag{8.3}$$

onde N e D são polinômios fatorados e significam os termos em numerador e em denominador, respectivamente. Observamos o seguinte: Conhecemos, de um modo geral, os fatores dos numeradores e denominadores de $G(s)$ e $H(s)$. Além disso, os zeros de $T(s)$ consistem nos zeros de $G(s)$ e nos pólos de $H(s)$. Os pólos de $T(s)$ não são conhecidos imediatamente e, de fato, podem mudar com K. Por exemplo, se $G(s) = (s + 1)/[s(s + 2)]$ e $H(s) = (s + 3)/(s + 4)$, os pólos de $KG(s)H(s)$ são 0, -2 e -4. Os zeros de $KG(s)H(s)$ são -1 e -3. Imediatamente, $T(s) = K(s + 1)(s + 4)/[s^3 + (6 + K)s^2 + (8 + 4K)s + 3K]$. Dessa forma, os zeros de $T(s)$ consistem nos zeros de $G(s)$ e nos pólos de $H(s)$. Os pólos de $T(s)$ não são conhecidos imediatamente sem fatorar o denominador, e estes são função de K. Como a resposta transitória do sistema e a estabilidade dependem dos pólos de $T(s)$, não conhecemos o desempenho do sistema a menos que fatoremos o denominador para valores específicos de K. O lugar das raízes será usado para nos dar uma representação que mostra os pólos de $T(s)$ em função de K.

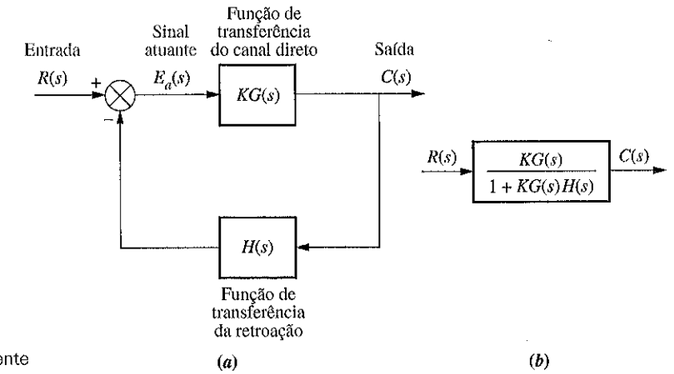


Fig. 8.1
a. Sistema a malha fechada;
b. função de transferência equivalente

Representação Vetorial de Números Complexos

Qualquer *número complexo*, $\sigma + j\omega$, descrito em coordenadas cartesianas pode ser representado graficamente por um vetor, como mostrado na Fig. 8.2(*a*). O número complexo pode também ser descrito em forma polar com magnitude M e ângulo θ, como $M \angle \theta$. Quando o número complexo é substituído em uma função complexa, $F(s)$, resulta outro número complexo. Por exemplo, se $F(s) = (s + a)$, substituindo então o número complexo $s = \sigma + j\omega$ resulta $F(s) = (\sigma + a) + j\omega$, outro número complexo. Este número está mostrado na Fig. 8.2(*b*). Observe que $F(s)$ apresenta um zero em $-a$. Se deslocarmos o vetor de a unidades para a esquerda, como na Fig. 8.2(*c*), teremos uma representação alternativa do número complexo que se origina no zero de $F(s)$ e termina no ponto $s = \sigma + j\omega$.

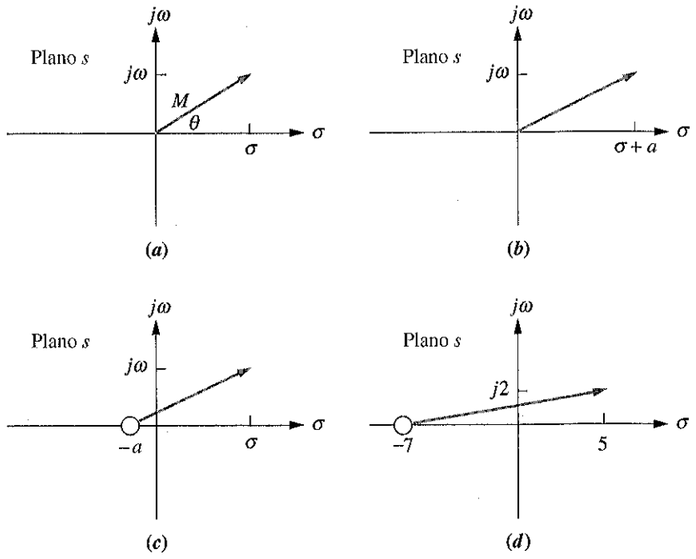
Concluímos que $(s + a)$ *é um número complexo e pode ser representado por um vetor traçado a partir do zero da função ao ponto s*. Por exemplo, $(s + 7)|_{s \to 5+j2}$ é um número complexo traçado a partir do zero da função, -7, para o ponto s, $5 + j2$, como mostrado na Fig. 8.2(*d*).

Apliquemos agora esses conceitos a uma função complexa. Suponha uma função,

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s + p_j)} = \frac{\Pi \text{ fatores complexos do numerador}}{\Pi \text{ fatores complexos do denominador}} \tag{8.4}$$

onde o símbolo Π significa "produto", m = número de zeros, e n = número de pólos. Cada fator do numerador e cada fator do denominador é um número complexo que pode ser representado por um vetor. A função define a

Fig. 8.2 Representação vetorial de números complexos:
a. $s = \sigma + j\omega$;
b. $(s + a)$;
c. representação alternativa de $(s + a)$;
d. $(s\ 1\ 7)|_{s \to 5+j2}$



aritmética complexa a ser executada para calcular $F(s)$ em qualquer ponto, s. Uma vez que cada fator complexo pode ser visto como um vetor, a magnitude, M, de $F(s)$ em qualquer ponto, s, é

$$M = \frac{\Pi \text{ comprimentos dos zeros}}{\Pi \text{ comprimento dos pólos}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^{n} |(s + p_j)|} \tag{8.5}$$

onde o comprimento de um zero, $|(s + Z_i)|$, é a magnitude do vetor traçado a partir de zero de $F(s)$ em $-z_i$ ao ponto s, e o comprimento de um um pólo, $|(s + p_j)|$ é a magnitude do vetor traçado a partir do pólo $F(s)$ em $-p_j$ ao ponto s. O argumento, θ, de $F(s)$ em qualquer ponto, s, é

$$\begin{aligned}\theta &= \sum \text{ângulos dos zeros} - \sum \text{ângulos dos pólos} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s + p_j)\end{aligned} \tag{8.6}$$

onde o argumento do zero é o ângulo, medido no sentido trigonométrico, a partir do eixo real, de um vetor traçado do zero de $F(s)$ em $-z_i$ ao ponto s, e o argumento do pólo é o ângulo, medido no sentido trigonométrico a partir do eixo real, de um vetor traçado do pólo de $F(s)$ em $-p_j$ ao ponto s.

Como demonstração do conceito acima, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 8.1

Cálculo de uma função complexa através de vetores

Problema Dado

$$F(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)} \tag{8.7}$$

obter $F(s)$ no ponto $s = -3 + j4$.

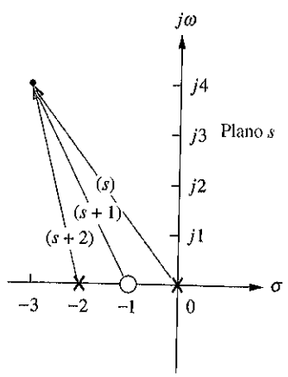
Solução O problema é esboçado graficamente na Fig. 8.3, onde cada vetor, $(s + \alpha)$, da função é mostrado terminando no ponto selecionado $s = -3 + j4$. O vetor que começa no zero em -1 é

$$\sqrt{20}\angle 116{,}6° \tag{8.8}$$

O vetor que começa no pólo na origem é

$$5\angle 126{,}9° \tag{8.9}$$

Fig. 8.3 Representação vetorial da Eq. (8.7)



O vetor que se origina no pólo em -2 é

$$\sqrt{17}\angle 104{,}0° \tag{8.10}$$

Substituindo as Eqs. (8.8) a (8.10) nas Eqs. (8.5) e (8.6) resulta

$$M\angle\theta = \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{17}}\angle 116{,}6° - 126{,}9° - 104{,}0° = 0{,}217\angle -114{,}3° \tag{8.11}$$

como resultado do cálculo de $F(s)$ no ponto $-3 + j4$.

Exercício de Avaliação 8.1

Problema: Dado

$$F(s) = \frac{(s + 2)(s + 4)}{s(s + 3)(s + 6)}$$

obter $F(s)$ no ponto $s = -7 + j9$ nas seguintes formas:

a. Substituindo diretamente o ponto em $F(s)$
b. Calculando o resultado usando vetores

Resposta: $-0{,}0339 - j0{,}0899 = 0{,}096\angle -110{,}7°$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Agora estamos prontos para começar nossa discussão sobre o lugar das raízes.

8.2 Definindo o Lugar das Raízes

Um sistema de câmara de vídeo, semelhante ao mostrado na Fig. 8.4(a), pode acompanhar automaticamente um objeto. O sistema de rastreamento consiste em um sensor duplo e um transmissor, onde um componente é montado sobre a câmara e o outro usado pelo objeto. Uma diferença entre as saídas dos dois sensores que recebem energia do transmissor faz com que o sistema gire a câmara para eliminar a diferença e seguir a fonte da energia. A técnica do lugar das raízes pode ser usada para analisar e projetar o efeito do ganho de malha sobre a resposta transitória e sobre a estabilidade do sistema.

Admita a representação em diagrama de blocos de um sistema de rastreamento como mostrado na Fig. 8.4(b), onde os pólos a malha fechada do sistema mudam de localização à medida que o ganho, K, é modificado. A Tabela 8.1, que foi formada aplicando a fórmula quadrática ao denominador da função de transferência na Fig. 8.4(c), mostra a variação da localização do pólo para diferentes valores de ganho, K. Os dados da Tabela 8.1 são apresentados graficamente na Fig. 8.5(a), a qual mostra cada pólo e o valor de ganho correspondente.

À medida que o ganho, K, aumenta na Tabela 8.1 e na Fig. 8.5(a), o pólo a malha fechada, que está em -10 para $K = 0$, move-se para a direita, e o pólo a malha fechada, que está em 0 para $K = 0$, move-se para a esquerda. Eles se encontram em -5, saem do eixo real, e se deslocam para o plano complexo. Um dos pólos a malha fechada move-se para cima enquanto o outro move-se para baixo. Não podemos dizer qual dos pólos se move para cima ou para baixo. Na Fig. 8.5(b) retiramos a localização dos pólos individuais a malha fechada e representamos seus percursos por linhas cheias. Esta é a *representação do percurso dos pólos a malha fechada à medida que o ganho é modificado* que chamamos um *lugar das raízes*. Na maioria do nosso trabalho, a discussão será limitada a valores positivos de ganho, ou seja, $K \geq 0$.

O lugar das raízes mostra a mudança na resposta transitória resultante da variação do ganho, K. Primeiro que tudo, os pólos são reais para ganhos menores que 25. Dessa forma, o sistema é superamortecido. Com um ganho de 25, os pólos são reais e múltiplos e, portanto, criticamente amortecidos. Para ganhos acima de 25, o sistema é subamortecido. Embora as conclusões acima tenham sido obtidas através das técnicas analíticas cobertas no Cap. 4, as conclusões decorrentes são demonstradas graficamente pelo lugar das raízes.

Dirigindo a atenção para a parte subamortecida do lugar das raízes, notamos que, independente de qual seja o valor de ganho, as partes reais dos pólos complexos são sempre as mesmas. Como o tempo de assentamento é inversamente proporcional à parte real dos pólos complexos deste sistema de segunda ordem, a conclusão é que, independente de qual seja o valor de ganho, o tempo de assentamento para o sistema permanece o mesmo em todas as situações de resposta subamortecida.

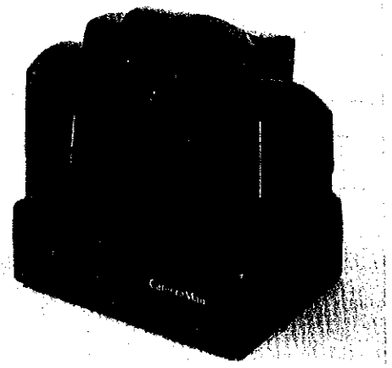
Além disso, à medida que aumentamos o ganho, a relação de amortecimento diminui, e a ultrapassagem percentual aumenta. A freqüência de oscilação amortecida, que é igual à parte imaginária do pólo, também aumenta com um aumento do ganho, resultando numa redução do instante de pico. Finalmente, como o lugar das raízes nunca passa para o semiplano da direita, o sistema é sempre estável, qualquer que seja o valor de ganho, e nunca pode se produzir uma oscilação senoidal.

Tais conclusões para um sistema simples como este podem parecer triviais. O que estamos na iminência de descobrir é que a análise é aplicável aos sistemas de ordem maior que dois. Para esses sistemas, é difícil relacionar as características da resposta transitória à localização dos pólos. O lugar das raízes nos permitirá fazer essa associação e se tornará uma técnica importante na análise e no projeto de sistemas de ordem superior.

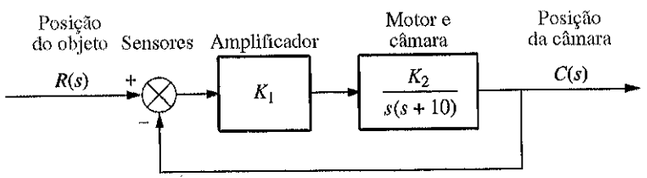
8.3 Propriedades do Lugar das Raízes

Na Seção 8.2 chegamos ao lugar das raízes fatorando o polinômio de segunda ordem no denominador da função de transferência. Considere o que aconteceria se aquele polinômio fosse de quinta ou décima ordem. Fatorar o polinômio, para um número elevado de valores de ganho, sem o uso de um computador seria um grande problema.

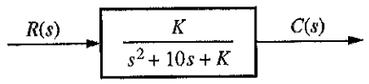
Fig. 8.4
a. O sistema CameraMan® Presenter Camera rastreia automaticamente um objeto que utiliza sensores de infravermelho frontal e traseiro (o sensor frontal é também um microfone); comandos de rastreamento e de áudio são passados ao CameraMan através de um enlace de radiofreqüência de uma unidade usada pelo objeto;
b. diagrama de blocos;
c. função de transferência a malha fechada



(*a*)



(*b*)



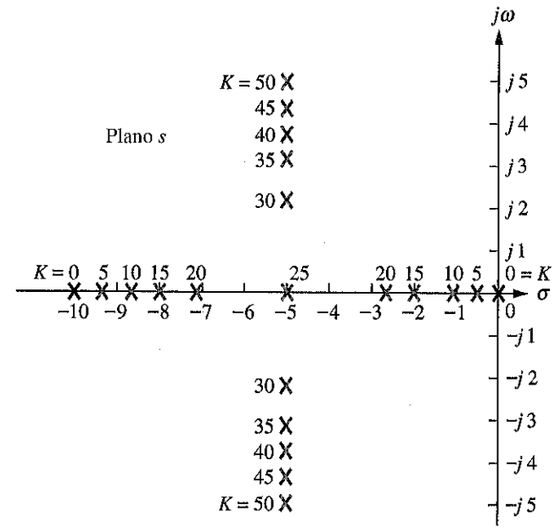
onde $K = K_1K_2$

(*c*)

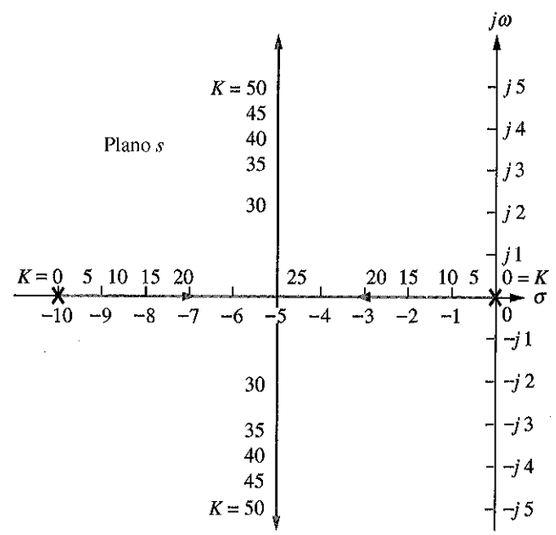
Vamos examinar as propriedades do lugar das raízes. A partir dessas propriedades seremos capazes de fazer um rápido *esboço* do lugar das raízes para sistemas de ordem superior sem ter que fatorar o denominador da função de transferência a malha fechada.

Tabela 8.1 Localização de pólos em função do ganho para o sistema da Fig. 8.4

K	Pólo 1	Pólo 2
0	−10	0
5	−9,47	−0,53
10	−8,87	−1,13
15	−8,16	−1,84
20	−7,24	−2,76
25	−5	−5
30	−5 + *j*2,34	−5 − *j*2,24
35	−5 + *j*3,16	−5 − *j*3,16
40	−5 + *j*3,87	−5 − *j*3,87
45	−5 + *j*4,47	−5 − *j*4,47
50	−5 + *j*5	−5 − *j*5



(*a*)



(*b*)

Fig. 8.5
a. Diagrama de pólos com base na Tabela 8.1;
b. lugar das raízes

As propriedades do lugar das raízes podem ser deduzidas a partir do sistema de controle geral da Fig. 8.1(*a*). A função de transferência a malha fechada para o sistema é

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \tag{8.12}$$

Com base na Eq. (8.12), existe um pólo, *s*, quando o polinômio característico no denominador se anula, ou seja

$$KG(s)H(s) = -1 = 1\angle(2k+1)180^\circ \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{8.13}$$

onde −1 é representado em forma polar como $1\angle(2k + 1)\,180°$. Alternativamente, um valor de *s* é um pólo a malha fechada se

$$|KG(s)H(s)| = 1 \tag{8.14}$$

e

$$\angle KG(s)H(s) = (2k + 1)\,180° \tag{8.15}$$

A Eq. (8.13) implica o seguinte: se um valor de s for substituído na função $KG(s)H(s)$, resulta um número complexo. Se o ângulo do número complexo for um múltiplo ímpar de 180°, esse valor de s é um pólo do sistema para um valor particular de K. Qual é o valor de K? Uma vez que o critério de ângulo da Eq. (8.15) seja atendido, tudo o que resta a satisfazer é o critério de magnitude, Eq. (8.14). Por conseguinte,

$$K = \frac{1}{|G(s)||H(s)|} \tag{8.16}$$

Acabamos de descobrir que um pólo do sistema a malha fechada faz com que o ângulo de $KG(s)H(s)$, ou simplesmente de $G(s)H(s)$, uma vez que K é um escalar, seja um múltiplo ímpar de 180°. Além disso, a magnitude de $KG(s)H(s)$ deve ser unitária, acarretando que o valor de K seja o inverso da magnitude de $G(s)H(s)$ quando o valor do pólo é substituído no lugar de s.

Demonstremos essa relação para o sistema de segunda ordem da Fig. 8.4. O fato de existirem pólos a malha fechada em −9,47 e −0,53 quando o ganho é 5 já foi estabelecido na Tabela 8.1. Para este sistema,

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 10)} \tag{8.17}$$

Substituindo s pelo pólo em −9,47 e K por 5, resulta $KG(s)H(s) = -1$. O leitor pode repetir o exercício para outros pontos na Tabela 8.1 e mostrar que cada caso conduz a $KG(s)H(s) = -1$.

É útil visualizar graficamente o significado da Eq. (8.15). Apliquemos os conceitos sobre números complexos revistos na Seção 8.1 ao lugar das raízes do sistema mostrado na Fig. 8.6. Para este sistema, a função de transferência a malha aberta é

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s + 3)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)} \tag{8.18}$$

A função de transferência a malha fechada, $T(s)$, é

$$T(s) = \frac{K(s + 3)(s + 4)}{(1 + K)s^2 + (3 + 7K)s + (2 + 12K)} \tag{8.19}$$

Se o ponto s for um pólo de sistema a malha fechada para algum valor de ganho, K, então s deve satisfazer as Eqs. (8.14) e (8.15).

Considere o ponto $-2 + j3$. Se este ponto for um pólo a malha fechada para algum valor de ganho, então a diferença dos ângulos dos zeros menos os ângulos dos pólos deve ser igual a um múltiplo ímpar de 180°. Da Fig. 8.7,

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 &= 56{,}31° + 71{,}57° - 90° - 108{,}43° \\ &= -70{,}55°\end{aligned} \tag{8.20}$$

Por conseguinte, $-2 + j3$ não é um ponto sobre lugar das raízes ou, alternativamente, $-2 + j3$ não é um pólo a malha fechada para algum valor de ganho.

Se esses cálculos forem repetidos para o ponto $-2 + j(\sqrt{2}/2)$, os ângulos irão somar 180°. Isto é, $-2 + j(\sqrt{2}/2)$ é um ponto sobre o lugar das raízes para algum valor de ganho. Prosseguimos agora para calcular esse valor de ganho.

Com base nas Eqs. (8.5) e (8.16),

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{1}{M} = \frac{\Pi \text{ comprimentos dos pólos}}{\Pi \text{ comprimentos dos zeros}} \tag{8.21}$$

Olhando a Fig. 8.7 com o ponto $-2 + j3$ substituído por $-2 + j(\sqrt{2}/2)$, o ganho, K, é calculado como

$$K = \frac{L_3L_4}{L_1L_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1{,}22)}{(2{,}12)(1{,}22)} = 0{,}33 \tag{8.22}$$

Assim, o ponto $-2 + j(\sqrt{2}/2)$ é um ponto sobre o lugar das raízes para um ganho de 0,33.

Resumimos o que aprendemos da seguinte forma: Dados os pólos e zeros da função de transferência a malha aberta, $KG(s)H(s)$, um ponto no plano s está sobre o lugar das raízes para um valor particular de ganho, K, se os ângulos dos zeros menos os ângulos dos pólos, todos em relação ao ponto selecionado no plano s, somam

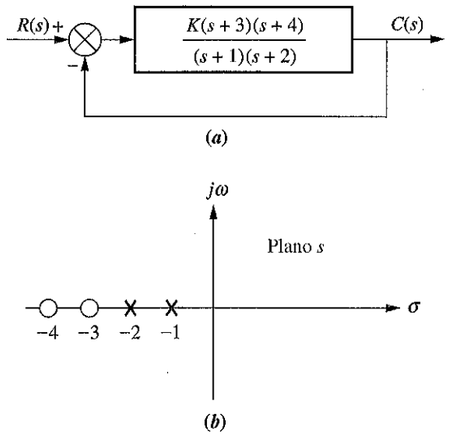


Fig. 8.6
a. Sistema de exemplo;
b. diagrama de pólos e zeros de $G(s)$

$(2k + 1)180°$. Além disso, o ganho K no ponto para o qual os ângulos somam $(2k + 1)180°$ é encontrado dividindo-se o produto dos comprimentos dos pólos pelo produto do comprimento dos zeros.

Exercício de Avaliação 8.2

Problema: Para um sistema com retroação unitária com função de transferência no canal direto,

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{(s^2 + 4s + 13)}$$

faça o seguinte:

a. Calcule o ângulo de $G(s)$ no ponto $(3 + j0)$ encontrando a soma algébrica dos ângulos dos vetores desenhados a partir dos zeros e dos pólos de $G(s)$ para o ponto dado.
b. Determine se o ponto especificado em (a) está sobre o lugar das raízes.
c. Se o ponto especificado em (a) estiver sobre o lugar das raízes, encontre o ganho, K, usando os comprimentos dos vetores.

Respostas:

a. Soma dos ângulos = 180°
b. O ponto está sobre o lugar das raízes

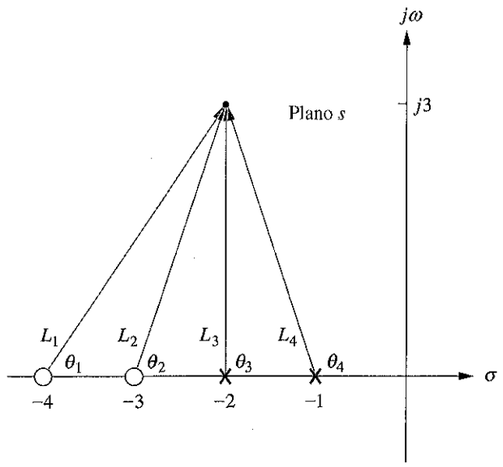


Fig. 8.7 Representação vetorial de $G(s)$ com base na Fig. 8.6(*a*) em $-2 + j3$

c. $K = 10$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

8.4 Esboçando o Lugar das Raízes

Com base em nossas discussões anteriores, parece que o lugar das raízes pode ser obtido executando-se uma varredura no plano s para localizar aqueles pontos para os quais os ângulos, como descrito anteriormente, somam um múltiplo ímpar de 180°. Embora esta tarefa seja maçante sem a ajuda de um computador, o conceito pode ser usado para desenvolver regras que possam ser usadas para *esboçar* o lugar das raízes sem o esforço exigido para *plotar* o lugar. Uma vez obtido um esboço, é possível plotar exatamente os pontos que são de nosso interesse para um problema particular.

As cinco regras a seguir nos permitem esboçar o lugar das raízes usando um mínimo de cálculo. As regras produzem um esboço que fornece uma visão global intuitiva do comportamento de um sistema de controle. Na próxima seção, vamos refinar o esboço determinando os pontos e os ângulos reais sobre o lugar das raízes. Esses refinamentos, contudo, requerem alguns cálculos ou o uso de programas de computador, como por exemplo o MATLAB.

1. **Número de ramos.** Cada pólo a malha fechada se desloca quando o ganho é variado. Se definirmos um *ramo* como sendo o caminho que o pólo percorre, existirá um ramo para cada pólo a malha fechada. Nossa primeira regra, por conseguinte, define o número de ramos do lugar das raízes:

   O número de ramos do lugar das raízes iguala o número de pólos a malha fechada.

   Como exemplo, veja a Fig. 8.5(*b*), onde os dois ramos são mostrados. Um começa na origem e outro em −10.
2. **Simetria.** Se os pólos complexos a malha fechada não ocorrerem em pares conjugados, o polinômio resultante, formado pela multiplicação de fatores contendo os pólos a malha fechada, teria coeficientes complexos. Sistemas fisicamente realizáveis não podem ter coeficientes complexos em suas funções de transferência. Dessa forma, concluímos que:

   O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.

   Um exemplo de simetria em relação ao eixo real é mostrado na Fig. 8.5(*b*).
3. **Segmentos sobre o eixo real.** Façamos uso da propriedade de ângulo, Eq. (8.15), para determinar onde existem segmentos de eixo real que fazem parte do lugar das raízes. A Fig. 8.8 mostra os pólos e zeros de um sistema a malha aberta genérico. Se tentarmos calcular a contribuição angular dos pólos e zeros em cada ponto, P_1, P_2, P_3 e P_4, sobre o eixo real, observaremos o seguinte: (1) em cada ponto, a contribuição angular de um par de pólos ou de zeros complexos a malha aberta é zero, e (2) a contribuição dos pólos e zeros a malha aberta à esquerda do ponto respectivo é zero. A conclusão é que a única contribuição de ângulo em qualquer um dos pontos sobre o eixo real vem dos pólos e zeros a malha aberta que existem à direita do respectivo ponto. Se calcularmos o ângulo em cada ponto usando apenas os pólos e zeros a malha aberta sobre o eixo real, à direita de cada ponto, notamos o seguinte: (1) os ângulos do eixo real alternam entre 0° e 180°, e (2) o ângulo é 180° para regiões do eixo real que existem à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros. A regra seguinte resume o que foi descoberto:

   No eixo real, para $K > 0$, o lugar das raízes existe à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros finitos a malha aberta sobre o eixo real.

   Examine a Fig. 8.6(*b*). Conforme a regra desenvolvida, os segmentos de eixo real do lugar das raízes estão entre −1 e −2, e entre −3 e −4, como mostrado na Fig. 8.9.

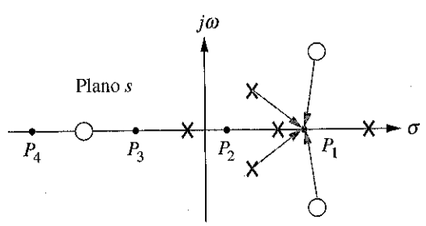


Fig. 8.8 Pólos e zeros de um sistema a malha aberta genérico com pontos de teste, P_i, no eixo real

4. **Pontos de entrada e de saída.** Onde se inicia (ganho zero) e onde termina o lugar das raízes (ganho infinito)? A resposta para esta pergunta nos permitirá expandir o esboço do lugar das raízes além dos segmentos sobre o eixo real. Considere a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, descrita pela Eq. (8.3). $T(s)$ agora pode ser

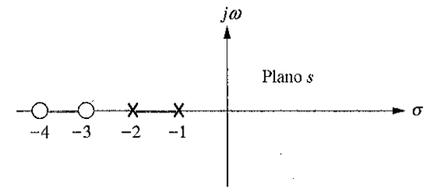


Fig. 8.9 Segmentos do eixo real do lugar das raízes para o sistema da Fig. 8.6

calculada para ganhos grandes e pequenos de K. À medida que K tende a zero (ganho pequeno),

$$T(s) \approx \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + \epsilon} \tag{8.23}$$

Com base na Eq. (8.23), vemos que os pólos do sistema a malha fechada nos ganhos pequenos tendem aos pólos combinados de $G(s)$ e $H(s)$. Concluímos que o lugar das raízes se inicia nos pólos de $G(s)H(s)$, a função de transferência a malha aberta.

Para ganhos altos, onde K está tendendo a infinito,

$$T(s) \approx \frac{KN_G(s)D_H(s)}{\epsilon + KN_G(s)N_H(s)} \tag{8.24}$$

A partir da Eq. (8.24) percebemos que os pólos do sistema a malha fechada para ganhos elevados tendem aos zeros combinados de $G(s)$ e $H(s)$. Concluímos assim que o lugar das raízes termina nos zeros de $G(s)H(s)$, a função de transferência a malha aberta.

Resumindo o que descobrimos:

O lugar das raízes se inicia nos pólos finitos e infinitos de $G(s)H(s)$ e termina nos zeros finitos e infinitos de $G(s)H(s)$.

Lembre-se de que estes pólos e zeros são os pólos e zeros a malha aberta.

Para demonstrar essa regra, veja o sistema da Fig. 8.6(*a*), cujos segmentos de eixo real foram esboçados na Fig. 8.9. Usando a regra recém-deduzida, percebemos que o lugar das raízes se inicia nos pólos em −1 e −2 e termina nos zeros em −3 e −4 (veja a Fig .8.10). Dessa forma, os pólos saem de −1 e −2 e se movem ao longo do trecho do eixo real entre os dois pólos. Eles se encontram em algum lugar entre os dois pólos e saem para o plano complexo, movendo-se como conjugados complexos. Os pólos retornam ao eixo real em algum lugar entre os zeros em −3 e −4, onde o percurso se completa à medida que se afastam um do outro e terminam respectivamente nos dois zeros do sistema a malha aberta em −3 e −4.

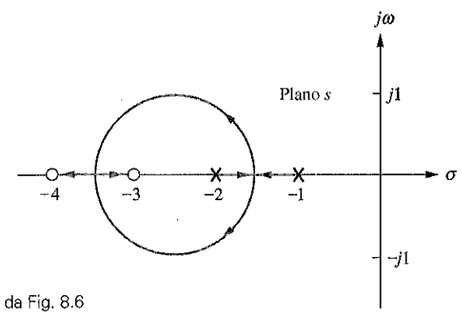


Fig. 8.10 Lugar das raízes completo para o sistema da Fig. 8.6

5. **Comportamento no infinito.** Considere a aplicação da Regra 4 à seguinte função de transferência a malha aberta:

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{8.25}$$

Há três pólos finitos em $s = 0$, −1 e −2, e não há zeros finitos.

Uma função também pode ter pólos e zeros *infinitos*. Se a função tender ao infinito quando s tender ao infinito, então a função terá um pólo no infinito. Se a função tender a zero quando s tender a infinito, então a função terá um zero no infinito. Por exemplo, a função $G(s) = s$ tem um pólo no infinito, visto que $G(s)$ tende a infinito quando s tende a infinito. Por outro lado, $G(s) = 1/s$ tem um zero no infinito, visto que $G(s)$ tende a zero quando s tende a infinito.

Toda função de s tem um número igual de pólos e zeros se incluirmos os pólos e zeros infinitos bem como os pólos e zeros finitos. Neste exemplo, a Eq. (8.25) contém três pólos finitos e três zeros infinitos. Para ilustrar, façamos s tender a infinito. A função de transferência a malha aberta torna-se

$$KG(s)H(s) \approx \frac{K}{s^3} = \frac{K}{s \cdot s \cdot s} \tag{8.26}$$

Cada s no denominador faz com que a função a malha aberta, $KG(s)H(s)$, se torne zero quando s tende a infinito. Portanto, a Eq. (8.26) tem três zeros no infinito.

Assim, para a Eq. (8.25), o lugar das raízes se inicia nos pólos finitos de $KG(s)H(s)$ e termina nos zeros infinitos. A pergunta continua: Onde estão os zeros infinitos? Devemos saber onde estes zeros estão para mostrar o lugar movendo-se dos três pólos finitos para os três zeros infinitos. A Regra 5 nos ajuda a localizar estes zeros no infinito. A Regra 5 também nos ajuda a localizar os pólos no infinito para funções contendo mais zeros finitos do que pólos finitos.[1]

Enunciaremos agora a Regra 5, que nos dirá como o lugar das raízes se apresenta quando se aproxima dos zeros no infinito ou como este se move a partir de pólos no infinito. A dedução pode ser encontrada no Apêndice J.1 no CD-ROM que acompanha este livro.

O lugar das raízes tende a retas assintóticas quando o lugar tende ao infinito. *Além disso, a equação das assíntotas é dada pelo ponto de interseção sobre o eixo real, σ_a, e o ângulo, θ_a, da seguinte forma:*

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\#\text{ pólos finitos} - \#\text{ zeros finitos}} \tag{8.27}$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\text{ pólos finitos} - \#\text{ zeros finitos}} \tag{8.28}$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ e o ângulo é dado em radianos, no sentido trigonométrico, a partir do eixo real positivo.

Observe que o índice, k, na Eq. (8.28) fornece uma multiplicidade de retas que leva em conta os muitos ramos de um lugar das raízes que tende a infinito. Demonstremos os conceitos com um exemplo.

Exemplo 8.2

Esboçando um lugar das raízes com assíntotas

Problema Esboce o lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig .8.11.

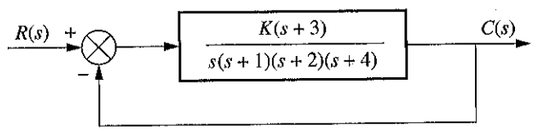


Fig. 8.11 Sistema para o Exemplo 8.2

Solução Comecemos calculando as assíntotas. Usando a Eq. (8.27), o ponto de interseção sobre o eixo real é calculado como

$$\sigma_a = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3} \tag{8.29}$$

Os ângulos das retas que se cruzam em $-4/3$, dados pela Eq. (8.27), são

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\text{ pólos finitos} - \#\text{ zeros finitos}} \tag{8.30a}$$

$$= \pi/3 \qquad \text{para } k = 0 \tag{8.30b}$$

$$= \pi \qquad \text{para } k = 1 \tag{8.30c}$$

$$= 5\pi/3 \qquad \text{para } k = 2 \tag{8.30d}$$

Se o valor k continuar a aumentar, os ângulos começarão a se repetir. O número de retas obtidas é igual à diferença entre o número de pólos finitos e o número de zeros finitos.

A Regra 4 estabelece que o lugar começa nos pólos a malha aberta e termina nos zeros a malha aberta. Para o exemplo em pauta, há mais pólos a malha aberta do que zeros a malha aberta. Dessa forma, deve haver zeros no infinito. As assíntotas nos dizem como alcançar esses zeros no infinito.

[1]Os sistemas físicos, contudo, possuem mais pólos finitos que zeros finitos, uma vez que a derivação decorrente produz saídas de valor infinito para funções de entradas descontínuas, como entradas em degrau.

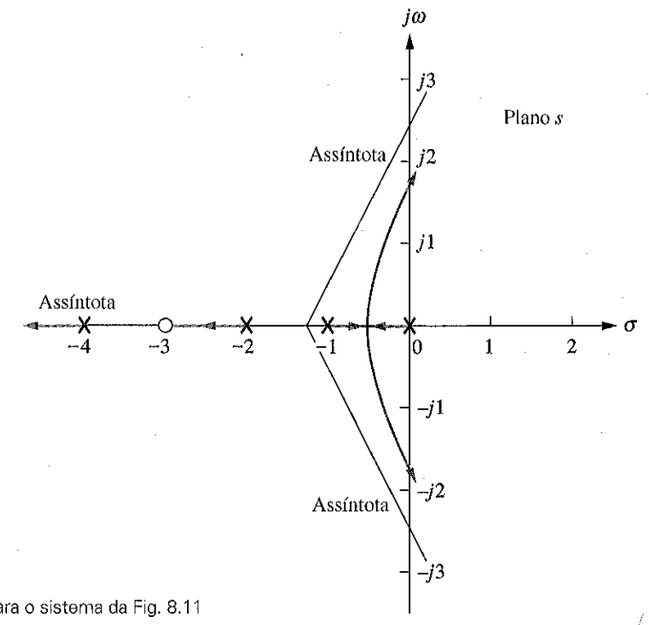


Fig. 8.12 Lugar das raízes e assíntotas para o sistema da Fig. 8.11

A Fig. 8.12 mostra o lugar das raízes completo bem como as assíntotas que acabamos de calcular. Observe que usamos todas as regras aprendidas até aqui. Os segmentos de eixo real posicionam-se à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros. O lugar começa nos pólos a malha aberta e termina nos zeros a malha aberta. Neste exemplo, há somente um zero finito a malha aberta e três zeros no infinito. Por conseguinte, a Regra 5 nos diz que os três zeros no infinito estão nas extremidades das assíntotas.

Exercício de Avaliação 8.3

Problema: Esboce o lugar das raízes e suas assíntotas para um sistema com retroação unitária que tenha a função de transferência direta a seguir,

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

8.5 Refinando o Esboço

As regras tratadas na seção anterior nos permitem esboçar rapidamente um lugar das raízes. Se quisermos mais detalhes, devemos ser capazes de determinar com exatidão pontos notáveis do lugar das raízes com seus ganhos associados. São candidatos, dentre outros, pontos sobre o eixo real onde o lugar das raízes entra ou sai do plano complexo — pontos de saída e de entrada sobre o eixo real — e pontos sobre o eixo $j\omega$. Também podemos produzir um esboço melhor do lugar das raízes determinando os ângulos de partida de pólos complexos e os ângulos de chegada em zeros complexos, respectivamente. Nesta seção discutimos os cálculos necessários para obter pontos específicos do lugar das raízes.

Alguns desses cálculos podem ser feitos usando a relação básica do lugar das raízes na qual a soma dos ângulos dos zero menos a soma dos ângulos dos pólos é igual a um múltiplo ímpar de 180°, e o ganho em um ponto no lugar das raízes é obtido como a relação entre o produto dos comprimentos dos vetores dos pólos e o produto dos comprimentos dos vetores dos zeros. Temos ainda que tratar a forma como implementar esta tarefa. No passado, uma espécie de régua de cálculo, barata, chamada Spirule™ [2]era usada para adicionar os ângulos rapidamente e em seguida multiplicar e dividir os comprimentos dos vetores para obter o ganho. Hoje podemos contar com calculadoras manuais ou programáveis assim como com computadores pessoais.

[2]Instrumento de cálculo desenvolvido por Evans, W. R. Na literatura encontramos algumas vezes a designação em português Espírula. (N.T.)

Estudantes que utilizam o MATLAB vão aprender como aplicá-lo ao lugar das raízes no fim da Seção 8.6. Outras alternativas são discutidas no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha a obra. Essa discussão pode ser adaptada para calculadoras portáteis programáveis. Os leitores são encorajados a escolher uma ajuda computacional neste ponto. Os cálculos de lugar das raízes podem ser muito trabalhosos se realizados manualmente.

Vamos discutir agora como refinar o esboço do lugar das raízes calculando os pontos de saída e de entrada no eixo real, os pontos de interseção com o eixo $j\omega$, os ângulos de partida dos pólos complexos, e os ângulos de chegada aos zeros complexos. Vamos finalizar mostrando como determinar com exatidão qualquer ponto do lugar das raízes e calcular o ganho correspondente.

Pontos de Saída e de Chegada sobre o Eixo Real

Numerosos lugares das raízes deixam o eixo real quando os pólos do sistema movem-se do eixo real para o plano complexo. Em outras vezes, o lugar retorna ao eixo real à medida que um par de pólos complexos se transforma em pólos reais. Ilustramos isto na Fig. 8.13. Este lugar é esboçado usando as quatro primeiras regras: (1) número de ramos, (2) simetria, (3) segmentos sobre o eixo real, e (4) pontos de entrada e de saída. A figura mostra um lugar das raízes saindo do eixo real entre -1 e -2 e retornando ao eixo real entre $+3$ e $+5$. O ponto onde o lugar deixa o eixo real, $-\sigma_1$, é chamado *ponto de saída*, e o ponto onde o lugar retorna ao eixo real, σ_2, é chamado *ponto de entrada*.

Nos pontos de entrada e de saída os ramos do lugar das raízes formam um ângulo de $180°/n$ com o eixo real, onde n é o número de pólos a malha fechada chegando ou saindo do eixo real (Kuo, 1991). Dessa forma, para os dois pólos mostrados na Fig. 8.13, os ramos no ponto de saída formam ângulos de 90° com o eixo real. Vamos mostrar agora como encontrar os pontos de saída ou de entrada.

Como os dois pólos a malha fechada, os quais estão em -1 e -2 quando $K = 0$, movem-se de um deles em direção ao outro, o ganho aumenta a partir do valor zero. Concluímos que o ganho deve ser máximo no eixo real no ponto onde ocorre a saída, em algum lugar entre -1 e -2. Naturalmente, o ganho aumenta além deste valor quando os pólos se deslocam para o plano complexo. Concluímos que o ponto de partida ocorre no ponto de ganho máximo sobre o eixo real entre os pólos a malha aberta.

Voltemos agora a atenção para o ponto de entrada em algum lugar entre $+3$ e $+5$ sobre o eixo real. Quando o par complexo a malha fechada voltar ao eixo real, o ganho continuará a aumentar para o infinito à medida que os pólos a malha fechada se deslocarem em direção aos zeros a malha aberta. Deve ser verdadeiro, por conseguinte, que o ganho no ponto de entrada é o ganho mínimo encontrado no eixo real entre os dois zeros.

O esboço na Fig. 8.14 mostra a variação do ganho do eixo real. O ponto de saída é encontrado no ganho máximo entre -1 e -2, e o ponto de entrada é encontrado no ganho mínimo entre $+3$ e $+5$.

Há três métodos para encontrar os pontos nos quais o lugar das raízes sai e entra no eixo real. O primeiro método consiste em maximizar e minimizar o ganho, K, usando cálculo diferencial. Para todos os pontos no lugar das

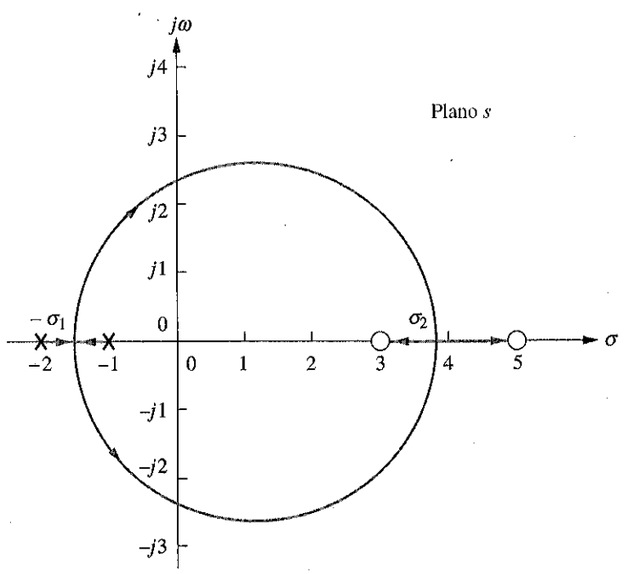


Fig. 8.13 Exemplo de lugar das raízes mostrando os pontos de saída ($-\sigma_1$) e entrada (σ_2) no eixo real

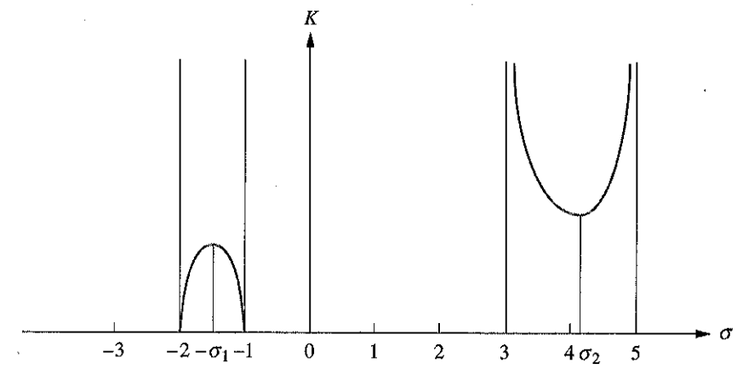


Fig. 8.14 Variação de ganho sobre o eixo real para o lugar das raízes da Fig. 8.13

raízes, a Eq. (8.13) fornece

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} \tag{8.31}$$

Nos pontos do lugar das raízes ao longo do eixo real onde ocorrem pontos de entrada e de saída, $s = \sigma$. Portanto, sobre o eixo real, a Eq. (8.31) se torna

$$K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)} \tag{8.32}$$

Esta equação representa uma curva de K versus σ semelhante ao mostrado na Fig. 8.14. Portanto, se derivarmos a Eq. (8.32) com relação a σ e fizermos a derivada igual a zero, podemos encontrar os pontos de ganhos máximo e mínimo e portanto os pontos de saída e de chegada. Demonstremos isso.

Exemplo 8.3

Pontos de saída e de entrada por meio de derivação

Problema Obter os pontos de saída e de chegada para o lugar das raízes da Fig. 8.13 usando cálculo diferencial.

Solução Usando os pólos e zeros a malha aberta, representamos o sistema a malha aberta cujo lugar das raízes é mostrado na Fig. 8.13 como se segue:

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K(s^2-8s+15)}{(s^2+3s+2)} \tag{8.33}$$

Mas para todos os pontos sobre o lugar das raízes, $KG(s)H(s) = -1$, e sobre o eixo real, $s = \sigma$. Portanto,

$$\frac{K(\sigma^2-8\sigma+15)}{(\sigma^2+3\sigma+2)} = -1 \tag{8.34}$$

Resolvendo para K, encontramos

$$K = \frac{-(\sigma^2+3\sigma+2)}{(\sigma^2-8\sigma+15)} \tag{8.35}$$

Derivando K com relação a σ e fazendo a derivada igual a zero resulta

$$\frac{dK}{d\sigma} = \frac{(11\sigma^2-26\sigma-61)}{(\sigma^2-8\sigma+15)^2} = 0 \tag{8.36}$$

Resolvendo para σ, encontramos $\sigma = -1{,}45$ e $3{,}82$, os quais são os pontos de saída e de entrada.

O segundo método é uma variação do método com cálculo diferencial. É chamado método de *transição* e elimina a etapa da derivação (Franklin, 1991). Este método, deduzido no Apêndice J.2 no CD-ROM que acompanha este livro, é enunciado como:

Os pontos de saída e de entrada satisfazem a relação

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{\sigma + z_i} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma + p_i} \tag{8.37}$$

onde z_i e p_i são, respectivamente, os negativos dos valores dos zeros e dos pólos de $G(s)H(s)$.

Resolvendo a Eq. (8.37) para σ, os valores do eixo real que minimizam ou maximizam K, fornecem sem derivação, os pontos de saída e de entrada. Vejamos um exemplo.

Exemplo 8.4

Pontos de saída e de entrada sem derivação

Problema Repita o Exemplo 8.3 sem uso de derivação.

Solução Usando a Eq. (8.37),

$$\frac{1}{\sigma - 3} + \frac{1}{\sigma - 5} = \frac{1}{\sigma + 1} + \frac{1}{\sigma + 2} \tag{8.38}$$

Simplificando,

$$11\sigma^2 - 26\sigma - 61 = 0 \tag{8.39}$$

Portanto, $\sigma = -1{,}45$ e $3{,}82$, que está de acordo com o Exemplo 8.3.

Para o terceiro método, na determinação dos pontos de saída e de entrada, pode ser usado o programa do lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 do CD-ROM que acompanha esta obra. Use simplesmente o programa para investigar o ponto de ganho máximo entre -1 e -2 e para investigar o ponto de ganho mínimo entre $+3$ e $+5$. A Tabela 8.2 mostra os resultados da investigação. O lugar deixa o eixo em $-1{,}45$, o ponto de ganho máximo entre -1 e -2, e entra novamente no eixo real em $+3{,}8$, o ponto de ganho mínimo entre $+3$ e $+5$. Estes resultados são os mesmos que os obtidos usando os dois primeiros métodos. O MATLAB também tem a capacidade de encontrar os pontos de saída e de entrada.

Pontos de Interseção do Eixo $j\omega$

Vamos agora refinar o lugar das raízes encontrando os pontos de interseção com o eixo imaginário. A importância do ponto de interseção do eixo $j\omega$ é visível de imediato. Olhando para a Fig. 8.12, percebemos que os pólos do sistema estão no semiplano s da esquerda até um valor particular de ganho. Acima desse valor de ganho, dois dos pólos do sistema a malha fechada movem-se para o semiplano da direita, significando que o sistema é instável. O ponto de interseção do eixo $j\omega$ é um ponto no lugar das raízes que separa a operação estável do sistema da operação instável. O valor de ω no ponto de interseção fornece a freqüência de oscilação, enquanto o ganho no ponto de interseção do eixo $j\omega$ fornece, neste exemplo, o ganho positivo máximo para estabilidade do sistema. Devemos observar aqui que outros exemplos ilustram instabilidade com valores reduzidos de ganho e estabilidade com valores grandes de ganho. Estes sistemas têm um lugar das raízes iniciando no semiplano da direita (instável para pequenos valores de ganho) e finalizando no semiplano da esquerda (estável para altos valores de ganho).

Tabela 8.2 Dados para pontos de entrada e de saída para o lugar das raízes da Fig. 8.13

Valor do eixo real	Ganho	
−1,41	0,008557	
−1,42	0,008585	
−1,43	0,008605	
−1,44	0,008617	
−1,45	0,008623	← Ganho máximo: ponto de saída
−1,46	0,008622	
3,3	44,686	
3,4	37,125	
3,5	33,000	
3,6	30,667	
3,7	29,440	
3,8	29,000	← Ganho mínimo: ponto de entrada
3,9	29,202	

Para encontrar o ponto de interseção no eixo $j\omega$, podemos usar o critério de Routh-Hurwitz tratado no Cap. 6, como se segue: forçando uma linha de zeros na tabela de Routh se obterá o ganho; retornando à linha para a equação de polinômio par e determinando as raízes resulta a freqüência do ponto da interseção com o eixo imaginário.

Exemplo 8.5

Freqüência e ganho no ponto de interseção do eixo imaginário

Problema Para o sistema da Fig. 8.11, obter a freqüência e o ganho, K, para o qual o lugar das raízes cruza o eixo imaginário. Para que faixa de valores de K o sistema é estável?

Solução A função de transferência a malha fechada para o sistema da Fig. 8.11 é

$$T(s) = \frac{K(s+3)}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+K)s + 3K} \tag{8.40}$$

Usando o denominador e simplificando algumas das entradas por meio da multiplicação de linhas por uma constante positiva, obtemos o arranjo tabular de Routh mostrado na Tabela 8.3.

Uma linha completa de zeros resulta na possibilidade de raízes no eixo imaginário. Para valores positivos de ganho, para os quais o lugar das raízes é esboçado, somente a linha s^1 pode resultar em uma linha de zeros. Dessa forma,

$$-K^2 - 65K + 720 = 0 \tag{8.41}$$

A partir dessa equação, K é calculado como

$$K = 9{,}65 \tag{8.42}$$

Tabela 8.3 Tabela de Routh para a Eq. (8.40)

s^4	1	14	$3K$
s^3	7	$8+K$	
s^2	$90-K$	$21K$	
s^1	$\dfrac{-K^2 - 65K + 720}{90-K}$		
s^0	$21K$		

Formando o polinômio par usando a linha s^2 com $K = 9{,}65$, obtém-se

$$(90 - K)s^2 + 21K = 80{,}35s^2 + 202{,}7 = 0 \tag{8.43}$$

e s é encontrado igual a $\pm j1{,}59$. Dessa forma, o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$ em $\pm j1{,}59$ com um ganho de 9,65. Concluímos que o sistema é estável para $0 \le K < 9{,}65$.

Um outro método para determinar o ponto de interseção do eixo $j\omega$ (ou qualquer ponto do lugar das raízes) usa o fato de que no ponto de interseção do eixo $j\omega$ a soma dos ângulos a partir dos pólos e zeros a malha aberta finitos devem totalizar $(2k + 1)180°$. Dessa forma, podemos procurar o eixo $j\omega$ até acharmos o ponto que atende esta condição de ângulo. Com este propósito pode ser usado um programa de computador, assim como o programa de lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM ou no MATLAB. Os exemplos subseqüentes neste capítulo usam este método para determinar o ponto de interseção do eixo $j\omega$.

Ângulos de Partida e de Chegada

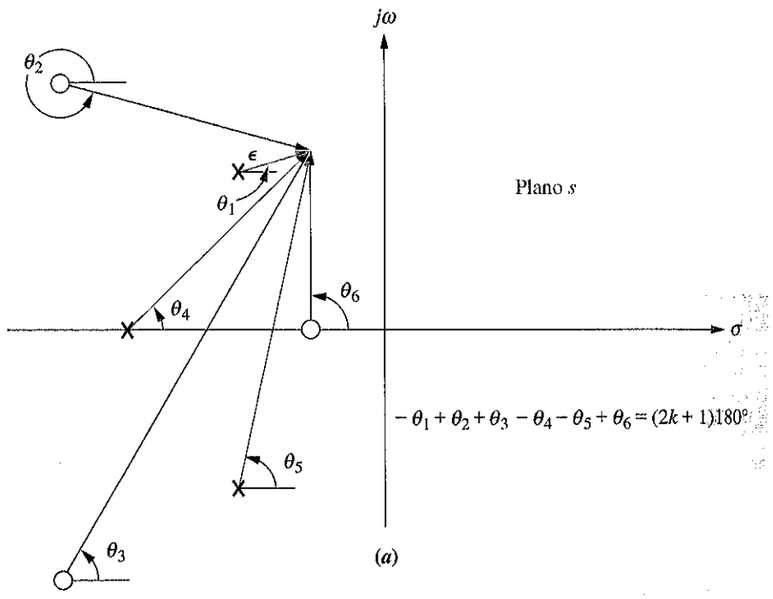
Nesta subseção refinaremos ainda mais nosso esboço do lugar das raízes determinando os ângulos de partida e de chegada de pólos e zeros complexos. Considere a Fig. 8.15, que mostra os pólos e zeros a malha aberta, alguns dos quais são complexos. O lugar das raízes se inicia nos pólos a malha aberta e finaliza nos zeros a malha aberta. Para esboçar o lugar das raízes corretamente, precisamos calcular o ângulo de partida do lugar das raízes a partir dos pólos complexos e o ângulo de chegada aos zeros complexos.

Se admitirmos um ponto ϵ no lugar das raízes próximo a um pólo complexo, a soma dos ângulos traçados a partir de todos os pólos e zeros finitos a este ponto é um múltiplo ímpar de 180°. Exceto para o pólo próximo ao ponto ϵ, admitimos que todos os ângulos traçados a partir de todos os outros pólos e zeros são desenhados diretamente ao pólo que está próximo do ponto ϵ. Dessa forma, o único ângulo desconhecido na soma é o ângulo desenhado a partir do pólo que está próximo a ϵ. Podemos buscar a solução para este ângulo desconhecido, o qual também é o ângulo de partida deste pólo complexo. Portanto, a partir da Fig. 8.15(*a*),

$$-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 = (2k+1)180° \tag{8.44a}$$

ou

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - (2k+1)180° \tag{8.44b}$$



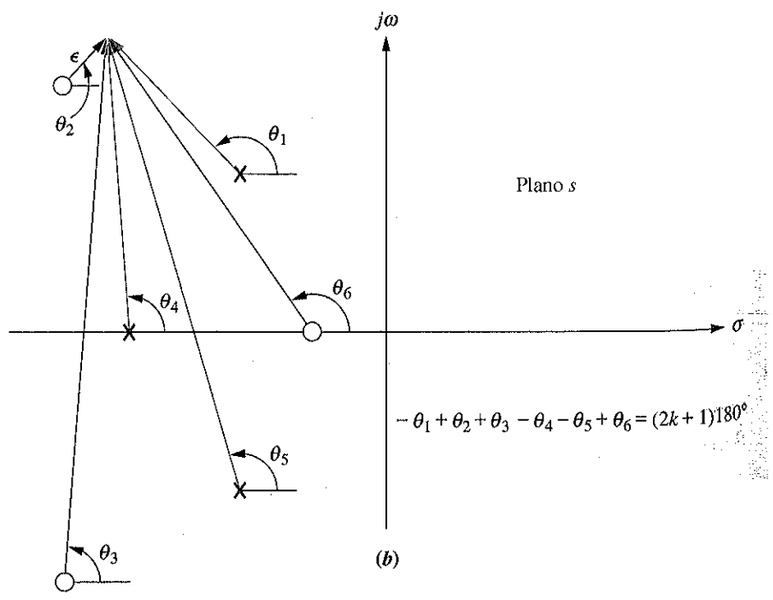


Fig. 8.15 Pólos e zeros a malha aberta e cálculo de:
a. ângulo de saída;
b. ângulo de chegada

Se admitirmos um ponto ϵ sobre o lugar das raízes próximo ao zero complexo, a soma dos ângulos desenhados a partir de todos os pólos e zeros finitos a este ponto é um múltiplo ímpar de 180°. Exceto para o zero próximo ao ponto ϵ, podemos admitir que todos os ângulos desenhados a partir de todos os outros pólos e zeros são desenhados diretamente ao zero próximo ao ponto ϵ. Dessa forma, somente o ângulo desconhecido na soma é o ângulo desenhado a partir do zero que está próximo a ϵ. Podemos resolver este ângulo desconhecido, que também é o ângulo de chegada a este zero complexo. Portanto, a partir da Fig. 8.15(*b*),

$$-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 = (2k+1)180° \tag{8.45a}$$

ou

$$\theta_2 = \theta_1 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + (2k+1)180° \tag{8.45b}$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 8.6

Ângulo de partida de um pólo complexo

Problema Dado o sistema com retroação unitária da Fig. 8.16, encontre o ângulo de partida dos pólos complexos e esboce o lugar das raízes.

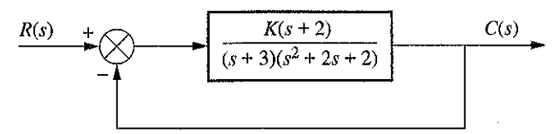


Fig. 8.16 Sistema com retroação unitária com pólos complexos

Solução Usando os pólos e zeros de $G(s) = (s+2)/[(s+3)(s^2+2s+2)]$ como esboçado na Fig. 8.17, calculamos a soma dos ângulos desenhados ao ponto ϵ próximo ao pólo complexo, $-1+j1$, no segundo quadrante. Dessa forma,

$$-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 = -\theta_1 - 90° + \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 180° \tag{8.46}$$

de onde $\theta_1 = -251{,}6° = 108{,}4°$. Um esboço do lugar das raízes é mostrado na Fig. 8.17. Observe agora que o ângulo de partida dos pólos complexos nos ajuda a refinar a forma do lugar das raízes.

Traçando e Calibrando o Lugar das Raízes

Uma vez esboçado o lugar das raízes usando as regras da Seção 8.4, devemos poder localizar pontos sobre o lugar das raízes bem como encontrar seus ganhos associados. Por exemplo, podemos precisar saber as coordenadas exatas do ponto do lugar das raízes no cruzamento com a linha radial que representa 20% de ultrapassagem. Além disso, poderemos também precisar do valor de ganho naquele ponto.

Considere o lugar das raízes mostrado na Fig. 8.12. Suponhamos que precisemos achar o ponto exato no qual o lugar cruza a reta de relação de amortecimento igual a 0,45 e o ganho naquele ponto. A Fig. 8.18 mostra os pólos e zeros a malha aberta do sistema junto com a reta de $\zeta = 0{,}45$. Se forem selecionados alguns pontos de teste ao longo da reta $\zeta = 0{,}45$, podemos avaliar suas somas angulares e localizar o ponto onde os ângulos totalizam um múltiplo ímpar de 180°. É neste ponto que existe o lugar das raízes. A Eq. (8.21) pode então ser usada para calcular o ganho, K, nesse ponto.

Selecionando o ponto de raio 2 ($r = 2$) sobre a reta $\zeta = 0{,}45$, adicionamos os ângulos dos zeros e subtraímos os ângulos dos pólos, obtendo

$$\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 = -251{,}5° \tag{8.47}$$

Visto que a soma não é igual a um múltiplo ímpar de 180°, o ponto de raio = 2 não está no lugar das raízes. Procedendo de forma semelhante para os pontos nos raios = 1,5; 1; 0,747 e 0,5, obtemos a tabela mostrada na Fig. 8.18. Esta tabela lista os pontos, fornecendo seus raios, r, e a soma dos ângulos indicada pelo símbolo $\angle$. A partir da tabela, podemos ver que o ponto de raio 0,747 está no lugar das raízes, visto que os ângulos somam −180°. Usando a Eq. (8.21), o ganho, K, neste ponto é

$$K = \frac{|A||C||D||E|}{|B|} = 1{,}71 \tag{8.48}$$

Resumindo, *procuramos ao longo de uma reta determinada o ponto para o qual resulta uma soma de ângulos (ângulos dos zeros − ângulos dos pólos) igual a um múltiplo ímpar de* 180°. Concluímos que o ponto está no lugar das raízes. O ganho naquele ponto é, portanto, encontrado *multiplicando-se os comprimentos dos vetores dos*

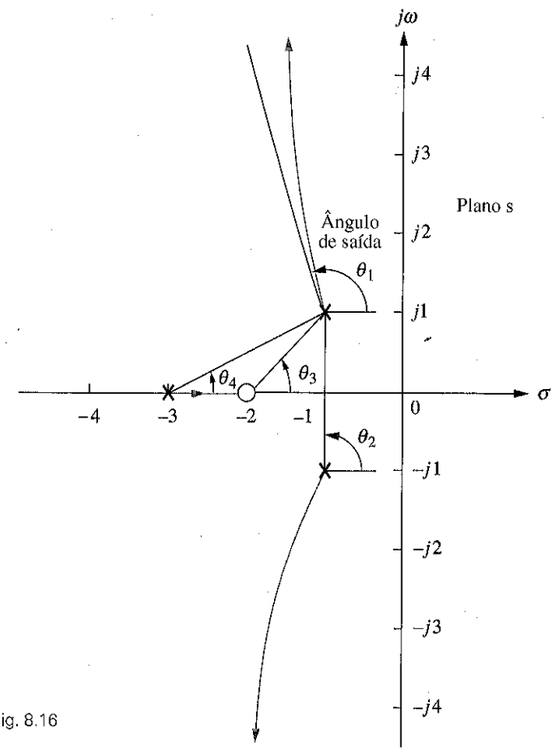


Fig. 8.17 Lugar das raízes para o sistema da Fig. 8.16 mostrando ângulo de saída

Raio r	Ângulo $\angle$ (graus)
0,5	−158,4
0,747	−180,0
1,0	−199,9
1,5	−230,4
2,0	−251,5

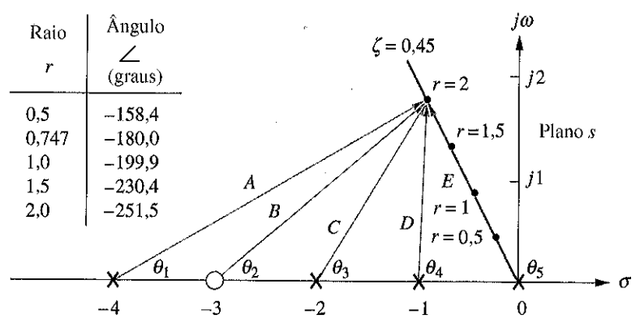


Fig. 8.18 Determinando e calibrando os pontos exatos no lugar das raízes da Fig. 8.12

pólos e dividindo-se pelo produto dos comprimentos dos vetores. Pode ser usado um programa de computador, como o discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha a obra ou o MATLAB.

Exercício de Avaliação 8.4

Problema: Dado um sistema com retroação unitária com função de transferência do canal direto,

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2 - 4s + 13)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.

b. Determine o ponto de interseção do eixo imaginário.
c. Determine o ganho, K, no ponto de interseção do eixo $j\omega$.
d. Determine o ponto de entrada.
e. Determine o ângulo de partida dos pólos complexos.

Respostas:

a. Veja a solução no CD-ROM que acompanha o livro.
b. $s = \pm j\sqrt{21}$
c. $K = 4$
d. Ponto de entrada $= -7$
e. Ângulo de partida $= -233{,}1°$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

8.6 Um Exemplo

Vamos rever agora as regras para esboçar e determinar pontos do lugar das raízes, e também apresentar um exemplo. O lugar das raízes é o caminho percorrido pelos pólos a malha fechada de um sistema à medida que varia um parâmetro do sistema. Cada ponto no lugar das raízes satisfaz a condição de ângulo, $\angle G(s)H(s) = (2k + 1)180°$. Usando esta relação, foram desenvolvidas regras para esboçar e encontrar pontos no lugar das raízes agora resumidas:

Regras Básicas para Esboçar o Lugar das Raízes

Número de ramos O número de ramos do lugar das raízes é igual ao número de pólos a malha fechada.
Simetria O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.
Segmentos de eixo real Sobre o eixo real, para $K > 0$, o lugar das raízes existe à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros a malha aberta finitos sobre o eixo real.
Pontos de início e de término O lugar das raízes se inicia nos pólos finitos e infinitos de $G(s)H(s)$ e termina nos zeros finitos e infinitos de $G(s)H(s)$.
Comportamento no infinito O lugar das raízes tende a assíntotas à medida que o lugar tende ao infinito. Além do mais, a equação das assíntotas é dada pela interseção com o eixo real e pelo ângulo em radianos, como se segue:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\#\ \text{pólos finitos} - \#\ \text{zeros finitos}} \tag{8.49}$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\ \text{pólos finitos} - \#\ \text{zeros finitos}} \tag{8.50}$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Regras Adicionais para Refinar o Esboço

Pontos de entrada e de saída do eixo real O lugar das raízes sai do eixo real no ponto onde o ganho é máximo e entra no eixo real no ponto onde o ganho é mínimo.
Cálculo dos pontos de interseção do eixo $j\omega$ O lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$ em um ponto onde $\angle G(s)H(s) = (2k + 1)180°$. Pode-se usar Routh-Hurwitz ou uma busca ao longo do eixo $j\omega$ para $(2k + 1)180°$ para determinar o ponto de interseção do eixo $j\omega$.
Ângulos de partida e de chegada O lugar das raízes sai dos pólos complexos, a malha aberta e chega a zeros complexos a malha aberta segundo ângulos que podem ser calculados da seguinte forma: Admita um ponto ϵ próximo ao pólo ou ao zero complexo. Adicione a este ponto todos os ângulos desenhados a partir dos pólos e zeros a malha aberta. A soma é igual a $(2k + 1)180°$. O único ângulo desconhecido é o do vetor traçado a partir de ϵ próximo ao pólo ou ao zero, visto que os vetores a partir de todos os outros pólos e zeros podem ser considerados ligados ao pólo ou ao zero complexo ϵ próximo ao ponto. Calculando o ângulo desconhecido obtém-se o ângulo de partida e o ângulo de chegada.
Construindo e calibrando o lugar das raízes Todos os pontos no lugar das raízes satisfazem a relação $\angle G(s)H(s) = (2k + 1)180°$. O ganho, K, em qualquer ponto sobre o lugar das raízes é dado por

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{1}{M} = \frac{\prod \text{comprimentos de pólos finitos}}{\prod \text{comprimentos de zeros finitos}} \tag{8.51}$$

Vejamos agora um exemplo como resumo.

Exemplo 8.7

Esboçando um lugar das raízes e determinando pontos críticos

Problema Esboce o lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 8.19(*a*) e determine o seguinte:

a. O ponto e o ganho exatos onde o lugar cruza a reta de relação de amortecimento de 0,45
b. O ponto e o ganho exatos onde o lugar cruza o eixo $j\omega$
c. O ponto de saída do eixo real
d. A faixa de K na qual o sistema é estável

Solução A solução do problema é mostrada, em parte, na Fig. 8.19(*b*). Primeiro esboce o lugar das raízes. Usando a Regra 3, o segmento do eixo real é determinado entre -2 e -4. A Regra 4 nos diz que o lugar das raízes se inicia nos pólos a malha aberta e termina nos zeros a malha aberta. Estas duas regras sozinhas nos dão a forma geral do lugar das raízes.

a. Para obter o ponto exato onde o lugar cruza a linha de $\zeta = 0{,}45$, podemos usar o programa do lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 do CD-ROM para investigar ao longo da reta

$$\theta = 180° - \cos^{-1} 0{,}45 = 116{,}7° \tag{8.52}$$

o ponto onde os ângulos totalizam um múltiplo ímpar de 180°. Procurando em coordenadas polares, encontramos que o lugar das raízes cruza a reta de $\zeta = 0{,}45$ em $3{,}4\angle 116{,}7°$ com um ganho, K, de 0,417.

b. Para obter o ponto exato onde o lugar cruza o eixo $j\omega$, use o programa de lugar das raízes para investigar ao longo da reta

$$\theta = 90° \tag{8.53}$$

o ponto onde os ângulos totalizam um múltiplo ímpar de 180°. Procurando em coordenadas polares, encontramos que o lugar das raízes cruza o eixo em $\pm j3{,}9$ com um ganho de $K = 1{,}5$.

c. Para obter o ponto de saída, use o programa do lugar das raízes para investigar sobre o eixo real entre -2 e -4 o ponto que resulta em ganho máximo. Naturalmente, todos os pontos terão a soma de seus ângulos totalizando um múltiplo ímpar de 180°. Um ganho máximo de 0,0248 é encontrado no ponto $-2{,}88$. Portanto, o ponto de saída está entre os pólos a malha aberta sobre o eixo real em $-2{,}88$.

d. Com base na resposta (b), o sistema é estável para K entre 0 e 1,5.

MATLAB

Os estudantes que estão usando 1 MATLAB devem executar agora o programa cap8p1 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para traçar e dar um nome ao lugar das raízes, sobrepor curvas de valores constantes de ζ e de ω_n, ampliar e reduzir detalhe de um lugar das raízes, e interagir com ele para encontrar pontos críticos bem como os ganhos nesses pontos. Este exercício resolve o Exemplo 8.7 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 8.5

Problema Dado um sistema com retroação unitária com a seguinte função de transferência do canal direto,

$$G(s) = \frac{K(s-2)(s-4)}{(s^2+6s+25)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine o ponto de interseção com o eixo imaginário.
c. Determine o ganho, K, no ponto de interseção com o eixo $j\omega$.
d. Determine o ponto de entrada.
e. Determine o ponto onde o lugar cruza a reta de relação de amortecimento de 0,5.
f. Determine o ganho no ponto onde o lugar cruza a reta de relação de amortecimento de 0,5.
g. Encontre a faixa de ganho, K, para a qual o sistema é estável.

Respostas:

a. Veja a solução no CD-ROM.
b. $S = \pm j4{,}06$
c. $K = 1$
d. Ponto de entrada $= +2{,}89$
e. $s = -2{,}42 + j4{,}18$
f. $K = 0{,}108$
g. $K < 1$.

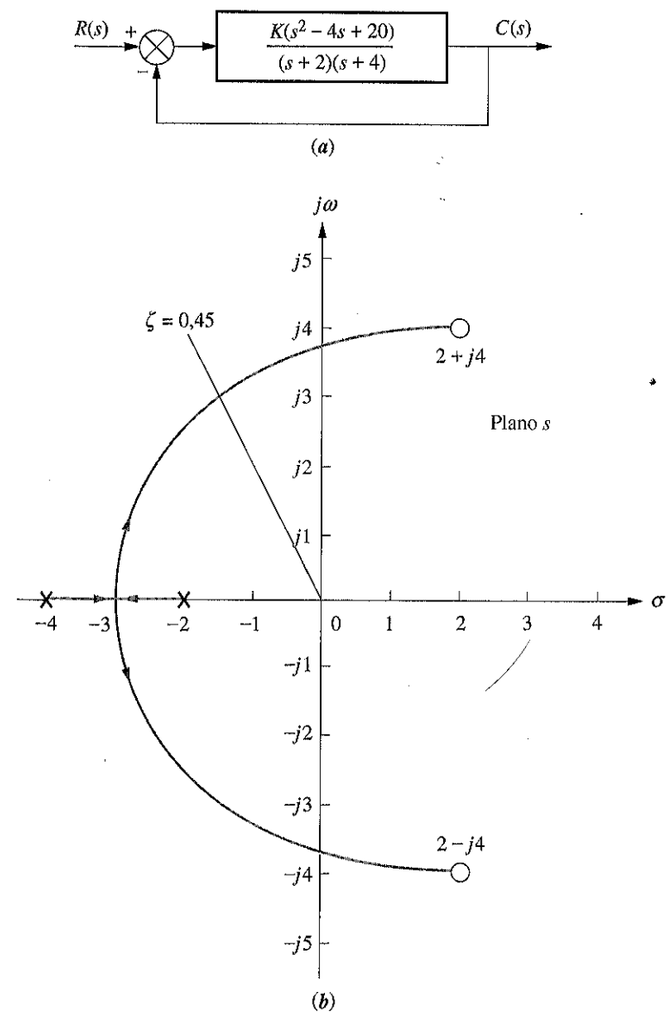


Fig. 8.19
a. Sistema para o Exemplo 8.7;
b. esboço do lugar das raízes

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

8.7 Projeto de Resposta Transitória Através do Ajuste de Ganho

Agora que sabemos como esboçar um lugar das raízes, mostramos como usá-lo no projeto de resposta transitória. Na seção anterior, descobrimos que o lugar das raízes cruzava a reta de relação de amortecimento de 0,45 com um ganho de 0,417. Isto significa que o sistema responderá com 20,5% de ultrapassagem, o equivalente à relação de amortecimento de 0,45? Deve-se enfatizar que as expressões descrevendo o percentual de ultrapassagem, o tempo de assentamento e o instante de pico foram deduzidas somente para um sistema com dois pólos complexos a malha fechada e sem zeros a malha fechada. O efeito de pólos e zeros adicionais e as condições para justificar uma aproximação através de um sistema de dois pólos foram discutidas nas Seções 4.7 e 4.8 e se aplicam aqui aos sistemas a malha fechada e seus lugares das raízes. As condições que justificam uma aproximação de segunda ordem são repetidas aqui:

1. Os pólos de ordem superior no semiplano s da esquerda estão muito mais afastados do eixo imaginário que o par de pólos de segunda ordem dominantes. A resposta que resulta de um pólo de ordem superior não muda sensivelmente a resposta transitória esperada a partir dos pólos de segunda ordem dominantes.
2. Os zeros a malha fechada próximos ao par de pólos de segunda ordem a malha fechada são quase cancelados pela proximidade dos pólos a malha fechada de ordem superior.
3. Os zeros a malha fechada não cancelados pela proximidade de pólos a malha fechada de ordem superior estão em grande parte removidos a partir do par de pólos de segunda ordem a malha fechada.

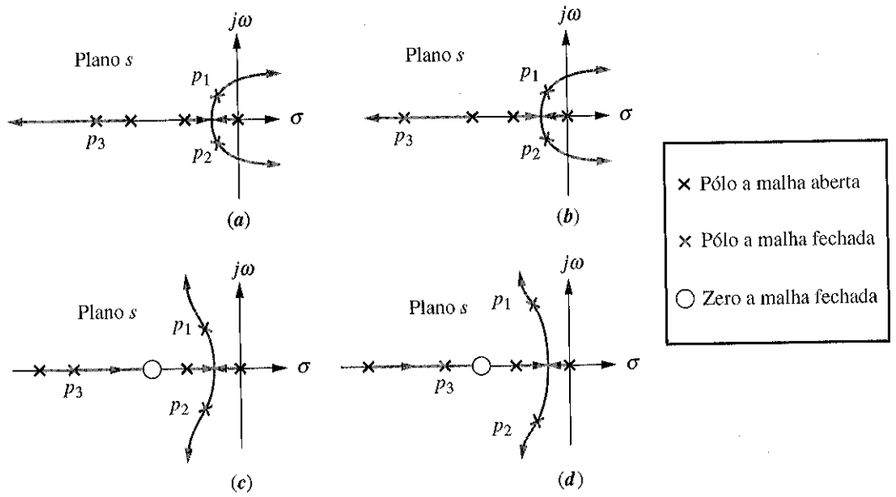


Fig. 8.20 Fazendo aproximações de segunda ordem

A primeira condição como é aplicada ao lugar das raízes é mostrada graficamente nas Figs. 8.20(*a*) e (*b*). A Fig. 8.20(*b*) produziria uma melhor aproximação de segunda ordem que a Fig. 8.20(*a*) visto que o pólo a malha fechada p_3 está mais distante do par de segunda ordem a malha fechada dominante, p_1 e p_2.

A segunda condição é mostrada graficamente nas Figs. 8.20(*c*) e (*d*). A Fig. 8.20(*d*) produziria uma melhor aproximação de segunda ordem que a Fig. 8.20(*c*), uma vez que o pólo a malha fechada p_3 está mais perto de cancelar o zero a malha fechada.

Resumindo o procedimento de projeto para sistemas de ordem superior, chegamos ao seguinte:

1. Esboce o lugar das raízes para o sistema dado.
2. Suponha que é um sistema de segunda ordem sem zeros e determine então o ganho para atender a especificação de resposta transitória.
3. Justifique sua hipótese de segunda ordem determinando a localização de todos os pólos de ordem superior e comprovando o fato de que eles estão muito mais afastados do eixo $j\omega$ do que o par de segunda ordem dominante. Como regra prática, neste livro considera-se um fator de cinco vezes como critério de afastamento razoável. Além disso, verifique se os zeros a malha fechada são cancelados aproximadamente pelos pólos de ordem superior. Se os zeros a malha fechada não forem cancelados pelos pólos a malha fechada de ordem superior, tenha certeza de que o zero está suficientemente afastado do par de pólos de segunda ordem dominante que produz aproximadamente a mesma resposta obtida sem o zero finito.
4. Se as hipóteses não puderem ser justificadas, sua solução terá que ser simulada para se ter certeza de que atende a especificação da resposta transitória. De qualquer forma, é uma boa idéia simular todas as soluções.

Vejamos agora um exemplo de projeto para mostrar como obter uma aproximação de segunda ordem e verificar então se a aproximação é válida ou não.

Exemplo 8.8

Projeto de ganho de sistema de terceira ordem

Problema Considere o sistema mostrado na Fig. 8.21. Projetar o valor de ganho, K, para obter uma ultrapassagem de 1,52%. Além disso, calcule o tempo de assentamento, o instante de pico e o erro de estado estacionário.

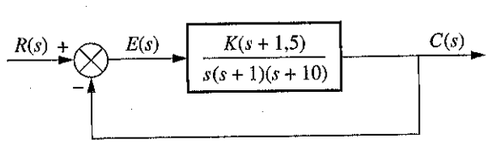


Fig. 8.21 Sistema para o Exemplo 8.8

Solução O lugar das raízes é mostrado na Fig. 8.22. Observe que este é um sistema de terceira ordem com um zero. Os pontos de saída do eixo real podem ocorrer entre 0 e −1, e entre −1,5 e −10, onde o ganho alcança um

pico. Usando o programa de lugar das raízes e investigando nessas regiões os picos de ganho, são encontrados pontos de saída em −0,62 com um ganho de 2,511 e em −4,4 com um ganho de 28,89. Um ponto de entrada sobre o eixo real pode ocorrer entre −1,5 e −10, onde o ganho alcança um mínimo local. Usando o programa de lugar das raízes e investigando nessas regiões um ganho mínimo local, é encontrado um ponto de entrada em −2,8 com um ganho de 27,91.

Em seguida, admita que o sistema possa ser aproximado por um de segunda ordem, subamortecido, sem zeros. Uma ultrapassagem de 1,52% corresponde à relação de amortecimento de 0,8. Esboce essa reta de relação de amortecimento sobre o lugar das raízes, como mostrado na Fig. 8.22.

Use o programa do lugar de raízes para investigar ao longo da reta de relação de amortecimento de 0,8 os pontos onde os ângulos dos pólos e zeros a malha aberta totalizam um múltiplo ímpar de 180°. Este é o ponto onde o lugar das raízes cruza a reta de relação de amortecimento de 0,8, ou seja, a reta de percentual de ultrapassagem de 1,52. Três pontos satisfazem este critério: $-0{,}87 \pm j0{,}66$, $-1{,}19 \pm j0{,}90$, e $-4{,}6 \pm j3{,}45$, com ganhos respectivos de 7,36, 12,79, e 39,64. Para cada ponto, o tempo de assentamento e o instante de pico são calculados usando

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{8.54}$$

onde $\zeta\omega_n$ é a parte real do pólo a malha fechada, e usando também

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{8.55}$$

onde $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é a parte imaginária do pólo a malha fechada.

Para testar nossa hipótese de sistema de segunda ordem, devemos calcular a posição do terceiro pólo. Usando o programa de lugar das raízes, procure ao longo do eixo real negativo, entre o zero em −1,5 e o pólo em −10, os pontos que combinam com o valor de ganho encontrado nos pólos dominantes de segunda ordem. Para cada uma das três interseções com a reta de coeficiente de amortecimento de 0,8, o terceiro pólo a malha fechada está em −9,25, −8,6 e −1,8, respectivamente. Os resultados estão resumidos na Tabela 8.4.

Finalmente, examinemos o erro de estado estacionário produzido em cada caso. Observe que temos um controle reduzido sobre o erro de estado estacionário neste ponto. Quando o ganho é ajustado para atender a resposta transitória, fica projetado também o erro de estado estacionário. Por exemplo, a especificação de erro de estado estacionário é dada por K_v e é calculada como

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{K(1{,}5)}{(1)(10)} \tag{8.56}$$

Os resultados para cada caso estão mostrados na Tabela 8.4.

Quão válidas são as suposições de segunda ordem? A partir da Tabela 8.4, os Casos 1 e 2 fornecem terceiros pólos a malha fechada que estão relativamente distantes do zero a malha fechada. Nestes dois casos não há cancelamento de zero com pólo, e não é válida uma aproximação do sistema de segunda ordem. No Caso 3, o terceiro pólo a malha fechada e o zero a malha fechada estão relativamente próximos um do outro e pode ser considerada

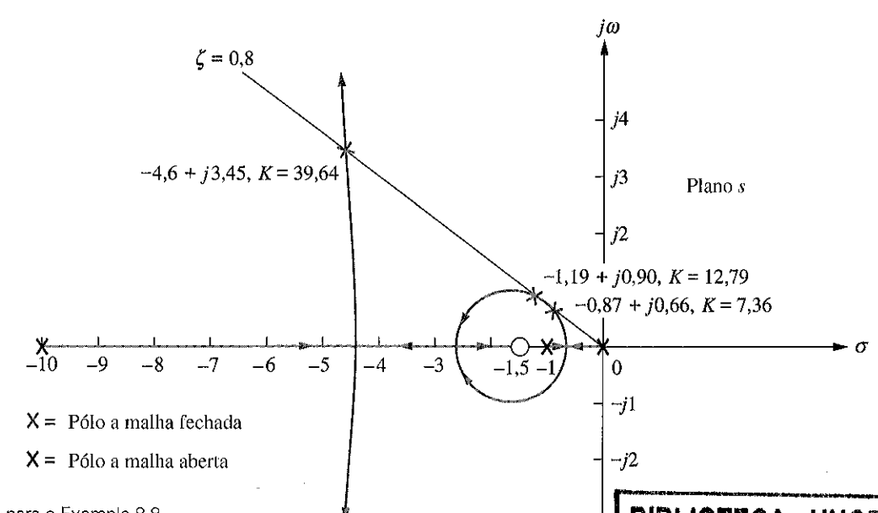


Fig. 8.22 Lugar das raízes para o Exemplo 8.8

BIBLIOTECA - UNOESC

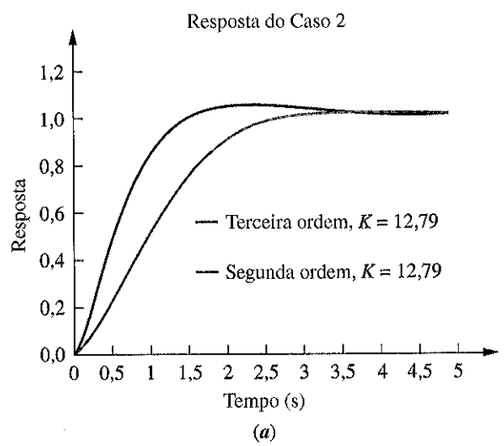
Tabela 8.4 Características do sistema do Exemplo 8.8

Caso	Pólos a malha fechada	Zero a malha fechada	Ganho	Terceiro pólo a malha fechada	Tempo de assentamento	Instante de pico	K_v
1	$-0{,}87 \pm j0{,}66$	$-1{,}5 + j0$	7,36	−9,25	4,60	4,76	1,1
2	$-1{,}19 \pm j0{,}90$	$-1{,}5 + j0$	12,79	−8,61	3,36	3,49	1,9
3	$-4{,}60 \pm j3{,}45$	$-1{,}5 + j0$	39,64	−1,80	0,87	0,91	5,9

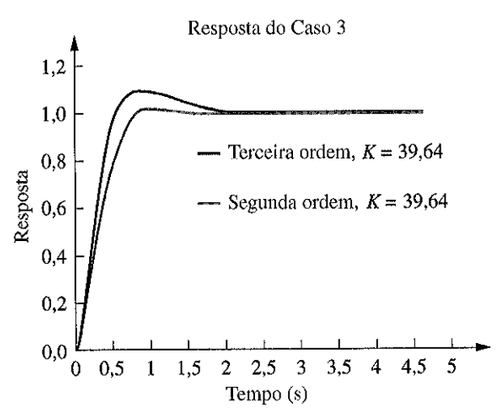
válida uma aproximação do sistema de segunda ordem. Para mostrar isso, façamos uma expansão em frações parciais da resposta ao degrau a malha fechada do Caso 3 e vejamos que a amplitude do decaimento exponencial é muito menor que a amplitude da senóide subamortecida. A resposta ao degrau a malha fechada, $C_3(s)$, formada a partir dos pólos e zeros a malha fechada do Caso 3, é

$$\begin{aligned} C_3(s) &= \frac{39{,}64(s+1{,}5)}{s(s+1{,}8)(s+4{,}6+j3{,}45)(s+4{,}6-j3{,}45)} \\ &= \frac{39{,}64(s+1{,}5)}{s(s+1{,}8)(s^2+9{,}2s+33{,}06)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{0{,}3}{s(s+1{,}8)} - \frac{1{,}3(s+4{,}6)+1{,}6(3{,}45)}{(s+4{,}6)^2+3{,}45^2} \end{aligned} \tag{8.57}$$

Fig. 8.23 Respostas de segunda e terceira ordens para o Exemplo 8.8:
a. Caso 2;
b. Caso 3



(*a*)



(*b*)

Dessa forma, a amplitude do decaimento exponencial devida ao terceiro pólo é 0,3, e a amplitude da resposta subamortecida devida aos pólos dominantes é $\sqrt{1{,}3^2+1{,}6^2} = 2{,}06$. Portanto, a resposta do pólo dominante é 6,9 vezes maior que a resposta exponencial não-dominante, e neste caso consideramos que uma aproximação de segunda ordem seja válida.

Usando um programa de simulação, obtemos a Fig. 8.23, onde são mostradas comparações das respostas ao degrau para o problema que acabamos de resolver. Os Casos 2 e 3 são traçados como respostas de terceira ordem e de segunda ordem, admitindo exatamente o par de pólos dominantes calculados no problema do projeto. Uma vez mais, foi justificada a aproximação de segunda ordem para o Caso 3, onde existe uma pequena diferença no percentual de ultrapassagem. A aproximação de segunda ordem não é válida para o Caso 2. A não ser pela ultrapassagem, as respostas do Caso 3 são semelhantes.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o programa cap8p2 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para entrar com um valor de percentual de ultrapassagem a partir do teclado. O MATLAB desenhará então o lugar das raízes superpondo a reta do percentual de ultrapassagem solicitado. Você irá interagir, então, com o MATLAB e selecionar o ponto de interseção do lugar das raízes com a reta de percentual de ultrapassagem solicitado. O MATLAB responderá com o valor de ganho, com todos os pólos a malha fechada com aquele ganho, e um gráfico da resposta ao degrau a malha fechada correspondente ao ponto selecionado. Este exercício resolve o Exemplo 8.8 usando o MATLAB.

Ferramenta GUI

Os estudantes que estão usando o MATLAB podem explorar a interface gráfica de usuário Root Locus Design GUI descrita no Apêndice D. Essa interface gráfica de usuário constitui uma forma conveniente e intuitiva para obter, visualizar e interagir com um lugar das raízes do sistema. A Seção D.5 descreve as vantagens do uso dessa ferramenta, enquanto a Seção D.6 descreve como usá-la. Para praticar, você deve querer aplicar o Root Locus Design GUI a alguns problemas do final deste capítulo.

Exercício de Avaliação 8.6

Problema: Dado um sistema com retroação unitária que tem uma função de transferência no canal direto,

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Usando uma aproximação de segunda ordem, projetar o valor de K que produz 10% de ultrapassagem para uma entrada em degrau unitário.
c. Calcule o tempo de assentamento, o instante de pico, o tempo de subida e o erro de estado estacionário para o valor de K projetado em (b).
d. Determine a validade da aproximação de segunda ordem.

Respostas:

a. Veja a solução no CD-ROM que acompanha este livro.
b. $K = 45{,}55$
c. $T_s = 1{,}97$s, $T_p = 1{,}13$s, $T_r = 0{,}53$s, e $e_{degrau}(\infty) = 0{,}51$
d. A aproximação de segunda ordem não é válida.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

8.8 Lugar das Raízes Generalizado

Até este ponto tivemos sempre que desenhar o lugar das raízes como uma função do ganho do percurso direto, K. O projetista de sistemas de controle precisa saber como os pólos a malha fechada mudam em função de um outro parâmetro. Por exemplo, na Fig. 8.24 o parâmetro de interesse é o pólo a malha aberta em $-p_1$. Como podemos obter um lugar das raízes para variações do valor de p_1?

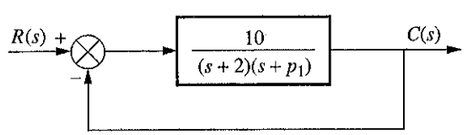


Fig. 8.24 Sistema que requer um lugar das raízes calibrado em valores de p_1, como parâmetro

Se a função $KG(s)H(s)$ for formada como

$$KG(s)H(s) = \frac{10}{(s+2)(s+p_1)} \tag{8.58}$$

o problema é que p_1 não é um fator multiplicador da função como o ganho, K, foi em todos os exercícios anteriores. A solução para este dilema é criar um sistema equivalente onde p_1 apareça como um ganho de percurso direto. Uma vez que o denominador da função de transferência a malha fechada seja $1 + KG(s)H(s)$, efetivamente queremos criar um sistema equivalente no qual o denominador é $1 + p_1G(s)H(s)$.

Para o sistema da Fig. 8.24, a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{10}{s^2 + (p_1 + 2)s + 2p_1 + 10} \tag{8.59}$$

Isolando p_1, tem-se

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10 + p_1(s+2)} \tag{8.60}$$

Convertendo o denominador para a forma $[1 + p_1G(s)H(s)]$ dividindo o numerador e o denominador pelo termo que não inclui p_1, $s^2 + 2s + 10$, obtém-se

$$T(s) = \frac{\dfrac{10}{s^2 + 2s + 10}}{1 + \dfrac{p_1(s+2)}{s^2 + 2s + 10}} \tag{8.61}$$

Conceitualmente, a Eq. (8.61) implica que temos um sistema para o qual

$$KG(s)H(s) = \frac{p_1(s+2)}{s^2 + 2s + 10} \tag{8.62}$$

O lugar das raízes pode agora ser esboçado como uma função de p_1 admitindo o sistema a malha aberta da Eq. (8.62). O resultado final está mostrado na Fig. 8.25.

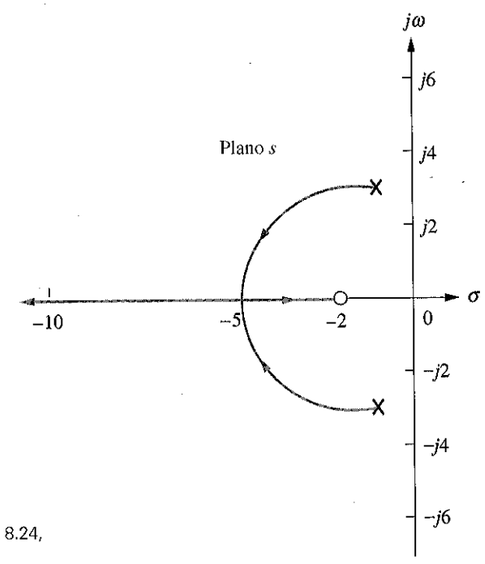


Fig. 8.25 Lugar das raízes para o sistema da Fig. 8.24, tendo p_1 como parâmetro

Exercício de Avaliação 8.7

Problema: Esboce o lugar das raízes para variações no valor de p_1 para um sistema com retroação unitária que tem a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{100}{s(s+p_1)}$$

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção aprendemos a traçar o lugar das raízes como uma função de qualquer parâmetro de sistema. Na próxima seção aprenderemos como traçar o lugar das raízes para sistemas com retroação positiva.

8.9 Lugar das Raízes para Sistemas com Retroação Positiva

As propriedades do lugar das raízes foram deduzidas com base no sistema da Fig. 8.1. Este é um sistema com retroação negativa por causa da soma negativa do sinal de retroação com o sinal de entrada. As propriedades do lugar das raízes mudam drasticamente se o sinal de retroação for adicionado ao de entrada ao invés de subtraído. Um sistema com retroação positiva pode ser visto como um sistema com retroação negativa com um valor negativo de $H(s)$. Usando este conceito, descobrimos que a função de transferência para o sistema com retroação positiva mostrado na Fig. 8.26 é

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 - KG(s)H(s)} \tag{8.63}$$

Reconstituímos agora o desenvolvimento do lugar das raízes para o denominador da Eq. (8.63). Evidentemente existe um pólo, s, quando

$$KG(s)H(s) = 1 = 1\angle k360^\circ \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{8.64}$$

Por conseguinte, o lugar das raízes para os sistemas com retroação positiva consiste em todos os pontos no plano s onde o ângulo de $KG(s)H(s) = k360^\circ$. Como esta relação muda as regras para esboçar o lugar das raízes?

1. **Número de ramos.** Os mesmos argumentos para retroação negativa aplicam-se a esta regra. Não há mudanças.
2. **Simetria.** Os mesmos argumentos para retroação negativa aplicam-se a esta regra. Não há mudanças.
3. **Segmentos do eixo real.** O desenvolvimento na Seção 8.4 para os segmentos do eixo real conduz ao fato de que os ângulos de $G(s)H(s)$ ao longo do eixo real totalizam ou um múltiplo ímpar de 180° ou um múltiplo de 360°. Dessa forma, para sistemas com retroação positiva, o lugar das raízes existe no eixo real junto nos trechos onde não existe lugar para sistema com retroação negativa. A regra é a seguinte:

   Segmentos do eixo real: Sobre o eixo real, o lugar das raízes para sistemas com retroação positiva existe à esquerda de um número ***par*** *de pólos a malha aberta finitos e/ou zeros a malha aberta finitos sobre o eixo real.*

   A mudança na regra é a palavra *par*; para sistemas com retroação negativa, o lugar existia à esquerda de um número *ímpar* de pólos e/ou zeros a malha aberta finitos sobre o eixo real.

4. **Pontos de início e de fim.** Você não vai encontrar mudanças no desenvolvimento na Seção 8.4 se a Eq. (8.63) for usada em vez da Eq. (8.12). Por conseguinte, temos a regra que se segue.

   Pontos de início e de fim: O lugar das raízes para sistemas com retroação positiva começa nos pólos finitos e infinitos de $G(s)H(s)$ e termina nos zeros finitos e infinitos de $G(s)H(s)$.

5. **Comportamento no infinito.** As mudanças no desenvolvimento das assíntotas começam na Eq. (J.4) no Apêndice J.1 no CD-ROM que acompanha o livro, uma vez que sistemas com retroação positiva seguem a relação dada na Eq. (8.64). Essa mudança produz uma inclinação diferente para as assíntotas. O valor do ponto de interseção das assíntotas sobre o eixo real permanece sem alteração. O estudante é encorajado a efetuar o desenvolvimento em detalhes e mostrar que o comportamento no infinito de sistemas com retroação positiva é dado pela seguinte regra:

   O lugar das raízes tende a retas assintóticas à medida que o lugar tende ao infinito. Além disso, a equação das assíntotas para os sistemas com retroação positiva é dada pelo ponto de interseção sobre o eixo real, σ_a, e o ângulo, θ_a, como a seguir:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\#\,\text{pólos finitos} - \#\,\text{zeros finitos}} \tag{8.65}$$

$$\theta_a = \frac{k2\pi}{\#\,\text{pólos finitos} - \#\,\text{zeros finitos}} \tag{8.66}$$

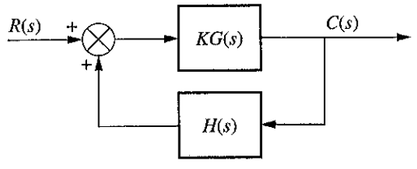


Fig. 8.26 Sistema com retroação positiva

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ e o ângulo medido no sentido trigonométrico em relação ao eixo real positivo é dado em radianos.

A mudança que vemos é que o numerador da Eq. (8.66) é $k2\pi$ em vez de $(2k + 1)\pi$.

E sobre os outros cálculos? O ponto de interseção do eixo imaginário pode ser encontrado usando-se o programa do lugar das raízes. Na procura sobre o eixo $j\omega$, você está procurando os pontos onde os ângulos totalizam um múltiplo de 360° em vez de um múltiplo ímpar de 180°. Os pontos de saída são encontrados procurando-se valores de máximo para K. Os pontos de entrada são encontrados procurando-se valores de mínimo para K.

Quando estávamos discutindo sistemas com retroação *negativa*, sempre fizemos o gráfico do lugar das raízes para valores positivos de ganho. Como os sistemas com retroação *positiva* podem ser vistos também como sistemas com retroação *negativa* com ganho negativo, as regras desenvolvidas nesta seção aplicam-se igualmente a sistemas com retroação *negativa* com ganho negativo. Vejamos um exemplo.

Exemplo 8.9

Lugar das raízes para um sistema com retroação positiva

Problema Esboce o lugar das raízes como uma função de ganho negativo, K, para o sistema mostrado na Fig. 8.11.

Solução O sistema com retroação positiva equivalente obtido deslocando-se o bloco -1, associado com K, para a direita do ponto de coleta de sinal é mostrado na Fig. 8.27(*a*). Por conseguinte, à medida que o ganho do sistema equivalente percorre valores positivos de K, o lugar das raízes será equivalente ao gerado pelo ganho, K, do sistema original na Fig. 8.11 à medida que este percorre valores negativos.

O lugar das raízes existe no eixo real à esquerda de um número par de pólos e/ou zeros reais a malha fechada, finitos. Por conseguinte, o lugar existe sobre toda a parte positiva do eixo real, entre -1 e -2 e entre -3 e -4. Usando a Eq. (8.27), o ponto de interseção σ_a é encontrado como sendo

$$\sigma_a = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3} \tag{8.67}$$

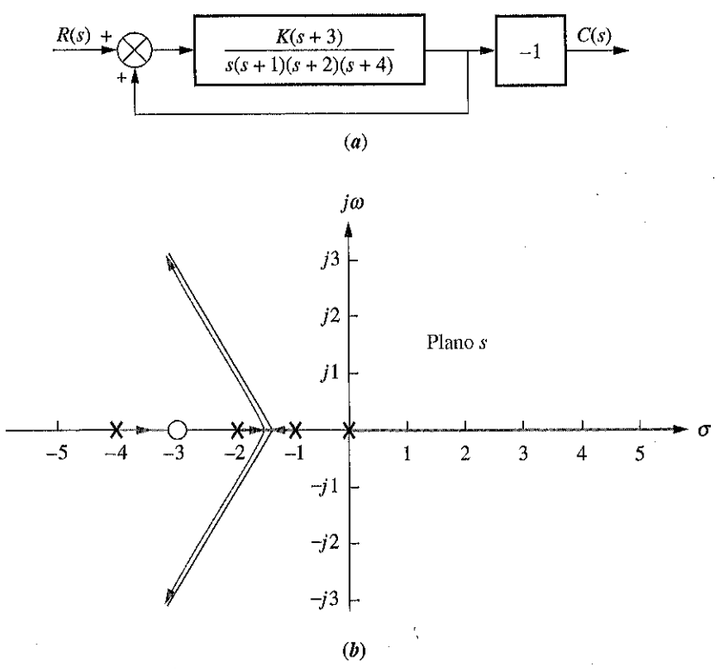


Fig. 8.27
a. Sistema com retroação positiva equivalente para o Exemplo 8.9;
b. lugar das raízes

Os ângulos das retas que se cruzam em $-4/3$ são dados por

$$\theta_a = \frac{k2\pi}{\#\text{ pólos finitos} - \#\text{ zeros finitos}} \tag{8.68a}$$

$$= 0 \quad \text{para } k = 0 \tag{8.68b}$$

$$= 2\pi/3 \quad \text{para } k = 1 \tag{8.68c}$$

$$= 4\pi/3 \quad \text{para } k = 2 \tag{8.68d}$$

O esboço final do lugar das raízes está mostrado na Fig. 8.27(*b*).

Exercício de Avaliação 8.8

Problema: Esboce o lugar das raízes para o sistema com retroação positiva cuja função de transferência do percurso direto é

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

O sistema tem retroação unitária.

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

8.10 Sensibilidade dos Pólos

O lugar das raízes é um gráfico de pólos a malha fechada à medida que um parâmetro de sistema é variado. Tipicamente, o parâmetro de sistema é um ganho. Qualquer alteração no parâmetro muda os pólos a malha fechada e, conseqüentemente, o desempenho do sistema. Muitas vezes o parâmetro muda contra nossas vontades devido ao aquecimento ou a outras condições ambientais. Gostaríamos de descobrir em que extensão essas mudanças nos valores do parâmetro afetam o desempenho do sistema.

O lugar das raízes mostra uma relação não-linear entre o ganho e a localização dos pólos. Ao longo de alguns trechos do lugar das raízes, (1) pequenas mudanças no ganho resultam em grandes mudanças na localização do pólo e portanto no desempenho; ao longo de outros trechos do lugar das raízes, (2) grandes mudanças no ganho resultam em pequenas mudanças na localização dos pólos. No primeiro caso, dizemos que o sistema tem uma alta sensibilidade em relação a mudanças no ganho. No segundo caso, o sistema tem uma baixa sensibilidade a mudanças no ganho. Preferimos sistemas com baixa sensibilidade a mudanças no ganho.

Na Seção 7.7 definimos sensibilidade como a relação entre a mudança relativa em uma função e a mudança relativa no parâmetro à medida que a variação no valor do parâmetro tende a zero. Aplicando a mesma definição aos pólos a malha fechada do sistema que variam com um parâmetro, definimos *sensibilidade da raiz* como a relação entre a mudança relativa de um pólo a malha fechada e a mudança relativa num parâmetro de sistema como o ganho. Usando a Eq. (7.75), calculamos a sensibilidade do pólo a malha fechada, s, ao ganho, K:

$$S_{s:K} = \frac{K}{s}\frac{\delta s}{\delta K} \tag{8.69}$$

onde s é a localização atual do pólo, e K é o ganho atual. Usando a Eq. (8.69) e convertendo as derivadas parciais em incrementos finitos, a mudança efetiva nos pólos a malha fechada pode ser aproximada como

$$\Delta s = s(S_{s:K})\frac{\Delta K}{K} \tag{8.70}$$

onde Δs é a mudança na localização do pólo, e $\Delta K/K$ é a mudança relativa no ganho, K. Demonstremos com um exemplo. Começamos com a equação característica a partir da qual se pode determinar $\delta s/\delta K$. Em seguida, usando a Eq. (8.69) com o pólo a malha fechada atual, s, e seu ganho associado, K, podemos encontrar a sensibilidade.

Exemplo 8.10

Sensibilidade da raiz de um sistema a malha fechada a variações no ganho

Problema Encontre a sensibilidade da raiz do sistema na Fig. 8.4 em $s = -9{,}47$ e em $-5 + j5$. Calcule também a mudança na localização do pólo para uma mudança de 10% em K.

Solução A equação característica do sistema, determinada a partir do denominador da função de transferência a malha fechada, é $s^2 + 10s + K = 0$. Derivando com relação a K, temos

$$2s\frac{\delta s}{\delta K} + 10\frac{\delta s}{\delta K} + 1 = 0 \tag{8.71}$$

a partir do qual

$$\frac{\delta s}{\delta K} = \frac{-1}{2s + 10} \tag{8.72}$$

Substituindo a Eq. (8.72) pela Eq. (8.69), a sensibilidade é encontrada como sendo

$$S_{s:K} = \frac{K}{s}\frac{-1}{2s + 10} \tag{8.73}$$

Para $s = -9{,}47$, a Tabela 8.1 mostra $K = 5$. Substituindo esses valores na Eq. (8.73) resulta $S_{s:K} = -0{,}059$. A mudança na localização do pólo para uma mudança de 10% em K pode ser encontrada usando a Eq. (8.70), com $s = 9{,}47$, $\Delta K/K = 0{,}1$, e $S_{s:K} = -0{,}059$. Portanto, $\Delta s = 0{,}056$, ou seja, para uma mudança de 10% em K, o pólo se moverá para a direita 0,056 unidades.

Para $s = -5 + j5$, a Tabela 8.1 mostra $K = 50$. Substituindo esses valores na Eq. (8.73), resulta $S_{s:K} = 1/(1 + j1) = (1/\sqrt{2})\angle -45°$. A alteração na localização do pólo para uma mudança de 10% em K pode ser encontrada usando a Eq. (8.70), com $s = -5 + j5$, $\Delta K/K = 0{,}1$, e $S_{s:K} = (1/\sqrt{2})\angle -45°$. Portanto, $\Delta s = j0{,}5$, ou seja, o pólo se moverá verticalmente 0,5 unidade para uma mudança de 10% em K.

Resumindo, então, para $K = 5$, $S_{s:K} = -0{,}059$. Para $K = 50$, $S_{s:K} = (1/\sqrt{2})\angle -45°$. Comparando as magnitudes, concluímos que o lugar das raízes é menos sensível a mudanças no ganho para valores baixos de K. Observe que a sensibilidade da raiz é uma quantidade complexa, possuindo tanto a informação de magnitude quanto a de direção a partir das quais pode ser calculada a mudança na localização dos pólos.

Exercício de Avaliação 8.9

Problema: Um sistema com retroação unitária negativa tem uma função de transferência de percurso direto:

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s + 2)}$$

Se K for ajustado em 20, obtenha as mudanças na localização dos pólos a malha fechada para uma variação de 5% em K.

Resposta: Para o pólo a malha fechada em $-21{,}05$, $\Delta s = -0{,}9975$; para o pólo a malha fechada em $-0{,}95$, $\Delta s = -0{,}0025$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de Antena: Projeto Transitório por Intermédio do Ganho

O principal objetivo deste capítulo é demonstrar o projeto de sistemas de ordem superior (maior que dois) através de ajuste de ganho. Especificamente, estamos interessado em determinar o valor de ganho necessário para atender requisitos de resposta transitória como ultrapassagem percentual, tempo de assentamento e instante de pico. O seguinte estudo de caso enfatiza este procedimento de projeto usando o lugar das raízes.

Problema Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1), determine o ganho do pré-amplificador necessário para se obter 25% de ultrapassagem.

Solução O diagrama de blocos do sistema foi deduzido nos Estudos de Caso do Cap. 5 e é mostrado na Fig. 5.35(*c*), onde $G(s) = 6{,}63K/[s(s + 1{,}71)(s + 100)]$.

Primeiramente, é feito um esboço do lugar das raízes para orientar o projetista. Os trechos do eixo real estão entre a origem e $-1{,}71$, e a partir de -100 ao infinito. O lugar se inicia nos pólos a malha aberta, que estão todos sobre o eixo real, na origem, em $-1{,}71$ e em -100. O lugar move-se então em direção aos zeros no infinito segundo assíntotas que, com base nas Eqs. (8.27) e (8.28), interceptam o eixo real em $-33{,}9$ em ângulos de 60°, 180° e $-60°$. Uma parte de lugar das raízes está mostrada na Fig. 8.28.

Com base na Eq. (4.39), 25% de ultrapassagem correspondem a uma relação de amortecimento de 0,404. Agora desenhe uma reta radial a partir da origem com ângulo de $\cos^{-1}\zeta = 113{,}8$. A interseção desta reta com o lugar das raízes localiza os pólos a malha fechada de segunda ordem dominantes. Usando o programa de lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha este livro para investigar os pontos de 180° sobre a reta radial, obtêm-se os pólos dominantes a malha fechada em $2{,}063\angle 113{,}8° = -0{,}833 \pm j1{,}888$. O valor de ganho fornece $6{,}63K = 425{,}7$, de onde $K = 64{,}21$.

Verificando nossa hipótese de segunda ordem, o terceiro pólo deve estar à esquerda do pólo a malha aberta em -100, sendo assim superior a cinco vezes a parte real do par de pólos dominantes, que é $-0{,}833$. A aproximação de segunda ordem é, portanto, válida.

A simulação em computador da resposta ao degrau do sistema a malha fechada na Fig. 8.29 mostra que o requisito do projeto de 25% de ultrapassagem é atendido.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Reportando ao sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa da frente (Configuração 2), faça o seguinte:

a. Determine o ganho do pré-amplificador, K, necessário para um tempo de assentamento de 8 segundos.

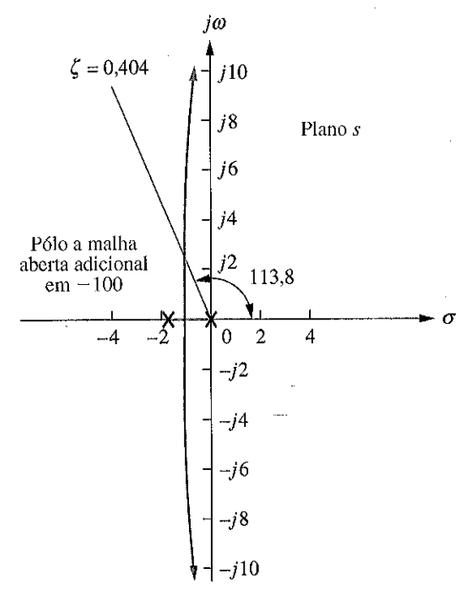


Fig. 8.28 Porção do lugar das raízes para o sistema de controle de antena

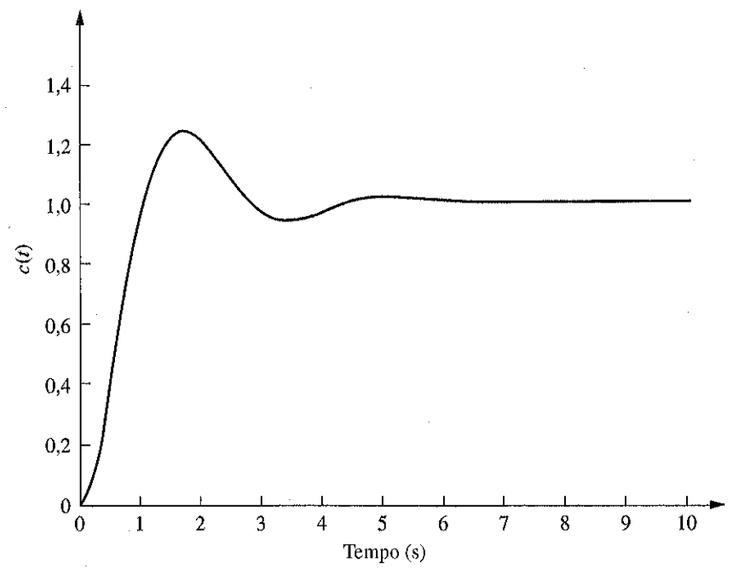


Fig. 8.29 Resposta ao degrau do sistema de controle de antena com ajuste de ganho

MATLAB

b. Repita, usando o MATLAB.

Projeto

Veículo UFSS: Projeto Transitório por Intermédio do Ganho

Neste estudo de caso, aplicamos o lugar das raízes à malha de controle de arfagem do veículo UFSS. A malha de controle de arfagem está mostrada na contracapa traseira com retroação de velocidade e de posição. No exemplo a seguir, construímos o lugar das raízes com e sem a retroação de velocidade. Veremos o efeito estabilizante que a retroação de velocidade tem sobre o sistema.

Problema Considere a malha de controle de arfagem do veículo UFSS mostrado na contracapa traseira (Johnson, 1980).

a. Se $K_2 = 0$ (i.e., sem retroação de velocidade), construa o lugar das raízes para o sistema como uma função do ganho de arfagem, K_1, e estime o tempo de assentamento e o instante de pico com o sistema respondendo em malha fechada com uma ultrapassagem de 20%.

b. Faça $K_2 = K_1$ (i.e., acrescente a retroação de velocidade) e repita (a).

Solução

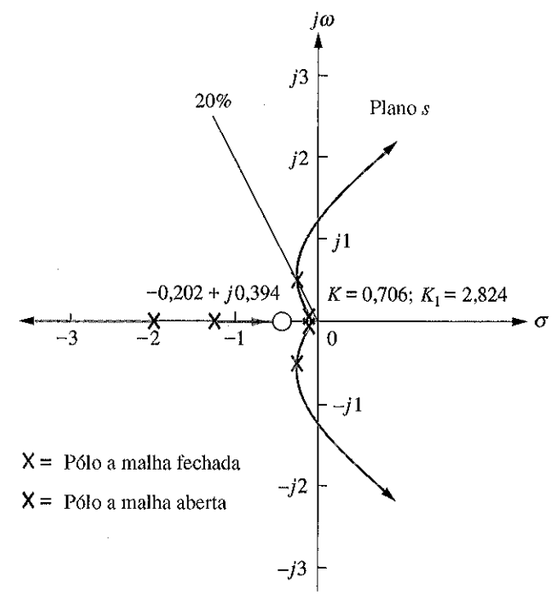
a. Admitindo $K_2 = 0$, a função de transferência a malha aberta é

$$G(s)H(s) = \frac{0{,}25K_1(s + 0{,}435)}{(s + 1{,}23)(s + 2)(s^2 + 0{,}226s + 0{,}0169)} \tag{8.74}$$

a partir do qual o lugar das raízes é traçado na Fig. 8.30. Procurando ao longo da reta de ultrapassagem de 20% calculada com base na Eq. (4.39), encontramos como pólos de segunda ordem dominantes $-0{,}202 \pm j0{,}394$ com o ganho de $K = 0{,}25K_1 = 0{,}706$, ou $K_1 = 2{,}824$.

Com base na parte real do pólo dominante, o tempo de assentamento é estimado em $T_s = 4/0{,}202 = 19{,}8$ s. Com base na parte imaginária do pólo dominante, o instante de pico é estimado em $T_p = \pi/0{,}394 = 7{,}97$ s. Uma vez que os valores estimados são baseados na hipótese de segunda ordem, testamos agora nossa hipótese determinando a localização do terceiro pólo a malha fechada entre $-0{,}435$ e $-1{,}23$, e a localização do quarto pólo a malha fechada entre -2 e infinito. Procurando em cada uma dessas regiões para um ganho de $K = 0{,}706$, encontramos o terceiro e o quarto pólos em $-0{,}784$ e $-2{,}27$, respectivamente. O terceiro pólo em $-0{,}784$ pode

Fig. 8.30 Lugar das raízes da malha de controle de arfagem sem retroação de velocidade, veículo UFSS



não estar suficientemente próximo do zero em $-0{,}435$, e dessa forma o sistema deve ser simulado. O quarto pólo em $-2{,}27$ está 11 vezes mais distante do eixo imaginário que os pólos dominantes, e dessa forma atende o requisito de no mínimo cinco vezes a parte real dos pólos dominantes.

Uma simulação em computador da resposta ao degrau para o sistema, mostrada na Fig. 8.31, apresenta uma ultrapassagem de 29% acima do valor final de 0,88, um tempo de assentamento de aproximadamente 20 s, e um instante de pico de aproximadamente 7,5 s.

b. Adicionando retroação da velocidade fazendo $K_2 = K_1$ no sistema de controle de arfagem mostrado na contracapa traseira, vamos prosseguir para encontrar a nova função de transferência a malha aberta. Deslocando $-K_1$ para

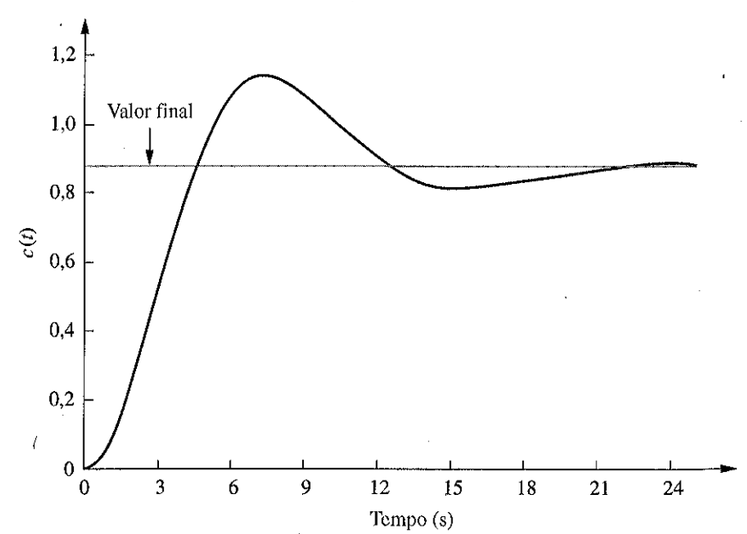


Fig. 8.31 Simulação em computador da resposta ao degrau da malha de controle de arfagem sem retroação de velocidade, veículo UFSS

a direita da junção somadora, dividindo o sensor de velocidade de arfagem por $-K_1$, e combinando os dois laços de retroação resultante obtendo $(s + 1)$, resulta a seguinte função de transferência a malha aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{0{,}25K_1(s + 0{,}435)(s + 1)}{(s + 1{,}23)(s + 2)(s^2 + 0{,}226s + 0{,}0169)} \tag{8.75}$$

Observe que a inclusão da retroação de velocidade adiciona um zero à função de transferência a malha aberta. O lugar das raízes resultante é mostrado na Fig. 8.32. Observe que este lugar das raízes, diferente do lugar das raízes em (a), é estável para todos os valores de ganho, visto que o lugar não entra no lado direito do plano s para nenhum valor de ganho positivo, $K = 0{,}25K_1$. Observe também que a interseção com a reta de ultrapassagem de 20% está muito mais distante do eixo imaginário que no caso sem retroação de velocidade, resultando num tempo de resposta mais rápido para o sistema.

O lugar das raízes cruza a reta de ultrapassagem de 20% em $-1{,}024 \pm j1{,}998$ com um ganho de $K = 0{,}25K_1 = 5{,}17$, ou $K_1 = 20{,}68$. Usando as partes real e imaginária do lugar do pólo dominante, o tempo de assentamento é estimado em $T_s = 4/1{,}024 = 3{,}9$ s, e o instante de pico é previsto em $T_p = \pi/1{,}998 = 1{,}57$ s. A nova estimativa mostra uma melhora considerável na resposta transitória quando comparada com a do sistema sem retroação de velocidade.

Testamos agora nossa aproximação de segunda ordem determinando a localização do terceiro e quarto pólos entre $-0{,}435$ e -1. Investigando essa região para um ganho de $K = 5{,}17$, localizamos o terceiro e quarto pólos em aproximadamente $-0{,}5$ e $-0{,}91$. Uma vez que o zero em -1 é um zero de $H(s)$, o leitor pode verificar que este zero não é um zero da função de transferência a malha fechada. Dessa forma, embora possa existir um cancelamento de pólo com zero entre o pólo a malha fechada em $-0{,}5$ e o zero a malha fechada em $-0{,}435$, não existe zero *a malha fechada* para cancelar o pólo a malha fechada em $-0{,}91$.[3] Nossa aproximação de segunda ordem não é válida.

Uma simulação em computador do sistema com retroação de velocidade é mostrada na Fig. 8.33. Embora a resposta mostre que nossa aproximação de segunda ordem não é válida, ela ainda representa uma melhora considerável no desempenho em relação ao sistema sem retroação de velocidade; a ultrapassagem percentual é pequena, e o tempo de assentamento é de aproximadamente 6 s em vez de 20 s.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos do capítulo. Para o sistema de controle de rumo do veículo UFSS (Johnson, 1980) mostrado na contracapa traseira e apresentado no

[3]O zero em -1 mostrado no gráfico do lugar das raízes da Fig. 8.32 é um zero a malha aberta, uma vez que ele vem do numerador de $H(s)$.

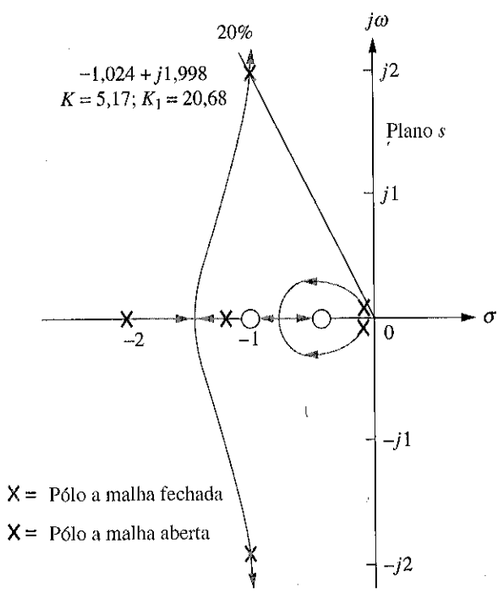


Fig. 8.32 Lugar das raízes da malha de controle de arfagem com retroação de velocidade, veículo UFSS

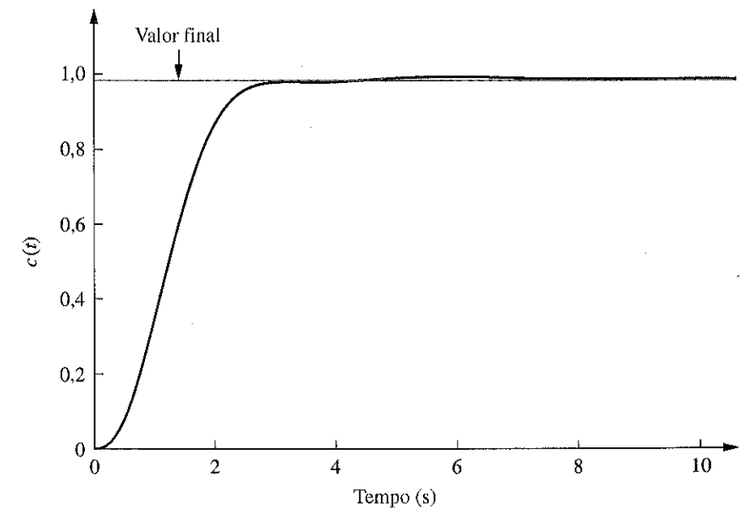


Fig. 8.33 Simulação em computador de reposta ao degrau da malha de controle de arfagem com retroação de velocidade, veículo UFSS

desafio de Estudo de Caso no Cap. 5, faça o seguinte:

a. Admita $K_2 = K_1$ e encontre o valor de K_1 que resulta em 10% de ultrapassagem.

MATLAB

b. Repita, usando o MATLAB.

Concluímos o capítulo com dois estudos de caso mostrando o uso e a aplicação do lugar das raízes. Vimos como traçar um lugar das raízes e estimar a resposta transitória fazendo uma aproximação de segunda ordem. Vimos que a aproximação de segunda ordem se mantém verdadeira quando não se usa a retroação de velocidade para o veículo UFSS. Quando a retroação de velocidade foi usada, apareceu um zero a malha aberta de $H(s)$. Uma vez que não era um zero a malha fechada, não houve cancelamento de pólo com zero, e uma aproximação de segunda ordem não pôde ser justificada. Nesse caso, contudo, a resposta transitória com retroação de velocidade apresentou uma melhora em relação à do sistema sem retroação de velocidade. Nos capítulos subseqüentes mostraremos por que a retroação de velocidade produz uma melhoria no desempenho. Mostraremos também outros métodos de melhoramento da resposta transitória.

Sumário

Neste capítulo, examinamos o *lugar da raízes*, uma ferramenta poderosa para análise e projeto de sistemas de controle. O lugar das raízes nos fornece informação qualitativa e quantitativa sobre a estabilidade e sobre a resposta transitória dos sistemas de controle com retroação. O lugar das raízes nos permite encontrar os pólos dos sistemas a malha fechada partindo dos pólos e zeros do sistema a malha aberta. Constitui basicamente uma técnica gráfica de determinação de raízes.

Vimos maneiras de esboçar o lugar das raízes rapidamente, mesmo para sistemas de ordem superior. O esboço nos fornece informação qualitativa sobre mudanças na resposta transitória à medida que há variações nos parâmetros. Com base no lugar das raízes, fomos capazes de determinar se um sistema era instável para uma faixa de ganho.

Em seguida, desenvolvemos o critério para determinar se um ponto no plano s estava no lugar das raízes: os ângulos dos vetores dos zeros a malha aberta menos os ângulos dos vetores dos pólos a malha aberta no ponto do plano s totalizam um múltiplo ímpar de 180°.

O programa de computador discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha este livro nos ajuda a procurar rapidamente os pontos sobre o lugar das raízes. Este programa nos permite encontrar pontos e ganhos para atender determinadas especificações de resposta transitória quando é possível justificar uma aproximação de segunda ordem para sistemas de ordem superior. Outros programas de computador, como o MATLAB, traçam o lugar das raízes e permitem ao usuário interagir com o gráfico para determinar especificações de resposta transitória e parâmetros do sistema.

Nosso método de projeto neste capítulo é o ajuste de ganho. Estamos limitados ao domínio de resposta transitória definido pelos pólos sobre o lugar das raízes. As respostas transitórias representadas pela localização de pólos fora do lugar das raízes não podem ser obtidas

por meio de um simples ajuste de ganho. Além disso, uma vez que a resposta transitória tenha sido estabelecida, o ganho é ajustado e também o desempenho do erro de estado estacionário. Em outras palavras, por intermédio de um simples ajuste de ganho, temos que estabelecer uma solução de compromisso entre uma resposta transitória específica e um erro de estado estacionário específico. A resposta transitória e o erro de estado estacionário não podem ser projetados independentemente com um simples ajuste de ganho.

Aprendemos também como construir o lugar das raízes em função de outros parâmetros de sistema além do ganho. Para fazer este gráfico do lugar das raízes, primeiro devemos converter a função de transferência a malha fechada em uma função de transferência equivalente que tenha parâmetro de sistema desejado na mesma posição do ganho. O capítulo foi concluído com uma discussão sobre sistemas com retroação positiva e como traçar o lugar das raízes para estes sistemas.

O próximo capítulo estende o conceito de lugar das raízes ao projeto de estruturas de compensação. Estas estruturas apresentam como vantagem poder separar o projeto de desempenho transitório e de desempenho de erro de estado estacionário.

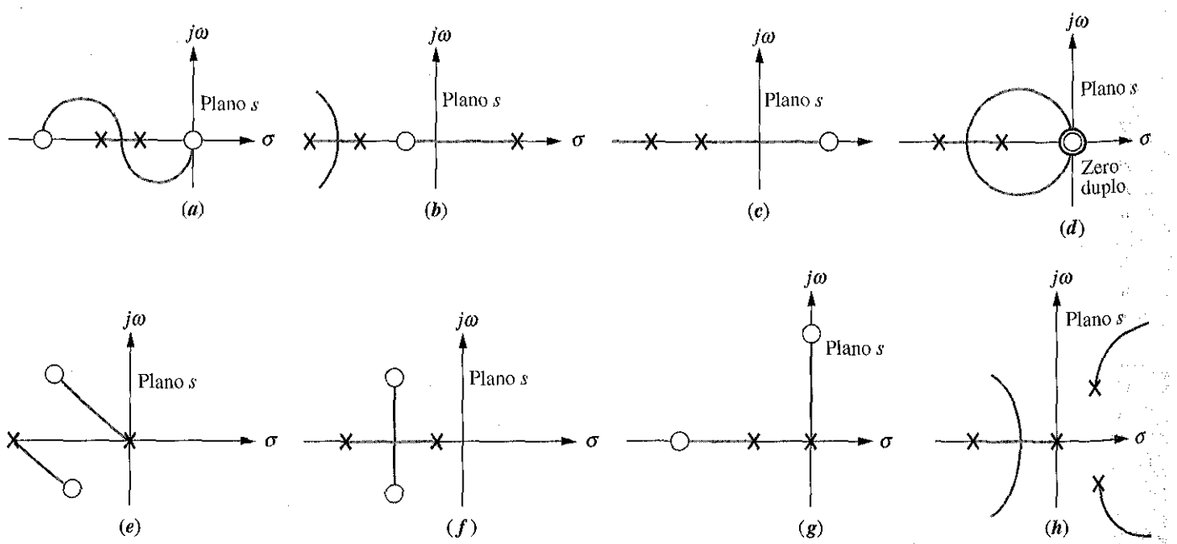
Perguntas de Revisão

1. O que é um lugar das raízes?
2. Descreva duas formas de se obter o lugar das raízes.
3. Se $KG(s)H(s) = 5\angle 180°$, para que valor de ganho s é um ponto no lugar das raízes?
4. Os zeros de um sistema mudam com uma mudança no ganho?
5. Onde estão os zeros da função de transferência a malha fechada?
6. Quais são as duas formas para encontrar onde o lugar das raízes cruza o eixo imaginário?
7. Como você pode dizer, a partir do lugar das raízes, se um sistema é instável?
8. Como você pode dizer, a partir do lugar das raízes, se o tempo de assentamento não se altera para uma faixa de valores de ganho?
9. Como você pode dizer, a partir do lugar das raízes, que a freqüência natural não muda sobre uma faixa de valores de ganho?
10. Como você pode determinar se o gráfico do lugar das raízes cruza ou não o eixo real?
11. Descreva as condições que devem existir para todos os pólos e zeros a malha fechada para se fazer uma aproximação de segunda ordem.
12. Quais as regras para traçar o lugar das raízes que são as mesmas nos sistemas com retroação positiva e com retroação negativa?
13. Descreva resumidamente como os zeros do sistema a malha aberta afetam o lugar das raízes e a resposta transitória.

Problemas

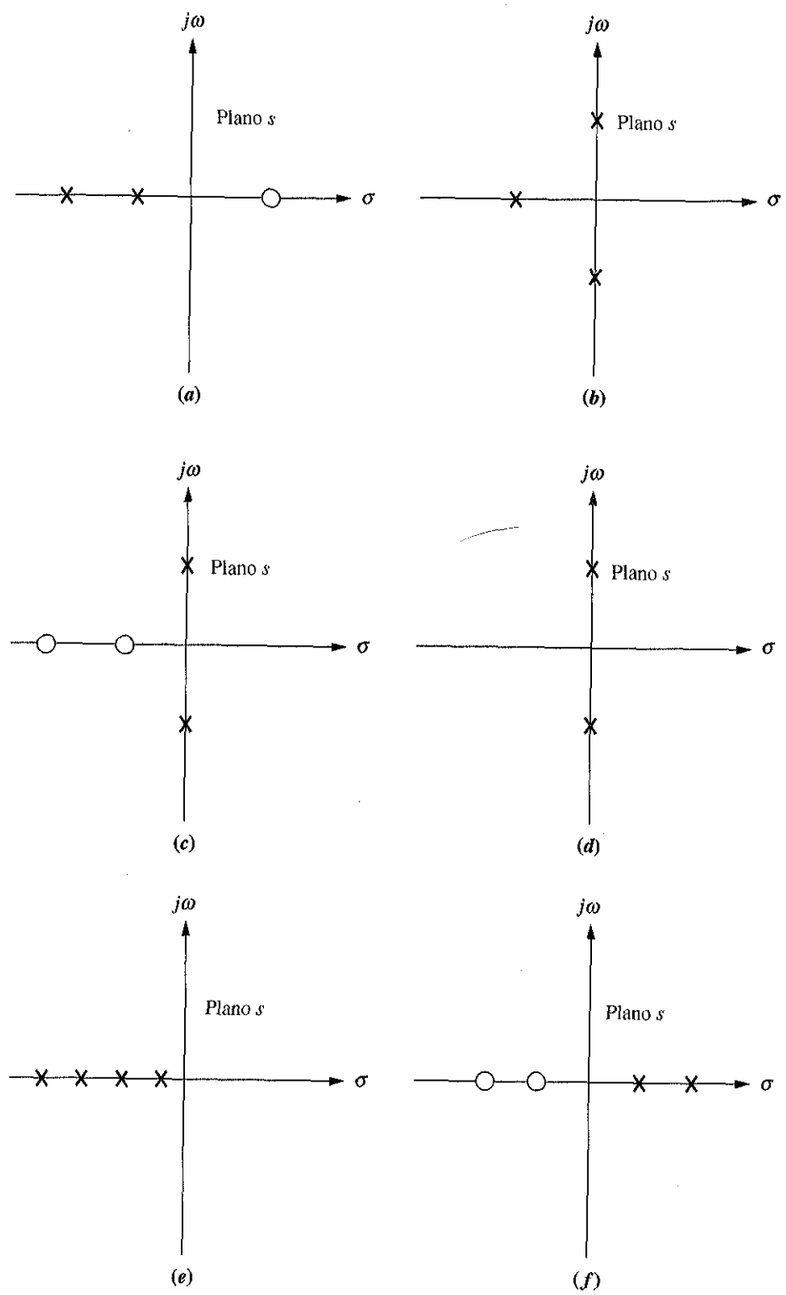
1. Para cada lugar das raízes mostrado na Fig. P8.1, diga se o esboço pode ser ou não de um lugar das raízes. Se o esboço não pode ser um lugar das raízes, explique o porquê. Forneça *todos* os motivos.

Fig. P8.1



2. Esboce a forma geral do lugar das raízes para cada diagrama de pólos e zeros a malha aberta mostrados na Fig. P8.2.

Fig. P8.2



3. Esboce o lugar das raízes para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3 para as seguintes funções de transferência:

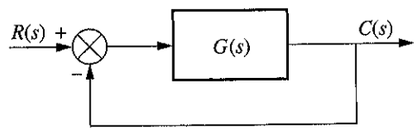
a. $G(s) = \dfrac{K(s+2)(s+6)}{s^2+8s+25}$

b. $G(s) = \dfrac{K(s^2+4)}{(s^2+1)}$

c. $G(s) = \dfrac{K(s^2+1)}{s^2}$

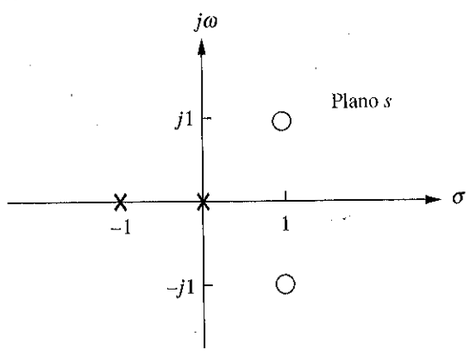
d. $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)^3(s+4)}$

Fig. P8.3



4. Para o diagrama de pólos e zeros a malha aberta mostrado na Fig. P8.4, esboce o lugar das raízes e encontre o ponto de saída.

Fig. P8.4



5. Esboce o lugar das raízes do sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

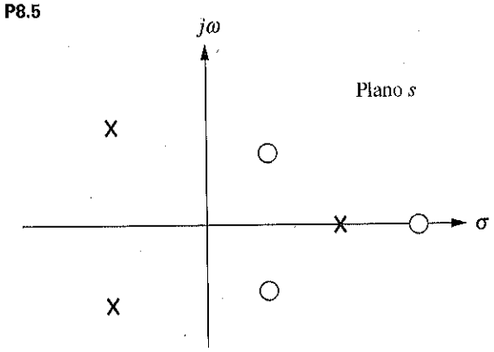
$$G(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{(s+5)(s+6)}$$

e encontre os pontos de entrada e de saída.

6. O polinômio característico de um sistema de controle com retroação, que é o denominador da função de transferência a malha fechada, é dado por $s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K$. Esboce o lugar das raízes para este sistema.

7. A Fig. P8.5 mostra os pólos e zeros a malha aberta. Há duas possibilidades para esboçar o lugar das raízes. Esboce cada uma das duas possibilidades. Esteja ciente de que pode existir apenas um único *lugar verdadeiro* para pólos e zeros a malha aberta específicos.

Fig. P8.5



8. Construa o lugar das raízes para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3 onde

$$G(s) = \frac{K(s+1)(s^2+2)}{(s+3)(s-3)}$$

Para que faixa de K os pólos estarão no semiplano s da direita?

9. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s^2-1)}$$

esboce o lugar das raízes e diga para que valores de K o sistema é estável e instável.

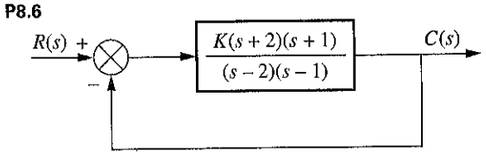
10. Esboce o lugar das raízes para o sistema com retroação unitária do sistema mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s^2+2)}{(s+3)(s+4)}$$

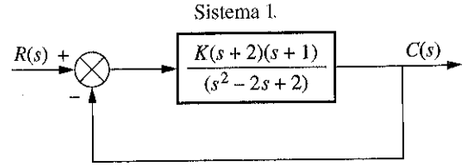
Dê os valores para todos os pontos críticos de interesse. O sistema é sempre instável? Se sim, para que faixa de valores de K?

11. Para cada sistema mostrado na Fig. P8.6, construa um gráfico exato do lugar das raízes e determine o seguinte:
a. Os pontos de saída e de entrada
b. A faixa de valores de K para manter o sistema estável
c. O valor de K que produz um sistema estável com pólos de segunda ordem criticamente amortecidos
d. O valor de K que conduz a um sistema estável com um par de pólos de segunda ordem que tenha uma relação de amortecimento de 0,707

Fig. P8.6



Sistema 1.



Sistema 2

12. Esboce o lugar das raízes e determine a faixa de K para estabilidade do sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3 para as seguintes condições:

a. $G(s) = \dfrac{K(s^2+1)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$

b. $G(s) = \dfrac{K(s^2-2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$

13. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{(s^2+2)(s-2)(s+5)}$$

esboce o lugar das raízes e determine a faixa de K tal que existirão somente dois pólos no semiplano s da direita para o sistema a malha fechada.

14. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+6)(s+9)}$$

construa o lugar das raízes e calibre seu gráfico em função do ganho. Determine todos os elementos críticos como pontos de saída, assíntotas, ponto de interseção do eixo $j\omega$, e assim por diante.

15. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P8.3, construa um gráfico preciso do lugar das raízes para o seguinte:

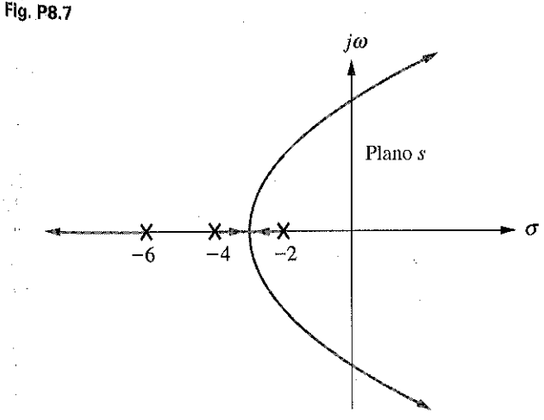
a. $G(s) = \dfrac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+2)}$

b. $G(s) = \dfrac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$

Calibre o ganho para pelo menos quatro pontos em cada caso. Determine também os pontos de saída, o ponto de interseção do eixo $j\omega$, e a faixa de ganho para estabilidade em cada caso. Determine os ângulos de chegada para (a).

16. Dado o lugar das raízes mostrado na Fig. P8.7,
a. Determine o valor de ganho que fará o sistema marginalmente estável.
b. Determine o valor de ganho para o qual a função de transferência a malha fechada terá um pólo sobre o eixo real em -10.

Fig. P8.7



17. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)(s+4)}$$

faça o seguinte:
a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine as assíntotas.
c. Determine o valor de ganho que fará o sistema marginalmente estável.
d. Determine o valor de ganho para o qual a função de transferência a malha fechada terá um pólo sobre o eixo real em $-0{,}5$.

18. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+\alpha)}{s(s+3)(s+6)}$$

determine os valores de α e K que produzirão um par de pólos a malha fechada de segunda ordem em $-1 \pm j100$.

19. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s-1)(s-2)}{s(s+1)}$$

esboce o lugar das raízes e determine o seguinte:
a. Os pontos de saída e de entrada
b. O ponto de interseção do eixo $j\omega$
c. A faixa de ganho para manter o sistema estável
d. O valor de K para produzir um sistema estável com pólos complexos de segunda ordem, com uma relação de amortecimento de 0,5.

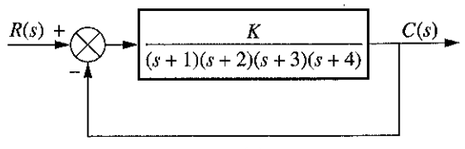
20. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+10)(s+20)}{(s+30)(s^2-20s+200)}$$

faça o seguinte:
a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine a faixa de ganho, K, que torna o sistema estável.
c. Determine o valor de K que resulta numa relação de amortecimento de 0,707 para os pólos dominantes a malha fechada do sistema.
d. Determine o valor de K que resulte em pólos dominantes a malha fechada criticamente amortecidos.

21. Para o sistema da Fig. P8.8(a), esboce o lugar das raízes e encontre o seguinte:
a. Assíntotas
b. Pontos de saída
c. A faixa de K para estabilidade
d. O valor de K que produza uma relação de amortecimento de 0,7 para o par de segunda ordem dominante

Fig. P8.8 (*continua*)



(a)

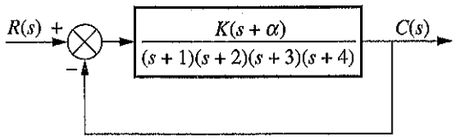


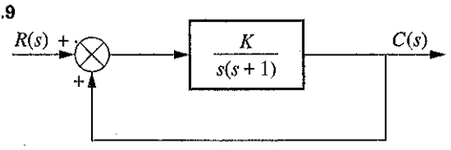
Fig. P8.8 (*continuação*) (*b*)

Para melhorar a estabilidade, desejamos que o lugar das raízes cruze o eixo $j\omega$ em $j5{,}5$. Para conseguir isto, a função a malha aberta é colocada em cascata com um zero, como mostrado na Fig. P8.8(*b*).

e. Determine o valor de α e esboce o novo lugar das raízes.
f. Repita (c) para o novo lugar.
g. Compare os resultados de (c) e (f). Que melhora na resposta transitória você observa?

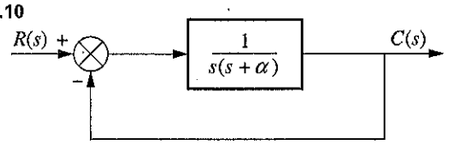
22. Esboce o lugar das raízes para o sistema com retroação positiva mostrado na Fig. P8.9.

Fig. P8.9



23. Os lugares das raízes são normalmente traçados em função de variações no ganho. Algumas vezes estamos interessados na variação dos pólos a malha fechada à medida que outros parâmetros são modificados. Para o sistema mostrado na Fig. P8.10, esboce o lugar das raízes à medida que α é variado.

Fig. P8.10



24. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

faça as seguintes partes do problema, fazendo primeiro uma aproximação de segunda ordem. Depois de ter terminado com todas as partes, justifique sua aproximação de segunda ordem.

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine K para 20% de ultrapassagem.
c. Para K encontrado em (b), qual é o tempo de assentamento, e qual é o instante de pico?
d. Determine a localização dos pólos de ordem superior para K encontrado em (b).
e. Determine a faixa de K para estabilidade.

25. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{(s+2)(s+4)(s+5)(s+6)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine as assíntotas.
c. Determine a faixa de ganho, K, que torna o sistema estável.
d. Determine os pontos de saída.
e. Determine o valor de K que resulta em uma resposta ao degrau a malha fechada com 25% de ultrapassagem.
f. Determine a localização dos pólos a malha fechada de segunda ordem quando o sistema está operando com 25% de ultrapassagem.
g. Discuta a validade da sua aproximação de segunda ordem.

MATLAB

h. Use o MATLAB para obter a resposta ao degrau a malha fechada para validar ou refutar sua aproximação de segunda ordem.

26. O sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$$

deve ser projetado para o mínimo de relação de amortecimento. Determine o seguinte:

a. O valor de K que resultará na menor relação de amortecimento
b. O percentual de ultrapassagem estimado nesse caso
c. O tempo de assentamento e instante de pico estimados nesse caso
d. A justificativa de uma aproximação de segunda ordem (discuta)
e. O erro de estado estacionário esperado para uma entrada em rampa unitária para o caso da relação de amortecimento mínima

27. Para o sistema com retroação unitário mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+6)(s+10)}$$

determine K para gerar pólos complexos a malha fechada com uma relação de amortecimento de 0,55. Sua solução exige uma justificativa de uma aproximação de segunda ordem? Explique.

28. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+\alpha)}{s(s+1)(s+10)}$$

determine o valor de α para que o sistema tenha um tempo de assentamento de 4 s para grandes valores de K. Esboce o lugar das raízes resultante.

29. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+6)}{(s^2+10s+26)(s+1)^2(s+\alpha)}$$

projete K e α para que os pólos complexos dominantes da função a malha fechada tenham uma relação de amortecimento de 0,45 e uma freqüência natural de 9/8 rad/s.

30. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+4)(s+8)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine o valor de K que resultará em 10% de ultrapassagem.
c. Localize todos os pólos não-dominantes. O que você pode dizer sobre a aproximação de segunda ordem que conduz à sua resposta em (b)?
d. Determine a faixa de K que resulta em um sistema estável.

MATLAB

31. Repita o Problema 30 usando o MATLAB. Use um programa para fazer o seguinte:

a. Exibir um lugar das raízes e fazer um intervalo
b. Traçar uma vista ampliada do lugar das raízes onde os eixos vão de −2 a 0 sobre o eixo real e de −2 a 2 sobre o eixo imaginário.
c. Superpor a reta de 10% de ultrapassagem sobre o lugar das raízes ampliado
d. Permitir selecionar interativamente o ponto onde o lugar das raízes cruza a linha de 10% de ultrapassagem, e responder com o ganho desse ponto e bem como com todos os pólos a malha fechada com esse ganho
e. Gerar a resposta ao degrau com o ganho referente a 10% de ultrapassagem

32. Para o sistema com retroação unitário mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s^2+4s+5)}{(s^2+2s+5)(s+3)(s+4)}$$

faça o seguinte:

a. Determine o ganho, K, para resultar num instante de pico de 1 s supondo uma aproximação de segunda ordem.

MATLAB

b. Verifique a exatidão da aproximação de segunda ordem usando o MATLAB para simular o sistema.

33. Para o sistema com retroação unitário mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{(s^2+2s+2)(s+4)(s+5)(s+6)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine o ponto de interseção do eixo $j\omega$ e o ganho, K, no cruzamento.
c. Determine todos os pontos de saída e de entrada.
d. Determine os ângulos de partida dos pólos complexos.
e. Determine o ganho, K, para resultar numa relação de amortecimento de 0,3 para os pólos dominantes a malha fechada.

34. Repita as partes (a) até (c), e (e) do Problema 33 para

$$G(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

35. Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)(s^2+4s+5)}$$

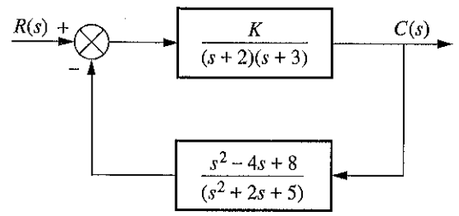
faça o seguinte:

a. Determine a localização dos pólos dominantes a malha fechada se o sistema estiver operando com 15% de ultrapassagem.
b. Determine o ganho para (a).
c. Determine todos os outros pólos a malha fechada.
d. Calcule a exatidão da aproximação de segunda ordem.

36. Para o sistema mostrado na Fig. P8.11, faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine o ponto de interseção do eixo $j\omega$ e o ganho, K, no cruzamento.
c. Determine a saída do eixo real com exatidão de duas casas decimais.
d. Determine os ângulos de chegada aos zeros complexos.
e. Determine os zeros a malha fechada.
f. Determine o ganho, K, para a resposta ao degrau a malha fechada com 30% de ultrapassagem.
g. Discuta a validade da aproximação de segunda ordem.

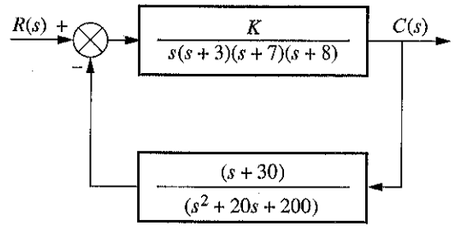
Fig. P8.11



37. Esboce o lugar das raízes para o sistema da Fig. P8.12 e determine o seguinte:

a. A faixa de ganho para que resulte em estabilidade
b. O valor de ganho que resultará numa relação de amortecimento de 0,707 para os pólos dominantes do sistema
c. O valor de ganho que resultará em pólos a malha fechada criticamente amortecidos

Fig. P8.12



MATLAB

38. Repita o Problema 37 usando o MATLAB. O programa deverá fazer o seguinte:

a. Exibir um lugar das raízes e efetuar uma pausa
b. Exibir um detalhe do lugar das raízes onde os eixos vão de −2 a 2 sobre o eixo real e −2 a 2 sobre o eixo imaginário
c. Superpor a reta de relação de amortecimento de 0,707 sobre o lugar das raízes em detalhe
d. Permitir você selecionar interativamente o ponto onde o lugar das raízes cruza a reta de relação de amortecimento de 0,707 e responder exibindo o ganho naquele ponto assim como os pólos a malha fechada nestes pontos. O programa permitirá então você selecionar interativamente o ponto de interseção do eixo imaginário e responder com uma exibição do ganho naqueles pontos assim como dos pólos a malha

fechada naquele ponto. Finalmente, o programa repetirá o cálculo para pólos dominantes a malha fechada criticamente amortecidos.

e. Gerar a resposta ao degrau para o ganho correspondente à relação de amortecimento de 0,707.

39. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{s^2(s+20)}$$

faça o seguinte:

a. Se $z = 6$, determine K para que a freqüência amortecida de oscilação da resposta transitória seja 10 rad/s.

b. Para o sistema de (a), que constante erro estático (limitado) pode ser especificado? Qual o seu valor?

c. O sistema deve ser reprojetado mudando os valores de z e de K. Se as novas especificações são $\%UP = 4{,}32\%$ e $T_s = 0{,}4$ s, determine os novos valores de z e de K.

40. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+6)^2}$$

determine o seguinte:

a. O valor de ganho, K, que resultará em um tempo de assentamento de 4 s

b. O valor de ganho, K, que resultará em um sistema criticamente amortecido

41. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P8.3, onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

calcule a sensibilidade do pólo do sistema a malha fechada se os pólos a malha fechada de segunda ordem, subamortecidos são ajustados para

a. $\zeta = 0{,}591$

b. $\zeta = 0{,}456$

c. Qual dos dois casos anteriores tem a sensibilidade mais desejável?

42. A Fig. P8.13(*a*) mostra um robô equipado para executar soldagem a arco. Um aparelho semelhante pode ser configurado como um robô industrial com seis graus de liberdade que pode transferir objetos de acordo com um programa desejado. Suponha o diagrama de blocos do sistema de movimento de balanço mostrado na Fig. P8.13(*b*). Se $K = 64{,}510$, faça uma aproximação de segunda ordem e estime o seguinte (Hardy, 1967):

a. Relação de amortecimento

b. Ultrapassagem percentual

c. Freqüência natural

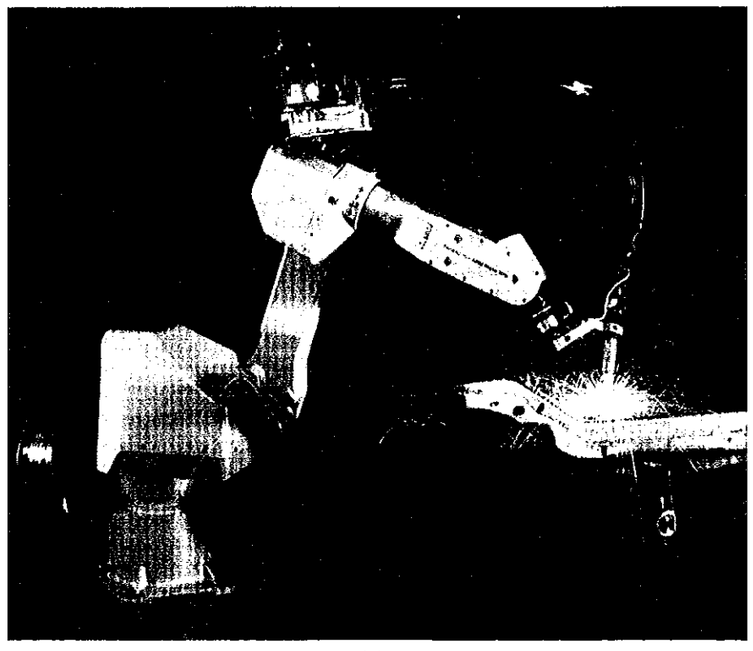
d. Tempo de assentamento

e. Instante de pico

O que você pode dizer sobre a aproximação original de segunda ordem?

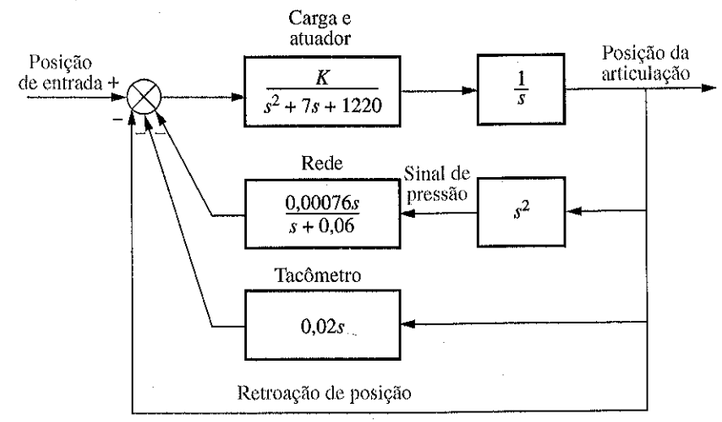
43. Durante a subida, o programa de manobra automática a bordo do ônibus espacial fornece a interface entre o processamento de baixa velocidade de guiamento (comandos) e o processamento de alta velocidade de controle de vôo (manobras em resposta aos comandos). A função desempenhada é basicamente a de suavização. Uma representação simplificada de um suavizador de manobra linearizado para manobras coplanares é mostrada na Fig. P8.14. Aqui, $\theta_{CB}(s)$ é a orientação angular do corpo comandada fornecida pelo sistema de guiamento, e $\theta_{DB}(s)$ é a orientação angular desejada enviada ao controle de vôo

Fig. P8.13
a. Robô equipado para executar soldagem a arco; (*continua*)



(*a*)

Fig. P8.13 (*continuação*)
b. diagrama de blocos para o sistema de movimento em balanço

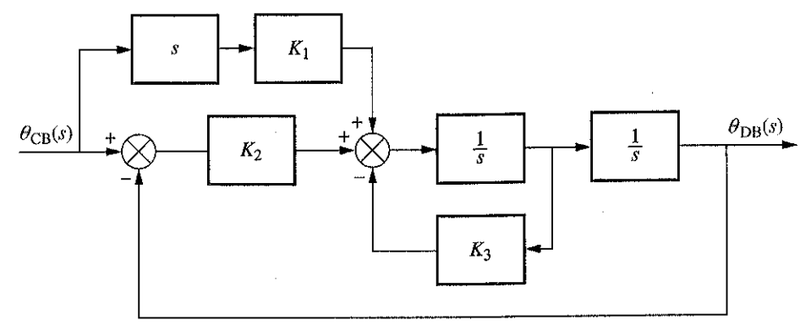


(*b*)

depois da suavização.[4] Usando os métodos da Seção 8.8, faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes onde estas variam como uma função de K_3.

Fig. P8.14 Diagrama de blocos do suavizador



b. Localize os zeros a malha fechada.

c. Repita (a) e (b) para o lugar das raízes esboçado como uma função de K_2.

44. Repita o Problema 3, mas esboce os lugares das raízes para valores negativos de K.

45. Grandes estruturas no espaço, como a estação espacial, devem ser estabilizadas contra vibrações não desejadas. Um método consiste em usar um amortecedor de vibração ativo para controlar a estrutura, como mostrado na Fig. P8.15(*a*) (Bruner, 1992). Supondo conhecidos e iguais a um todos os valores exceto a massa do amortecedor de vibração ativo, faça o seguinte:

a. Obtenha $G(s)$ e $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ em representação de diagrama de blocos do sistema da Fig. 8.15(*b*), o qual mostra que o amortecedor de vibração ativo atua como um elemento de retroação para controlar a estrutura. (*Sugestão*: Pense em K_c e D_c como produzindo entradas para a estrutura.)

b. Encontre a posição de estado estacionário da estrutura para uma entrada de força perturbadora.

c. Esboce o lugar das raízes para o sistema como uma função da massa do amortecedor de vibração ativo, M_c.

[4]Fonte: Rockwell International.

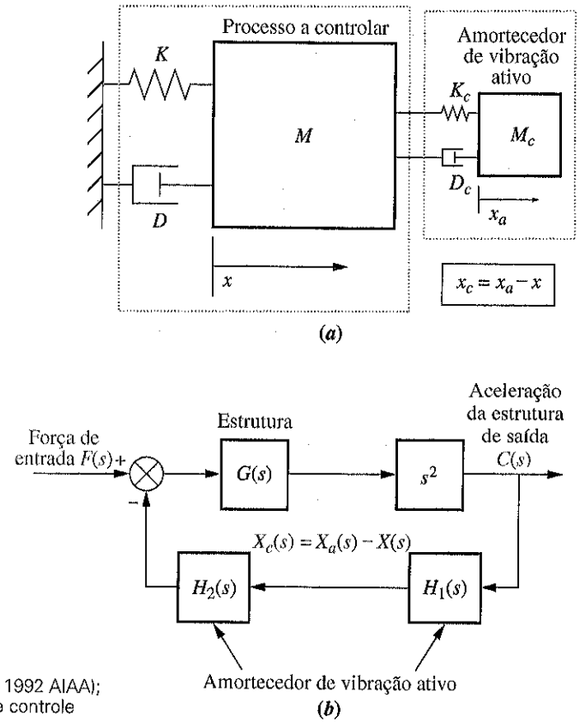
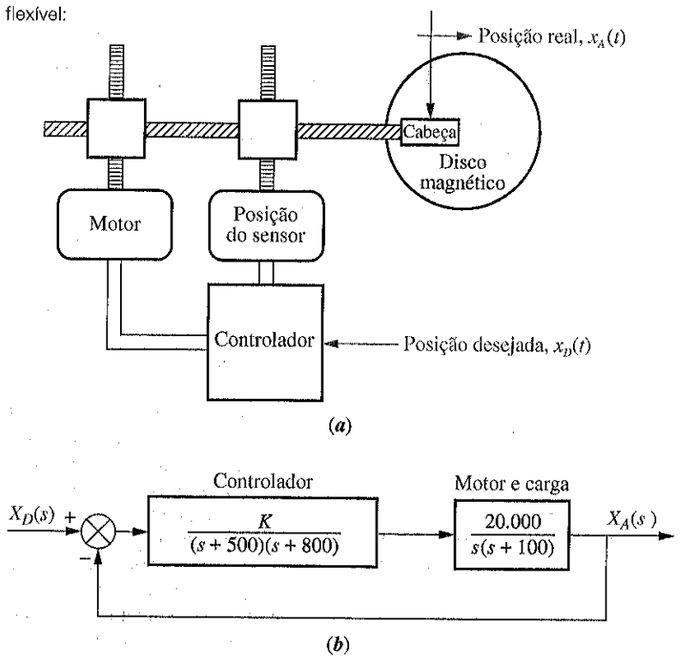


Fig. P8.15
a. Amortecedor de vibração ativo (© 1992 AIAA);
b. diagrama de blocos do sistema de controle

Problemas de Projeto

46. Um acionador de disco flexível é um sistema de controle de posição cuja cabeça leitora/gravadora é posicionada sobre um disco magnético. O sistema responde a um comando a partir de computador para posicionar a cabeça em uma trilha particular sobre o disco. Uma representação física do sistema e um diagrama de blocos são mostrados na Fig. P8.16.

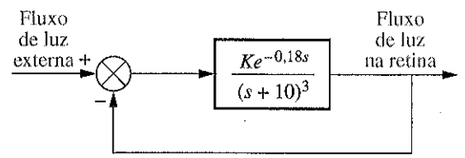
Fig. P8.16 Acionador de disco flexível:
a. representação física;
b. diagrama de blocos



a. Determine K para produzir um tempo de assentamento de 0,1 s.
b. Qual é a ultrapassagem percentual resultante?
c. Qual é a faixa de K que mantém o sistema estável?

47. Um diagrama de blocos simplificado do servomecanismo da pupila do olho humano está mostrado na Fig. P8.17. O termo $e^{-0,18s}$ representa um retardo de tempo. Esta função pode ser aproximada pelo que é conhecido como uma aproximação de *Padé*. Esta aproximação pode assumir muitas formas de complexidade crescente, dependendo do grau de exatidão exigido. Se usarmos a *aproximação de Padé*

Fig. P8.17 Diagrama de blocos simplificado do servomecanismo da pupila do olho humano



$$e^{-x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!}}$$

então

$$e^{-0,18s} = \frac{61,73}{s^2 + 11,11s + 61,73}$$

Uma vez que o fluxo de luz na retina é uma função da abertura da íris, oscilações na quantidade do fluxo luminoso na retina acarretam oscilações da íris (Guy, 1976). Determine o seguinte:
a. O valor de K que produzirá oscilações
b. A freqüência destas oscilações
c. O tempo de assentamento para a íris se K é tal que o olho opera com uma ultrapassagem de 20%

48. Foi proposto um possível sistema de suspensão ativa para trens. O sistema usa um atuador pneumático em paralelo com o sistema de suspensão passiva, como mostrado na Fig. P8.18. A força do atuador é subtraída da força aplicada pelo solo, como representado pelo deslocamento, $y_g(t)$. A aceleração é sentida por um acelerômetro, e sinais proporcionais à aceleração e à velocidade são enviados como retroação ao atuador de força. A função de transferência relacionando a aceleração ao deslocamento do solo é

$$\frac{\ddot{Y}_m(s)}{Y_g(s)} = \frac{s^2\,(Ds + K)}{(C_a + M)s^2 + (C_v + D)s + K}$$

Supondo $M = 1$ e $D = K = C_v = 2$, faça o seguinte (Cho, 1985):
a. Esboce o lugar das raízes para este sistema à medida que C_a varia de zero a infinito.
b. Determine o valor de C_a que produziria uma relação de amortecimento de 0,69 para os pólos a malha fechada.

49. A malha de estabilização de arfagem de um avião militar F4-E é mostrada na Fig. P8.19. δ_{com} é o comando de deflexão de entrada do elevador e do canard para criar uma velocidade de arfagem (veja o Problema 22, Cap. 3). Se

$$G_2(s) = \frac{-508(s + 1,6)}{(s + 14)(s - 1,8)(s + 4,9)}$$

faça o seguinte (Cavallo, 1992);
a. Esboce o lugar das raízes da malha interna.
b. Determine a faixa de K_2 para manter a malha interna estável somente com retroação de velocidade de arfagem.
c. Determine o valor de K_2 que posiciona os pólos da malha interna com uma relação de amortecimento de 0,5.
d. Para sua resposta a (c), encontre a faixa de K_1 que mantém o sistema estável.
e. Determine o valor de K_1 que resulta em pólos a malha fechada com uma relação de amortecimento de 0,45.

50. A orientação angular exata dos eixos de uma nave espacial é necessária para comunicação e mapeamento. O controle de atitude pode ser implementado por meio de uma troca de

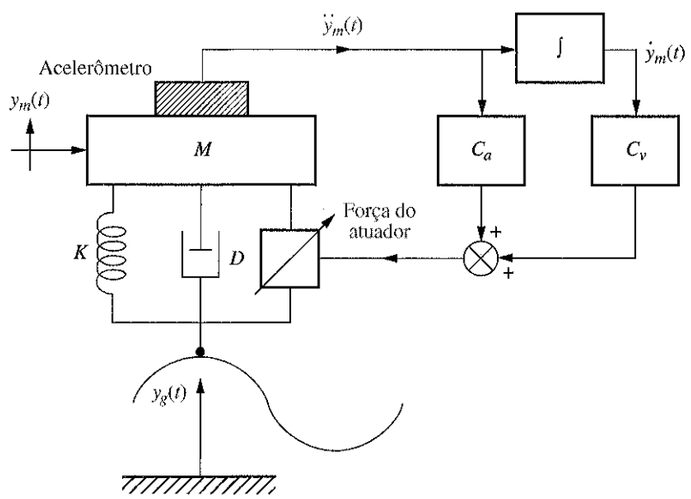


Fig. P8.18 Sistema de suspensão ativa

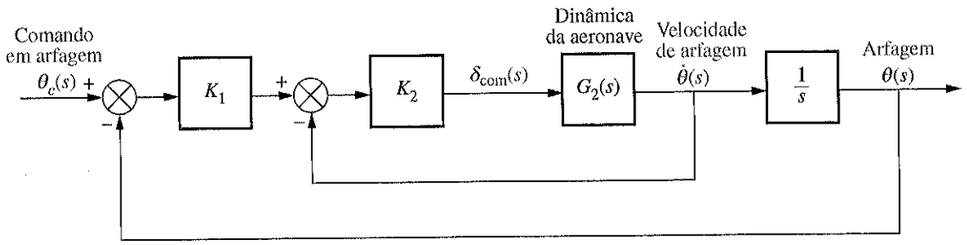


Fig. P8.19 Malha de estabilização em arfagem do avião F4-E

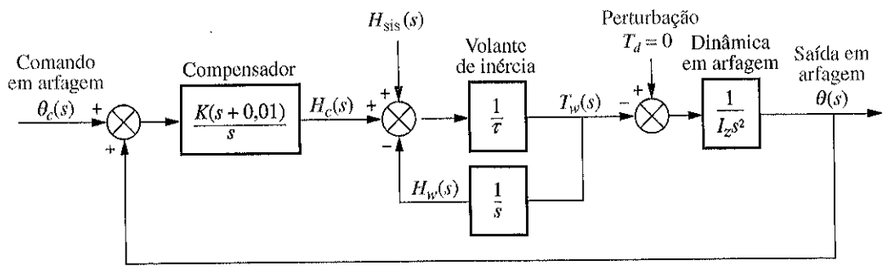


Fig. P8.20 Sistema de controle de atitude segundo o eixo de arfagem utilizando volante de inércia

momento angular entre o corpo da nave espacial e um volante de inércia embarcado. O diagrama de blocos para o controle de atitude segundo o eixo de arfagem é mostrado na Fig. P8.20 onde $\theta_c(s)$ é o ângulo de arfagem comandado e $\theta(s)$ é o ângulo de arfagem real da espaçonave. O compensador, que melhora a exatidão da orientação angular, fornece um momento angular comandado, $H_c(s)$, ao volante de inércia. O momento angular da espaçonave, $H_{sis}(s)$ é uma entrada adicional do volante de inércia. Este momento angular é dado por

$$h_{sis}(t) = I_z\dot{\theta}(t) + h_w(t)$$

onde I_z é o momento de inércia da espaçonave segundo o eixo de arfagem e $h_w(t)$ é o momento angular do volante de inércia. O torque total de saída do volante de inércia, T_w, como mostrado na Fig. P8.20, é

$$T_w(t) = \frac{h_{sis}(t) - h_w(t) + h_c(t)}{\tau}$$

Se $\tau = 23$ s e $I_z = 9631$ em·in·lb·s², faça o seguinte (Piper, 1992):

a. Esboce o lugar das raízes para o sistema de controle do eixo de arfagem.

b. Determine o valor de K para obter uma resposta ao degrau a malha fechada com 25% de ultrapassagem.

c. Calcule a exatidão de aproximações de segunda ordem que tenham sido feitas.

51. Durante combustão em dispositivos como turbinas a gás e motores a jato, são geradas ondas acústicas. Estas ondas de pressão podem produzir ruído demasiado, bem como falhas mecânicas. É proposto um controle ativo para reduzir este efeito termoacústico. Especificamente, um microfone é usado como sensor para captar as ondas sonoras, enquanto um alto-falante é usado como atuador para ativar ondas de pressão em oposição de fase para reduzir o efeito. Um diagrama sugerido mostrando o microfone e alto-falante posicionado na câmara de combustão é mostrado na Fig. P8.21(*a*). Um diagrama de blocos simplificado do sistema de controle ativo é mostrado na Fig. P8.21(*b*). As funções de transferência são dependentes da localização do microfone e do alto-falante e de parâmetros como a localização da chama. A função de transferência do percurso direto é da forma

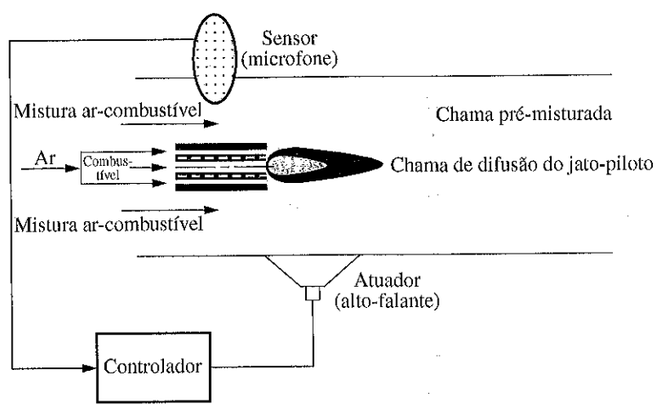


Fig. P8.21 (*continua*) (*a*)

a. Dispositivo de combustão com microfone e alto-falante (© 1995 IEEE);

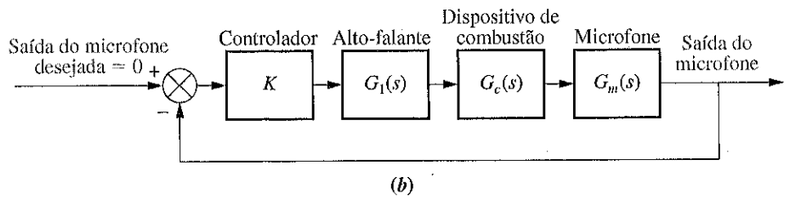


Fig. P8.21
b. diagrama de blocos (© 1995 IEEE); (*continuação*)

$$G(s) = KG_1(s)G_c(s)G_m(s)$$
$$= \frac{K(s+z_f)(s^2+2\zeta_z\omega_{zs}+\omega_z^2)}{(s+p_f)(s^2-2\zeta_1\omega_1 s+\omega_1^2)(s^2+2\zeta_2\omega_2 s+\omega_2^2)}$$

onde os valores para as três configurações (A, B e C) são dados na tabela abaixo em (**b**) (Annaswamy, 1995).

a. Desenhe o lugar das raízes para cada configuração.

b. Para essas configurações onde são possíveis regiões estáveis de operação, calcule a faixa de ganho, K, para estabilidade.

	A	B	C
z_f	1500	1500	1500
p_f	1000	1000	1000
ζ_z	0,45	0,45	−0,45
ω_z	4500	4500	4500
ζ_1	0,5	−0,5	−0,5
ω_1	995	995	995
ζ_2	0,3	0,3	0,3
ω_2	3500	3500	3500

52. Aerogeradores, como os mostrados na Fig. P8.22(*a*), estão se tornando populares como uma maneira de gerar eletricidade. Malhas de controle com retroação são projetadas para controlar a potência de saída da turbina dada uma demanda de potência de entrada. O controle em arfagem das pás da turbina pode ser usado como parte da malha de controle do aerogerador controlado através de velocidade de arfagem constante, como mostrado na Fig. P8.22(*b*). O trem de acionamento, consistindo no rotor com as lâminas das pás, do sistema de transmissão e do gerador elétrico (veja Fig. P8.22(*c*)), é parte da malha de controle. O torque produzido pelo vento aciona o rotor. O rotor é conectado ao gerador através de um sistema de transmissão.

A função de transferência do trem de acionamento é

$$\frac{P_o(s)}{T_R(s)} = G_{dt}(s) = \frac{3{,}92K_{LSS}K_{HSS}K_G N^2 s}{\{N^2K_{HSS}(J_R s^2 + K_{LSS})(J_G s\,[\tau_{el}s+1] + K_G s) + J_R s^2 K_{LSS}[(J_G s^2 + K_{HSS})(\tau_{el}s+1) + K_G s]\}}$$

onde $P_0(s)$ é a transformada de Laplace da potência de saída do gerador e $T_R(s)$ é a transformada de Laplace do torque de entrada aplicado ao rotor. Substituindo valores numéricos típicos na função de transferência, resulta

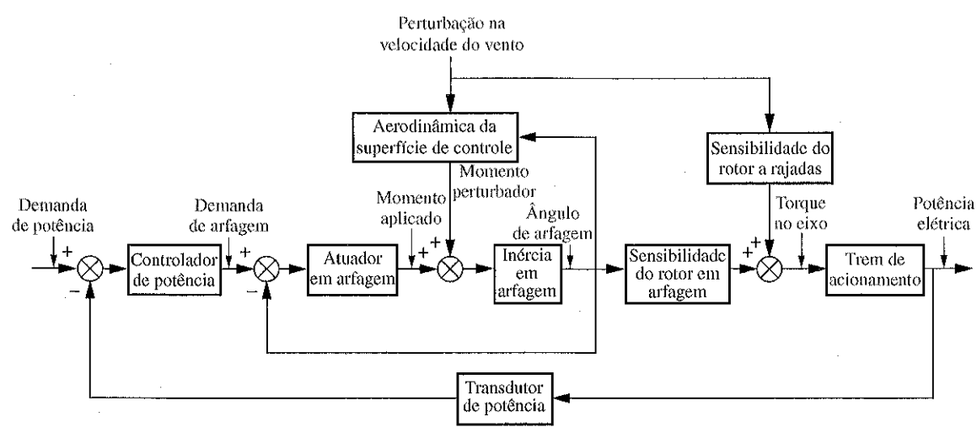
$$\frac{P_o(s)}{T_R(s)} = G_{dt}(s) = \frac{(3{,}92)(12{,}6\times10^6)(301\times10^3)(688)N^2 s}{\{N^2(301\times10^3)(190120s^2+12{,}6\times10^6)(3{,}8s^2[20\times10^{-3}s+1]+668s) + 190120s^2(12{,}6\times10^6)[(3{,}8s^2 + 301\times10^3)(20\times10^{-3}s+1)+668s]\}}$$

(Anderson, 1998). Faça o seguinte para a dinâmica do trem de acionamento, recorrendo a qualquer auxílio computacional de que disponha:

a. Esboce o lugar das raízes que mostra a localização dos pólos de $G_{dt}(s)$ para valores diferentes da relação de transmissão, N.

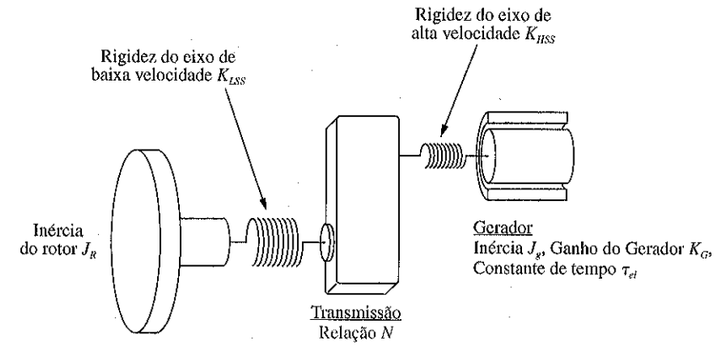
b. Determine o valor de N que produza um par de pólos complexos de $G_{dt}(s)$ com uma relação de amortecimento de 0,5.

(*a*)



(*b*)

Fig. P8.22
a. Aerogeradores produzindo eletricidade próximo a Palm Springs, Califórnia;
b. Malha de controle para uma turbina de aerogerador controlada com velocidade constante em arfagem (© 1998 IEEE); (*continua*)



(*c*)

Fig. P8.22 (*continuação*)
c. Trem de acionamento (© 1998 IEEE)

Problema Progressivo de Análise e Projeto

53. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 discute o controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas de trem de alta velocidade. No Problema 62(a), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada do sistema de controle ativo do pantógrafo. Use a solução do Problema 62(a) no Cap. 5 para fazer o seguinte (O'Connor, 1997):

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Admita uma aproximação de segunda ordem e determine o ganho, K, para obter uma resposta ao degrau a malha fechada com 38% de ultrapassagem.
c. Calcule o tempo de assentamento e o instante de pico para a resposta projetada em (b).
d. Discuta a validade da aproximação de segunda ordem.

MATLAB

e. Use o MATLAB para traçar a reposta ao degrau a malha fechada para o valor de K encontrado em (b). Compare o gráfico com os valores previstos em (b) e (c).

Bibliografia

Anderson, C. G.; Richon, J.-B.; and Campbell, T. J. An Aerodynamic Moment-Controlled Surface for Gust Load Alleviation on Wind Turbine Rotors. *IEEE Transactions on Control System Technology*, vol. 6, no. 5, September 1998, pp. 577–595.

Annaswamy, A. M., and Ghonien, A. F. Active Control in Combustion Systems. *IEEE Control Systems*, December 1995, pp. 49–63.

Bruner, A. M.; Belvin, W. K.; Horta, L. G.; and Juang, J. Active Vibration Absorber for the CSI Evolutionary Model: Design and Experimental Results. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 5, September–October 1992, pp. 1253–1257.

Cavallo, A.; De Maria, G.; and Verde, L. Robust Flight Control Systems: A Parameter Space Design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 5, September–October 1992, pp. 1207–1215.

Cho, D., and Hedrick, J. K. Pneumatic Actuators for Vehicle Active Suspension Applications. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, March 1985, pp. 67–72.

Dorf, R. C. *Modern Control Systems*. 5th ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

Evans, W. R. Control System Synthesis by Root Locus Method. *AIEE Transactions*, vol. 69, 1950, pp. 66–69.

Evans, W. R. Graphical Analysis of Control Systems. *AIEE Transactions*, vol. 67, 1948, pp. 547–551.

Franklin, G. F.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 2d ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1991.

Guy, W., *The Human Pupil Servomechanism*. Computers in Education Division of ASEE, Application Note No. 45, 1976.

Hardy, H. L. Multi-Loop Servo Controls Programmed Robot. *Instruments and Control Systems*, June 1967, pp. 105–111.

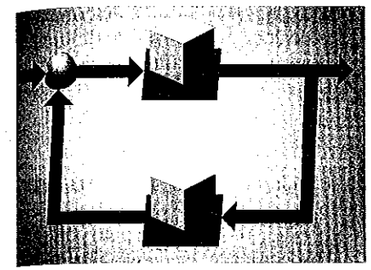
Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description*. NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, D.C., 1980.

Kuo, B. C. *Automatic Control Systems*. 6th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Piper, G. E., and Kwatny, H. G. Complicated Dynamics in Spacecraft Attitude Control Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 4, July–August 1992, pp. 825–831.

CAPÍTULO 9



Projeto por Intermédio do Lugar das Raízes

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como usar o lugar das raízes no projeto de compensadores em cascata para melhorar o erro de estado estacionário
- Como usar o lugar das raízes no projeto de compensadores em cascata para melhorar a resposta transitória
- Como usar o lugar das raízes no projeto de compensadores em cascata para melhorar o erro de estado estacionário e a resposta transitória
- Como usar o lugar das raízes no projeto de compensadores em retroação para melhorar a resposta transitória
- Como implementar fisicamente os compensadores projetados

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posição da antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de projetar um compensador em cascata de modo a atender as especificações de resposta transitória e de erro de estado estacionário.
- Dado o sistema de controle de rumo ou de guinada do veículo UFSS mostrado na contracapa traseira, você deverá ser capaz de projetar um compensador em cascata ou um compensador com retroação de modo a atender as especificações de resposta transitória.

9.1 Introdução

No Cap. 8, vimos que o lugar das raízes mostrava graficamente informações sobre a resposta transitória e sobre a estabilidade. O lugar das raízes pode ser esboçado rapidamente para se obter uma idéia geral das alterações da resposta transitória produzidas palas alterações no valor do ganho. Também é possível obter, com exatidão, pontos específicos que fornecem informação quantitativa de projeto.

O lugar das raízes comumente permite escolher o ganho de malha apropriado para atender uma determinada especificação de resposta transitória. À medida que o ganho é modificado, nos deslocamos através de diferentes regiões de resposta. O ajuste de ganho em um valor particular produz a resposta transitória determinada pelos pólos nesse ponto do lugar das raízes. Portanto, *estamos limitados às respostas que existem ao longo do lugar das raízes.*

Aperfeiçoando a Resposta Transitória

A flexibilidade no projeto de uma resposta transitória desejada é aumentada se pudermos projetar respostas transitórias que não estejam sobre o lugar das raízes. A Fig. 9.1(*a*) ilustra o conceito. Admita que a resposta transitória desejada, definida pela ultrapassagem percentual e pelo tempo de assentamento, esteja representada pelo ponto *B*. Infelizmente, sobre o lugar das raízes corrente para a ultrapassagem percentual especificada, mediante ajuste simples de ganho, podemos obter somente o tempo de assentamento representado pelo ponto *A*. Assim, nosso objetivo é aumentar a velocidade da resposta de *A* para a de *B*, sem afetar a ultrapassagem percentual. Este aumento de velocidade não pode ser realizado por um simples ajuste de ganho, uma vez que o ponto *B* não está situado sobre o lugar das raízes. A Fig. 9.1(*b*) ilustra a melhoria que se procura na resposta transitória: a resposta mais rápida possui a mesma ultrapassagem percentual da resposta mais lenta.

Uma maneira de resolver nosso problema é substituir o sistema existente por um outro cujo lugar das raízes intercepte o ponto de projeto desejado, *B*. Infelizmente, esta substituição é cara e contraproducente. A maioria dos sistemas é escolhida com base em outras características que não a resposta transitória. Por exemplo, a estrutura e o motor de um elevador são escolhidos com base na velocidade e na potência. Os componentes escolhidos para a resposta transitória podem não atender necessariamente, por exemplo, os requisitos de potência.

Em vez de mudar o sistema existente, aumentamos, ou *compensamos*, o sistema com pólos e zeros *adicionais*, de modo que o sistema compensado possua um lugar das raízes que passe pela localização desejada para o pólo, para algum valor de ganho. Uma das vantagens de compensar o sistema desta forma é que os pólos e zeros adicionais podem ser acrescentados ao terminal de baixa potência do sistema antes do processo a controlar. O acréscimo de pólos e zeros não precisa interferir nos requisitos de potência de saída do sistema nem apresenta problemas de carga adicional ou de projeto. Os pólos e zeros de compensação podem ser gerados por meio de circuitos passivos ou ativos.

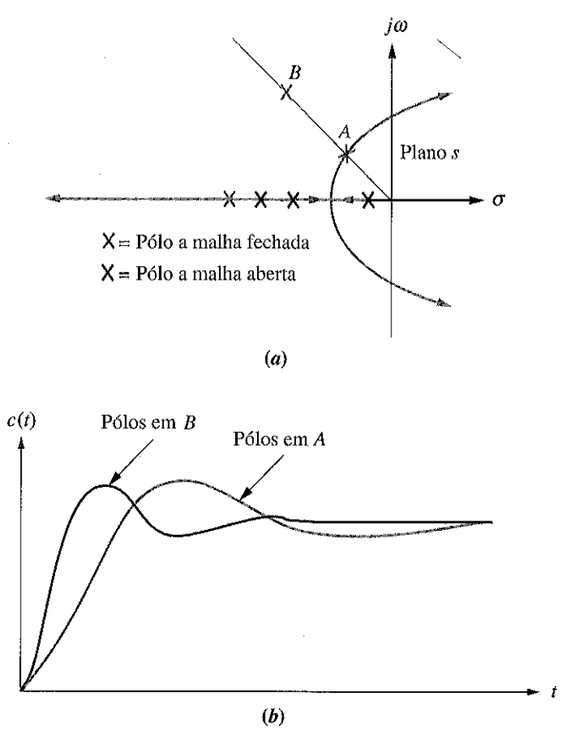


Fig. 9.1 a. Exemplo de lugar das raízes, mostrando um ponto de projeto possível através de ajuste de ganho (*A*) e um ponto de projeto desejado que não pode ser atendido através de um simples ajuste de ganho (*B*); **b.** respostas com base nos pólos em *A* e em *B*

Uma possível desvantagem em compensar o sistema com pólos e zeros a malha aberta adicionais é que a ordem do sistema pode aumentar com um efeito subseqüente sobre a resposta desejada. Nos Caps. 4 e 8 discutimos o efeito de pólos e zeros adicionais a malha aberta sobre a resposta transitória. Ao início do procedimento de projeto discutido neste capítulo, determinamos a localização adequada de pólos e zeros adicionais a *malha aberta* para se obter os pólos desejados a *malha fechada* de segunda ordem. Contudo, não conhecemos a localização dos pólos *a malha fechada* de ordem superior até que se termine o projeto. Em conseqüência, devemos calcular a resposta transitória por meio de simulação depois que o projeto tiver sido completado para nos certificarmos de que os requisitos foram atendidos.

No Cap. 12, quando discutirmos o projeto no espaço de estados, a desvantagem de se obter a localização dos pólos a malha fechada de ordem superior ao final do projeto será eliminada por meio das técnicas que permitem ao projetista especificar e projetar a localização de todos os pólos a malha fechada ao início do procedimento de projeto.

Um método de compensar a resposta transitória que será discutido adiante é inserir um derivador no percurso direto em paralelo com o ganho. Podemos visualizar a operação do derivador com o seguinte exemplo. Admitindo um controle de posição com uma entrada em degrau, observamos que o erro experimenta uma grande variação inicial. Derivando esta mudança rápida obtém-se um grande sinal que aciona o processo a controlar. A saída do derivador é muito maior que a saída do ganho puro. Esta entrada inicial de valor elevado produz uma resposta mais rápida. À medida que o erro tende ao seu valor final, sua derivada tende a zero e a saída do derivador se torna insignificante em comparação com a saída do ganho.

Melhorando o Erro de Estado Estacionário

Os compensadores não são utilizados somente para melhorar a resposta transitória de um sistema; são utilizados também de *forma independente* para melhorar as características de erro de estado estacionário. Anteriormente, quando o ganho do sistema foi ajustado para atender a especificação de resposta transitória, ocorreu uma deterioração do desempenho do erro de estado estacionário, uma vez que a resposta transitória e a constante de erro estático estavam relacionadas com o ganho. Quanto maior o valor do ganho, menor o erro de estado estacionário, porém maior a ultrapassagem percentual. Por outro lado, a redução do ganho para diminuir a ultrapassagem percentual aumentava o erro de estado estacionário. Se usarmos compensadores dinâmicos, poderemos projetar circuitos de compensação que nos permitirão atender *simultaneamente* as especificações de erro transitórias e de estado estacionário.[1] Não é mais necessário estabelecer compromisso entre resposta transitória e erro de estado estacionário, desde que o sistema opere na faixa linear.

No Cap. 7 aprendemos que o erro de estado estacionário podia ser melhorado adicionando-se um pólo a malha aberta na origem da função de transferência do percurso direto, aumentando o tipo de sistema e forçando a zero o erro de estado estacionário associado. Este pólo adicional na origem requer um integrador para sua realização.

Em resumo, portanto, a resposta transitória é melhorada com a introdução de uma derivação e o erro de estado estacionário é melhorado pela introdução de uma integração no percurso direto.

Configurações

Neste capítulo são cobertas duas configurações de compensação: (1) compensação em cascata e (2) compensação em retroação. Estes métodos estão modelados na Fig. 9.2. Na compensação em cascata, a estrutura de compensação, $G_1(s)$, é inserida na parte de baixa potência do canal direto, em cascata com o processo a controlar. Se for usada a compensação em retroação, o compensador, $H_1(s)$, é colocado no canal de retroação. Ambos os métodos alteram os pólos e zeros a malha aberta, criando, em conseqüência, novos lugares das raízes que interceptam a localização desejada do pólo a malha fechada.

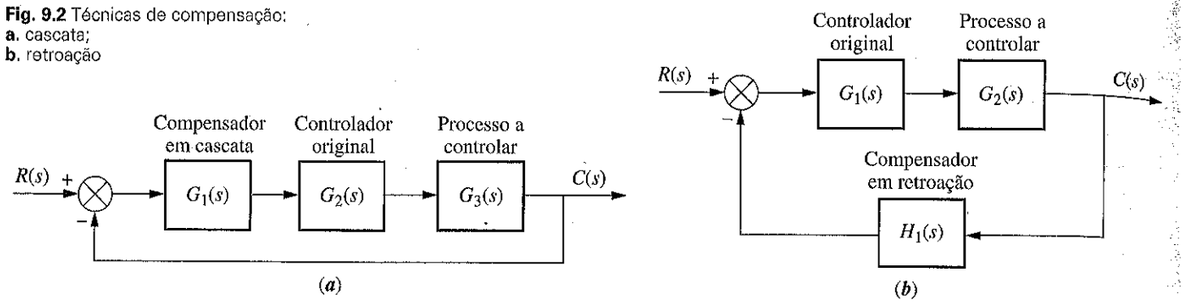
Compensadores

Os compensadores que usam integração pura para melhorar o erro de estado estacionário ou derivação pura para melhorar a resposta transitória são definidos como *compensadores ideais*. Os compensadores ideais devem ser implementados com estruturas ativas, as quais, no caso de circuitos elétricos, requerem o uso de amplificadores ativos e fontes de alimentação adicionais. Uma vantagem dos compensadores integrais ideais é que o erro de estado estacionário pode ser reduzido a zero. Compensadores eletromecânicos ideais, como tacômetros, são usados freqüentemente para melhorar a resposta transitória, uma vez que podem ser interfaceados de forma conveniente com o processo a controlar.

Outras técnicas de projeto que evitam o uso de dispositivos ativos para compensação podem ser adotadas. Esses compensadores, que podem ser implementados através de elementos passivos como resistores e capacitores, não usam integração pura nem derivação pura e não são compensadores ideais. As estruturas passivas têm como vantagens serem mais baratas e não necessitarem de fontes de alimentação adicionais para o seu funcionamento. A desvantagem é que o erro de estado estacionário não é forçado a zero em casos onde os compensadores ideais tornam o erro igual a zero.

[1] A palavra *dinâmico* significa compensadores com resposta transitória não-instantânea. As funções de transferência de tais compensadores são funções da variável de Laplace, *s*, em vez de ganhos puros.

Fig. 9.2 Técnicas de compensação:
a. cascata;
b. retroação



Portanto, a escolha entre um compensador ativo ou um compensador passivo abrange questões de custo, de peso, de desempenho desejado, de função de transferência e de interfaces entre o compensador e o restante do hardware. Nas Seções 9.2, 9.3 e 9.4, discutiremos inicialmente o projeto de um compensador em cascata usando compensação ideal, e em seguida a compensação em cascata usando compensadores que não são implementados com integração pura e com derivação pura.

9.2 Melhorando o Erro de Estado Estacionário Através da Compensação em Cascata

Nesta seção vamos discutir duas formas de melhorar o erro de estado estacionário de um sistema de controle com retroação usando compensação em cascata. Um objetivo deste projeto é melhorar o erro de estado estacionário sem afetar de forma apreciável a resposta transitória.

A primeira técnica é a *compensação integral ideal*, que utiliza um integrador puro para posicionar na origem um pólo a malha aberta do percurso direto, aumentando o tipo de sistema e reduzindo o erro a zero. A segunda técnica não utiliza integração pura. Esta técnica de compensação posiciona o pólo proximo à origem e, embora não force o erro de estado estacionário a zero, produz de fato uma redução mensurável do erro de estado estacionário.

Enquanto a primeira técnica reduz o erro de estado estacionário a zero, o compensador deve ser implementado com estruturas ativas, como amplificadores. A segunda técnica, embora não reduza o erro de estado estacionário a zero, apresenta a vantagem de poder ser implementada com um circuito passivo menos dispendioso que não requer fontes de alimentação adicionais.

Os nomes associados aos compensadores vêm seja do método de implementação do compensador, seja das características deste. Os sistemas que suprem o erro diretamente para o processo a controlar são chamados *sistemas de controle proporcional*. Os sistemas que suprem a integral do erro para o processo a controlar são chamados *sistemas de controle integral*. Finalmente, os sistemas que suprem a derivada do erro para o processo a controlar são chamados *sistemas de controle derivativo*. Assim, nesta seção, chamamos o compensador integral ideal de *controlador Proporcional-e- Integral (PI)*, uma vez que a implementação, como será visto, consiste em fornecer o erro (proporcional) mais a integral do erro ao processo a controlar. A segunda técnica usa o que chamamos de *compensador por atraso de fase*. O nome deste compensador vem de suas características de resposta de freqüência, as quais serão discutidas no Cap. 11. Portanto, usamos o nome *controlador PI* de forma intercambiável com *compensador integral ideal* e usamos o nome *compensador por atraso de fase* quando o compensador em cascata não empregar integração pura.

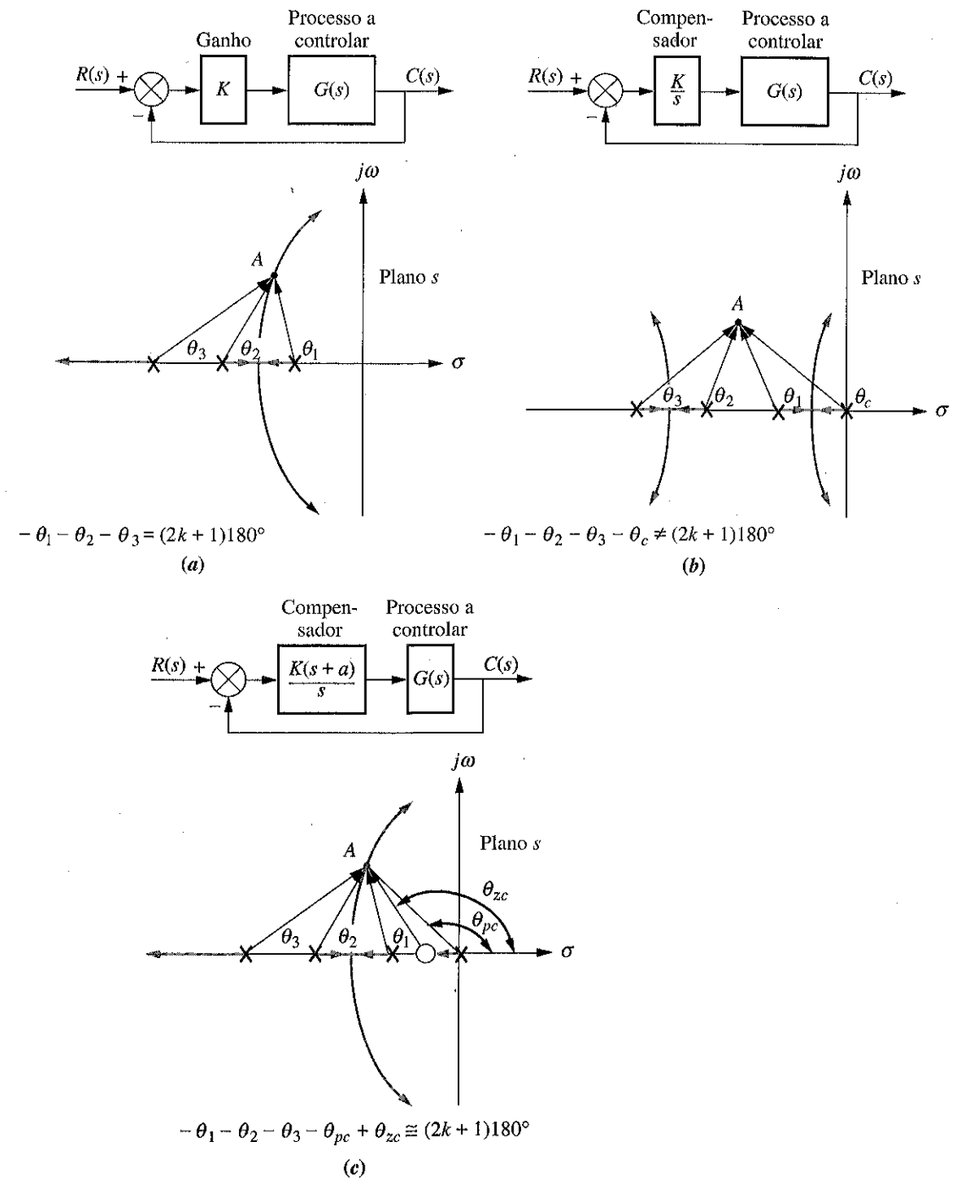
Compensação Integral Ideal (PI)

O erro de estado estacionário pode ser melhorado posicionando-se um pólo a malha aberta na origem, porque isto aumenta o tipo de sistema de uma unidade. Por exemplo, um sistema do Tipo 0 respondendo a uma entrada em degrau com um erro finito passará a responder com erro nulo se o tipo de sistema for aumentado de uma unidade. Circuitos ativos podem ser usados para posicionar pólos na origem. Mais adiante neste capítulo veremos como construir um integrador com circuitos eletrônicos ativos.

Para ver como melhorar o erro de estado estacionário sem afetar a resposta transitória, observemos a Fig. 9.3(*a*). Aqui temos um sistema funcionando com uma resposta transitória desejável gerada pelos pólos a malha fechada em *A*. Se adicionarmos um pólo na origem para aumentar o tipo de sistema, a contribuição angular dos pólos a malha aberta no ponto *A* não será mais 180° e o lugar das raízes não mais passará pelo ponto *A*, como mostrado na Fig. 9.3(*b*).

Para resolver o problema, adicionamos também um zero próximo do pólo na origem, como mostrado na Fig. 9.3(*c*). Agora a contribuição angular do zero do compensador e do pólo do compensador se cancelam, o ponto *A* ainda permanece sobre o lugar das raízes e o tipo de sistema foi aumentado. Além do mais, o ganho requerido no pólo dominante é aproximadamente o mesmo antes da compensação, uma vez que a relação entre os comprimentos do pólo do compensador e do zero do compensador é aproximadamente unitária. Por conseguinte, melhoramos o erro de estado estacionário sem afetar apreciavelmente a resposta transitória. Um compensador com um pólo na origem e um zero próximo ao pólo é chamado um *compensador integral ideal*.

Fig. 9.3 O pólo em *A*:
a. está sobre o lugar das raízes sem compensador;
b. não está sobre o lugar das raízes com a inclusão do pólo do compensador; **c.** está aproximadamente sobre o lugar das raízes com a inclusão do pólo e do zero do compensador



No exemplo a seguir, vamos demonstrar o efeito da compensação integral ideal. Um pólo a malha aberta será posicionado na origem para aumentar o tipo de sistema e forçar o erro de estado estacionário a zero. Um zero a malha aberta será posicionado bastante próximo do pólo na origem de modo que os pólos a malha fechada originais sobre o lugar original das raízes permaneçam aproximadamente nos mesmos pontos sobre o lugar das raízes compensado.

Exemplo 9.1

Efeito de um compensador integral ideal

Problema Dado o sistema da Fig. 9.4(*a*), operando com uma relação de amortecimento de 0,174, mostrar que a adição do compensador integral ideal mostrado na Fig. 9.4(*b*) reduz a zero o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau sem afetar de forma apreciável a resposta transitória. A estrutura de compensação é escolhida

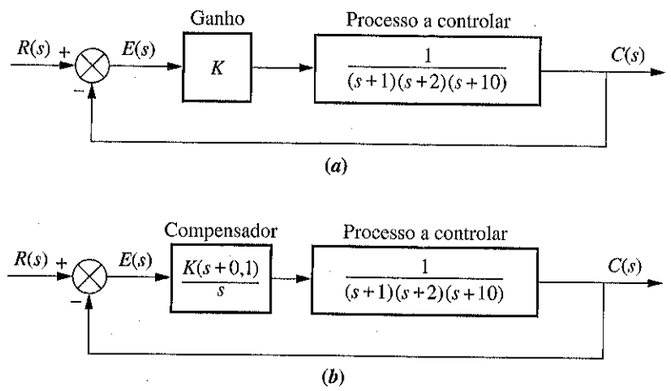


Fig. 9.4 Sistema a malha fechada do Exemplo 9.1
a. antes da compensação.
b. após a compensação integral ideal

com um pólo na origem para aumentar o tipo de sistema e um zero em $-0,1$, próximo do pólo do compensador, de modo que a contribuição angular do compensador calculada nos pólos dominantes de segunda ordem originais seja aproximadamente zero. Portanto, os pólos dominantes de segunda ordem a malha fechada, originais, se conservam aproximadamente sobre o novo lugar das raízes.

Solução Analisamos primeiramente o sistema não-compensado e determinamos a localização dos pólos de segunda ordem, dominantes. Em seguida, calculamos o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário. O lugar das raízes para o sistema não-compensado está mostrado na Fig. 9.5.

Uma relação de amortecimento de 0,174 é representada por uma reta radial desenhada no plano s segundo um ângulo de 100,02°. Investigando ao longo desta reta com o programa de lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha o livro, descobrimos que os pólos dominantes são $-0,694 \pm j3,926$ para um ganho, K, de 164,6. Vejamos agora o terceiro pólo no lugar das raízes além de -10 sobre o eixo real. Usando o programa do lugar das raízes e procurando o mesmo valor de ganho correspondente ao do par dominante, $K = 164,6$, encontramos o terceiro pólo em aproximadamente $-11,61$. Este ganho fornece $K_p = 8,23$. Por conseguinte, o erro de estado estacionário é

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+8,23} = 0,108 \tag{9.1}$$

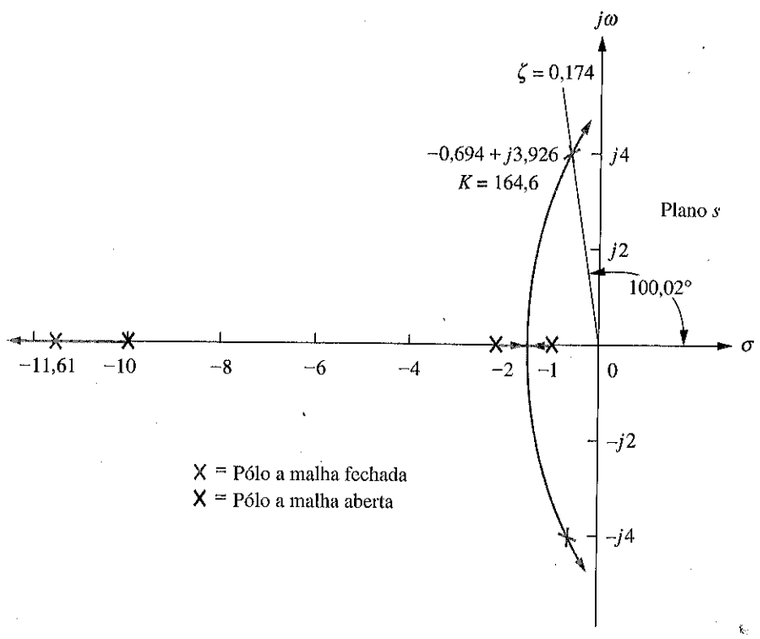


Fig. 9.5 Lugar das raízes para o sistema não-compensado da Fig. 9.4(*a*)

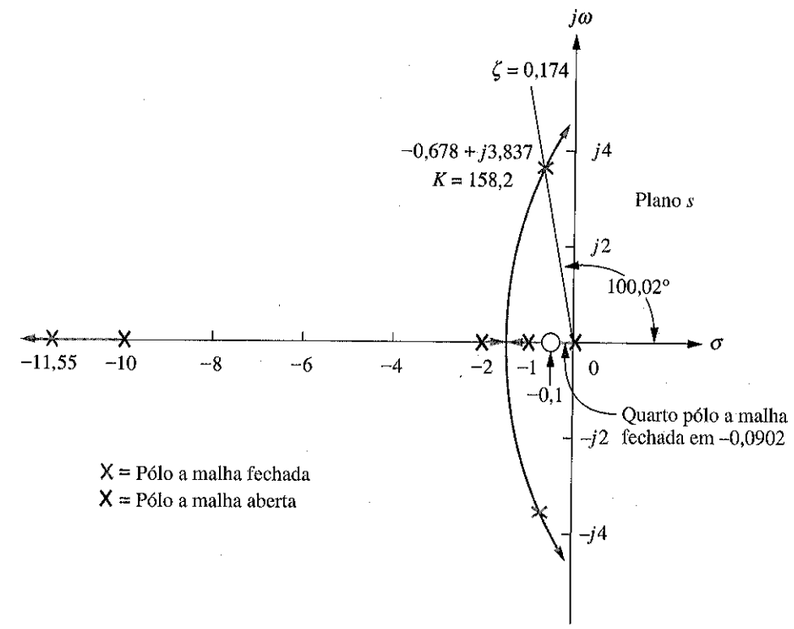


Fig. 9.6 Lugar das raízes para o sistema não-compensado da Fig. 9.4(*b*)

Adicionando um compensador integral ideal com um zero em $-0,1$, como mostrado na Fig. 4.9(*b*), obtemos o lugar das raízes mostrado na Fig. 9.6. Os pólos de segunda ordem dominantes, o terceiro pólo além de -10 e o ganho são aproximadamente os mesmos do sistema não-compensado. Uma outra seção do lugar das raízes compensado fica entre a origem e $-0,1$. Investigando esta região para o mesmo valor de ganho do par dominante, $K = 158,2$, encontra-se o quarto pólo a malha fechada em $-0,0902$, suficientemente próximo do zero para ocasionar o cancelamento de pólo com zero. Portanto, os pólos a malha fechada do sistema compensado e o ganho são aproximadamente os mesmos do sistema não-compensado, o que indica que a resposta transitória do sistema compensado é aproximadamente a mesma do sistema não-compensado. Contudo, o sistema compensado, com seu pólo na origem, é um sistema do Tipo 1; diferentemente do sistema não-compensado, responderá a uma entrada em degrau com erro nulo.

A Fig. 9.7 compara a resposta não-compensada com a resposta compensada integral ideal. A resposta ao degrau do sistema com compensação integral ideal tende a um em estado estacionário, enquanto a resposta do sistema não-compensado tende a 0,892. Portanto, o sistema com compensação integral ideal responde com erro de estado estacionário nulo. A resposta transitória do sistema não-compensado e do sistema com compensação integral é a mesma até aproximadamente 3 s. Depois desse instante de tempo, o integrador do compensador, mostrado na Fig. 9.4(*b*), compensa lentamente o erro até que se obtenha finalmente erro nulo. A simulação mostra que decorrem 18 s para que o sistema compensado entre no interior da faixa de ±2% do valor final em torno do valor unitário, en-

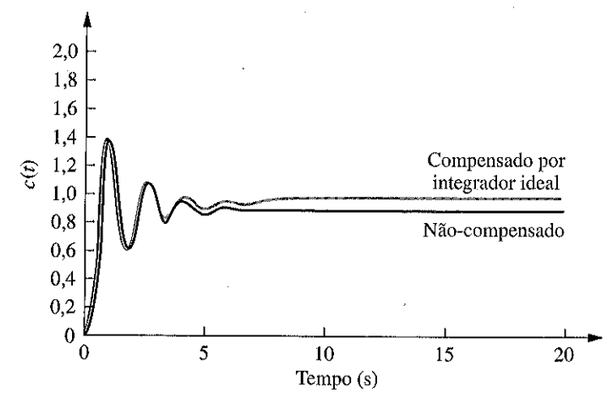
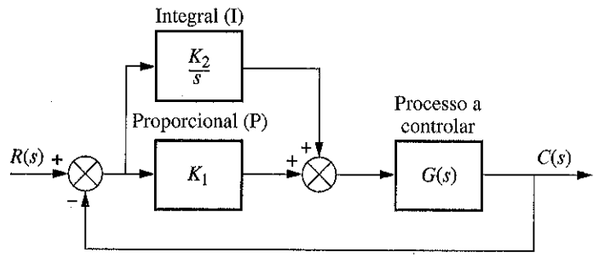


Fig. 9.7 Resposta do sistema compensado com um integrador ideal e do sistema não-compensado do Exemplo 9.1

Fig. 9.8 Controlador PI



quanto o sistema não-compensado leva cerca de 6 s para assentar no interior da faixa de ±2% do valor final em torno do valor de 0,892. Pode parecer à primeira vista que a compensação leva a uma deterioração do tempo de assentamento. Observe, contudo, que o sistema compensado alcança o valor final do sistema não-compensado praticamente no mesmo tempo. O tempo restante é usado para melhorar o erro de estado estacionário em relação ao do sistema não-compensado.

Um método de implementar um compensador integral ideal está mostrado na Fig. 9.8. A estrutura de compensação precede $G(s)$ e é um compensador integral ideal, uma vez que

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1\left(s + \frac{K_2}{K_1}\right)}{s} \tag{9.2}$$

O valor do zero pode ser ajustado variando K_2/K_1. Nesta implementação, o erro e a integral do erro são supridos ao percurso direto do processo a controlar, $G(s)$. Como a Fig. 9.8 possui os controles proporcional e integral, o controlador integral ideal, ou compensador, recebe o nome alternativo de *Controlador PI*. Mais adiante neste capítulo veremos como implementar cada bloco, K_1 e K_2/s.

Compensação por Atraso de Fase

A compensação integral ideal, com seu pólo na origem, requer um integrador ativo. Se usarmos estruturas passivas, o pólo e o zero serão deslocados para a esquerda, nas proximidades da origem, como mostrado na Fig. 9.9(*c*). Pode-se tentar imaginar que esse posicionamento do pólo, embora não aumente o tipo de sistema, produza de fato

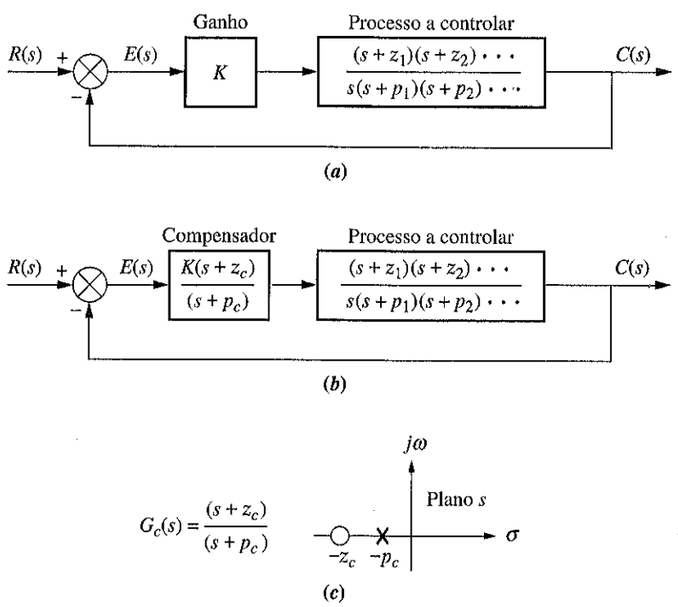


Fig. 9.9 a. Sistema do tipo 1 não-compensado; **b.** sistema do tipo 1 compensado; **c.** diagrama de pólos e zeros do compensador

uma melhoria na constante de erro estático em relação a um sistema não-compensado. Sem perda de generalidade, demonstramos que esta melhoria é realizada de fato em um sistema do Tipo 1.

Considere o sistema não-compensado mostrado na Fig. 9.9(*a*). A constante de erro estático, K_{va}, do sistema é

$$K_{va} = \frac{K z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \tag{9.3}$$

Considerando o compensador por atraso de fase mostrado nas Figs. 9.9(*b*) e (*c*), a nova constante de erro estático é

$$K_{vN} = \frac{(K z_1 z_2 \cdots)(z_c)}{(p_1 p_2 \cdots)(p_c)} \tag{9.4}$$

Qual é o efeito sobre a resposta transitória? A Fig. 9.10 mostra o efeito sobre o lugar das raízes devido à adição de um compensador por atraso de fase. O lugar das raízes do sistema não-compensado está mostrado na Fig. 9.19(*a*), onde se supõe que P seja o pólo dominante. Se o pólo e o zero do compensador por atraso de fase estiverem próximos um do outro, a contribuição angular do compensador no ponto P será de aproximadamente zero grau. Portanto, na Fig. 9.10(*b*), onde o compensador foi adicionado, o ponto P permanece aproximadamente na mesma posição sobre o lugar das raízes do sistema compensado.

Qual o efeito sobre o ganho necessário, K? Depois de inserir o compensador, descobrimos que o valor de K é virtualmente o mesmo para os sistemas não-compensado e compensado, uma vez que os comprimentos dos vetores traçados a partir do compensador por atraso de fase são aproximadamente iguais e todos os outros vetores não se alteraram apreciavelmente.

Agora, que melhoria podemos esperar no erro de estado estacionário? Como estabelecemos que o ganho, K, é aproximadamente o mesmo para os sistemas não-compensado e compensado, podemos substituir a Eq. (9.3) na Eq. (9.4) e obter

$$K_{vN} = K_{va}\frac{z_c}{p_c} > K_{va} \tag{9.5}$$

A Eq. (9.5) mostra que a melhoria de K_v do sistema compensado em relação ao K_v do sistema não-compensado é igual à relação entre as magnitudes do zero e do pólo do compensador. Para manter a resposta transitória inalterada, sabemos que o pólo e o zero do compensador precisam estar próximos um do outro. A única forma de a relação entre z_c e p_c ser grande a fim de produzir uma melhoria no erro de estado estacionário e simultaneamente ter o pólo e o zero do compensador próximos um do outro para minimizar a contribuição angular consiste em posicionar o par pólo-zero próximo da origem. Por exemplo, a relação de z_c para p_c pode ser igual a 10 se o pólo estiver em −0,001 e o zero em −0,01. Assim, a relação é 10, embora o pólo e o zero estejam bastante próximos e a contribuição angular do compensador seja pequena.

Concluindo, embora o compensador ideal force o erro de estado estacionário a zero, o compensador por atraso de fase com um pólo que não está na origem irá melhorar a constante de erro estático de um fator igual a z_c/p_c. Haverá também um efeito mínimo sobre a resposta transitória se o par pólo-zero do compensador for posicionado próximo à origem. Mais adiante neste capítulo iremos mostrar configurações de circuitos para o compensador por atraso de fase. Essas configurações de circuito podem ser obtidas com estruturas passivas e, portanto, não requerem os amplificadores ativos e as possíveis fontes de alimentação adicionais que são necessárias com o compensador integral ideal (PI). No exemplo a seguir, projetamos um compensador por atraso de fase que produz uma melhoria especificada no erro de estado estacionário.

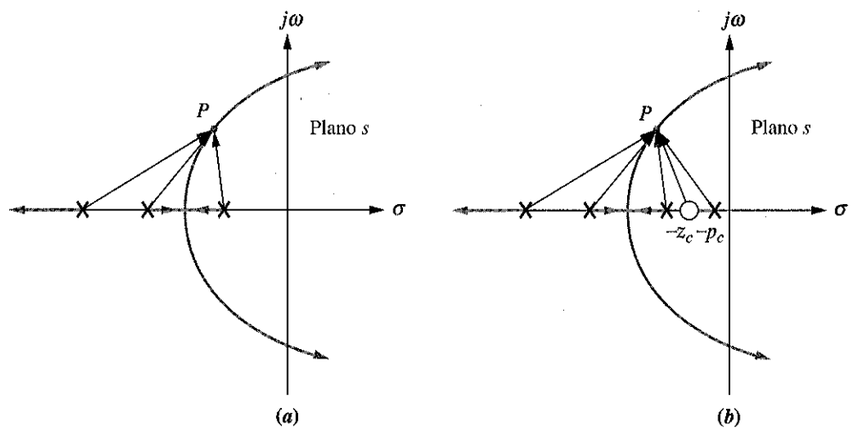


Fig. 9.10 Lugar das raízes: **a.** antes da compensação por atraso de fase; **b.** depois da compensação por atraso de fase

Exemplo 9.2

Projeto de compensador por atraso de fase

Problema Compensar o sistema da Fig. 9.4(*a*), cujo lugar das raízes está mostrado na Fig. 9.5, para melhorar o erro de estado estacionário por meio de um fator de 10 se o sistema estiver funcionando com uma relação de amortecimento de 0,174.

Solução O erro do sistema não-compensado do Exemplo 9.1 era de 0,108 com $K_p = 8{,}23$. Uma melhoria de dez vezes significa um erro de estado estacionário de

$$e(\infty) = \frac{0{,}108}{10} = 0{,}0108 \tag{9.6}$$

Como

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0{,}0108 \tag{9.7}$$

rearrumando e resolvendo para o valor necessário de K_p resulta

$$K_p = \frac{1 - e(\infty)}{e(\infty)} = \frac{1 - 0{,}0108}{0{,}0108} = 91{,}59 \tag{9.8}$$

A melhoria em K_p entre o sistema não-compensado e o sistema compensado é a relação necessária entre o zero do compensador e o pólo do compensador, ou seja,

$$\frac{z_c}{p_c} = \frac{K_{p_N}}{K_{p_a}} = \frac{91{,}59}{8{,}23} = 11{,}13 \tag{9.9}$$

Selecionando arbitrariamente

$$p_c = 0{,}01 \tag{9.10}$$

usamos a Eq. (9.9) e encontramos

$$z_c = 11{,}13 p_c \approx 0{,}111 \tag{9.11}$$

Comparemos agora o sistema compensado, mostrado na Fig. 9.11, com o sistema não-compensado. Esbocemos, para começar, o lugar das raízes do sistema compensado, como mostrado na Fig. 9.12. Em seguida, procuremos ao longo da reta de $\zeta = 0{,}174$ um ponto para um múltiplo de 180° e descubramos que os pólos dominantes de segunda ordem estão em $-0{,}67 \pm j3{,}836$ com um ganho, K, de 158,1. O terceiro e o quarto pólos estão em $-11{,}55$ e em $-0{,}101$, respectivamente e são encontrados pesquisando o eixo real para o valor de ganho igual ao dos pólos dominantes. Todos os resultados transitórios e de estado estacionário para ambos os sistemas não-compensado e compensado estão mostrados na Tabela 9.1.

O quarto pólo do sistema compensado cancela o zero do compensador. Isto deixa os restantes três pólos a malha fechada do sistema compensado muito próximos dos valores dos três pólos a malha fechada do sistema não-compensado. Em conseqüência a resposta transitória de ambos os sistemas é aproximadamente a mesma, bem como o ganho do sistema. Mas observe que o erro de estado estacionário do sistema compensado é 9,818 vezes menor que o do sistema não-compensado e é próximo à especificação de projeto de uma melhoria de dez vezes.

A Fig. 9.13 mostra o efeito do compensador por atraso de fase no domínio do tempo. Embora as respostas transitórias dos sistemas não-compensado e compensado por atraso de fase sejam iguais, o sistema compensado por atraso de fase apresenta um erro de estado estacionário menor por aproximar-se mais da unidade do que o sistema sem compensação.

Examinaremos agora uma outra possibilidade de projeto para o compensador por atraso de fase e compararemos a resposta à Fig. 9.13. Admitamos um compensador por atraso de fase cujo pólo e cujo zero estão 10 vezes mais próximos da origem do que no projeto anterior. Os resultados são comparados na Fig. 9.14. Embora ambas as respostas alcancem finalmente o mesmo valor de estado estacionário, o compensador por atraso de fase projetado anteriormente, $G_c(s) = (s + 0{,}111)/(s + 0{,}01)$, tende ao valor final mais rápido que o controlador por atraso de fase proposto, $G_c(s) = (s + 0{,}0111)/(s + 0{,}001)$. Podemos explicar esse fenômeno da seguinte forma. Com base na Tabela 9.1, o compensador por atraso de fase projetado anteriormente possui um quarto pólo a malha fechada em $-0{,}101$. Usando a mesma análise para o novo compensador por atraso de fase com pólo a malha aberta 10 vezes

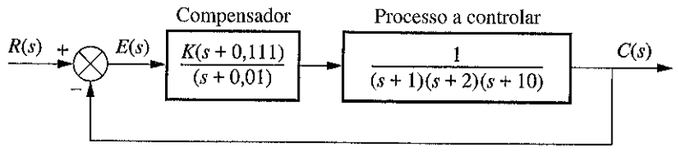


Fig. 9.11 Sistema compensado para o Exemplo 2

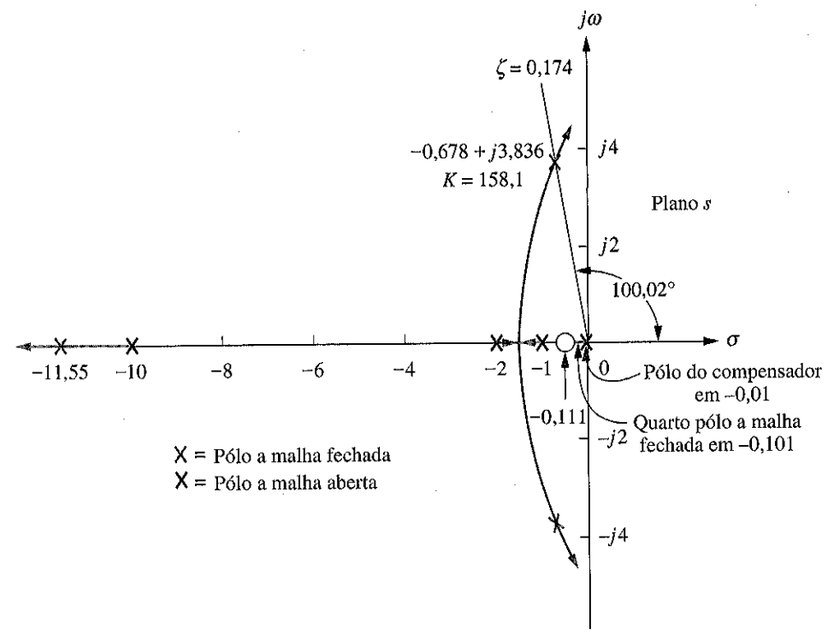


Fig. 9.12 Lugar das raízes do sistema compensado da Fig. 9.11

Tabela 9.1 Características previstas de sistemas não-compensados e compensados por atraso de fase

Parâmetro	Não-compensado	Compensado por atraso de fase
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+10)}$	$\dfrac{K(s+0{,}111)}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+0{,}01)}$
K	164,6	158,1
K_p	8,23	87,75
$e(\infty)$	0,108	0,011
Pólos de segunda ordem dominantes	$-0{,}694 \pm j3{,}926$	$-0{,}678 \pm j3{,}836$
Terceiro pólo	$-11{,}61$	$-11{,}55$
Quarto pólo	Nenhum	$-0{,}101$
Zero	Nenhum	$-0{,}111$

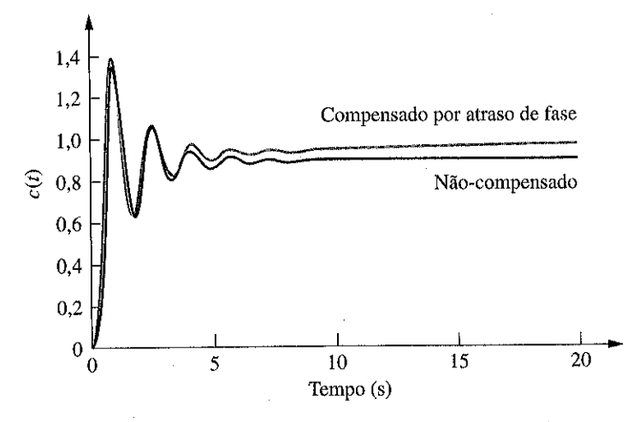


Fig. 9.13 Respostas ao degrau do sistema não-compensado e do sistema compensado por atraso de fase para o Exemplo 9.2

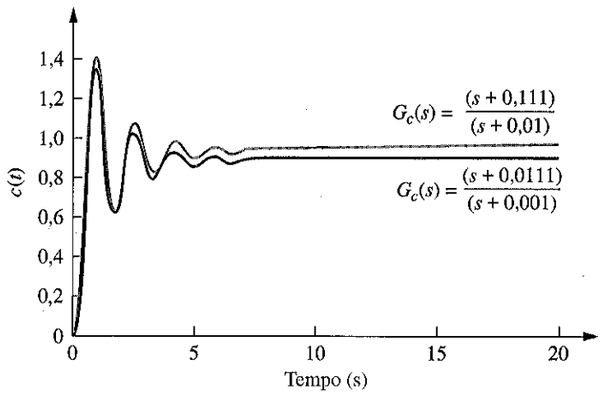


Fig. 9.14 Respostas ao degrau do sistema do Exemplo 9.2 usando diferentes compensadores por atraso de fase.

mais próximo do eixo imaginário, encontramos o quarto pólo a malha fechada em $-0{,}01$. Portanto, o novo compensador por atraso de fase possui um pólo a malha fechada mais próximo do eixo imaginário que o do compensador por atraso de fase original. Esse pólo em $-0{,}01$ produzirá uma resposta transitória mais longa que a do pólo original em $-0{,}101$, e o valor de estado estacionário não será alcançado tão rapidamente.

Exercício de Avaliação 9.1

Problema: Um sistema com retroação unitária com uma função de transferência no percurso direto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+7)}$$

está operando com uma resposta a malha fechada ao degrau que apresenta uma ultrapassagem percentual de 15%. Faça o seguinte:

a. Calcule o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária.
b. Projete um compensador por atraso de fase para melhorar o erro de estado estacionário de um fator de 20.
c. Calcule o erro de estado estacionário do sistema compensado para uma entrada em rampa unitária.
d. Calcule quanto de melhoria foi obtida no erro de estado estacionário.

Respostas:

a. $e_{\text{rampa}}(\infty) = 0{,}1527$
b. $G_{\text{atraso}}(s) = \dfrac{s+0{,}2}{s+0{,}01}$
c. $e_{\text{rampa}}(\infty) = 0{,}0078$
d. Uma melhoria de 19,58 vezes.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

9.3 Melhorando a Resposta Transitória Através da Compensação em Cascata

Uma vez que resolvemos o problema de melhorar o erro de estado estacionário sem afetar a resposta transitória, melhoremos agora a resposta transitória em si. Nesta seção vamos discutir duas formas de melhorar a resposta transitória de um sistema de controle com retroação usando compensação em cascata. Normalmente, o objetivo é projetar uma resposta que apresente uma ultrapassagem percentual desejada e um tempo de assentamento menor que o sistema não-compensado.

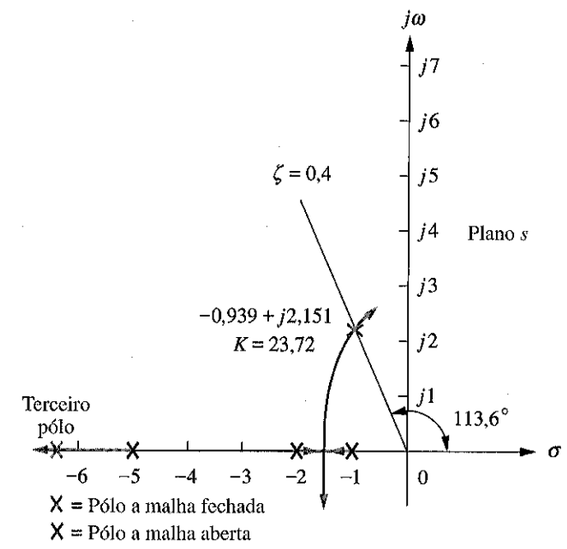
A primeira técnica discutirá a *compensação derivativa ideal*. Com a compensação derivativa ideal, um derivador puro é adicionado ao percurso direto do sistema de controle com retroação. Veremos que o resultado de se adicionar a derivação é a inclusão de um zero na função de transferência do percurso direto. Este tipo de compensação requer um circuito ativo para sua realização. Além disso, a derivação é um processo ruidoso. Embora o nível de ruído seja baixo, a freqüência do ruído é alta em comparação com a do sinal. Portanto, a derivação de ruído de alta freqüência conduz a um sinal indesejado de grande amplitude.

A segunda técnica não utiliza derivação pura. Em vez disso, aproxima a derivação por meio de uma estrutura passiva adicionando um zero e um pólo mais distante à função de transferência do percurso direto. O zero aproxima a derivação pura como descrito anteriormente.

Como com a compensação para melhorar o erro de estado estacionário, introduzimos nomes associados à implementação dos compensadores. Chamamos um compensador derivativo ideal de *controlador Proporcional Derivativo (PD)*, uma vez que a implementação, como será vista, consiste em suprir o erro (proporcional) mais a derivada do erro ao percurso direto do processo a controlar. A segunda técnica usa uma estrutura passiva chamada *compensador por avanço de fase*. Como no caso do compensador por atraso de fase, o nome vem da sua resposta de freqüência, a qual será discutida no Cap. 11. Portanto, usamos a denominação *controlador PD* alternadamente com a denominação *compensador derivativo ideal*, e usamos a denominação *compensador por avanço de fase* quando o compensador em cascata não empregar derivação pura.

Compensação Derivativa Ideal (PD)

A resposta transitória pode ser selecionada escolhendo-se uma localização apropriada no plano s para os pólos a malha fechada. Se este ponto estiver sobre o lugar das raízes, então um simples ajuste de ganho é tudo o que é necessário para atender as especificações da resposta transitória. Se a localização do pólo a malha fechada não



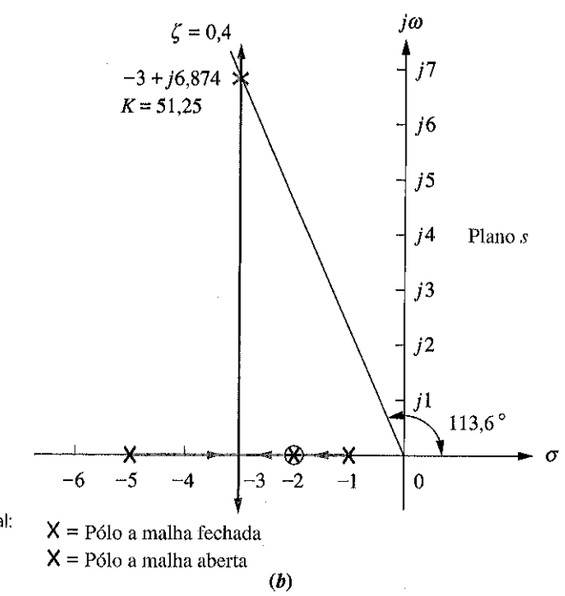


Fig. 9.15 Usando compensação derivativa ideal: **a.** sistema não-compensado; **b.** com zero do compensador em -2; (continua)

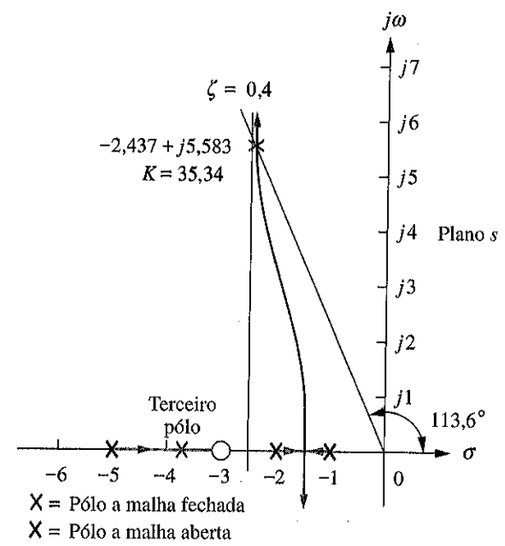
estiver sobre o lugar das raízes, então o lugar das raízes deverá ter sua forma modificada de modo que o lugar das raízes compensado (novo) passe pela localização escolhida do pólo a malha fechada. Para realizar esta tarefa, pólos e zeros devem ser adicionados ao percurso direto para produzir uma nova função de malha aberta cujo lugar das raízes passa pelo ponto de projeto no plano s. Uma forma de aumentar a velocidade do sistema original que geralmente funciona consiste em adicionar um zero simples ao percurso direto.

Este zero pode ser representado por um compensador cuja função de transferência é

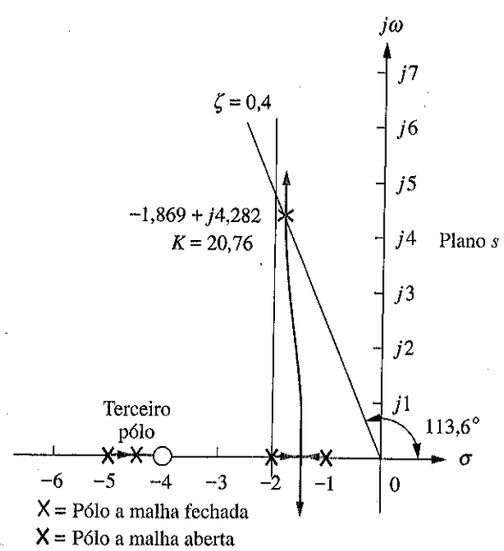
$$G_c(s) = s + z_c \tag{9.12}$$

Esta função, a soma de uma derivação e de um ganho puros, é chamada *controlador derivativo ideal* ou *controlador PD*. Uma escolha criteriosa da posição do zero compensador pode tornar mais rápida a resposta em relação à do sistema não-compensado. Em resumo, respostas transitórias que não são possíveis de obter mediante um simples ajuste de ganho podem ser alcançadas aumentando-se os pólos e zeros do sistema com um compensador derivativo ideal.

Vamos mostrar agora que a compensação derivativa ideal aumenta a velocidade da resposta de um sistema. São mostrados diversos exemplos na Fig. 9.15, onde o sistema não-compensado da Fig. 9.15(*a*), operando com



(*c*)



(*d*)

Fig. 9.15 (Continuação)
c. com zero do compensador em −3;
d. com zero do compensador em −4

Tabela 9.2 Características previstas para os sistemas da Fig. 9.15

	Não-compensado	Compensação b	Compensação c	Compensação d
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\dfrac{K(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\dfrac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\dfrac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$
Pólos dom.	$-0{,}939 \pm j2{,}151$	$-3 \pm j6{,}874$	$-2{,}437 \pm j5{,}583$	$-1{,}869 \pm j4{,}282$
K	23,72	51,25	35,34	20,76
ζ	0,4	0,4	0,4	0,4
ω_n	2,347	7,5	6,091	4,673
$\%UP$	25,38	25,38	25,38	25,38
T_s	4,26	1,33	1,64	2,14
T_p	1,46	0,46	0,56	0,733
K_p	2,372	10,25	10,6	8,304
$e(\infty)$	0,297	0,089	0,086	0,107
Terceiro pólo	−6,123	Nenhum	−3,127	−4,262
Zero	Nenhum	Nenhum	−3	−4
Comentários	Aprox. de 2.ª ordem OK	Segunda ordem pura	Aprox. de 2.ª ordem OK	Aprox. de 2.ª ordem OK

um coeficiente de amortecimento de 0,4, se torna um sistema compensado pela adição de um zero de compensação em −2, −3 e −4 nas Figs. 9.15(*b*), (*c*) e (*d*), respectivamente. Em cada um dos projetos, o zero é deslocado para uma posição diferente e é mostrado o lugar das raízes. Para cada um dos casos compensados, os pólos de segunda ordem dominantes estão mais distantes ao longo da reta de relação de amortecimento 0,4 que no sistema não-compensado.

Cada um dos casos compensados possui pólos dominantes com a mesma relação de amortecimento do caso não-compensado. Portanto, prevemos que a ultrapassagem percentual será a mesma em todos os casos.

Além disso, os pólos a malha fechada dominantes compensados possuem parte real mais negativa que a dos pólos a malha fechada dominantes do sistema não-compensado. Portanto, prevemos que os tempos de assentamento dos casos compensados serão menores que no caso não-compensado. Os pólos a malha fechada dominantes com parte real mais negativa apresentarão menores tempos de assentamento. O sistema na Fig. 9.15(*b*) terá o menor tempo de assentamento.

Todos os sistemas compensados terão tempos de pico menores que o do sistema não-compensado, uma vez que as partes imaginárias dos sistemas compensados são maiores. O sistema na Fig. 9.15(*b*) terá o menor tempo de pico.

Observe também que, como o zero foi posicionado longe dos pólos dominantes, esses pólos dominantes a malha fechada do sistema compensado se movem mais para perto da origem e dos pólos dominantes a malha fechada do sistema não-compensado. A Tabela 9.2 resume os resultados obtidos a partir do lugar das raízes de cada um dos casos de projeto mostrados na Fig. 9.15.

Em resumo, embora os métodos de compensação *c* e *d* produzam respostas mais lentas que o método *b*, a adição de uma compensação derivativa ideal abreviou o tempo de resposta em cada caso ao mesmo tempo em que mantém a mesma ultrapassagem percentual. Essa mudança pode ser melhor apreciada no tempo de assentamento e no tempo de pico, onde há pelo menos o dobro da velocidade em todos os casos de compensação. Um benefício adicional foi a melhoria no erro de estado estacionário, embora não tenha sido utilizada a compensação por atraso de fase. Aqui, o erro de estado estacionário do sistema compensado é pelo menos um terço do erro do sistema não-

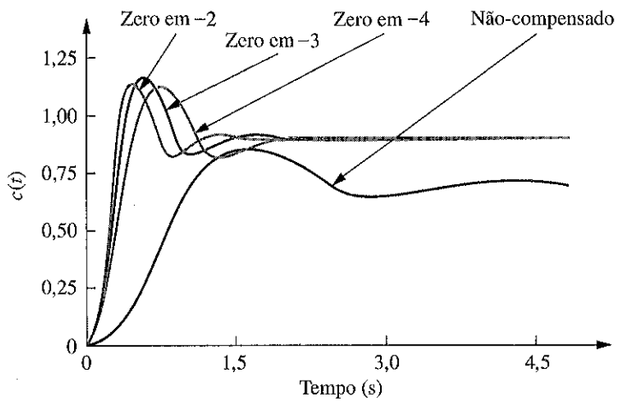


Fig. 9.16 Sistema não-compensado e soluções de compensação derivativa ideal com base na Tabela 9.2

compensado, como visto através de $e(\infty)$ e de K_p. Todos os sistemas na Tabela 9.2 são do Tipo 0 e se espera algum erro de estado estacionário. O leitor não deve admitir que, em geral, uma melhoria na resposta transitória produza sempre uma melhoria no erro de estado estacionário.

O tempo de resposta de cada caso na Tabela 9.2 está mostrado na Fig. 9.16. Vemos que as respostas compensadas são mais rápidas e apresentam erro menor que a resposta do sistema não-compensado.

Agora que vimos o que a compensação derivativa ideal pode fazer, estamos prontos para projetar nosso próprio compensador derivativo ideal para atender uma especificação de resposta transitória. Fundamentalmente, calcularemos a soma dos ângulos a partir dos pólos e zeros a malha aberta em um ponto de projeto que é o pólo a malha fechada que produz a resposta transitória desejada. A diferença entre 180° e o ângulo calculado deve ser a contribuição angular do zero compensador. Utilizam-se então os conhecimentos de trigonometria para localizar a posição do zero que fornece a diferença angular requerida.

Exemplo 9.3

Projeto de compensador derivativo ideal

Problema Dado o sistema da Fig. 9.17, projetar um compensador derivativo ideal para produzir uma ultrapassagem de 16%, com uma redução de três vezes no tempo de assentamento.

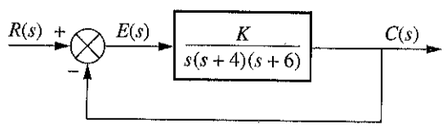


Fig. 9.17 Sistema de controle com retroação para o Exemplo 9.3

Solução Calculemos primeiramente o desempenho do sistema não-compensado operando com uma ultrapassagem percentual de 16%. O lugar das raízes para o sistema não-compensado está mostrado na Fig. 9.18. Como uma ultrapassagem de 16% é equivalente a $\zeta = 0{,}504$, investigamos sobre a reta da relação de amortecimento um ponto com valor angular múltiplo ímpar de 180° e descobrimos que o par de pólos dominantes de segunda ordem está situado em $-1{,}205 \pm j2{,}064$. Portanto, o tempo de assentamento do sistema não-compensado é

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1{,}205} = 3{,}320 \tag{9.13}$$

Como o nosso cálculo da ultrapassagem percentual e do tempo de assentamento é baseado em uma aproximação de segunda ordem, devemos verificar a suposição obtendo o terceiro pólo e justificando essa aproximação. Investigando além de -6 sobre o eixo real para um valor de ganho igual ao do par de segunda ordem dominante, 43,35, encontramos um terceiro pólo em $-7{,}59$, o qual está afastado do eixo imaginário $j\omega$ mais de seis vezes que o par dominante de segunda ordem. Concluímos que nossa aproximação é válida. As características transitórias e do erro de estado estacionário do sistema não-compensado estão resumidas na Tabela 9.3.

Procedamos agora à compensação do sistema. Primeiramente vamos determinar a localização dos pólos dominantes do sistema compensado. Para se obter uma redução de três vezes no tempo de assentamento, este parâmetro

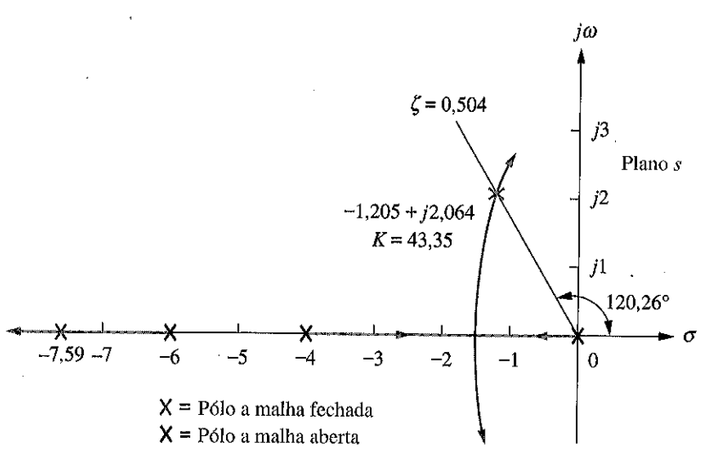


Fig. 9.18 Lugar das raízes do sistema não-compensado mostrado na Fig. 9.17

Tabela 9.3 Características previstas para os sistemas do Exemplo 9.3

	Não-compensado	Simulação	Compensado	Simulação
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K}{s(s+4)(s+6)}$		$\dfrac{K(s+3{,}006)}{s(s+4)(s+6)}$	
Pólos dominantes	$-1{,}205 \pm j2{,}064$		$-3{,}613 \pm j6{,}193$	
K	43,35		47,45	
ζ	0,504		0,504	
ω_n	2,39		7,17	
$\%UP$	16	14,8	16	11,8
T_s	3,320	3,6	1,107	1,2
T_p	1,522	1,7	0,507	0,5
K_v	1,806		5,94	
$e(\infty)$	0,554		0,168	
Terceiro pólo	$-7{,}591$		$-2{,}775$	
Zero	Nenhum		$-3{,}006$	
Comentários	Aprox. de 2.ª ordem OK		Pólo e zero não se cancelam	

no sistema compensado deve ser um terço da Eq. (9.13). O novo tempo de assentamento será 1,107. Portanto, a parte real do pólo dominante de segunda ordem do sistema compensado é

$$\sigma = \frac{4}{T_s} = \frac{4}{1{,}107} = 3{,}613 \tag{9.14}$$

A Fig. 9.19 mostra o pólo de segunda ordem dominante projetado, com uma parte real igual a $-3{,}613$ e uma parte imaginária de

$$\omega_d = 3{,}613\,\mathrm{tg}(180° - 120{,}26°) = 6{,}193 \tag{9.15}$$

Em seguida, projetamos a localização do zero do compensador. Entre com os pólos e zeros do sistema não-compensado no programa do lugar das raízes bem como o ponto de projeto $-3{,}613 \pm j6{,}193$ como ponto de teste. O resultado é a soma dos ângulos no ponto de projeto de todos os pólos e zeros do sistema compensado exceto os do zero do compensador em si. A diferença entre o resultado obtido e 180° é a contribuição angular necessária do zero do compensador. Usando os pólos a malha aberta mostrados na Fig. 9.19 e o ponto de teste, $-3{,}613 \pm j6{,}193$, que é o pólo de segunda ordem dominante desejado, obtemos a soma de ângulos de $-275{,}6°$. Por conseguinte, a contribuição angular requerida do zero do compensador no ponto de teste para que este esteja sobre o lugar das raízes é $+275{,}6° - 180° = 95{,}6°$. A geometria está mostrada na Fig. 9.20, onde devemos resolver para $-\sigma$, a localização do zero do compensador.

Com base na figura,

$$\frac{6{,}193}{3{,}613 - \sigma} = \mathrm{tg}\,(180° - 95{,}6°) \tag{9.16}$$

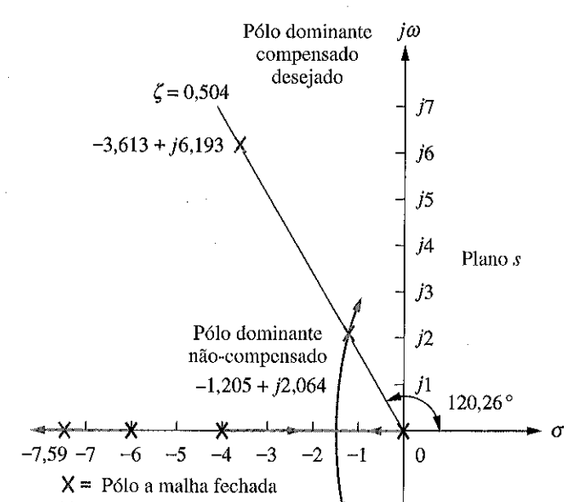


Fig. 9.19 Pólos dominantes do sistema compensado superpostos ao lugar das raízes do sistema não-compensado do Exemplo 9.3

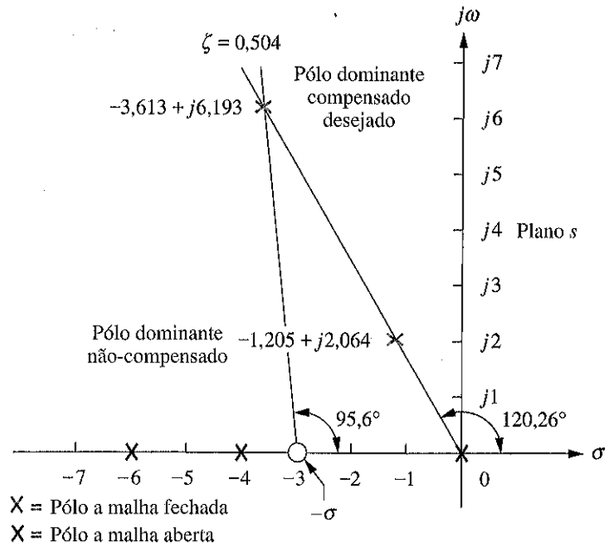


Fig. 9.20 Calculando a localização do zero do compensador para o Exemplo 9.3

Portanto, $\sigma = 3{,}006$. O lugar das raízes completo do sistema compensado está mostrado na Fig. 9.21. A Tabela 9.3 resume os resultados dos sistemas não-compensado e compensado.

Para o sistema não-compensado, a estimativa da resposta transitória é precisa, uma vez que o terceiro pólo é pelo menos cinco vezes menor que a parte real do par dominante de segunda ordem. Contudo, a aproximação de segunda ordem para o sistema compensado pode não ser válida porque não há cancelamento aproximado de pólo com zero entre o pólo a malha fechada em $-2{,}775$ e o zero a malha fechada em $-3{,}006$. É necessária uma simulação ou uma expansão em frações parciais da resposta a malha fechada para comparar o resíduo do pólo em $-2{,}775$ e os resíduos dos pólos dominantes em $-3{,}613 \pm j6{,}193$. Os resultados de simulação podem ser obtidos usando o MATLAB (discutido no fim deste exemplo) ou um programa como o da resposta ao degrau no espaço de estados descrito no Apêndice H.1 no CD-ROM que acompanha o livro. A ultrapassagem percentual difere em 3% entre os sistemas não-compensado e compensado, enquanto há uma melhoria de três vezes na velocidade com base no tempo de assentamento.

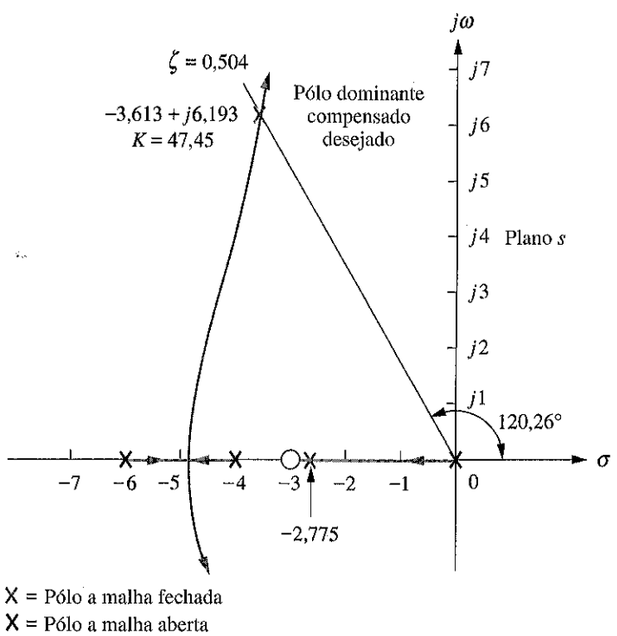


Fig. 9.21 Lugar das raízes do sistema não-compensado do Exemplo 9.3

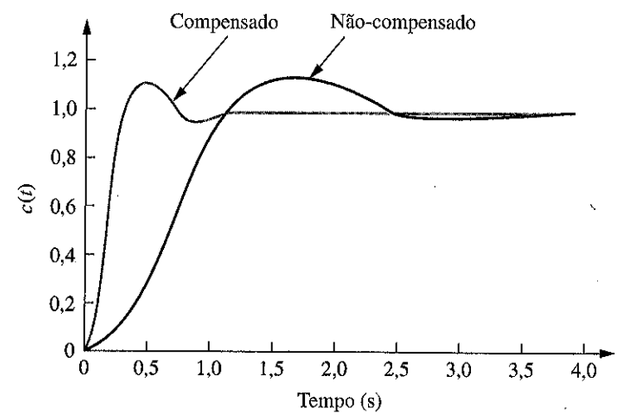


Fig. 9.22 Respostas ao degrau do sistema não-compensado e do sistema compensado do Exemplo 9.3

Os resultados finais estão mostrados na Fig. 9.22, que compara o sistema não-compensado com o sistema compensado mais rápido.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap9p1 no Apêndice B. O MATLAB será usado para projetar um controlador PD. Você entrará, através do teclado, com o valor desejado para a ultrapassagem percentual. O MATLAB traçará o gráfico do lugar das raízes do sistema não-compensado e a reta de ultrapassagem percentual. Você selecionará de forma interativa o ganho com base no qual o MATLAB exibirá as características de desempenho do sistema não-compensado e traçará a resposta ao degrau correspondente. Usando essas características, você entrará com o tempo de assentamento desejado. O MATLAB projetará o controlador PD, enumerará as características de desempenho correspondentes e traçará uma resposta ao degrau. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 9.3.

Uma vez decidida a localização do zero de compensação, como implementar o controlador derivativo ideal ou controlador PD? O compensador integral ideal que melhorou o erro de estado estacionário foi implementado com um controlador proporcional e integral (PI). O compensador derivativo ideal usado para melhorar a resposta transitória é implementado com um controlador proporcional e derivativo (PD). Por exemplo, na Fig. 9.23, a função de transferência do controlador é

$$G_c(s) = K_2 s + K_1 = K_2\left(s + \frac{K_1}{K_2}\right) \tag{9.17}$$

Portanto, K_1/K_2 é escolhido igual ao negativo do zero do compensador, e K_2 é escolhido para contribuir com o valor de ganho de malha necessário. Mais adiante neste capítulo estudaremos os circuitos que podem ser usados para aproximar a derivação e produzir ganho.

Embora o compensador derivativo ideal possa melhorar a resposta transitória do sistema, ele apresenta duas dificuldades. Primeiramente, requer um circuito ativo para efetuar a derivação. Segundo, a derivação é um procedimento ruidoso. O nível de ruído é baixo, mas a freqüência do ruído é alta em comparação com a do sinal. A derivação de altas freqüências pode levar a sinais de grande amplitude indesejáveis ou à saturação de amplificadores e de outros componentes. O compensador por avanço de fase é uma estrutura passiva usada para superar as desvantagens da derivação ideal e ainda conservar a capacidade de melhorar a resposta transitória.

Compensação por Avanço de Fase

Do mesmo modo que um compensador integral ideal pode ser aproximado por uma estrutura passiva de atraso de fase, um compensador derivativo ideal pode ser aproximado por um compensador por avanço de fase passivo.

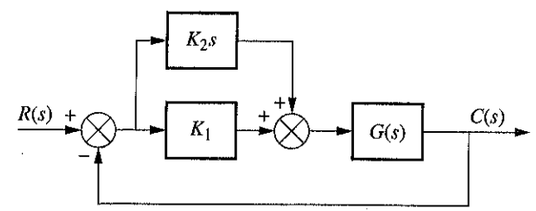


Fig. 9.23 Controlador PD

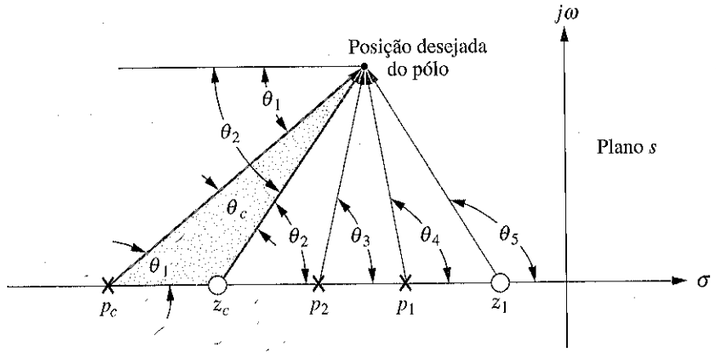


Fig. 9.24 Geometria da compensação por avanço de fase

Quando se utilizam estruturas passivas, não é possível produzir um zero simples; em vez disso, resultam um zero e um pólo do compensador. Contudo, se o pólo estiver situado muito mais longe do eixo imaginário que o zero, a contribuição angular do compensador é ainda positiva e portanto aproxima um zero simples equivalente. Em outras palavras, a contribuição angular do pólo do compensador é subtraída da contribuição angular do zero mas não impede o uso do compensador para melhorar a resposta transitória, uma vez que a contribuição angular líquida é positiva, exatamente como faz o zero de um controlador PD simples.

As vantagens de uma estrutura de avanço de fase passiva em relação a um controlador PD ativo são: (1) não há necessidade de fontes de alimentação adicionais e (2) o ruído devido à derivação é reduzido. A desvantagem é que o pólo adicional não reduz o número de ramos do lugar das raízes que cruzam o eixo imaginário para o semiplano da direita, enquanto a inclusão de um zero simples do controlador PD tende a reduzir o número de ramos do lugar de raízes que passam para o semiplano da direita.

Vejamos primeiro o conceito implícito na compensação por avanço de fase. Se selecionarmos no plano s um pólo dominante de segunda ordem desejado, a soma dos ângulos dos pólos e zeros do sistema não-compensado para o ponto do projeto pode ser determinada. A diferença entre 180° e a soma dos ângulos deve ser a contribuição angular requerida do compensador.

Por exemplo, olhando a Fig. 9.24, vemos que

$$\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 = (2k + 1)180° \tag{9.18}$$

onde $(\theta_2 - \theta_1) = \theta_c$ é a contribuição angular do compensador por avanço de fase. Com base na Fig. 9.24 vemos que θ_c é o ângulo do segmento de reta traçado a partir do ponto do projeto e interceptando o eixo real no valor do pólo e no valor do zero do compensador. Agora, visualize este segmento de reta girando ao redor da localização do pólo a malha fechada desejado e interceptando o eixo real no pólo e no zero do compensador, conforme ilustrado na Fig. 9.25. Percebemos que poderia ser usado um número infinito de compensadores por avanço de fase para atender o requisito da resposta transitória.

Em que diferem os possíveis compensadores por avanço de fase? As diferenças estão nos valores das constantes de erro estático, no ganho necessário para alcançar o ponto de projeto no lugar de raízes compensado, na dificuldade em justificar uma aproximação de segunda ordem quando o projeto estiver completo e na resposta transitória resultante.

No projeto, selecionamos arbitrariamente ou o pólo ou o zero do compensador por avanço de fase e determinamos a contribuição angular no ponto de projeto deste pólo ou zero juntamente com os pólos e zeros do sistema de malha aberta. A diferença entre este ângulo e 180° é a contribuição requerida do pólo ou zero restante do compensador. Vejamos um exemplo.

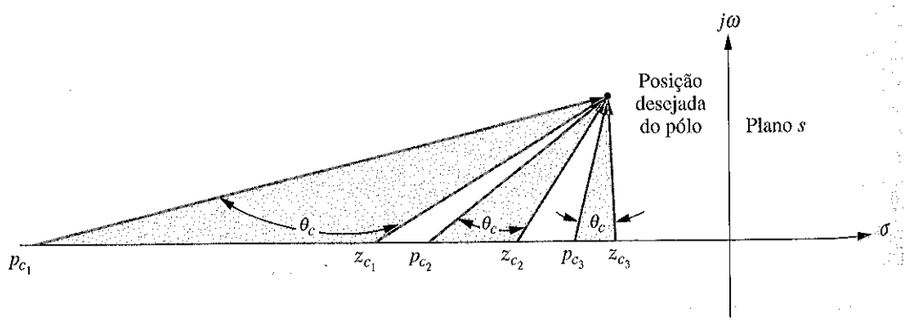


Fig. 9.25 Três dentre uma infinidade de possíveis soluções de compensador por avanço de fase

Exemplo 9.4

Projeto de compensador por avanço de fase

Problema Projetar três compensadores por avanço de fase para o sistema da Fig. 9.17 visando reduzir o tempo de assentamento à metade, mantendo a ultrapassagem percentual de 30%. Comparar as características de sistema dos três projetos.

Solução Primeiro, determine as características do sistema não-compensado operando com uma ultrapassagem percentual de 30% para ver qual o tempo de assentamento. Como a ultrapassagem percentual de 30% é equivalente a uma relação de amortecimento de 0,358, procuramos ao longo da reta de $\zeta = 0{,}358$ a condição para obter o pólo dominante não-compensado no lugar das raízes, conforme mostrado na Fig. 9.26. Com base na parte real do pólo, calculamos o tempo de assentamento não-compensado como sendo $T_s = 4/1{,}007 = 3{,}972$ s. As características restantes do sistema não-compensado estão resumidas na Tabela 9.4.

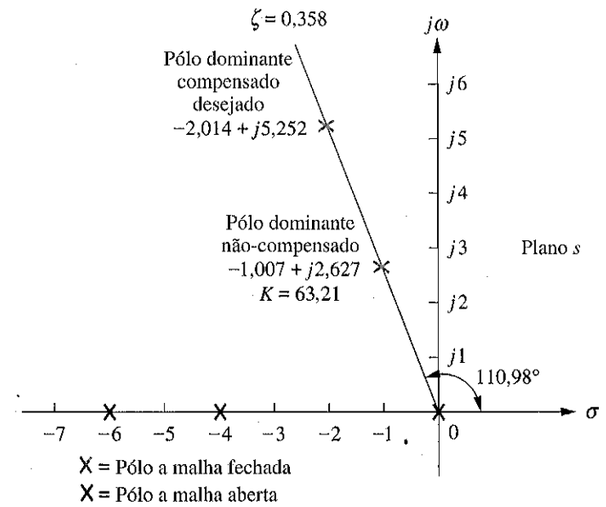


Fig. 9.26 Projeto de compensador de avanço de fase, mostrando o cálculo de pólos dominantes compensados e não-compensados para o Exemplo 9.4

Em seguida, determinamos o ponto de projeto. Uma redução pela metade no valor do tempo de assentamento leva a $T_S = 3{,}972/2 = 1{,}986$ s, com a parte real da localização do pólo desejado em $-\zeta\omega_n = -4/T_s = -2{,}014$. A parte imaginária é $\omega_d = -2{,}014 \text{ tg } (110{,}98°) = 5{,}252$.

Continuamos projetando o compensador por avanço de fase. Admitimos arbitrariamente um zero do compensador em −5 no eixo real como uma solução possível. Usando o programa de lugar das raízes, some os ângulos deste zero e dos pólos e zeros do sistema não-compensado, usando o ponto de projeto como ponto de teste. O ângulo

Tabela 9.4 Comparação dos projetos por avanço de fase do Exemplo 9.4

	Não-compensado	Compensação a	Compensação b	Compensação c
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K}{s(s+4)(s+6)}$	$\dfrac{K(s+5)}{s(s+4)(s+6)(s+42{,}96)}$	$\dfrac{K(s+4)}{s(s+4)(s+6)(s+20{,}09)}$	$\dfrac{K(s+2)}{s(s+4)(s+6)(s+8{,}971)}$
Pólos dominantes	$-1{,}007 \pm j2{,}627$	$-2{,}014 \pm j5{,}252$	$-2{,}014 \pm j5{,}252$	$-2{,}014 \pm j5{,}252$
K	63,21	1423	698,1	345,6
ζ	0,358	0,358	0,358	0,358
ω_n	2,813	5,625	5,625	5,625
$\%UP$	30 (28)	30 (30,7)	30 (28,2)	30 (14,5)
T_s	3,972 (4)	1,986 (2)	1,986 (2)	1,986 (1,7)
T_p	1,196 (1,3)	0,598 (0,6)	0,598 (0,6)	0,598 (0,7)
K_v	2,634	6,9	5,791	3,21
$e(\infty)$	0,380	0,145	0,173	0,312
Outros pólos	−7,986	−43,8, −5,134	−22,06	−13,3, −1,642
Zero	Nenhum	−5	Nenhum	−2
Comentários	Aprox. de 2.ª ordem OK	Aprox. de 2.ª ordem OK	Aprox. de 2.ª ordem OK	Nenhum cancelamento de pólo zero

Nota: Os resultados da simulação são mostrados entre parênteses.

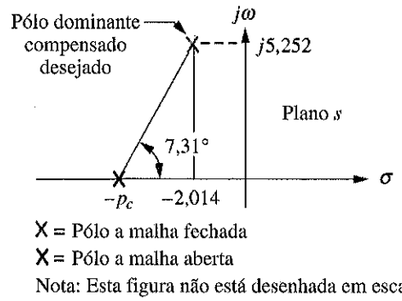


Fig. 9.27 Diagrama no plano *s* usado para calcular a localização do pólo do compensador para o Exemplo 9.4

resultante é $-172{,}69°$. A diferença entre este ângulo e 180° é a contribuição angular requerida pelo pólo do compensador para que o ponto de projeto desejado esteja no lugar das raízes. Portanto, é requerida pelo pólo do compensador uma contribuição angular de $-7{,}31°$.

A geometria mostrada na Fig. 9.27 é usada para calcular a localização do pólo do compensador. Com base na figura,

$$\frac{5{,}252}{p_c - 2{,}014} = \text{tg } 7{,}31° \tag{9.19}$$

na qual o pólo do compensador é

$$p_c = 42{,}96 \tag{9.20}$$

O sistema de lugar de raízes compensado é esboçado na Fig. 9.28.

Para justificar as estimativas de percentual de ultrapassagem e de tempo de assentamento, devemos mostrar que a aproximação de segunda ordem é válida. Para executar esta verificação, procuramos o terceiro e o quarto pólos a malha fechada além de $-42{,}96$ e entre -5 e -6 na Fig. 9.28. Pesquisando estas regiões para o ganho igual ao do pólo dominante compensado, 1423, achamos que o terceiro e quarto pólos estão em $-43{,}8$ e $-5{,}134$, respectivamente. Uma vez que $-43{,}8$ é maior que 20 vezes a parte real do pólo dominante, o efeito do terceiro pólo a malha fechada é insignificante. Como o pólo a malha fechada em $-5{,}134$ está próximo ao zero em -5, temos cancelamento de pólo com zero, e a aproximação de segunda ordem é válida.

Todos os resultados para este e outros dois projetos, os quais posicionam arbitrariamente o zero do compensador em -2 e em -4 e seguem técnicas de projeto semelhantes, estão resumidos na Tabela 9.4. Cada projeto deve ser verificado por uma simulação, a qual consistiria do uso do MATLAB (discutido no final deste exemplo) ou do modelo no espaço de estados e do programa de resposta ao degrau discutido no Apêndice H.1 no CD-ROM que acompanha o livro. Executamos uma simulação deste problema de projeto, e os resultados são mostrados, entre parênteses, na tabela ao lado dos valores estimados. O único projeto em desacordo com a simulação é o caso no qual o zero do compensador está em -2. Para este caso, o pólo e o zero a malha fechada não se cancelam.

Um esboço do lugar das raízes, que você deve fazer, mostra por que o efeito do zero é pronunciado, fazendo com que a resposta seja diferente da prevista. A colocação do zero à direita do pólo em -4 cria um trecho do lugar das raízes entre a origem e o zero. Em outras palavras, existe um pólo de malha fechada mais próximo à origem do que os pólos dominantes, com uma pequena chance do cancelamento de pólo com zero, exceto para valores elevados de ganho. Assim, um rápido esboço do lugar das raízes nos dá informações a partir das quais podemos tomar

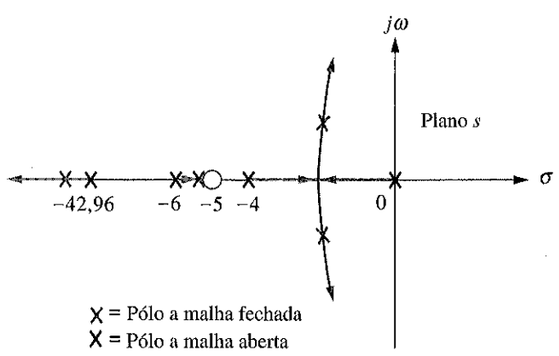


Fig. 9.28 Lugar das raízes do sistema compensado

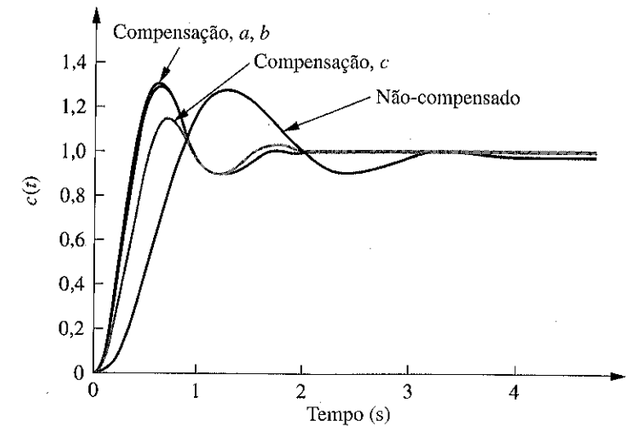


Fig. 9.29 Respostas dos sistemas não-compensado e com compensação por avanço de fase para o Exemplo 9.4

melhores decisões. Neste exemplo, queremos colocar o zero sobre o pólo em -4 ou à esquerda dele, o que oferece melhor chance de cancelamento do pólo com zero e de um pólo de maior ordem que está à esquerda do pólo dominante e, subseqüentemente, mais rápido. Isto é verificado pelo fato de nossos resultados mostrarem boas aproximações de segunda ordem nos casos onde o zero é colocado em -4 e em -5. Uma vez mais, decisões sobre onde colocar o zero são baseadas em regras práticas simples e devem ser verificadas por meio de simulações ao final do projeto.

Resumamos agora os resultados mostrados na Tabela 9.4. Primeiramente, observamos diferenças nos seguintes pontos:

1. A posição do zero selecionado arbitrariamente
2. O quanto de melhoria no erro de estado estacionário
3. O quanto de ganho necessário, K
4. A posição do terceiro e quarto pólos e seus efeitos relativos sobre a aproximação de segunda ordem. Este efeito é medido pela distância entre os pólos dominantes ou pelo grau de cancelamento com o zero a malha fechada.

Tendo a simulação verificado o desempenho desejado, a escolha da compensação pode ser baseada no valor de ganho necessário ou na melhoria do erro de estado estacionário que pode ser obtida sem um compensador por atraso de fase.

Os resultados da Tabela 9.4 são confirmados por simulações da resposta ao degrau mostradas na Fig. 9.29 para o sistema não-compensado e as soluções dos três compensadores por avanço de fase.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap9p2 no Apêndice B. O MATLAB será usado para projetar um compensador por avanço de fase. Você entrará, através do teclado, com o valor desejado para a ultrapassagem percentual. O MATLAB traçará o gráfico do lugar das raízes do sistema não-compensado e a reta de ultrapassagem percentual. Você selecionará de forma interativa o ganho, depois do que o MATLAB exibirá as características de desempenho do sistema não-compensado e traçará sua resposta ao degrau. Usando estas características, você entrará com o tempo de assentamento desejado e o valor do zero relativo ao compensador por avanço de fase. Você selecionará então de forma interativa um valor para o pólo do compensador. O MATLAB responderá com um lugar das raízes. Você pode então continuar selecionando valores de pólos até que o lugar das raízes passe pelo ponto desejado. O MATLAB mostrará o compensador por avanço de fase, enumerará suas características de desempenho e traçará uma resposta ao degrau. Este exercício soluciona o Exemplo 9.4 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 9.2

Problema: Um sistema com retroação unitária com uma função de transferência no percurso à frente

$$G(s) = \frac{K}{s(s+7)}$$

está operando com uma resposta a malha fechada ao degrau que apresenta uma ultrapassagem percentual de 15%. Faça o seguinte:

a. Calcule tempo de assentamento.
b. Projete um compensador por avanço de fase para reduzir a um terço o tempo de assentamento. Escolha o zero do compensador em -10.

Respostas:

a. $T_s = 1{,}143$ s

b. $G_{\text{avanço}}(s) = \dfrac{s+10}{s+25{,}52}$, $K = 476{,}3$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

9.4 Melhorando o Erro de Estado Estacionário e a Resposta Transitória

Combinaremos agora as técnicas de projeto já vistas nas Seções 9.2 e 9.3 para obter melhoria no erro de estado estacionário e na resposta transitória *de forma independente*. Basicamente, melhoramos primeiro a resposta transitória usando métodos da Seção 9.3. Em seguida melhoramos o erro de estado estacionário deste sistema compensado aplicando os métodos da Seção 9.2. Uma desvantagem desta abordagem é a pequena queda na velocidade da resposta ao se melhorar o erro de estado estacionário.

Como alternativa, podemos melhorar o erro de estado estacionário primeiro e então seguir com o projeto para melhorar a resposta transitória. Uma desvantagem desta abordagem é que a melhoria na resposta transitória em alguns casos produz deterioração na melhoria do erro de estado estacionário, que foi projetado primeiro. Em outros casos, a melhoria na resposta transitória produz melhoria adicional nos erros de estado estacionário. Assim, um sistema pode ser projetado em excesso com relação aos erros de estado estacionário. Projetar em excesso não é usualmente um problema, a não ser que isto cause impacto sobre o custo ou produza outros problemas de projeto. Neste livro, primeiro projetamos a resposta transitória e depois fazemos o projeto visando ao erro de estado estacionário.

O projeto pode usar tanto compensadores ativos quanto compensadores passivos, como descrito anteriormente. Se projetarmos um controlador ativo PD seguido de um controlador ativo PI, o compensador resultante será chamado de *controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)*. Se projetarmos primeiro um compensador por avanço de fase passivo e então projetarmos um compensador por atraso de fase passivo, o compensador resultante será chamado de *compensador por atraso e avanço de fase*.

Projeto do Controlador PID

Um controlador PID está mostrado na Fig. 9.30. Sua função de transferência é

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_1 s + K_2 + K_3 s^2}{s} = \frac{K_3\left(s^2 + \dfrac{K_1}{K_3}s + \dfrac{K_2}{K_3}\right)}{s} \tag{9.21}$$

que tem dois zeros mais um pólo na origem. Um zero e o pólo na origem podem ser projetados como o compensador integral ideal; o outro zero pode ser projetado como o compensador derivativo ideal.

A técnica de projeto, demonstrada no Exemplo 9.5, consiste nos seguintes passos:

1. Calcular o desempenho do sistema não-compensado para determinar quanto de melhoria é requerido na resposta transitória.
2. Projetar o controlador PD para atender as especificações da resposta transitória. O projeto inclui a localização do zero e a determinação do ganho de malha.
3. Simular o sistema para se certificar de que todos os requisitos tenham sido atendidos.
4. Reprojetar se a simulação mostrar que os requisitos não foram atendidos.
5. Projetar o controlador PI para produzir o erro de estado estacionário desejado.
6. Determinar os ganhos, K_1, K_2 e K_3, na Fig. 9.30.
7. Simular o sistema para se certificar de que todas os requisitos foram atendidos.
8. Reprojetar se a simulação mostrar que as exigências não foram atendidas.

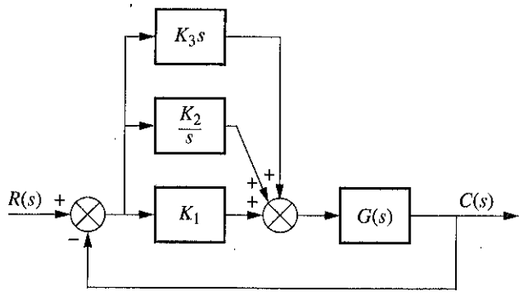


Fig. 9.30 Controlador PID

Exemplo 9.5

Projeto do controlador PID

Problema Dado o sistema da Fig. 9.31, projete um controlador PID de modo que o sistema possa operar com um tempo de pico cujo valor seja dois terços do valor relativo ao sistema não-compensado com ultrapassagem percentual de 20% e com erro de estado estacionário nulo para uma entrada degrau.

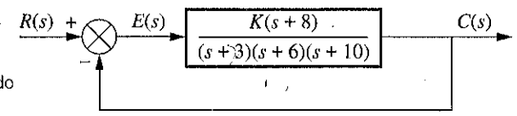


Fig. 9.31 Sistema de controle com retroação não-compensado para o Exemplo 9.5

Solução Observe que nossa solução segue o procedimento de oito passos descrito anteriormente.

Passo 1 Calculemos primeiro o sistema não-compensado operando com uma ultrapassagem percentual de 20%. Pesquisando ao longo da reta de 20% ($\zeta = 0{,}456$) na Fig. 9.32, obtemos os pólos dominantes $-5{,}415 \pm j10{,}57$ com um ganho de 121,5. Um terceiro pólo, que existe em $-8{,}169$, é encontrado pesquisando-se a região entre -8 e -10 para um ganho equivalente ao dos pólos dominantes. O desempenho completo do sistema não-compensado é mostrado na primeira coluna da Tabela 9.5, onde comparamos os valores calculados com os obtidos através da simulação (Fig. 9.35). Estimamos que o sistema não-compensado tenha um tempo de pico de 0,297 s e uma ultrapassagem percentual de 20%.

Passo 2 Para compensar o sistema objetivando reduzir o tempo de pico para dois terços do sistema não-compensado, primeiro devemos encontrar a localização dos pólos dominantes do sistema compensado. A parte imaginária do pólo dominante compensado é

$$\omega_d = \frac{\pi}{T_p} = \frac{\pi}{(2/3)(0{,}297)} = 15{,}87 \tag{9.22}$$

Portanto, a parte real do pólo dominante compensado é

$$\sigma = \frac{\omega_d}{\text{tg}117{,}13°} = -8{,}13 \tag{9.23}$$

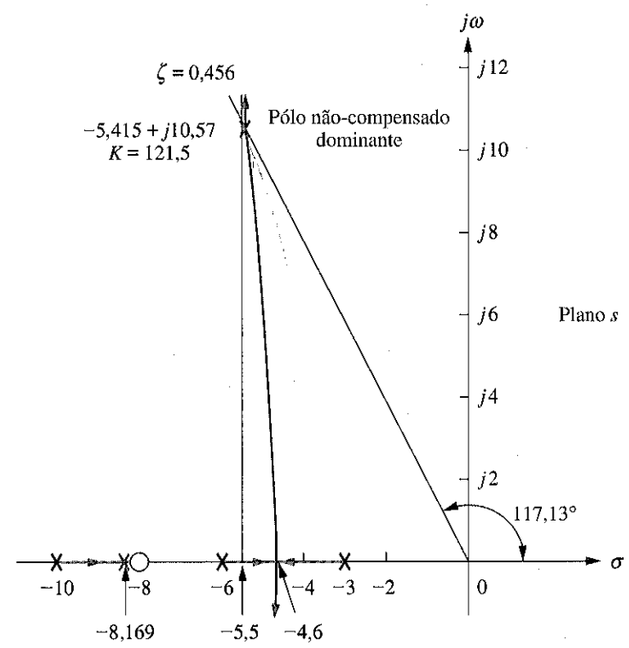


Fig. 9.32 Lugar das raízes para o sistema não-compensado do Exemplo 9.5

Tabela 9.5 Características previstas dos sistemas não-compensados, compensados com PD e compensados com PID do Exemplo 9.5

	Não-compensado	Compensado com PD	Compensado com PID
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K(s+8)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$	$\dfrac{K(s+8)(s+55{,}92)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$	$\dfrac{K(s+8)(s+55{,}92)(s+0{,}5)}{(s+3)(s+6)(s+10)s}$
Pólos dominantes	$-5{,}415 \pm j10{,}57$	$-8{,}13 \pm j15{,}87$	$-7{,}516 \pm j14{,}67$
K	121,5	5,34	4,6
ζ	0,456	0,456	0,456
ω_n	11,88	17,83	16,49
$\%UP$	20	20	20
T_s	0,739	0,492	0,532
T_p	0,297	0,198	0,214
K_p	5,4	13,27	∞
$e(\infty)$	0,156	0,070	0
Outros pólos	$-8{,}169$	$-8{,}079$	$-8{,}099$, $-0{,}468$
Zeros	-8	-8, $-55{,}92$	-8, $-55{,}92$, $-0{,}5$
Comentários	Aproximação de 2.ª ordem OK	Aproximação de 2.ª ordem OK	Zero em $-55{,}92$ e $-0{,}5$ não cancelados

A seguir, projetamos o compensador. Usando a geometria mostrada na Fig. 9.33, calculamos a localização do zero de compensação. Com o programa de lugar das raízes, determinamos a soma da contribuição angular dos pólos e zeros do sistema não-compensado no pólo dominante desejado que é igual a $-198{,}37°$. Desta maneira, a contribuição requerida do zero do compensador é $180° - (-198{,}37°) = 18{,}37°$. Suponha que o zero do compensador esteja localizado em $-z_c$, como mostrado na Fig. 9.33. Uma vez que

$$\frac{15{,}87}{z_c - 8{,}13} = \operatorname{tg} 18{,}37° \tag{9.24}$$

então

$$z_c = 55{,}92 \tag{9.25}$$

Assim, o controlador PD é

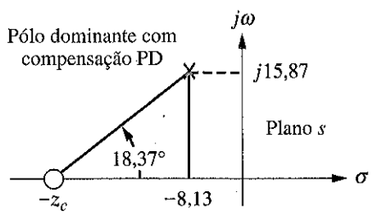
$$G_{PD}(s) = (s + 55{,}92) \tag{9.26}$$

O lugar das raízes completo para o sistema compensado PD está esboçado na Fig. 9.34. Usando um programa de lugar das raízes, o ganho para o ponto desejado é 5,34. As especificações completas relativas à compensação derivativa ideal estão mostradas na terceira coluna da Tabela 9.5.

Passos 3 e 4 Simulamos o sistema compensado PD, como mostrado na Fig. 9.35. Vemos a redução do tempo de pico e a melhoria do erro de estado estacionário em relação ao sistema não-compensado.

Passo 5 Depois de projetar o controlador PD, projetamos o compensador integral ideal para reduzir a zero o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau. Qualquer zero compensador integral ideal funcionará, desde que o zero esteja colocado próximo da origem. Escolhendo o compensador integral ideal como sendo

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0{,}5}{s} \tag{9.27}$$

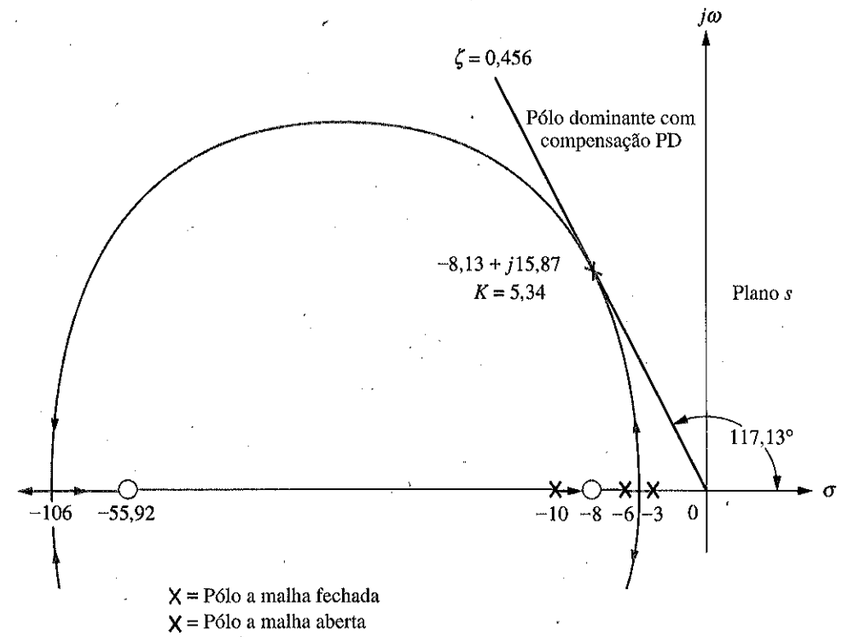


X = Pólo a malha fechada

Nota: Esta figura não está desenhada em escala.

Fig. 9.33 Calculando o zero do compensador PD para o Exemplo 9.5

Fig. 9.34 Lugar das raízes para o sistema compensado PD do Exemplo 9.5



Nota: Esta figura não está desenhada em escala.

esboçamos o lugar das raízes para o sistema compensado com o PID, como mostrado na Fig. 9.36. Pesquisando a reta de relação de amortecimento de 0,456, determinamos os pólos de segunda ordem dominantes como sendo $-7{,}516 \pm j14{,}67$, com um ganho associado de 4,6. As características restantes para o sistema compensado com PID estão resumidas na quarta coluna da Tabela 9.5.

Passo 6 Determinamos agora os ganhos K_1, K_2 e K_3 na Fig. 9.30. Pelas Eqs. (9.26) e (9.27), o produto do ganho e do controlador PID é

$$G_{PID}(s) = \frac{K(s + 55{,}92)(s + 0{,}5)}{s} = \frac{4{,}6(s + 55{,}92)(s + 0{,}5)}{s}$$
$$= \frac{4{,}6(s^2 + 56{,}42s + 27{,}96)}{s} \tag{9.28}$$

Combinando as Eqs. (9.21) e (9.28), $K_1 = 259{,}5$, $K_2 = 128{,}6$ e $K_3 = 4{,}6$.

Passos 7 e 8 Retornando à Fig. 9.35, resumimos os resultados de nosso projeto. A compensação PD melhorou a resposta transitória reduzindo o tempo necessário para alcançar o primeiro pico bem como produzindo algu-

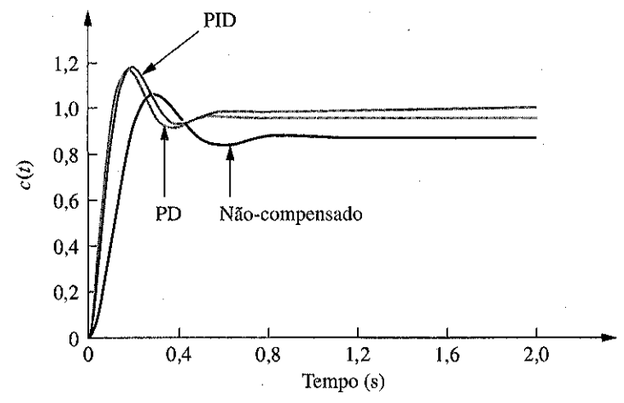


Fig. 9.35 Respostas ao degrau para sistemas não-compensado, compensado com PD e compensado com PID do Exemplo 9.5

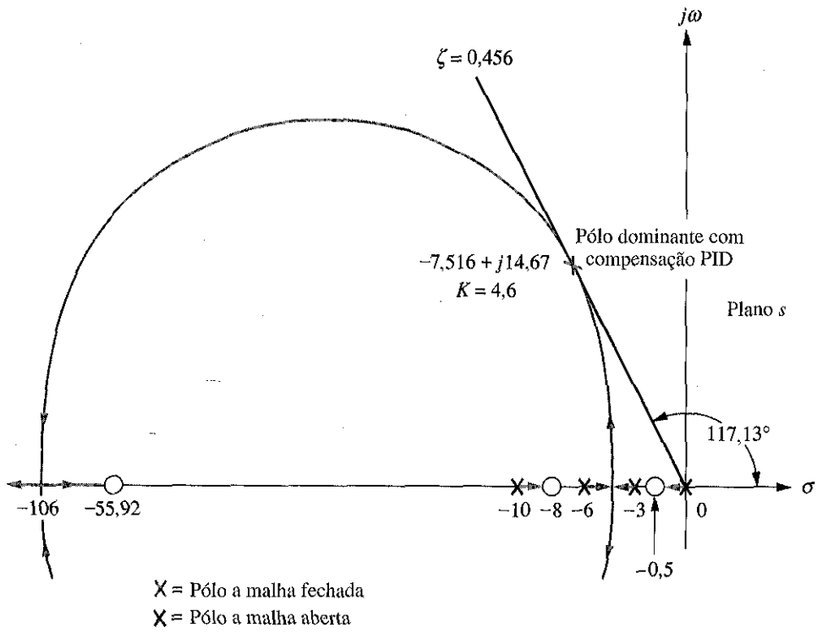


Fig. 9.36 Lugar das raízes para sistema compensado com PID do Exemplo 9.5

Nota: Esta figura não está desenhada em escala.

ma melhoria no erro de estado estacionário. O controlador PID completo melhorou, além disso, o erro de estado estacionário sem que, sensivelmente, mudasse a resposta transitória projetada com o controlador PD. Como mencionado anteriormente, o controlador PID apresenta uma resposta mais lenta, alcançando o valor final unitário em aproximadamente 3 s. Se isto for indesejado, a velocidade do sistema deve ser aumentada reprojetando-se o compensador derivativo ideal ou movendo-se o zero do controlador PI para mais longe da origem. A simulação desempenha um importante papel neste tipo de projeto, uma vez que a equação deduzida para o tempo de assentamento não é aplicável para esta parte da resposta, onde existe uma correção mais lenta do erro de estado estacionário.

Projeto do Compensador por Atraso e Avanço de Fase

No exemplo anterior, combinamos em série os conceitos de compensação derivativa ideal e integral ideal para chegar ao projeto de um controlador PID que melhorou o desempenho tanto da resposta transitória quanto do erro de estado estacionário. No próximo exemplo, melhoraremos a resposta transitória e o erro de estado estacionário usando um compensador por avanço de fase e um compensador por atraso de fase em vez de um PID ideal. Nosso compensador é chamado *compensador por atraso e avanço de fase*.

Primeiro, projetamos um compensador por avanço de fase para melhorar a resposta transitória. Depois, calculamos a melhoria no erro de estado estacionário que ainda seja necessária. Finalmente, projetamos o compensador por atraso de fase para atender a exigência do erro de estado estacionário. Adiante, neste capítulo, mostraremos os projetos de circuitos para estruturas passivas. Os seguintes passos resumem o procedimento de projeto.

1. Calcular o desempenho do sistema não-compensado para determinar quanto de melhoria na resposta transitória é necessária.
2. Projetar o compensador por avanço de fase para obter as especificações da resposta transitória. O projeto inclui a localização do zero, a localização do pólo e o ganho da malha.
3. Simular o sistema para certificar-se de que todas as exigências foram atendidas.
4. Reprojetar se a simulação mostrar que as exigências não foram atendidas.
5. Calcular o desempenho do erro de estado estacionário relativo ao sistema compensado por avanço de fase, para determinar qual a melhoria adicional necessária no erro de estado estacionário.
6. Projetar o compensador por atraso de fase para produzir o erro de estado estacionário requerido.
7. Simular o sistema para se certificar de que todas as exigências foram atendidas.
8. Reprojetar se a simulação mostrar que as exigências não foram atendidas.

Exemplo 9.6

Projeto do compensador por atraso e avanço de fase

Problema Projetar um compensador por atraso e avanço de fase para o sistema da Fig. 9.37, de modo que o sistema opere com uma ultrapassagem percentual de 20% e uma redução à metade do tempo de assentamento. Além disso, o sistema compensado apresentará uma melhoria de dez vezes no erro de estado estacionário para uma entrada em rampa.

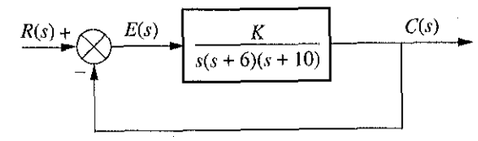


Fig. 9.37 Sistema não-compensado para o Exemplo 9.6

Solução Novamente, nossa solução segue os passos descritos anteriormente.

Passo 1 Primeiro, vamos calcular o desempenho do sistema não-compensado. Pesquisando ao longo da reta de ultrapassagem percentual de 20% ($\zeta = 0{,}456$) na Fig. 9.38, achamos os pólos dominantes em $-1{,}794 \pm j3{,}501$ com um ganho de 192,1. O desempenho do sistema não-compensado está resumido na Tabela 9.6.

Passo 2 Depois, começamos projetando o compensador por avanço de fase selecionando a localização dos pólos dominantes do sistema compensado. A fim de executar uma redução dupla no tempo de assentamento, a parte real do pólo dominante deve ser aumentada por meio de um fator de 2, uma vez que o tempo de assentamento é inversamente proporcional à parte real. Desta forma,

$$-\zeta\omega_n = -2(1{,}794) = -3{,}588 \tag{9.29}$$

A parte imaginária do ponto de projeto é

$$\omega_d = \zeta\omega_n \operatorname{tg} 117{,}13° = 3{,}588 \operatorname{tg} 117{,}13° = 7{,}003 \tag{9.30}$$

Agora projetamos o compensador por avanço de fase. Selecione arbitrariamente uma localização para o zero do compensador por avanço de fase. Para este exemplo selecionamos a localização do zero do compensador coincidente com o pólo da malha aberta a -6. Esta escolha eliminará um zero e deixará o sistema compensado por avanço de fase com três pólos, o mesmo número que o sistema não-compensado tem.

Completamos o projeto achando a localização do pólo do compensador. Usando o programa de lugar das raízes, some a contribuição angular no ponto de projeto dos pólos e zeros do sistema não-compensado e do zero do compensador e obtenha $-164{,}65°$. A diferença entre 180° e este valor é a contribuição angular requerida do pólo compensador, ou $-15{,}35°$. Usando a geometria mostrada na Fig. 9.39,

$$\frac{7{,}003}{p_c - 3{,}588} = \operatorname{tg} 15{,}35° \tag{9.31}$$

na qual a localização do pólo compensador, p_c, é determinada como $-29{,}1$.

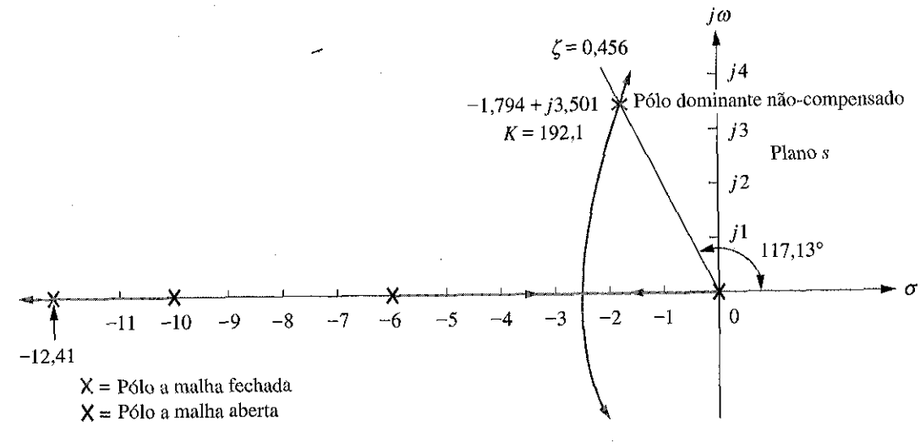


Fig. 9.38 Lugar das raízes para o sistema não-compensado do Exemplo 9.6

Tabela 9.6 Características previstas de sistemas não-compensados, compensados por avanço de fase e compensados por atraso e avanço de fase do Exemplo 9.6

	Não-compensado	Compensado por avanço de fase	Compensado por atraso e avanço de fase
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K}{s(s+6)(s+10)}$	$\dfrac{K}{s(s+10)(s+29{,}1)}$	$\dfrac{K(s+0{,}04713)}{s(s+10)(s+29{,}1)(s+0{,}01)}$
Pólos dominantes	$-1{,}794 \pm j3{,}501$	$-3{,}588 \pm j7{,}003$	$-3{,}574 \pm j6{,}976$
K	192,1	1977	1971
ζ	0,456	0,456	0,456
ω_n	3,934	7,869	7,838
$\%UP$	20	20	20
T_s	2,230	1,115	1,119
T_p	0,897	0,449	0,450
K_v	3,202	6,794	31,92
$e(\infty)$	0,312	0,147	0,0313
Terceiro pólo	−12,41	−31,92	−31,91, −0,0474
Zero	Nenhum	Nenhum	−0,04713
Comentários	Aproximação de 2.ª ordem OK	Aproximação de 2.ª ordem OK	Aproximação de 2.ª ordem OK

O lugar das raízes completo para o sistema compensado por avanço de fase está esboçado na Fig. 9.40. O ajuste de ganho para o ponto de projeto é 1977.

Passos 3 e 4 Verifique o projeto com uma simulação. O resultado para o sistema compensado por avanço de fase está mostrado na Fig. 9.42 e é satisfatório.

Passo 5 Continue projetando o compensador por atraso de fase para melhorar o erro de estado estacionário. Uma vez que a função de transferência a malha aberta do sistema não-compensado é

$$G(s) = \frac{192{,}1}{s(s+6)(s+10)} \tag{9.32}$$

a constante de erro estático, K_v, que é inversamente proporcional ao erro de estado estacionário, é 3,201. Uma vez que a função de transferência de malha aberta do sistema compensado por avanço de fase é

$$G_{LC}(s) = \frac{1977}{s(s+10)(s+29{,}1)} \tag{9.33}$$

a constante de erro estático, K_v, que é inversamente proporcional ao erro de estado estacionário, é 6,794. Portanto, a adição da compensação por avanço de fase melhorou o erro de estado estacionário por um fator de 2,122. Uma vez que as exigências do problema especificaram uma melhoria de dez vezes, o compensador por atraso de fase deve ser projetado para melhorar o erro de estado estacionário por um fator de 4,713 (10/2,122 = 4,713) em relação ao sistema compensado por avanço de fase.

Passo 6 Escolhemos arbitrariamente o pólo do compensador por atraso de fase em 0,01, o que coloca, então, o zero do compensador por atraso de fase em 0,04713, produzindo

$$G_{\text{atraso}}(s) = \frac{(s+0{,}04713)}{(s+0{,}01)} \tag{9.34}$$

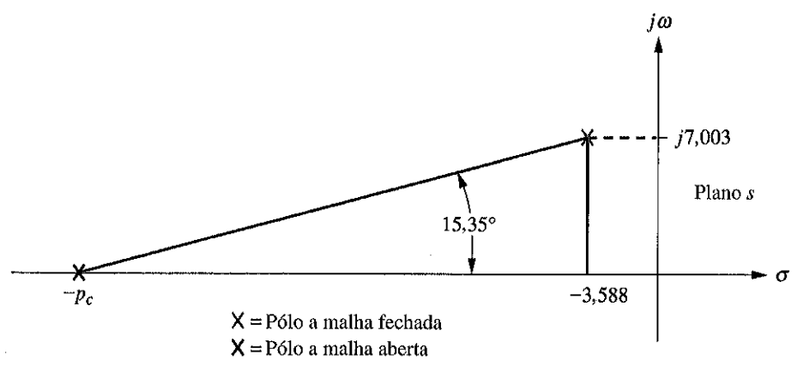
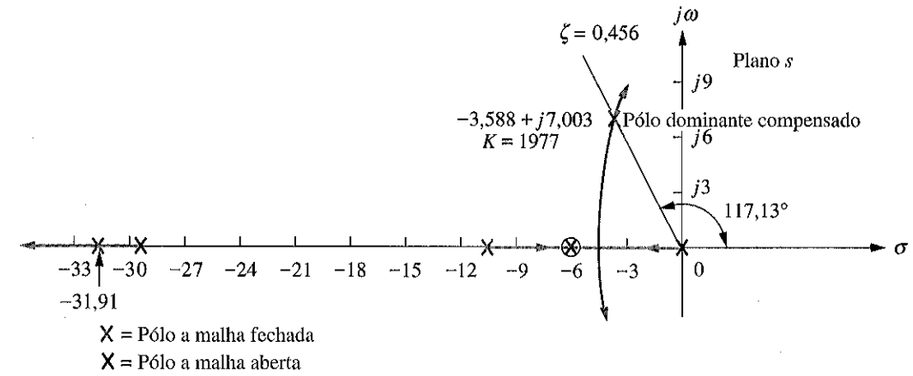


Fig. 9.39 Calculando o pólo compensado para o Exemplo 9.6

Fig. 9.40 Lugar das raízes para o sistema compensado por avanço de fase do Exemplo 9.6



como o compensador por atraso de fase. A função de transferência a malha aberta do sistema compensado por atraso e avanço de fase é

$$G_{\text{CAA}}(s) = \frac{K(s+0{,}04713)}{s(s+10)(s+29{,}1)(s+0{,}01)} \tag{9.35}$$

onde o pólo do sistema não-compensado em −6 cancelou o zero do compensador por avanço de fase em −6. Desenhando o lugar das raízes completo para o sistema compensado por atraso e avanço de fase e pesquisando ao longo da reta da relação de amortecimento 0,456, obtemos os pólos a malha fechada dominantes, em $-3{,}574 \pm j6{,}976$, com um ganho de 1971. O lugar das raízes do sistema compensado por atraso e avanço de fase está mostrado na Fig. 9.41.

Um resumo do nosso projeto está mostrado na Tabela 9.6. Observe que a compensação por atraso e avanço de fase aumentou realmente a velocidade do sistema, como demonstrado pelo tempo de assentamento ou pelo tempo de pico. O erro de estado estacionário para uma entrada em rampa também diminuiu por volta de 10 vezes, como visto com base em $e(\infty)$.

Passo 7 A prova final de nossos projetos está mostrada pelas simulações das Figs. 9.42 e 9.43. A melhoria na resposta transitória está mostrada na Fig. 9.42, onde vemos o tempo de pico ocorrendo mais cedo no sistema compensado por atraso e avanço de fase.

A melhoria no erro de estado estacionário para uma entrada em rampa é vista na Fig. 9.43, onde cada passo de nosso projeto resulta em uma maior melhoria. A melhoria para o sistema compensado por atraso e avanço de fase está mostrada na Fig. 9.43(*a*), e a melhoria final devida à adição do atraso de fase é mostrada na Fig. 9.43(*b*).

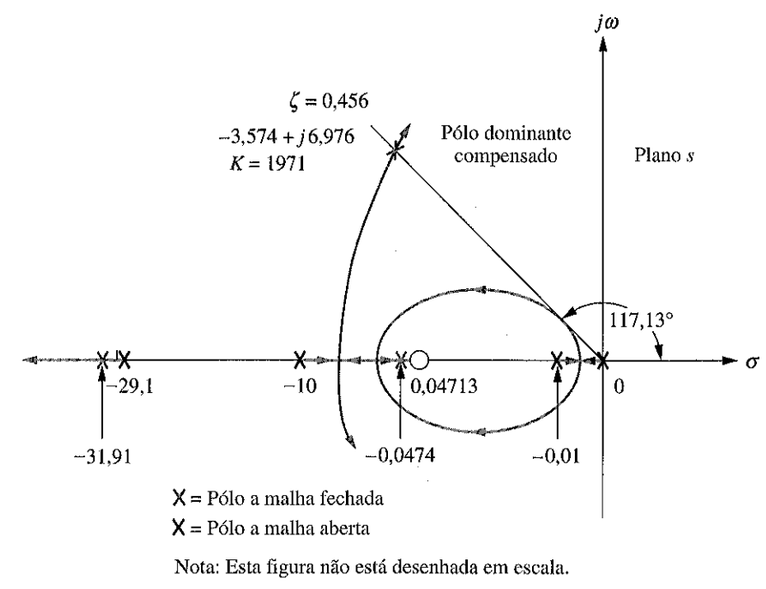


Fig. 9.41 Lugar das raízes para sistema compensado por atraso e avanço de fase do Exemplo 9.6

Nota: Esta figura não está desenhada em escala.

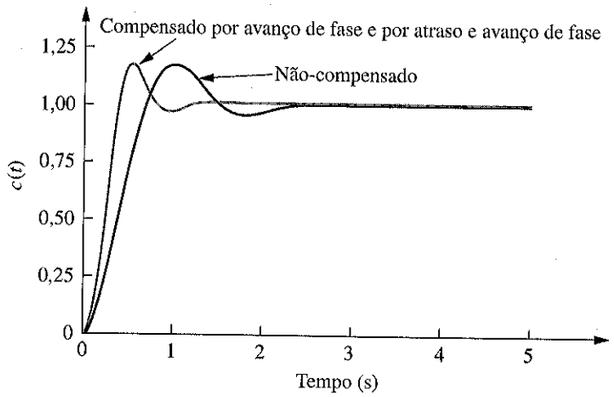
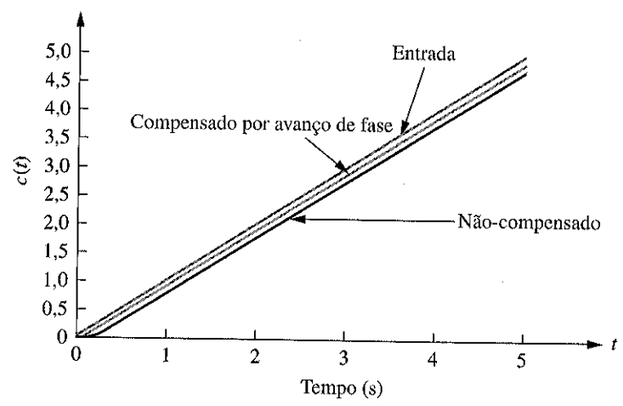
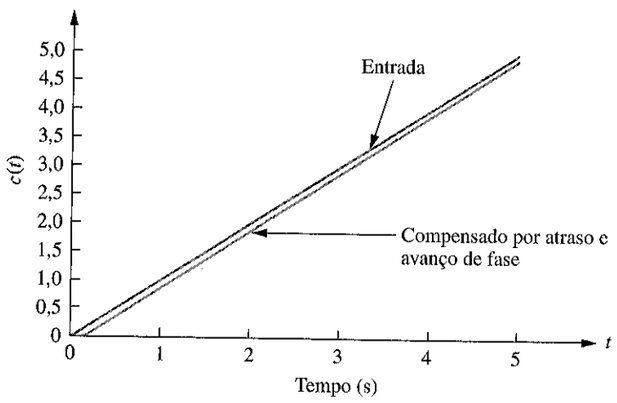


Fig. 9.42 Melhoria da resposta ao degrau para o sistema compensado por atraso e avanço de fase do Exemplo 9.6



(*a*)



(*b*)

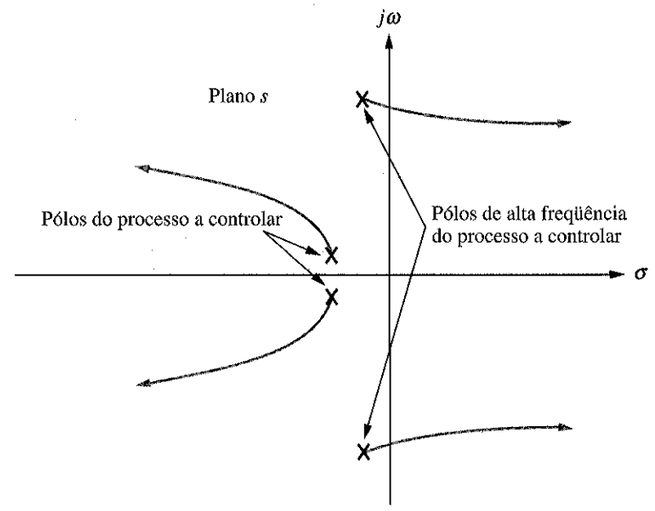
Fig. 9.43 Melhoria no erro de resposta à rampa para o sistema do Exemplo 9.6:
a. compensado por avanço de fase;
b. compensado por atraso e avanço de fase

No exemplo anterior, cancelamos o pólo do sistema em -6 com um zero do compensador por avanço de fase. A técnica de projeto é a mesma se você situar o zero do compensador por avanço de fase em uma localização diferente. Posicionar o zero em uma localização diferente e não cancelar o pólo a malha aberta resulta em um sistema com mais um pólo do que o exemplo. Este aumento de complexidade pode provocar maior dificuldade para justificar uma aproximação de segunda ordem. De qualquer forma, as simulações devem ser usadas a cada passo para verificar o desempenho.

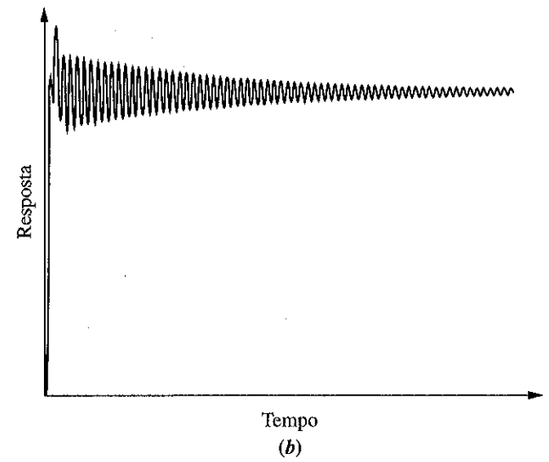
Filtro Supressor de Faixa (Notch)

Se um processo a controlar, tal como um sistema mecânico, apresentar modos de vibração de alta freqüência, pode ser difícil obter uma resposta a malha fechada desejada. Estes modos de vibração de alta freqüência podem ser modelados como parte de uma função de transferência do processo a controlar por pares de pólos complexos próximos do eixo imaginário. Em uma configuração de malha fechada, estes pólos podem se deslocar para mais perto do eixo imaginário ou até mesmo passar para o semiplano da direita, como mostrado na Fig. 9.44(*a*). Pode resultar instabilidade ou oscilações de alta freqüência superposta à resposta desejada (veja Fig. 9.44(*b*)).

Uma forma de eliminar as oscilações de alta freqüência é inserir em cascata um *supressor de faixa*[2] com o processo a controlar (Kuo, 1995), conforme mostrado na Fig. 9.44(*c*).



(*a*)

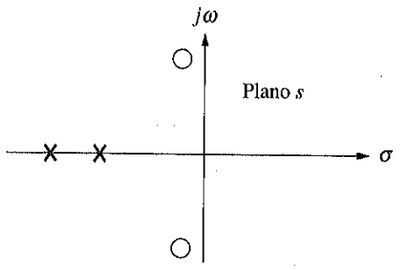


(*b*)

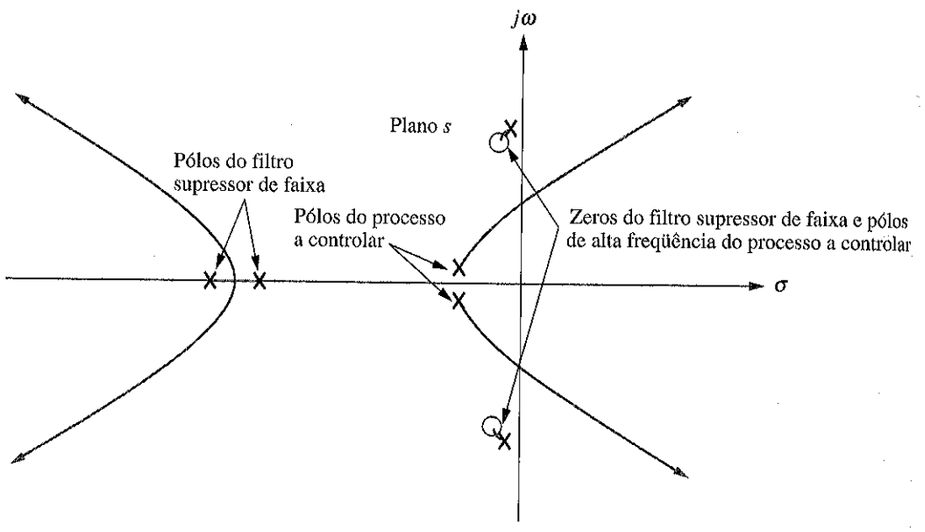
Fig. 9.44
a. Lugar das raízes antes da inserção de um filtro supressor de faixa;
b. resposta típica de um sistema a malha fechada ao degrau malha antes da inserção em cascata de um filtro supressor de faixa;
(continua)

[2]O nome deste filtro vem da forma da magnitude da característica da resposta de freqüência, que mostra uma queda abrupta de valor próximo da freqüência amortecida dos pólos de alta freqüência. A magnitude da resposta de freqüência será discutida no Cap. 10.

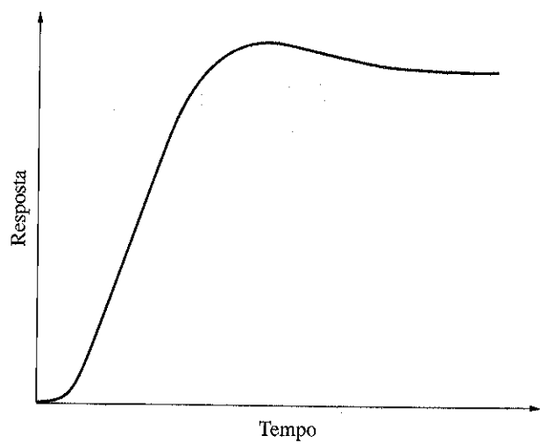
Fig. 9.44 (continuação)
c. diagrama de pólos e zeros de um filtro supressor de faixa;
d. lugar das raízes depois da inserção em cascata de um filtro supressor de faixa
e. resposta ao degrau a malha fechada depois da inserção em cascata de um filtro supressor de faixa



(c)



(d)



(e)

O supressor de faixa possui zeros próximos aos pólos de baixa relação de amortecimento do processo a controlar bem como dois pólos reais. A Fig. 9.44(*d*) mostra que o ramo do lugar das raízes que saem dos pólos de alta freqüência percorrem agora uma pequena distância do pólo de alta freqüência para o zero do supressor de faixa. A resposta de alta freqüência agora será insignificante por causa do cancelamento do pólo com zero (veja Fig. 9.44(*e*)). Outros compensadores em cascata podem agora ser projetados para produzir uma resposta desejada. O supressor de faixa será aplicado ao Problema Progressivo de Análise e Projeto ao final deste capítulo.

Exercício de Avaliação 9.3

Problema: Um sistema com retroação unitária com uma função de transferência no percurso à frente,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+7)}$$

está operando com uma resposta a malha fechada ao degrau que apresenta uma ultrapassagem percentual de 20%. Faça o seguinte:

a. Calcule o tempo de assentamento.
b. Calcule o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária.
c. Projete um compensador por atraso e avanço de fase para reduzir o tempo de assentamento à metade e diminuir em dez vezes o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária. Escolha o zero do compensador em -3.

Respostas:

a. $T_s = 1{,}143$ s
b. $e_{\text{rampa}}(\infty) = 0{,}1189$
c. $G_c(s) = \dfrac{(s+3)(s+0{,}092)}{(s+9{,}61)(s+0{,}01)}$, $K = 205{,}4$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Antes de concluir esta seção, vamos resumir brevemente nossa discussão sobre a compensação em cascata. Nas Seções 9.2, 9.3 e 9.4, usamos compensadores em cascata para melhorar a resposta transitória e o erro de estado estacionário. A Tabela 9.7 relaciona os tipos, funções e características desses compensadores.

9.5 Compensação por Retroação

Na Seção 9.4 usamos a compensação em cascata como um meio para melhorar a resposta transitória e a resposta de estado estacionário de modo independente. Inserir um compensador em cascata com o processo a controlar não é a única maneira de modificar a forma do lugar das raízes de modo a interceptar os pólos do plano s a malha fechada que produzem a resposta transitória desejada. Funções de transferência projetadas para serem inseridas no canal de retroação também podem alterar a forma do lugar das raízes. A Fig. 9.45 é uma configuração genérica mostrando um compensador, $H_c(s)$, colocado na *malha interna secundária* de um sistema de controle com retroação. Outras configurações surgem se considerarmos K unitário, $G_2(s)$ unitária, ou ambos unitários.

Os procedimentos de projeto para compensação por retroação podem ser mais complicados do que os da compensação em cascata. Por outro lado, a compensação por retroação pode produzir respostas mais rápidas. Em conseqüência, o engenheiro se dá o luxo de projetar respostas mais rápidas em partes de uma malha de controle a fim de prover isolação. Por exemplo, a resposta transitória dos *ailerons* e os sistemas de controle do leme de uma aeronave podem ser projetados separadamente para serem rápidos a fim de reduzir o efeito de sua resposta dinâmica na malha de controle de direção. A compensação por retroação pode ser usada nos casos em que problemas de ruído impedem o uso da compensação em cascata. Além disso, a compensação por retroação pode não necessitar de amplificação adicional, uma vez que o sinal que passa através do compensador se origina em uma saída de nível alto no canal à frente e é entregue a uma entrada de nível baixo no canal de ação à frente. Por exemplo, façamos K e $G_2(s)$ unitários na Fig. 9.45. A entrada do compensador por retroação, $K_fH_c(s)$ vem de uma saída de nível alto de $G_1(s)$ enquanto de $K_fH_c(s)$ é uma das entradas em nível baixo de K_1. Portanto, há uma redução no nível através de $K_fH_c(s)$, e usualmente não é necessária amplificação.

Um compensador por retroação muito comum é um sensor de velocidade que atua como derivador. Em aplicações em aeronaves e em embarcações, o sensor de velocidade pode ser um girômetro que fornece uma tensão de saída proporcional à velocidade angular de entrada. Em muitos outros sistemas este sensor de velocidade é implementado com um tacômetro. Um tacômetro é um gerador de tensão que produz uma tensão de saída pro-

Tabela 9.7 Tipos de compensadores em cascata

Função	Compensador	Função de transferência	Características
Melhora o erro de estado estacionário	PI	$K\dfrac{s+z_c}{s}$	1. Aumenta o tipo de sistema 2. O erro se torna nulo 3. O zero em $-z_c$ é pequeno e negativo 4. São necessários circuitos ativos para a implementação
Melhora o erro de estado estacionário	Atraso de fase	$K\dfrac{s+z_c}{s+p_c}$	1. Erro melhorado porém não reduzido a zero 2. O pólo em $-p_c$ é pequeno e negativo 3. O zero em $-z_c$ está próximo e à esquerda do pólo em $-p_c$ 4. São necessários circuitos ativos para a implementação
Melhora a resposta transitória	PD	$K(s+z_c)$	1. O zero em $-z_c$ é selecionado para colocar o ponto de projeto no lugar das raízes 2. São necessários circuitos ativos para a implementação 3. Pode ocasionar ruído e saturação; implementação com retroação de velocidade ou com um pólo (avanço de fase)
Melhora a resposta transitória	Avanço de fase	$K\dfrac{s+z_c}{s+p_c}$	1. O zero em $-z_c$ e o pólo em $-p_c$ são selecionados para colocar o ponto de projeto no lugar das raízes 2. O pólo em $-p_c$ é mais negativo que o pólo em $-z_c$ 3. São necessários circuitos ativos para a implementação
Melhora o erro de estado estacionário e a resposta transitória	PID	$K\dfrac{(s+z_{\text{atraso}})(s+z_{\text{avanço}})}{s}$	1. O zero de atraso de fase em $-z_{\text{atraso}}$ e o pólo na origem melhoram o erro de estado estacionário 2. O zero de avanço de fase em $-z_{\text{avanço}}$ melhora a resposta transitória 3. O zero de atraso de fase em $-z_{\text{atraso}}$ está próximo e à esquerda da origem 4. O zero de avanço de fase em $-z_{\text{avanço}}$ é escolhido para colocar o ponto de projeto no lugar das raízes 5. São necessários circuitos ativos para a implementação 6. Pode ocasionar ruído e saturação; implementação com retroação de velocidade ou com um pólo adicional
Melhora o erro de estado estacionário e a resposta transitória	Avanço e atraso de fase	$K\dfrac{(s+z_{\text{atraso}})(s+z_{\text{avanço}})}{(s+p_{\text{atraso}})(s+p_{\text{avanço}})}$	1. O pólo do atraso de fase em $-p_{\text{atraso}}$ e o zero em $-z_{\text{atraso}}$ são usados para melhorar o erro de estado estacionário 2. O pólo do avanço de fase em $-p_{\text{avanço}}$ e o zero em $-z_{\text{avanço}}$ são usados para melhorar a resposta transitória 3. O pólo do atraso de fase em $-p_{\text{atraso}}$ é pequeno e negativo 4. O zero do atraso de fase em $-z_{\text{atraso}}$ está próximo e à esquerda do pólo do atraso de fase em $-p_{\text{atraso}}$ 5. O zero de avanço de fase em $-z_{\text{avanço}}$ e o pólo do avanço de fase em $-p_{\text{avanço}}$ são selecionados para colocar o ponto de projeto no lugar das raízes 6. O pólo de avanço de fase em $-p_{\text{avanço}}$ é mais negativo que o zero em $-z_{\text{avanço}}$ 7. Não são necessários circuitos ativos para a implementação

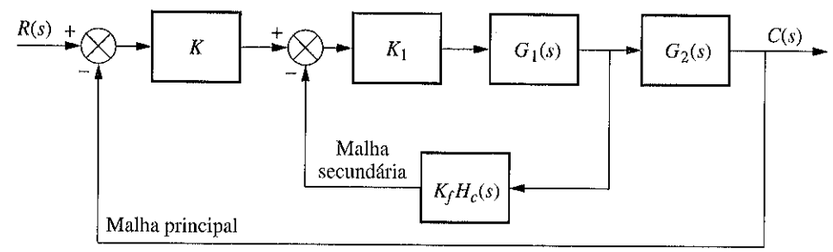


Fig. 9.45 Sistema de controle genérico com compensação em retroação

porcional à velocidade de rotação de entrada. Este compensador pode ser engrenado facilmente à saída de posição de um sistema. A Fig. 9.46 é um sistema de controle de posição mostrando o engrenamento do tacômetro com o motor. Você pode ver os potenciômetros de entrada e de saída bem como o motor e a inércia da carga. A representação em diagrama de blocos de um tacômetro está mostrada na Fig. 9.47(*a*), e sua posição típica no interior de uma malha de controle está mostrada na Fig. 9.47(*b*).

Ao mesmo tempo que esta seção mostra métodos para projetar sistemas usando retroação de velocidade, também prepara o cenário das técnicas de compensação do Cap. 12, onde não somente a velocidade mas todos os estados, incluindo posição, serão usadas como retroação para o desempenho adequado de sistemas de controle.

Agora discutiremos procedimentos de projeto. Comumente, o projeto de compensação por retroação consiste em obter ganhos, como K, K_1 e K_f na Fig. 9.45, após estabelecer uma forma dinâmica para $H_c(s)$. Existem duas abordagens. A primeira é semelhante à compensação em cascata. Admita um sistema de retroação típico, onde $G(s)$ é o canal de ação à frente e $H(s)$ é a retroação. Suponha agora que um lugar de raízes seja traçado com base em $G(s)H(s)$. Na compensação em cascata, adicionamos pólos e zeros a $G(s)$. Na compensação por retroação, pólos e zeros foram adicionados por intermédio de $H(s)$.

Com a segunda abordagem, projetamos um desempenho especificado para a malha secundária, mostrada na Fig. 9.45, seguida do projeto da malha principal. Assim, a malha secundária, como os *ailerons* em uma aeronave, pode ser projetada com suas próprias especificações de desempenho e operar no interior da malha principal.

Abordagem 1

A primeira abordagem consiste na redução da Fig. 9.45 para a Fig. 9.48 através do deslocamento de K para a direita da junção de soma, deslocando $G_2(s)$ para a esquerda do ponto de coleta de sinal, e em seguida somando as duas retroações. A Fig. 9.48 mostra que o ganho da malha, $G(s)H(s)$, é

$$G(s)H(s) = K_1G_1(s)[K_fH_c(s) + KG_2(s)] \tag{9.36}$$

Sem a retroação, $K_fH_c(s)$, o ganho da malha é

$$G(s)H(s) = KK_1G_1(s)G_2(s) \tag{9.37}$$

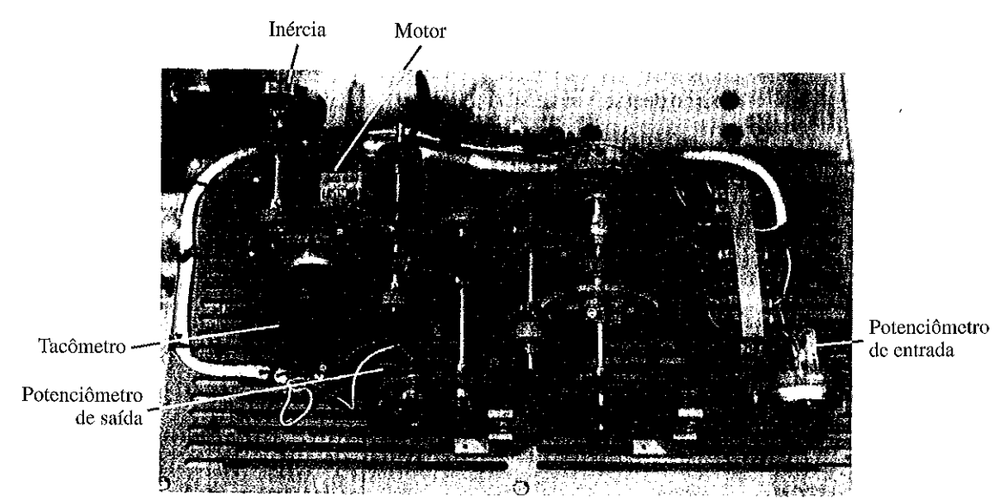


Fig. 9.46 Um sistema de controle de posicionamento que utiliza um tacômetro como derivador no canal de retroação. Você pode identificar a semelhança entre este sistema e o esquema mostrado na contracapa traseira?

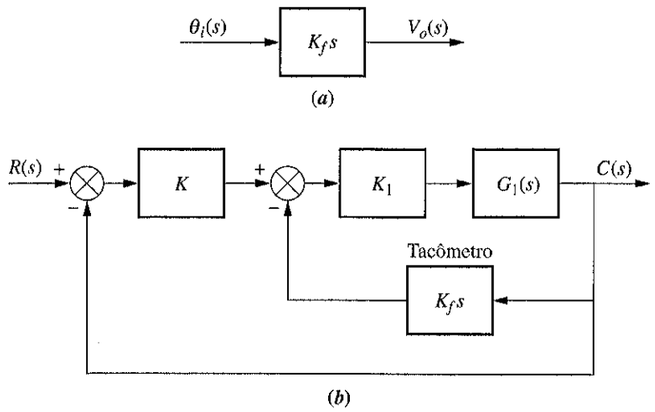


Fig. 9.47
a. Função de transferência de um tacômetro;
b. compensação em retroação com tacômetro

Assim, o efeito de somar as retroações consiste em substituir os pólos e zeros de $G_2(s)$ pelos pólos e zeros de $[K_fH_c(s) + KG_2(s)]$. Portanto, este método é semelhante à compensação em cascata no que diz respeito a incluir novos pólos e zeros por intermédio de $H(s)$ para alterar a forma do lugar das raízes de modo a fazê-lo passar pelo ponto de projeto. Contudo, devemos lembrar que os zeros da retroação equivalente mostrada na Fig. 9.48, $H(s) = [K_fH_c(s) + KG_2(s)]/\,KG_2(s)$, não são zeros a malha fechada.

Por exemplo, se $G_2(s) = 1$ e a retroação da malha secundária, $K_fH_c(s)$, for um sensor de velocidade, $K_fH_c(s) = K_fs$, então, a partir da Eq. (9.36) o ganho da malha é

$$G(s)H(s) = K_fK_1G_1(s)\left(s + \frac{K}{K_f}\right) \tag{9.38}$$

Desta forma, um zero em $-K/K_f$ é adicionado aos pólos e zeros a malha aberta existentes. Este zero modifica a forma do lugar das raízes para fazê-lo passar no ponto de projeto. Um ajuste final do ganho, K_1, leva à resposta desejada. Uma vez mais, você deve verificar que este zero não é um zero a malha fechada. Vejamos um exemplo numérico.

Exemplo 9.7

Zero de compensação por intermédio de retroação de velocidade

Problema Dado o sistema da Fig. 9.47(*a*), projete a compensação por retroação de velocidade, mostrada na Fig. 9.49(*b*), para reduzir a 1/4 o tempo de assentamento continuando a operar o sistema com ultrapassagem percentual de 20%.

Solução Primeiro, projete um compensador PD. Para o sistema não-compensado, procure ao longo da reta de ultrapassagem percentual de 20% ($\zeta = 0{,}456$) e descubra que os pólos dominantes são $-1{,}809 \pm j3{,}531$, como mostrado na Fig. 9.50. As especificações estimadas para o sistema não-compensado estão mostradas na Tabela 9.8, e a resposta ao degrau é mostrada na Fig. 9.51. O tempo de assentamento é 2,21 s e deve ser reduzido por um fator de 4 para 0,55 segundo.

A seguir, determine a localização dos pólos dominantes para o sistema compensado. Para obter uma redução no tempo de assentamento para 1/4 do valor inicial, a parte real do pólo deve ser multiplicada por 4. Assim, o pólo compensado tem uma parte real de $4(-1{,}809) = -7{,}236$. A parte imaginária é então

$$\omega_d = -7{,}236\,\mathrm{tg}\,117{,}13^\circ = 14{,}12 \tag{9.39}$$

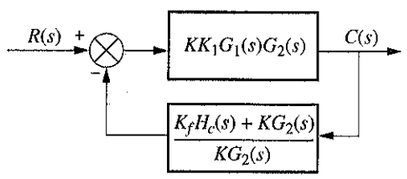


Fig. 9.48 Diagrama de blocos equivalentes da Fig. 9.45

Fig. 9.49
a. Sistema para o Exemplo 9.7;
b. sistema com compensação por retroação de velocidade;
c. sistema compensado equivalente;
d. sistema compensado equivalente, mostrando retroação unitária

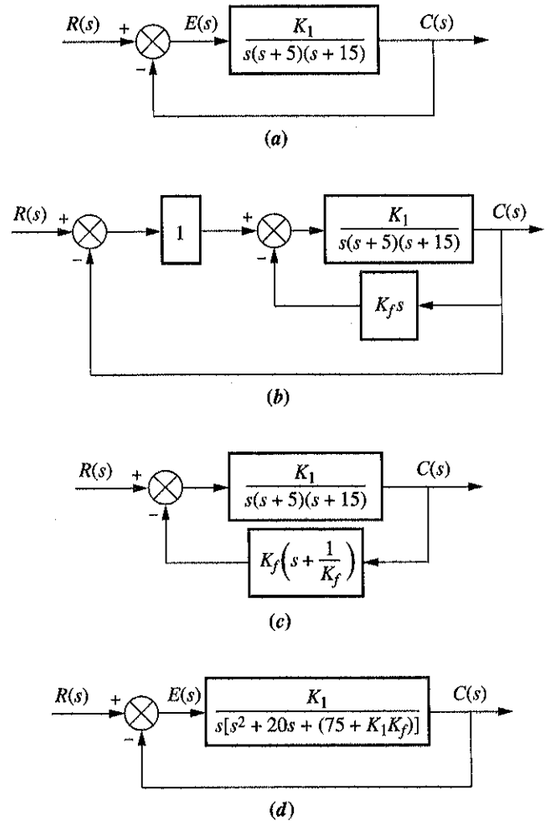


Fig. 9.50 Lugar das raízes para o sistema não-compensado do Exemplo 9.7

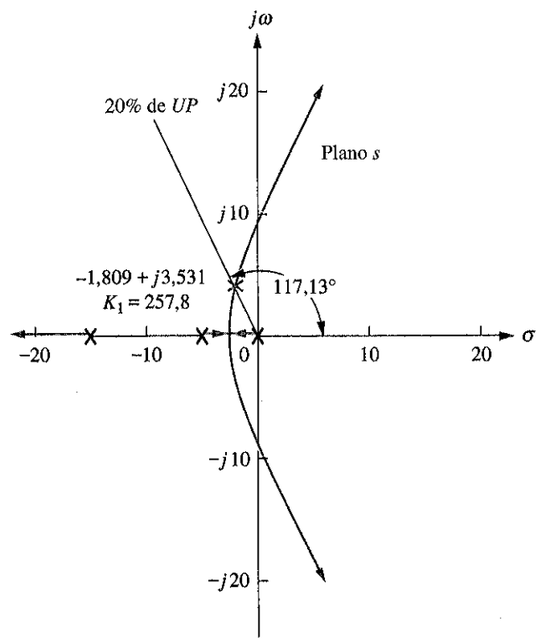


Tabela 9.8 Características previstas de sistemas não-compensados e compensadas do Exemplo 9.7

	Não-compensado	Compensado
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K_1}{s(s+5)(s+15)}$	$\dfrac{K_1}{s(s+5)(s+15)}$
Retroação	1	$0{,}185(s+5{,}42)$
Pólos dominantes	$-1{,}809 \pm j3{,}531$	$-7{,}236 \pm j14{,}12$
K_1	257,8	1388
ζ	0,456	0,456
ω_n	3,97	15,87
$\%UP$	20	20
T_s	2,21	0,55
T_p	0,89	0,22
K_v	3,44	4,18
$e(\infty)$ (rampa)	0,29	0,24
Outros pólos	$-16{,}4$	$-5{,}53$
Zero	Nenhum	Nenhum
Comentários	Aprox. de 2.ª ordem OK	Simular

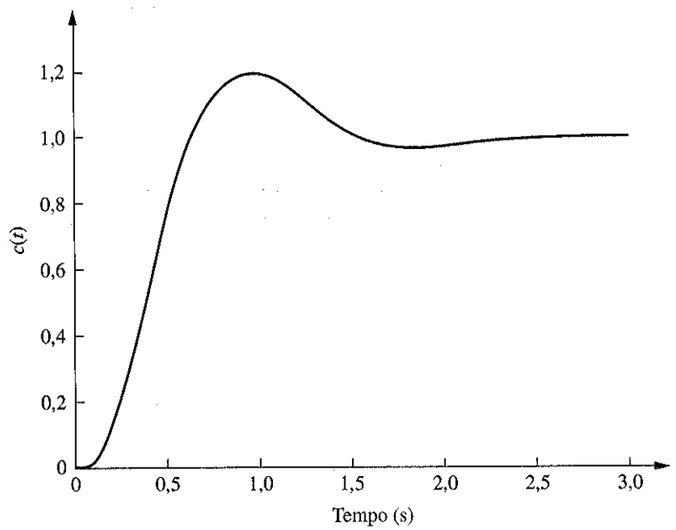


Fig. 9.51 Resposta ao degrau para o sistema não-compensado do Exemplo 9.7

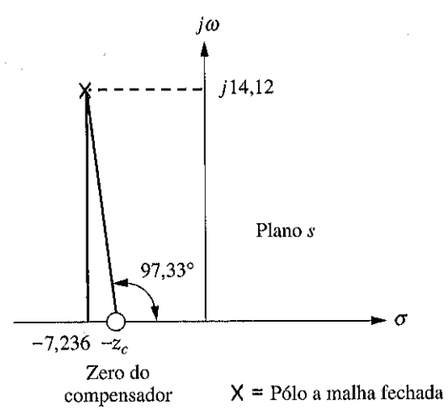
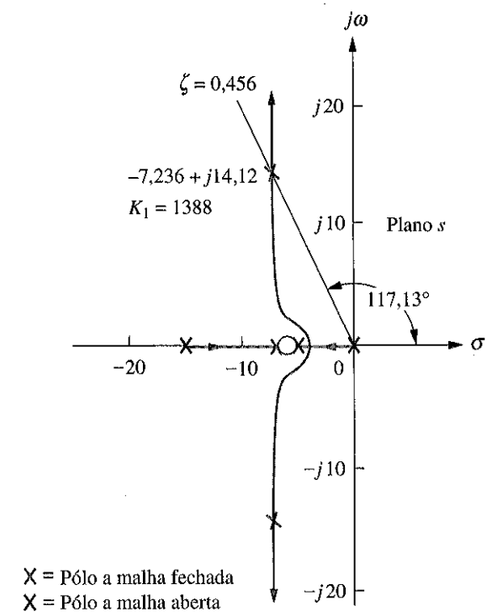


Fig. 9.52 Determinando o zero do compensador no Exemplo 9.7

Fig. 9.53 Lugar das raízes para o sistema compensado do Exemplo 9.7



onde 117,13° é o ângulo da reta de ultrapassagem percentual de 20%.

Usando a posição do pólo dominante compensado em $-7{,}236 \pm j14{,}12$, somamos a contribuição angular dos pólos do sistema não-compensado e obtemos $-227{,}33°$. Este ângulo requer uma contribuição do zero compensador de $+97{,}33°$ para produzir 180° no ponto de projeto. A geometria mostrada na Fig. 9.52 leva ao cálculo da localização do zero do compensador. Portanto,

$$\frac{14{,}12}{7{,}236 - z_c} = \operatorname{tg}(180° - 97{,}33°) \tag{9.40}$$

de onde $z_c = 5{,}42$.

O lugar das raízes para o sistema compensado equivalente da Fig. 9.49(*c*) está mostrado na Fig. 9.53. O ganho no ponto de projeto, que é K_1K_f com base na Fig. 9.49(*c*), é achado como sendo 256,7. Uma vez que K_f é o inverso do zero do compensador, $K_f = 0{,}185$. Desta maneira, $K_1 = 1388$.

A fim de calcular as características do erro de estado estacionário, K_v é obtido com base na Fig. 9.49(*d*), como sendo

$$K_v = \frac{K_1}{75 + K_1K_f} = 4{,}18 \tag{9.41}$$

O desempenho previsto para o sistema compensado está mostrado na Tabela 9.8. Observe que o pólo de ordem superior não está suficientemente distante dos pólos dominantes e assim não pode ser desprezado. Além disso, pela Fig. 9.49(*d*) vemos que a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_1}{s^3 + 20s^2 + (75 + K_1K_f)s + K_1} \tag{9.42}$$

Desta maneira, conforme previsto, o zero a malha aberta não é um zero a malha fechada e não há cancelamento de pólo com zero. Portanto, o projeto deve ser verificado através de simulação.

Os resultados da simulação estão apresentados na Fig. 9.54 e mostram uma resposta superamortecida com um tempo de assentamento de 0,75 s comparado ao tempo de assentamento do sistema não-compensado de aproximadamente 2,2 s. Embora sem atender as exigências do projeto, a resposta ainda assim representa uma melhoria em relação ao sistema não-compensado da Fig. 9.51. Comumente, um valor menor do percentual de ultrapassagem é aceitável. O sistema deveria ser reprojetado para uma redução adicional no tempo de assentamento.

Você deve fazer o Problema 8 no final deste capítulo, onde pode repetir este exemplo usando compensação PD em cascata. Você verá que o zero do compensador para a compensação em cascata é um zero a malha fechada levando à possibilidade do cancelamento de pólo com zero. Contudo, a compensação PD é usualmente ruidosa e nem sempre prática.

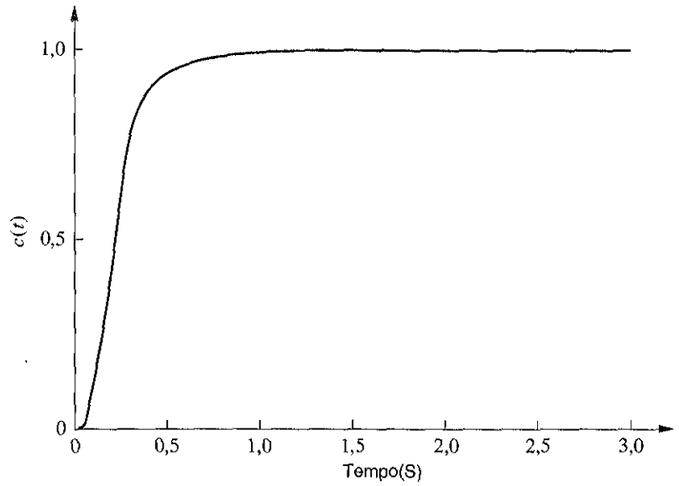


Fig. 9.54 Resposta ao degrau para o sistema compensado do Exemplo 9.7

Abordagem 2

A segunda abordagem nos permite usar a compensação por retroação para projetar uma resposta transitória da malha secundária separadamente da resposta do sistema a malha fechada. No caso de uma aeronave, a malha secundária pode controlar a posição das superfícies aerodinâmicas, enquanto o sistema a malha fechada completo pode controlar o ângulo de arfagem total da aeronave.

Veremos que a malha secundária da Fig. 9.45 representa basicamente uma função de transferência do percurso à frente cujos pólos podem ser ajustados com o ganho da malha secundária. Estes pólos então se transformam em pólos a malha aberta do sistema de controle completo. Em outras palavras, em vez de alterar a forma do lugar das raízes com pólos e zeros adicionais, como na compensação em cascata, podemos realmente mudar os pólos do processo a controlar através de um ajuste de ganho. Finalmente, os pólos a malha fechada são definidos pelo ganho da malha, como na compensação em cascata.

Exemplo 9.8

Compensação por retroação da malha secundária

Problema Dado o sistema da Fig. 9.55(*a*), projete a compensação por retroação da malha secundária, como mostrado na Fig. 9.55(*b*), para obter uma relação de amortecimento de 0,8 para a malha secundária e uma relação de amortecimento de 0,6 para o sistema a malha fechada.

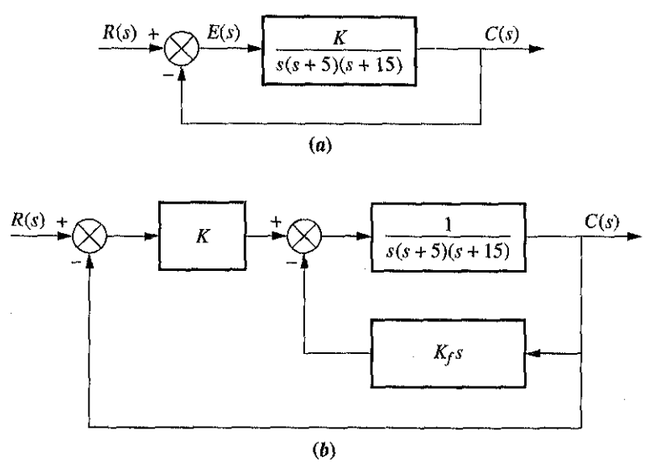


Fig. 9.55
a. Sistema não-compensado e
b. sistema compensado por retroação para o Exemplo 9.8

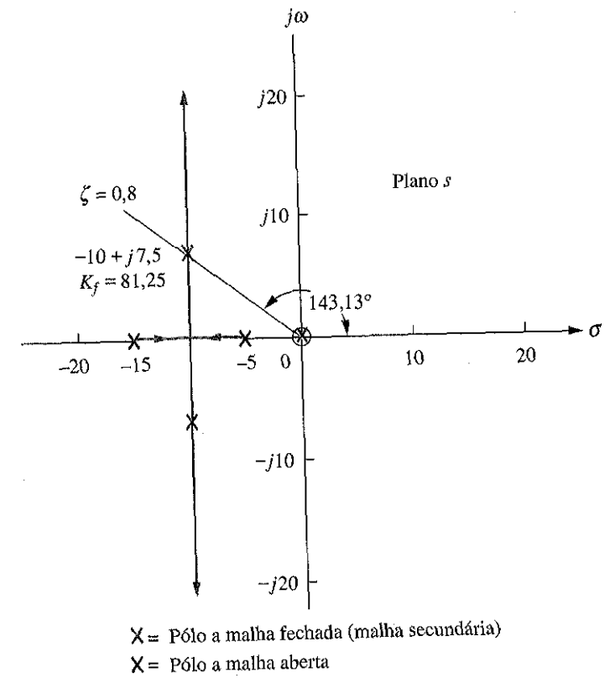


Fig. 9.56 Lugar das raízes para a malha secundária do Exemplo 9.8

Solução A malha secundária é definida como a malha abrangendo o processo a controlar, $1/[s(s+5)(s+15)]$, e o compensador por retroação, $K_f s$. O valor de K_f será ajustado para definir a localização dos pólos da malha secundária, e então K será ajustado para produzir a resposta a malha fechada desejada.

A função de transferência da malha secundária, $G_{ML}(s)$, é

$$G_{ML}(s) = \frac{1}{s\left[s^2 + 20s + (75 + K_f)\right]} \tag{9.43}$$

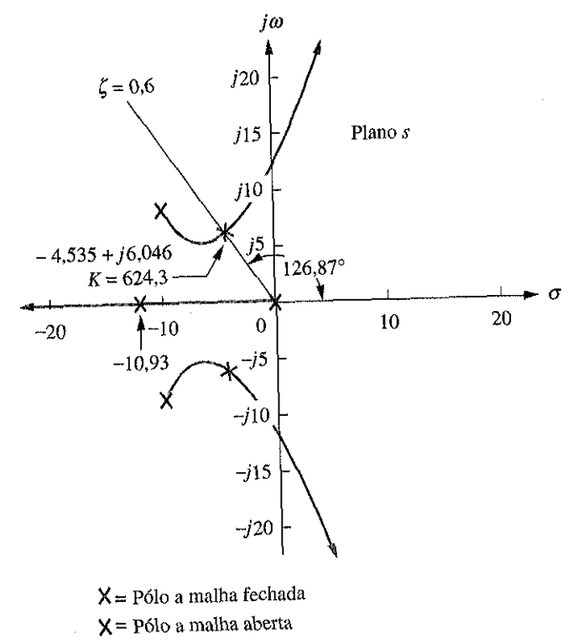


Fig. 9.57 Lugar das raízes para o sistema a malha fechada do Exemplo 9.8

Tabela 9.9 Características previstas de sistemas não-compensados e compensados do Exemplo 9.8

	Não-compensado	Compensado
Processo a controlar e compensador	$\dfrac{K}{s(s+5)(s+15)}$	$\dfrac{K}{s(s^2+20s+156{,}25)}$
Retroação	1	1
Pólos dominantes	$-1{,}997 \pm j2{,}662$	$-4{,}535 \pm j6{,}046$
K	177,3	624,3
ζ	0,6	0,6
ω_n	3,328	7,558
$\%UP$	9,48	9,48
T_s	2	0,882
T_p	1,18	0,52
K_v	2,364	3,996
$e(\infty)$ (rampa)	0,423	0,25
Outros pólos	-16	$-10{,}93$
Zero	Nenhum	Nenhum
Comentários	Aprox. de 2.ª ordem OK	Simular

Os pólos de $G_{ML}(s)$ podem ser achados analiticamente ou por intermédio do lugar das raízes. O lugar das raízes para a malha secundária, onde $K_f s/[s(s+5)(s+15)]$ é a função de transferência a malha aberta, está mostrada na Fig. 9.56. Uma vez que o zero na origem vem da função de transferência de retroação da malha secundária, este zero não é um zero a malha fechada da função de transferência da malha secundária. Portanto, o pólo na origem vem para permanecer estacionário onde não há cancelamento de pólo com zero na origem. A Eq. (9.43) também mostra este fenômeno. Vemos um pólo estacionário na origem e dois pólos complexos que variam com o ganho. Observe que o ganho do compensador, K_f, varia a freqüência natural, ω_n, dos pólos da malha secundária, como visto a partir da Eq. (9.43). Uma vez que as partes reais dos pólos complexos são constantes em $\zeta\omega_n = -10$, a relação de amortecimento também deve ser variada para manter constante $2\zeta\omega_n = 20$. Desenhando a reta $\zeta = 0{,}8$ na Fig. 9.56, obtemos os pólos complexos em $-10 \pm j7{,}5$. O ganho, K_f, que é igual a 81,25, coloca os pólos da malha secundária em uma posição para atender as especificações. Os pólos recém-determinados, $-10 \pm j7{,}5$, bem como o pólo na origem (Eq. (9.43)), atuam como pólos a malha aberta que geram um lugar das raízes com variações do ganho, K.

O lugar das raízes final para o sistema é mostrado na Fig. 9.57. A reta da relação de amortecimento $\zeta = 0{,}6$ está desenhada e investigada. Os pólos complexos a malha fechada são encontrados em $-4{,}535 \pm j6{,}046$, com um ganho necessário de 624,3. Um terceiro pólo está em $-10{,}93$.

Os resultados estão resumidos na Tabela 9.9. Vemos que o sistema compensado, embora tendo a mesma relação de amortecimento do sistema não-compensado, é muito mais rápido e também tem um erro de estado estacionário menor. Os resultados, contudo, são resultados previstos e devem ser simulados para verificar o percentual de ultrapassagem, o tempo de assentamento e tempo de pico, uma vez que o terceiro pólo não está distante o suficiente dos pólos dominantes. A resposta em degrau é mostrada na Fig. 9.58 e se iguala rigorosamente ao desempenho previsto.

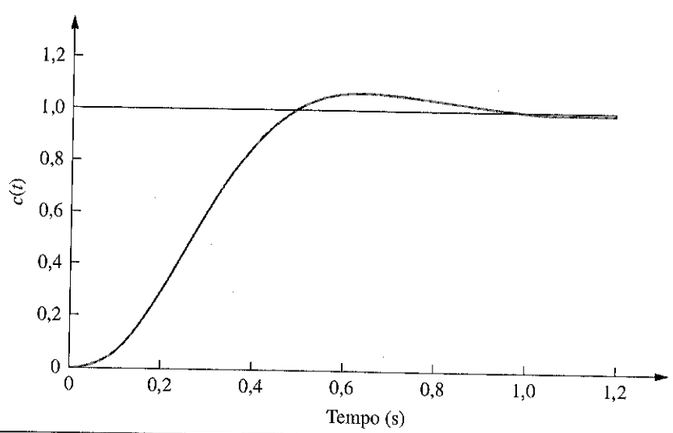


Fig. 9.58 Simulação da resposta ao degrau para o Exemplo 9.8

Exercício de Avaliação 9.4

Problema: Para o sistema da Fig. 9.59, projete uma compensação por retroação de velocidade da malha secundária para obter uma relação de amortecimento de 0,7 para os pólos dominantes da malha secundária e uma relação de amortecimento de 0,5 para os pólos dominantes do sistema a malha fechada.

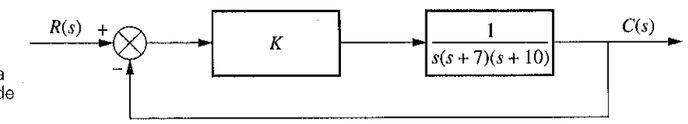


Fig. 9.59 Sistema para o Exercício de Avaliação 9.4

Resposta: O sistema está configurado de modo semelhante ao da Fig. 9.55(*b*), com $K_f = 77{,}42$ e $K = 626{,}3$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nossa discussão sobre métodos de compensação agora está completa. Estudamos as compensações em cascata e por retroação e as comparamos e contrastamos. Agora estamos prontos para mostrar como realizar fisicamente os controladores e compensadores que projetamos.

9.6 Realização Física da Compensação

Neste capítulo deduzimos a compensação para melhorar a resposta transitória e o erro de estado estacionário nos sistemas de controle com retroação. Foram deduzidas as funções de transferência de compensadores usados em cascata com o processo a controlar ou no canal de retroação. Estes compensadores foram definidos pela configuração de seus pólos e zeros. Eles eram tanto controladores PI, PD ou PID ativos como compensadores passivos por atraso, por avanço ou por atraso e avanço de fase. Nesta seção mostraremos como implementar os controladores ativos e os compensadores passivos.

Realização de Circuito Ativo

No Cap. 2 deduzimos

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{9.44}$$

como a função de transferência de um amplificador operacional inversor cuja configuração está repetida aqui na Fig. 9.60. Por meio de uma escolha judiciosa de $Z_1(s)$ e de $Z_2(s)$, este circuito pode ser usado como um bloco construtivo para implementar compensadores e controladores, como os controladores PID, discutidos neste capítulo. A Tabela 9.10 resume a realização de controladores PI, PD e PID bem como compensadores por atraso, por avanço e por atraso e avanço de fase usando amplificadores operacionais. Você pode verificar a tabela usando os métodos do Cap. 2 para obter as impedâncias.

Outros compensadores podem ser realizados por compensadores em cascata mostrados na tabela. Por exemplo, um compensador por atraso e avanço de fase pode ser formado colocando em cascata o compensador por atraso de fase com o compensador por avanço de fase, conforme mostrado na Fig. 9.61. Como exemplo, implementemos um dos controladores projetados anteriormente no capítulo.

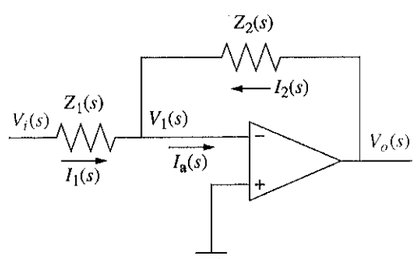


Fig. 9.60 Amplificador operacional configurado para realização de função de transferência

Tabela 9.10 Realização ativa dos controladores e compensadores, usando um amplificador operacional

Função	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Ganho	R_1	R_2	$-\dfrac{R_2}{R_1}$
Integração	R	C	$-\dfrac{\frac{1}{RC}}{s}$
Derivação	C	R	$-RCs$
Controlador PI	R_1	R_2 C	$-\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{\left(s+\frac{1}{R_2C}\right)}{s}$
Controlador PD	C R_1	R_2	$-R_2C\left(s+\dfrac{1}{R_1C}\right)$
Controlador PID	C_1 R_1	R_2 C_2	$-\left[\left(\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{C_1}{C_2}\right)+R_2C_1s+\dfrac{\frac{1}{R_1C_2}}{s}\right]$
Compensação por atraso de fase	C_1 R_1	C_2 R_2	$-\dfrac{C_1}{C_2}\dfrac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$ onde $R_2C_2 > R_1C_1$
Compensação por avanço de fase	C_1 R_1	C_2 R_2	$-\dfrac{C_1}{C_2}\dfrac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$ onde $R_1C_1 > R_2C_2$

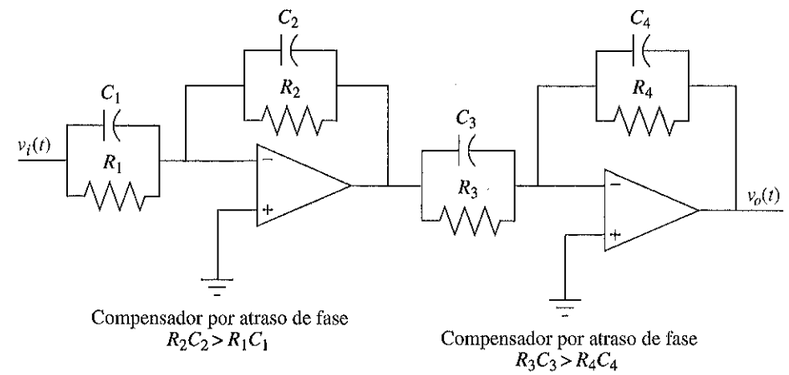


Fig. 9.61 Compensador por atraso e avanço de fase implementado com amplificadores operacionais

Exemplo 9.9

Implementando um controlador PID

Problema Implementar o controlador PID do Exemplo 9.5.

Solução A função de transferência do controlador PID é

$$G_c(s) = \frac{(s + 55{,}92)(s + 0{,}5)}{s} \tag{9.45}$$

que pode ser colocada na forma

$$G_c(s) = s + 56{,}42 + \frac{27{,}96}{s} \tag{9.46}$$

Comparando o controlador PID na Tabela 9.10 com a Eq. (9.46), obtemos as três relações seguintes:

$$\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} = 56{,}42 \tag{9.47}$$

$$R_2C_1 = 1 \tag{9.48}$$

e

$$\frac{1}{R_1C_2} = 27{,}96 \tag{9.49}$$

Uma vez que existem quatro variáveis e três equações, selecionamos arbitrariamente um valor prático para um dos componentes. Selecionando $C_2 = 0{,}1\ \mu$F, os valores restantes são achados como sendo $R_1 = 357{,}65$ kΩ, $R_2 = 178{,}981$ kΩ e $C_1 = 5{,}59\ \mu$F.

O circuito completo é mostrado na Fig. 9.62, onde os valores dos componentes do circuito foram arredondados.

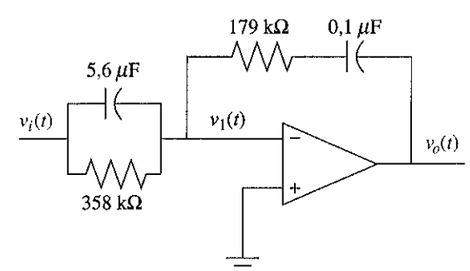


Fig. 9.62 Controlador PID

Realização de Circuito Passivo

Compensadores por atraso, por avanço, por atraso e avanço de fase também podem ser implementados com estruturas passivas. A Tabela 9.11 resume as estruturas e suas funções de transferência. As funções de transferência podem ser deduzidas com os métodos do Cap. 2.

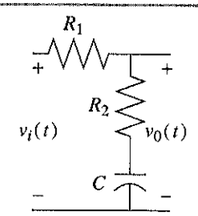
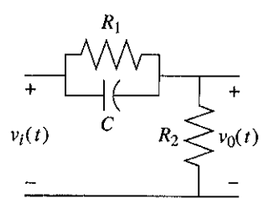
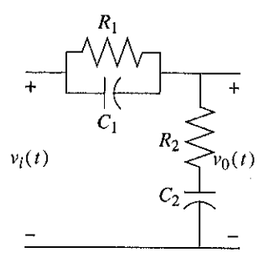
A função de transferência por atraso e avanço de fase pode ser colocada na seguinte forma:

$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)\left(s + \frac{\alpha}{T_2}\right)} \tag{9.50}$$

onde $\alpha < 1$. Desta maneira, os termos com T_1 formam o compensador por avanço de fase, e os termos com T_2 formam o compensador por atraso de fase. A Eq. (9.50) mostra uma restrição inerente ao uso desta realização passiva. Vemos que a relação entre o zero do compensador por avanço de fase e o pólo deste compensador deve ser igual à relação entre o pólo do compensador por atraso de fase e o zero deste último compensador. No Cap. 11 projetamos um compensador por atraso e avanço de fase com esta restrição.

Um compensador por atraso e avanço de fase sem esta restrição pode ser realizado com uma estrutura ativa, conforme vimos anteriormente, ou com estruturas passivas colocando em cascata as estruturas por avanço de fase e por atraso de fase mostradas na Tabela 9.11. Lembre, contudo, que as duas estruturas devem ser isoladas para garantir que uma estrutura não carregue a outra. Se as estruturas carregarem uma à outra, a função de transferência não será o produto das funções de transferência individuais. Uma possível realização usando as estruturas passivas usa um amplificador operacional para prover a isolação. O circuito é mostrado na Fig. 9.63. O Exemplo 9.10 demonstra o projeto de um compensador passivo.

Tabela 9.11 Realização passiva de compensadores

Função	Estrutura	Função de transferência, $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$
Compensação por atraso de fase		$\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{s+\frac{1}{R_2C}}{s+\frac{1}{(R_1+R_2)C}}$
Compensação por avanço de fase		$\frac{s+\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}}$
Compensação por atraso e avanço de fase		$\frac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}{s^2+\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_1}\right)s+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$

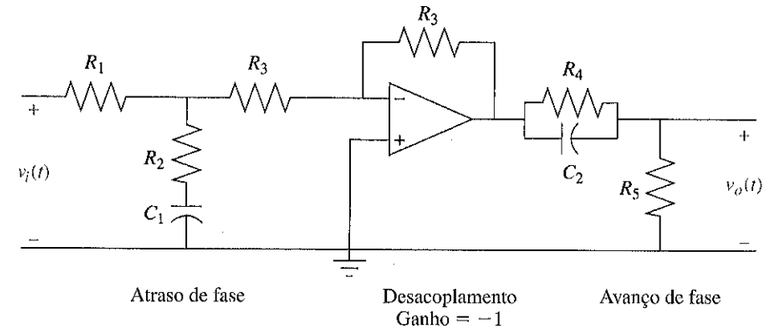


Fig. 9.63 Compensador por atraso e avanço de fase implementado com associação em cascata de estruturas de atraso de fase e de avanço de fase com desacoplamento

Exemplo 9.10

Realizando um compensador por avanço

Problema Realize o compensador por avanço de fase projetado no Exemplo 9.4 (Compensador *b*).

Solução A função de transferência do compensador por avanço de fase é

$$G_c(s) = \frac{s+4}{s+20{,}09} \tag{9.51}$$

Comparando a função de transferência de uma estrutura por avanço de fase mostrada na Tabela 9.11 com a Eq. (9.51), obtemos as duas seguintes relações:

$$\frac{1}{R_1C} = 4 \tag{9.52}$$

e

$$\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C} = 20{,}09 \tag{9.53}$$

Portanto $R_1C = 0{,}25$, e $R_2C = 0{,}0622$. Uma vez que existem três elementos da estrutura e duas equações, podemos selecionar um valor dos elementos arbitrariamente. Fazendo $C = 1\ \mu$F, resultam $R_1 = 250$ kΩ e $R_2 = 62{,}2$ kΩ.

Exercício de Avaliação 9.5

Problema: Implemente os compensadores mostrados em (a) e em (b) a seguir. Escolha uma realização passiva se possível.

a. $G_c(s) = \dfrac{(s+0{,}1)(s+5)}{s}$

b. $G_c(s) = \dfrac{(s+0{,}1)(s+2)}{(s+0{,}01)(s+20)}$

Resposta:

a. $G_c(s)$ é um controlador PID e desta maneira requer realização ativa. Use a Fig. 9.60 com os circuitos do controlador PID mostrados na Tabela 9.10. Um possível conjunto de valores aproximados de componentes é

$$C_1 = 10\ \mu\text{F}, \qquad C_2 = 100\ \mu\text{F}, \qquad R_1 = 20\ \text{k}\Omega, \qquad R_2 = 100\ \text{k}\Omega.$$

b. $G_c(s)$ é um compensador por atraso e avanço de fase que pode ser implementado com uma estrutura passiva porque a relação entre o pólo e o zero do avanço de fase é o inverso da relação entre o pólo e o zero do atraso de fase. Use o circuito do compensador por atraso e avanço de fase mostrado na Tabela 9.11. Um possível conjunto de valores aproximados de componentes é

$$C_1 = 100\ \mu\text{F}, \qquad C_2 = 900\ \mu\text{F}, \qquad R_1 = 100\ \text{k}\Omega, \qquad R_2 = 560\ \Omega.$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de Antena: Compensação por Atraso e Avanço de Fase

No estudo de caso do sistema de controle de posicionamento da antena em azimute no Cap. 8, obtivemos uma ultrapassagem percentual de 25% usando um ajuste simples de ganho. Uma vez obtido este percentual de ultrapassagem, o tempo de assentamento ficava determinado. Se tentarmos melhorar o tempo de assentamento aumentando o ganho, a ultrapassagem percentual também aumenta. Nesta seção, continuamos com o controle de posicionamento da antena em azimute projetando um compensador em cascata que produz uma ultrapassagem percentual de 25% e um tempo de assentamento reduzido. Além disso, faremos uma melhoria no desempenho do erro de estado estacionário do sistema.

Problema Dado um sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrado na contracapa traseira (Configuração 1), projete o compensador em cascata para atender os seguintes requisitos: (1) ultrapassagem percentual de 25%, (2) tempo de assentamento de 2 s e (3) $K_v = 20$.

Solução Para o estudo de caso no Cap. 8, um pré-amplificador de ganho de 64,21 produziu uma ultrapassagem percentual de 25%, com os pólos de segunda ordem dominantes em $-0{,}833 \pm j1{,}888$. O tempo de assentamento é, desta forma, $4/\zeta\omega_n = 4/0{,}833 = 4{,}8$ s. A função a malha aberta para o sistema conforme foi deduzida no estudo de caso no Cap. 5 é $G(s) = 6{,}63K/[s(s + 1{,}71)(s + 100)]$. Portanto, $K_v = 6{,}63K/(1{,}71 \times 100) = 2{,}49$. Comparando estes valores com o enunciado do problema deste exemplo, queremos melhorar o tempo de assentamento por um fator de 2,4 e queremos, aproximadamente, uma melhoria de oito vezes em K_v.

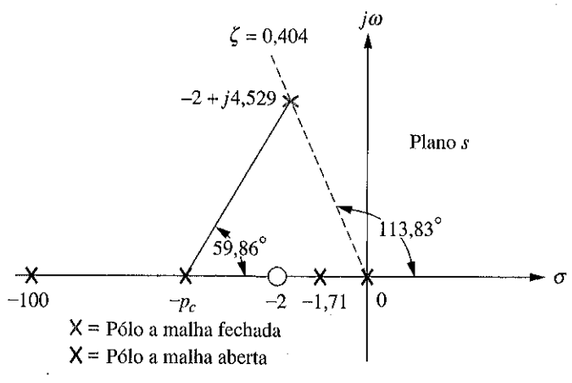
Projeto do Compensador por Atraso de Fase para Melhorar a Resposta Transitória Primeiro, localize o pólo dominante de segunda ordem. Para obter um tempo de assentamento, T_s, de 2 s e uma ultrapassagem percentual de 25%, a parte real do pólo dominante de segunda ordem deveria estar em $-4/T_s = -2$. A localização do pólo na reta de 113,83° ($\zeta = 0{,}404$ correspondendo a uma ultrapassagem de 25%) produz uma parte imaginária de 4,529 (veja a Fig. 9.64).

Em segundo lugar, admita um zero do compensador por avanço de fase e determine o pólo do compensador. Supondo um zero do compensador em -2, juntamente com os pólos e zeros do sistema a malha aberta não-compensado, use o programa do lugar das raízes no Apêndice H.2, no CD-ROM que acompanha este livro para determinar que há uma contribuição angular de $-120{,}14°$ no ponto de projeto em $-2 \pm j4{,}529$. Por conseguinte, o pólo do compensador deve contribuir com $120{,}14° - 180° = -59{,}86°$ para que o ponto do projeto esteja sobre o lugar das raízes do sistema compensado. A geometria é mostrada na Fig. 9.64. Para calcular o pólo do compensador, usamos $4{,}529/(p_c - 2) = \text{tg } 59{,}86°$ ou seja, $p_c = 4{,}63$.

Agora determine o ganho. Usando a função a malha aberta do sistema compensado por avanço de fase,

$$G(s) = \frac{6{,}63K(s + 2)}{s(s + 1{,}71)(s + 100)(s + 4{,}63)} \tag{9.54}$$

e o ponto de projeto $2 + j4{,}529$ como o ponto de teste no programa de lugar das raízes, determinamos o ganho, $6{,}63K$, como sendo igual a 2549.



Nota: Esta figura não está desenhada em escala.

Fig. 9.64 Posicionando um pólo compensador

Projeto de Compensador por Atraso de Fase para Melhorar o Erro de Estado Estacionário O valor de K_v para o sistema compensado por avanço de fase é obtido usando a Eq. (9.54). Portanto,

$$K_v = \frac{2549(2)}{(1{,}71)(100)(4{,}63)} = 6{,}44 \tag{9.55}$$

Como se deseja $K_v = 20$, a melhoria requerida em relação ao sistema compensado por avanço de fase é $20/6{,}44 = 3{,}1$. Escolha $p_c = -0{,}01$ e calcule $z_c = 0{,}031$, que é 3,1 vezes maior.

Determine o ganho A função a malha aberta completa do sistema compensado por atraso e avanço de fase, G_{CAA}, é

$$G_{CAA}(s) = \frac{6{,}63K(s + 2)(s + 0{,}031)}{s(s + 0{,}01)(s + 1{,}71)(s + 4{,}63)(s + 100)} \tag{9.56}$$

Usando o programa de lugar das raízes do Apêndice H.2 do CD-ROM que acompanha o livro e os pólos e zeros da Eq. (9.56), investigue ao longo da reta de 25% de ultrapassagem (113,83°) o ponto de projeto. Este ponto se deslocou ligeiramente com a inclusão do compensador por atraso de fase para $-1{,}99 \pm j4{,}51$. O ganho neste ponto é igual a 2533, o qual vale $6{,}63K$. Resolvendo para K, encontra-se $K = 382{,}1$.

Realização do Compensador Uma realização do compensador de atraso e avanço de fase está mostrada na Fig. 9.63. Com base na Tabela 9.11, a parte responsável pelo atraso de fase tem a seguinte função de transferência:

$$G_{atraso}(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{s + \dfrac{1}{R_2C}}{s + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{(s + 0{,}031)}{(s + 0{,}01)} \tag{9.57}$$

Selecionando $C = 10\ \mu$F, obtemos $R_2 = 3{,}2$ MΩ e $R_1 = 6{,}8$ MΩ.

Com base na Tabela 9.11, a parte responsável pelo compensador por avanço de fase tem a seguinte função de transferência:

$$G_{atraso}(s) = \frac{s + \dfrac{1}{R_1C}}{s + \dfrac{1}{R_1C} + \dfrac{1}{R_2C}} = \frac{(s + 2)}{(s + 4{,}63)} \tag{9.58}$$

Selecionando $C = 10\ \mu$F, obtemos $R_1 = 50$ kΩ e $R_2 = 38$ kΩ.

O ganho de malha total requerido pelo sistema é 2533. Por conseguinte,

$$6{,}63K\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2533 \tag{9.59}$$

onde K é o ganho do pré-amplificador e $R_2/(R_1 + R_2)$ é o ganho da parte responsável pelo atraso de fase. Usando os valores de R_1 e de R_2 obtidos durante a realização da parte responsável pelo atraso de fase, encontramos $K = 1194$.

O circuito final está mostrado na Fig. 9.65, onde o pré-amplificador é implementado com um amplificador operacional cuja relação entre o resistor de retroação e o resistor de entrada vale aproximadamente 1194, o ganho requerido do pré-amplificador. O pré-amplificador isola as partes de atraso e de avanço de fase do compensador.

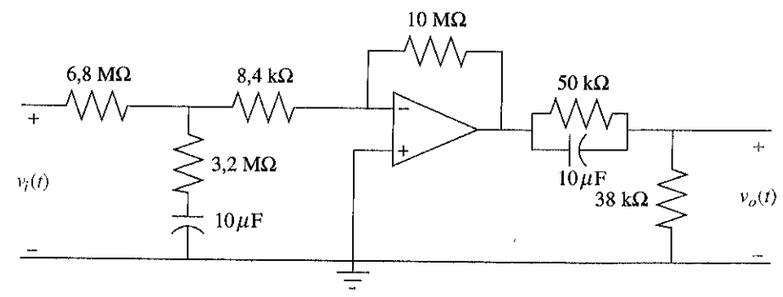


Fig. 9.65 Implementação de compensador por atraso e avanço de fase

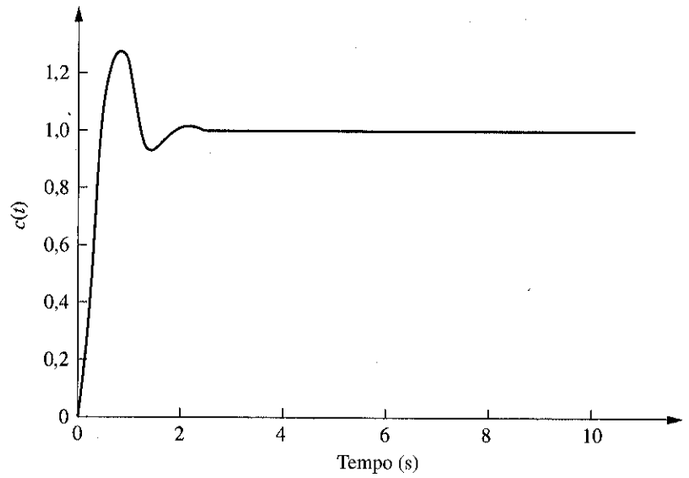


Fig. 9.66 Resposta ao degrau do controle de antena compensado por atraso e avanço de fase

Resumo dos Resultados de Projeto Usando a Eq. (9.56) juntamente com $K = 382{,}1$ obtém-se o valor compensado de K_v. Em conseqüência,

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_{CAA}(s) = \frac{2533(2)(0{,}031)}{(0{,}01)(1{,}71)(4{,}63)(100)} = 19{,}84 \tag{9.60}$$

que apresenta uma melhoria em relação ao sistema compensado através de ganho no estudo de caso do Cap. 8, onde $K_v = 2{,}49$.

Finalmente, verificando a aproximação de segunda ordem através de simulação, vemos na Fig. 9.66 a resposta transitória real. Compare-a com a resposta do sistema compensado por ganho da Fig. 8.29 para ver a melhoria efetuada pela compensação em cascata em relação à de um simples ajuste de ganho. O sistema compensado por ganho apresentava uma ultrapassagem de 25%, com um tempo de assentamento de cerca de 4 s. O sistema compensado por atraso e avanço de fase produz uma ultrapassagem de 28% com um tempo de assentamento de cerca de 2 s. Se os resultados não forem adequados à aplicação, o sistema deve ser reprojetado para reduzir a ultrapassagem percentual.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo: foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 2). No Desafio do Cap. 8 foi pedido o projeto, através do ajuste de ganho, de um tempo de assentamento de 8 s.

a. Para a solução do Desafio no Cap. 8, calcule a ultrapassagem percentual e o valor da constante de erro estático apropriada.

b. Projete um compensador em cascata para reduzir a ultrapassagem percentual de um fator de quatro e o tempo de assentamento de um fator de dois. Além disso, melhore a constante de erro estático apropriada de um fator de dois.

MATLAB

c. Repita (b) usando o MATLAB.

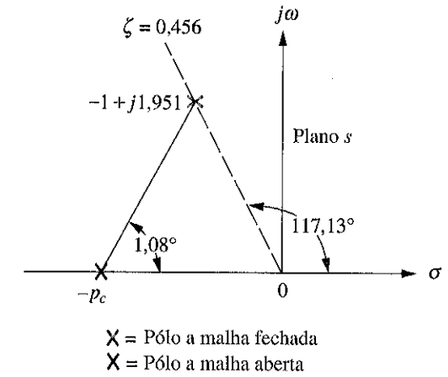
Projeto

Veículo Submersível UFSS: Compensação por Avanço de Fase e por Retroação

Como um estudo de caso final, vamos reprojetar a malha de controle de arfagem do veículo submersível UFSS. Vimos no estudo de caso do Cap. 8 que a retroação de velocidade melhorava a resposta transitória. Neste estudo de caso substituímos a retroação de velocidade por um compensador em cascata.

Problema Dada a malha de controle de arfagem sem retroação de velocidade ($K_2 = 0$) relativa ao veículo UFSS mostrada na contracapa traseira, projetar um compensador que produza uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento de 4 s (Johnson, 1980).

Fig. 9.67 Localizando o pólo do compensador



Solução Primeiro, determine a localização dos pólos a malha fechada dominantes. Utilizando os requisitos de ultrapassagem de 20% e de tempo de assentamento de 4 s, uma aproximação de segunda ordem mostra que os pólos dominantes estão localizados em $-1 \pm j1{,}951$. Com base no sistema não-compensado analisado no estudo de caso do Cap. 8, o tempo de assentamento estimado era de 19,8 s para pólos a malha fechada dominantes em $-0{,}202 \pm j0{,}394$. Por conseguinte, há necessidade de um compensador por avanço de fase para tornar o sistema mais rápido.

Suponha, arbitrariamente, um zero de compensador por avanço de fase em -1. Usando o programa de lugar das raízes no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha este livro, encontramos que este zero do compensador, juntamente com os pólos e zeros a malha aberta do sistema, produz uma contribuição angular no ponto do projeto, $-1 \pm j1{,}951$, de $-178{,}92°$. A diferença entre este ângulo e 180°, ou seja, $-1{,}08°$, é a contribuição angular requerida do pólo do compensador.

Usando a geometria mostrada na Fig. 9.67, onde $-p_c$ é a localização do pólo do compensador, obtemos

$$\frac{1{,}951}{p_c - 1} = \text{tg}\,1{,}08° \tag{9.61}$$

de onde se tem $p_c = 104{,}5$. A função de transferência a malha fechada do sistema compensado é, portanto,

$$G(s) = \frac{0{,}25K_1(s + 0{,}435)(s + 1)}{(s + 1{,}23)(s + 2)(s^2 + 0{,}226s + 0{,}0169)(s + 104{,}5)} \tag{9.62}$$

onde o compensador é

$$G_c(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 104{,}5)} \tag{9.63}$$

Usando todos os pólos e zeros mostrados na Eq. (9.62), o programa de lugar das raízes mostra que é necessário um ganho de 516,5 no ponto de projeto, $-1 \pm j1{,}951$. O lugar das raízes do sistema compensado está mostrado na Fig. 9.68.

Um teste da aproximação de segunda ordem mostra mais três pólos em $-0{,}5$, $-0{,}9$ e $-104{,}5$. Como os zeros a malha aberta estão em $-0{,}435$ e -1, a simulação é necessária para ver se há efetivamente cancelamento de pólos e zeros a malha fechada com os pólos a malha fechada em $-0{,}5$ e $-0{,}9$, respectivamente. Além do mais, o pólo a malha fechada em $-104{,}5$ é mais que cinco vezes a parte real dos pólos a malha fechada dominantes, $-1 \pm j1{,}951$, e seu efeito sobre a resposta transitória é, portanto, desprezível.

A resposta ao degrau do sistema a malha fechada está mostrada na Fig. 9.69, onde constatamos uma ultrapassagem de 26% e um tempo de assentamento de aproximadamente 4,5 s. Comparando esta resposta com a Fig. 8.31, resposta do sistema não-compensado, constatamos uma melhoria considerável do tempo de assentamento e no erro de estado estacionário. Contudo, o desempenho da resposta transitória não atende os requisitos do projeto. Por conseguinte, sugere-se um reprojeto do sistema para reduzir a ultrapassagem percentual se exigido pela aplicação.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo:

O sistema de controle de rumo para o veículo submersível UFSS está mostrado na contracapa de trás. A malha secundária contém a dinâmica do leme e do veículo e a malha principal relaciona o rumo de saída com o rumo de entrada (Johnson, 1980).

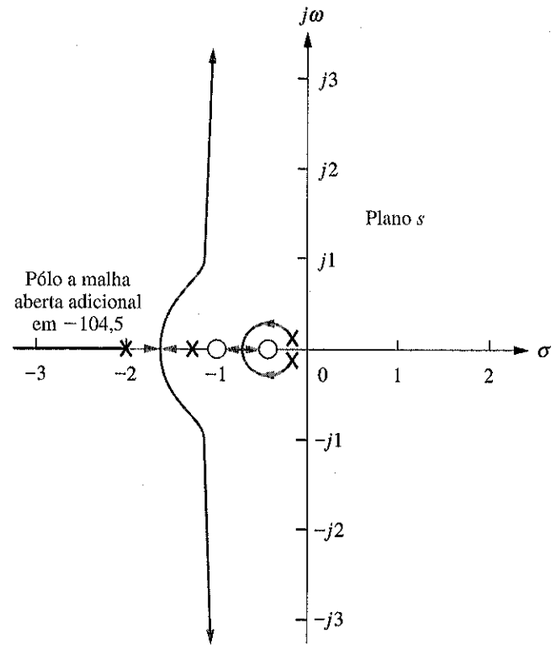


Fig. 9.68 Lugar das raízes para sistema compensado por avanço de fase

a. Determine os valores de K_1 e de K_2 de modo que os pólos dominantes da malha secundária tenham uma relação de amortecimento de 0,6 e os pólos dominantes da malha principal tenham uma relação de amortecimento de 0,5.

MATLAB

b. Repita, usando o MATLAB.

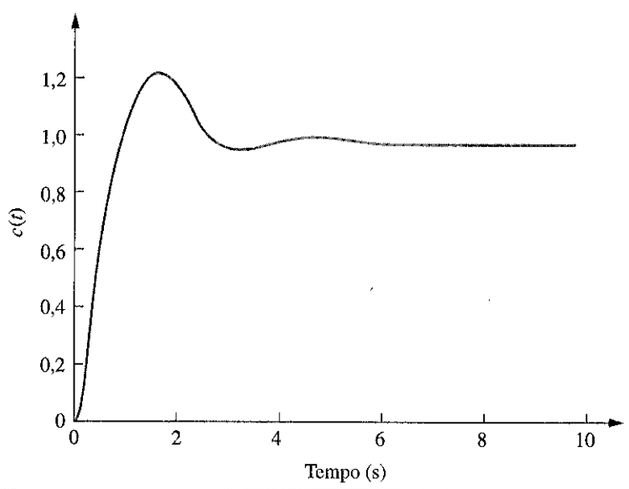


Fig. 9.69 Resposta ao degrau do veículo UFSS compensado por avanço de fase

Sumário

Neste capítulo aprendemos como projetar um sistema para atender especificações de regime transitório e de estado estacionário. Estas técnicas de projeto superam as limitações da metodologia tratada no Cap. 8, na qual a resposta transitória poderia ser criada somente se os pólos capazes de produzi-la estivessem sobre o lugar das raízes. O ajuste de ganho subseqüente produzia a resposta desejada. Como este valor de ganho impunha o valor do erro de estado estacionário na resposta, havia necessidade de estabelecer uma solução de compromisso entre a resposta transitória desejada e o erro de estado estacionário desejado.

A *compensação em cascata* ou *em retroação* é usada para superar as desvantagens do ajuste de ganho como técnica de compensação. Neste capítulo, vimos que a resposta transitória e o erro de estado estacionário podem ser projetados separadamente, não sendo mais necessário estabelecer solução de compromisso entre essas duas especificações. Além disso, fomos capazes de projetar visando a uma resposta transitória que não estava representada no lugar das raízes original.

A técnica de projeto de resposta transitória abrangida neste capítulo é baseada na alteração da forma do lugar das raízes de modo a fazê-lo passar por um ponto da resposta transitória desejada, seguida por um ajuste de ganho. Usualmente, o ganho resultante é muito maior que o original se a resposta do sistema compensado for mais rápida que a do sistema não-compensado.

A alteração de forma do lugar das raízes é obtida adicionando-se pólos e zeros suplementares através de um compensador em cascata ou em retroação. Os pólos e zeros adicionais precisam ser verificados para ver se são válidas as aproximações de segunda ordem usadas no projeto. Todos os pólos além do par dominante de segunda ordem devem produzir uma resposta que seja mais rápida que a resposta projetada. Assim, os pólos não dominantes devem estar afastados do eixo imaginário pelo menos cinco vezes a distância dos pólos dominantes. Além disso, os zeros do sistema devem estar próximos aos pólos não-dominantes para que ocorra um cancelamento de pólos com zeros, ou longe do par de pólos dominantes.

A técnica de projeto de resposta em estado estacionário se baseia no posicionamento de um pólo na origem ou próximo dela com o fim de aumentar ou aproximar o aumento do tipo de sistema e em seguida colocar um zero perto desse pólo de modo que o efeito sobre a resposta transitória possa ser desprezado. Contudo, a redução final do erro de estado estacionário se dá com uma constante de tempo grande. Os mesmos argumentos a respeito dos outros pólos produzindo respostas rápidas e sobre zeros sendo cancelados a fim de validar aproximações de segunda ordem continuam sendo verdadeiros. Se não for possível justificar as aproximações de segunda ordem, torna-se necessária uma simulação para garantir que o projeto está dentro das tolerâncias.

O projeto de compensadores de estado estacionário é implementado através de *controladores PI* ou *compensadores por atraso de fase*. Os controladores PI acrescentam um pólo na origem, aumentando, portanto, o tipo de sistema. Os compensadores por atraso de fase, usualmente implementados com estruturas passivas, inserem um pólo fora da origem mas próximo dela. Ambos os métodos acrescentam um zero muito próximo do pólo para não afetar a resposta transitória.

O projeto de compensadores da resposta transitória é implementado através de *controladores PD* ou *compensadores por avanço de fase*. Os controladores PD acrescentam um zero para compensar a resposta transitória; são considerados *ideais*. Os compensadores por atraso de fase, por outro lado, não são ideais, uma vez que adicionam um pólo juntamente com o zero. Os compensadores por atraso de fase são usualmente estruturas passivas.

Podemos corrigir simultaneamente a resposta transitória e o erro de estado estacionário com um *controlador PID* ou com um *compensador por atraso e avanço de fase*. Ambos são simplesmente combinações dos compensadores descritos anteriormente. A Tabela 9.7 resume os tipos de compensadores em cascata.

A compensação em retroação também pode ser usada para melhorar a resposta transitória. Aqui, o compensador é colocado no canal de retroação. O ganho de retroação é usado para mudar o zero do compensador ou os pólos do sistema a malha aberta, dando ao projetista uma escolha ampla de vários lugares das raízes. O ganho do sistema é então variado para permitir se mover ao longo do lugar das raízes selecionado até o ponto de projeto. Uma vantagem da compensação por retroação é a capacidade de projetar uma resposta rápida em um subsistema de forma independente da resposta total do sistema.

No próximo capítulo veremos um outro método de projeto, a resposta de freqüência, que é um método alternativo ao método do lugar das raízes.

Perguntas de Revisão

1. Estabeleça brevemente uma distinção entre as técnicas de projeto do Cap. 8 e as do Cap. 9.
2. Cite duas principais vantagens das técnicas de projeto do Cap. 9 em relação às técnicas de projeto do Cap. 8.
3. Que tipo de compensação melhora o erro de estado estacionário?
4. Que tipo de compensação melhora a resposta transitória?
5. Que tipo de compensação melhora ao mesmo tempo o erro de estado estacionário e a resposta transitória?
6. Para melhorar o erro de estado estacionário, em que localização de pólos e zeros do compensador se baseia a compensação em cascata? Além disso, enuncie as razões para essa localização.
7. Para melhorar a resposta transitória, em que localização de pólos e zeros do compensador se baseia a compensação em cascata? Além disso, enuncie as razões para essa localização.
8. Que diferença no plano s é observada entre usar um controlador PD ou usar uma estrutura por avanço da fase para melhorar a resposta transitória?
9. Para aumentar a velocidade do sistema sem alterar a ultrapassagem percentual, onde os pólos do sistema compensado devem estar situados no plano s em comparação com os pólos do sistema não-compensado?
10. Por que há uma melhoria maior no erro de estado estacionário se for usado um controlador PI no lugar de um compensador por atraso de fase?
11. Ao compensar o erro de estado estacionário, que efeitos são observados algumas vezes sobre a resposta transitória?
12. Um compensador por atraso de fase com o zero 25 vezes mais afastado do eixo imaginário que o pólo do compensador produziria quanto de melhoria no erro de estado estacionário?
13. Se o zero de um compensador por retroação estiver em −3 e um pólo do sistema a malha fechada estiver em −3,001, você poderá afirmar que haverá cancelamento de pólo com zero? Por quê?
14. Cite duas vantagens da compensação por retroação.

Problemas

1. Projete um controlador PI para forçar a zero o erro de estado estacionário ao degrau do sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1, onde

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)(s+6)}$$

O sistema opera com uma relação de amortecimento de 0,707. Compare as especificações dos sistemas não-compensado e compensado.

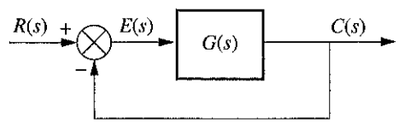


Fig. P9.1

2. Considere o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1, onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)}$$

a. Projete um controlador PI para forçar a zero o erro de estado estacionário a uma entrada em rampa para valores de K que levam à estabilidade.

MATLAB

b. Use o MATLAB para simular seu projeto para $K = 1$. Apresente a entrada em rampa e a resposta no mesmo gráfico.

3. O sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

está operando com 10% de ultrapassagem.

a. Qual o valor da constante de erro apropriada?
b. Determine a função de transferência de uma estrutura de atraso de fase de modo que a constante de erro estático seja igual a 4 sem alterar significativamente os pólos do sistema não-compensado.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular o sistema e observar o efeito do compensador.

4. Repita o Problema 3 para $G(s) = \dfrac{K}{s(s+3)(s+5)}$.

5. Considere o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

a. Projete um compensador que resulta em $K_p = 20$ sem alterar de forma apreciável a localização do pólo dominante que produz uma ultrapassagem percentual de 10% no sistema não-compensado.

MATLAB

b. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular os sistemas não-compensado e compensado.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para determinar quanto tempo leva a resposta lenta do compensador por atraso de fase para trazer a saída para o interior da faixa de 2% em torno do valor final do sistema compensado.

6. O sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+6)}$$

está operando com uma relação de amortecimento do pólo dominante de 0,707. Projete um controlador PD de modo que o tempo de assentamento seja reduzido por um fator de 2. Compare o desempenho transitório e de estado estacionário dos sistemas não-compensado e compensado. Descreva quaisquer problemas com seu projeto.

MATLAB

7. Refaça o Problema 6 usando o MATLAB da seguinte forma:

a. O MATLAB irá gerar o lugar das raízes relativo ao sistema não-compensado juntamente com a reta de relação de amortecimento de 0,707. Você selecionará, de forma interativa, o ponto de operação. O MATLAB informará então as coordenadas do ponto de operação, o ganho neste ponto, bem como uma estimativa de %UP, T_s, T_p, ζ, ω_n e K_p representados por uma aproximação de segunda ordem no ponto de operação.
b. O MATLAB mostrará a resposta ao degrau do sistema não-compensado.
c. Sem dado de entrada adicional, o MATLAB calculará o ponto de projeto compensado e pedirá que você entre, pelo teclado, com um valor do zero do compensador PD. O MATLAB responderá com um gráfico do lugar das raízes mostrando o ponto de projeto compensado. O MATLAB permitirá então que você continue a alterar o valor do compensador através do teclado até que seja traçado um lugar das raízes que passa pelo ponto de projeto.
d. Para o sistema compensado, o MATLAB informará então as coordenadas do ponto de operação, o ganho neste ponto, bem como uma estimativa de %UP, T_s, T_p, ζ, ω_n e K_p representados por uma aproximação de segunda ordem no ponto de operação.
e. O MATLAB mostrará a resposta ao degrau do sistema compensado.

8. Projete um controlador PD para o sistema mostrado na Fig. P9.2 para reduzir o tempo de assentamento por um fator de 4 ao mesmo tempo em que continua a operar com uma ultrapassagem de 20%. Compare o desempenho com o obtido no Exemplo 9.7.

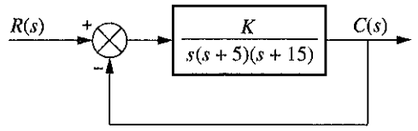


Fig. P9.2

9. Considere o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)^2(s+3)}$$

a. Determine a localização dos pólos dominantes que leva a um tempo de assentamento de 1,6 s e a uma ultrapassagem de 25%.

b. Se for usado um compensador com um zero em −1 para atender as condições de (a), qual deve ser a contribuição angular do pólo do compensador?
c. Determine a localização do pólo do compensador.
d. Determine o ganho necessário para atender os requisitos estabelecidos em (a).
e. Determine a localização dos outros pólos a malha fechada do sistema compensado.
f. Discuta a validade da aproximação de segunda ordem.

MATLAB

g. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular o sistema compensado visando verificar o projeto.

10. O sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

deve ser projetado para um tempo de assentamento de 1,667 s e uma ultrapassagem de 16,3%. Se o zero do compensador for posicionado em −1, faça o seguinte:

a. Determine as coordenadas dos pólos dominantes.
b. Determine o pólo do compensador.
c. Determine o ganho do sistema.
d. Determine a localização de todos os pólos não-dominantes.
e. Avalie a exatidão da aproximação de segunda ordem.
f. Calcule as características de erro de estado estacionário.

MATLAB

g. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular o sistema e calcular as características da resposta transitória real para uma entrada em degrau.

11. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K(s+6)}{(s+2)(s+4)(s+7)(s+8)}$$

faça o seguinte:

a. Esboce o lugar das raízes.
b. Determine as coordenadas dos pólos dominantes para os quais $\zeta = 0{,}8$.
c. Determine o ganho para o qual $\zeta = 0{,}8$.
d. Se o sistema for compensado em cascata de modo que $T_s = 1$ s e $\zeta = 0{,}8$, determine o pólo do compensador se o zero deste for −4,5.
e. Discuta a validade da aproximação de segunda ordem.

MATLAB

f. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular os sistemas não-compensado e compensado e compare os resultados obtidos com os esperados.

MATLAB

12. Refaça o Problema 11 usando o MATLAB da seguinte forma:

a. O MATLAB irá gerar o lugar das raízes relativo ao sistema não-compensado juntamente com a reta de relação de amortecimento de 0,8. Você selecionará, de forma interativa, o ponto de operação. O MATLAB informará então as coordenadas do ponto de operação, o ganho neste ponto, bem como uma estimativa de %UP, T_s, T_p, ζ, ω_n e K_p representados por uma aproximação de segunda ordem no ponto de operação.
b. O MATLAB mostrará a resposta ao degrau do sistema não-compensado.
c. Sem dado de entrada adicional, o MATLAB calculará o ponto de projeto compensado e pedirá que você entre, pelo teclado, com um valor do pólo do compensador por avanço de fase. O MATLAB responderá com um gráfico do lugar das raízes mostrando o ponto de projeto compensado. O MATLAB permitirá então que você continue a alterar o valor do pólo do compensador por avanço de fase, através do teclado, até que seja traçado um lugar das raízes que passe pelo ponto de projeto.
d. Para o sistema compensado, o MATLAB informará então as coordenadas do ponto de operação, o ganho neste ponto, bem como uma estimativa de %UP, T_s, T_p, ζ, ω_n e K_p representados por uma aproximação de segunda ordem no ponto de operação.
e. O MATLAB mostrará a resposta ao degrau do sistema compensado.
f. Mude a localização do zero do compensador algumas vezes e colete dados sobre o sistema compensado para ver se outras escolhas do zero do compensador são vantajosas em relação ao projeto original.

13. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+20)(s+40)}$$

O sistema está operando com 20% de ultrapassagem. Projete um compensador para reduzir o tempo de assentamento à metade sem afetar a ultrapassagem percentual e faça o seguinte:

a. Calcule os pólos dominantes, o ganho e o tempo de assentamento do sistema não-compensado.
b. Calcule os pólos dominantes, o ganho e o tempo de assentamento do sistema compensado.
c. Calcule o pólo e o zero do compensador. Determine o ganho necessário.

MATLAB

d. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular a resposta ao degrau dos sistemas não-compensado e compensado.

14. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+15)(s^2+6s+13)}$$

O sistema está operando com 30% de ultrapassagem.

a. Determine a função de transferência de um compensador em cascata, o ganho do sistema e a localização do pólo dominante que reduzirá à metade o tempo de assentamento se o zero do compensador estiver em −7.
b. Determine os outros pólos e zeros e discuta a aproximação de segunda ordem.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular os sistemas não-compensado e compensado para observar o efeito do compensador.

15. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+10s+26)}$$

faça o seguinte:

a. Determine o tempo de assentamento do sistema se ele estiver operando com 15% de ultrapassagem.
b. Determine o zero de um compensador e o ganho, K, de modo que o tempo de assentamento seja de 7 s. Admita que o pólo do compensador esteja localizado em −15.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular a resposta ao degrau do sistema objetivando testar o compensador.

16. Um sistema de controle com retroação tem a seguinte função de transferência no canal direto:

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+10)}$$

a. Projetar um compensador que leva a pólos dominantes com uma relação de amortecimento de 0,357 e freqüência natural de 1,6 rad/s. Certifique-se do valor de K.
b. Estime a ultrapassagem percentual e o valor do tempo de assentamento.
c. A aproximação de segunda ordem é válida?

MATLAB

d. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular e comparar a resposta transitória do sistema compensado com a resposta transitória prevista.

17. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{(s^2+20s+101)(s+20)}$$

a relação de amortecimento deve ser 0,4 e o tempo de assentamento, 0,5 s.
a. Determine as coordenadas dos pólos dominantes.
b. Determine a localização do zero do compensador se o pólo deste estiver em -15.
c. Determine o ganho de sistema necessário.
d. Compare o desempenho dos sistemas não-compensado e compensado.

MATLAB

e. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular o sistema no sentido de verificar o projeto. Refaça o projeto, se necessário.

18. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)(s+5)}$$

a. Mostre que o sistema não consegue operar com um tempo de assentamento de 2/3 s e uma ultrapassagem percentual de 1,5% mediante um simples ajuste de ganho.
b. Projete um compensador por avanço de fase de modo que o sistema atenda as características da resposta transitória da parte (a). Especifique o pólo e o zero do compensador e o ganho necessário.

19. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1 com

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)}$$

Determine a função de transferência de um compensador por atraso e avanço de fase que produzirá um tempo de assentamento 0,5 s mais curto que o do sistema não-compensado, com uma relação de amortecimento de 0,5, e que melhore o erro de estado estacionário por um fator de 30. O zero do compensador está em -5. Determine também o ganho do sistema compensado. Justifique o uso de aproximações de segunda ordem e verifique o projeto através de simulação.

MATLAB

20. Refaça o Problema 19 usando um compensador por atraso e avanço de fase e o MATLAB da seguinte forma:
a. O MATLAB irá gerar o lugar das raízes relativo ao sistema não-compensado juntamente com a reta de relação de amortecimento de 0,5. Você selecionará, de forma interativa, o ponto de operação. O MATLAB informará então as coordenadas do ponto de operação, o ganho neste ponto, bem como uma estimativa de %UP, T_s, T_p, ζ, ω_n e K_p representados por uma aproximação de segunda ordem no ponto de operação.
b. O MATLAB mostrará a resposta ao degrau do sistema não-compensado.
c. Sem dado de entrada adicional, o MATLAB calculará o ponto de projeto compensado e pedirá que você entre, pelo teclado, com um valor do pólo do compensador por avanço de fase. O MATLAB responderá com um gráfico do lugar das raízes mostrando o ponto de projeto compensado. O MATLAB permitirá então que você continue a alterar o valor do pólo do compensador por avanço de fase, através do teclado, até que seja traçado um lugar das raízes que passe pelo ponto de projeto.
d. Para o sistema compensado, o MATLAB informará então as coordenadas do ponto de operação, o ganho neste ponto, bem como uma estimativa de %UP, T_s, T_p, ζ, ω_n e K_p representados por uma aproximação de segunda ordem no ponto de operação.
e. O MATLAB mostrará a seguir a resposta ao degrau do sistema compensado.
f. Mude a localização do zero do compensador algumas vezes e colete dados sobre o sistema compensado para ver se outras escolhas do zero do compensador são vantajosas em relação ao projeto original.
g. Usando o erro de estado estacionário do sistema não-compensado, acrescente um compensador por atraso de fase para melhorar em 30 vezes o erro de estado estacionário do sistema não-compensado com um efeito mínimo sobre a resposta transitória projetada. Faça com que o MATLAB trace a resposta ao degrau. Experimente diversos valores para o pólo do compensador por atraso de fase e veja o efeito sobre a resposta ao degrau.

21. Dado o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

faça o seguinte:
a. Projete um compensador que leve às seguintes especificações: tempo de assentamento = 2,86 s, ultrapassagem percentual = 4,32%; o erro de estado estacionário é melhorado por fator 2 em relação ao do sistema não-compensado.
b. Compare as especificações de resposta transitória e de erro de estado estacionário dos sistemas não-compensado e compensado.
c. Compare os ganhos dos sistemas não-compensado e compensado.
d. Discuta a validade da aproximação de segunda ordem.

MATLAB

e. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular os sistemas não-compensado e compensado e verificar as especificações.

22. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+11)}$$

faça o seguinte:
a. Determine o ganho, K, para que o sistema não-compensado opere com uma ultrapassagem de 30%.

b. Determine o instante de pico e K_v para o sistema não-compensado.
c. Projete um compensador por atraso e avanço de fase para reduzir à metade os valores do instante de pico e da ultrapassagem percentual e produzir um erro de estado estacionário 30 vezes menor. Especifique todos os pólos, zeros e ganhos.

23. O sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{(s^2+4s+8)(s+10)}$$

deve ser projetado para atender as seguintes especificações:
Ultrapassagem: inferior a 25%
Tempo de assentamento: inferior a 1 s
$K_p = 10$
Faça o seguinte:
a. Determine o desempenho do sistema não-compensado operando com 10% de ultrapassagem.
b. Projete um compensador passivo para atender as especificações desejadas.

MATLAB

c. Use o MATLAB para simular o sistema compensado. Compare a resposta com as especificações desejadas.

24. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)}$$

O sistema é operado com 4,32% de ultrapassagem. A fim de melhorar o erro de estado estacionário, deve-se aumentar o valor de K_p em pelo menos 5 vezes. Deve ser usado um compensador da forma

$$G_c(s) = \frac{(s+0{,}5)}{(s+0{,}1)}$$

a. Determine o ganho necessário para os sistemas não-compensado e compensado.
b. Determine o valor de K_p para os sistemas compensado e não-compensado.
c. Estime a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento dos sistemas compensado e não-compensado.
d. Discuta a validade da aproximação de segunda ordem usada para obter os resultados de (c).

MATLAB

e. Use o MATLAB ou outro programa de computador para simular a resposta ao degrau dos sistemas não-compensado e compensado. O que você observa na resposta do sistema compensado?
f. Projete um compensador que irá corrigir a objeção levantada em (e).

25. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)}$$

projete um controlador PID que irá produzir uma resposta ao degrau unitário com um instante de pico de 1,047 s e com uma relação de amortecimento de 0,8 com erro de estado estacionário nulo.

26. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+6)}$$

faça o seguinte:
a. Projete um controlador PID que irá produzir uma resposta ao degrau com ultrapassagem de 20% e tempo de assentamento de 2 s e resposta a entradas em degrau e em rampa com erro de estado estacionário nulo.

MATLAB

b. Use o MATLAB para verificar o projeto.

MATLAB

27. Refaça o Problema 26 usando o MATLAB da seguinte forma:
a. O MATLAB pedirá que você entre com os valores desejados de ultrapassagem percentual, tempo de assentamento e valor do zero do compensador PI.
b. O MATLAB projetará o zero do controlador.
c. O MATLAB mostrará o lugar das raízes do sistema compensado com o PID com a reta de ultrapassagem percentual desejada.
d. O usuário selecionará interativamente a interseção do lugar das raízes com a reta de ultrapassagem percentual desejada.
e. O MATLAB mostrará as características de ganho e de resposta transitória do sistema compensado com o PID.
f. O MATLAB mostrará a resposta ao degrau do sistema compensado com o PID.
g. O MATLAB mostrará a resposta à rampa do sistema compensado com o PID.

28. Se o sistema da Fig. P9.3 opera com uma relação de amortecimento dos pólos dominantes de 0,517, determine a localização de todos os pólos e zeros a malha fechada.

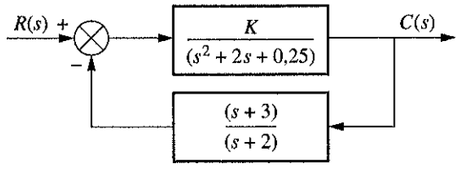


Fig. P9.3

29. Para o sistema com retroação unitária da Fig. P9.1, com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)(S+6)}$$

faça o seguinte:
a. Projete uma retroação de velocidade que irá produzir uma resposta ao degrau com ultrapassagem inferior a 15% e tempo de assentamento inferior a 3 s. Use a Aproximação 1.

MATLAB

b. Use o MATLAB para simular o sistema compensado.

30. Dado o sistema da Fig. P9.4:
a. Projete o valor de K_1, bem como de a no canal de retroação da malha secundária, para obter um tempo de assentamento de 1 s e uma ultrapassagem de 5% na resposta ao degrau.
b. Projete o valor de K para obter uma resposta da malha principal com 10% de ultrapassagem para uma entrada em degrau.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular a resposta ao degrau do sistema completo a malha fechada.

MATLAB

d. Adicione um compensador PI para reduzir a zero o erro de estado estacionário da malha principal e simule a resposta ao degrau usando o MATLAB ou qualquer outro programa de computador.

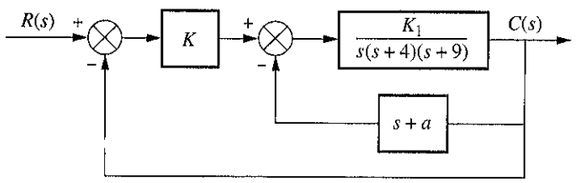


Fig. P9.4

31. Identifique e implemente com amplificadores operacionais os seguintes controladores:

a. $\dfrac{s + 0{,}01}{s}$

b. $s + 2$

32. Identifique e implemente com estruturas passivas os seguintes controladores:

a. $\dfrac{s + 0{,}1}{s + 0{,}01}$

b. $\dfrac{s + 2}{s + 5}$

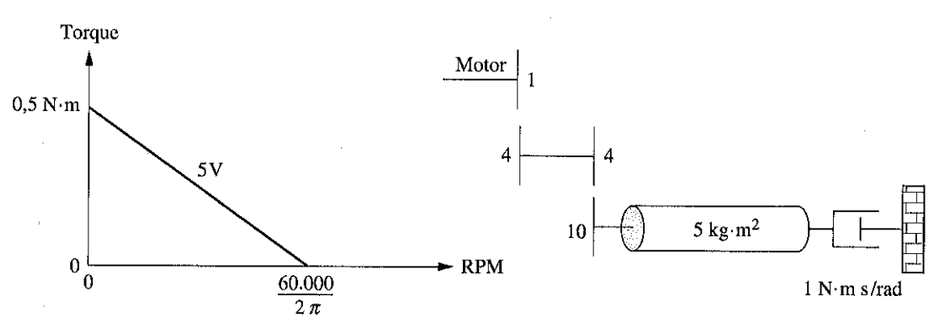
c. $\left(\dfrac{s + 0{,}1}{s + 0{,}01}\right)\left(\dfrac{s + 1}{s + 10}\right)$

33. Repita o problema anterior, usando amplificadores operacionais.

Problemas de Projeto

34. a. Determine a função de transferência de um motor cuja curva torque-velocidade e carga estão mostradas na Fig. P9.5.

Fig. P9.5



b. Projete um compensador tacométrico para obter uma relação de amortecimento de 0,5 de um controle de posição empregando um amplificador de potência de ganho 1 e um pré-amplificador de ganho 5000.

c. Compare as características transitória e de estado estacionário dos sistemas não-compensado e compensado.

35. Você dispõe de um motor cuja função de transferência está mostrada na Fig. P9.6(*a*).

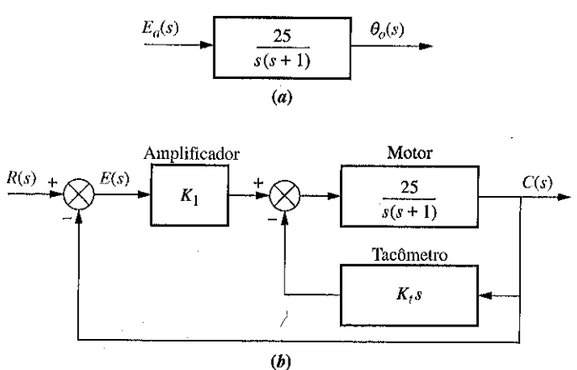


Fig. P9.6

a. Se a função de transferência deste motor for a função de transferência do canal direto de um sistema com retroação unitária, calcule a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento esperados.

b. Você deseja melhorar a resposta a malha fechada. Como os parâmetros do motor não podem ser alterados e você não pode usar um motor diferente, são inseridos na malha um amplificador e um tacômetro como mostrado na Fig. P9.6(*b*). Determine os valores de K_1 e de K_t que levam a uma ultrapassagem percentual de 25% e a um tempo de assentamento de 0,2 s.

c. Calcule as especificações de erro de estado estacionário para os sistemas não-compensado e compensado.

36. Um sistema de controle de posição deve ser projetado com 20% de ultrapassagem e um tempo de assentamento de 2 s. Para acionar o motor você tem em mãos um amplificador de potência cuja função de transferência em cascata é $K_1/(s + 20)$. Para converter a posição angular do eixo do motor em tensão estão disponíveis dois potenciômetros de 10 voltas. Uma tensão de $\pm 5\pi$ volts é aplicada aos potenciômetros. Um motor CC cuja função de transferência é da forma

$$\frac{\theta_o(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s(s + a)}$$

também está disponível. A função de transferência do motor é determinada experimentalmente da seguinte forma: O motor e a carga com sistema de transmissão são acionados a malha aberta aplicando-se à armadura um pulso retangular de grande amplitude e pequena duração. Um oscilograma da resposta mostra que o motor atingiu 63% do seu valor final de saída depois de 1/2 s após a aplicação do pulso. Além disso, com uma tensão CC de 10 V aplicada à armadura, a velocidade de saída constante era de 100 rad/s.

a. Desenhe um diagrama de blocos completo do sistema, especificando a função de transferência de cada componente quando o sistema estiver operando com 20% de ultrapassagem.

b. Qual será o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária?

c. Determine as características da resposta transitória.

d. Se for usada uma retroação tacométrica em torno do motor, como mostrado na Fig. P9.7, determine o ganho do tacômetro e do amplificador para atender as especificações. Resuma as características transitórias e de estado estacionário.

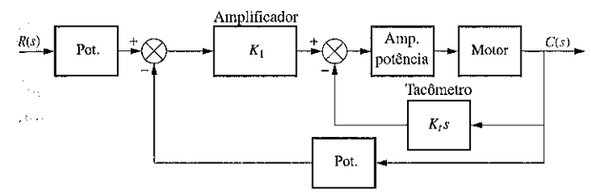


Fig. P9.7

37. Um sistema de controle de posição deve ser projetado com 10% de ultrapassagem, com um tempo de assentamento de 1 s e com $K_v = 1000$. Para acionar o motor você tem em mãos um amplificador e um amplificador de potência cuja função de transferência em cascata é $K_1/(s + 40)$. Para converter a posição angular do eixo do motor em tensão estão disponíveis dois potenciômetros de 10 voltas. Uma tensão de $\pm 20\pi$ volts é aplicada aos potenciômetros. Um motor CC cuja função de transferência é da forma

$$\frac{\theta_o(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s(s + a)}$$

também está disponível. Os seguintes dados são obtidos a partir de um teste dinamométrico com 50 V: Com um torque de 25 N·m, a rotação do motor é de 1433 rpm. Com 75 N·m, a rotação do motor é de 478 rpm. A velocidade medida na carga é 0,1 da velocidade no eixo do motor. A inércia equivalente, incluindo a carga, vista no eixo da armadura é de 100 kg·m² e o coeficiente de amortecimento equivalente incluindo a carga, visto também no eixo do motor é de 50 N·m·s/rad.

a. Desenhe um diagrama de blocos completo do sistema, especificando a função de transferência de cada componente.

b. Projete um compensador passivo para atender os requisitos do enunciado do problema.

c. Desenhe um esquema do compensador mostrando todos os valores dos componentes. Use um amplificador operacional para isolar onde for necessário.

MATLAB

d. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular o sistema e mostrar que todos os requisitos foram atendidos.

38. Dado o sistema mostrado na Fig. P9.8, obter os valores de K e de K_t de modo que os pólos a malha fechada dominantes tenham uma relação de amortecimento de 0,5 e que os pólos não amortecidos da malha secundária tenham uma relação de amortecimento de 0,8.

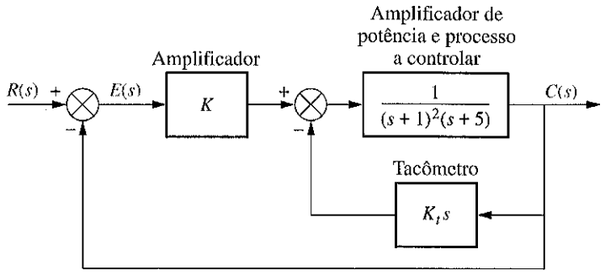


Fig. P9.8

39. Dado o sistema mostrado na Fig. P9.9, obter os valores de K e de K_t de modo que o sistema a malha fechada tenha uma ultrapassagem de 4,32% e que a malha secundária tenha uma relação de amortecimento de 0,8. Compare o desempenho esperado do sistema sem a compensação tacométrica com o desempenho esperado do sistema com a compensação tacométrica.

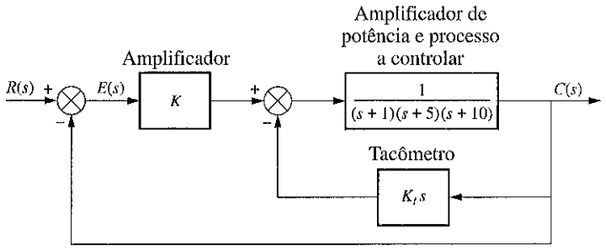


Fig. P9.9

40. No Problema 46 do Cap. 8, foi projetado um sistema de controle de posicionamento da cabeça leitora-gravadora do acionador de disco flexível que resultou em um tempo de assentamento de 0,1 s usando unicamente o ajuste de ganho. Projete um compensador por avanço de fase para diminuir o tempo de assentamento para 0,05 s sem mudar o valor da ultrapassagem percentual. Determine também o ganho de malha necessário.

41. Considere o sistema de controle de temperatura de um sistema químico mostrado na Fig. P9.10. O sistema não-compensado está operando com um tempo de subida aproximadamente igual ao de um sistema de segunda ordem com um instante de pico de 16 s e 5% de ultrapassagem. Há, também, um erro de estado estacionário considerável. Projetar um controlador PID de modo que o sistema compensado apresente um tempo de subida aproximadamente equivalente ao de um sistema de segunda ordem com instante de pico de 8 s, 5% de ultrapassagem e erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau.

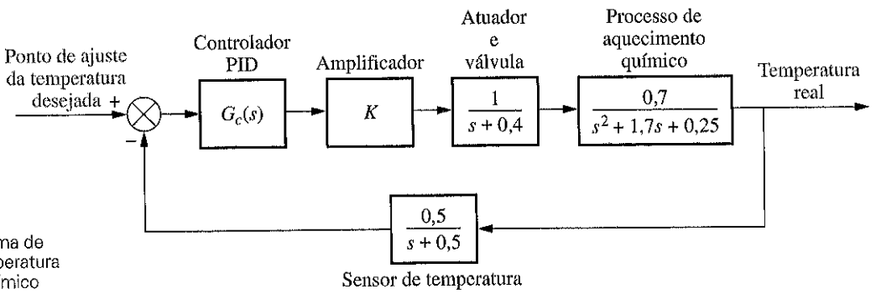


Fig. P9.10 Sistema de controle de temperatura em processo químico

42. Os sistemas de levitação magnética são usados agora para suspender e realizar a propulsão de trens ao longo de pistas. Um diagrama para demonstração de um sistema de levitação magnética está mostrado na Fig. P9.11(*a*). A ação entre um ímã permanente colado à bola de pingue-pongue, objeto a ser levitado, e um eletroímã fornece a sustentação. A intensidade da elevação pode ser controlada através da tensão V_a aplicada ao eletroímã como mostrado na Fig. P9.11(*a*). A elevação é controlada usando um par fotodetector para detectar a elevação da bola de pingue-pongue. Admita que o sistema de controle de elevação esteja respresentado pela Fig. P9.11(*b*) e faça o seguinte (Cho, 1993):

a. Projete um compensador, $G_c(s)$, para obter um tempo de assentamento de 0,1 s ou menos se a resposta ao degrau não precisar ter uma ultrapassagem superior a 1%. Especifique os pólos, os zeros e o ganho do compensador.

b. Ponha um outro compensador em cascata para minimizar o erro de estado estacionário e ter um tempo total de assentamento inferior a 0,5 s. Este compensador não deve afetar consideravelmente a resposta transitória projetada em (a). Especifique os pólos e zeros deste compensador.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular o sistema e verificar o projeto.

43. A função de transferência de uma aeronave AFTI/F-16 que relaciona o ângulo de ataque, $\alpha(t)$, à deflexão do profundor, $\delta_e(t)$, é dada por

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = 0,072\frac{(s+23)(s^2+0,05s+0,04)}{(s-0,7)(s+1,7)(s^2+0,08s+0,04)}$$

Admita o diagrama de blocos mostrado na Fig. P9.12 para

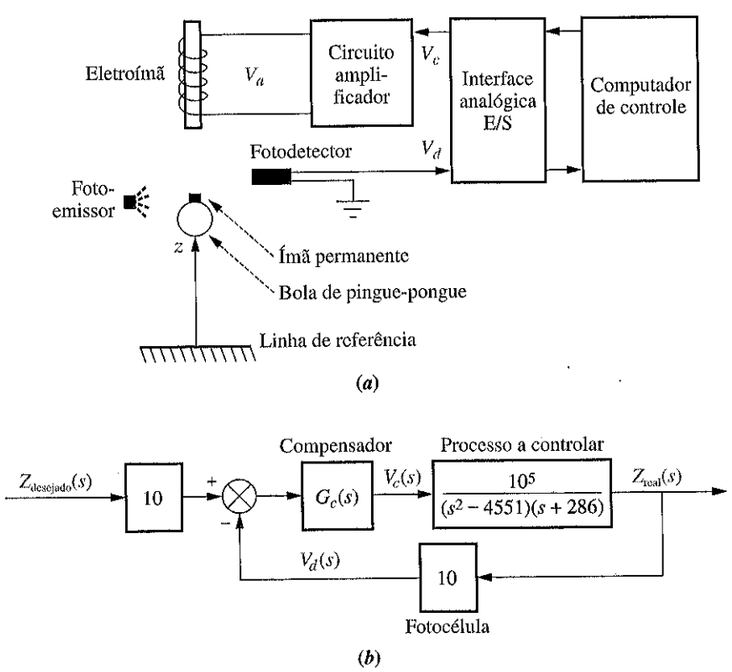


Fig. P9.11
a. Sistema de levitação magnética (© 1993 IEEE);
b. diagrama de blocos

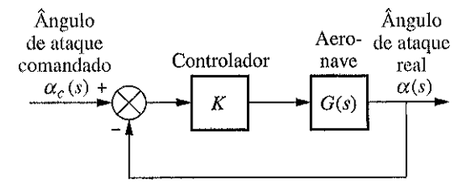


Fig. P9.12 Diagrama de blocos simplificado para controle do ângulo de ataque

controlar o ângulo de ataque, α (Monahemi, 1992), e faça o seguinte:

a. Determine a faixa de valores de K para estabilidade.

b. Trace o lugar das raízes.

c. Projete um compensador em cascata para obter um erro de estado estacionário nulo, um tempo de assentamento da ordem de 0,05 s e uma ultrapassagem inferior a 20%.

MATLAB

d. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para simular o sistema e verificar o projeto.

44. A Fig. P9.13 é um diagrama de blocos simplificado do controle do ângulo de manobra de um veículo dirigido automaticamente. Projete um compensador por avanço de fase para obter uma resposta ao degrau do sistema a malha fechada com ultrapassagem de 10% e um tempo de assentamento de 1,5 s.

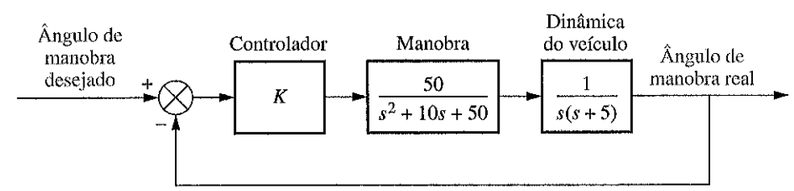


Fig. P9.13 Diagrama de blocos simplificado do controle do ângulo de manobra de um veículo guiado automaticamente

Problema Progressivo de Análise e Projeto

45. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 trata do controle de um mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade. No Problema 62(*a*), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle pantográfico ativo. No Cap. 8, Problema 53, você projetou o ganho que levou a uma resposta ao degrau do sistema a malha fechada com 38% de ultrapassagem. Um gráfico da resposta ao degrau mostraria um tempo de assentamento maior que 0,5 s bem como uma oscilação de alta freqüência superposta à resposta ao degrau (O'Conner, 1997). Desejamos reduzir o tempo de assentamento a cerca de 0,3 s, reduzir a zero o erro de estado estacionário e eliminar a oscilação de alta freqüência. Uma forma de eliminar a oscilação de alta freqüência é inserir um filtro supressor de faixa (*notch*) em cascata com o processo a controlar. Usando o filtro supressor,

$$G_n(s) = \frac{s^2+16s+9200}{(s+60)^2}$$

faça o seguinte:

a. Projete um controlador PD que leve a um tempo de assentamento de aproximadamente 0,3 s com uma ultrapassagem inferior a 60%.

b. Adicione um controlador PI para que resulte erro de estado estacionário nulo para entradas em degrau.

MATLAB

c. Use o MATLAB para traçar a resposta ao degrau do sistema a malha fechada compensada com PID/supressor.

Bibliografia

Budak, A. *Passive and Active Network Analysis and Synthesis.* Houghton Mifflin, Boston, MA, 1974.

Cho, D., Kato, Y., and Spilman, D. Sliding Mode and Classical Controllers in Magnetic Levitation Systems. *IEEE Control Systems*, February 1993, pp. 42–48.

D'Azzo, J. J., and Houpis, C. H. *Feedback Control System Analysis and Synthesis.* 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1966.

Dorf, R. C. *Modern Control Systems.* 5th ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

Hostetter, G. H., Savant, C. J., Jr., and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems.* 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description.* NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, D.C., 1980.

Kuo, B. C. *Automatic Control Systems.* 7th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

Monahemi, M. M., Barlow, J. B., and O'Leary, D. P. Design of Reduced-Order

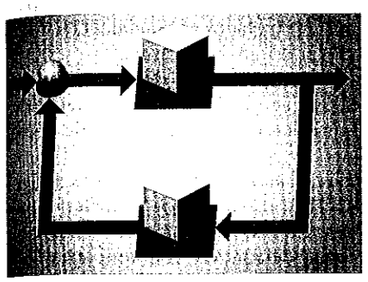
Observers with Precise Loop Transfer Recovery. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 6, November–December 1992, pp. 1320–1326.

O'Connor, D. N., Eppinger, S. D., Seering, W. P., and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ogata, K. *Modern Control Engineering*. 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.

Van de Vegte, J. *Feedback Control Systems*. 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

CAPÍTULO 10



Técnicas de Resposta de Freqüência

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- A definição de resposta de freqüência
- Como traçar a resposta de freqüência
- Como usar a resposta de freqüência para analisar estabilidade
- Como usar a resposta de freqüência para analisar o desempenho transitório e de erro de estado estacionário do sistema
- Como usar a resposta de freqüência para projetar o ganho de modo a atender especificações de estabilidade

Objetivos do Estudo de Caso

Você será capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com o estudo de caso seguinte:

- Dado o sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrado na contracapa dianteira e usando métodos de resposta de freqüência, você deverá ser capaz de determinar a faixa de valores de ganho, K, para estabilidade. Você também deverá ser capaz de, dado K, determinar o percentual de ultrapassagem, o tempo de assentamento, o instante de pico e o tempo de subida.

10.1 Introdução

O método do lugar das raízes para o projeto da resposta transitória, do erro de estado estacionário e da estabilidade foi tratado nos Caps. 8 e 9. No Cap. 8 tratamos do caso simples de projeto através do ajuste de ganho, onde se estabelece uma solução de compromisso entre a resposta transitória e o erro de estado estacionário desejados. No Cap. 9, a necessidade desta solução de compromisso foi eliminada com o uso de estruturas de compensação para que os erros transitórios e de estado estacionário pudessem ser especificados e projetados separadamente. Além disso, a resposta transitória desejada poderia não estar necessariamente no lugar original das raízes.

Este capítulo e o Cap. 11 apresentam o projeto de sistemas de controle com retroação através do ajuste de ganho e de estruturas de compensação a partir de uma outra perspectiva — a da resposta de freqüência. Os resultados das técnicas de compensação por meio de resposta de freqüência não são novos ou diferentes dos resultados das técnicas de lugar das raízes.

Os métodos de resposta de freqüência, desenvolvidos por Nyquist e Bode nos anos de 1930, são mais antigos que o método do lugar das raízes, descoberto por Evans em 1948 (Nyquist, 1932; Bode, 1945). O método mais antigo, tratado neste capítulo, não é tão intuitivo quanto o do lugar das raízes. Contudo, a resposta de freqüência produz um novo enfoque vantajoso a partir do qual podemos tratar os sistemas de controle com retroação. Esta técnica tem vantagens distintas nas seguintes situações:

1. quando se modelam funções de transferência a partir de dados físicos, conforme mostrado na Fig. 10.1;
2. quando se projetam compensadores de avanço de fase para atender o erro de estado estacionário requerido e a resposta transitória requerida;
3. ao se determinar a estabilidade de sistemas não-lineares, e
4. na remoção de ambigüidades ao se esboçar o lugar das raízes.

Primeiro, discutiremos o conceito de resposta de freqüência, definindo-a, deduzindo expressões analíticas para a resposta de freqüência, traçando a resposta de freqüência, desenvolvendo formas de esboçar a resposta de freqüência, e então aplicar o conceito à análise e ao projeto de sistema de controle.

O Conceito da Resposta de Freqüência

No estado estacionário, entradas senoidais aplicadas a sistemas lineares geram respostas senoidais de mesma freqüência. Embora estas respostas sejam da mesma freqüência que a da entrada, elas diferem da entrada em amplitude e ângulo de fase. Estas diferenças são funções da freqüência.

Antes de definir resposta de freqüência, vejamos uma representação conveniente de sinais senoidais. Estes podem ser representados por números complexos chamados *fasores*. A magnitude do número complexo é a amplitude, e o ângulo do número complexo é o ângulo de fase da senóide. Assim, $M_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ pode ser representada por $M_1 \angle \phi_1$, onde a freqüência, ω, fica implícita.

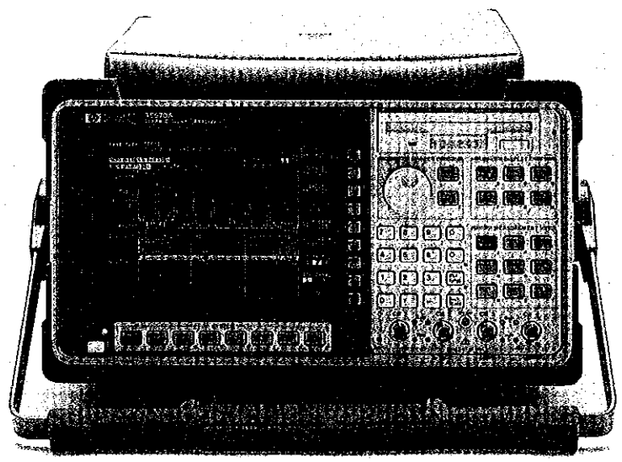


Fig. 10.1 O Analisador Dinâmico de Sinal HP 35670A obtém os dados da resposta de freqüência a partir de um sistema físico. Os dados mostrados podem ser usados para analisar, projetar ou determinar um modelo matemático para o sistema.

Uma vez que o sistema provoca alterações tanto na amplitude quanto no ângulo de fase da entrada, podemos pensar no próprio sistema representado por um número complexo, definido de tal modo que o produto do fasor de entrada pela função de sistema produza a representação do fasor de saída.

Considere o sistema mecânico da Fig. 10.2(a). Se a força de entrada, $f(t)$, for senoidal, a resposta do sistema em estado estacionário, $x(t)$, também será senoidal e com a mesma freqüência da entrada. Na Fig. 10.2(b), as senóides de entrada e de saída são representadas por números complexos, ou fasores, $M_e(\omega) \angle \phi_e(\omega)$ e $M_s(\omega) \angle \phi_s(\omega)$, respectivamente. Aqui, os M's são as amplitudes e os ϕ's, os ângulos de fase das senóides, como mostrado na Fig. 10.2(c). Admita que o sistema seja representado pelo número complexo, $M(\omega) \angle \phi(\omega)$. A senóide de estado estacionário na saída é obtida multiplicando-se a representação do número complexo da entrada pela representação do número complexo do sistema. Desta maneira, a senóide de estado estacionário da saída é:

$$M_s(\omega)\angle\phi_o(\omega) = M_e(\omega)M(\omega)\angle[\phi_e(\omega) + \phi(\omega)] \tag{10.1}$$

Com base na Eq.(10.1), vemos que a função de sistema é dada por

$$M(\omega) = \frac{M_s(\omega)}{M_e(\omega)} \tag{10.2}$$

e

$$\phi(\omega) = \phi_s(\omega) - \phi_e(\omega) \tag{10.3}$$

As Eqs. (10.2) e (10.3) constituem nossa definição de resposta de freqüência. Chamamos $M(\omega)$ a *resposta de freqüência em magnitude* e $\phi(\omega)$ a *resposta de freqüência em fase*. A combinação das respostas de freqüência em magnitude e em fase é chamada de *resposta de freqüência* $M(\omega) \angle \phi(\omega)$.[1]

Em outras palavras, definimos a magnitude da resposta de freqüência através da relação entre as magnitudes das senóides de saída e de entrada. Definimos a fase da resposta através da diferença entre os ângulos de fase entre as senóides de saída e de entrada. Ambas são função da freqüência e se aplicam somente à resposta de estado estacionário devida a senóides aplicadas ao sistema.

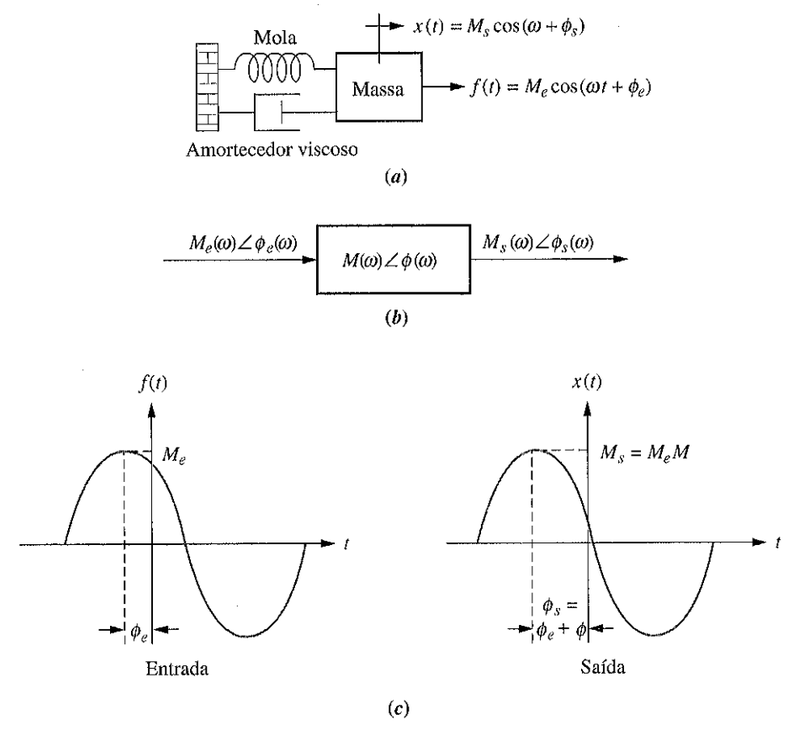


Fig. 10.2 Resposta de freqüência senoidal: **a.** sistema; **b.** função de transferência; **c.** formas de onda dos sinais de entrada e de saída.

[1]Diz-se também que $M(\omega)$ é a magnitude da resposta de freqüência e que $\phi(\omega)$ é fase da resposta de freqüência. (N.T.)

Expressões Analíticas da Resposta de Freqüência

Agora que definimos resposta de freqüência, obtenhamos uma expressão analítica para ela (Nilsson, 1990). Mais adiante neste capítulo usaremos esta expressão analítica para determinar estabilidade, resposta transitória e erro de estado estacionário. A Fig. 10.3 mostra um sistema, $G(s)$, com a transformada de Laplace de uma senóide genérica, $r(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos[\omega t - \operatorname{tg}^{-1}(B/A)]$ como entrada. Podemos representar a entrada como um fasor, de três modos: (1) em forma polar, $M_e \angle \phi_e$, onde $M_e = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\phi_e = \operatorname{tg}^{-1}(B/A)$; (2) na forma retangular, $A - jB$; e (3) usando a fórmula de Euler, $M_e e^{j\phi_e}$.

Calcularemos agora a parte da resposta forçada de $C(s)$, a partir da qual determinamos a resposta de freqüência. Da Fig 10.3,

$$C(s) = \frac{As + B\omega}{(s^2 + \omega^2)} G(s) \tag{10.4}$$

Separamos a solução forçada da solução transitória executando uma expansão em frações parciais da Eq. (10.4). Assim,

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{As + B\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} G(s) \\ &= \frac{K_1}{s + j\omega} + \frac{K_2}{s - j\omega} + \text{Termos das frações parciais de G(s)} \end{aligned} \tag{10.5}$$

onde

$$\begin{aligned} K_1 &= \left.\frac{As + B\omega}{s - j\omega} G(s)\right|_{s \to -j\omega} = \frac{1}{2}(A + jB)G(-j\omega) = \frac{1}{2} M_e e^{-j\phi_e} M_G e^{-j\phi_G} \\ &= \frac{M_e M_G}{2} e^{-j(\phi_e + \phi_G)} \end{aligned} \tag{10.6a}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \left.\frac{As + B\omega}{s + j\omega} G(s)\right|_{s \to +j\omega} = \frac{1}{2}(A - jB)G(j\omega) = \frac{1}{2} M_e e^{j\phi_e} M_G e^{j\phi_G} \\ &= \frac{M_e M_G}{2} e^{j(\phi_e + \phi_G)} = K_1^* \end{aligned} \tag{10.6b}$$

Para as Eqs.(10.6), K_1^* é o conjugado complexo de K_1,

$$M_G = |G(j\omega)| \tag{10.7}$$

e

$$\phi_G = \text{ângulo de } G(j\omega) \tag{10.8}$$

A resposta de estado estacionário é a parcela da expansão em frações parciais correspondente aos pólos do sinal de entrada, ou seja, apenas os dois primeiros termos da Eq.(10.5). Portanto a saída senoidal de estado estacionário, $C_{ss}(s)$, é:

$$C_{ss}(s) = \frac{K_1}{s + j\omega} + \frac{K_2}{s - j\omega} \tag{10.9}$$

Substituindo as Eqs.(10.6) na Eq.(10.9), obtemos

$$C_{ss}(s) = \frac{\frac{M_e M_G}{2} e^{-j(\phi_e + \phi_G)}}{s + j\omega} + \frac{\frac{M_e M_G}{2} e^{j(\phi_e + \phi_G)}}{s - j\omega} \tag{10.10}$$

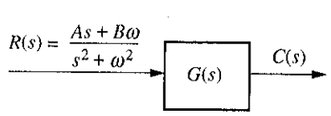


Fig. 10.3 Sistema com entrada senoidal.

Aplicando a transformação de Laplace inversa, obtemos

$$\begin{aligned} c(t) &= M_e M_G \left(\frac{e^{-j(\omega t + \phi_e + \phi_G)} + e^{j(\omega t + \phi_e + \phi_G)}}{2} \right) \\ &= M_e M_G \cos(\omega t + \phi_e + \phi_G) \end{aligned} \tag{10.11}$$

que pode ser representada na forma de fasor como $M_s \angle \phi_s = (M_1 \angle \phi_1)(M_G \angle \phi_G)$, onde $M_G \angle \phi_G$ é a função resposta de freqüência. Mas, com base nas Eqs. (10.7) e (10.8), $M_G \angle \phi_G = G(j\omega)$. Em outras palavras, a resposta de freqüência de um sistema cuja função de transferência é $G(s)$ é,

$$G(j\omega) = G(s)|_{s \to j\omega} \tag{10.12}$$

Plotando a Resposta de Freqüência

A resposta de freqüência, $G(j\omega) = M_G \angle \phi_G$, pode ser plotada de várias maneiras; duas delas são (1) através de gráficos separados de magnitude e de fase, em função da freqüência; ou (2) por meio de um gráfico polar, onde o comprimento do fasor é a magnitude e o ângulo do fasor é a fase. Quando plotamos os gráficos de magnitude e fase separados, a curva de magnitude pode ser traçada em decibéis (dB) em função de log ω, onde dB = 20 log M.[2] A curva de fase é construída com o ângulo de fase em função de log ω. A motivação para estes gráficos está mostrada na Seção 10.2.

Usando os conceitos tratados na Seção 8.1, os dados para os gráficos também podem ser obtidos usando vetores no plano s construídos a partir dos pólos e dos zeros de $G(s)$ para o eixo imaginário. Aqui, a magnitude relativa a uma freqüência particular é o produto dos comprimentos dos vetores dos zeros de $G(s)$ dividido pelo produto dos comprimentos dos vetores dos pólos de $G(s)$. Estes vetores são traçados ligando os pólos e zeros a pontos do eixo imaginário. A fase é obtida através da soma dos ângulos dos vetores relativos aos zeros de $G(s)$ menos a soma dos ângulos dos vetores referentes aos pólos de $G(s)$.* Efetuando estas operações para pontos sucessivos ao longo do eixo imaginário obtêm-se os dados para a resposta de freqüência. Convém lembrar: cada ponto é equivalente à substituição de $s = j\omega_1$ em $G(s)$ e a calcular seu valor.

Os gráficos também podem ser feitos por meio de um programa de computador que calcule a resposta de freqüência. Por exemplo, o programa de lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha o livro, pode ser usado com pontos de teste que estão no eixo imaginário. O valor de K calculado para cada freqüência é o inverso da magnitude em escala, e o ângulo calculado é o próprio valor da fase referente àquela freqüência.

O seguinte exemplo demonstra como obter uma expressão analítica para a resposta de freqüência e como construir um gráfico do resultado.

Exemplo 10.1

Resposta de freqüência a partir da função de transferência

Problema Determinar a expressão analítica de magnitude e de fase da resposta de freqüência de um sistema com função de transferência $G(s) = 1/(s + 2)$. Traçar também ambos os diagramas de magnitude e fase, separados, e o gráfico polar.

Solução Primeiro, substitua $s = j\omega$ na função de sistema e obtenha $G(j\omega) = 1/(j\omega + 2) = (2 - j\omega)/(\omega^2 + 4)$. A magnitude deste número complexo, $|G(j\omega)| = M(\omega) = 1/\sqrt{(\omega^2 + 4)}$, é a magnitude da resposta de freqüência. O ângulo de fase de $G(j\omega)$, $\phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}(\omega/2)$, é a fase da resposta de freqüência.

A resposta de freqüência, $G(j\omega)$, pode ser plotada de duas formas: (1) em gráficos de magnitude e fase separados, e (2) em gráfico polar. A Fig. 10.4 mostra diagramas de magnitude e de fase separados, com o diagrama da magnitude $20 \log M(\omega) = 20 \log(1/\sqrt{(\omega^2 + 4)})$ em função de log ω, e com o diagrama de fase $\phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}(\omega/2)$ em função de log ω. O gráfico polar, mostrado na Fig. 10.5, é um gráfico de $M(\omega) \angle \phi(\omega) = 1/\sqrt{(\omega^2 + 4)} \angle -\operatorname{tg}^{-1}(\omega/2)$ para diferentes valores de ω.

No exemplo anterior, plotamos as respostas separadas de magnitude e fase, bem como o gráfico polar, usando a expressão matemática da resposta de freqüência. Qualquer dessas representações da resposta de freqüência pode

[2]Em todas as partes deste livro, log é usado para designar $\log_{10}$, ou logaritmo na base 10.

*Estes vetores são traçados a partir dos pólos e zeros até pontos sobre o eixo imaginário (N.T.)

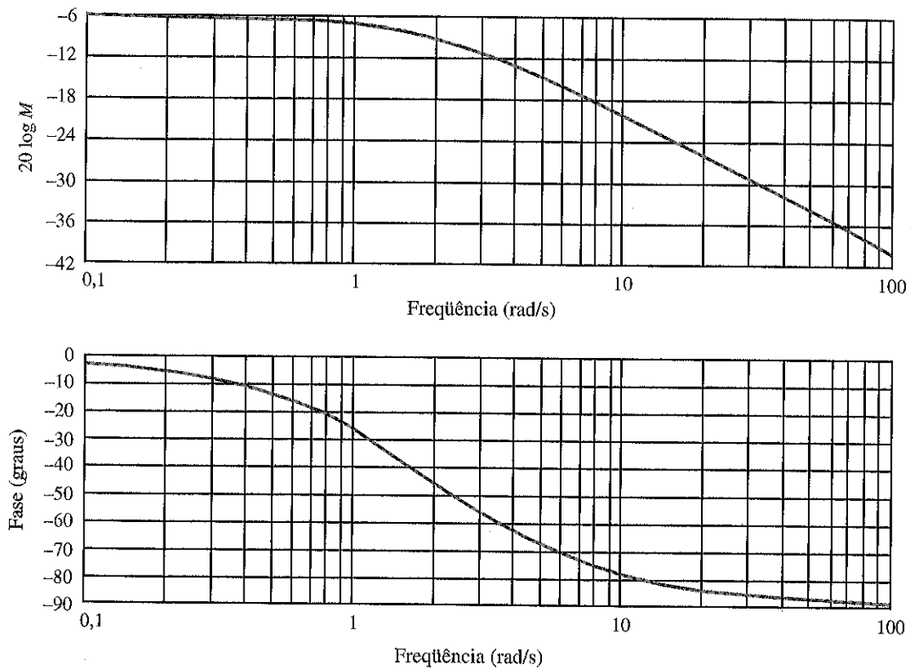


Fig. 10.4 Gráficos de resposta de freqüência para $G(s) = 1/(s + 2)$: magnitude e fase separados.

ser obtida a partir da outra. Você deve praticar esta conversão observando a Fig. 10.4 e obtendo a Fig. 10.5 usando pontos sucessivos. Por exemplo, na freqüência de 1 rad/s na Fig. 10.4, a magnitude é aproximadamente −7 dB, ou $10^{-7/20} = 0{,}447$. O gráfico da fase em 1 rad/s nos diz que a fase é de −26°. Desta maneira, no gráfico polar, um ponto de raio 0,447 com um ângulo de −26° é plotado e identificado como 1 rad/s. Continuando desta maneira para outras freqüências na Fig. 10.4, você pode obter a Fig. 10.5.

De modo semelhante, a Fig. 10.4 pode ser obtida a partir da Fig. 10.5 selecionando-se uma seqüência de pontos da Fig. 10.5 e convertendo-os em valores separados de magnitude e fase. Por exemplo, desenhando um vetor a partir da origem para o ponto em 2 rad/s na Fig. 10.5, vemos que a magnitude é $20 \log 0{,}35 = -9{,}12$ dB e o ângulo de fase é cerca de −45°. A magnitude e o ângulo de fase são então plotados em 2 rad/s na Fig. 10.4 nas curvas separadas de magnitude e de fase.

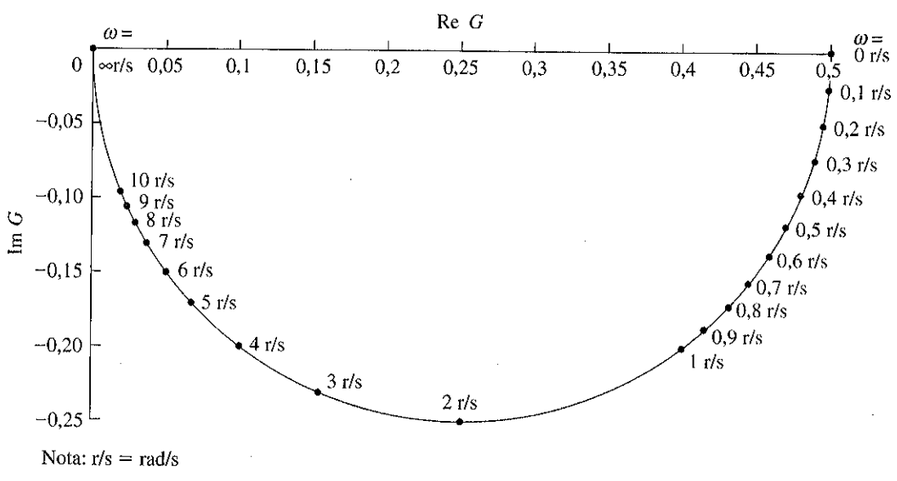


Fig. 10.5 Gráficos de resposta de freqüência para $G(s) = 1/(s + 2)$: gráfico polar.

Exercício de Avaliação 10.1

Problema:

a. Determinar as expressões analíticas para a magnitude e a fase da resposta de freqüência de

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

b. Construa os gráficos logarítmicos de magnitude e de fase usando o logaritmo da freqüência em rad/s como abscissa.
c. Construa um gráfico polar da resposta de freqüência.

Resposta:

a. $M(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(8-\omega^2)^2 + (6\omega)^2}}$; para $\omega \le \sqrt{8}$: $\phi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{6\omega}{8-\omega^2}\right)$, para $\omega > \sqrt{8}$: $\phi(\omega) = -\left[\pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{6\omega}{8-\omega^2}\right)\right]$

b. Veja a resposta no CD-ROM que acompanha o livro.
c. Veja a resposta no CD-ROM que acompanha o livro.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção definimos resposta de freqüência e vimos como obter uma expressão analítica da resposta de freqüência de um sistema simplesmente substituindo $s = j\omega$ em $G(s)$. Vimos também como construir uma representação gráfica de $G(j\omega)$. A próxima seção mostra como aproximar os gráficos de magnitude e de fase de modo a poder esboçá-los rapidamente.

10.2 Aproximações Assintóticas: Gráficos de Bode

As curvas logarítmicas de magnitude e de fase da resposta de freqüência em função de $\log \omega$ são chamadas de gráficos de Bode ou diagramas de Bode. O esboço dos gráficos de Bode pode ser simplificado porque eles podem ser aproximados como uma seqüência de linhas retas. A aproximação através de retas simplifica o cálculo da magnitude e da fase da resposta de freqüência.

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_k)}{s^m(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{10.13}$$

A magnitude da resposta de freqüência é o produto da magnitude das respostas de freqüência de cada termo, ou seja,

$$|G(j\omega)| = \left.\frac{K|(s+z_1)||(s+z_2)|\cdots|(s+z_k)|}{|s^m||(s+p_1)||(s+p_2)|\cdots|(s+p_n)|}\right|_{s\to j\omega} \tag{10.14}$$

Portanto, se soubermos a magnitude de cada fator devido a pólo ou a zero, podemos determinar a magnitude total da resposta. O processo pode ser simplificado, trabalhando com o logaritmo da magnitude, uma vez que as magnitudes dos fatores devidos aos zeros devem ser adicionadas e a magnitude dos fatores devidos aos pólos devem ser subtraídos, em vez de multiplicar ou dividir respectivamente, para produzir o logaritmo da magnitude total da resposta de freqüência. Convertendo a magnitude da resposta em dB, obtemos

$$\begin{aligned} 20\log|G(j\omega)| = {} & 20\log K + 20\log|(s+z_1)| + 20\log|(s+z_2)| \\ & + \cdots - 20\log|s^m| - 20\log|(s+p_1)| - \cdots|_{s\to j\omega} \end{aligned} \tag{10.15}$$

Em conseqüência, se soubéssemos a resposta de cada termo, a soma algébrica iria produzir a resposta total em dB. Além disso, se pudéssemos aproximar cada termo consistindo somente de linhas retas, a adição gráfica dos termos seria grandemente simplificada. Antes de prosseguir, vejamos a fase da resposta.

Com base na Eq. (10.13) a fase da resposta de freqüência é a *soma* das curvas de fase dos termos relativos aos zeros *menos* a *soma* das curvas de fase dos termos referentes aos pólos. Aqui, uma vez mais, como a fase da resposta é a soma dos termos individuais, a aproximação desses termos individuais por meio de retas simplifica a adição gráfica.

Vejamos agora como aproximar a resposta de freqüência para termos de pólos e zeros simples. Mais tarde, mostraremos como combinar estas respostas para esboçar a resposta de freqüência de funções mais complicadas.

Nas seções subseqüentes, depois de uma discussão do critério de estabilidade de Nyquist, aprenderemos como usar os gráficos de Bode para análise e projeto de estabilidade e de resposta transitória.

Gráficos de Bode para G(s) = (s + a)

Considere uma função, $G(s) = (s + a)$, para a qual queremos esboçar gráficos logarítmicos separados de magnitude e fase da resposta de freqüência. Fazendo $s = j\omega$, temos

$$G(j\omega) = (j\omega + a) = a\left(j\frac{\omega}{a} + 1\right) \tag{10.16}$$

Nas baixas freqüências, quando ω tende a zero,

$$G(j\omega) \approx a \tag{10.17}$$

A magnitude da resposta de freqüência em dB é

$$20 \log M = 20 \log a \tag{10.18}$$

onde $M = |G(j\omega)|$ e é uma constante. A Eq. (10.18) é mostrada esboçada na Fig. 10.6(*a*) desde $\omega = 0{,}01a$ até a.

Nas altas freqüências, onde $\omega \gg a$, a Eq. (10.16) se transforma em

$$G(j\omega) \approx a\left(\frac{j\omega}{a}\right) = a\left(\frac{\omega}{a}\right)\angle 90^\circ = \omega\angle 90^\circ \tag{10.19}$$

A magnitude da resposta em dB é

$$20 \log M = 20 \log a + 20 \log \frac{\omega}{a} = 20 \log \omega \tag{10.20}$$

onde $a < \omega < \infty$. Note, com base no termo do meio, que a aproximação de altas freqüências é igual à aproximação de baixas freqüências quando $\omega = a$ e aumenta para $\omega > a$.

Se esboçarmos em dB, 20 log M, em função de log ω, a Eq. (10.20) se transforma em uma linha reta:

$$y = 20x \tag{10.21}$$

onde $y = 20 \log M$, e $x = \log \omega$. A reta tem uma inclinação de 20 quando esboçada em dB em função de log ω.

Como cada vez que a freqüência dobra faz 20 log ω aumentar em 6 dB, a reta cresce com uma inclinação equivalente de 6 dB/oitava. Uma *oitava* corresponde ao intervalo em que a freqüência final é o dobro da inicial. Este aumento começa em $\omega = a$, onde a aproximação de baixas freqüências se iguala à aproximação de altas freqüências.

Chamamos as aproximações por linhas retas de *assíntotas*. A aproximação de baixas freqüências é chamada de *assíntota de baixa freqüência*, e a aproximação de altas freqüências é chamada de *assíntota de alta freqüência*. A freqüência, a, é chamada de *freqüência de quebra* porque nela há uma quebra entre as assíntotas de baixas e de altas freqüências.

Muitas vezes é conveniente desenhar a reta sobre uma década em vez de sobre uma oitava. Uma *década* é o intervalo entre duas freqüências em que a freqüência final é 10 vezes a inicial. Sobre uma década, 20 log ω aumenta em 20 dB. Portanto, uma inclinação de 6 dB/oitava é equivalente a uma inclinação de 20 dB/década. O gráfico é mostrado na Fig. 10.6(*a*) desde $\omega = 0{,}01a$ até $100a$.

Retornemos agora à fase da resposta, que pode ser esboçada como a seguir. Na freqüência de quebra, a, a Eq. (10.16) mostra que a fase é de 45°. Nas baixas freqüências, a Eq. (10.17) mostra que a fase é 0°. Nas altas freqüências, a Eq. (10.19) mostra que a fase é 90°. Para desenhar a curva, comece uma década (1/10) abaixo da freqüência de quebra, $0{,}1a$, com fase de 0°, e desenhe uma linha de inclinação +45°/década passando por 45° na freqüência de quebra e continuando até 90° uma década acima da freqüência de quebra, $10a$. O diagrama de fase resultante é mostrado na Fig. 10.6(*b*).

Freqüentemente é conveniente *normalizar* a magnitude e *colocar em escala a* freqüência de modo que o gráfico logarítmico da magnitude seja 0 dB em uma freqüência de quebra unitária. A normalização e a colocação em escala ajudam nas seguintes aplicações.

1. Ao comparar diferentes gráficos de resposta de freqüência de sistemas de primeira ou de segunda ordem, todos eles terão a mesma assíntota de baixas freqüências depois da normalização e a mesma freqüência de quebra depois da colocação em escala.
2. Ao esboçar a resposta de freqüência de uma função como a Eq. (10.13), cada um dos fatores em numerador e em denominador terão a mesma assíntota de baixas freqüências depois da normalização. Esta assíntota comum de baixas freqüências torna mais fácil adicionar os componentes para obter o gráfico de Bode.

Para normalizar $(s + a)$, fatoramos a grandeza a e formamos $a[(s/a) + 1]$. A freqüência é colocada em escala definindo-se uma nova variável de freqüência, $s_1 = s/a$. Em seguida, a magnitude é dividida pela grandeza a até produzir freqüência de 0 dB de quebra. Portanto, a função normalizada e colocada em escala é $(s_1 + 1)$. Para obter a resposta de freqüência original, a magnitude e a freqüência são multiplicadas pela grandeza a.

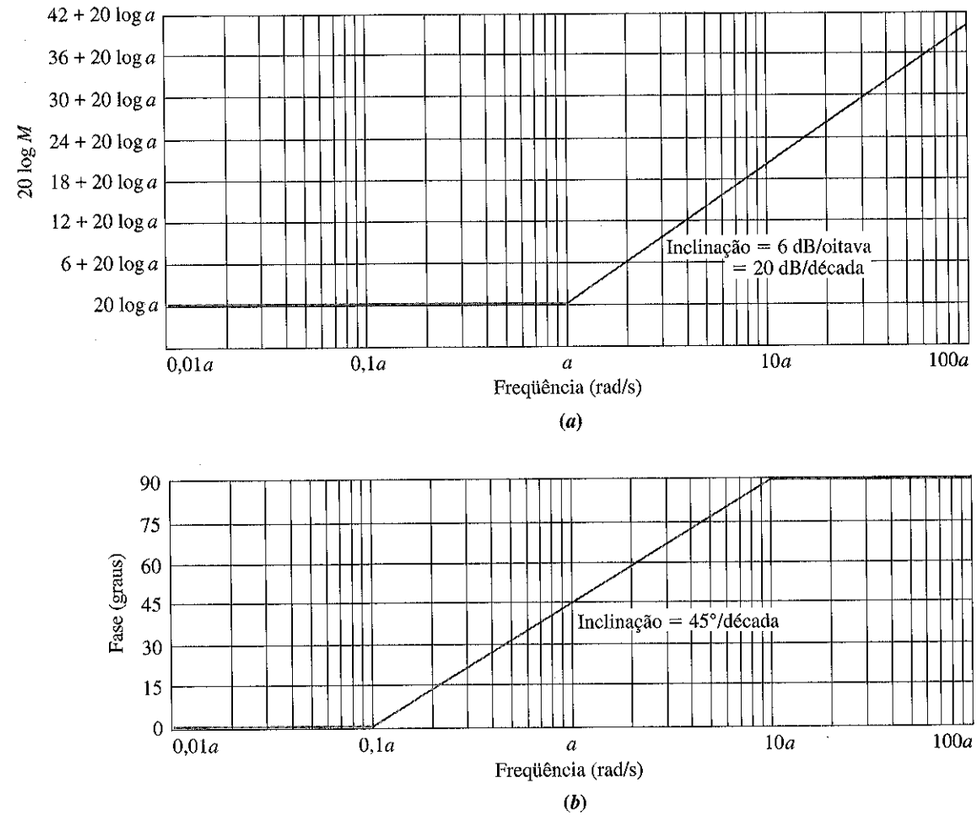


Fig. 10.6 Gráficos de Bode para $(s + a)$: **a.** gráfico de magnitude; **b.** gráfico de fase.

Agora usaremos os conceitos de normalização e de colocação em escala para comparar as aproximações assintóticas com os valores reais dos gráficos de magnitude e de fase para $(s + a)$. A Tabela 10.1 mostra a comparação para a resposta de freqüência normalizada e colocada em escala de $(s + a)$. Note que a curva de magnitude real nunca é maior que 3,01 dB a partir das assíntotas. Esta diferença máxima ocorre na freqüência de quebra. A diferença máxima para a curva de fase é 5,71°, que ocorre uma década acima e uma década abaixo da freqüência de quebra. Por conveniência, os dados da Tabela 10.1 estão plotados nas Figs. 10.7 e 10.8.

Determinemos agora os gráficos de Bode para outras funções de transferência comuns.

Gráficos de Bode para G(s) = 1/(s + a)

Obtenhamos os diagramas de Bode da seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{(s + a)} = \frac{1}{a\left(\frac{s}{a} + 1\right)} \tag{10.22}$$

Esta função tem uma assíntota de baixas freqüências de 20 log $(1/a)$ que é obtida fazendo a freqüência, s, tender a zero. O gráfico de Bode permanece constante até que a freqüência de quebra, a rad/s, seja alcançada. O gráfico é então aproximado pela assíntota de altas freqüências, obtida fazendo s tender a ∞. Portanto, em altas freqüências,

$$G(j\omega) = \left.\frac{1}{a\left(\frac{s}{a}\right)}\right|_{s \to j\omega} = \frac{1}{a\left(\frac{j\omega}{a}\right)} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{\omega}{a}}\angle -90^\circ = \frac{1}{\omega}\angle -90^\circ \tag{10.23}$$

ou, em dB,

$$20 \log M = 20 \log \frac{1}{a} - 20 \log \frac{\omega}{a} = -20 \log \omega \tag{10.24}$$

BIBLIOTECA - UNOESC

Tabela 10.1 Dados da resposta de freqüência assintótica e real normalizada e em escala para $(s + a)$

Freqüência / a	$20 \log \frac{M}{a}$ (dB)		Fase (graus)	
(rad/s)	Assintótica	Real	Assintótica	Real
0,01	0	0,00	0,00	0,57
0,02	0	0,00	0,00	1,15
0,04	0	0,01	0,00	2,29
0,06	0	0,02	0,00	3,43
0,08	0	0,03	0,00	4,57
0,1	0	0,04	0,00	5,71
0,2	0	0,17	13,55	11,31
0,4	0	0,64	27,09	21,80
0,6	0	1,34	35,02	30,96
0,8	0	2,15	40,64	38,66
1	0	3,01	45,00	45,00
2	6	6,99	58,55	63,43
4	12	12,30	72,09	75,96
6	15,56	15,68	80,02	80,54
8	18	18,13	85,64	82,87
10	20	20,04	90,00	84,29
20	26,02	26,03	90,00	87,14
40	32,04	32,04	90,00	88,57
60	35,56	35,56	90,00	89,05
80	38,06	38,06	90,00	89,28
100	40	40,00	90,00	89,43

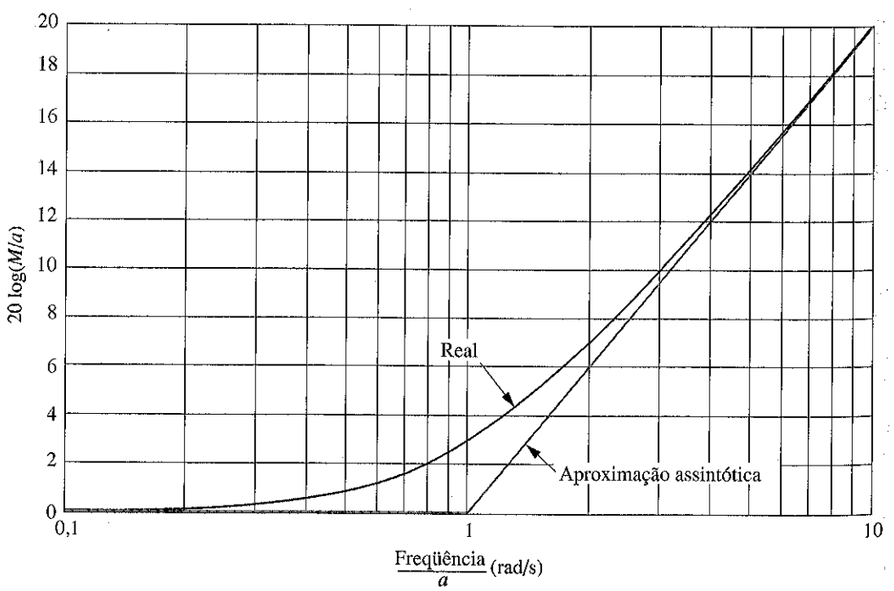


Fig. 10.7 Resposta assintótica e real normalizada de magnitude em escala de $(s + a)$.

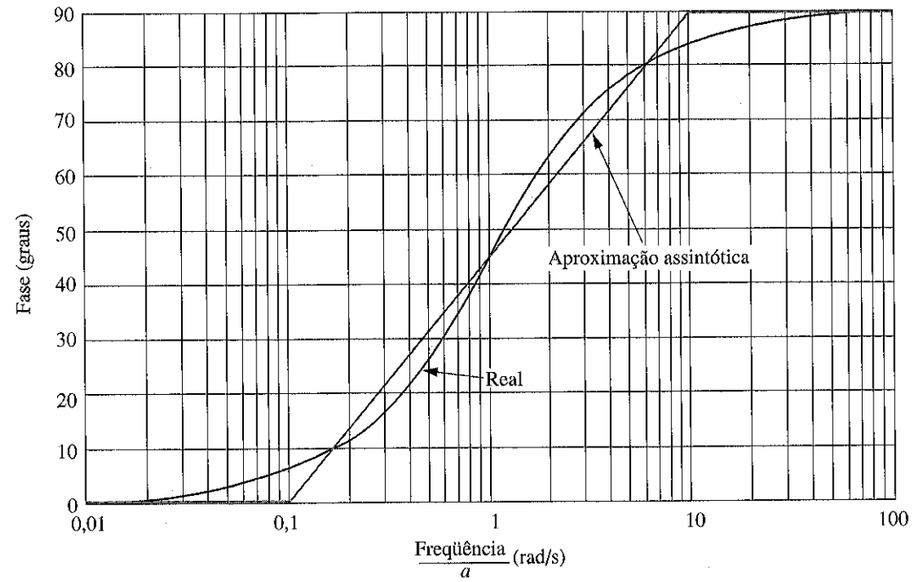


Fig. 10.8 Resposta assintótica e real normalizada de fase em escala de $(s + a)$.

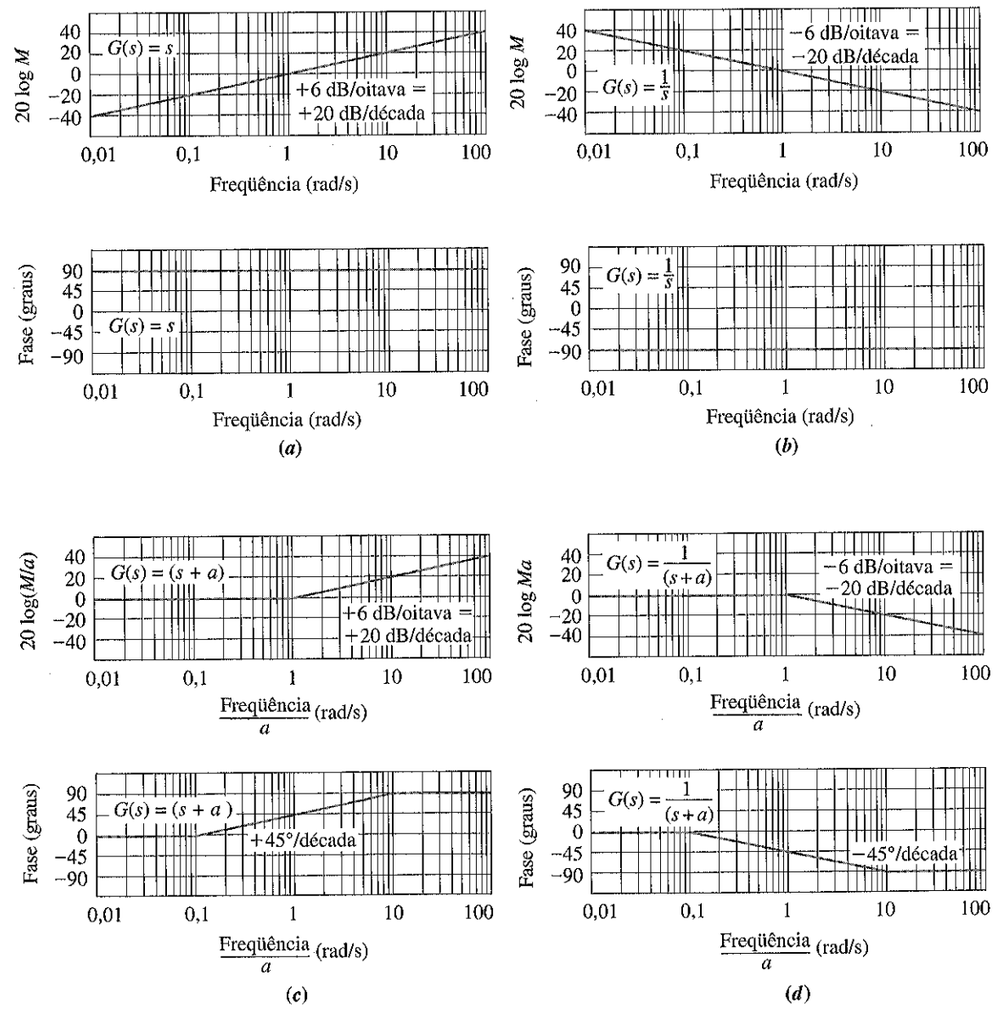


Fig. 10.9 Gráficos de Bode normalizados e em escala para **a.** $G(s) = s$; **b.** $G(s) = 1/s$; **c.** $G(s) = (s + a)$; **d.** $G(s) = 1/(s + a)$.

Observe com base no termo do meio que a aproximação em altas freqüências é igual à aproximação em baixas freqüências quando $\omega = a$, e decresce para $\omega > a$. Este resultado é semelhante ao da Eq. (10.20), exceto que a inclinação é negativa em vez de positiva. O diagrama logarítmico de magnitude de Bode diminuirá a uma taxa de 20 dB/década em vez de aumentar nesta mesma taxa de 20 dB/década depois da freqüência de quebra.

O gráfico da fase é o simétrico do exemplo anterior, uma vez que a função é o inverso da outra. A fase começa em 0° e alcança −90° nas altas freqüências, passando por −45° na freqüência de quebra. Ambos os gráficos logarítmicos, de magnitude e fase normalizados e em escala, são mostrados na Fig. 10.9(*d*).

Gráficos de Bode para $G(s) = s$

Nossa próxima função, $G(s) = s$, tem somente uma assíntota de altas freqüências. Fazendo $s = j\omega$, a magnitude é $20 \log \omega$, que é a mesma da Eq. (10.20). Portanto, o gráfico de magnitude de Bode é uma linha reta traçada com uma inclinação de +20 dB/década cruzando a linha de zero dB quando $\omega = 1$. O gráfico de fase, que é uma constante em +90°, está mostrado com o gráfico da magnitude na Fig. 10.9(*a*).

Gráficos de Bode para $G(s) = 1/s$

A resposta de freqüência do inverso da função precedente, $G(s) = 1/s$, está mostrada na Fig. 10.9(*b*) e é uma linha reta com uma inclinação de −20 dB/década cruzando a linha de zero dB quando $\omega = 1$. O gráfico de fase é uma constante igual a −90°.

Tratamos de quatro funções formadas por polinômios de primeira ordem em s no numerador ou no denominador. Antes de prosseguir para polinômios de segunda ordem, vejamos um exemplo de traçado de gráficos de Bode de uma função que consiste no produto de polinômios de primeira ordem no numerador e no denominador. Os gráficos serão construídos adicionando as curvas individuais de resposta de freqüência.

Exemplo 10.2

Gráficos de Bode de funções racionais com fatores de primeira ordem

Problema Esboce os gráficos de Bode para o sistema mostrado na Fig. 10.10, onde $G(s) = K(s + 3)/[s(s + 1)(s + 2)]$.

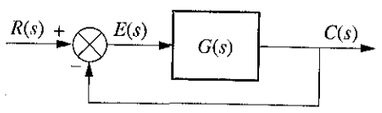


Fig. 10.10 Sistema de controle com retroação unitária a malha fechada.

Solução Construiremos um gráfico de Bode para a função a malha aberta $G(s) = K(s + 3)/[s(s + 1)(s + 2)]$. O gráfico de Bode é a soma dos gráficos de Bode de cada termo de primeira ordem. Portanto, é conveniente usar o gráfico normalizado de cada um destes termos de modo que a assíntota de baixas freqüências de cada termo, exceto o do pólo na origem, esteja em 0 dB, tornando mais fácil a adição dos componentes do gráfico de Bode. Reescrevemos $G(s)$ mostrando cada termo normalizado para um ganho unitário em baixas freqüências. Portanto,

$$G(s) = \frac{\frac{3}{2}K\left(\frac{s}{3} + 1\right)}{s(s + 1)\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \tag{10.25}$$

Constate agora que as freqüências de quebra ocorrem em 1, 2 e 3. O gráfico de magnitude deve começar uma década abaixo da menor freqüência de quebra e se estender até uma década acima da maior freqüência de quebra. Portanto, escolhemos o intervalo de 0,1 a 100 radianos, ou três décadas, como extensão do nosso gráfico.

Em $\omega = 0{,}1$, o valor de baixas freqüências da função é obtido a partir da Eq. (10.25) usando os valores de baixas freqüências para todos os termos $[(s/a + 1)]$, (isto é, $s = 0$) e o valor real para o termo s no denominador. Desta maneira, $G(j0{,}1) \approx \frac{3}{2}K/0{,}1 = 15K$. O efeito de K é mover a curva de magnitude para cima (aumentando K) ou para baixo (diminuindo K) de um valor de $20 \log K$. K não tem nenhum efeito sobre a curva de fase. Se escolhermos $K = 1$, poderemos mais tarde desfazer a normalização do gráfico de magnitude adicionando qualquer valor de K calculado ou conhecido.

A Fig 10.11(*a*) mostra cada um dos componentes do gráfico logarítmico de magnitude de Bode da resposta de freqüência. Somando os componentes obtém-se o gráfico composto mostrado na Fig. 10.11(*b*). Os resultados estão resumidos na Tabela 10.2, que pode ser usada para obter as inclinações. Cada pólo e cada zero estão discriminados na primeira coluna. A leitura através da tabela mostra sua contribuição em cada freqüência. A última linha é a soma das inclinações e se correlaciona com a Fig. 10.11(*b*). O gráfico de magnitude de Bode para $K = 1$ começa em $\omega = 0{,}1$ com um valor de $20 \log 15 = 23{,}52$ dB e diminui imediatamente a uma taxa de −20 dB/década devido ao termo s no denominador. Em $\omega = 1$, o termo $(s + 1)$ no denominador começa sua inclinação descendente e provoca uma inclinação negativa adicional de 20 dB/década, ou uma inclinação total de −40 dB/década. Em $\omega = 2$, o termo $[(s/2) + 1]$ começa sua inclinação de −20 dB/década, adicionando de novo −20 dB/década ao gráfico resultante, produzindo uma inclinação total de −60 dB/década que continua até $\omega = 3$. Nesta freqüência, o termo $[(s/3) + 1]$ no numerador começa sua inclinação positiva de 20 dB/década. O gráfico de magnitude resultante, portanto, muda de uma inclinação de −60 dB/década para −40 dB/década em $\omega = 3$, e continua com tal inclinação, uma vez que não há outras freqüências de quebra.

As inclinações são facilmente desenhadas esboçando-se segmentos de reta que decrescem 20 dB por década. Por exemplo, a inclinação inicial de −20 dB/década é desenhada a partir de 23,52 dB em $\omega = 0{,}1$ até 3,52 dB (um decréscimo de 20 dB) em $\omega = 1$. A inclinação de −40 dB/década começando em $\omega = 1$ é desenhada esboçando-se um segmento de reta a partir de 3,52 dB em $\omega = 1$ até −36,48 dB (um decréscimo de 40 dB) em $\omega = 10$ e usando-se somente o trecho entre $\omega = 1$ e $\omega = 2$. A próxima inclinação de −60 dB/década é desenhada, primeiro, esboçando-se um segmento de reta a partir de $\omega = 2$ até $\omega = 20$ (1 década) caindo 60 dB, e usando-se somente o segmento da reta entre $\omega = 2$ e $\omega = 3$. A inclinação final é desenhada esboçando-se um segmento de reta entre $\omega = 3$ e $\omega = 30$ (1 década) que cai 40 dB. Esta inclinação continua até o final do gráfico.

A fase é tratada de modo semelhante. Contudo, a existência de quebras uma década abaixo e uma década acima da freqüência de corte requer um pouco mais de cálculo. A Tabela 10.3 mostra as freqüências iniciais e finais da inclinação de 45°/década para cada um dos pólos e zeros. Por exemplo, observando o pólo em −2, vemos que a inclinação de −45° começa na freqüência de 0,2 e termina na freqüência de 20. Preenchendo as linhas em relação a cada um dos pólos e somando em seguida as colunas obtém-se o aspecto geral da inclinação do gráfico de fase resultante. Olhando a linha assinalada com *inclinação total*, vemos que o gráfico de fase terá uma inclinação de −45°/década no intervalo entre as freqüências de 0,1 e 0,2. A inclinação, em seguida, aumentará para −90°/década a partir de 0,2 até 0,3. A inclinação retornará para −45°/década entre 0,3 e 10 rad/s. Uma inclinação de 0°/década ocorre entre 10 e 20 rad/s seguida de uma inclinação de +45°/década a partir de 20 e até 30 rad/s. Finalmente, a partir de 30 rad/s até o infinito, a inclinação é de 0°/década.

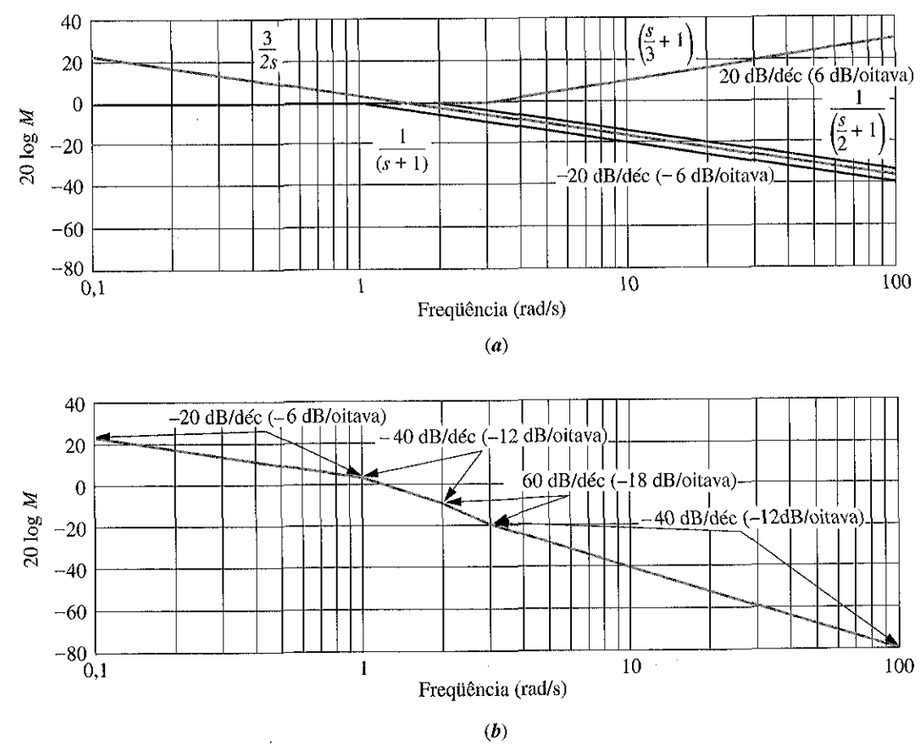


Fig. 10.11 Gráfico logarítmico de magnitude de Bode para o Exemplo 10.2: **a.** componentes; **b.** composição.

Tabela 10.2 Gráfico de magnitude de Bode: contribuição da inclinação de cada pólo e zero no Exemplo 10.2

	Começa: Pólo em 0	Começa: Pólo em −1	Começa: Pólo em −2	Começa: Zero em −3
Freqüência (rad/s)	0,1	1	2	3
Pólo em 0	−20	−20	−20	−20
Pólo em −1	0	−20	−20	−20
Pólo em −2	0	0	−20	−20
Zero em −3	0	0	0	20
Inclinação total (dB/déc)	−20	−40	−60	−40

Tabela 10.3 Gráfico de fase de Bode: contribuição da inclinação de cada pólo e zero no Exemplo 10.2

	Começa: Pólo em −1	Começa: Pólo em −2	Começa: Zero em −3	Termina: Pólo em −1	Termina: Pólo em −2	Termina: Zero em −3
Freqüência (rad/s)	0,1	0,2	0,3	10	20	30
Pólo em −1	−45	−45	−45	0		
Pólo em −2		−45	−45	−45	0	
Zero em −3			45	45	45	0
Inclinação total (graus/década)	−45	−90	−45	0	45	0

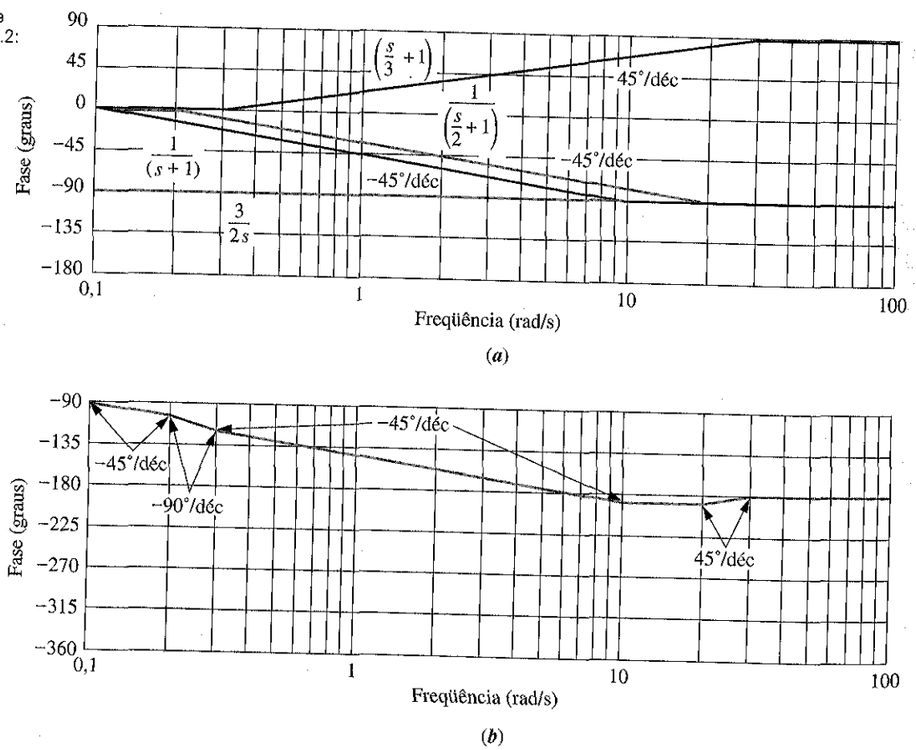


Fig. 12.12 O Gráfico de fase de Bode para o Exemplo 10.2: **a.** componentes; **b.** composição.

Os gráficos de fase resultantes de cada componente e da composição estão mostrados na Fig. 10.12. Uma vez que o pólo na origem produz uma defasagem constante de −90°, o gráfico começa em −90° e segue o aspecto geral da inclinação que acaba de ser descrito.

Gráficos de Bode para $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

Agora que tratamos dos gráficos de Bode para sistemas de primeira ordem, voltamo-nos para os gráficos logarítmicos de magnitude e de fase para polinômios de segunda ordem em s. O polinômio de segunda ordem é da forma

$$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \tag{10.26}$$

Ao contrário da aproximação da resposta de freqüência de primeira ordem, a diferença entre a aproximação assintótica e a resposta de freqüência real pode ser grande para alguns valores de ζ. Uma correção dos diagramas de Bode pode ser efetuada no sentido de melhorar a exatidão. Primeiro, deduzimos a aproximação assintótica e em seguida mostramos a diferença entre a aproximação assintótica e as curvas da resposta de freqüência real.

Nas baixas freqüências, a Eq. (10.26) se transforma em

$$G(s) \approx \omega_n^2 = \omega_n^2\angle 0° \tag{10.27}$$

A magnitude, M, em dB nas baixas freqüências é, portanto,

$$20\log M = 20\log|G(j\omega)| = 20\log\omega_n^2 \tag{10.28}$$

Nas altas freqüências,

$$G(s) \approx s^2 \tag{10.29}$$

ou

$$G(j\omega) \approx -\omega^2 = \omega^2\angle 180° \tag{10.30}$$

A magnitude logarítmica é

$$20\log M = 20\log|G(j\omega)| = 20\log\omega^2 = 40\log\omega \tag{10.31}$$

A Eq. (10.31) é uma reta com o dobro da inclinação de um termo de primeira ordem (Eq. (10.20)). Sua inclinação é de 12 dB/oitava, ou 40 dB/década.

A assíntota de baixas freqüências (Eq. (10.27)) e a assíntota de altas freqüências (Eq. (10.31)) são iguais quando $\omega = \omega_n$. Desta maneira, ω_n é a freqüência de quebra para o polinômio de segunda ordem.

Por conveniência, ao representar sistemas com diferentes ω_n, normalizamos e pomos em escala os resultados conhecidos antes de esboçar as assíntotas. Usando o termo normalizado e em escala da Eq. (10.26), normalizamos a magnitude, dividindo por ω_n^2, e colocamos a freqüência em escala, dividindo por ω_n. Desta forma, vamos plotar $G(s_1)/\omega_n^2 = s_1^2 + 2\zeta s_1 + 1$, onde $s_1 = s_1/\omega_n$. $G(s_1)$ tem uma assíntota de baixas freqüências em 0 dB e uma freqüência de quebra em 1 rad/s. A Fig. 10.13(a) mostra as assíntotas do gráfico de magnitude normalizado e em escala.

Vamos traçar agora o gráfico de fase: 0° nas baixas freqüências (Eq. (10.27)) e 180° nas altas freqüências (Eq. (10.30)). Para determinar a fase na freqüência natural, primeiro calculamos $G(j\omega)$,

$$G(j\omega) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2|_{s\to j\omega} = (\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega \tag{10.32}$$

e em seguida obtemos o valor da função na freqüência natural substituindo $\omega = \omega_n$. Uma vez que o resultado é $j2\zeta\omega_n^2$, a fase na freqüência natural é +90°. A Fig. 10.13(b) mostra a fase traçada em função da freqüência posta em escala por ω_n. O gráfico de fase aumenta a uma taxa de 90°/década a partir de 0,1 até 10 e passa por 90° em 1.

Correções para Gráficos de Bode de Segunda Ordem

Examinemos agora o erro entre a resposta real e a aproximação assintótica do polinômio de segunda ordem. Enquanto o polinômio de primeira ordem tem uma disparidade de no máximo 3,01 dB em magnitude e 5,71° em fase, a função de segunda ordem pode ter uma maior disparidade, cujo valor depende de ζ.

Com base na Eq. (10.32), a magnitude e a fase real relativas a $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ são, respectivamente,

$$M = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \tag{10.33}$$

$$\text{Fase} = \text{tg}^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \tag{10.34}$$

Estas relações estão reunidas na Tabela 10.4 para uma faixa de valores de ζ e esboçados nas Figs. 10.14 e 10.15 junto com as aproximações assintóticas para magnitude normalizada e freqüência em escala. Na Fig. 10.14, que está normalizada em relação ao quadrado da freqüência natural, a magnitude normalizada é $+20\log 2\zeta$. O leitor deve verificar que a magnitude real na freqüência natural sem escala é $+20\log 2\zeta\omega_n^2$. A Tabela 10.4 e as Figs. 10.14 e 10.15 podem ser usadas para melhorar a exatidão ao desenhar os gráficos de Bode. Por exemplo, uma correção de magnitude de $+20\log 2\zeta$ pode ser feita na freqüência natural, ou de quebra, no gráfico assintótico de Bode.

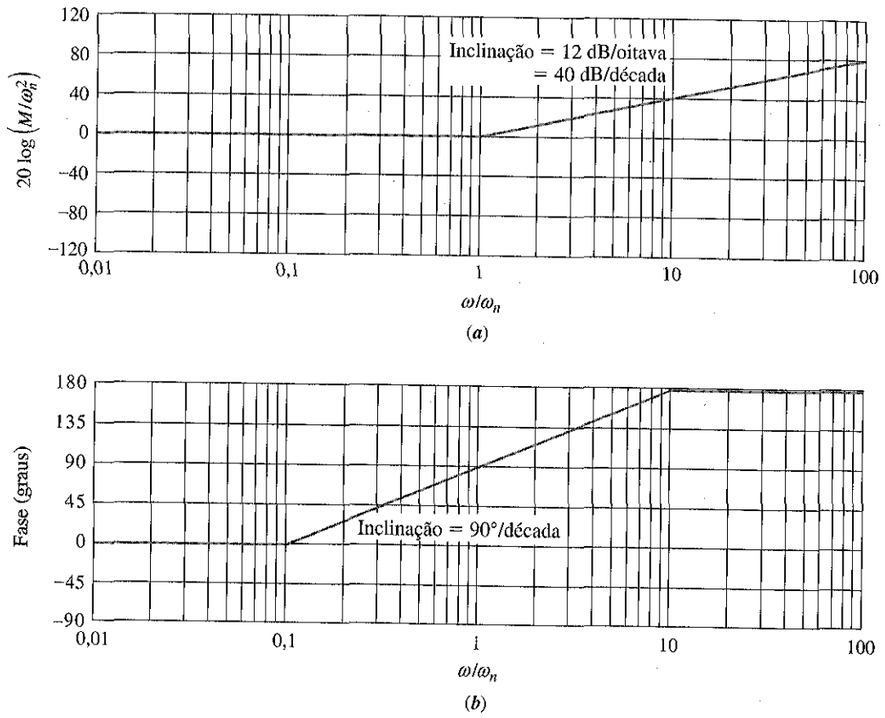


Fig. 10.13 Assíntotas de Bode normalizadas e em escala para $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$: **a.** magnitude; **b.** fase.

Tabela 10.4 Dados para gráficos logarítmicos de magnitude e de fase normalizado e em escala para $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$. Mag = $20\log(M/\omega_n^2)$ *(a tabela continua)*

Freq. $\frac{\omega}{\omega_n}$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}1$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}1$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}2$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}2$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}3$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}3$
0,10	−0,09	1,16	−0,08	2,31	−0,07	3,47
0,20	−0,35	2,39	−0,32	4,76	−0,29	7,13
0,30	−0,80	3,77	−0,74	7,51	−0,65	11,19
0,40	−1,48	5,44	−1,36	10,78	−1,17	15,95
0,50	−2,42	7,59	−2,20	14,93	−1,85	21,80
0,60	−3,73	10,62	−3,30	20,56	−2,68	29,36
0,70	−5,53	15,35	−4,70	28,77	−3,60	39,47
0,80	−8,09	23,96	−6,35	41,63	−4,44	53,13
0,90	−11,64	43,45	−7,81	62,18	−4,85	70,62
1,00	−13,98	90,00	−7,96	90,00	−4,44	90,00
1,10	−10,34	133,67	−6,24	115,51	−3,19	107,65
1,20	−6,00	151,39	−3,73	132,51	−1,48	121,43
1,30	−2,65	159,35	−1,27	143,00	0,35	131,50
1,40	0,00	163,74	0,92	149,74	2,11	138,81
1,50	2,18	166,50	2,84	154,36	3,75	144,25
1,60	4,04	168,41	4,54	157,69	5,26	148,39
1,70	5,67	169,80	6,06	160,21	6,64	151,65
1,80	7,12	170,87	7,43	162,18	7,91	154,26
1,90	8,42	171,72	8,69	163,77	9,09	156,41
2,00	9,62	172,41	9,84	165,07	10,19	158,20
3,00	18,09	175,71	18,16	171,47	18,28	167,32
4,00	23,53	176,95	23,57	173,91	23,63	170,91
5,00	27,61	177,61	27,63	175,24	27,67	172,87
6,00	30,89	178,04	30,90	176,08	30,93	174,13
7,00	33,63	178,33	33,64	176,66	33,66	175,00
8,00	35,99	178,55	36,00	177,09	36,01	175,64
9,00	38,06	178,71	38,07	177,42	38,08	176,14
10,00	39,91	178,84	39,92	177,69	39,93	176,53

Tabela 10.4 (continuação)

Freq. $\frac{\omega}{\omega_n}$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}5$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}5$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}7$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}7$	Mag (dB) $\zeta = 1$	Fase (graus) $\zeta = 1$
0,10	−0,04	5,77	0,00	8,05	0,09	11,42
0,20	−0,17	11,77	0,00	16,26	0,34	22,62
0,30	−0,37	18,25	0,02	24,78	0,75	33,40
0,40	−0,63	25,46	0,08	33,69	1,29	43,60
0,50	−0,90	33,69	0,22	43,03	1,94	53,13
0,60	−1,14	43,15	0,47	52,70	2,67	61,93
0,70	−1,25	53,92	0,87	62,51	3,46	69,98
0,80	−1,14	65,77	1,41	72,18	4,30	77,32
0,90	−0,73	78,08	2,11	81,42	5,15	83,97
1,00	0,00	90,00	2,92	90,00	6,02	90,00
1,10	0,98	100,81	3,83	97,77	6,89	95,45
1,20	2,13	110,14	4,79	104,68	7,75	100,39
1,30	3,36	117,96	5,78	110,76	8,60	104,86
1,40	4,60	124,44	6,78	116,10	9,43	108,92
1,50	5,81	129,81	7,76	120,76	10,24	112,62
1,60	6,98	134,27	8,72	124,85	11,03	115,99
1,70	8,10	138,03	9,66	128,45	11,80	119,07
1,80	9,17	141,22	10,56	131,63	12,55	121,89
1,90	10,18	143,95	11,43	134,46	13,27	124,48
2,00	11,14	146,31	12,26	136,97	13,98	126,87
3,00	18,63	159,44	19,12	152,30	20,00	143,13
4,00	23,82	165,07	24,09	159,53	24,61	151,93
5,00	27,79	168,23	27,96	163,74	28,30	157,38
6,00	31,01	170,27	31,12	166,50	31,36	161,08
7,00	33,72	171,70	33,80	168,46	33,98	163,74
8,00	36,06	172,76	36,12	169,92	36,26	165,75
9,00	38,12	173,58	38,17	171,05	38,28	167,32
10,00	39,96	174,23	40,00	171,95	40,09	168,58

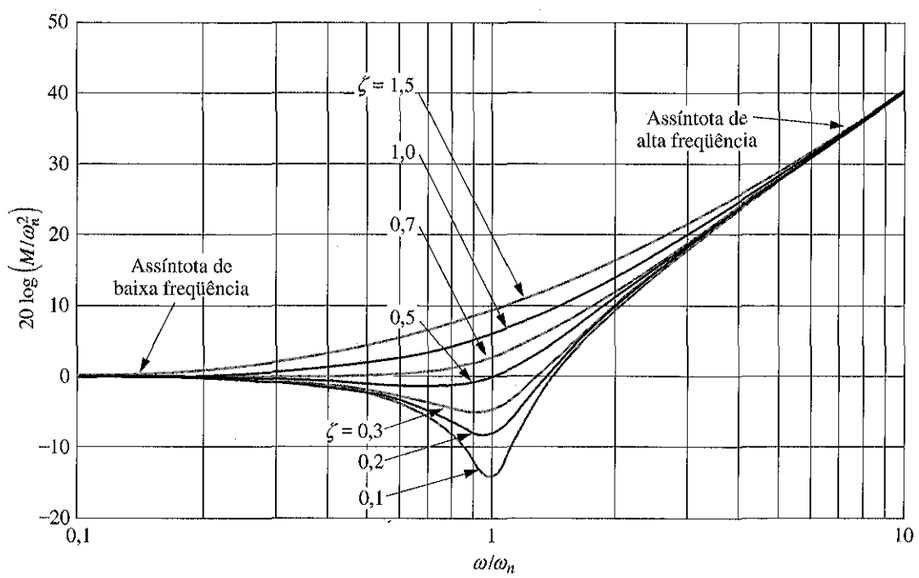


Fig. 10.14 Resposta logarítmica de magnitude normalizada e em escala para $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$.

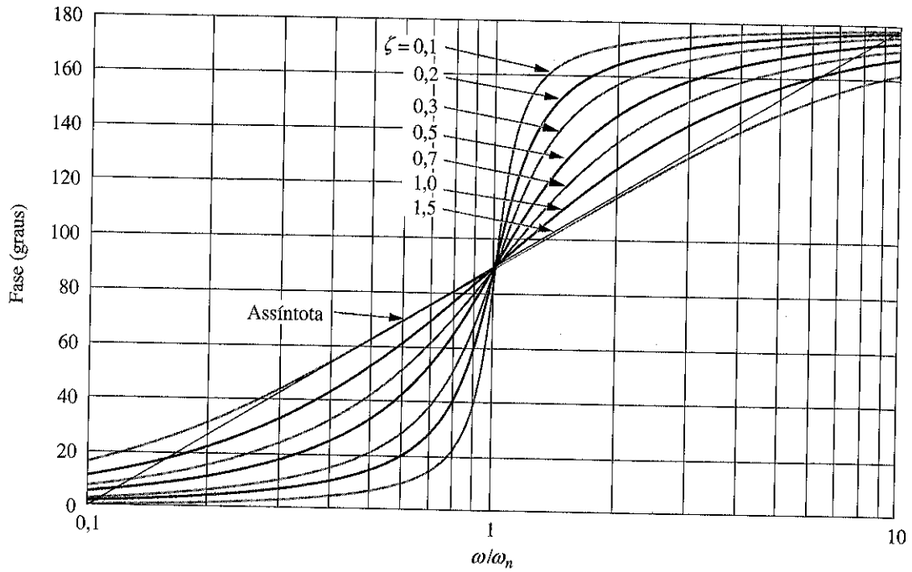


Fig. 10.15 Resposta de fase em escala para $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$.

Tabela 10.5 Dados para gráficos logarítmicos de magnitude e de fase normalizado e em escala para $1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$. Mag = $20\log(M/\omega_n^2)$ *(a tabela continua)*

Freq. $\frac{\omega}{\omega_n}$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}1$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}1$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}2$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}2$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}3$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}3$
0,10	0,09	−1,16	0,08	−2,31	0,07	−3,47
0,20	0,35	−2,39	0,32	−4,76	0,29	−7,13
0,30	0,80	−3,77	0,74	−7,51	0,65	−11,19
0,40	1,48	−5,44	1,36	−10,78	1,17	−15,95
0,50	2,42	−7,59	2,20	−14,93	1,85	−21,80
0,60	3,73	−10,62	3,30	−20,56	2,68	−29,36
0,70	5,53	−15,35	4,70	−28,77	3,60	−39,47
0,80	8,09	−23,96	6,35	−41,63	4,44	−53,13
0,90	11,64	−43,45	7,81	−62,18	4,85	−70,62
1,00	13,98	−90,00	7,96	−90,00	4,44	−90,00
1,10	10,34	−133,67	6,24	−115,51	3,19	−107,65
1,20	6,00	−151,39	3,73	−132,51	1,48	−121,43
1,30	2,65	−159,35	1,27	−143,00	−0,35	−131,50
1,40	0,00	−163,74	−0,92	−149,74	−2,11	−138,81
1,50	−2,18	−166,50	−2,84	−154,36	−3,75	−144,25
1,60	−4,04	−168,41	−4,54	−157,69	−5,26	−148,39
1,70	−5,67	−169,80	−6,06	−160,21	−6,64	−151,65
1,80	−7,12	−170,87	−7,43	−162,18	−7,91	−154,26
1,90	−8,42	−171,72	−8,69	−163,77	−9,09	−156,41
2,00	−9,62	−172,41	−9,84	−165,07	−10,19	−158,20
3,00	−18,09	−175,71	−18,16	−171,47	−18,28	−167,32
4,00	−23,53	−176,95	−23,57	−173,91	−23,63	−170,91
5,00	−27,61	−177,61	−27,63	−175,24	−27,67	−172,87
6,00	−30,89	−178,04	−30,90	−176,08	−30,93	−174,13
7,00	−33,63	−178,33	−33,64	−176,66	−33,66	−175,00
8,00	−35,99	−178,55	−36,00	−177,09	−36,01	−175,64
9,00	−38,06	−178,71	−38,07	−177,42	−38,08	−176,14
10,00	−39,91	−178,84	−39,92	−177,69	−39,93	−176,53

Tabela 10.5 (continuação)

Freq. $\frac{\omega}{\omega_n}$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}5$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}5$	Mag (dB) $\zeta = 0{,}7$	Fase (graus) $\zeta = 0{,}7$	Mag (dB) $\zeta = 1$	Fase (graus) $\zeta = 1$
0,10	0,04	−5,77	0,00	−8,05	−0,09	−11,42
0,20	0,17	−11,77	0,00	−16,26	−0,34	−22,62
0,30	0,37	−18,25	−0,02	−24,78	−0,75	−33,40
0,40	0,63	−25,46	−0,08	−33,69	−1,29	−43,60
0,50	0,90	−33,69	−0,22	−43,03	−1,94	−53,13
0,60	1,14	−43,15	−0,47	−52,70	−2,67	−61,93
0,70	1,25	−53,92	−0,87	−62,51	−3,46	−69,98
0,80	1,14	−65,77	−1,41	−72,18	−4,30	−77,32
0,90	0,73	−78,08	−2,11	−81,42	−5,15	−83,97
1,00	0,00	−90,00	−2,92	−90.00	−6,02	−90,00
1,10	−0,98	−100,81	−3,83	−97,77	−6,89	−95,45
1,20	−2,13	−110,14	−4,79	−104,68	−7,75	−100,39
1,30	−3,36	−117,96	−5,78	−110,76	−8,60	−104,86
1,40	−4,60	−124,44	−6,78	−116,10	−9,43	−108,92
1,50	−5,81	−129,81	−7,76	−120,76	−10,24	−112,62
1,60	−6,98	−134,27	−8,72	−124,85	−11,03	−115,99
1,70	−8,10	−138,03	−9,66	−128,45	−11,80	−119,07
1,80	−9,17	−141,22	−10,56	−131,63	−12,55	−121,89
1,90	−10,18	−143,95	−11,43	−134,46	−13,27	−124,48
2,00	−11,14	−146,31	−12,26	−136,97	−13,98	−126,87
3,00	−18,63	−159,44	−19,12	−152,30	−20,00	−143,13
4,00	−23,82	−165,07	−24,09	−159,53	−24,61	−151,93
5,00	−27,79	−168,23	−27,96	−163,74	−28,30	−157,38
6,00	−31,01	−170,27	−31,12	−166,50	−31,36	−161,08
7,00	−33,72	−171,70	−33,80	−168,46	−33,98	−163,74
8,00	−36,06	−172,76	−36,12	−169,92	−36,26	−165,75
9,00	−38,12	−173,58	−38,17	−171,05	−38,28	−167,32
10,00	−39,96	−174,23	−40,00	−171,95	−40,09	−168,58

Gráficos de Bode para $G(s) = 1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$

Os gráficos de Bode para $G(s) = 1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ podem ser deduzidos de modo semelhante aos referentes a $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$. Descobrimos que a curva de magnitude quebra na freqüência natural e diminui a uma taxa de −40 dB/década. O gráfico de fase é 0° nas baixas freqüências. Em 0,1 ω_n começa uma queda de −90°/década e continua até $\omega = 10\omega_n$, onde se nivela em −180°.

A resposta de freqüência exata também segue a mesma dedução aplicada a $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$. Os resultados estão resumidos na Tabela 10.5, bem como nas Figs. 10.16 e 10.17. O valor exato da magnitude é dado pelo inverso da Eq. (10.33), e a fase exata é dada pelo negativo da Eq. (10.34). A magnitude normalizada na freqüência natural em escala é $-20\log 2\zeta$, que pode ser usada como uma correção na freqüência de quebra no gráfico assintótico de Bode.

Vejamos agora um exemplo de como traçar gráficos de Bode de funções de transferência que contêm fatores de segunda ordem.

Exemplo 10.3

Gráficos de Bode de funções racionais com fatores de primeira e de segunda ordem

Problema Esboce os gráficos logarítmicos de magnitude e fase de $G(s)$ para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. 10.10, onde $G(s) = (s + 3)/[(s + 2)(s^2 + 2s + 25)]$.

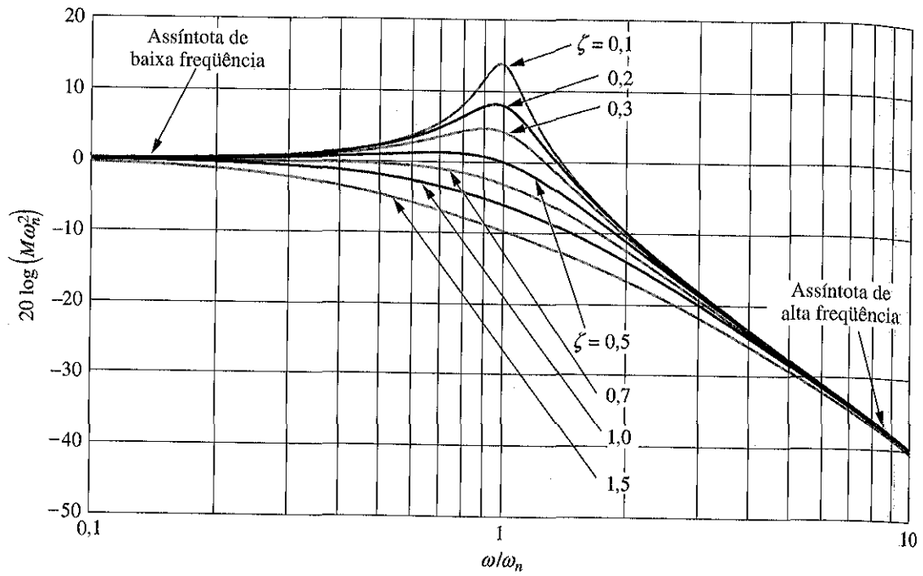


Fig. 10.16 Resposta logarítmica de magnitude normalizada e em escala para $1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$.

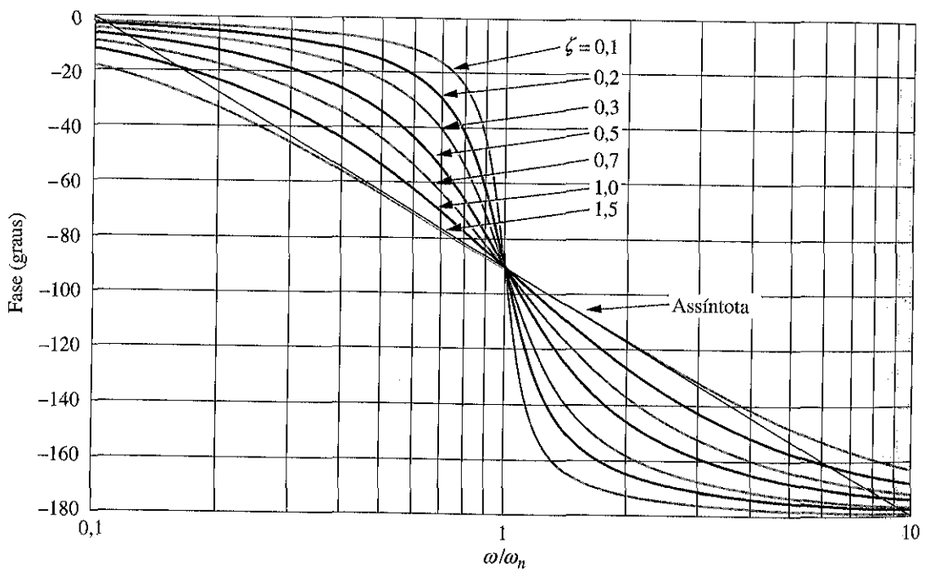


Fig. 10.17 Resposta de fase em escala para $1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$.

Solução Primeiro converteremos $G(s)$ de modo a ter componentes normalizados com ganho unitário nas baixas freqüências. O termo de segunda ordem é normalizado colocando-se em evidência o fator ω_n^2 formando

$$\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1 \tag{10.35}$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{3}{(2)(25)}\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{25}+\frac{2}{25}s+1\right)} = \frac{3}{50}\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{25}+\frac{2}{25}s+1\right)} \tag{10.36}$$

O gráfico logarítmico de magnitude de Bode está mostrado na Fig. 10.18(*b*) e é a soma dos termos individuais de primeira e segunda ordem de $G(s)$ mostrados na Fig. 10.18(*a*). Resolvemos este problema adicionando as inclinações destas partes componentes, começando e terminando nas freqüências apropriadas. Os resultados estão resumidos na Tabela 10.6, que pode ser usada para obter as inclinações. O valor de $G(s)$ nas baixas freqüências, obtido fazendo-se $s = 0$, é 3/50, ou −22,44 dB. O gráfico de magnitude de Bode começa neste valor e continua até a primeira freqüência de quebra em 2 rad/s. Aqui, o pólo em −2 produz uma inclinação decrescente de −20 dB/década até a próxima freqüência de quebra em 3 rad/s. O zero em −3 provoca uma elevação da inclinação de +20 dB/década, que, ao ser adicionada à curva anterior de −20 dB/década, dá uma inclinação líquida de 0. Na freqüência de 5 rad/s, o termo de segunda ordem começa com uma inclinação decrescente de −40 dB/década, que continua até o infinito.

A correção da curva logarítmica de magnitude devida ao termo de segunda ordem subamortecido pode ser determinada plotando-se um ponto $-20\log 2\zeta$ acima das assíntotas na freqüência natural. Como $\zeta = 0{,}2$ para o termo de segunda ordem no denominador de $G(s)$, a correção é 7,69 dB. Pontos próximos da freqüência natural podem ser corrigidos obtendo-se os valores da curva na Fig. 10.16.

Voltemo-nos agora para o gráfico de fase. A Tabela 10.7 é formada para determinar a progressão das inclinações no diagrama de fase. O pólo de primeira ordem em −2 produz um ângulo de fase que começa em 0° e termina em −90° por intermédio de uma inclinação de −45°/década começando uma década abaixo e terminando uma década acima da freqüência de quebra. O zero de primeira ordem produz um ângulo de fase que começa em 0° e termina em +90° por intermédio de uma inclinação de +45°/década começando uma década abaixo e terminando

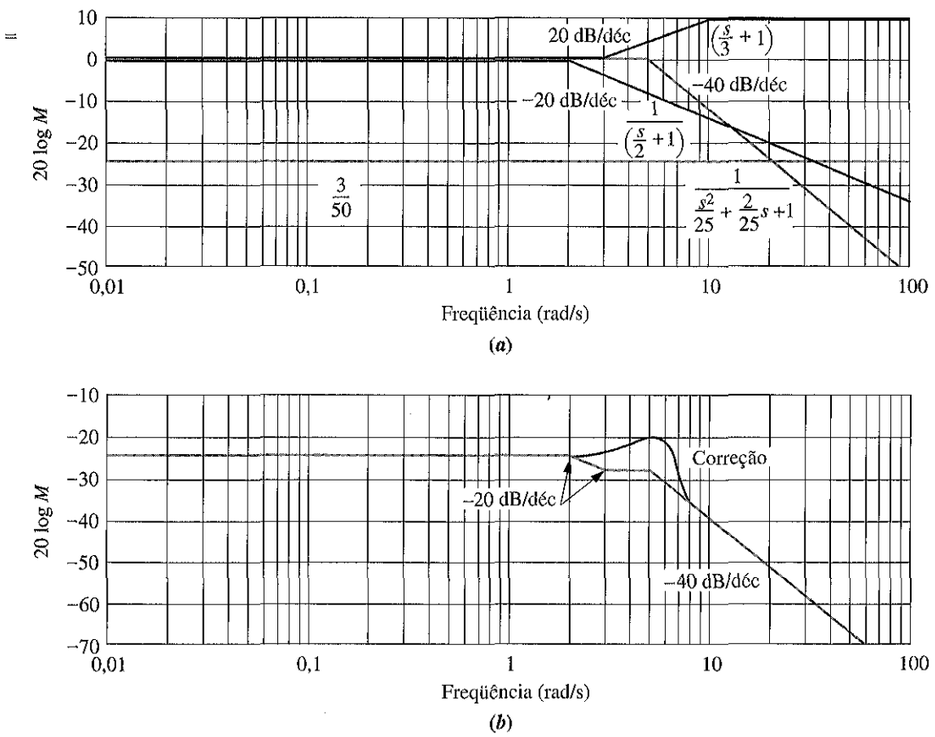


Fig. 10.18 Gráfico de magnitude de Bode para $G(s) = (s+3)/[(s+2)(s^2+2s+25)]$: **a.** componentes; **b.** composição.

Tabela 10.6 Inclinações do diagrama de magnitude para o Exemplo 10.3

		Começa: Pólo em −2	Começa: Zero em −3	Começa: $\omega_n = 5$
Freqüência (rad/s)	0,01	2	3	5
Pólo em −2	0	−20	−20	−20
Zero em −3	0	0	20	20
$\omega_n = 5$	0	0	0	−40
Inclinação total (dB/década)	0	−20	0	−40

Tabela 10.7 Inclinações do diagrama de fase para o Exemplo 10.3

	Começa: Pólo em −2	Começa: Zero em −3	Começa: ω_n em −5	Termina: Pólo em −2	Termina: Zero em −3	Termina: $\omega_n = 5$
Freqüência (rad/s)	0,2	0,3	0,5	20	30	50
Pólo em −2	−45	−45	−45	0		
Zero em −3		45	45	45	0	
$\omega_n = 5$			−90	−90	−90	0
Inclinação total (graus/década)	−45	0	−90	−45	−90	0

uma década acima da sua freqüência de quebra. Os pólos de segunda ordem produzem um ângulo de fase que começa em 0° e termina em −180° por intermédio de uma inclinação de −90° /década começando uma década abaixo da freqüência natural ($\omega_n = 5$) e terminando uma década acima desta freqüência natural. As inclinações, mostradas na Fig. 10.19(*a*), estão somadas em cada uma das faixas de freqüência, e o gráfico de fase de Bode final está mostrado na Fig. 10.19(*b*).

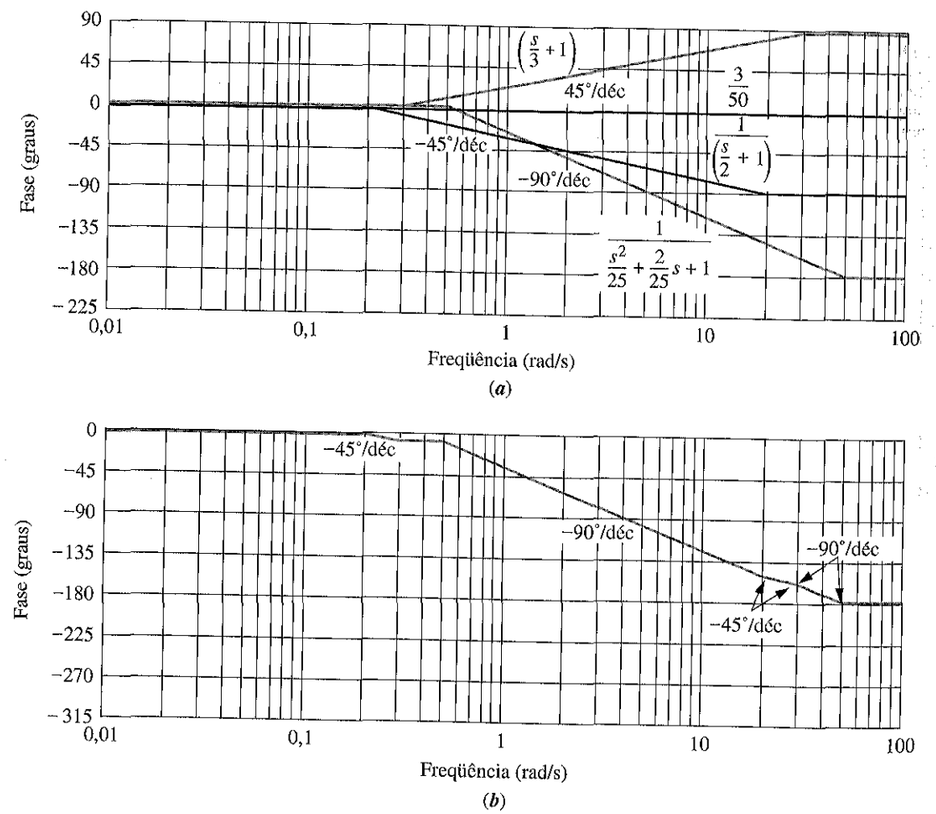


Fig. 10.19 Gráfico de fase de Bode para $G(s) = (s+3)/[(s+2)(s^2+2s+25)]$: **a.** componentes; **b.** composição.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap10p1 no Apêndice B. Você irá aprender como usar o MATLAB para construir os gráficos de Bode e listar os pontos nos gráficos. Este exercício resolve o Exemplo 10.3 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 10.2

Problema: Construir os gráficos logarítmicos de magnitude e de fase de Bode para o sistema mostrado na Fig. 10.10 onde

$$G(s) = \frac{(s+20)}{(s+1)(s+7)(s+50)}$$

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção, aprendemos como construir os gráficos logarítmicos de Bode de magnitude e de fase. Os gráficos de Bode são curvas separadas para magnitude e fase da resposta de freqüência relativa a um sistema, $G(s)$. Na próxima seção, desenvolveremos o critério de estabilidade de Nyquist, que faz uso da resposta de freqüência de um sistema. Os gráficos de Bode podem, então, ser usados para determinar a estabilidade de um sistema.

10.3 Introdução ao Critério de Nyquist

O critério de Nyquist relaciona a estabilidade de um sistema a malha fechada à resposta de freqüência a malha aberta e à localização dos pólos a malha aberta. Desta maneira, o conhecimento da resposta de freqüência do sistema a malha aberta conduz à informação sobre a estabilidade do sistema a malha fechada. Este conceito é semelhante ao do lugar de raízes, onde começamos com informação sobre o sistema a malha aberta, seus pólos e zeros, e desenvolvemos as informações sobre o regime transitório e sobre a estabilidade do sistema de malha fechada.

Embora o critério de Nyquist forneça principalmente informação sobre a estabilidade, estenderemos o conceito à resposta transitória e aos erros de estado estacionário. Por conseguinte, as técnicas de resposta de freqüência são um método alternativo ao do lugar de raízes.

Dedução do Critério de Nyquist

Considere o sistema da Fig. 10.20. O critério de Nyquist pode nos dizer quantos pólos a malha fechada estão no semiplano da direita. Antes de deduzir o critério, estabeleçamos quatro importantes conceitos que serão usados durante a dedução: (1) a relação entre os pólos de $1 + G(s)H(s)$ e os pólos de $G(s)H(s)$; (2) a relação entre os zeros de $1 + G(s)H(s)$ e os pólos da função de transferência a malha fechada, $T(s)$; (3) o conceito de *mapear* pontos; e (4) o conceito de mapear *contornos*.

Fazendo

$$G(s) = \frac{N_G}{D_G} \tag{10.37a}$$

$$H(s) = \frac{N_H}{D_H} \tag{10.37b}$$

Obtemos

$$G(s)H(s) = \frac{N_G N_H}{D_G D_H} \tag{10.38a}$$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G N_H}{D_G D_H} = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H} \tag{10.38b}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N_G D_H}{D_G D_H + N_G N_H} \tag{10.38c}$$

Com base nas Eqs. (10.38), concluímos que (1) os pólos de $1 + G(s)H(s)$ são os mesmos que os de $G(s)H(s)$, o sistema a malha aberta, e (2) os zeros de $1 + G(s)H(s)$ são os mesmos que os pólos de $T(s)$, o sistema a malha fechada.

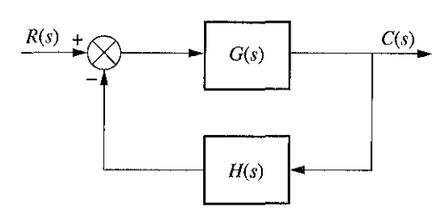


Fig. 10.20 Sistema de controle a malha fechada.

A seguir, definiremos o termo *mapeamento*. Se pegarmos um número complexo no plano s e o substituirmos em uma função, $F(s)$, resultará um outro número complexo. Este processo é chamado de *mapeamento*. Por exemplo, a substituição de $s = 4 + j3$ na função $(s^2 + 2s + 1)$ produz $16 + j30$. Dizemos que $4 + j3$ é mapeado em $16 + j30$ através da função $(s^2 + 2s + 1)$.

Finalmente, discutimos o conceito de mapear *contornos*. Considere a coleção de pontos, chamada de *contorno*, mostrada na Fig. 10.21 como o contorno de A. Suponha, além disso, que

$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots} \tag{10.39}$$

O contorno A pode ser mapeado através de $F(s)$ no contorno B substituindo cada ponto do contorno A na função $F(s)$ e plotando os números complexos resultantes. Por exemplo, o ponto Q na Fig. 10.21 está mapeado no ponto Q' através da função $F(s)$.

A abordagem que utiliza vetores para efetuar os cálculos, tratada na Seção 8.1, pode ser usada como alternativa. A Fig. 10.22 mostra exemplos de mapeamento de um contorno através de algumas $F(s)$ simples. O mapeamento de cada ponto é definido por meio de operações aritméticas com números complexos, onde o número resultante, R, é calculado a partir dos números complexos representados por V, conforme mostrado na última coluna da Fig. 10.22. Você deve verificar que, se admitirmos um sentido horário para mapeamento dos pontos do contorno A, então o contorno B será mapeado no sentido horário se $F(s)$ na Fig. 10.22 possuir unicamente zeros, e no sentido anti-horário se possuir apenas pólos. Você também deve verificar que, se o pólo ou o zero de $F(s)$ estiver envolvido pelo contorno A, o mapeamento envolverá a origem. No último caso da Fig. 10.22, a rotação do pólo e do zero se cancelam, e o mapeamento não envolve a origem.

Comecemos agora a dedução do critério de Nyquist para estabilidade. Mostraremos que existe uma única relação entre o número de pólos de $F(s)$ contidos no interior do contorno A, o número de zeros contidos também no interior do contorno A, e o número de envolvimentos da origem no sentido anti-horário do mapeamento de A no contorno B. Mostraremos então como este inter-relacionamento pode ser usado para determinar a estabilidade de sistemas a malha fechada. Este método de determinação da estabilidade é chamado de *critério de Nyquist*.

Admitamos primeiro $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, com a distribuição dos pólos e dos zeros de $1 + G(s)H(s)$, conforme mostrado na Fig. 10.23 próximo do contorno A. Portanto, $R = (V_1V_2)/(V_3V_4V_5)$. Como cada ponto Q do contorno A é substituído em $1 + G(s)H(s)$, um ponto mapeado resulta no contorno B. Supondo que $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ tenha dois zeros e três pólos, cada termo entre parênteses na Eq. (10.39) é um vetor na Fig. 10.23. À medida que nos deslocamos ao longo do contorno A na direção horária, cada vetor da Eq. (10.39) que se encontre no interior do contorno A parecerá ser submetido a uma rotação completa, ou uma mudança no ângulo de 360°. Por outro lado, cada vetor desenhado a partir dos pólos e dos zeros de $1 + G(s)H(s)$ que exista fora do contorno A parecerá oscilar e retornar à sua posição anterior, sofrendo uma variação angular líquida de 0°.

Cada fator devido a pólo ou a zero de $1 + G(s)H(s)$, cujo vetor experimenta uma rotação completa ao redor do contorno A, produz uma mudança de 360° na resultante, R, ou seja, uma rotação completa do mapeamento ao longo do contorno B. Se percorrermos os pontos do contorno A em sentido anti-horário, cada zero dentro do contorno A produzirá uma rotação completa no sentido horário, enquanto cada pólo dentro do contorno A produzirá uma rotação completa no sentido anti-horário, uma vez que os pólos estão no denominador da Eq. (10.39).

Por conseguinte, $N = P - Z$, onde N é igual ao número de rotações no sentido anti-horário sobre o contorno B em torno da origem; P é igual ao número de pólos de $1 + G(s)H(s)$ no interior do contorno A, e Z é igual ao número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no interior do mesmo contorno A.

Como os pólos mostrados na Fig. 10.23 são pólos de $1 + G(s)H(s)$, sabemos, com base nas Eqs. (10.38), que eles também são pólos de $G(s)H(s)$ e são conhecidos. Mas, como *os zeros mostrados na Fig. 10.23 são zeros de* $1 + G(s)H(s)$, sabemos, com base na Eq. (10.38), que *eles também são pólos do sistema a malha fechada e não são conhecidos*. Desta maneira, P é igual ao número de pólos a malha aberta envolvidos e Z é igual ao número de pólos a malha fechada envolvidos. Portanto, $N = P - Z$, ou, alternativamente, $Z = P - N$, nos diz que o número de pólos a malha fechada no interior do contorno (que é o mesmo que os zeros dentro do contorno) é igual ao número de pólos a malha aberta de $G(s)H(s)$ no interior do contorno menos o número de rotações no sentido anti-horário do mapeamento em torno da origem.

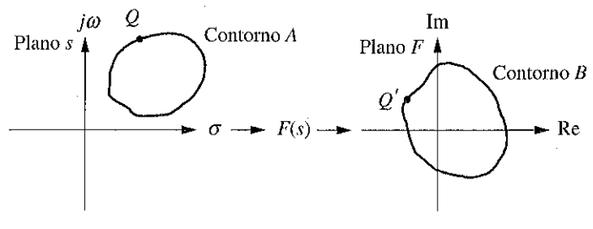


Fig. 10.21 Mapeando o contorno A através da função $F(s)$ no contorno B.

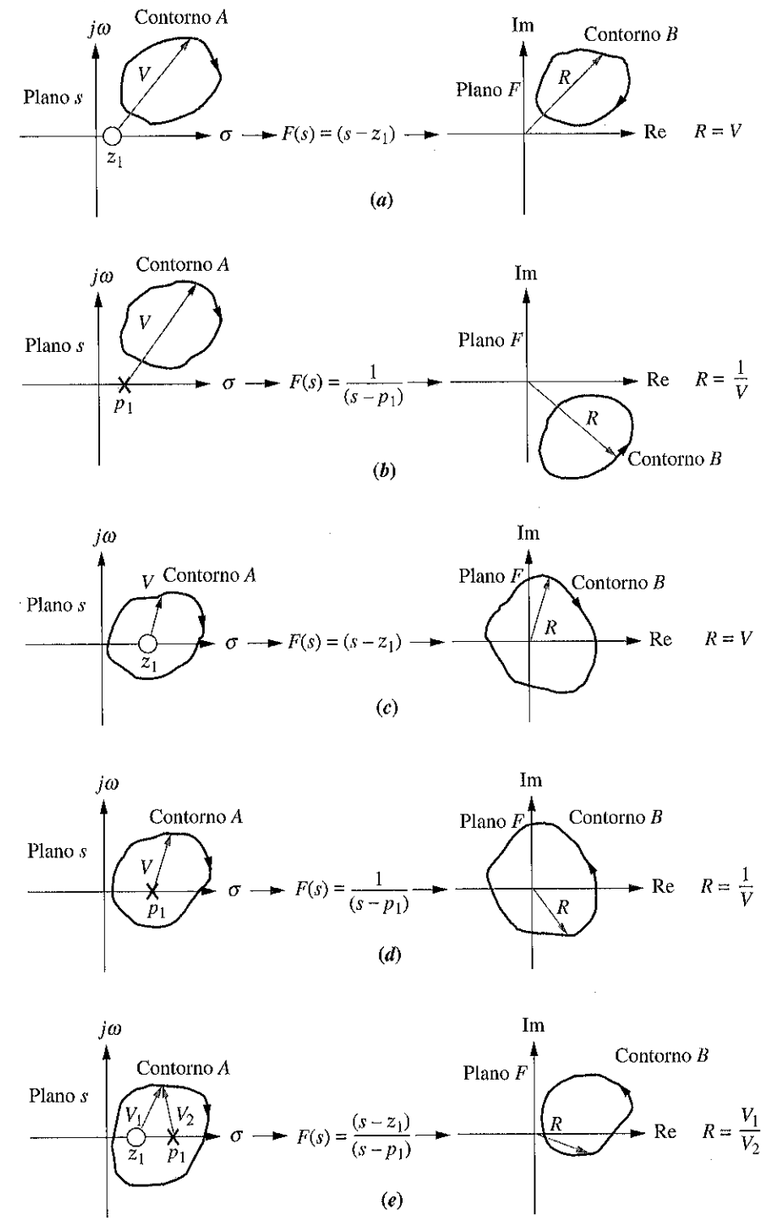


Fig. 10.22 Exemplos de mapeamento de contornos.

Se estendermos o contorno para incluir todo o semiplano da direita, conforme mostrado na Fig. 10.24, poderemos contar o número de pólos a malha fechada no interior do contorno A que estão no semiplano da direita e determinar a estabilidade do sistema. Uma vez que podemos contar o número de pólos a malha aberta, P, dentro do contorno, que são os mesmos pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano da direita, o único problema que resta é como obter o mapeamento e determinar N.

Como todos os pólos e zeros de $G(s)H(s)$ são conhecidos, o que acontece se mapearmos através de $G(s)H(s)$ no lugar de $1 + G(s)H(s)$? O contorno resultante é o mesmo que um mapeamento através de $1 + G(s)H(s)$, exceto que é deslocado de uma unidade para a esquerda; desta maneira, contamos rotações em torno de -1 em vez de rotações em torno da origem. Portanto, o enunciado final do critério de estabilidade de Nyquist é o seguinte:

Se um contorno, A, que envolve todo o semiplano da direita for mapeado através de $G(s)H(s)$, então *o número de pólos a malha fechada, Z, no semiplano da direita é igual ao número de pólos a malha aberta, P, que*

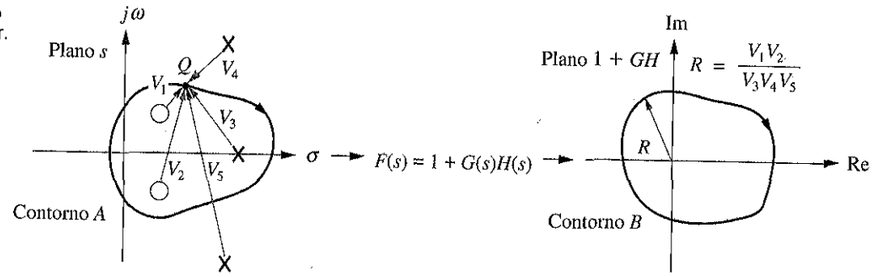


Fig. 10.23 Representação de mapeamento por vetor.

estão no semiplano da direita menos o número de rotações no sentido anti-horário, N, em torno de −1 do mapeamento; isto é, $Z = P - N$. O mapeamento é chamado de *diagrama de Nyquist*, ou *gráfico de Nyquist*, de $G(s)H(s)$.

Agora podemos ver por que este método é classificado como uma técnica de resposta de freqüência. Ao longo do contorno A na Fig. 10.24, mapear os pontos sobre o eixo $j\omega$ através da função $G(s)H(s)$ é o mesmo que substituir $s = j\omega$ em $G(s)H(s)$ para formar a função resposta de freqüência $G(j\omega)H(j\omega)$. Desta forma, estamos determinando a resposta de freqüência de $G(s)H(s)$ sobre a parte do contorno A no eixo positivo $j\omega$. Em outras palavras, parte do diagrama de Nyquist é o gráfico polar da resposta de freqüência de $G(s)H(s)$.

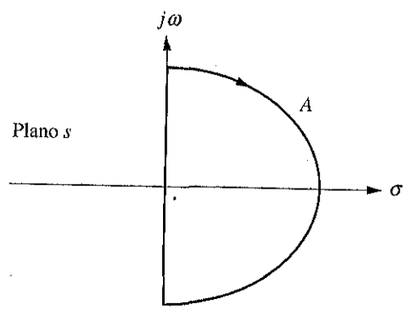


Fig. 10.24 Contorno envolvendo o semiplano da direita para determinar estabilidade.

Aplicando o Critério de Nyquist para Determinar a Estabilidade

Depois de descrever como esboçar um diagrama de Nyquist, vejamos alguns exemplos típicos que usam o critério de Nyquist para determinar a estabilidade de um sistema. Estes exemplos nos dão uma perspectiva antes de entrar nos detalhes do mapeamento. A Fig. 10.25(*a*) mostra um contorno A que não envolve os pólos a malha fechada, isto é, os zeros de $1 + G(s)H(s)$. O contorno, portanto, que é mapeado através de $G(s)H(s)$ no diagrama de Nyquist não envolve -1. Portanto, $P = 0$, $N = 0$, e $Z = P - N = 0$. Uma vez que Z é o número de pólos a malha fechada dentro do contorno A, que envolve todo o semiplano da direita, este sistema não tem pólos no semiplano da direita e é estável.

Por outro lado, a Fig 10.25(*b*) mostra um contorno A que, embora não circunscreva pólos a malha aberta, gera dois envolvimentos do ponto -1 no sentido horário. Assim, $P = 0$, $N = -2$, e o sistema é instável; ele tem dois pólos a malha fechada no semiplano da direita, visto que $Z = P - N = 2$. Os dois pólos a malha fechada são mostrados dentro do contorno A na Fig. 10.25(*b*) como zeros de $1 + G(s)H(s)$. Você deve manter em mente que a existência desses pólos não é conhecida a priori.

Neste exemplo, observe que os envolvimentos no sentido horário implicam um valor negativo para N. O número de envolvimentos pode ser determinado traçando uma linha radial de teste a partir de -1 em qualquer direção conveniente e contando o número de vezes que o diagrama de Nyquist cruza a linha radial de teste. Os cruzamentos no sentido anti-horário são positivos, e os cruzamentos no sentido horário são negativos. Por exemplo, na Fig. 10.25(*b*), o contorno B cruza a linha radial de teste duas vezes no sentido horário. Portanto, há -2 envolvimentos do ponto -1.

Antes de aplicar o critério de Nyquist a outros exemplos para determinar a estabilidade do sistema, devemos primeiro ganhar experiência no traçado de diagramas de Nyquist. A próxima seção trata do desenvolvimento desta habilidade.

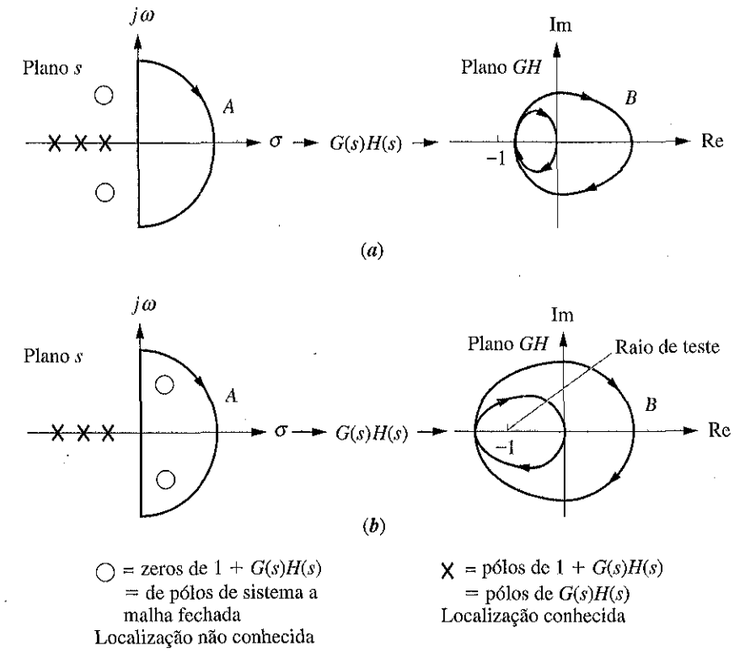


Fig. 10.25 Exemplos de mapeamento: **a.** o contorno não envolve os pólos a malha fechada; **b.** o contorno envolve os pólos a malha fechada.

10.4 Esboçando o Diagrama de Nyquist

O contorno que envolve completamente o semiplano da direita pode ser mapeado através da função $G(s)H(s)$ pela substituição dos pontos ao longo do contorno em $G(s)H(s)$. Os pontos ao longo da parte positiva do eixo imaginário levam à representação polar da resposta de freqüência de $G(s)H(s)$. Aproximações podem ser feitas em $G(s)H(s)$para os pontos ao longo do semicírculo de raio infinito, admitindo-se que os vetores comecem na origem. Dessa forma, seu comprimento é infinito, e seus ângulos são facilmente calculados.

Na maioria das vezes, contudo, um simples esboço do diagrama de Nyquist é tudo que é necessário. Um esboço pode ser obtido rapidamente observando os vetores de $G(s)H(s)$ e seu movimento ao longo do contorno. Nos exemplos a seguir, enfatizamos este método rápido para esboçar o diagrama de Nyquist. Contudo, os exemplos também incluem expressões analíticas para $G(s)H(s)$ para cada seção do contorno para ajudar a determinar a forma do diagrama de Nyquist.

Exemplo 10.4

Esboçando um diagrama de Nyquist

Problema O controle de velocidade encontra uma aplicação ampla na indústria e nas utilidades domésticas. A Fig. 10.26(*a*) mostra uma aplicação: o controle da freqüência de saída de um sistema de energia elétrica formado por um par turbina-gerador. Regulando a velocidade, o sistema de controle assegura que a freqüência gerada se mantém dentro da tolerância. Os desvios em relação à velocidade desejada são captados por sensores, e uma válvula age sobre o vapor para compensar o erro de velocidade. O diagrama de blocos do sistema é mostrado na Fig. 10.26(*b*). Esboce o diagrama de Nyquist para o sistema da Fig. 10.26.

Solução Conceitualmente, o diagrama de Nyquist é traçado substituindo-se os pontos do contorno mostrado na Fig. 10.27(*a*) em $G(s) = 500/[(s + 1)(s + 3)(s + 10)]$. Este processo é equivalente a efetuar operações aritméticas com números complexos usando os vetores de $G(s)$ traçados aos pontos do contorno, como mostrado na Fig. 10.27(*a*) e (*b*). Cada um dos termos relativos a pólos e zeros de $G(s)$, mostrados na Fig. 10.26(*b*), é um vetor na Fig. 10.27(*a*) e (*b*). O vetor resultante, R, determinado em qualquer ponto ao longo do contorno, é em geral o produto dos vetores devidos aos zeros divididos pelo produto dos vetores devidos aos pólos (Veja Fig. 10.27(*c*)). Assim, a magnitude da resultante é o produto dos comprimentos dos vetores devidos aos zeros dividido pelo produto dos comprimentos dos vetores devidos aos pólos, e o ângulo da resultante é a soma dos ângulos devidos aos zeros menos a soma dos ângulos devidos aos pólos.

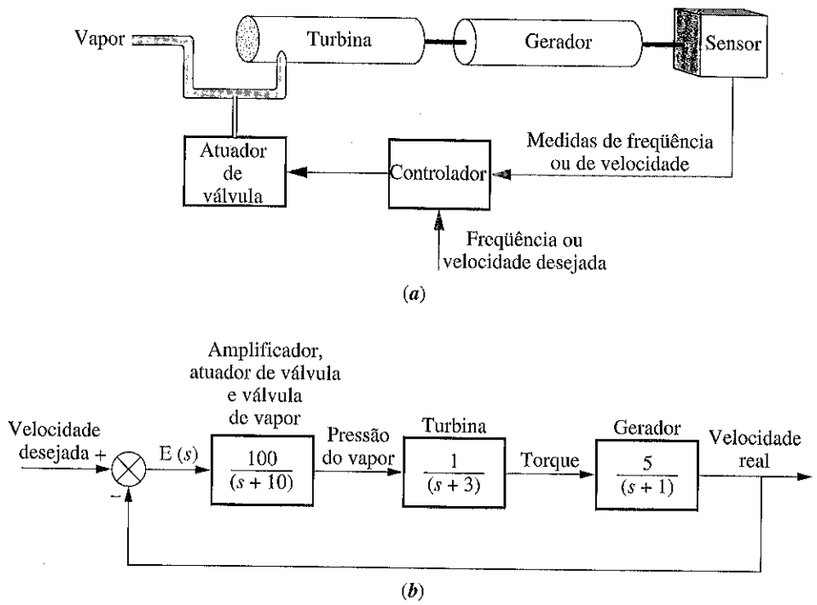


Fig. 10.26 a. Turbina e gerador; **b.** diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade para o Exemplo 10.4.

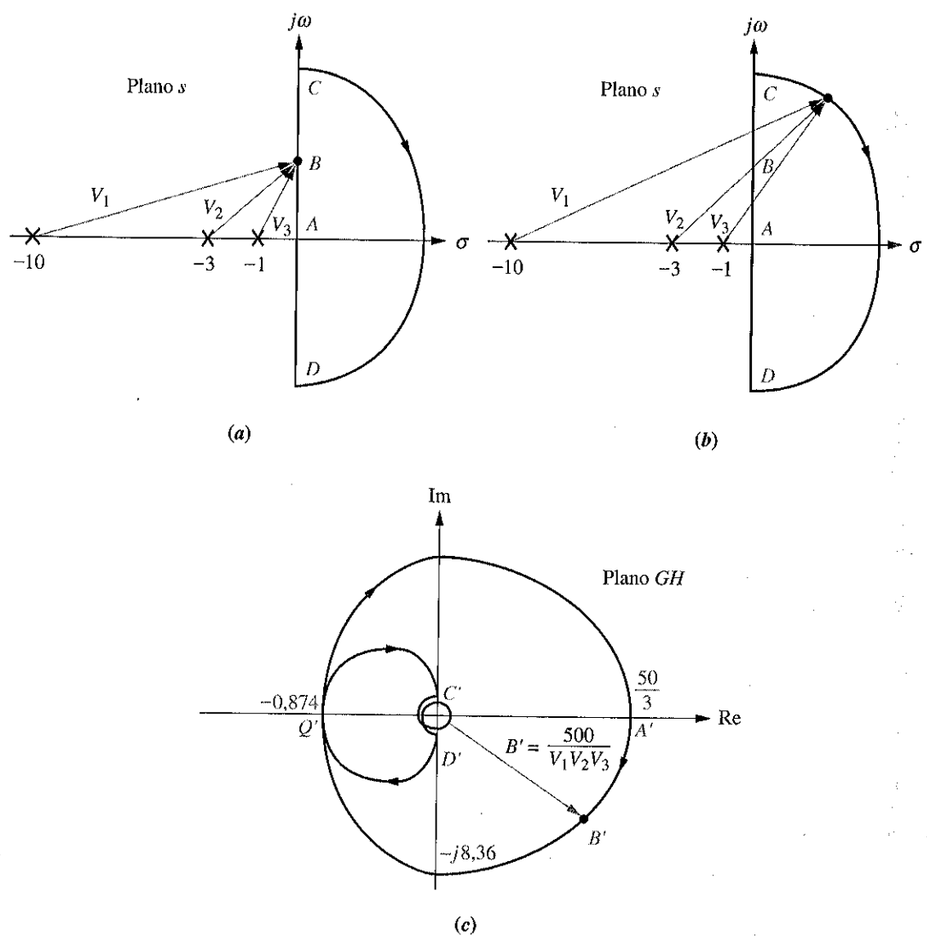


Fig. 10.27 Cálculo com vetor para elaboração do diagrama de Nyquist para o Exemplo 10.4: **a.** vetores no contorno em baixas freqüências; **b.** vetores no contorno em torno do infinito; **c.** diagrama de Nyquist.

À medida que nos deslocamos no sentido horário ao longo do contorno, do ponto A até o ponto C na Fig. 10.27(a), o ângulo resultante vai de 0° a $-3 \times 90° = -270°$, ou de A' a C' na Fig. 10.27(c). Como os ângulos emanam dos pólos no denominador de $G(s)$, a rotação ou aumento no ângulo corresponde realmente a uma diminuição no ângulo da função $G(s)$; os pólos ganham 270° no sentido anti-horário, o que explica por que a função perde 270°.

À medida que a resultante se desloca de A' para C' na Fig. 10.27(c), sua magnitude muda de acordo com o produto dos módulos dos zeros dividido pelo produto dos módulos dos pólos. Por conseguinte, a resultante vai de um valor finito na freqüência zero (no ponto A da Fig. 10.27(a) há três módulos finitos de pólos) até a magnitude zero na freqüência infinita no ponto C (no ponto C da Fig. 10.27(a) há três módulos infinitos de pólos).

O mapeamento do ponto A ao ponto C também pode ser explicado analiticamente. De A a C a coleção de pontos ao longo do contorno é imaginária. Portanto, de A a C, $G(s) = G(j\omega)$, ou, com base na Fig. 10.26(b),

$$G(j\omega) = \left.\frac{500}{(s+1)(s+3)(s+10)}\right|_{s \to j\omega} = \frac{500}{(-14\omega^2 + 30) + j(43\omega - \omega^3)} \tag{10.40}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado complexo do denominador, obtém-se

$$G(j\omega) = 500\frac{(-14\omega^2 + 30) - j(43\omega - \omega^3)}{(-14\omega^2 + 30)^2 + (43\omega - \omega^3)^2} \tag{10.41}$$

Na freqüência zero, $G(j\omega) = 500/30 = 50/3$. Portanto, o diagrama de Nyquist começa em 50/3 com um ângulo de 0°. À medida que ω aumenta, a parte real se mantém positiva, e a parte imaginária, negativa. Em $\omega = \sqrt{30/14}$, a parte real se torna negativa. Em $\omega = \sqrt{43}$, o diagrama de Nyquist cruza o eixo real negativo, visto que o termo imaginário se anula. O valor real no ponto de interseção do eixo, ponto Q' na Fig. 10.27(c), encontrado substituindo-se $\omega = \sqrt{43}$ na Eq. (10.41), é $-0{,}874$. Continuando em direção a $\omega = \infty$, a parte real se torna negativa, e a parte imaginária, positiva. Na freqüência infinita, $G(j\omega) \approx 500j/\omega^3$, ou aproximadamente zero com 90°.

Ao longo do semicírculo infinito do ponto C ao ponto D, mostrado na Fig. 10.27(b), os vetores giram no sentido horário, cada um deles de 180°. Portanto, a resultante realiza uma rotação no sentido anti-horário de $3 \times 180°$, começando no ponto C' e terminando no ponto D' da Fig. 10.27(c). Analiticamente, podemos ver isto admitindo que ao longo do semicírculo de raio infinito os vetores começam aproximadamente na origem e têm módulo infinito. Para qualquer ponto do plano s, o valor de $G(s)$ pode ser encontrado representando cada número complexo na forma polar, como a seguir:

$$G(s) = \frac{500}{(R_{-1}e^{j\theta_{-1}})(R_{-3}e^{j\theta_{-3}})(R_{-10}e^{j\theta_{-10}})} \tag{10.42}$$

onde R_{-i} é a magnitude do número complexo $(s + i)$, e θ_{-i} é o ângulo do número complexo $(s + i)$. Ao longo do semicírculo infinito, todos os R_{-i} são infinitos, e podemos usar nossa hipótese para aproximar os ângulos como se os vetores partissem da origem. Dessa forma, ao longo do semicírculo infinito,

$$G(s) = \frac{500}{\infty\angle(\theta_{-1} + \theta_{-3} + \theta_{-10})} = 0\angle -(\theta_{-1} + \theta_{-3} + \theta_{-10}) \tag{10.43}$$

No ponto C na Fig. 10.27(b), os ângulos são todos 90°. Portanto a resultante é $0 \angle -270°$, mostrado como ponto C' na Fig. 10.27(c). De modo semelhante, no ponto D, $G(s) = 0 \angle +270°$, e é mapeado no ponto D'. Você pode selecionar pontos intermediários para verificar a espiral cujo vetor radial tende a zero na origem, como mostrado na Fig. 10.27(c).

O eixo imaginário negativo pode ser mapeado percebendo-se que a parte real de $G(j\omega)H(j\omega)$ é sempre uma função par, enquanto a parte imaginária de $G(j\omega)H(j\omega)$ é uma função ímpar. Isto é, a parte real não mudará o sinal ao se usar valores negativos para ω, enquanto a parte imaginária mudará de sinal. Dessa forma, o mapeamento do eixo imaginário negativo é uma imagem especular do mapeamento do eixo imaginário positivo. O mapeamento da seção do contorno do ponto D ao ponto A é desenhado como uma imagem especular em relação ao eixo real do mapeamento dos pontos entre A e C.

No exemplo anterior, não havia pólos a malha aberta situados sobre o contorno que envolve o semiplano da direita. Se houver pólos sobre o contorno, torna-se necessário fazer um desvio ao redor dos pólos; caso contrário, o mapeamento iria para infinito de uma forma indeterminada, sem informação angular. Subseqüentemente, um esboço completo do diagrama de Nyquist não poderia ser feito, e o número de envolvimentos de -1 não poderia ser determinado.

Suponhamos $G(s)H(s) = N(s)/sD(s)$, onde $D(s)$ possui raízes imaginárias. O termo s no denominador e as raízes imaginárias de $D(s)$ são pólos de $G(s)H(s)$ situados sobre o contorno, como mostrado na Fig. 10.28(a). Para esboçar o diagrama de Nyquist, o contorno deve ser desviado ao redor de cada pólo a malha aberta sobre o percurso. O desvio pode estar à direita do pólo, como mostrado na Fig. 10.28(b), onde está claro que cada vetor do pólo gira $+180°$ à medida que nos deslocamos no contorno próximo ao pólo. Este conhecimento da rotação angular dos

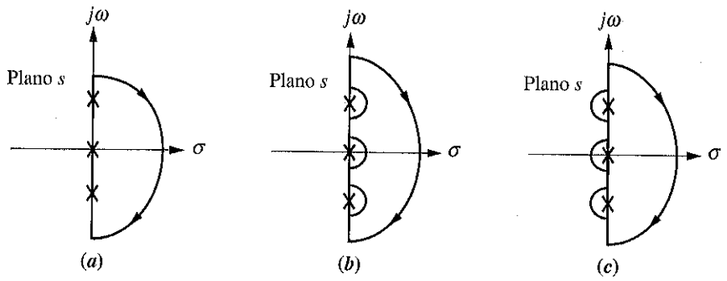


Fig. 10.28 Contornando pólos a malha aberta: **a.** pólos no contorno; **b.** desvio pela direita; **c.** desvio pela esquerda.

pólos no contorno nos permite completar o diagrama de Nyquist. Naturalmente, o desvio deve percorrer somente uma distância infinitesimal no semiplano da direita, sob pena de deixar de levar em conta algum outro pólo a malha fechada no semiplano da direita.

Podemos também nos desviar à esquerda dos pólos a malha aberta. Neste caso, cada vetor do pólo gira de um ângulo de $-180°$ à medida que percorremos o desvio em torno do pólo. Uma vez mais, o desvio deve ser infinitesimal ou haveria a possibilidade de incluir algum pólo no semiplano da esquerda na contagem. Vejamos um exemplo.

Exemplo 10.5

Diagrama de Nyquist para função de malha aberta com pólos no contorno

Problema Esboçar o diagrama de Nyquist do sistema com retroação unitária da Fig. 10.10, onde $G(s) = (s + 2)/s^2$.

Solução Os dois pólos do sistema na origem estão no contorno e devem ser desviados, conforme mostrado na Fig. 10.29(*a*). O mapeamento começa no ponto A e continua em sentido horário. Os pontos A, B, C, D, E e F da Fig. 10.29(*a*) são mapeados respectivamente nos pontos A', B', C', D', E' e F' da Fig. 10.29(*b*).

No ponto A, os dois pólos a malha aberta na origem contribuem com $2 \times 90° = 180°$ e o zero contribui com 0°. O ângulo total no ponto A, em conseqüência, é de $-180°$. Nas proximidades da origem, a função é infinita em magnitude por causa da estreita proximidade aos dois pólos a malha aberta. Assim, o ponto A é mapeado no ponto A', localizado no infinito com um ângulo de $-180°$.

Movendo-nos do ponto A para o ponto B ao longo do contorno resulta uma variação líquida no ângulo de $+90°$ devida unicamente ao zero. Os ângulos dos pólos permanecem os mesmos. Desta maneira, o mapeamento muda para $+90°$ no sentido anti-horário. O vetor mapeado passa de $-180°$ em A' para $-90°$ em B'. Ao mesmo tempo, a magnitude muda de infinito para zero, uma vez que no ponto B existe um comprimento infinito a partir do zero dividido por dois comprimentos infinitos a partir dos pólos.

Reciprocamente, a resposta de freqüência pode ser determinada analiticamente a partir de $G(j\omega) = (2 + j\omega)/(\omega^2)$, considerando ω indo de 0 a ∞. Nas baixas freqüências, $G(j\omega) \approx 2/(-\omega^2)$, ou $\infty \angle 180°$. Nas altas freqüências, $G(j\omega) \approx j/(-\omega)$, ou $0 \angle 90°$. Além disso, as partes real e imaginária são sempre negativas.

À medida que nos movemos ao longo do contorno BCD, a função magnitude permanece em zero (um comprimento infinito do zero dividido por dois comprimentos infinitos de pólos). À medida que os vetores se movem através de BCD, o vetor do zero e os dois vetores dos pólos sofrem mudanças de $-180°$ cada. Desta forma, o vetor mapeado sofre uma variação angular líquida de $+180°$, que é a variação angular do zero menos a soma das variações angulares dos pólos $\{-180 - [2(-180)] = +180\}$. O mapeamento é mostrado como $B'C'D'$, onde o vetor resultante muda para $+180°$ com uma magnitude ϵ que tende a zero.

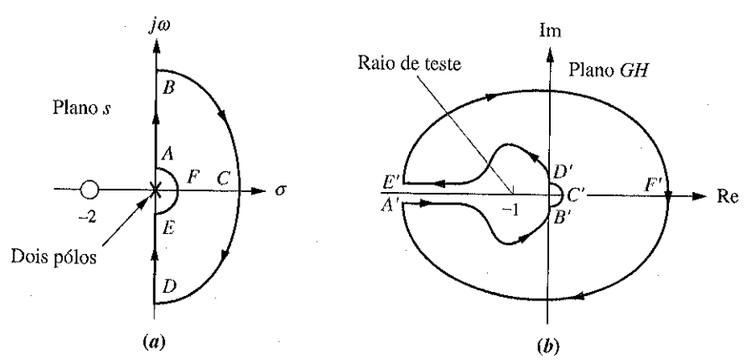


Fig. 10.29 a. Contorno para o Exemplo 10.5; **b.** Diagrama de Nyquist para o Exemplo 10.5.

Do ponto de vista analítico,

$$G(s) = \frac{R_{-2}\angle\theta_{-2}}{(R_0\angle\theta_0)(R_0\angle\theta_0)} \tag{10.44}$$

para todo plano s onde $R_{-2} \angle \theta_{-2}$ representa o vetor que vai do zero em -2 a qualquer ponto do plano s, e $R_0 \angle \theta_0$ é o vetor que liga o pólo na origem a qualquer ponto do plano s. Ao redor do semicírculo infinito, todos os $R_{-i} = \infty$, e todos os ângulos podem ser aproximados como se os vetores começassem na origem. Assim, no ponto B, $G(s) = 0 \angle -90°$ uma vez que todos os $\theta_{-i} = 90°$ na Eq. (10.44). No ponto C, todos os $R_{-i} = \infty$, e todos os $\theta_{-i} = 0°$ na Eq. (10.44). Portanto, $G(s) = 0 \angle 0°$. No ponto D, todos os $R_{-i} = \infty$, e todos os $\theta_{-i} = -90°$ na Eq. (10.44). Em conseqüência, $G(s) = 0 \angle 90°$.

O mapeamento do trecho do contorno de D até E é uma imagem especular do mapeamento de A até B. O resultado é D' até E'.

Finalmente, no trecho EFA, a magnitude resultante tende a infinito. O ângulo do zero não muda, mas cada pólo muda de $+180°$. Esta alteração produz uma mudança na função de $-2 \times 180° = -360°$. Portanto, o mapeamento de E' a A' é mostrado com comprimento infinito e ângulo de rotação de $-360°$. Analiticamente, podemos usar a Eq. (10.44) para os pontos ao longo do contorno EFA. Em E, $G(s) = (2 \angle 0°)/[(\epsilon\angle -90°)(\epsilon \angle -90°)] = \infty \angle 180°$. Em F, $G(s) = (2 \angle 0°)/[(\epsilon \angle 0°)(\epsilon \angle 0°)] = \infty \angle 0°$. Em A, $G(s) = (2 \angle 0°)/[(\epsilon\angle 90°)(\epsilon \angle 90°)] = \infty \angle -180°$.

O diagrama de Nyquist está agora completo, e uma linha radial de teste traçada a partir de -1 na Fig. 10.29(b) mostra uma volta em torno do eixo no sentido anti-horário e uma volta em torno do eixo no sentido horário produzindo zero envolvimento.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap10p2 no Apêndice B. Você irá aprender como usar o MATLAB para construir um diagrama de Nyquist e listar os pontos no gráfico. Você irá também aprender como especificar uma faixa de valores para a freqüência. Este exercício resolve o Exemplo 10.5 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 10.3

Problema: Esboçar o diagrama de Nyquist para o sistema mostrado na Fig. 10.10 onde

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Compare seu esboço com o gráfico polar no Exercício de Avaliação 10.1(c).

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção aprendemos como esboçar um diagrama de Nyquist. Vimos como calcular o valor da interseção do diagrama de Nyquist com o eixo real negativo. Esta interseção é importante na determinação do número de envolvimentos do ponto -1. Além disso, mostramos como esboçar o diagrama de Nyquist quando existem pólos a malha aberta sobre o contorno; este caso requer desvios ao redor dos pólos. Na próxima seção aplicaremos o critério de Nyquist para determinar a estabilidade de sistemas de controle com retroação.

10.5 Estabilidade por Intermédio do Diagrama de Nyquist

Usaremos agora o diagrama de Nyquist para determinar a estabilidade do sistema usando a equação simples $Z = P - N$. Os valores de P, o número de pólos a malha aberta de $G(s)H(s)$ no interior do contorno, e de N, o número de envolvimentos do ponto -1 pelo diagrama de Nyquist, são usados para determinar Z, o número de pólos do sistema a malha fechada situados no semiplano da direita.

Se o sistema a malha fechada tiver um ganho de malha variável, uma pergunta que gostaríamos de fazer seria: "Para que faixa de ganho o sistema é estável?" Esta pergunta, respondida anteriormente pelo método do lugar das raízes e pelo critério de Routh-Hurwitz, é agora respondida por intermédio do critério de Nyquist. A abordagem geral consiste em ajustar o ganho de malha com valor unitário e esboçar o diagrama de Nyquist. Uma vez que o ganho é simplesmente um fator de multiplicação, o efeito do ganho é o de multiplicar a resultante por uma constante em qualquer ponto do diagrama de Nyquist.

Por exemplo, considere a Fig. 10.30, que resume a abordagem de Nyquist para um sistema com ganho variável, K. À medida que o ganho varia, podemos visualizar o diagrama de Nyquist na Fig. 10.30(*c*) expandindo (aumentando o ganho) ou encolhendo (diminuindo o ganho) como um balão. Esta ação pode mover o diagrama de Nyquist para além do ponto -1, alterando a situação de estabilidade. Para este sistema, uma vez que $P = 2$, o ponto crítico deve ser envolvido pelo diagrama de Nyquist para se obter $N = 2$ e um sistema estável. Uma redução do ganho colocaria o ponto crítico fora do diagrama de Nyquist onde $N = 0$, produzindo $Z = 2$, um sistema instável.

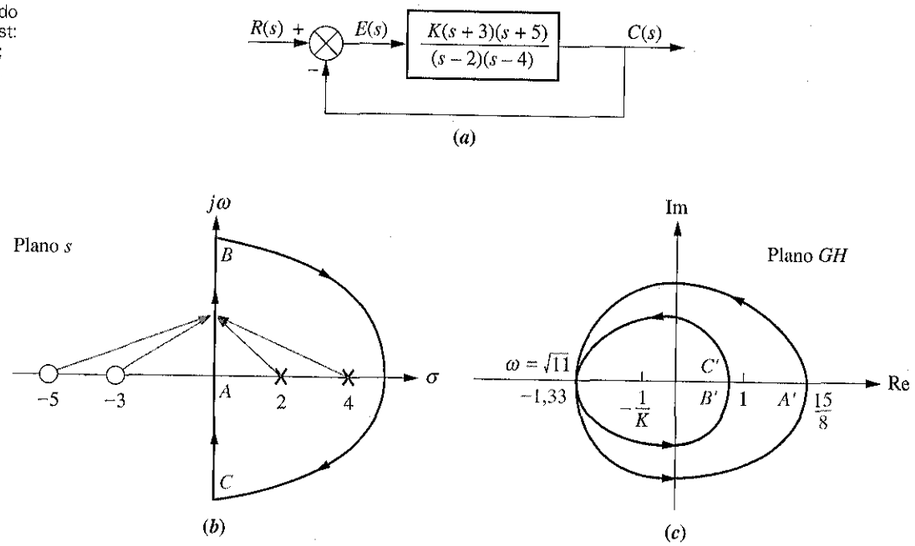


Fig. 10.30 Demonstrando a estabilidade de Nyquist: **a.** sistema; **b.** contorno; **c.** diagrama de Nyquist.

A partir de outra perspectiva, podemos pensar no diagrama de Nyquist como permanecendo estacionário e o ponto -1 se movendo ao longo do eixo real. Para fazer isto, ajustamos o ganho unitário e posicionamos o ponto crítico em $-1/K$ em vez de em -1. Desta maneira, o ponto crítico se deslocará para mais perto da origem à medida que K aumentar.

Finalmente, se o diagrama de Nyquist cruza o eixo real em -1, então $G(j\omega)H(j\omega) = -1$. Com base no conceito de lugar das raízes, quando $G(s)H(s) = -1$, a variável s é um pólo a malha fechada do sistema. Desta maneira, a freqüência na qual o diagrama de Nyquist cruza -1 é a mesma freqüência em que o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$. Portanto, o sistema é marginalmente estável se o diagrama de Nyquist interceptar o eixo real em -1.

Em resumo, então, se o sistema a malha aberta contém um ganho variável, K, faça $K = 1$ e esboce o diagrama de Nyquist. Considere que o ponto crítico esteja em $-1/K$ e não em -1. Ajuste o valor de K para gerar estabilidade, com base no critério de Nyquist.

Exemplo 10.6

Faixa de ganho para estabilidade por intermédio do critério de Nyquist

Problema Para o sistema com retroação unitário da Fig. 10.10, onde $G(s) = K/[s(s+3)(s+5)]$, determine a faixa de ganho, K, para estabilidade, instabilidade e o valor do ganho para a estabilidade marginal. Para a estabilidade marginal, determine também a freqüência de oscilação. Use o critério de Nyquist.

Solução Primeiramente, faça $K = 1$ e esboce o diagrama de Nyquist do sistema, usando o contorno mostrado na Fig. 10.31(a). Para todos os pontos do eixo imaginário,

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left.\frac{K}{s(s+3)(s+5)}\right|_{\substack{K=1\\ s=j\omega}} = \frac{-8\omega^2 - j(15\omega - \omega^3)}{64\omega^4 + \omega^2(15-\omega^2)^2} \tag{10.45}$$

Em $\omega = 0$, $G(j\omega)H(j\omega) = -0{,}0356 - j\infty$.

Determine em seguida o ponto onde o diagrama de Nyquist intercepta o eixo real negativo. Fazendo a parte imaginária da Eq. (10.45) igual a zero, achamos $\omega = \sqrt{15}$. Substituindo este valor de ω de volta na Eq. (10.45) resulta a parte real de $-0{,}0083$. Finalmente, em $\omega = \infty$, $G(j\omega)H(j\omega) = G(s)H(s)|_{s\to j\infty} = 1/(j\infty)^3 = 0 \angle -270°$.

Com base no contorno da Fig. 10.31(a), $P = 0$; para estabilidade, N deve então ser igual a zero. A partir da Fig. 10.31(b), o sistema é estável se o ponto crítico ficar situado fora do contorno ($N = 0$), de modo que $Z = P - N = 0$. Portanto, K pode ser aumentado de $1/0{,}0083 = 120{,}5$ antes de o diagrama de Nyquist envolver o ponto -1. Portanto, para estabilidade, $K < 120{,}5$. Para estabilidade marginal, $K = 120{,}5$. Neste ganho, o diagrama de Nyquist intercepta -1, e a freqüência de oscilação é $\sqrt{15}$ rad/s.

Agora que usamos o diagrama de Nyquist para determinar estabilidade, podemos desenvolver uma abordagem simplificada que use somente o mapeamento do eixo $j\omega$ positivo.

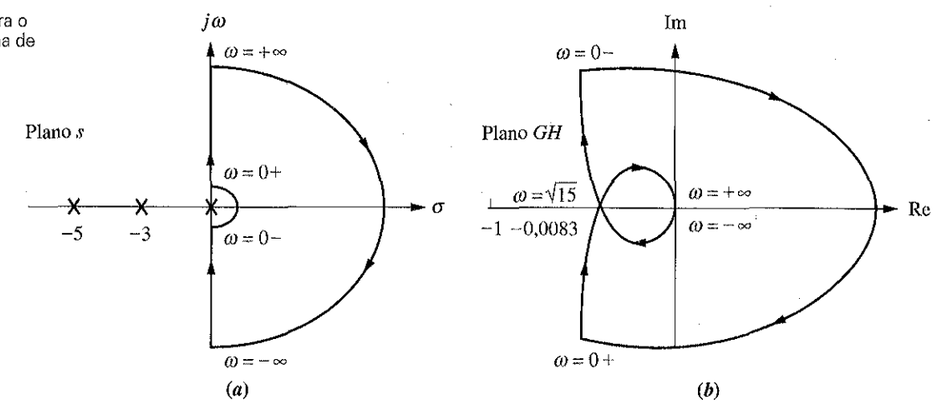


Fig. 10.31 a. Contorno para o Exemplo 10.6; **b.** Diagrama de Nyquist.

Estabilidade por Intermédio do Mapeamento do Eixo $j\omega$ Positivo

Como a estabilidade de um sistema é determinada pelo diagrama de Nyquist, é possível simplificar o cálculo continuado do sistema usando apenas o mapeamento do eixo $j\omega$ positivo. Este conceito desempenha um papel principal nas próximas duas seções, onde discutiremos a margem de estabilidade e a implementação do critério de Nyquist através dos gráficos de Bode.

Considere o sistema mostrado na Fig. 10.32, que é estável para valores baixos de ganho e instável para valores altos de ganho. Como o contorno não envolve os pólos a malha aberta, o critério de Nyquist nos diz que não devemos ter nenhum envolvimento de -1 para que o sistema seja estável. Podemos ver a partir do diagrama de Nyquist que o envolvimento do ponto crítico pode ser determinado apenas com base no mapeamento do eixo $j\omega$ positivo. Se o ganho for pequeno, o mapeamento passará à direita de -1, e o sistema será estável. Se o ganho for alto, o mapeamento passará à esquerda de -1, e o sistema será instável. Portanto, este sistema é estável para a faixa de valores de ganho de malha, K, que garante que a *magnitude a malha aberta é menor que um na freqüência onde o ângulo de fase é* 180° (*ou, de forma equivalente*, $-180°$). Este enunciado é, portanto, uma alternativa para o critério de Nyquist para este sistema.

Considere agora o sistema mostrado na Fig. 10.33, que é instável para valores baixos de ganho e estável para valores altos de ganho. Como o contorno inclui dois pólos a malha aberta, é necessário haver dois envolvimentos do ponto crítico no sentido anti-horário para se ter estabilidade. Assim, para este caso, o sistema é estável se a *magnitude da malha aberta for maior que um na freqüência onde o ângulo de fase é* 180° (*ou, de modo equivalente*, $-180°$).

Em resumo, primeiro determine a estabilidade com base no critério de Nyquist e no diagrama de Nyquist. Depois, interprete o critério de Nyquist e determine se o mapeamento apenas do eixo imaginário positivo deve ter um ganho menor ou maior que a unidade em 180°. Se o diagrama de Nyquist cruzar $\pm 180°$ para diversas freqüências, determine a interpretação a partir do critério de Nyquist.

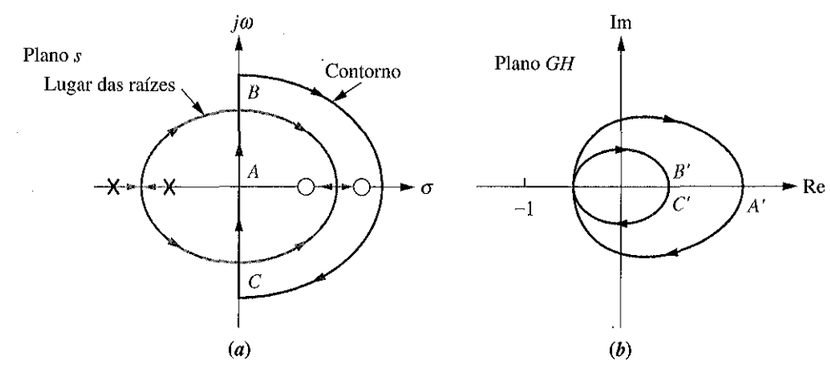


Fig. 10.32 a. Contorno e lugar das raízes do sistema que é estável para valor pequeno de ganho e instável para valor grande de ganho; **b.** Diagrama de Nyquist.

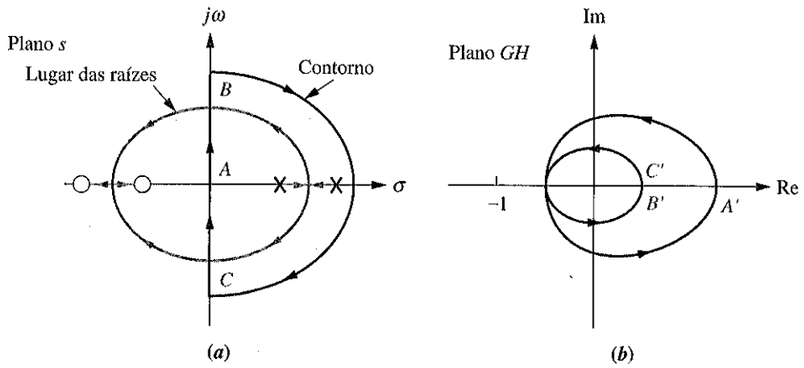


Fig. 10.33 a. Contorno e lugar das raízes do sistema que é instável para valores pequenos de ganho e estável para valores grandes de ganho; **b.** Diagrama de Nyquist.

Exemplo 10.7

Projeto da estabilidade por intermédio do mapeamento do eixo $j\omega$ positivo

Problema Determinar a faixa de valores de ganho para estabilidade e instabilidade, e o ganho para a estabilidade marginal para o sistema com retroação unitário da Fig. 10.10, onde $G(s) = K/[s^2 + 2s + 2)(s + 2)]$. Para estabilidade marginal, determine a freqüência de oscilação em radianos. Use o critério de Nyquist e o mapeamento somente do eixo imaginário positivo.

Solução Como os pólos a malha aberta estão somente no semiplano da esquerda, o critério de Nyquist nos diz que não queremos nenhum envolvimento de -1 para estabilidade. Portanto, é necessário um ganho menor que um em $\pm 180°$. Comece fazendo $K = 1$ e desenhando o trecho do contorno ao longo do eixo imaginário positivo conforme mostrado na Fig. 10.34(*a*). Na Fig. 10.34(*b*) a interseção com o eixo real negativo é obtida fazendo $s = j\omega$ em $G(s)H(s)$, ajustando a parte imaginária igual a zero para determinar a freqüência, e então substituindo a freqüência na parte real de $G(j\omega)H(j\omega)$. Desta forma, para qualquer ponto no eixo imaginário positivo,

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left.\frac{1}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)}\right|_{s \to j\omega}$$

$$= \frac{4(1 - \omega^2) - j\omega(6 - \omega^2)}{16(1 - \omega^2)^2 + \omega^2(6 - \omega^2)^2} \tag{10.46}$$

Igualando a zero a parte imaginária, achamos $\omega = \sqrt{6}$. Substituindo este valor de volta na Eq. (10.46), obtém-se a parte real, $-(1/20) = (1/20) \angle 180°$.

Este sistema a malha fechada é estável se a magnitude da resposta da freqüência for menor que um em 180°. Portanto, o sistema é estável para $K < 20$, instável para $K > 20$, e marginalmente estável para $K = 20$. Quando o sistema é marginalmente estável, a freqüência angular de oscilação é $\sqrt{6}$ rad/s.

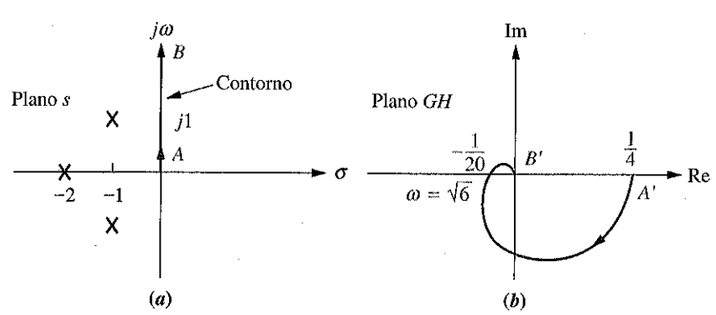


Fig. 10.34 a. Porção do contorno a ser mapeada para o Exemplo 10.7; **b.** Diagrama de Nyquist do mapeamento do eixo imaginário positivo.

Exercício de Avaliação 10.4

Problema: Para o sistema mostrado na Fig. 10.10, onde

$$G(s) = \frac{K}{(s + 2)(s + 4)(s + 6)}$$

faça o seguinte:

a. Plote o diagrama de Nyquist
b. Use o diagrama de Nyquist para determinar a faixa de valores de ganho, K, para estabilidade.

Respostas:

a. Veja a resposta no CD-ROM que acompanha o livro.
b. Estável para $K < 480$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

10.6 Margem de Ganho e Margem de Fase por Intermédio do Diagrama de Nyquist

Agora que sabemos como esboçar e interpretar o diagrama de Nyquist para determinar a estabilidade do sistema a malha fechada, vamos estender nossa discussão a conceitos que finalmente nos levarão ao projeto de características da resposta transitória por intermédio das técnicas de resposta de freqüência.

Usando o diagrama de Nyquist, definimos duas medidas de quão estável o sistema é. Estas medidas são chamadas de *margem de ganho* e *margem de fase*. Sistemas com margens maiores de ganho e de fase podem suportar maiores mudanças nos parâmetros do sistema antes de se tornarem instáveis. De certo modo, as margens de ganho e de fase podem ser qualitativamente relacionadas com o lugar das raízes, no sentido de que sistemas cujos pólos estão mais distantes do eixo imaginário apresentam um maior grau de estabilidade.

Na última seção discutimos estabilidade do ponto de vista do ganho com fase de 180°. Este conceito leva às seguintes definições de margem de ganho e margem de fase:

Margem de ganho, G_M A margem de ganho é a mudança no valor do ganho a malha aberta no ponto com fase de 180°, expressa em decibéis (dB), necessária para tornar instável o sistema a malha fechada.
Margem de fase, Φ_M A margem de fase é a mudança no valor da fase da malha aberta no ponto com ganho unitário, necessária para tornar instável o sistema a malha fechada.

Estas duas definições são mostradas graficamente no diagrama de Nyquist na Fig. 10.35.

Admita que um sistema é estável se não houver envolvimento do ponto -1. Usando a Fig. 10.35, vamos focalizar a definição de margem de ganho. Aqui, uma diferença do ganho entre o cruzamento do diagrama de Nyquist do eixo real em $-1/a$ e o ponto crítico -1 determina a proximidade da instabilidade do sistema. Portanto, se o ganho do sistema fosse multiplicado por a unidades, o diagrama de Nyquist interceptaria o ponto crítico. Então

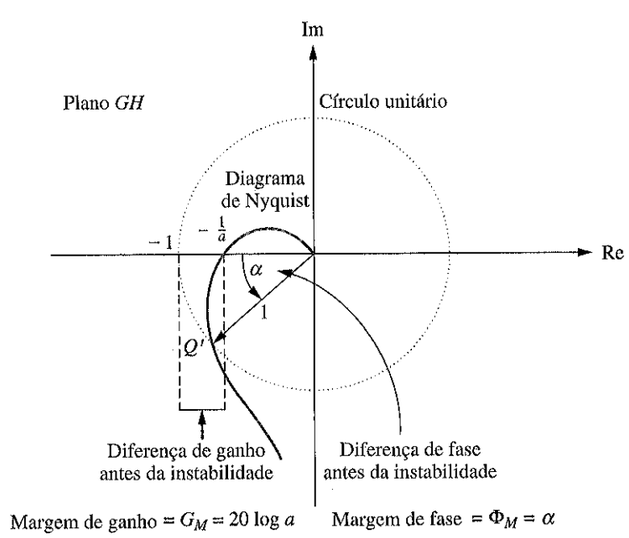


Fig. 10.35 Diagrama de Nyquist mostrando as margens de ganho e de fase.

dizemos que a margem de ganho é a unidades, ou, expressa em dB, $G_M = 20 \log a$. Observe que a margem de ganho é o inverso do valor de cruzamento do eixo real expresso em dB.

Na Fig. 10.35, vemos também a margem de fase mostrada graficamente. No ponto Q', onde o ganho é unitário, α representa a proximidade da instabilidade do sistema. Isto é, com ganho unitário, se ocorrer uma mudança de fase de α graus, o sistema se torna instável. Portanto, o valor da margem de fase é α. Mais adiante no capítulo, mostraremos que a margem de fase pode ser associada à relação de amortecimento. Desta forma, seremos capazes de relacionar características da resposta de freqüência com as características da resposta transitória bem como da estabilidade. Mostraremos também que os cálculos de margem de ganho e de margem de fase são mais cômodos se os gráficos de Bode forem usados no lugar do diagrama de Nyquist, como mostrado na Fig. 10.35.

Por agora, vejamos um exemplo que mostra os cálculos das margens de ganho e de fase.

Exemplo 10.8

Determinando as margens de ganho e de fase

Problema Determinar a margem de ganho e de fase para o sistema do Exemplo 10.7 se $K = 6$.

Solução Para determinar a margem de ganho, primeiro determine a freqüência onde o diagrama de Nyquist cruza o eixo real negativo. Determinando $G(j\omega)H(j\omega)$, temos

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left.\frac{6}{(s^2+2s+2)(s+2)}\right|_{s\to j\omega}$$
$$= \frac{6[4(1-\omega^2) - j\omega(6-\omega^2)]}{16(1-\omega^2)^2 + \omega^2(6-\omega^2)^2} \tag{10.47}$$

O diagrama de Nyquist cruza o eixo real na freqüência de $\sqrt{6}$ rad/s. A parte real é calculada como sendo $-0{,}3$. Por conseguinte, o ganho pode ser aumentado de $(1/0{,}3) = 3{,}33$ antes de a parte real se tornar -1. Portanto, a margem de ganho é

$$G_M = 20 \log 3{,}33 = 10{,}45 \text{ dB} \tag{10.48}$$

Para obter a margem de fase, determine a freqüência na Eq. (10.47) para qual a magnitude é unitária. Como o problema estabelece, este cálculo requer ferramentas computacionais do tipo resolvedor de função ou do tipo do programa descrito no Apêndice H.2. Mais adiante no capítulo simplificaremos o processo usando os gráficos de Bode. A Eq. (10.47) tem ganho unitário na freqüência de 1,253 rad/s. Nesta freqüência, o ângulo de fase é $-112{,}3°$. A diferença entre este ângulo e $-180°$ é 67,7°, que é a margem de fase.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem agora executar o script cap10p3 no Apêndice B. Você irá aprender como usar o MATLAB para determinar a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de zero dB e a freqüência de 180°. Este exercício resolve o Exemplo 10.8 usando o MATLAB.

Ferramenta GUI

O LTI Viewer do MATLAB, com o diagrama de Nyquist selecionado, é outro método que pode ser usado para determinar a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de zero dB e a freqüência de 180°. O leitor é encorajado a estudar o Apêndice D, que contém um tutorial sobre o LTI Viewer bem como alguns exemplos. O Exemplo D.2 resolve o Exemplo 10.8 usando o LTI Viewer.

Exercício de Avaliação 10.5

Problema: Determinar a margem de ganho e a freqüência de 180° para o problema no Exercício de Avaliação 10.4 se $K = 100$.

Respostas: Margem de ganho = 13,62 dB; freqüência de 180° = 6,63 rad/s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção definimos margem de ganho e margem de fase e calculamos estes valores por intermédio do diagrama de Nyquist. Na próxima seção mostraremos como usar os diagramas de Bode para implementar os cálculos de estabilidade realizados na Seção 10.5 e 10.6 usando o diagrama de Nyquist. Veremos que os gráficos de Bode reduzem o tempo e simplificam os cálculos requeridos para obter os resultados.

10.7 Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase por Intermédio dos Gráficos de Bode

Nesta seção, determinaremos estabilidade, margens de ganho e de fase, e a faixa de ganho requerida para estabilidade. Todos estes tópicos foram abordados anteriormente neste capítulo, usando diagramas de Nyquist como ferramenta. Agora, usaremos os gráficos de Bode para determinar estas características. Os gráficos de Bode são subconjuntos do diagrama de Nyquist completo, mas sob outra forma. Os gráficos de Bode constituem uma alternativa viável para os gráficos de Nyquist, uma vez que são construídos facilmente sem a ajuda de dispositivos computacionais ou cálculos demorados requeridos com o diagrama de Nyquist e para o lugar das raízes. Você deve lembrar que todos aqueles cálculos aplicados à estabilidade foram deduzidos do critério de estabilidade de Nyquist. Os gráficos de Bode constituem um caminho alternativo de visualização e de implementação dos conceitos teóricos.

Determinação da Estabilidade

Vejamos um exemplo e determinemos a estabilidade de um sistema, implementando o critério de estabilidade de Nyquist usando os gráficos de Bode. Traçaremos um gráfico logarítmico de magnitude de Bode e então determinaremos o valor do ganho que assegura que a magnitude seja menor que 0 dB (ganho unitário) na freqüência onde a fase é $\pm 180°$.

Exemplo 10.9

Faixa de valores de ganho para estabilidade por intermédio dos gráficos de Bode

Problema Use os gráficos de Bode para determinar a faixa de valores de K para a qual o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. 10.10 é estável. Seja $G(s) = K/[(s+2)(s+4)(s+5)]$.

Solução Uma vez que este sistema tem todos os seus pólos a malha aberta no semiplano da esquerda, o sistema a malha aberta é estável. Portanto, a partir da discussão da Seção 10.5, o sistema a malha fechada será estável se a resposta de freqüência tiver um ganho menor que a unidade quando a fase for 180°.

Comece esboçando os diagramas de Bode de magnitude e de fase mostrados na Fig. 10.36. Na Seção 10.2 somamos os gráficos normalizados de cada fator de $G(s)$ para criar o gráfico de Bode. Vimos que em cada freqüência de quebra a inclinação do gráfico de Bode resultante mudou de uma quantidade igual à nova inclinação que fora somada. A Tabela 10.6 demonstra esta observação. Neste exemplo, usamos este fato para traçar mais rapidamente os gráficos de Bode evitando esboçar a resposta de cada termo.

O ganho de $G(s)H(s)$ nas baixas freqüências é obtido fazendo s igual a zero. Desta forma, o gráfico de magnitude de Bode começa em $K/40$. Por conveniência, faça $K = 40$ de modo que o gráfico logarítmico de magnitude comece em 0 dB. A cada freqüência de quebra, 2, 4 e 5, é traçado um aumento de 20dB/década de inclinação negativa, produzindo o gráfico logarítmico de magnitude mostrado na Fig. 10.36.

O diagrama de fase começa em 0° até uma década abaixo da primeira freqüência de quebra em 2 rad/s. Em 0,2 rad/s a curva diminui a uma taxa de $-45°$/década, diminuindo um adicional de 45°/década a cada freqüência subseqüente (0,4 e 0,5 rad/s) uma década abaixo de cada quebra. A uma década acima de cada freqüência de quebra, as inclinações são reduzidas de 45°/década.

O critério de Nyquist para este exemplo nos diz que queremos zero envolvimento de -1 para estabilidade. Portanto, reconhecemos que o gráfico logarítmico de magnitude de Bode deve ser menor que a unidade quando o gráfico de fase de Bode for 180°. Conseqüentemente, vemos que na freqüência de 7 rad/s, onde o gráfico de fase é $-180°$, o gráfico de magnitude é -20 dB. Por conseguinte, é possível um aumento no ganho de $+20$ dB antes de o sistema se tornar instável. Uma vez que o gráfico de ganho foi colocado em escala com um ganho de 40, $+20$ dB (um ganho de 10) representa o aumento necessário no ganho acima de 40. Portanto, o ganho para instabilidade é $40 \times 10 = 400$. O resultado final é $0 < K < 400$ para estabilidade.

Este resultado, obtido através da aproximação da resposta de freqüência pelas assíntotas de Bode, pode ser comparado à resposta de freqüência real, que produz um ganho de 378 em uma freqüência de 6,16 rad/s.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem agora executar o script cap10p4 no Apêndice B. Você irá aprender como usar o MATLAB para determinar a faixa de valores de ganho para estabilidade por intermédio dos métodos de resposta de freqüência. Este exercício resolve o Exemplo 10.9 usando o MATLAB.

Calculando as Margens de Ganho e de Fase

A seguir, mostraremos como calcular as margens de ganho e de fase usando os gráficos de Bode (veja Fig. 10.37). A margem de ganho é obtida usando o gráfico de fase para encontrar a freqüência, ω_{MG}, onde o ângulo de fase é

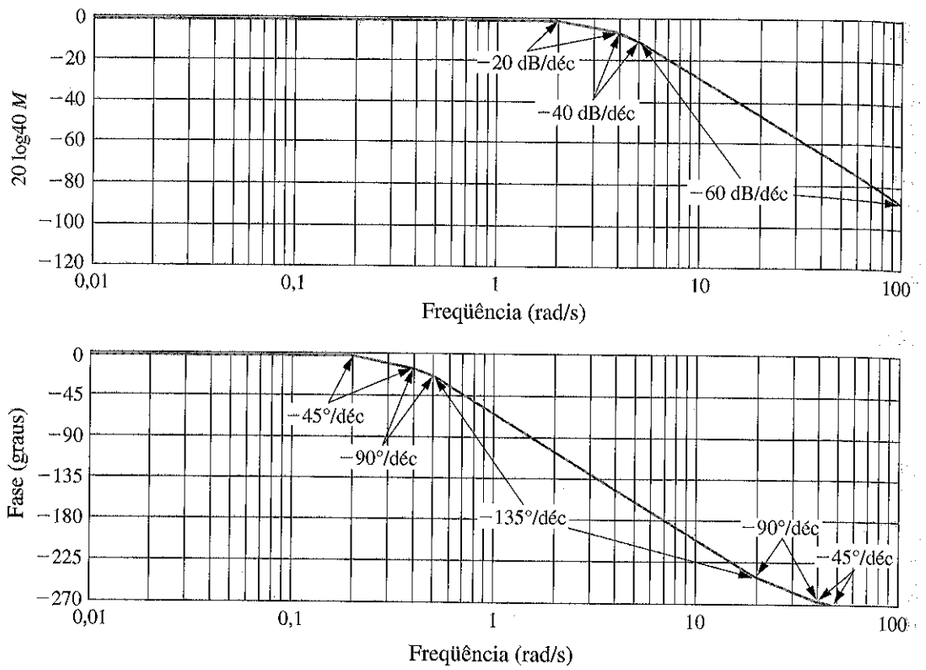


Fig. 10.36 Diagramas logarítmicos de magnitude e de fase de Bode para o sistema do Exemplo 10.9.

180°. Nesta freqüência observe o diagrama de magnitude para determinar a margem de ganho, G_M, que é o ganho necessário para elevar a curva de magnitude até 0 dB. Para ilustrar, no exemplo anterior com $K = 40$, a margem de ganho foi encontrada como sendo 20 dB.

A margem de fase é obtida usando a curva de magnitude para encontrar a freqüência, ω_{Φ_M}, onde o ganho é 0 dB. Sobre a curva de fase nessa freqüência, a margem de fase, Φ_M, é a diferença entre o valor da fase e 180°.

Exemplo 10.10

Margem de ganho e de fase a partir do diagrama de Bode

Problema Se $K = 220$ no sistema do Exemplo 10.9, determine a margem de ganho e a margem de fase.

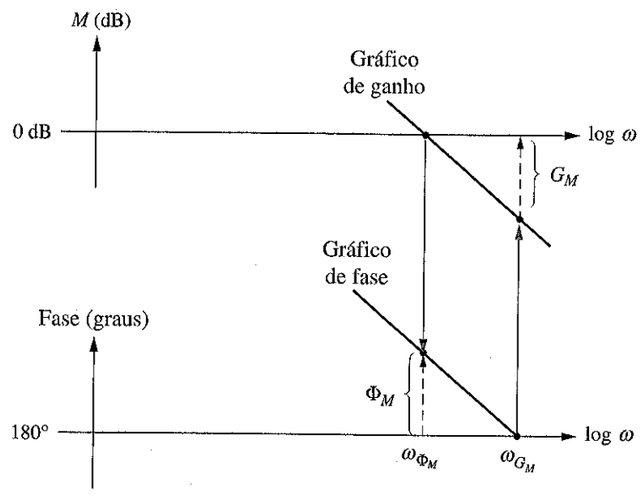


Fig. 10.37 Margens de ganho e de fase nos diagramas de Bode.

Solução O diagrama de Bode na Fig. 10.36 é posto em escala para um ganho de 40. Se $K = 200$ (5 vezes maior), o diagrama de magnitude será 20log5 = 13,98db mais alto.

Para encontrar a margem de ganho, observe o diagrama de fase e determine a freqüência onde a fase é 180°. Nesta freqüência, determine, a partir do diagrama de magnitude, o quanto o ganho pode ser aumentado antes de alcançar 0 dB. Na Fig. 10.36, o ângulo de fase é 180° em aproximadamente 7 rad/s. Sobre o diagrama de magnitude, o ganho é $-20 + 13{,}98 = -6{,}02$ dB. Dessa forma, a margem de ganho é 6,02 dB.

Para encontrar a margem de fase, observamos o diagrama de magnitude na freqüência onde o ganho é 0 dB. Nesta freqüência, observamos o diagrama de fase para obter a diferença entre a fase e 180°. Esta diferença é a margem de fase. Novamente, relembrando que o diagrama de magnitude da Fig. 10.36 é 13,98 dB mais baixo que o diagrama real, o cruzamento de 0dB (−13,98 dB para o diagrama normalizado mostrado na Fig. 10.36) ocorre em 5,5 rad/s. Nesta freqüência, o ângulo de fase é −165°. Portanto, a margem de fase é $-165° - (-180°) = 15°$.

Ferramenta GUI

O LTI Viewer do MATLAB, com os diagramas de Bode selecionados, é outro método que pode ser usado para encontrar margem de ganho, margem de fase, freqüência de zero dB e freqüência de 180°. O leitor é encorajado a estudar o Apêndice D, o qual contém um tutorial sobre o LTI Viewer bem como alguns exemplos. O Exemplo D.3 resolve o Exemplo 10.10 usando o LTI Viewer.

Exercício de Avaliação 10.6

Problema: Para o sistema mostrado na Figura 10.10, onde

$$G(s) = \frac{K}{(s+5)(s+20)(s+50)}$$

faça o seguinte:

a. Desenhe os gráficos logarítmicos de Bode de magnitude e de fase.
b. Encontre a faixa de valores de K para estabilidade a partir do diagrama de Bode.
c. Calcule a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de zero dB e a freqüência de 180° a partir do diagrama de Bode para $K = 10.000$.

Respostas:

a. Veja a resposta no CD-ROM que acompanha este livro.
b. $K < 96.270$
c. Margem de ganho = 19,67 dB, margem de fase = 92,9°, freqüência de zero dB = 7,74 rad/s, e freqüência de 180° = 36,7 rad/s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Vimos que as curvas de resposta de freqüência a malha aberta podem ser usadas não somente para determinar se um sistema é estável, mas para calcular a faixa de valores do ganho de malha que vai assegurar a estabilidade. Vimos também como calcular a margem de ganho e a margem de fase a partir do diagrama de Bode.

É então possível estabelecer um paralelo com a técnica do lugar das raízes e proceder à análise e ao projeto da resposta transitória usando métodos de resposta de freqüência? Começaremos a explorar a resposta na próxima seção.

10.8 Relação entre Resposta Transitória a Malha Fechada e Resposta de Freqüência a Malha Fechada

Relação de Amortecimento e Resposta de Freqüência a Malha Fechada

Nesta seção mostraremos que existe uma relação entre a resposta transitória do sistema e sua resposta de freqüência a malha fechada. Em particular, considere o sistema de controle com retroação, de segunda ordem, da Fig. 10.38 que temos usado desde o Cap. 4, onde deduzimos a relação entre a resposta transitória a malha fechada e os pólos da função de transferência a malha fechada,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{10.49}$$

Agora vamos deduzir relações entre a resposta transitória da Eq. (10.49) e as características de sua resposta de freqüência. Definimos essas características e as relacionamos com a freqüência natural, com a relação de amorte-

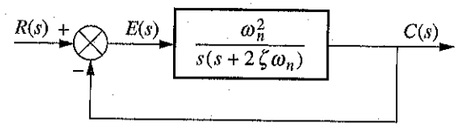


Fig. 10.38 Sistema de segunda ordem a malha fechada.

cimento, com o tempo de assentamento, com o instante de pico e com o tempo de subida. Na Seção 10.10 mostraremos como usar a resposta de freqüência da função de transferência a malha aberta,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{10.50}$$

apresentada na Fig. 10.38, para obter as mesmas características da resposta transitória.

Determinemos agora a resposta de freqüência da Eq. (10.49), definamos as características desta resposta, e relacionemos estas características com as da resposta transitória. Substituindo $s = j\omega$ na Eq. (10.49), calculamos a magnitude da resposta de freqüência a malha fechada como

$$M = |T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \tag{10.51}$$

Um esboço representativo do gráfico logarítmico da Eq. (10.51) é mostrado na Fig. 10.39.

Mostramos agora que existe uma relação entre o valor de pico da resposta de magnitude logarítmica a malha fechada e a relação de amortecimento. Elevando a Eq. (10.51) ao quadrado, derivando com relação a ω^2, e fazendo a derivada igual a zero resulta o valor máximo de M, M_p, onde

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{10.52}$$

na freqüência, ω_p, de

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{10.53}$$

Como ζ se relaciona à ultrapassagem percentual, podemos traçar M_p em função da ultrapassagem percentual. O resultado é mostrado na Fig. 10.40.

A Eq. (10.52) mostra que a magnitude máxima sobre a curva da resposta de freqüência está diretamente relacionada à relação de amortecimento e, portanto, à ultrapassagem percentual. Observe também, a partir da Eq. (10.53), que a freqüência de pico, ω_p, não é a freqüência natural. Contudo, para valores baixos de relação de amortecimento, podemos admitir que o pico ocorre na freqüência natural. Finalmente, observe que não haverá pico nas freqüências acima de zero se $\zeta > 0{,}707$. Esta limitação de valor de ζ para pico sobre a curva de magnitude da resposta de freqüência não deve ser confundida com a ultrapassagem da resposta ao degrau, onde existe ultrapassagem para $0 < \zeta < 1$.

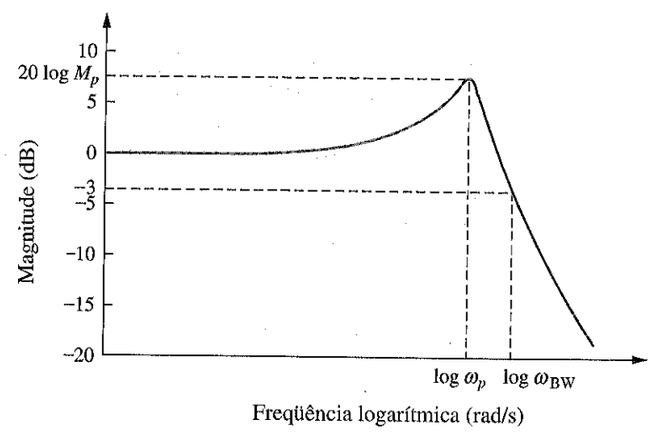


Fig. 10.39 Gráfico logarítmico de magnitude representativo da Eq. (10.51).

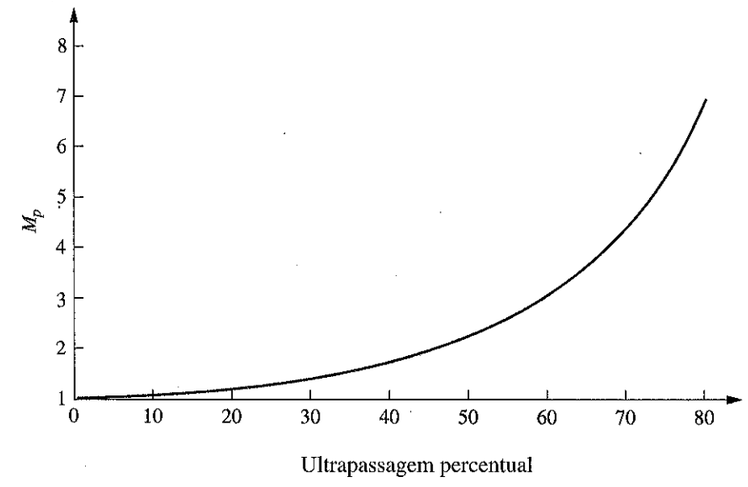


Fig. 10.40 Pico de resposta de freqüência a malha fechada em função da ultrapassagem percentual para um sistema de dois pólos.

Velocidade de Resposta e Resposta de Freqüência a Malha Fechada

Uma outra relação entre a resposta de freqüência e a resposta no domínio do tempo é entre a velocidade da resposta no domínio do tempo (medida pelo tempo de assentamento, pelo instante de pico e pelo tempo de subida) e a *banda passante* da resposta de freqüência a malha fechada, a qual é definida como a freqüência, ω_{BW}, na qual o valor da curva de magnitude da resposta de freqüência é 3 dB abaixo de seu valor na freqüência zero (veja Fig. 10.39).

A banda passante de um sistema com dois pólos pode ser obtida determinando a freqüência para a qual $M = 1/\sqrt{2}$ (i.e., −3 dB) na Eq. (10.51). A dedução é deixada como exercício para o leitor. O resultado é

$$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \tag{10.54}$$

Para relacionar ω_{BW} ao tempo de assentamento, substituímos $\omega_n = 4/T_s\zeta$ na Eq. (10.54) e obtemos

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s\zeta}\sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \tag{10.55}$$

De modo semelhante, como $\omega_n = \pi/(T_p\sqrt{1 - \zeta^2})$,

$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1 - \zeta^2}}\sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \tag{10.56}$$

Para relacionar a banda passante ao tempo de subida, T_r, usamos a Fig. 4.16, conhecendo os valores desejados de ζ e T_r. Por exemplo, suponha $\zeta = 0{,}4$ e $T_r = 0{,}2$ s. Usando a Fig. 4.16, a ordenada $T_r\omega_n = 1{,}463$, de onde $\omega_n = 1{,}463/0{,}2 = 7{,}315$ rad/s. Usando a Eq. (10.54), $\omega_{BW} = 10{,}05$ rad/s. São mostradas na Fig. 10.41 diagramas normalizados das Eqs. (10.55) e (10.56) e a relação entre a banda passante normalizada pelo tempo de subida e a relação de amortecimento.

Exercício de Avaliação 10.7

Problema: Encontre a banda passante a malha fechada necessária para uma ultrapassagem de 20% e de 2 s de tempo de assentamento.

Resposta: $\omega_{BW} = 5{,}79$ rad/s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção relacionamos a resposta transitória a malha fechada com a resposta de freqüência a malha fechada via banda passante. Continuamos relacionando a resposta de freqüência a malha fechada com a resposta de freqüência a malha aberta e explicando a motivação.

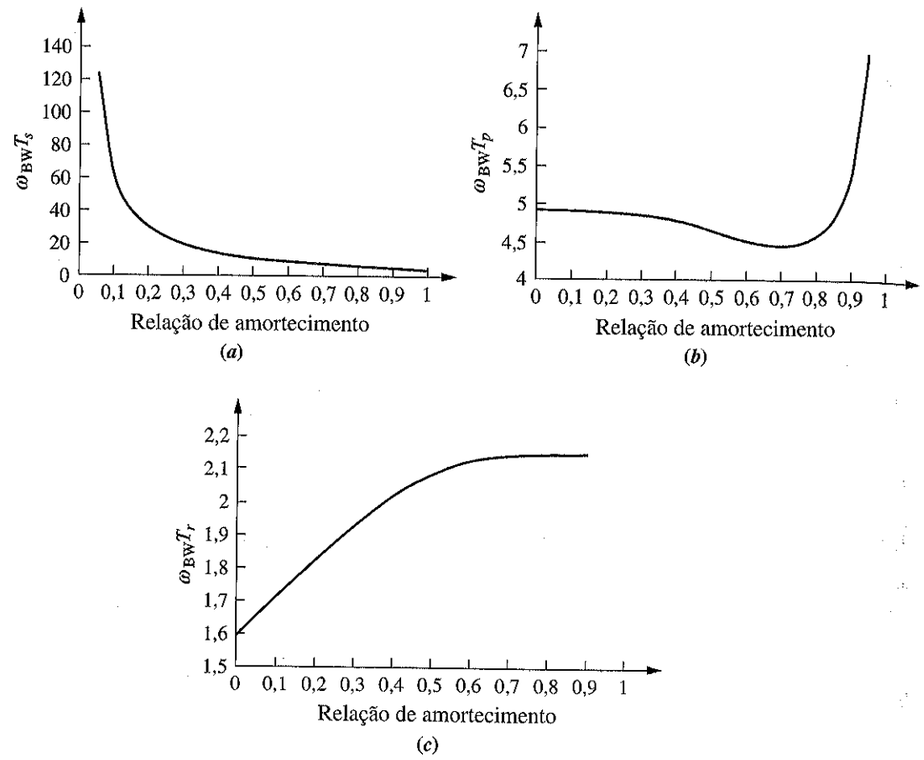


Fig. 10.41 Banda passante normalizada em função da relação de amortecimento para: **a.** tempo de assentamento; **b.** instante de pico; **c.** tempo de subida.

10.9 Relação entre Respostas de Freqüência a Malha Aberta e a Malha Fechada

Neste ponto, não temos uma forma fácil de determinar a resposta de freqüência a malha fechada a partir da qual se determinaria M_p e portanto a resposta transitória.[3] Como vimos, estamos equipados para esboçar rapidamente a resposta de freqüência a malha aberta, mas não a resposta de freqüência a malha fechada. Contudo, se a resposta a malha aberta for relacionada com a resposta a malha fechada, podemos combinar a facilidade de esboçar a resposta a malha aberta com as informações da resposta transitória contidas na resposta a malha fechada.

Círculos *M* Constantes e Círculos *N* Constantes

Considere o sistema com retroação unitária cuja função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{10.57}$$

A resposta de freqüência desta função a malha fechada é

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \tag{10.58}$$

Como $G(j\omega)$ é um número complexo, seja $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ na Eq. (10.58), da qual resulta

$$T(j\omega) = \frac{P(\omega) + jQ(\omega)}{[(P(\omega) + 1) + jQ(\omega)]} \tag{10.59}$$

[3]No final desta subseção mostraremos como usar o MATLAB para obter resposta de freqüência a malha fechada.

Portanto,

$$M^2 = |T^2(j\omega)| = \frac{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}{[(P(\omega) + 1)^2 + Q^2(\omega)]} \tag{10.60}$$

A Eq. (10.60) pode ser colocada sob a forma

$$\left(P + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Q^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \tag{10.61}$$

que é a equação de um círculo de raio $M/(M^2 - 1)$ com centro em $[-M^2/(M^2 - 1), 0]$. Estes círculos, traçados na Fig. 10.42 para diversos valores de M, são chamados *círculos M constantes* e são o lugar da resposta de freqüência de magnitude a malha fechada para sistemas com retroação unitária. Assim, se a resposta de freqüência polar de uma função a malha aberta, $G(s)$, for traçada e sobreposta no topo dos círculos M constantes, a resposta de freqüência de magnitude a malha fechada é determinada por cada interseção deste diagrama polar com os círculos M constantes.

Antes de demonstrar o uso dos círculos M constantes com um exemplo, façamos um desenvolvimento semelhante para o diagrama de fase a malha fechada, os círculos N constantes. Com base na Eq. (10.59), o ângulo de fase, ϕ, da resposta a malha fechada é

$$\begin{aligned}\phi &= \text{tg}^{-1}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} - \text{tg}^{-1}\frac{Q(\omega)}{P(\omega) + 1} \\ &= \text{tg}^{-1}\frac{\dfrac{Q(\omega)}{P(\omega)} - \dfrac{Q(\omega)}{P(\omega) + 1}}{1 + \dfrac{Q(\omega)}{P(\omega)}\left(\dfrac{Q(\omega)}{P(\omega) + 1}\right)}\end{aligned} \tag{10.62}$$

depois de usar $\text{tg}\,(\alpha - \beta) = (\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta)/(1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta)$. Empregando a notação funcional,

$$\text{tg}\,\phi = N = \frac{Q}{P^2 + P + Q^2} \tag{10.63}$$

A Eq. (10.63) pode ser colocada na forma da equação de um círculo,

$$\left(P + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Q - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2} \tag{10.64}$$

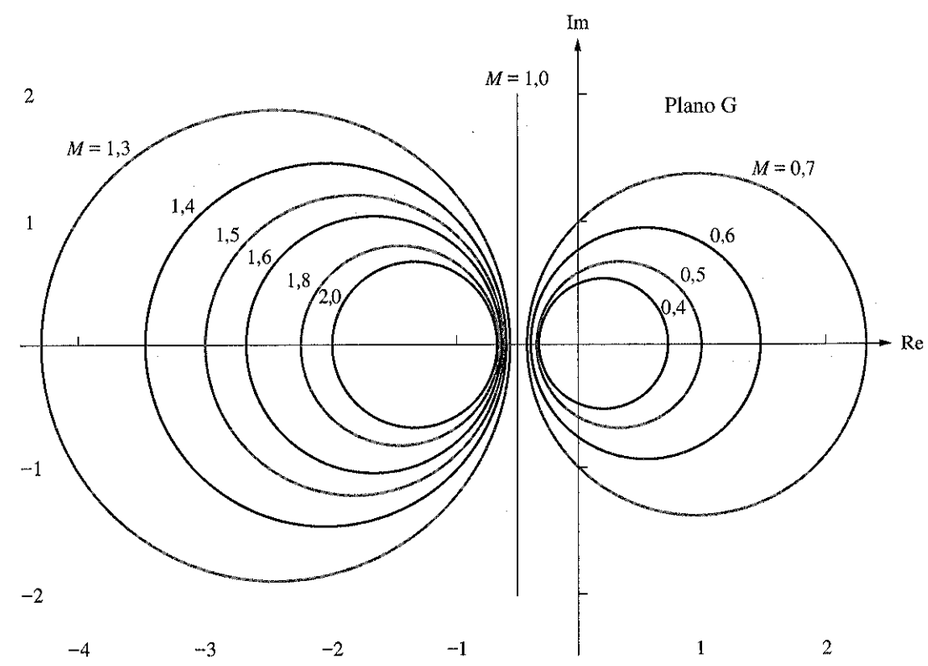


Fig. 10.42 Círculos M constantes.

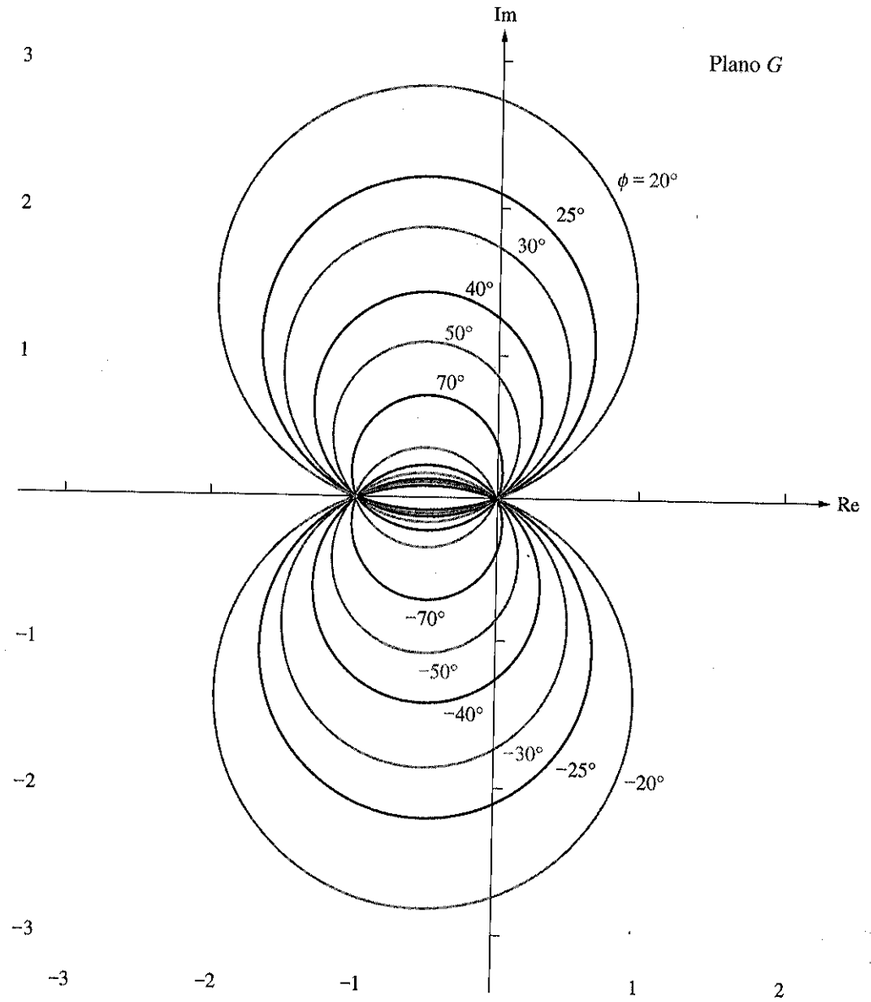


Fig. 10.43 Círculos N constantes.

a qual é traçada na Fig. 10.43 para diversos valores de N. Os círculos deste diagrama são chamados de *círculos N constantes*. Sobrepondo a resposta de freqüência a malha aberta de sistema com retroação unitária sobre os círculos N constantes resulta a resposta de fase a malha fechada do sistema. Vejamos agora um exemplo de uso dos círculos M e N constantes.

Exemplo 10.11

Resposta de freqüência a malha fechada a partir da resposta de freqüência a malha aberta

Problema Determine a resposta de freqüência a malha fechada do sistema com retroação unitária mostrado na Fig. 10.10, onde $G(s) = 50/[s(s+3)(s+6)]$, usando os círculos M constantes, os círculos N constantes e a curva de resposta de freqüência polar a malha aberta.

Solução Primeiro, calcule a função de freqüência a malha aberta e construa um diagrama de resposta de freqüência polar sobreposto aos círculos M e N constantes. A função de freqüência a malha aberta é

$$G(j\omega) = \frac{50}{-9\omega^2 + j(18\omega - \omega^3)} \tag{10.65}$$

cuja magnitude, $|G(j\omega)|$, e cuja fase, $\angle\, G(j\omega)$, podem ser obtidas e plotadas. O diagrama polar da resposta de freqüência a malha aberta (diagrama de Nyquist) é mostrado sobreposto aos círculos M e N na Fig. 10.44.

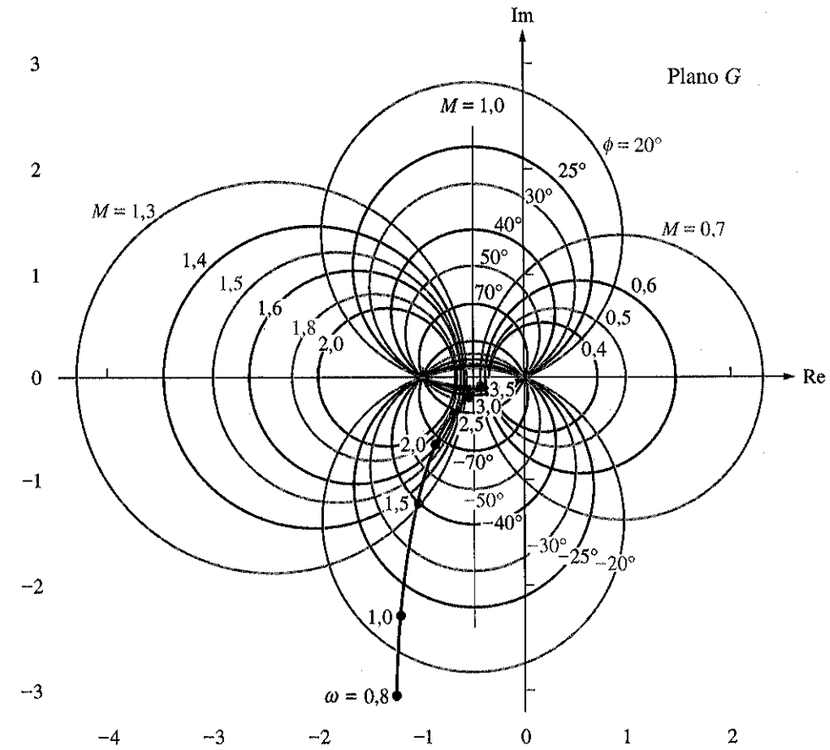


Fig. 10.44 Diagrama de Nyquist para o Exemplo 10.11 e círculos M e N constantes.

A resposta de freqüência de magnitude a malha fechada pode agora ser obtida determinando-se a interseção de cada ponto do diagrama de Nyquist com os círculos M, enquanto a resposta de fase a malha fechada pode ser obtida encontrando-se a interseção de cada ponto do diagrama de Nyquist com os círculos N. O resultado é mostrado na Fig 10.45.[4]

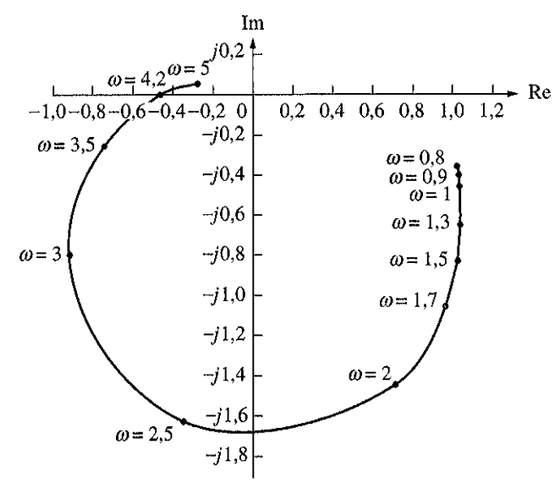


Fig. 10.45 Resposta de freqüência a malha fechada para o Exemplo 10.11.

[4]Você deve ter cuidado para não usar o diagrama polar a *malha fechada* para o critério de Nyquist. Contudo, a resposta de freqüência a malha fechada pode ser usada para determinar a resposta transitória a malha fechada, como discutido na Seção 10.8.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap10p5 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para encontrar a resposta de freqüência a malha fechada. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 10.11.

Diagrama de Nichols

Uma desvantagem do uso dos círculos M e N é que as mudanças de ganho na função de transferência a malha aberta, $G(s)$, não podem ser tratadas facilmente. Por exemplo, nos diagramas de Bode, uma mudança de ganho é efetuada movendo-se a curva de magnitude de Bode para cima ou para baixo numa quantidade igual à mudança de ganho em dB. Visto que os círculos M e N não são gráficos em dB, mudanças no ganho exigem que cada ponto de $G(j\omega)$ tenha o seu comprimento multiplicado pelo fator de aumento ou de diminuição de ganho.

Uma outra apresentação dos círculos M e N, chamada *Diagrama* (ou *Carta*) *de Nichols*, mostra os círculos M constantes em dB, para que as mudanças no ganho sejam tão simples de executar como nos diagramas de Bode. Um diagrama de Nichols é mostrado na Fig. 10.46. A carta é um diagrama de magnitude a malha aberta em dB vs. o ângulo de fase a malha aberta em graus. Todos os pontos sobre os círculos M podem ser transferidos para o diagrama de Nichols. Cada ponto sobre os círculos M constantes é representado por magnitude e ângulo de fase (coordenada polar). Convertendo o valor da magnitude em dB, podemos transferir o ponto para o diagrama de Nichols, usando as coordenadas polares com magnitude em dB traçadas como a ordenada e o ângulo de fase traçado como a abscissa. De modo semelhante, os círculos N também podem ser transferidos para o diagrama de Nichols.

Por exemplo, considere a função,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{10.66}$$

Superpondo a resposta de freqüência de $G(s)$ sobre o diagrama de Nichols traçando magnitude em dB em função do ângulo de fase para uma faixa de freqüências de 0,1 a 1 rad/s, obtemos o diagrama da Fig. 10.47 para $K = 1$. Se o ganho for acrescido em 10 dB, suba simplesmente a curva de $K = 1$ em 10 dB e obtenha a curva para $K = 3{,}16$ (10 dB). A interseção dos gráficos de $G(j\omega)$ com o diagrama de Nichols resulta na resposta de freqüência do sistema a malha fechada.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap10p6 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para construir o diagrama de Nichols. Este exercício constrói o diagrama de Nichols de $G(s) = 1/[s(s+1)(s+2)]$ usando o MATLAB.

Ferramenta GUI

O LTI Viewer do MATLAB é um método alternativo para obter o diagrama de Nichols. O leitor é encorajado a estudar o Apêndice D, que contém um tutorial sobre o recurso LTI Viewer bem como alguns exemplos. O Exemplo D.4 mostra como obter a Fig. 10.47 usando o LTI Viewer.

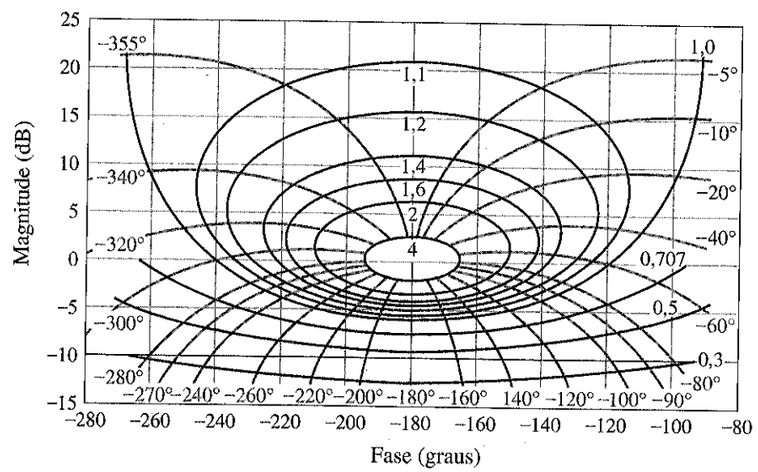


Fig. 10.46 Gráfico de Nichols.

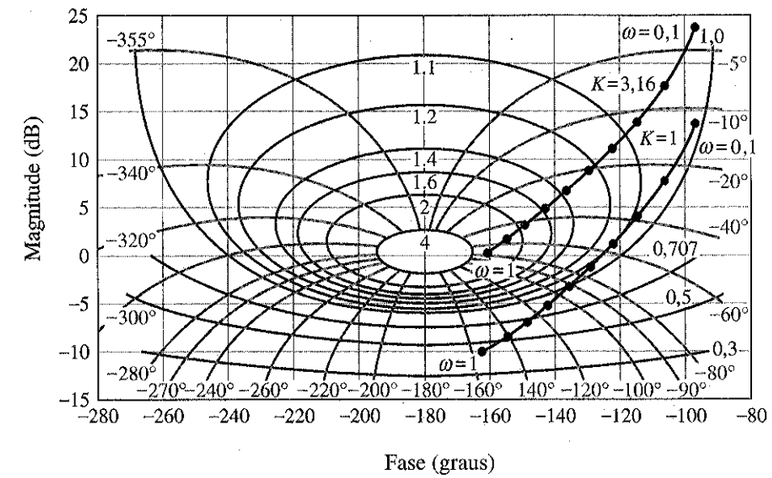


Fig. 10.47 Gráfico de Nichols com resposta de freqüência para $G(s) = K/[s(s+1)(s+2)]$ superposta. São mostrados valores para $K = 1$ e $K = 3{,}16$.

Exercício de Avaliação 10.8

Problema: Dado o sistema mostrado na Fig. 10.10, onde

$$G(s) = \frac{8000}{(s+5)(s+20)(s+50)}$$

plote os diagramas logarítmicos de magnitude e fase da resposta de freqüência a malha fechada usando os seguintes métodos:

a. Círculos M e N

b. Diagrama de Nichols

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

10.10 Relação entre Respostas Transitória a Malha Fechada e de Freqüência a Malha Aberta

Relação de Amortecimento a Partir dos Círculos *M*

Podemos usar os resultados do Exemplo 10.11 para estimar as características da resposta transitória do sistema. Podemos encontrar o pico da resposta de freqüência a malha fechada encontrando a curva M máxima tangente à resposta de freqüência a malha aberta. Em seguida, podemos determinar a relação de amortecimento, ζ, e subseqüentemente a ultrapassagem percentual, por meio da Eq. (10.52). O exemplo a seguir demonstra o uso da resposta de freqüência a malha aberta e dos círculos M para obter a relação de amortecimento, ou, de modo equivalente, a ultrapassagem percentual.

Exemplo 10.12

Ultrapassagem percentual a partir da resposta de freqüência a malha aberta

Problema Determinar a relação de amortecimento e a ultrapassagem percentual esperada a partir do sistema do Exemplo 10.11 usando a resposta de freqüência a malha aberta e os círculos M.

Solução A Eq. (10.52) mostra que existe uma única relação entre a relação de amortecimento do sistema a malha fechada e o valor de pico, M_P, do diagrama de magnitude da resposta de freqüência do sistema a malha fechada. Com base na Fig. 10.44, vemos que o diagrama de Nyquist é tangente ao círculo M de valor 1,8. Constatamos que este é o valor máximo da resposta de freqüência a malha fechada. Portanto, $M_P = 1{,}8$.

Podemos resolver para ζ reorganizando a Eq. (10.52) na forma seguinte:

$$\zeta^4 - \zeta^2 + (1/4M_P^2) = 0 \tag{10.67}$$

Como $M_P = 1{,}8$, então $\zeta = 0{,}29$ e $0{,}96$. Com base na Eq. (10.53), uma relação de amortecimento maior que 0,707 não apresenta pico sobre o valor de ganho na freqüência zero. Dessa forma, selecionamos $\zeta = 0{,}29$, o qual é equivalente à ultrapassagem de 38,6%. Deve-se ter muito cuidado, contudo, para assegurar que podemos fazer uma aproximação de segunda ordem ao associar o valor da ultrapassagem percentual ao valor de ζ. Uma simulação em computador da resposta ao degrau mostra uma ultrapassagem de 36%.

Até agora nesta seção, ligamos a resposta transitória do sistema e o valor de pico da resposta de freqüência a malha fechada como obtida a partir da resposta de freqüência a malha aberta. Usamos o diagrama de Nyquist e os círculos M e N para obter a resposta transitória a malha fechada. Existe uma outra associação entre a resposta de freqüência a malha aberta e a resposta transitória a malha fechada que é facilmente implementada com o diagrama de Bode, os quais são mais fáceis de desenhar que o diagrama de Nyquist.

Relação de Amortecimento a Partir da Margem de Fase

Deduzamos agora a relação entre a margem de fase e a relação de amortecimento. Esta relação nos permitirá calcular a ultrapassagem percentual a partir da margem de fase obtida da resposta de freqüência a malha aberta.

Considere um sistema com retroação unitária cuja função a malha aberta

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{10.68}$$

resulta numa função de transferência a malha fechada de segunda ordem típica,

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{10.69}$$

Para calcular a margem de fase, primeiro encontramos a freqüência para a qual $|G(j\omega)| = 1$, Portanto,

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{|-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega|} = 1 \tag{10.70}$$

A freqüência, ω_1, que satisfaz a Eq. (10.70) é

$$\omega_1 = \omega_n\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}} \tag{10.71}$$

O ângulo de fase de $G(j\omega)$ nesta freqüência é

$$\angle G(j\omega) = -90 - \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega_1}{2\zeta\omega_n}$$

$$= -90 - \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta} \tag{10.72}$$

A diferença ente o ângulo da Eq. (10.72) e $-180°$ é a margem de fase, Φ_M. Portanto,

$$\Phi_M = 90 - \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}{2\zeta}$$

$$= \mathrm{tg}^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \tag{10.73}$$

A Eq. (10.73), traçada na Fig. 10.48, mostra a relação entre margem de fase e relação de amortecimento.

Como exemplo, a Eq. (10.53) nos diz que não existe freqüência de pico se $\zeta = 0{,}707$. Portanto, não existe pico para a curva de magnitude da resposta de freqüência a malha fechada para este valor de relação de amortecimento e maior. Portanto, a partir da Fig. 10.48, é necessário um valor de margem de fase de 65,52° ($\zeta = 0{,}707$) ou maior a partir da resposta de freqüência a *malha aberta* para assegurar que não existirá pico na resposta de freqüência a *malha fechada*.

Velocidade de Resposta a Partir da Resposta de Freqüência a Malha Aberta

As Eqs. (10.55) e (10.56) relacionam a banda passante a malha fechada aos valores desejados de tempo de assentamento ou instante de pico e à relação de amortecimento. Mostramos agora que a banda passante a malha fechada

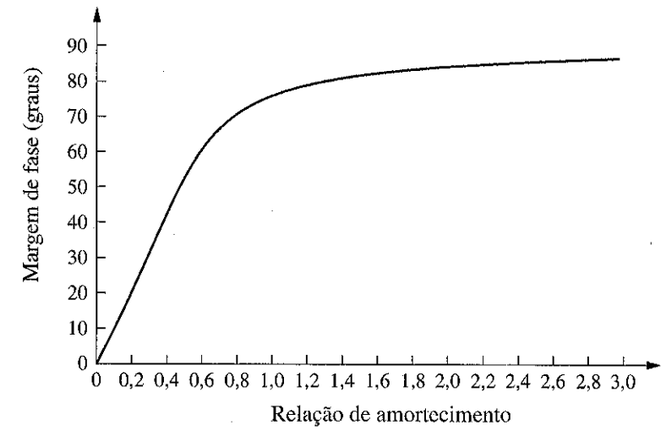


Fig. 10.48 Margem de fase em função da relação de amortecimento.

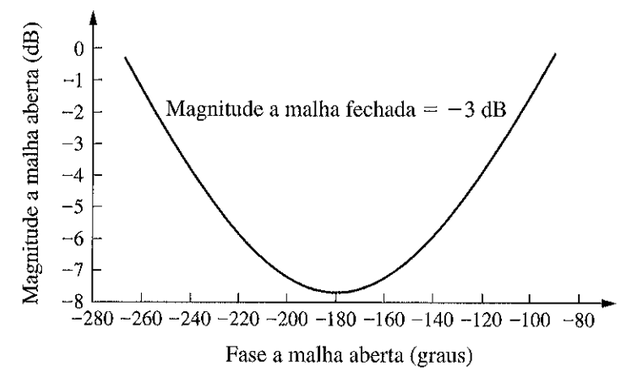


Fig. 10.49 Ganho a malha aberta em função do ângulo de fase a malha aberta para ganho a malha fechada de −3 dB.

pode ser estimada a partir da resposta de freqüência a malha aberta. A partir do diagrama de Nichols na Fig. 10.46, vemos a relação entre o ganho a malha aberta e o ganho a malha fechada. A curva $M = 0{,}707(-3\text{ dB})$ é traçada novamente na Fig. 10.49 para maior clareza e mostra o ganho a malha aberta quando o ganho a malha fechada é −3 dB, que ocorre tipicamente em ω_{BW} se o ganho a malha fechada nas baixas freqüências é 0 dB. Podemos aproximar a Fig. 10.49 afirmando que a banda passante a malha fechada, ω_{BW} (isto é, a freqüência na qual a resposta de magnitude a malha fechada é −3 dB), é igual à freqüência na qual a resposta de magnitude a malha aberta está entre −6 e −7,5 dB se a resposta de fase a malha aberta estiver entre −135° e −225°. Então, usando uma aproximação do sistema de segunda ordem, as Eqs. (10.55) e (10.56) podem ser usadas, junto com a relação de amortecimento desejada, ζ, para determinar o tempo de assentamento e o instante de pico, respectivamente. Vejamos um exemplo.

Exemplo 10.13

Tempo de assentamento e instante de pico a partir da resposta de freqüência a malha aberta

Problema Dados o sistema da Fig. 10.50(*a*) e o diagrama de Bode da Fig. 10.50(*b*), estime o tempo de assentamento e o instante de pico.

Solução Usando a Fig. 10.50(*b*), estimamos a banda passante a malha fechada determinando a freqüência onde a resposta de magnitude a malha aberta está na faixa de −6 a −7,5 dB se a resposta de fase estiver na faixa de −135° a −225°. Como a Fig. 10.50(*b*) mostra −6 a −7,5 dB em aproximadamente 3,7 rad/s com uma resposta de fase na região enunciada, $\omega_{BW} \cong 3{,}7$ rad/s.

A seguir, determine ζ através da margem de fase. Com base na Fig. 10.50(*b*), a margem de fase é obtida determinando-se primeiro a freqüência na qual o diagrama de magnitude vale 0 dB. Nesta freqüência, 2,2 rad/s, a fase é cerca de −145°. Portanto, a margem de fase é de aproximadamente (−145° − (−180°)) = 35°. Usando a Fig.

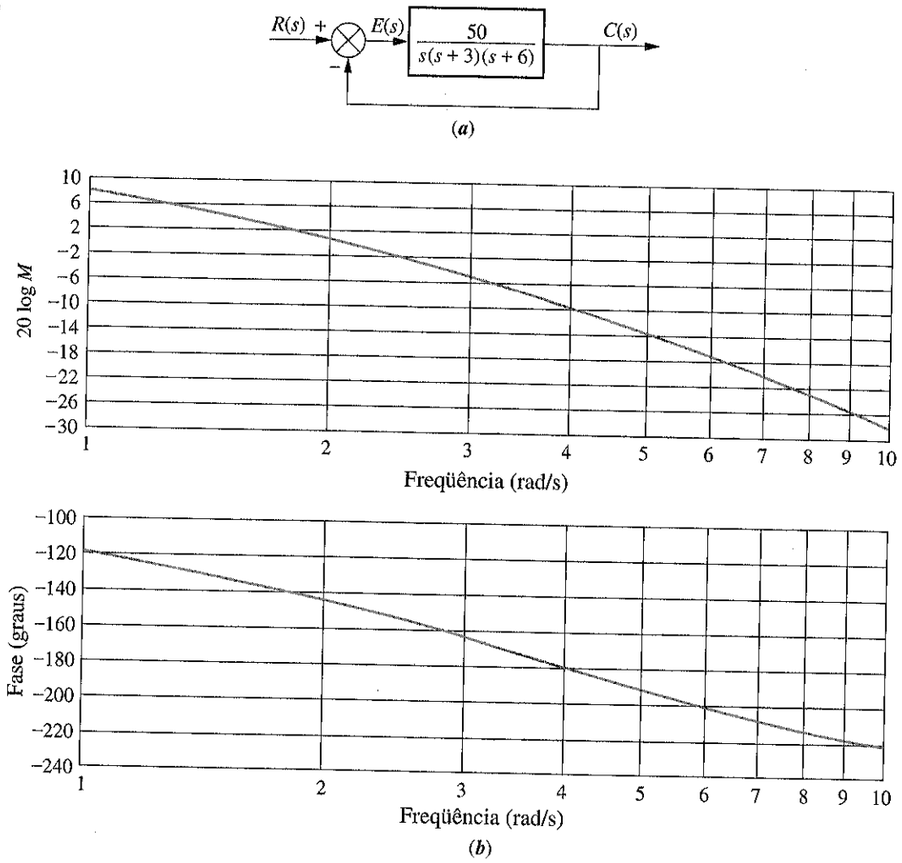


Fig. 10.50 a. Diagrama de blocos; **b.** Diagrama de Bode para o sistema do Exemplo 10.13.

10.48, $\zeta = 0{,}32$. Finalmente, usando as Eqs. (10.55) e (10.56), com os valores de ω_{BW} e de ζ que acabaram de ser determinados, $T_s = 4{,}86$ s, e $T_p = 1{,}29$ s. Verificando a análise, uma simulação em computador mostra $T_s = 5{,}5$ s, e $T_p = 1{,}43$ s.

Exercício de Avaliação 10.9

Problema: Usando a resposta de freqüência a malha aberta para o sistema na Fig. 10.10, onde

$$G(s) = \frac{100}{s(s+5)}$$

estime a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico para a resposta ao degrau a malha fechada.

Resposta: $\%UP = 44\%$, $T_s = 1{,}64$s, e $T_p = 0{,}33$s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

10.11 Características de Erro do Estado Estacionário a Partir da Resposta de Freqüência

Nesta seção mostramos como usar os diagramas de Bode para obter os valores das constantes de erro estático para sistemas com retroação unitária equivalente: K_p para um sistema do Tipo 0, K_v para um sistema de Tipo 1, e K_a para um sistema de Tipo 2. Os resultados serão obtidos a partir do diagrama logarítmico de magnitude de Bode não normalizado e sem colocação em escala.

Constante de Posição

Para determinar K_p, considere o seguinte sistema do Tipo 0:

$$G(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s+p_i)} \tag{10.74}$$

Um diagrama logarítmico de magnitude típico não normalizado e sem colocação em escala é mostrado na Fig. 10.51(a). O valor inicial é

$$20\log M = 20\log K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.75}$$

Mas, para este sistema,

$$K_p = K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.76}$$

que é o mesmo valor do eixo de baixas freqüências. Dessa forma, para um diagrama de magnitude logarítmica de Bode não normalizado e sem escala, a magnitude de baixas freqüências é $20\log K_p$ para o sistema do Tipo 0.

Constante de Velocidade

Para determinar K_v para um sistema do Tipo 1, considere a seguinte função de transferência a malha aberta de um sistema do Tipo 1:

$$G(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)}{s\prod_{i=1}^{m}(s+p_i)} \tag{10.77}$$

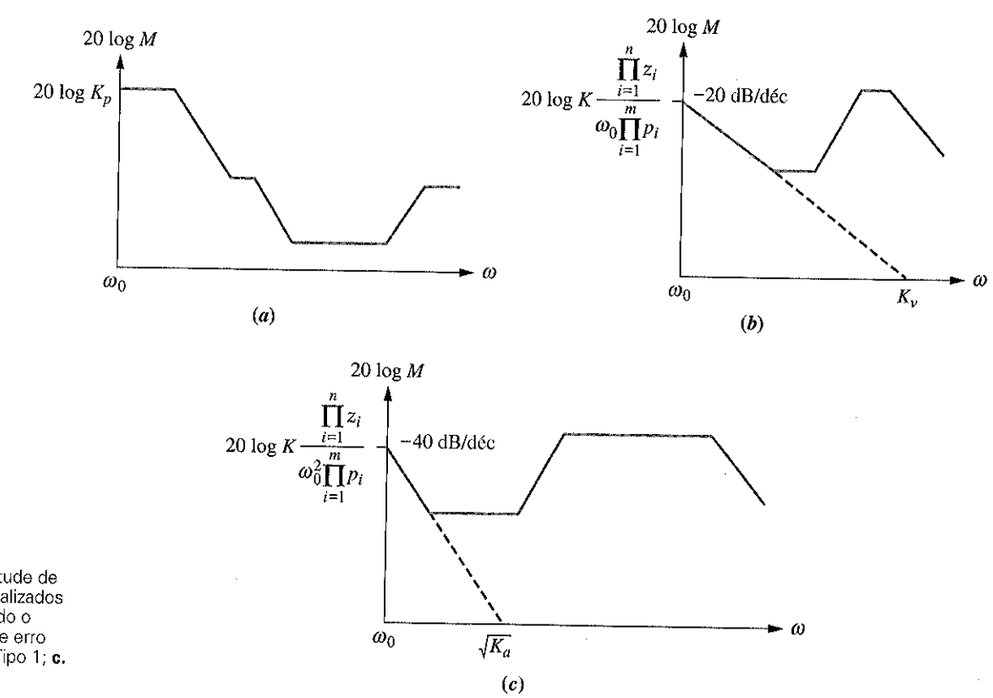


Fig. 10.51 Gráficos logarítmicos de magnitude de Bode típicos não normalizados e sem escala mostrando o valor das constantes de erro estático: **a.** Tipo 0; **b.** Tipo 1; **c.** Tipo 2.

Um diagrama logarítmico de magnitude típico não normalizado e sem colocação em escala é mostrado na Fig. 10.51(*b*) para este sistema do Tipo 1. O diagrama de Bode começa em

$$20\log M = 20\log K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\omega_0 \prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.78}$$

A inclinação inicial de −20 dB/década pode ser pensada como originando-se a partir de uma função,

$$G'(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{s\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.79}$$

$G'(s)$ cruza o eixo de freqüência quando

$$\omega = K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.80}$$

Mas, para o sistema original, (Eq. (10.77)),

$$K_v = K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.81}$$

que é a mesma freqüência de interseção, Eq. (10.80). Portanto, podemos encontrar K_v estendendo a inclinação inicial −20 dB/década até o eixo freqüência no diagrama de Bode não normalizado e não colocado em escala. A interseção com o eixo de freqüências é K_v.

Constante de Aceleração

Para determinar K_a para um sistema do Tipo 2, considere o seguinte:

$$G(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)}{s^2\prod_{i=1}^{m}(s+p_i)} \tag{10.82}$$

Um diagrama de Bode típico sem escala e não-normalizado relativo a um sistema do Tipo 2 é mostrado na Fig. 10.51(*c*). O diagrama de Bode se inicia em

$$20\log M = 20\log K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\omega_0^2 \prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.83}$$

A inclinação inicial de −40 dB/década pode ser vista como originária de uma função,

$$G'(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{s^2\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.84}$$

$G'(s)$ cruza o eixo das freqüências quando

$$\omega = \sqrt{K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=1}^{m} p_i}} \tag{10.85}$$

Mas, para o sistema original (Eq. (10.82)),

$$K_a = K\frac{\prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=1}^{m} p_i} \tag{10.86}$$

Portanto, a inclinação inicial de −40 dB/década cruza o eixo das freqüências em $\sqrt{K_a}$.

Exemplo 10.14

Constantes de erro estático a partir dos diagramas de Bode

Problema Para cada gráfico de magnitude logarítmica não normalizado e sem escala mostrado na Fig. 10.52

a. Determine o tipo de sistema.
b. Determine o valor da constante de erro estático apropriada.

Solução A Fig. 10.52(*a*) é um sistema do Tipo 0, uma vez que a inclinação inicial é zero. O valor de K_p é dado pelo valor da assíntota de baixa freqüência. Dessa forma, 20 log K_p = 25, ou K_p = 17,78.

A Fig. 10.52(*b*) é um sistema do Tipo 1, uma vez que a inclinação inicial é −20 dB/década. O valor de K_v é o valor da freqüência em que a inclinação inicial cruza o eixo de freqüências em zero dB. Portanto, K_v = 0,55.

A Fig. 10.52(*c*) é um sistema do Tipo 2, uma vez que a inclinação inicial é −40 dB/década. O valor de $\sqrt{K_a}$ é o valor da freqüência em que a inclinação inicial cruza o eixo de freqüências em zero dB. Portanto, $K_a = 3^2 = 9$.

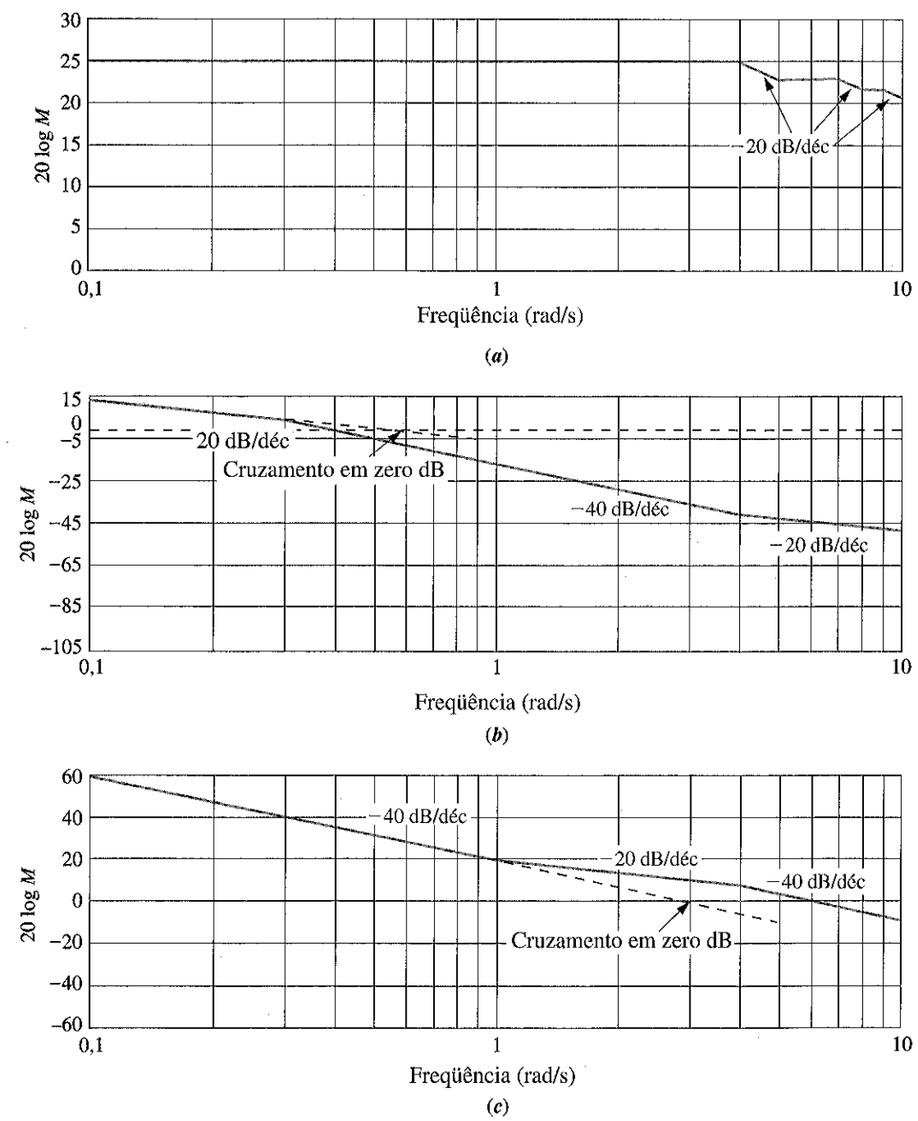


Fig. 10.52 Gráfico de magnitude logarítmica de Bode para o Exemplo 10.14.

Exercício de Avaliação 10.10

Problema: Determine a constante de erro estático para um sistema com retroação unitária estável cuja função de transferência a malha aberta tem o gráfico de magnitude de Bode mostrado na Fig. 10.53.

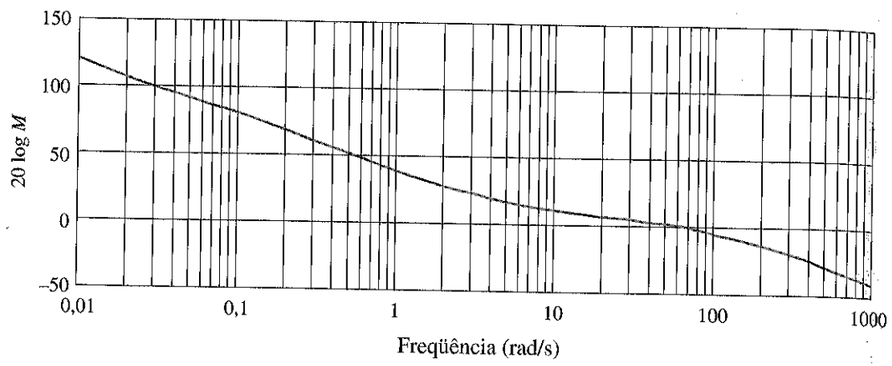


Fig. 10.53 Gráfico de magnitude logarítmica de Bode para Exercício de Avaliação 10.10.

Respostas: $K_p = \infty$, $K_v = \infty$, $K_a = 90{,}25$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

10.12 Sistemas com Retardo

O retardo ocorre em sistemas de controle quando há uma demora entre a resposta comandada e o início da resposta de saída. Por exemplo, considere um sistema de aquecimento que opera esquentando água de uma tubulação de distribuição para radiadores situados em localizações distantes. Como a água quente deve fluir através da tubulação, os radiadores não começarão a esquentar senão depois de decorrido um certo tempo. Em outras palavras, o tempo entre o comando para mais calor e o início de elevação da temperatura em uma localização distante ao longo da tubulação é o retardo. Note que este não é o mesmo fenômeno que ocorre com a resposta transitória ou o tempo que a temperatura leva para crescer ao nível desejado. Durante o retardo, nada ocorre na saída.

Modelando o Retardo

Suponha que uma entrada, $R(s)$, para um sistema, $G(s)$, forneça uma saída $C(s)$. Se um outro sistema, $G'(s)$, retarda a saída por T segundos, a resposta de saída é $c(t - T)$. Com base na Tabela 2.2, Entrada 5, a transformada de Laplace de $c(t - T)$ é $e^{-sT}C(s)$. Dessa forma, para o sistema sem retardo, $C(s) = R(s)G(s)$, e para o sistema com retardo, $e^{-sT}C(s) = R(s)G'(s)$. Dividindo estas duas equações, $G'(s)/G(s) = e^{-sT}$. Dessa forma, um sistema com retardo T pode ser representado em termos de um sistema equivalente sem retardo como a seguir:

$$G'(s) = e^{-sT}G(s) \tag{10.87}$$

O efeito da introdução do retardo em um sistema pode também ser visto a partir da perspectiva da resposta de freqüência substituindo-se $s = j\omega$ na Eq. (10.87). Conseqüentemente,

$$G'(j\omega) = e^{-j\omega T}G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle\{-\omega T + \angle G(j\omega)\} \tag{10.88}$$

Em outras palavras, o retardo não afeta a curva de magnitude da resposta de freqüência $G(j\omega)$, mas reduz a linearidade aumentando a defasagem, ωT, a partir do diagrama de fase da resposta de freqüência de $G(j\omega)$.

O efeito típico da inclusão de um retardo pode ser visto na Fig. 10.54. Admita que as margens de ganho e de fase bem como as freqüências de margem de ganho e de fase mostradas na figura aplicam-se ao sistema sem retardo. A partir da figura, vemos que a redução na defasagem causada pelo retardo reduz a margem de fase. Usando uma aproximação de segunda ordem, esta redução na margem de fase acarreta uma redução no valor da relação de amortecimento do sistema a malha fechada e uma resposta mais oscilatória. A redução de fase também leva a uma freqüência de margem de ganho reduzida. Com base na curva de magnitude, vemos que uma freqüência de margem de ganho menor leva a um valor reduzido de margem de ganho, dessa forma aproximando o sistema da instabilidade.

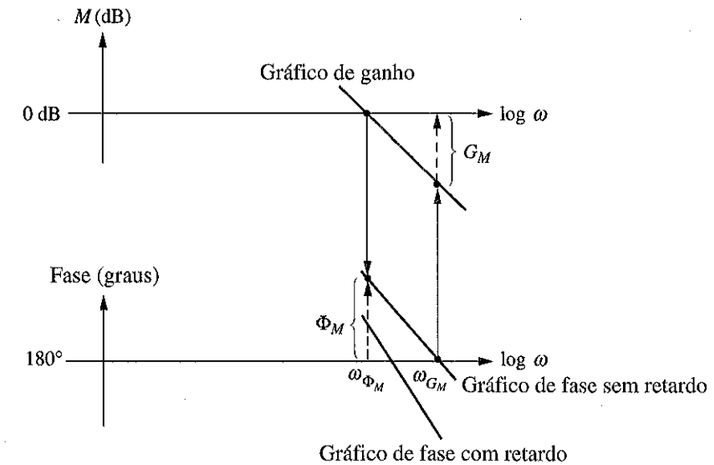


Fig. 10.54 O efeito do retardo na resposta de freqüência.

A seguir é apresentado um exemplo de gráficos das curvas de resposta de freqüência de sistemas com retardo.

Exemplo 10.15

Gráficos de resposta de freqüência de um sistema com retardo

Problema Traçar a resposta de freqüência para o sistema $G(s) = K / [s(s + 1)(s + 10)]$ com um retardo de 1 s. Use os diagramas de Bode.

Solução Como a curva de magnitude não é afetada pelo retardo, ela pode ser traçada pelos métodos tratados anteriormente no capítulo e é mostrada na Fig. 10.55(*a*) para $K = 1$.

O gráfico de fase, contudo, é afetado pelo retardo. A Fig. 10.55(*b*) mostra o resultado. Primeiro, desenhe o gráfico de fase para o retardo, $e^{-j\omega T} = 1\angle -\omega T = 1\angle -\omega$, uma vez que $T = 1$ com base no enunciado do problema. Em seguida, desenhe o gráfico de fase do sistema, $G(j\omega)$, usando os métodos tratados anteriormente. Finalmente, inclua as duas curvas de fase juntas para obter a resposta de fase total para $e^{-j\omega T}G(j\omega)$.

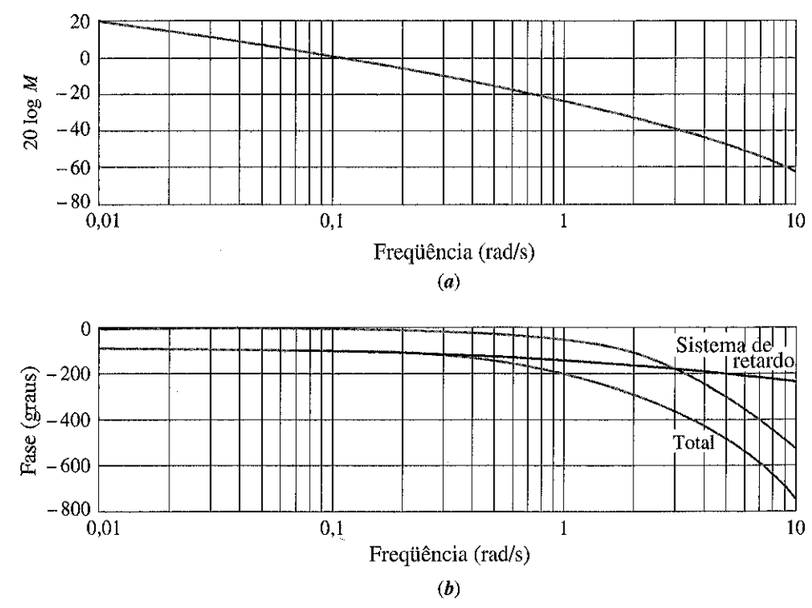


Fig. 10.55 Diagrama de resposta de freqüência para $G(s) = K/[s(s + 1)(s + 10)]$ com um retardo de 1 segundo e $K = 1$: **a.** diagrama de magnitude; **b.** diagrama de fase.

Note que o retardo leva a uma diminuição da margem de fase, uma vez que em qualquer freqüência o ângulo de fase é mais negativo. Usando uma aproximação de segunda ordem, este decréscimo na margem de fase significa uma relação de amortecimento inferior e uma resposta mais oscilatória para o sistema a malha fechada.

Além disso, ocorre um decréscimo na freqüência de margem de ganho. Na curva de magnitude, note que uma redução na freqüência de margem de ganho mostra uma margem de ganho reduzida, dessa forma levando o sistema para mais próximo da instabilidade.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o programa cap10p7 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para incluir retardo no diagrama de Bode. Você usará o MATLAB também para fazer múltiplos diagramas em um gráfico e rotular os diagramas. Este exercício resolve o Exemplo 10.15 usando o MATLAB.

Usemos agora os resultados do Exemplo 10.15 para projetar a estabilidade, analisar a resposta transitória e comparar os resultados aos do sistema sem retardo.

Exemplo 10.16

Faixa de valores de ganho para estabilidade para o sistema com retardo

Problema O sistema a malha aberta com retardo no Exemplo 10.15 é usado em uma configuração com retroação unitária. Faça o seguinte:

a. Determine a faixa de valores do ganho, K, para assegurar estabilidade. Use o diagrama de Bode e as técnicas de resposta de freqüência.
b. Repita (a) para o sistema sem retardo.

Solução

a. A partir da Fig. 10.55, o ângulo de fase é $-180°$ na freqüência de 0,81 rad/s para o sistema com retardo, marcado "Total" no diagrama de fase. Nesta freqüência, a curva de magnitude está em $-20{,}39$ dB. Dessa forma, K pode ser aumentado a partir do valor atual da unidade para $10^{20{,}39/20} = 10{,}46$. Portanto, o sistema é estável para $0 < K \leq 10{,}46$.
b. Se usarmos a curva de fase sem retardo, marcada "Sistema", o valor de $-180°$ ocorre em uma freqüência de 3,16 rad/s e K pode ser aumentado 40,84 dB ou 110,2. Dessa forma, sem retardo, o sistema é estável para $0 < K \leq 110{,}2$, maior uma ordem de grandeza.

Exemplo 10.17

Ultrapassagem percentual para sistema com retardo

Problema O sistema a malha aberta com retardo no Exemplo 10.15 é usado em uma configuração com retroação unitária. Faça o seguinte:

a. Estime a ultrapassagem percentual se $K = 5$. Use os diagramas de Bode e as técnicas de resposta de freqüência.
b. Repita (a) para o sistema sem retardo.

Solução

a. Como $K = 5$, a curva de magnitude da Fig. 10.55 é aumentada de 13,98 dB. O cruzamento da linha de zero dB ocorre então em uma freqüência de 0,47 rad/s com um ângulo de fase de $-145°$, como visto no diagrama de fase marcado "Total". Por conseguinte, a margem de fase é $(-145° - (-180)) = 35°$. Admitindo uma aproximação de segunda ordem e usando a Eq. (10.73) ou a Fig. 10.48, encontramos $\zeta = 0{,}33$. Pela Eq. (4.38), %UP = 33%. A resposta no domínio do tempo, Fig. 10.56(*a*), mostra uma ultrapassagem de 38% no lugar do valor previsto de 33%. Note o retardo no início da curva.
b. O cruzamento da linha de zero dB ocorre em uma freqüência de 0,47 rad/s com um ângulo de fase de $-118°$, como visto no diagrama de fase marcado "Sistema". Por conseguinte, a margem de fase é $(-118° - (-180)) = 62°$. Admitindo uma aproximação de segunda ordem e usando a Eq. (10.73) ou a Fig. 10.48, encontramos $\zeta = 0{,}64$. A partir da Eq. (4.38), %UP = 7,3%. A resposta no domínio do tempo é mostrada na Fig. 10.56(*b*). Note que o sistema sem retardo tem menos ultrapassagem e um tempo de assentamento menor.

Exercício de Avaliação 10.11

Problema: Para o sistema mostrado na Fig. 10.10, onde

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

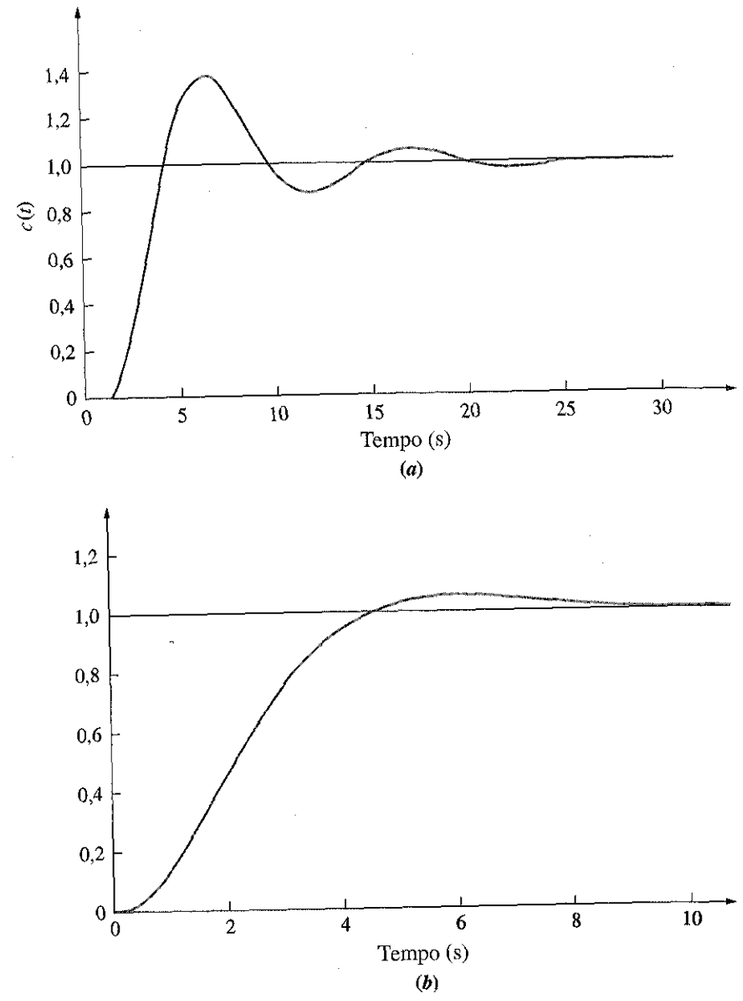


Fig. 10.56 Resposta ao degrau para sistema a malha fechada com $G(s) = 5/[s(s+1)(s+10)]$: **a.** com retardo de 1 s; **b.** sem retardo.

determine a margem de fase quando há um retardo no percurso direto de

a. 0 s
b. 3 s
c. 7 s

Respostas:

a. 18,0°
b. 8,76°
c. $-3{,}56°$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Resumindo, então, os sistemas com retardo podem ser tratados usando-se as técnicas de resposta de freqüência descritas anteriormente, se a resposta de fase for ajustada para retratar o retardo. Normalmente, o retardo reduz as margens de ganho e de fase, resultando em aumento de ultrapassagem percentual ou em instabilidade na resposta a malha fechada.

10.13 Obtendo Funções de Transferência Experimentalmente

No Cap. 4 discutimos como obter a função de transferência de um sistema através do teste da resposta ao degrau. Nesta seção mostraremos como obter a função de transferência usando dados de resposta de freqüência senoidal.

A determinação analítica da função de transferência de um sistema pode ser difícil. Os valores dos componentes individuais podem não ser conhecidos ou a configuração interna do sistema pode não ser acessível. Em tais casos, a resposta de freqüência do sistema, da entrada para a saída, pode ser obtida experimentalmente e usada para determinar a função de transferência. Para obter um diagrama de resposta de freqüência experimentalmente, usamos um gerador de força ou de sinal senoidal na entrada do sistema e medimos a amplitude e o ângulo de fase da saída senoidal em estado estacionário (veja a Fig. 10.2). Repetindo este processo em um certo número de valores de freqüência resultam dados para o diagrama de resposta de freqüência. Com relação à Fig. 10.2(*b*), a resposta de amplitude é $M(\omega) = M_s(\omega)/M_e(\omega)$, e a resposta de fase é $\phi(\omega) = \phi_s(\omega) - \phi_e(\omega)$. Uma vez obtida a resposta de freqüência, a função de transferência do sistema pode ser estimada a partir das freqüências de quebra e das inclinações das assíntotas. Os métodos de resposta de freqüência podem levar a uma estimativa mais refinada da função de transferência do que as técnicas da resposta transitória abordadas no Cap.4.

Os diagramas de Bode são uma representação conveniente dos dados da resposta de freqüência com o propósito de estimar a função de transferência. Estes diagramas permitem que partes da função de transferência sejam determinadas e extraídas, levando a formas mais refinadas para obter as partes restantes da função de transferência.

Apesar de a experiência e de a intuição serem de grande valor neste processo, insistimos em fornecer os seguintes passos como orientação:

1. Observe os diagramas de Bode de magnitude e de fase e estime a configuração de pólos e zeros do sistema. Veja a inclinação inicial no diagrama de magnitude para determinar o tipo de sistema. Veja as excursões de fase para ter uma idéia da diferença entre o número de pólos e o número de zeros.
2. Veja se partes das curvas de magnitude e de fase representam respostas de freqüência óbvias de pólos ou zeros de primeira ou de segunda ordem.
3. Veja se há picos ou depressões no gráfico de resposta de magnitude que indiquem a existência de um pólo ou de um zero de segunda ordem subamortecido, respectivamente.
4. Se for possível identificar a resposta de um pólo ou de um zero, sobrepor assíntotas de ±20 ou ±40 dB/década na curva de magnitude ou ±45°/década na curva de fase e estimar as freqüências de quebra. Para pólos ou zeros de segunda ordem, estimar a relação de amortecimento e a freqüência natural a partir das curvas padrões dadas na Seção 10.2.
5. Formar uma função de transferência de ganho unitário usando os pólos e zeros encontrados. Obter a resposta de freqüência desta função de transferência e diminuir esta resposta a partir da resposta de freqüência anterior (Franklin, 1991). Agora você tem uma resposta de freqüência de complexidade reduzida a partir da qual pode recomeçar o processo e extrair mais dos pólos e zeros do sistema. Um programa de computador como o MATLAB constitui um auxílio de ajuda inestimável neste passo.

Demonstremos isto a seguir.

Exemplo 10.18

Função de transferência a partir dos diagramas de Bode

Problema Encontrar a função de transferência do subsistema cujos diagramas de Bode são mostrados na Fig. 10.57.

Solução Primeiro vamos extrair os pólos subamortecidos de cuja existência suspeitamos com base no pico da curva de magnitude. Estimamos a freqüência natural próxima da freqüência de pico, ou aproximadamente 5 rad/s. A partir da Fig. 10.7, vemos um pico de aproximadamente 6,5 dB, que se traduz em uma relação de amortecimento de aproximadamente $\zeta = 0{,}24$ usando a Eq. (10.52). A função de segunda ordem de ganho unitário é, portanto, $G_1(s) = \omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 25/(s^2 + 2{,}4s + 25)$. O gráfico da resposta de freqüência desta função é construído e subtraído do diagrama de Bode anterior para resultar na resposta da Fig. 10.58.

Superpondo uma reta de −20 dB/década na resposta de magnitude e uma reta −45°/década na resposta de fase, detectamos um pólo final. A partir da resposta de fase, estimamos a freqüência de quebra em 90 rad/s. Subtraindo a resposta de $G_2(s) = 90/(s + 90)$ da resposta anterior, resulta a resposta da Fig. 10.59.

A Fig. 10.59 apresenta uma curva de magnitude e de fase semelhante à gerada por uma função de atraso de fase. Desenhamos uma reta de −20 dB/década e ajustamos esta reta às curvas. As freqüências de quebra são lidas a partir da figura como 9 e 30 rad/s. Uma função de transferência de ganho unitário contendo um pólo em −9 e um zero em −30 é $G_3(s) = 0{,}3\,(s + 30)/(s + 9)$. Depois de subtrair de $G_1(s)G_2(s)G_3(s)$, encontramos a resposta de freqüência de magnitude plana em ±1 dB e a resposta de fase plana em −3° e ±5°. Dessa forma, concluímos que terminamos de extrair as funções de transferência dinâmicas. O valor de baixas freqüências, ou valor estático (CC),

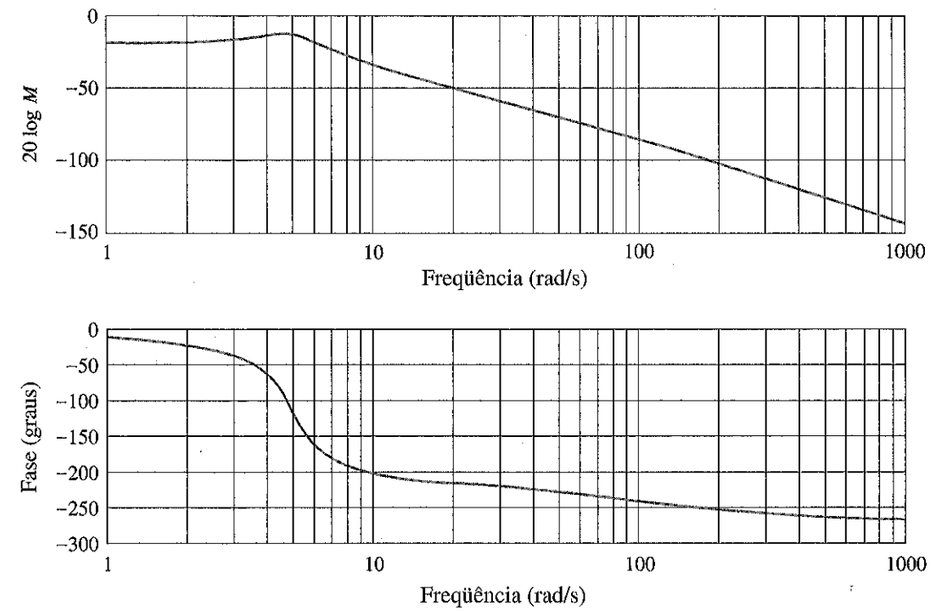


Fig. 10.57 Diagramas de Bode para subsistema com função de transferência não determinada.

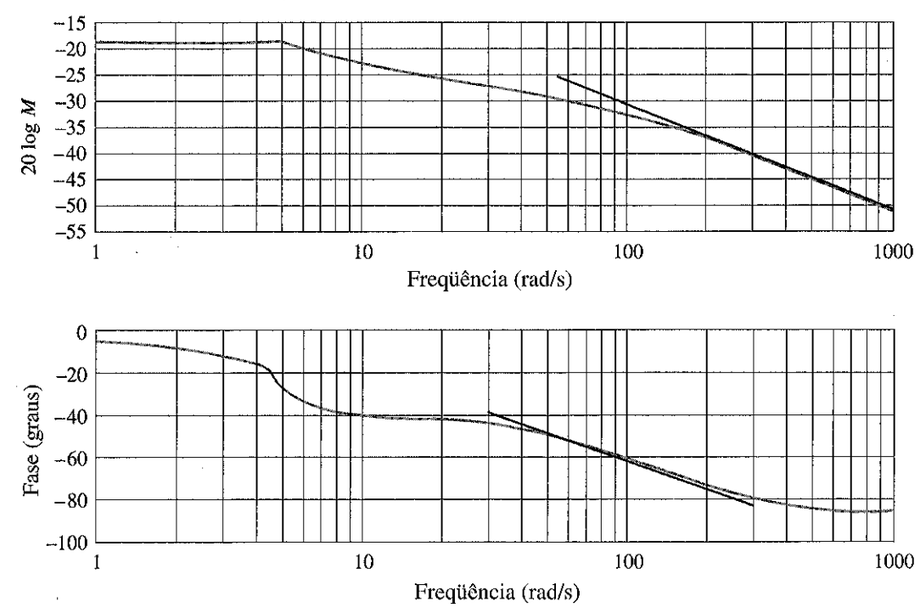


Fig. 10.58 Diagramas de Bode originais menos resposta de $G_1(s) = 25/(s_2 + 2{,}4s + 25)$.

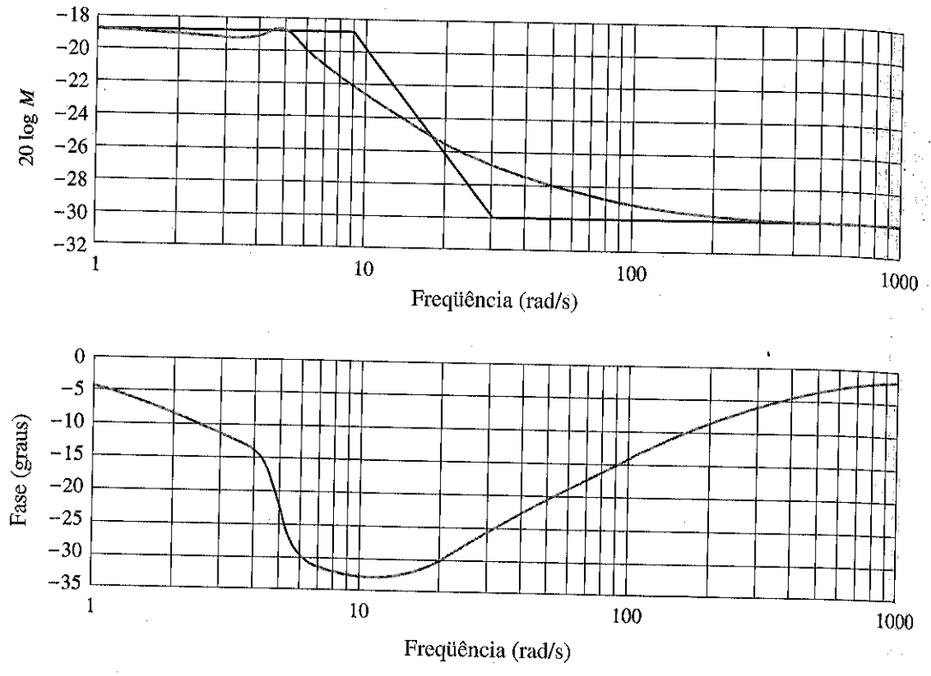


Fig. 10.59 Diagramas de Bode originais menos resposta de $G_1(s)G_2(s) = [25/(s^2 + 2{,}4s + 25)]\cdot[90/(s + 90)]$.

da curva original é −19 dB ou 0,11. Estimamos que a função de transferência do subsistema seja $G(s) = 0{,}11G_1(s)G_2(s)G_3(s)$, ou

$$G(s) = 0{,}11\left(\frac{25}{s^2 + 2{,}4s + 25}\right)\left(90\frac{1}{s + 90}\right)\left(0{,}3\frac{s + 30}{s + 9}\right)$$

$$= 74{,}25\frac{s + 30}{(s + 9)(s + 90)(s^2 + 2{,}4s + 25)} \tag{10.89}$$

É interessante notar que a curva original foi obtida a partir da função

$$G(s) = 70\frac{s + 20}{(s + 7)(s + 70)(s^2 + 2s + 25)} \tag{10.90}$$

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap10p8 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para subtrair diagramas de Bode com o objetivo de estimar funções de transferência através de teste senoidal. Este exercício resolve o Exemplo 10.18 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 10.12

Problema: Estimar $G(s)$, cujos gráficos logarítmicos de magnitude e de fase de Bode são mostrados na Fig. 10.60.

Resposta: $G(s) = \dfrac{30(s + 5)}{s(s + 20)}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Neste capítulo descobrimos a relação entre o desempenho da resposta no tempo e as respostas de freqüência dos sistemas a malha aberta e a malha fechada. Os métodos deduzidos, embora levando a uma perspectiva diferente, são alternativas simples para análise do lugar das raízes e do erro de estado estacionário coberto anteriormente.

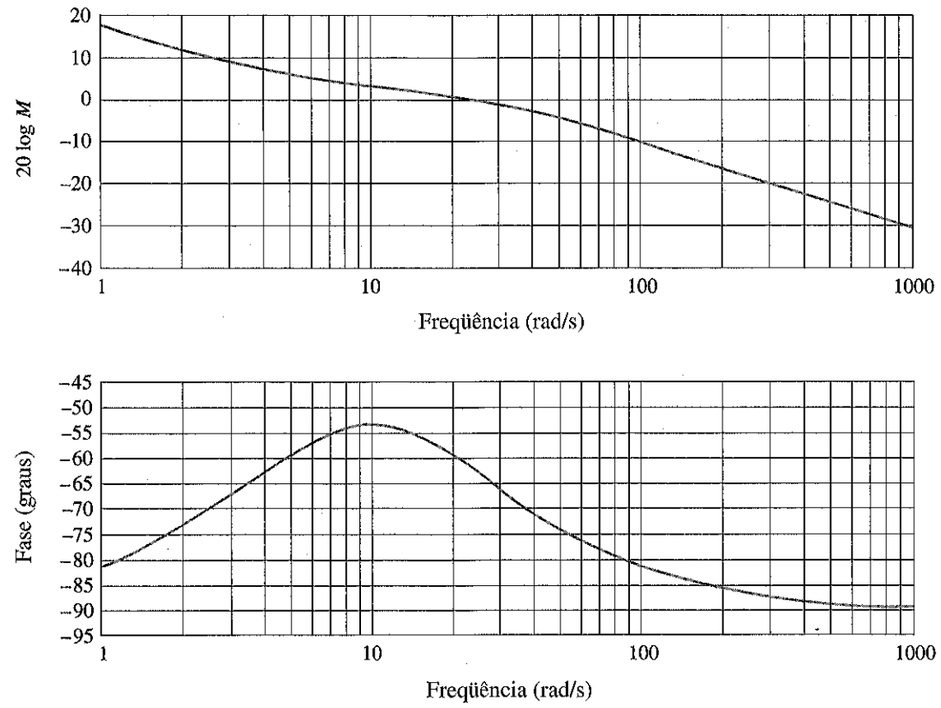


Fig. 10.60 Diagramas de Bode para o Exercício de Avaliação 10.12.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de Antena: Projeto de Estabilidade e Desempenho Transitório

Nosso sistema de controle de posição de antena em andamento serve agora como um exemplo que resume os principais objetivos deste capítulo. O estudo de caso demonstra o uso dos métodos de resposta de freqüência para encontrar a faixa de valores de ganho para a estabilidade e para projetar um valor de ganho que atenda uma ultrapassagem percentual desejada na resposta ao degrau a malha fechada.

Problema Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1), usar as técnicas de resposta de freqüência para obter o seguinte:

a. A faixa de valores do ganho do pré-amplificador, K, para estabilidade
b. A ultrapassagem percentual se o ganho do pré-amplificador for ajustado em 30
c. O tempo de assentamento estimado
d. O instante de pico estimado
e. O tempo de subida estimado

Solução Usando o diagrama de blocos (Configuração 1) mostrado na contracapa dianteira e executando a redução do diagrama de blocos, tem-se o ganho de malha, $G(s)H(s)$, como

$$G(s)H(s) = \frac{6{,}63K}{s(s+1{,}71)(s+100)} = \frac{0{,}0388K}{s\left(\frac{s}{1{,}71}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)} \tag{10.91}$$

Fazendo $K = 1$, traçamos os gráficos de magnitude e de fase da resposta de freqüência de fase, mostrados na Fig. 10.61.

a. Para encontrar a faixa de valores de K para estabilidade, observamos na Fig. 10.61 que a resposta de fase é $-180°$ em $\omega = 13{,}1$ rad/s. Nesta freqüência, o gráfico de magnitude é $-68{,}41$ dB. O ganho, K, pode ser levantado por 68,41 dB. Portanto, $K = 2633$ fará com que o sistema se torne marginalmente estável. Assim, o sistema é estável se $0 < K < 2633$.

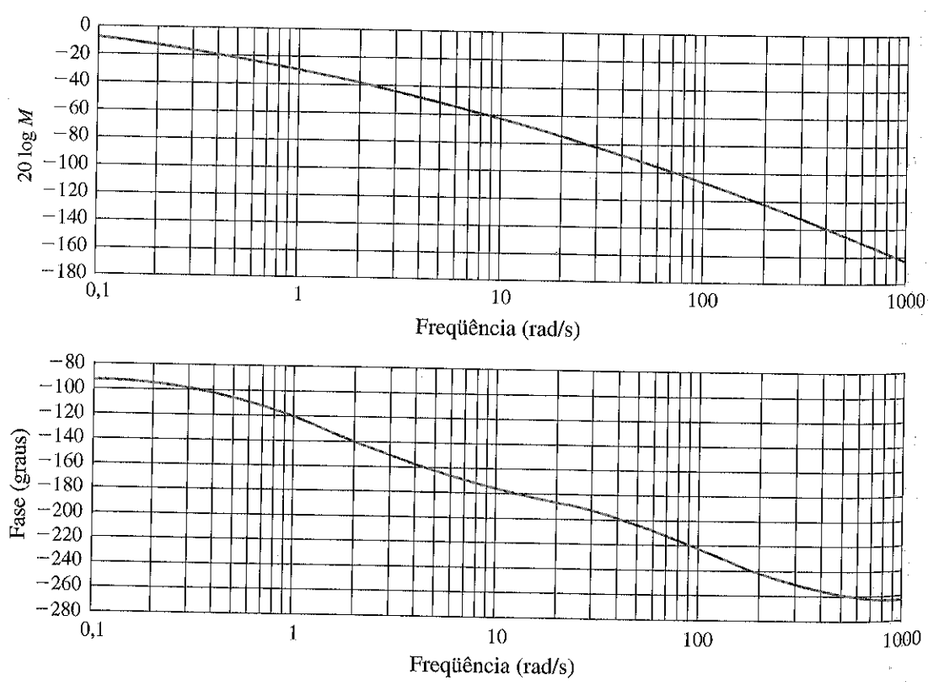


Fig. 10.61 Diagramas de resposta de freqüência a malha fechada para o sistema de controle de antena ($K = 1$).

b. Para achar a ultrapassagem percentual se $K = 30$, primeiro fazemos uma aproximação de segunda ordem e admitimos que as equações da resposta transitória de segunda ordem relacionando a ultrapassagem percentual, a relação de amortecimento e a margem de fase são verdadeiras para este sistema. Em outras palavras, admitimos que a Eq. (10.73), que relaciona a relação de amortecimento à margem de fase, é válida. Se $K = 30$, a curva de magnitude da Fig. 10.61 é deslocada para cima de 20 log 30 = 29,54 dB. Por conseguinte, a curva de magnitude ajustada passa por zero dB em $\omega = 1$. Nesta freqüência, o ângulo de fase é $-120{,}9°$, levando a uma margem de fase de 59,1°. Usando a Eq. (10.73) ou a Fig. 10.48, $\zeta = 0{,}6$, ou a ultrapassagem é de 9,48%. Uma simulação em computador mostra 10%.
c. Para estimar o tempo de assentamento, fazemos uma aproximação de segunda ordem e usamos a Eq. (10.55). Visto que $K = 30$ (29,54 dB), a resposta da magnitude a malha fechada é -70 dB quando a resposta da magnitude normalizada da Fig. 10.61 é $-36{,}54$ dB. Dessa forma, a banda passante estimada é 1,8 rad/s. Usando a Eq. (10.55), $T_s = 4{,}25$ s. Uma simulação em computador mostra um tempo de assentamento de aproximadamente 4,4 s.
d. Usando a banda passante estimada encontrada em (*c*), junto com a Eq. (10.56), e a relação de amortecimento encontrada em (*a*), estimamos o instante de pico em 2,5 s. Uma simulação em computador mostra um instante de pico de 2,8 s.
e. Para estimar o tempo de subida, usamos a Fig. 4.16 e obtemos o tempo de subida normalizado para uma relação de amortecimento de 0,6 com o valor de 1,854. Usando a Eq. (10.54), a banda passante estimada encontrada em (*c*), e $\zeta = 0{,}6$, encontramos $\omega_n = 1{,}57$. Usando o tempo de subida normalizado e ω_n, encontramos $T_r = 1{,}854/1{,}57 = 1{,}18$ s. Uma simulação mostra um tempo de subida de 1,2 segundo.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seu conhecimento sobre os objetivos deste capítulo: Foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 3). Usando métodos de resposta de freqüência, faça o seguinte:

a. Encontre a faixa de valores de ganho para a estabilidade.
b. Encontre a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau, se o ganho, K, for igual a 3.

MATLAB

c. Repita (a) e (b) usando o MATLAB.

Sumário

Os métodos de resposta de freqüência são uma alternativa ao lugar das raízes para analisar e projetar sistemas de controle. As técnicas de resposta de freqüência podem ser usadas mais eficazmente que a resposta transitória para modelar sistemas físicos em laboratório. Por outro lado, o lugar das raízes é mais diretamente relacionado com a resposta em função do tempo.

A entrada para um sistema físico pode ser variada de forma senoidal com valores conhecidos de freqüência, amplitude e ângulo de fase. A saída do sistema, que também é senoidal em estado estacionário, pode ser medida em amplitude e em ângulo de fase em diferentes freqüências. A partir desses dados, a resposta de freqüência de magnitude do sistema, que é a relação entre a amplitude de saída e a amplitude de entrada, pode ser traçada e usada no lugar de uma resposta de freqüência de magnitude obtida analiticamente. De modo semelhante, podemos obter a resposta de fase encontrando a diferença entre o ângulo de fase da saída e o ângulo de fase da entrada em freqüências diferentes.

A resposta de freqüência de um sistema pode ser representada tanto como um gráfico polar como por diagramas de fase e magnitude separados. Como gráfico polar, a resposta de magnitude é o comprimento de um vetor desenhado a partir da origem até um ponto na curva, enquanto a resposta de fase é o ângulo desse vetor. No gráfico polar, a freqüência está implícita e é assinalada em cada ponto da curva polar. O gráfico polar de $G(s)H(s)$ é conhecido como *diagrama de Nyquist*.

Os diagramas de magnitude e de fase separados, algumas vezes referidos como *gráficos de Bode*, apresentam dados com valores de freqüência explicitamente enumerados ao longo da abscissa. A curva de magnitude pode ser um gráfico logarítmico da magnitude em função do logaritmo da freqüência. O outro gráfico é um diagrama de ângulo de fase em função do logaritmo da freqüência. Uma vantagem dos diagramas de Bode sobre o diagrama de Nyquist é que eles podem facilmente ser desenhados usando aproximações assintóticas à curva real.

O critério de Nyquist estabelece o fundamento teórico a partir do qual a resposta de freqüência pode ser usada para determinar a estabilidade do sistema. Usando o critério de Nyquist e o diagrama de Nyquist, ou o critério de Nyquist e o diagrama de Bode, podemos determinar a estabilidade do sistema.

Os métodos da resposta de freqüência nos fornecem não somente informação de estabilidade, mas também informação sobre a resposta transitória. Definindo tais grandezas da resposta de freqüência como margem de ganho e margem de fase, a resposta transitória pode ser analisada ou projetada. A *margem de ganho* é o quanto se pode aumentar o ganho de um sistema antes que a instabilidade ocorra se o ângulo de fase for constante em 180°. A *margem de fase* é o quanto se pode alterar o ângulo de fase antes que a instabilidade ocorra com o ganho mantido unitário.

Enquanto a resposta de freqüência a malha aberta leva aos resultados sobre a estabilidade e sobre a resposta transitória recém-descritos, outras ferramentas de projeto relacionam o pico de resposta de freqüência a malha fechada e a banda passante à resposta transitória. Como a resposta a malha fechada não é tão fácil de obter como a resposta a malha aberta por causa da indisponibilidade dos

pólos a malha fechada, usamos auxílios gráficos para obter a resposta de freqüência a malha fechada a partir da resposta de freqüência a malha aberta. Estes gráficos de apoio são os círculos M e N e o gráfico de Nichols. Superpondo a resposta de freqüência a malha aberta aos círculos M e N ou ao gráfico de Nichols, somos capazes de obter a resposta de freqüência a malha fechada e em seguida analisar e projetar a resposta transitória.

Nos dias de hoje, com a disponibilidade de computadores e de software apropriado, o gráfico da resposta de freqüência pode ser obtido sem necessidade de depender das técnicas gráficas descritas neste capítulo. O programa usado para os cálculos do lugar das raízes, descrito no Apêndice H.2, é um desses programas. O MATLAB é outro.

Concluímos o capítulo mostrando como obter uma estimativa razoável de uma função de transferência usando sua resposta de freqüência, que pode ser obtida experimentalmente. A obtenção de funções de transferência dessa maneira leva a resultados mais exatos do que os testes da resposta transitória.

Primeiramente este capítulo examinou *análises* de sistemas de controle com retroação por intermédio das técnicas de resposta de freqüência. Desenvolvemos as relações entre resposta de freqüência e estabilidade e resposta transitória. No próximo capítulo, aplicamos os conceitos ao *projeto* de sistemas de controle com retroação, usando os diagramas de Bode.

Perguntas de Revisão

1. Cite quatro vantagens das técnicas de resposta de freqüência sobre a técnica do lugar das raízes.
2. Defina resposta de freqüência aplicada a um sistema físico.
3. Cite duas maneiras de traçar a resposta de freqüência.
4. Descreva de forma resumida como obter analiticamente a resposta de freqüência.
5. Defina os diagramas de Bode.
6. Quanto contribui cada pólo de um sistema para a inclinação do gráfico de magnitude de Bode?
7. Um sistema dotado unicamente de quatro pólos e nenhum zero apresentaria que valor de inclinação em altas freqüências no gráfico de magnitude de Bode?
8. Um sistema com quatro pólos e dois zeros apresentaria que valor de inclinação em altas freqüências no gráfico de magnitude de Bode?
9. Descreva a resposta de fase assintótica de um sistema com um único pólo em -2.
10. Qual é a principal diferença entre gráficos de magnitude de Bode para sistemas de primeira ordem e para sistemas de segunda ordem?
11. Para um sistema com três pólos em -4, qual é a maior diferença entre a aproximação assintótica e a resposta de magnitude real?
12. Enuncie resumidamente o critério de Nyquist.
13. O que nos diz o critério de Nyquist?
14. O que é um diagrama de Nyquist?
15. Por que o critério de Nyquist é chamado de método de resposta de freqüência?
16. Quando esboçamos um diagrama de Nyquist, o que deve ser feito com os pólos a malha aberta no eixo imaginário?
17. Qual é a simplificação do critério de Nyquist que podemos usualmente fazer para sistemas que são estáveis a malha aberta?
18. Qual é a simplificação do critério de Nyquist que podemos usualmente fazer para sistemas que são instáveis a malha aberta?
19. Defina margem de ganho.
20. Defina margem de fase.
21. Cite duas características da resposta de freqüência que podem ser usadas para determinar uma resposta transitória do sistema.
22. Cite três métodos diferentes de obter a resposta de freqüência a malha fechada a partir da função de transferência a malha aberta.
23. Explique resumidamente como determinar a constante de erro estático a partir do diagrama de magnitude de Bode.
24. Descreva a mudança no diagrama de magnitude da resposta de freqüência a malha aberta se um retardo for adicionado ao processo a controlar.
25. Qual será a forma da curva se a resposta de fase de um retardo puro for traçada em gráfico linear da fase em função da freqüência?
26. Ao extrair sucessivamente as componentes das funções de transferência a partir dos dados da resposta de freqüência experimental, como você sabe quando terminou?

Problemas

1. Encontre expressões analíticas para a magnitude e para a resposta de fase de cada $G(s)$ abaixo:

   a. $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$

   b. $G(s) = \dfrac{(s+5)}{(s+2)(s+4)}$

   c. $G(s) = \dfrac{(s+3)(s+5)}{s(s+2)(s+4)}$

2. Para cada função no Problema 1, construa um gráfico logarítmico da magnitude e de fase usando o logaritmo da freqüência em rad/s como abscissa. Não use aproximações assintóticas.
3. Para cada função no Problema 1, faça um gráfico polar da resposta de freqüência.
4. Para cada função no Problema 1, esboçar os gráficos assintóticos de Bode de magnitude e de fase. Compare os resultados com os do Problema 1.

5. Esboce o diagrama de Nyquist para cada um dos sistemas na Fig. P10.1.
6. Desenhe um gráfico polar a partir das curvas de magnitude e de fase mostradas na Fig. P10.2.

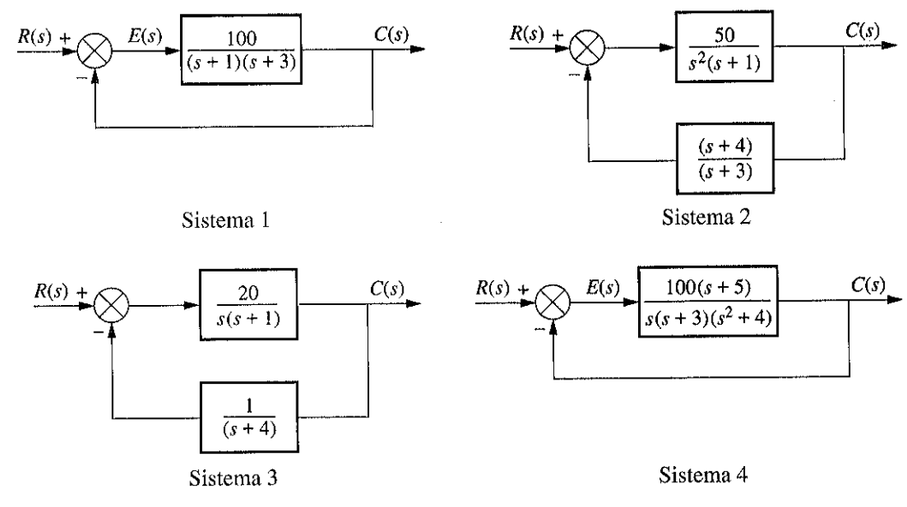


Fig. P10.1

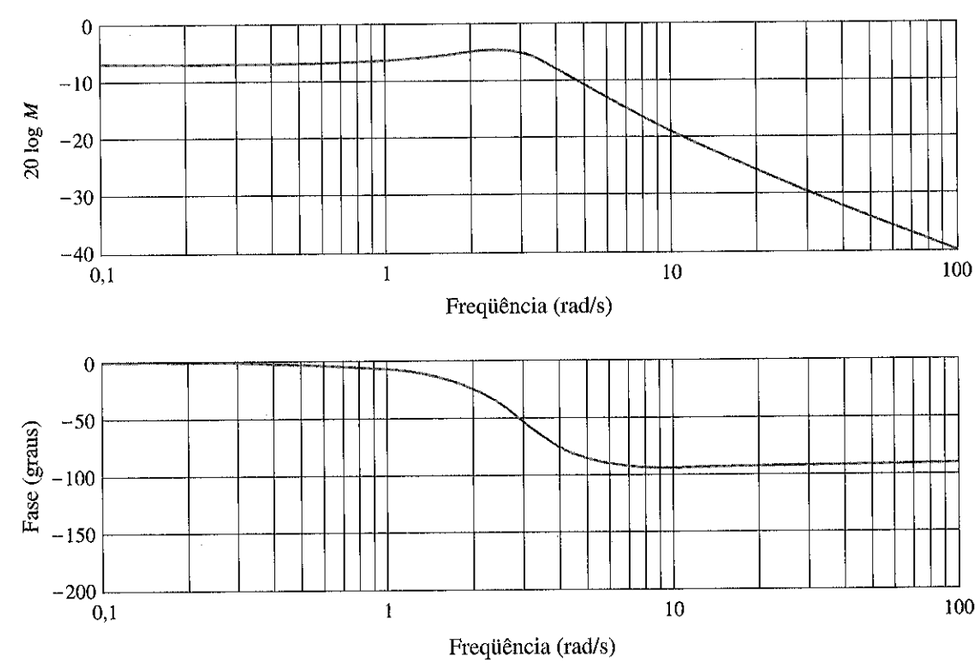


Fig. P10.2

7. Desenhe as curvas separadas de magnitude e de fase a partir do gráfico polar mostrado na Fig. P10.3.

MATLAB

8. Escreva um programa em MATLAB que irá fazer o seguinte:
   a. Plotar o diagrama de Nyquist de um sistema
   b. Exibir o valor da função e da freqüência no cruzamento do eixo real
   c. Aplicar seu programa a um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K(s+5)}{(s^2+6s+100)(s^2+4s+25)}$$

9. Usando o critério de Nyquist, descubra se cada sistema do Problema 5 é estável ou não.

10. Usando o critério de Nyquist, determine a faixa de valores de K para estabilidade de cada sistema da Fig. P10.4.

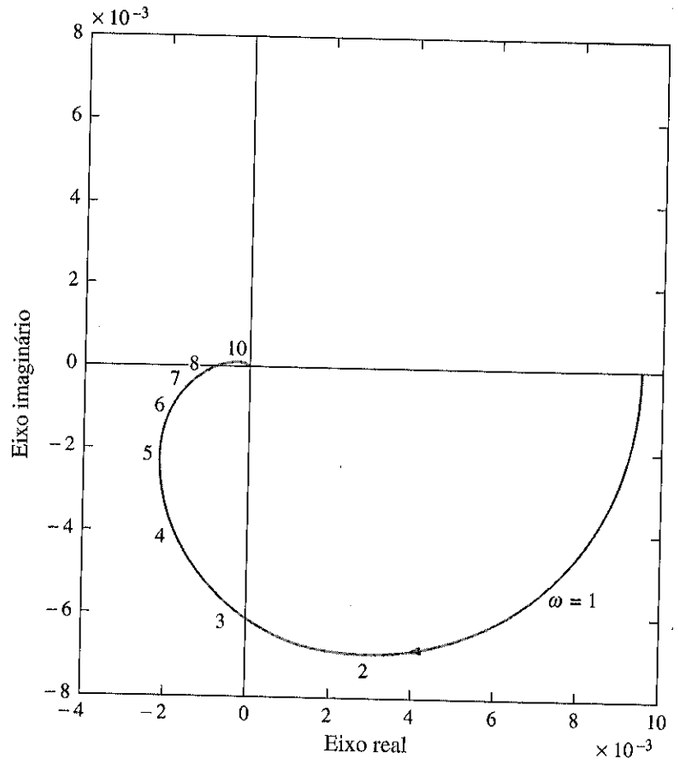


Fig. P10.3

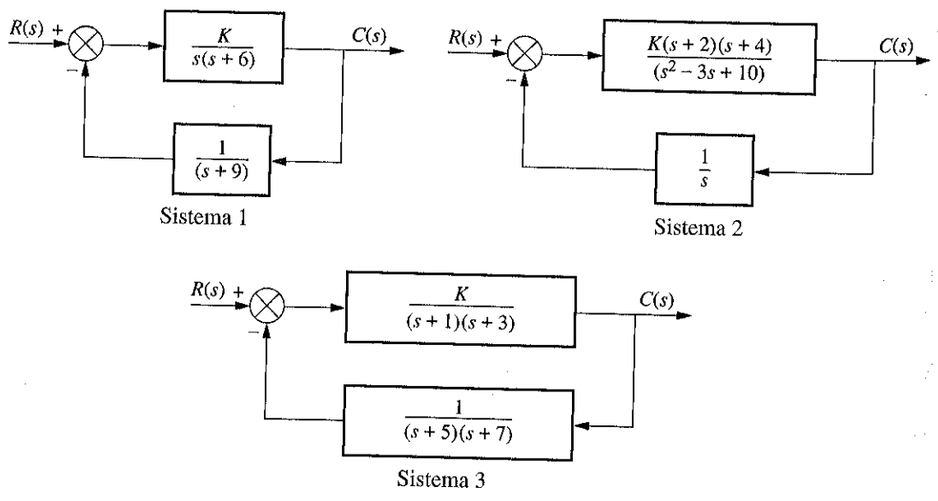


Fig. P10.4

11. Para cada sistema do Problema 10, encontre a margem de ganho e a margem de fase se o valor de K em cada parte do Problema 10 for:
   a. $K = 500$
   b. $K = 600$
   c. $K = 10$

MATLAB

12. Escreva um programa em MATLAB que irá fazer o seguinte:
   a. Permitir que se entre pelo teclado com um valor de ganho, K
   b. Mostrar o diagrama de Bode de um sistema para o valor de K que entrou via teclado
   c. Calcular e mostrar o ganho e a margem de fase para o valor de K que entrou via teclado

   Teste seu programa em um sistema com retroação unitária com $G(s) = K/[s(s+3)(s+12)]$.

Ferramenta GUI

13. Use o LTI Viewer do MATLAB para obter a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de 0 dB e a freqüência de 180° para um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{10.000}{(s+5)(s+18)(s+30)}$$

   Use os seguintes métodos:
   a. O diagrama de Nyquist
   b. Os diagramas de Bode

14. Deduza a Eq. (10.54), a banda passante a malha fechada em termos de ζ e de ω_n de um sistema com dois pólos.

15. Para cada sistema a malha fechada com as seguintes características de desempenho, encontre a banda passante a malha fechada.
   a. $\zeta = 0{,}2,\ T_s = 3$ s
   b. $\zeta = 0{,}2,\ T_p = 3$ s
   c. $T_s = 4$ s, $T_p = 2$ s
   d. $\zeta = 0{,}3,\ T_r = 4$ s

16. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. 10.10. Para cada $G(s)$ que se segue, use os círculos M e N para fazer um gráfico da resposta de freqüência a malha fechada.
   a. $G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$
   b. $G(s) = \dfrac{1000}{(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)}$
   c. $G(s) = \dfrac{50(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$

17. Repita o Problema 16 usando o diagrama de Nichols no lugar dos círculos M e N.

18. Usando os resultados do Problema 16, estime a ultrapassagem percentual que pode ser esperada na resposta ao degrau de cada sistema mostrado.

19. Use os resultados do Problema 17 para estimar a ultrapassagem percentual se o termo de ganho no numerador do percurso direto de cada parte do problema é respectivamente mudado como se segue:
   a. De 10 a 30
   b. De 1000 a 2500
   c. De 50 a 75

MATLAB

20. Escreva um programa no MATLAB que irá fazer o seguinte:
   a. Permitir entrar a partir do teclado com o valor de ganho, K
   b. Apresentar os gráficos de resposta de freqüência de magnitude e fase a malha fechada de um sistema com retroação unitária com uma função de transferência a malha aberta, $KG(s)$
   c. Calcular e mostrar a magnitude de pico, a freqüência de magnitude de pico e a banda passante para a resposta de freqüência a malha fechada e o valor de K

   Teste seu programa no sistema da Fig. P10.5 para $K = 40$.

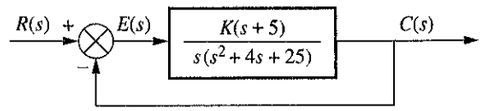


Fig. P10.5

Ferramenta GUI

21. Use o visualizador LTI Viewer do MATLAB com o gráfico de Nichols para determinar a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de 0 dB e a freqüência de 180° para um sistema com retroação unitária com uma função de transferência no percurso direto

$$G(s) = \frac{7(s+5)}{s(s^2+4s+10)}$$

MATLAB

22. Escreva um programa no MATLAB que irá fazer o seguinte:
   a. Traçar um gráfico de Nichols de uma função de transferência a malha aberta
   b. Permitir ao usuário ler o gráfico de Nichols e entrar com o valor de M_p
   c. Traçar os gráficos de magnitude e de fase a malha fechada
   d. Mostrar os valores esperados de ultrapassagem percentual, de tempo de assentamento e de instante de pico
   e. Traçar a resposta ao degrau a malha fechada

   Teste seu programa em um sistema com retroação unitário com a função de transferência no percurso direto

$$G(s) = \frac{7(s+5)}{s(s^2+4s+10)}$$

23. Usando os diagramas de Bode, estimar a resposta transitória dos sistemas na Fig. P10.6

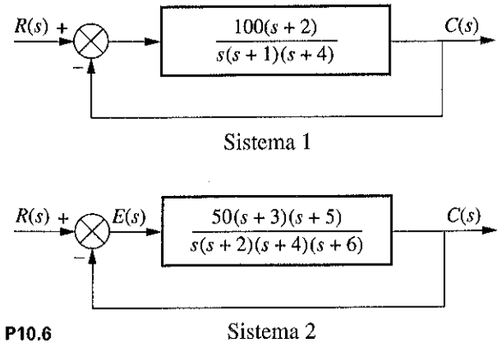


Fig. P10.6

24. Para o sistema da Fig. P10.5, faça o seguinte:
   a. Trace os diagramas de Bode de magnitude e de fase.
   b. Supondo uma aproximação de segunda ordem, estimar a resposta transitória do sistema se $K = 40$.

MATLAB

c. Use o MATLAB ou qualquer outro programa para checar suas hipóteses simulando a resposta ao degrau do sistema.

25. Os diagramas de Bode de um processo a controlar, $G(s)$, usados em um sistema com retroação unitária, são mostrados na Fig. P10.7. Faça o seguinte:

a. Determine a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de 0 dB, a freqüência de 180° e a banda passante a malha fechada.

b. Use os resultados de (a) para estimar a relação de amortecimento, a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico.

MATLAB

26. Escreva um programa em MATLAB que usará uma função de transferência a malha aberta, $G(s)$, para fazer o seguinte:

a. Construir um diagrama de Bode

b. Usar os métodos de resposta de freqüência para estimar a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o instante de pico.

c. Traçar a resposta ao degrau a malha fechada

Teste o seu programa comparando os resultados com os obtidos para os sistemas do Problema 10.23

27. A resposta de freqüência a malha aberta mostrada na Fig. P10.8 foi obtida experimentalmente a partir de um sistema com retroação unitária. Estimar a ultrapassagem percentual e o erro de estado estacionário do sistema a malha fechada.

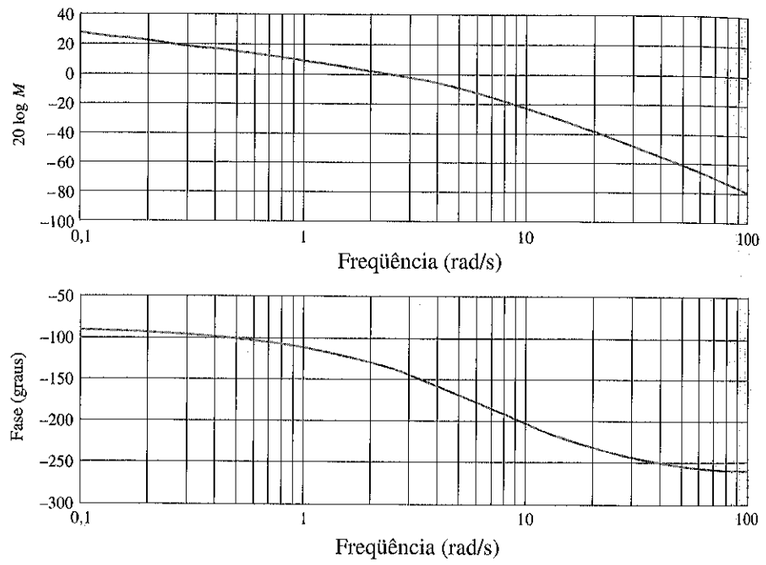


Fig. P10.7

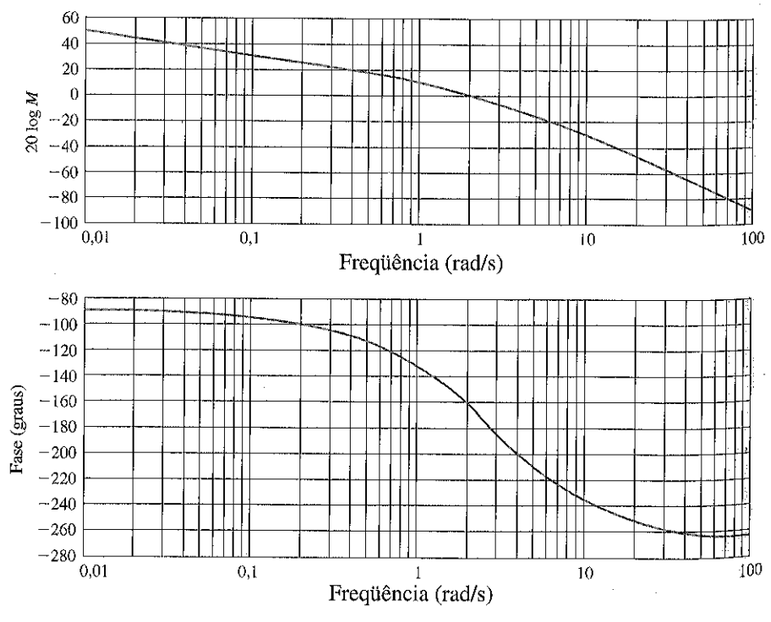


Fig. P10.8

28. Considere o sistema na Fig. P10.9.

a. Determine a margem de fase se o sistema for estável com retardo de 0, 2, 3, 5 e 10 segundos.

b. Determine a margem de ganho se o sistema for estável para cada valor de retardo dado em (a).

c. Para qual retardo mencionado em (a) o sistema é estável?

d. Para cada retardo que faz o sistema instável, que redução de ganho é necessária para que o sistema seja estável?

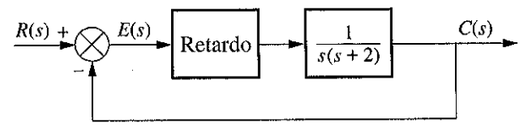


Fig. P10.9

29. É dado um sistema com retroação unitária com a função de transferência no percurso direto

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$

e um retardo de 0,5 s. Determine a faixa de valores de ganho, K, que leva à estabilidade. Use os diagramas de Bode e as técnicas de resposta de freqüência.

30. Dado um sistema com retroação unitária com a função de transferência no percurso direto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+12)}$$

e um retardo de 0,5 s, faça uma aproximação de segunda ordem e estime a ultrapassagem percentual se $K = 40$. Use os diagramas de Bode e as técnicas de resposta de freqüência.

MATLAB

31. Use a função pade(T,n) do MATLAB para modelar o retardo no Problema 30. Obtenha a resposta ao degrau unitário e calcule a aproximação de segunda ordem no Problema 30.

32. Para o diagrama de Bode mostrado na Fig. P10.10, determine a função de transferência manualmente ou por intermédio do MATLAB.

33. Repita o Problema 32 para os diagramas de Bode mostrados na Fig. P10.11.

34. O braço robótico chamado *Soft Arm*, usado para alimentar pessoas com deficiência, foi discutido no Problema 50 do Cap. 6. Admitindo o diagrama de blocos do sistema mostrado na Fig. P10.12, use as técnicas de resposta de freqüência para determinar o seguinte (Kara, 1992):

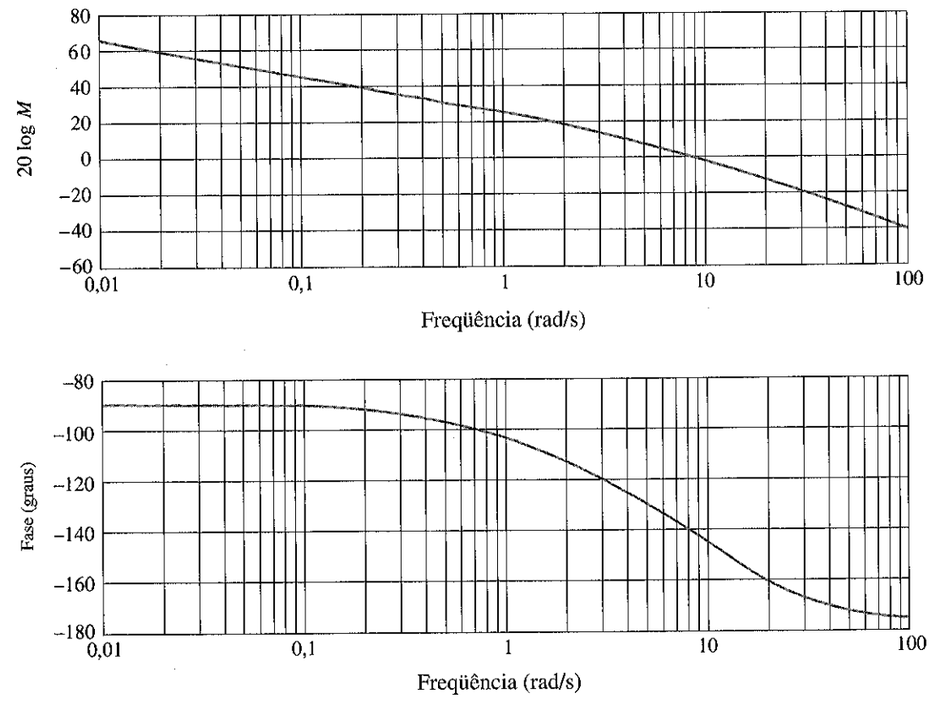


Fig. P10.10

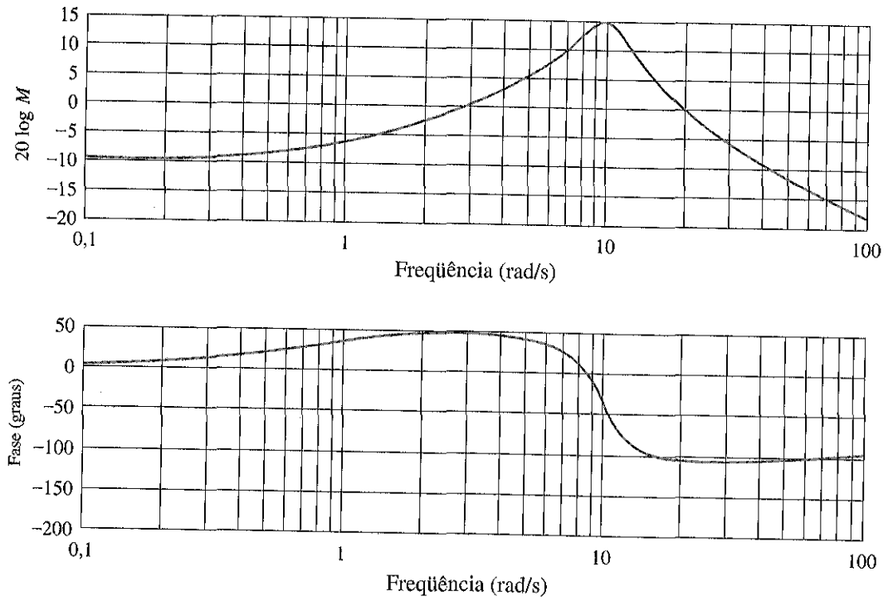


Fig. P10.11

a. Margem de ganho, margem de fase, freqüência de 0 dB e freqüência de 180°

b. O sistema é estável? Por quê?

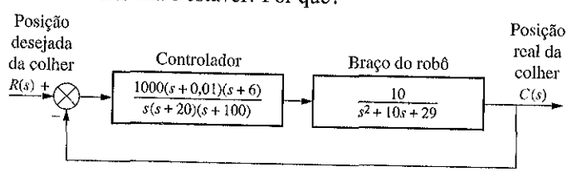


Fig. P10.12 Diagrama de blocos do sistema de controle de posicionamento Soft Arm.

35. Um acionador de disco flexível foi discutido no Cap. 8. Admitindo o diagrama de blocos do sistema mostrado na Fig. P10.13, use as técnicas de resposta de freqüência para determinar o seguinte:

a. Margem de ganho, margem de fase, freqüência de 0 dB, freqüência de 180° e a banda passante a malha fechada

b. Percentual de ultrapassagem, tempo de assentamento e o instante de pico

MATLAB

c. Use o MATLAB para simular a resposta ao degrau a malha fechada e compare os resultados com os obtidos em (b).

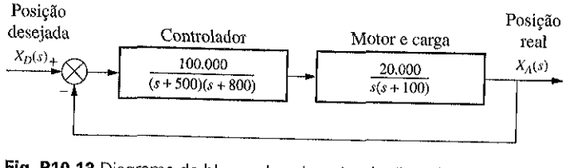


Fig. P10.13 Diagrama de blocos de acionador de disco flexível.

36. Robôs industriais, como o mostrado na Fig. P10.14, requerem modelos exatos para projeto de alto desempenho. Muitos modelos de função de transferência para robôs industriais supõem corpos rígidos interconectados com a fonte de torque de acionamento modelada como um ganho puro, ou sistema de primeira ordem. Como os movimentos associados ao robô são conectados aos acionadores através de elos flexíveis em vez de elos rígidos, a modelagem antiga não explica as ressonâncias observadas. Um modelo exato, linearizado para pequenos movimentos, foi desenvolvido levando-se em consideração o acionamento flexível. A função de transferência,

$$G(s) = 999{,}12\frac{(s^2 + 8{,}94s + 44{,}7^2)}{(s + 20{,}7)(s^2 + 34{,}858s + 60{,}1^2)}$$

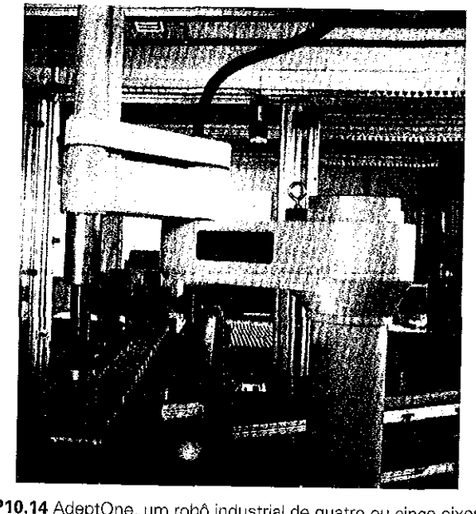


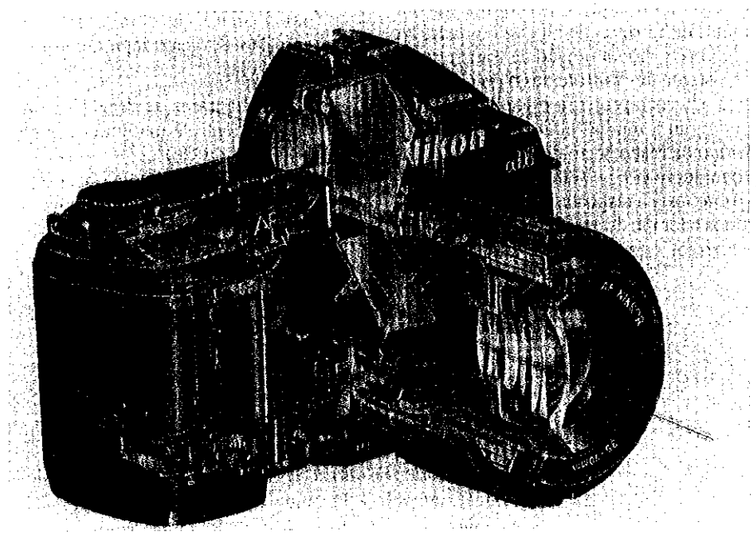
Fig. P10.14 AdeptOne, um robô industrial de quatro ou cinco eixos, é usado para montagem, embalagem e outras tarefas de manufatura.

relaciona a velocidade angular da base do robô aos comandos de corrente elétrica (Good, 1985). Construa um diagrama de Bode da resposta de freqüência e identifique as freqüências de ressonância.

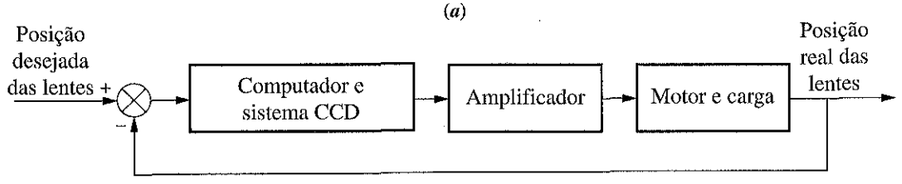
37. O dispositivo de carga acoplada (CCD) usado em câmaras de vídeo para converter a imagem em sinais elétricos pode ser usado como parte de um sistema de foco automático em câmaras fotográficas de 35 mm. A focalização automática pode ser implementada focalizando o centro da imagem em uma matriz CCD através de duas lentes. A separação das duas imagens no CCD é relacionada com o foco. A câmara sente a separação, e um computador aciona as lentes e focaliza a imagem (veja referências a *Popular Photography* na bibliografia deste capítulo). O sistema de foco automático é um controle de posicionamento, onde a posição desejada das lentes é uma entrada selecionada apontando a câmara para o objeto. A saída é a posição real das lentes. A câmara Nikon na Fig. P10.15(*a*) usa um sistema automático de focalização CCD. A Fig. P10.15(*b*) mostra o recurso automático de focalização representado como um sistema de controle de posicionamento. Admitindo o modelo simplificado mostrado na Fig. P10.15(*c*), desenhe os diagramas de Bode e estime a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau.

38. O movimento de rolamento de um navio pode ser estabilizado com um sistema de controle. Uma tensão aplicada aos atuadores de superfícies hidrodinâmicas cria um torque de rolamento que é aplicado ao navio. O navio, em resposta ao torque de rolamento, produz um ângulo de rolamento. Admitindo o diagrama de blocos para o sistema de controle de rolamento mostrado na Fig. P10.16, determine as margens de ganho e de fase para o sistema.

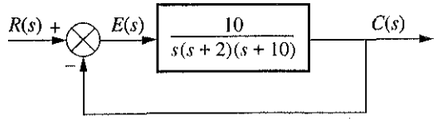
39. Vibrações de natureza térmica produzem erro de apontamento no Telescópio Espacial Hubble. A vibração térmica dos painéis solares ocorre quando a espaçonave passa da luz solar à escuridão e quando a espaçonave está à luz do dia. Ao passar da luz do dia para a escuridão aparece uma oscilação devida a uma flexão de ponta a ponta de freqüência f_1



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Fig. P10.15 a. Vista em corte de uma câmara fotográfica Nikon 35 mm mostrando partes do sistema CCD de focalização automática; **b.** diagrama de blocos funcional; **c.** diagrama de blocos.

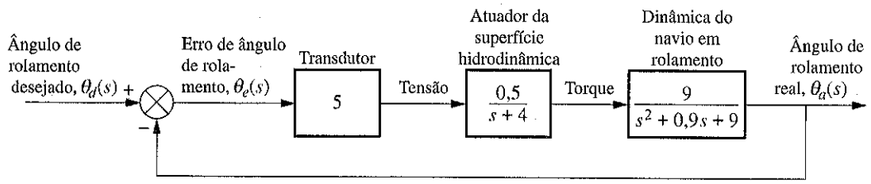


Fig. P10.16 Diagrama de blocos de um sistema de estabilização de rolamento de um navio.

rad/s. Estas oscilações interferem no sistema de apontamento do Hubble. Propõe-se usar um filtro com função de transferência

$$G_f(s) = \frac{1,96(s^2 + s + 0,25)(s^2 + 1,26s + 9,87)}{(s^2 + 0,015s + 0,57)(s^2 + 0,083s + 17,2)}$$

colocado em cascata com o controlador PID para reduzir a flexão (Wie, 1992).

a. Obtenha a resposta de freqüência do filtro e estime as freqüências de flexão que serão reduzidas.

b. Explique por que este filtro reduzirá as oscilações de flexão se estas oscilações forem vistas como perturbações na saída do sistema de controle.

Problema Progressivo de Análise e Projeto

40. Pantógrafo para ferrovia de alta velocidade. O Problema 17 do Cap. 1 discute o controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas de ferrovia de alta velocidade. No Problema 62(*a*), Cap. 5, você achou a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle ativo do pantógrafo. No Cap. 8, Problema 53, você projetou o ganho para produzir uma resposta ao degrau a malha fechada com 30% de ultrapassagem. Um gráfico da resposta ao degrau mostrou um tempo de assentamento maior que 0,5 s bem como uma oscilação de alta freqüência sobreposta à resposta ao degrau. No Cap. 9, Problema 45, reduzimos o tempo de assentamento para aproximadamente 0,3 s, reduzimos a zero o erro de estado estacionário da resposta ao degrau, e eliminamos as oscilações de alta freqüência usando um filtro supressor de faixa (O'Connor, 1997). Usando a função de transferência equivalente encontrada no Cap. 5 em cascata com o filtro supressor de faixa especificado no Cap. 9, faça o seguinte usando as técnicas de resposta de freqüência:

a. Trace o diagrama de Bode para um ganho equivalente total de 1 e encontre a margem de ganho, a margem de fase e a freqüência de 180°.

b. Determine a faixa de valores de K para estabilidade.

c. Compare sua resposta do item (b) com a resposta do Problema 54, Cap. 6. Explique quaisquer diferenças entre os resultados.

Bibliografia

Auto Focus SLR Update. *Popular Photography,* December 1987, pp. 72–75.

Bode, H. W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1945.

Dorf, R. C. *Modern Control Systems.* 5th ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

Franklin, G.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems.* 2d ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1991.

Goldberg, N., and Frank, M. A. Pop Photo Camera Test of Minolta Maxxum 7000. *Popular Photography,* February 1986, pp. 44–48, 94.

Good, M. C.; Sweet, L. M.; and Strobel, K. L. Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control,* March 1985, pp. 53–59.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J., Jr.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems.* 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Kara, A.; Kawamura, K.; Bagchi, S.; and El-Gamal, M. Reflex Control of a Robotic Aid System to Assist the Physically Disabled. *IEEE Control Systems,* June 1992, pp. 71–77.

Kuo, B. C. *Automatic Control Systems.* 5th ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.

Kuo, F. F. *Network Analysis and Synthesis.* Wiley, New York, 1966.

Nikon N4004. *Popular Photography,* October 1987, pp. 52–56.

Nilsson, J. W. *Electric Circuits.* 3d ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

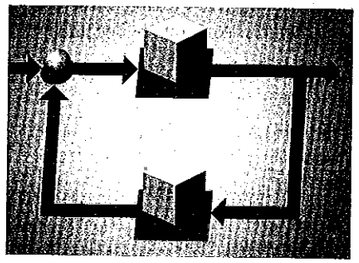
Nyquist, H. Regeneration Theory. *Bell Systems Technical Journal,* January 1932, pp. 126–147.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ogata, K. *Modern Control Engineering.* 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.

Wie, B. Experimental Demonstration to a Classical Approach to Flexible Structure Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* November–December 1992, pp. 1327–1333.

CAPÍTULO 11



Projeto por Intermédio da Resposta de Freqüência

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como usar as técnicas de resposta de freqüência para ajustar o ganho de modo a atender uma especificação de resposta transitória.
- Como usar o lugar das raízes no projeto de compensadores em cascata para melhorar o erro de estado estacionário.
- Como usar as técnicas de resposta de freqüência no projeto de compensadores em cascata para melhorar a resposta transitória.
- Como usar as técnicas de resposta de freqüência no projeto de compensadores em cascata para melhorar ao mesmo tempo o erro de estado estacionário e a resposta transitória.

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de usar as técnicas de resposta de freqüência para projetar o ganho que atenda uma especificação de resposta transitória.
- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de usar as técnicas de resposta de freqüência para projetar um compensador em cascata para atender as especificações de resposta transitória e de erro de estado estacionário.

11.1 Introdução

No Cap. 8, projetamos a resposta transitória de um sistema de controle ajustando o ganho no lugar das raízes. O procedimento de projeto consistiu em obter a especificação da resposta transitória a partir do lugar das raízes, ajustando o ganho de modo adequado, e determinando o erro de estado estacionário resultante. A desvantagem do projeto por intermédio de ajuste de ganho é que se dispõem somente da resposta transitória e do erro de estado estacionário definidos pelos pontos sobre o lugar das raízes.

Para atender as especificações de resposta transitória representadas por pontos que não estejam sobre o lugar das raízes e, de forma independente, os requisitos de erro de estado estacionário, projetamos no Cap. 9 os compensadores em cascata. Neste capítulo, vamos usar os diagramas de Bode para fazer um paralelo com o procedimento do lugar das raízes tratado nos Caps. 8 e 9.

Comecemos estabelecendo algumas comparações gerais entre o lugar das raízes e o projeto de resposta de freqüência.

Projeto de estabilidade e de resposta transitória através do ajuste de ganho: Os métodos de projeto de resposta de freqüência, diferentemente dos métodos que utilizam o lugar das raízes, podem ser implementados convenientemente sem um computador ou outra ferramenta, exceto para testar o projeto. Podemos desenhar facilmente os gráficos de Bode usando aproximações assintóticas e ler o ganho nos diagramas. O lugar das raízes requer a repetição de tentativas para encontrar o ponto de projeto a partir do qual se pode obter o ganho. Por exemplo, ao projetar o ganho para atender um requisito de ultrapassagem percentual, o lugar das raízes necessita investigar o ponto sobre uma reta radial onde a função de transferência a malha aberta leva a um ângulo de 180°. Para calcular a faixa de valores de ganho para estabilidade, o lugar das raízes requer uma investigação sobre o eixo $j\omega$. Naturalmente, se se utiliza um programa de computador, como o MATLAB, desaparece a desvantagem computacional do lugar das raízes.

Projeto da resposta transitória através de compensação em cascata: Os métodos de resposta de freqüência não são tão intuitivos como o lugar das raízes, e existe algo de arte no projeto da compensação em cascata com os métodos deste capítulo. Com o lugar das raízes, podemos identificar um ponto específico como tendo as características de uma resposta transitória desejada. Podemos assim projetar a compensação em cascata para operar nesse ponto e atender as especificações de resposta transitória. No Cap. 10, aprendemos que a margem de fase está relacionada com a ultrapassagem percentual (Eq. (10.73)) e que a banda passante está relacionada com a relação de amortecimento e o tempo de assentamento ou com o instante de pico (Eqs. (10.55) e (10.56)). Estas equações são bastante complicadas. Quando projetamos a compensação em cascata usando métodos de resposta de freqüência para melhorar o desempenho da resposta transitória, tentamos refazer a forma da resposta de freqüência a malha aberta para atender tanto os requisitos de margem de fase (percentual de ultrapassagem) como os requisitos de banda passante (tempo de assentamento ou instante de pico). Não há maneira fácil de relacionar todos os requisitos antes da tarefa de refazer a forma da resposta de freqüência. Portanto, o refazer da resposta de freqüência a malha aberta pode levar a diversas tentativas até que todos os requisitos da resposta transitória sejam atendidos.

Projeto do erro de estado estacionário por intermédio da compensação em cascata: Uma vantagem de se usar as técnicas de resposta de freqüência é a capacidade de se projetar uma compensação derivativa, como a compensação por avanço de fase, para aumentar a velocidade do sistema e ao mesmo tempo fazer uma previsão do erro de estado estacionário desejado que pode ser alcançado com o compensador por avanço de fase. Lembre-se de que, ao usar o lugar das raízes, há uma infinidade de soluções possíveis para o projeto de um compensador por avanço de fase. Uma das diferenças entre essas soluções é o erro de estado estacionário. Devemos fazer numerosas tentativas para chegar à solução que leva ao desempenho requerido quanto ao erro de estado estacionário. Com as técnicas de resposta de freqüência, elaboramos o requisito de erro de estado estacionário diretamente no projeto do compensador por avanço de fase.

Você é estimulado a refletir sobre as vantagens e desvantagens das técnicas de lugar das raízes e de resposta de freqüência à medida que for progredindo ao longo deste capítulo. Vejamos mais de perto o projeto de resposta de freqüência.

Ao projetar por intermédio dos métodos de resposta de freqüência, usamos os conceitos de estabilidade, de resposta transitória e de erro de estado estacionário que aprendemos no Cap. 10. Primeiramente, o critério de Nyquist nos diz como determinar se um sistema é estável. Comumente, um sistema a malha aberta é estável a malha fechada se a magnitude da resposta de freqüência a malha aberta possuir um ganho menor que 0 dB na freqüência onde a fase da resposta de freqüência é 180°. Em segundo lugar, a ultrapassagem percentual é reduzida aumentando-se a margem de fase, e a rapidez da resposta transitória é aumentada com o aumento da banda passante. Finalmente, o erro de estado estacionário é melhorado aumentando-se a magnitude da resposta de freqüência nas freqüências baixas, mesmo se a magnitude nas freqüências altas for atenuada.

Estes são, portanto, os fatos básicos que fundamentam nosso projeto de estabilidade, de resposta transitória e de erro de estado estacionário usando os métodos de resposta de freqüência. Nestes métodos, o critério de Nyquist e o diagrama de Nyquist compõem o fundamento teórico subjacente ao procedimento de projeto. Por conseguinte, embora utilizemos os gráficos de Bode por facilidade na obtenção da resposta de freqüência, o procedimento de projeto pode ser verificado com o diagrama de Nyquist quando surgem questões a respeito da interpretação dos

gráficos de Bode. Em particular, quando a estrutura do sistema é alterada pela adição de pólos e zeros do compensador, o diagrama de Nyquist pode oferecer uma perspectiva valiosa.

A ênfase neste capítulo é dada ao projeto de compensação com atraso de fase, avanço de fase e atraso e avanço de fase. Os conceitos gerais de projeto são apresentados em primeiro lugar, seguidos de procedimentos passo a passo. Estes procedimentos são apenas sugestões; você é estimulado a desenvolver outros procedimentos para alcançar os mesmos objetivos. Embora os conceitos em geral se apliquem ao projeto de controladores PI, PD e PID, em nome da concisão não serão apresentados procedimentos e problemas detalhados. Você é encorajado a extrapolar os conceitos e projetos discutidos e a aplicá-los a problemas envolvendo compensação PI, PD e PID apresentados ao final deste capítulo. Finalmente, os compensadores desenvolvidos neste capítulo podem ser implementados com as realizações discutidas na Seção 9.6.

11.2 Resposta Transitória por Intermédio do Ajuste de Ganho

Comecemos nossa discussão de projeto através de métodos de resposta de freqüência discutindo o vínculo entre margem de fase, resposta transitória e ganho. Na Seção 10.10 deduzimos a relação entre margem de fase e relação de amortecimento (ultrapassagem percentual equivalente) para $G(s) = \omega_n^2/s(s + 2\zeta\omega_n)$. Portanto, se pudermos variar a margem de fase, poderemos variar a ultrapassagem percentual. Observando a Fig. 11.1, vemos que se desejarmos uma margem de fase, Φ_M, representada por CD, teremos que elevar de AB a curva de magnitude. Portanto, pode ser utilizado um simples ajuste de ganho para projetar a margem de fase e, em decorrência disto, a ultrapassagem percentual.

Vamos resumir agora um procedimento por meio do qual podemos determinar o ganho para atender o requisito de ultrapassagem percentual usando a resposta de freqüência a malha aberta e admitindo pólos de segunda ordem a malha aberta dominantes.

Procedimento de Projeto

1. Trace os gráficos de Bode de magnitude e fase com um valor conveniente de ganho.
2. Usando as Eqs. (4.39) e (10.37), determine a margem de fase requerida a partir da ultrapassagem percentual.
3. Determine a freqüência, ω_{Φ_M}, no diagrama de fase de Bode que leva à margem de fase desejada, CD, como mostrado na Fig. 11.1.
4. Mude o ganho de um valor AB para forçar a curva de magnitude a cruzar a linha de 0 dB na freqüência ω_{Φ_M}. O ajuste de ganho constitui o valor que deve ser adicionado para produzir a margem de fase requerida.

Veremos agora um exemplo de como projetar o ganho de um sistema de terceira ordem para uma ultrapassagem percentual.

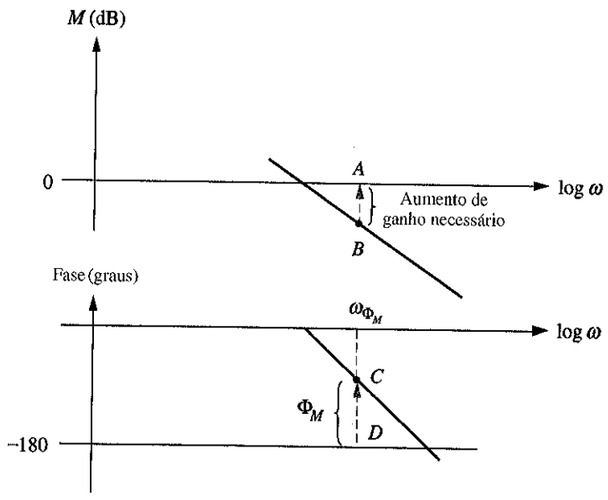


Fig. 11.1 Gráficos de Bode mostrando o ajuste de ganho para uma margem de fase desejada

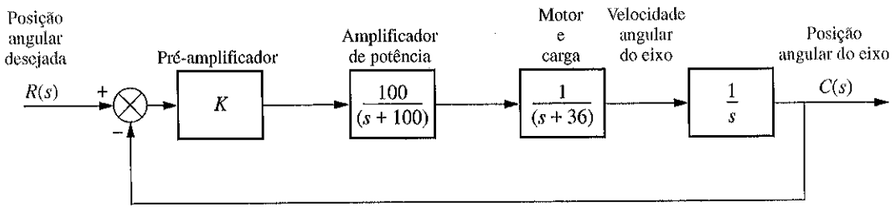
Exemplo 11.1

Projeto

Projeto de resposta transitória por meio do ajuste de ganho

Problema Para o sistema de controle de posição mostrado na Fig. 11.2, determinar o valor do ganho do pré-amplificador, K, para que a resposta transitória a uma entrada em degrau apresente uma ultrapassagem de 9,5%. Use somente os métodos de resposta de freqüência.

Fig. 11.2 Sistema para o Exemplo 11.1



Solução Seguiremos agora o procedimento de projeto de ajuste de ganho descrito anteriormente.

1. Escolha $K = 3{,}6$ para iniciar o diagrama de magnitude em 0 dB para $\omega = 0{,}1$ na Fig. 11.3.
2. Usando a Eq. (4.39), uma ultrapassagem percentual de 9,5% implica $\zeta = 0{,}6$ para os pólos a malha fechada dominantes. A Eq. (10.73) leva a uma margem de fase de 59,2° para uma relação de amortecimento de 0,6.
3. Assinale no diagrama de fase a freqüência que leva a uma margem de fase de 59,2°. Esta freqüência é obtida no ponto onde o ângulo de fase é a diferença entre −180° e 59,2°, ou seja −120,8°. O valor da freqüência da margem de fase é 14,8 rad/s.
4. Na freqüência 14,8 rad/s no diagrama de magnitude, o valor do ganho é −44,2 dB. Esta magnitude deve ser aumentada para 0 dB para produzir a margem de fase requerida. Como o gráfico de magnitude logarítmica foi traçado para $K = 3{,}6$, seria necessário um aumento de 44,2 dB, ou seja, $K = 3{,}6 \times 162{,}2 = 583{,}9$ para obter a margem de fase requerida com 9,48% de ultrapassagem.

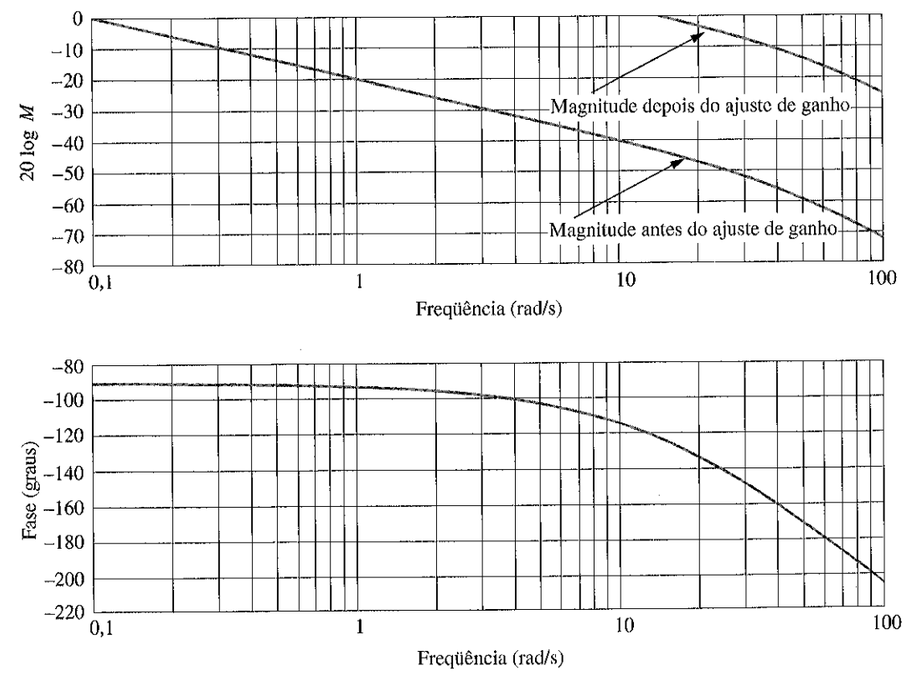


Fig. 11.3 Gráficos de Bode de magnitude e fase para o Exemplo 11.1

A função de transferência a malha aberta com o ganho ajustado é

$$G(s) = \frac{58.390}{s(s+36)(s+100)} \tag{11.1}$$

A Tabela 11.1 resume os dados de uma simulação em computador do sistema compensado no ganho.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap11p1 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um valor de ganho que atenda uma especificação de ultrapassagem percentual utilizando os diagramas de Bode. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 11.1.

Tabela 11.1 Características do sistema compensado por ajuste de ganho do Exemplo 11.1

Parâmetro	Especificação Proposta	Valor Real
K_v	—	16,22
Margem de fase	59,2°	59,2°
Freqüência de margem de fase	—	14,8 rad/s
Ultrapassagem percentual	9,5	10
Instante de pico	—	0,18 s

Exercício de Avaliação 11.1

Problema: Para o sistema com retroação unitária com função de transferência à frente

$$G(s) = \frac{K}{s(s+50)(s+120)}$$

use as técnicas de resposta de freqüência para obter o valor do ganho, K, que leva a uma resposta ao degrau unitário com 20% de ultrapassagem.

Resposta: $K = 194.200$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção fizemos um paralelo do trabalho no Cap. 8 com uma discussão do projeto da resposta transitória através do ajuste de ganho. Nas três próximas seções faremos um paralelo com o projeto de compensadores por meio do lugar das raízes tratado no Cap. 9 e discutiremos o projeto de compensação por atraso de fase, por avanço de fase e por atraso e avanço de fase por intermédio dos diagramas de Bode.

11.3 Compensação por Atraso de Fase

No Cap. 9 usamos o lugar das raízes para projetar estruturas por atraso de fase e controladores PI. Lembre-se de que esses compensadores nos permitiram projetar o erro de estado estacionário sem afetar a resposta transitória de forma significativa. Nesta seção faremos um desenvolvimento paralelo usando os diagramas de Bode.

Visualizando a Compensação por Atraso de Fase

A função do compensador por atraso de fase como visto nos diagramas de Bode é (1) melhorar a constante de erro estático aumentando somente o ganho nas baixas freqüências sem que resulte em instabilidade, e (2) aumentar a margem de fase que leve a uma resposta transitória desejada. *Estes conceitos estão ilustrados* na Fig. 11.4.

O sistema não-compensado é instável desde que o ganho em 180° seja maior que 0 dB. O compensador por atraso de fase, ao mesmo tempo que não altera o ganho nas baixas freqüências, reduz o ganho nas altas freqüências.[1] Portanto, podemos fazer com que o ganho em baixas freqüências seja elevado para se obter um valor grande de K_v sem criar instabilidade. Este efeito estabilizante da estrutura de atraso de fase ocorre porque o ganho na fase de

[1]O nome *compensador por atraso de fase* vem do fato de que a resposta típica do ângulo de fase do compensador, como mostrada na Fig. 11.4, é sempre negativa, ou seja, *atrasada* em ângulo de fase.

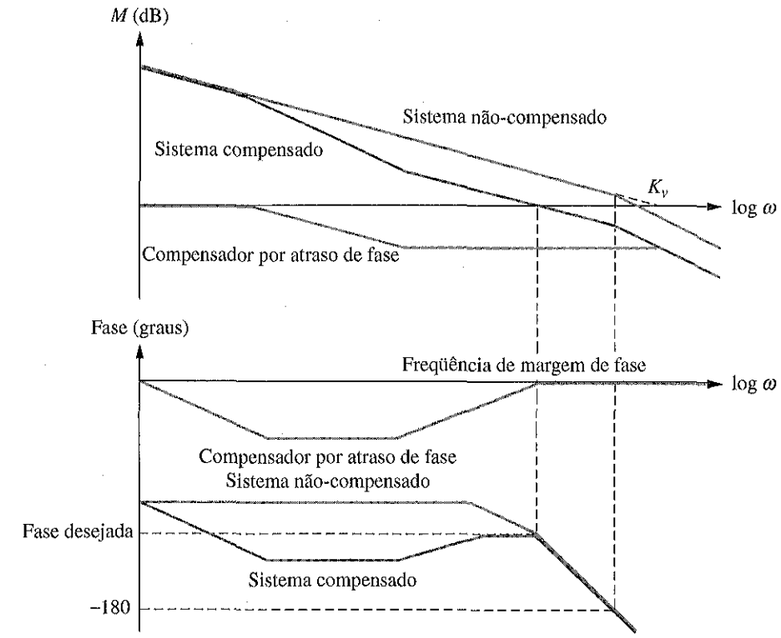


Fig. 11.4 Visualizando a compensação por atraso de fase

180° está reduzido abaixo de 0 dB. Através de um projeto cuidadoso, pode-se alterar a forma da curva de magnitude, como mostrado na Fig. 11.4, para que cruze a linha de 0 dB com a margem de fase desejada. Portanto, é possível atender ambas as especificações desejadas para K_v e para a resposta transitória. Vamos enumerar agora um procedimento de projeto.

Procedimento de Projeto

1. Ajuste o ganho, K, ao valor que satisfaça a especificação de erro de estado estacionário e trace os diagramas de Bode de magnitude e fase com este valor de ganho.
2. Determine a freqüência onde a margem de fase seja superior de 5° a 12° à margem de fase que leva à resposta transitória desejada (Ogata, 1990). Esta margem compensa o fato de que a fase do controlador por atraso de fase pode contribuir em algum lugar com uma fase de −5° a −12° na freqüência de margem de fase.
3. Selecione um compensador por atraso de fase cuja resposta em magnitude leve a um diagrama de magnitude de Bode composto que cruze a linha de 0 dB na freqüência obtida na etapa 2, como se segue: Desenhe a assíntota de altas freqüências para interceptar 0 dB na freqüência encontrada na etapa 2; selecione a freqüência de corte superior uma década abaixo da freqüência encontrada na etapa 2;[2] selecione a assíntota de baixas freqüências em 0 dB; conecte as assíntotas de altas e de baixas freqüências do compensador com uma reta de −20 dB/década para posicionar a freqüência de corte inferior.
4. Restabeleça o ganho do sistema, K, para compensar alguma atenuação da estrutura de atraso de fase mantendo a constante de erro estático com o mesmo valor obtido na etapa 1.

Com base nestes passos, você percebe que estamos contando com o ajuste de ganho inicial para atender os requisitos de estado estacionário e, em seguida, contando com a inclinação de −20 dB/década do compensador por atraso de fase para atender o requisito da resposta transitória ajustando o ponto de cruzamento de zero dB pela curva de magnitude.

A função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}} \tag{11.2}$$

onde $\alpha > 1$.

[2]Este valor de freqüência de corte assegura que haverá somente de −5° a −12° de contribuição de fase do compensador na freqüência encontrada na etapa 2.

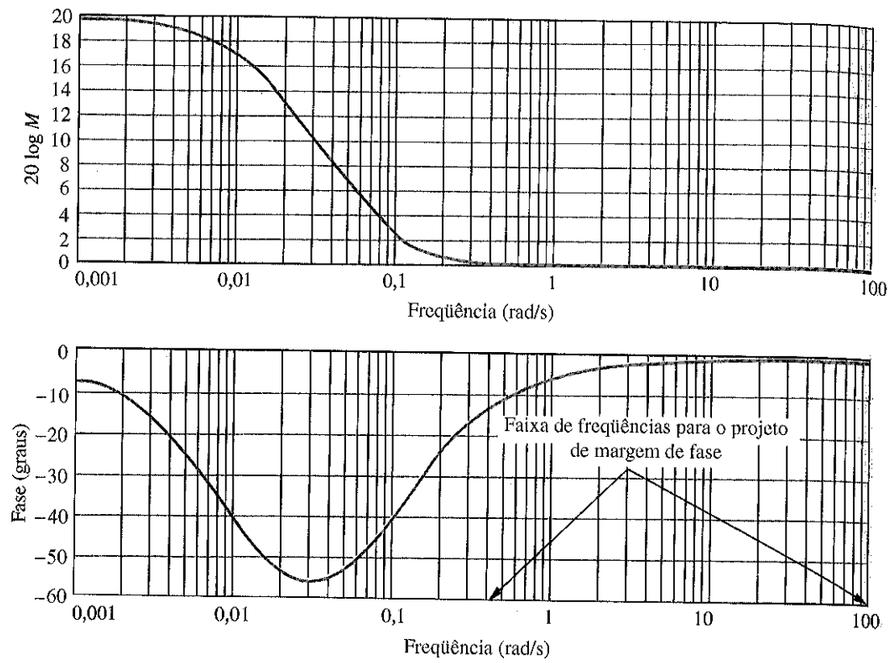


Fig. 11.5 Gráficos de resposta de freqüência de um compensador por atraso de fase, $G_c(s) = (s + 0,1)/(s + 0,01)$

A Fig. 11.5 mostra as curvas de resposta de freqüência do compensador por atraso de fase. A faixa de altas freqüências mostrada no gráfico de fase é onde projetaremos nossa margem de fase. Esta região está situada depois da segunda freqüência de corte do compensador por atraso de fase, onde contamos com as características de atenuação da estrutura de atraso de fase para reduzir o ganho de malha aberta total à unidade na freqüência de margem de fase. Além disso, nesta região, a resposta de fase do compensador terá um efeito mínimo sobre a margem de fase. Como ainda há algum efeito, aproximadamente de 5° a 12°, adicionaremos este valor à nossa margem de fase para compensar a resposta de fase do compensador (ver etapa 2).

Exemplo 11.2

Projeto

Projeto de compensação por atraso de fase

Problema Dado o sistema da Fig. 11.2, use os diagramas de Bode para projetar um compensador por atraso de fase que leve a uma melhoria de dez vezes no erro de estado estacionário em comparação com o sistema compensado por ajuste de ganho, mantendo a ultrapassagem em 9,5%.

Solução Seguiremos o procedimento de projeto de compensação por atraso de fase descrito anteriormente.

1. Com base no Exemplo 11.1, um ganho, K, de 583,9 leva a uma ultrapassagem percentual de 9,5%. Portanto, para este sistema, $K_v = 16,22$. Para uma melhoria de dez vezes no erro de estado estacionário, K_v deve ser multiplicado por 10, ou seja, $K_v = 162,2$. Por conseguinte, o valor de K na Fig. 11.2 é igual a 5839 e a função de transferência a malha aberta é

$$G(s) = \frac{583.900}{s(s + 36)(s + 100)} \tag{11.3}$$

Os diagramas de Bode para $K = 5839$ estão mostrados na Fig. 11.6.

2. A margem de fase necessária para uma ultrapassagem de 9,5% ($\zeta = 0,6$) é obtida com base na Eq. (10.73) e é 59,2°. Aumentamos este valor de margem de fase em 10° para 69,2° a fim de compensar a contribuição angular do compensador por atraso de fase. Determinamos agora a freqüência onde a margem de fase é de 69,2°. Esta freqüência ocorre em um ângulo de fase de $-180° + 69,2° = -110,8°$ e é 9,8 rad/s. Nesta freqüência, o gráfico de magnitude deve cruzar a linha de 0 dB. A magnitude em 9,8 rad/s é agora +24 dB (valor exato, isto é, não-assintótico). Portanto, o compensador por atraso de fase deve fornecer −24 dB de atenuação em 9,8 rad/s.

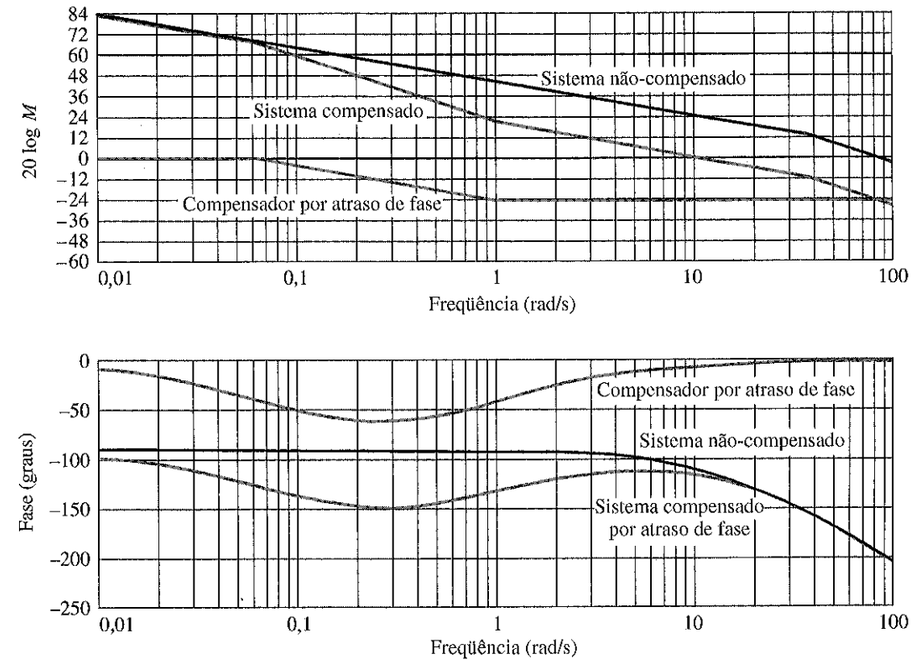


Fig. 11.6 Gráficos de Bode para o Exemplo 11.2

3. & 4. Projetamos agora o compensador. Primeiramente desenhe a assíntota de altas freqüências em −24 dB. Selecione arbitrariamente a maior freqüência de corte situando-a cerca de uma década abaixo da freqüência de margem de fase, ou seja, 0,98 rad/s. Começando na interseção desta freqüência com a assíntota de altas freqüências do compensador por atraso de fase, trace uma reta de −20 dB/década até alcançar a linha de 0 dB. O compensador deve ter um ganho estático unitário para manter o valor de K_v já projetado fazendo-se $K = 5839$. A freqüência de corte mais baixa é obtida com o valor de 0,062 rad/s. Por conseguinte, a função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{0,063(s + 0,98)}{(s + 0,062)} \tag{11.4}$$

onde o ganho do compensador é 0,063 de modo a gerar um ganho estático unitário.

A função de transferência do percurso à frente do sistema compensado é

$$G(s)G_c(s) = \frac{36.786(s + 0,98)}{s(s + 36)(s + 100)(s + 0,062)} \tag{11.5}$$

As características do sistema compensado, obtidas de simulação e dos gráficos exatos de resposta de freqüência, são resumidas na Tabela 11.2.

Tabela 11.2 Características do sistema compensado por ajuste de fase do Exemplo 11.2

Parâmetro	Especificação Proposta	Valor Real
K_v	162,2	161,5
Margem de fase	59,2°	62°
Freqüência de margem de fase	—	11 rad/s
Ultrapassagem percentual	9,5	10
Instante de pico	—	0,25 s

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap11p2 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um compensador por atraso de fase. Você entrará, através do teclado, com o valor de ganho para atender os requisitos de erro de estado estacionário bem como de ultrapassagem percentual desejada. O MATLAB projetará, então, um compensador por atraso de fase usando os gráficos de Bode, calculará K_v e produzirá a resposta a malha fechada para uma entrada em degrau. Este exercício resolve o Exemplo 11.2 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 11.2

Problema: Projetar um compensador por atraso de fase para o sistema do Exercício de Avaliação 11.1 que reduza o erro de estado estacionário em dez vezes, mantendo-o em operação com uma ultrapassagem de 20%.

Resposta: $G_{\text{atraso}}(s) = \dfrac{0{,}0691(s + 2{,}04)}{(s + 0{,}141)}$; $G(s) = \dfrac{1.942.000}{s(s + 50)(s + 120)}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção mostramos como projetar um compensador por atraso de fase para melhorar o erro de estado estacionário mantendo, no entanto, a resposta transitória relativamente inalterada. Vamos discutir a seguir como melhorar a resposta transitória usando métodos de resposta de freqüência.

11.4 Compensação por Avanço de Fase

Para os sistemas de segunda ordem, deduzimos a relação entre margem de fase e ultrapassagem percentual bem como a relação entre banda passante a malha fechada e outras características no domínio do tempo, como tempo de assentamento, instante de pico e tempo de subida. Ao projetar a estrutura de atraso de fase para melhorar o erro de estado estacionário, desejamos um mínimo efeito sobre o diagrama de fase de modo a tornar imperceptíveis as alterações na resposta transitória. Contudo, ao projetar compensadores por avanço de fase por intermédio dos gráficos de Bode, desejamos alterar o diagrama de fase, aumentando a margem de fase para reduzir a ultrapassagem percentual e aumentando o ganho de cruzamento para obter uma resposta transitória mais rápida.

Visualizando a Compensação por Avanço de Fase

O compensador por avanço de fase aumenta a banda passante através do aumento da freqüência de cruzamento. Ao mesmo tempo, o diagrama de fase é elevado nas freqüências mais altas. Disto resultam valores maiores de margem de fase e de freqüência de margem de fase. No domínio do tempo, os resultados são ultrapassagens percentuais menores (margens de fases maiores) com instantes de pico menores (freqüências de margens de fase maiores). Os conceitos estão mostrados na Fig. 11.7.

O sistema não-compensado apresenta uma pequena margem de fase (B) e uma freqüência de margem de fase baixa (A). Usando um compensador por avanço de fase, o gráfico de fase (do sistema compensado) sobe nas freqüências mais altas.[3] Simultaneamente, no gráfico de magnitude, o valor da freqüência de cruzamento de ganho aumenta de A rad/s para C rad/s. Estes efeitos levam a uma margem de fase maior (D), a uma freqüência de margem de fase maior (C) e a uma banda passante maior.

Uma vantagem da técnica de resposta de freqüência com relação ao lugar das raízes é que podemos implementar um requisito de erro de estado estacionário e depois projetar a resposta transitória. Esta especificação de resposta transitória com a restrição de erro de estado estacionário é mais fácil de implementar com a técnica de resposta de freqüência que com a técnica do lugar das raízes. Observe que a inclinação inicial, que determina o erro de estado estacionário, não é afetada pelo projeto da resposta transitória.

Resposta de Freqüência do Compensador por Avanço de Fase

Vejamos primeiro as características de resposta de freqüência de uma estrutura de avanço de fase e deduzamos algumas relações valiosas que nos auxiliarão no procedimento de projeto. A Fig. 11.8 mostra gráficos da estrutura de avanço de fase

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta}\frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\beta T}} \tag{11.6}$$

[3]O nome *compensador por avanço de fase* vem do fato de que a resposta típica do ângulo de fase do compensador, como mostrada na Fig. 11.7, é sempre positiva, ou seja, *avançada* em ângulo de fase.

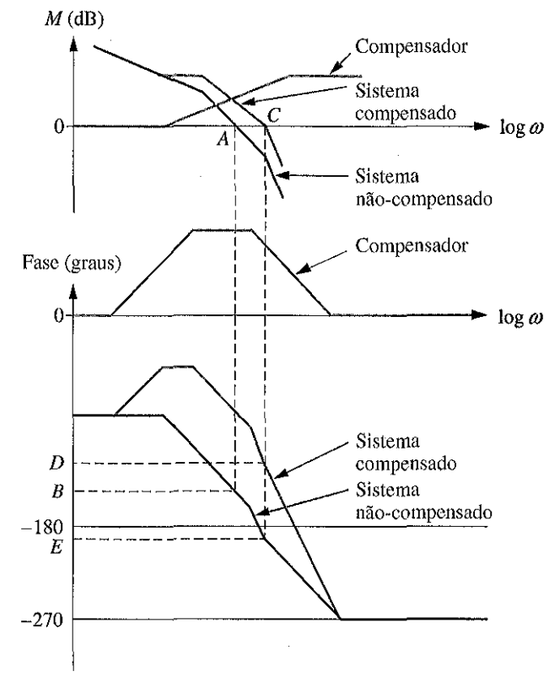


Fig. 11.7 Visualizando a compensação por avanço de fase

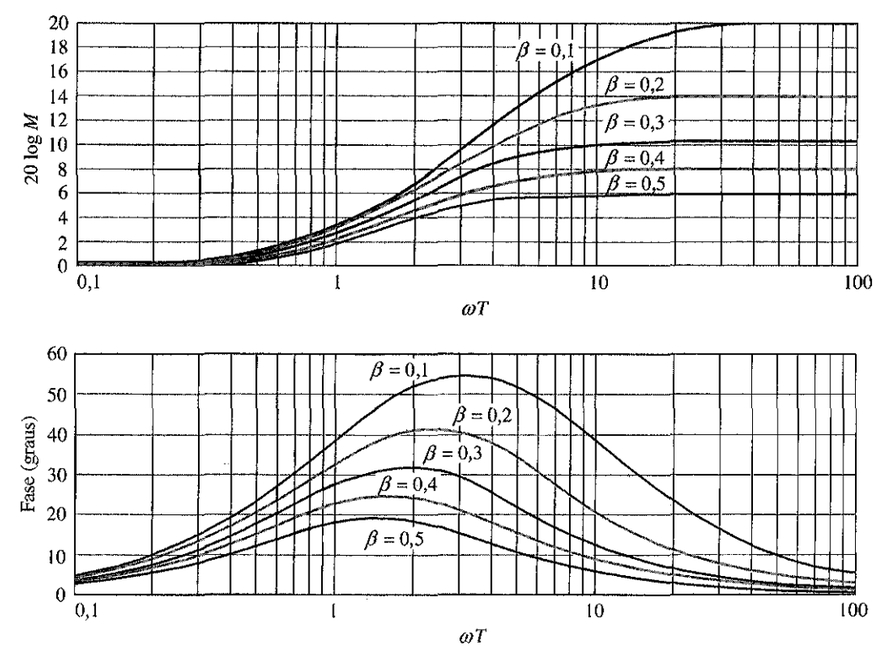


Fig. 11.8 Resposta de freqüência de um compensador por avanço de fase, $G_c(s) = [1/\beta][(s + 1/T)/(s + 1/\beta T)]$

para diversos valores de β, onde $\beta < 1$. Observe que os picos da curva de fase diferem quanto a valor máximo do ângulo e quanto a valor de freqüência onde ocorre o máximo. O ganho estático do compensador é feito unitário com o coeficiente $1/\beta$, de modo a não alterar o ganho estático projetado para a constante de erro estático ao inserir o compensador no sistema.

Para projetar um compensador por avanço de fase e alterar os valores de margem de fase e de freqüência de margem de fase, é útil dispor de uma expressão analítica para os valores máximos de fase e de freqüência na qual ocorre o valor máximo de fase, como mostrado na Fig. 11.8.

Com base na Eq. (11.6), o ângulo de fase do compensador por avanço de fase, Φ_c, é

$$\phi_c = \text{tg}^{-1}\,\omega T - \text{tg}^{-1}\,\omega\beta T \tag{11.7}$$

Derivando com relação a ω, obtemos

$$\frac{d\phi_c}{d\omega} = \frac{T}{1+(\omega T)^2} - \frac{\beta T}{1+(\omega\beta T)^2} \tag{11.8}$$

Fazendo a Eq. (11.8) igual a zero, descobre-se que a freqüência $\omega_{\text{máx}}$, onde ocorre o ângulo de fase máximo, $\Phi_{\text{máx}}$, é

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \tag{11.9}$$

Substituindo a Eq. (11.9) na Eq. (11.6) com $s = j\omega_{\text{máx}}$,

$$G_c(j\omega_{\text{máx}}) = \frac{1}{\beta}\frac{j\omega_{\text{máx}} + \dfrac{1}{T}}{j\omega_{\text{máx}} + \dfrac{1}{\beta T}} = \frac{j\dfrac{1}{\sqrt{\beta}} + 1}{j\sqrt{\beta} + 1} \tag{11.10}$$

Fazendo uso da expressão $\text{tg}(\phi_1 - \phi_2) = (\text{tg}\ \phi_1 - \text{tg}\ \phi_2)/(1 + \text{tg}(\phi_1) \times \text{tg}\ \phi_2)$, a máxima defasagem do compensador, $\phi_{\text{máx}}$, é

$$\phi_{\text{máx}} = \text{tg}^{-1}\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}} = \text{sen}^{-1}\frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{11.11}$$

e a magnitude do compensador em $\omega_{\text{máx}}$ é

$$|G_c(j\omega_{\text{máx}})| = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tag{11.12}$$

Estamos prontos agora para enumerar um procedimento de projeto.

Procedimento de Projeto

1. Determine a banda passante a malha fechada necessária para atender o requisito de tempo de assentamento, de instante de pico, ou de tempo de subida (ver as Eqs. (10.54) a (10.56)).
2. Como o compensador por avanço de fase apresenta efeito insignificante nas baixas freqüências, ajuste o ganho, K, do sistema não-compensado com o valor que satisfaz o requisito de erro de estado estacionário.
3. Trace os diagramas de Bode de magnitude e de fase para este valor de ganho e determine a margem de fase do sistema não-compensado.
4. Determine a margem de fase para atender o requisito de relação de amortecimento ou de ultrapassagem percentual. Calcule, então, a contribuição adicional de fase requerida do compensador.[4]
5. Determine o valor de β (ver Eqs. (11.6) e (11.1)) com base na contribuição requerida do compensador por avanço de fase.
6. Determine a magnitude do compensador no pico da curva de fase (Eq. (11.12)).
7. Determine a nova freqüência de margem de fase identificando onde a magnitude do sistema não-compensado é o negativo da magnitude do compensador que corresponde ao pico da curva de fase.
8. Projete as freqüências de corte do compensador por avanço de fase, usando as Eqs. (11.6) e (11.9) para obter T e as freqüências de corte.
9. Reajuste o ganho do sistema para compensar o ganho do compensador por avanço de fase.
10. Verifique a banda passante para certificar-se de que o requisito de velocidade do passo 1 foi atendido.
11. Simule o sistema resultante para certificar-se de que todos os requisitos foram atendidos.
12. Refaça o projeto, se necessário, para atender os requisitos.

Com base nestes passos, vemos que estamos aumentando ao mesmo tempo a margem de fase (melhorando a ultrapassagem percentual) e a freqüência de cruzamento de ganho (aumentando a velocidade). Agora que enumeramos um procedimento com o qual podemos projetar um compensador por avanço de fase para melhorar a resposta transitória, façamos uma demonstração.

[4]Sabemos que a freqüência de margem de fase aumentará depois da inserção do compensador. Nesta nova freqüência, a fase do sistema será menor do que a estimada originalmente, como se vê comparando os pontos B e E na Fig. 11.7. Por conseguinte, deve ser adicionada uma fase àquela fornecida pelo compensador para corrigir a redução de fase causada pelo sistema original.

Exemplo 11.3

Projeto

Projeto de compensação por avanço de fase

Problema Dado o sistema da Fig. 11.2, projetar um compensador por avanço de fase que leve a uma ultrapassagem percentual de 20% e a $K_v = 40$, com um instante de pico de 0,1 s.

Solução O sistema não-compensado é $G(s) = 100K/[s(s+36)(s+100)]$. Seguiremos o procedimento estabelecido anteriormente.

1. Observamos, primeiro, a banda passante a malha fechada necessária para atender o requisito de velocidade imposto através de $T_p = 0{,}1$ s. Com base na Eq. (10.56), com $T_p = 0{,}1$ s e $\zeta = 0{,}456$ (isto é, 20 % de ultrapassagem), é necessária uma banda passante de 46,6 rad/s.
2. A fim de atender a especificação $K_v = 40$, K deve ser ajustado em 1440, resultando $G(s) = 144.000/[s(s+36)(s+100)]$.
3. Os gráficos de resposta de freqüência do sistema não-compensado para $K = 1440$ estão mostrados na Fig. 11.9.
4. Uma ultrapassagem de 20% torna necessária uma margem de fase de 48,1°. O sistema não-compensado com $K = 1440$ apresenta uma margem de fase de 33,9° em uma freqüência de margem de fase de 29,7 rad/s.[5] Para aumentar a margem de fase, inserimos uma estrutura de avanço de fase que adicione fase suficiente para levar a uma margem de fase de 48,1°. Como sabemos que a estrutura de avanço de fase também aumentará a freqüência de margem de fase, incluímos uma parcela de correção para compensar o ângulo de fase menor do sistema não-compensado nessa freqüência de margem de fase superior. Como não conhecemos a freqüência de margem de fase superior, admitimos uma parcela de correção de 10°. Portanto, a contribuição de fase total requerida do compensador é 48,1° −33,9° + 10° = 24,2°. Em resumo, nosso sistema compensado deve ter uma margem de fase de 48,1° com uma banda passante de 46,6 rad/s. Se, após o projeto, as características do sistema não forem aceitáveis, torna-se necessário um novo projeto com uma parcela de correção diferente.
5. Usando a Eq. (11.11), $\beta = 0{,}42$ para $\phi_{\text{máx}} = 24{,}2°$.
6. Com base na Eq. (11.12), a magnitude do compensador é 3,77 dB em $\omega_{\text{máx}}$.
7. Se escolhermos $\omega_{\text{máx}}$ para ser a nova freqüência de margem de fase, a magnitude do sistema não-compensado nesta freqüência deve ser −3,77 dB para produzir um cruzamento de 0 dB na freqüência $\omega_{\text{máx}}$ do sistema compensado. O sistema não-compensado passa em −3,77 dB em $\omega_{\text{máx}} = 39$ rad/s. Esta freqüência é, portanto, a nova freqüência de margem de fase.
8. Determinamos agora as freqüências de corte do compensador. Com base na Eq. (11.9), $1/T = 25{,}3$ e $1/\beta T = 60{,}2$.
9. Por conseguinte, o compensador é dado por

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta}\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}} = 2{,}38\frac{s+25{,}3}{s+60{,}2} \tag{11.13}$$

onde se torna necessário um ganho de 2,38 para manter unitário o valor do ganho estático do compensador de modo que $K_v = 40$ após a inserção do compensador.

A função de transferência a malha aberta final do sistema compensado é então

$$G_c(s)G(s) = \frac{342.700(s+25{,}3)}{s(s+36)(s+100)(s+60{,}2)} \tag{11.14}$$

10. Com base na Fig. 11.9, o valor da magnitude a malha aberta do compensador por avanço de fase em 85 rad/s é de aproximadamente −7 dB. Portanto, estimamos que a banda passante a malha fechada seja de 85 rad/s. Como este valor excede o requisito de 46,6 rad/s, admitimos que a especificação de instante de pico seja atendida. Esta conclusão a respeito do instante de pico é baseada em uma aproximação assintótica de segunda ordem que será verificada através de simulação.
11. A Fig. 11.9 resume o projeto e mostra o efeito da compensação. Os resultados finais, obtidos a partir de simulação, e a resposta de freqüência real (não-assintótica) estão mostrados na Tabela 11.3. Observe o aumento na margem de fase, a freqüência de margem de fase e a banda passante a malha fechada depois que o compensador foi adicionado ao sistema com ganho ajustado. Os requisitos de instante de pico e de erro de estado estacionário foram atendidos, embora a margem de fase seja menor que a proposta e a ultrapassagem percentual seja superior em 1% ao valor proposto. Finalmente, se o desempenho não for aceitável, será necessário um novo projeto.

[5]Usando as curvas exatas da resposta de freqüência (e não as assíntotas).

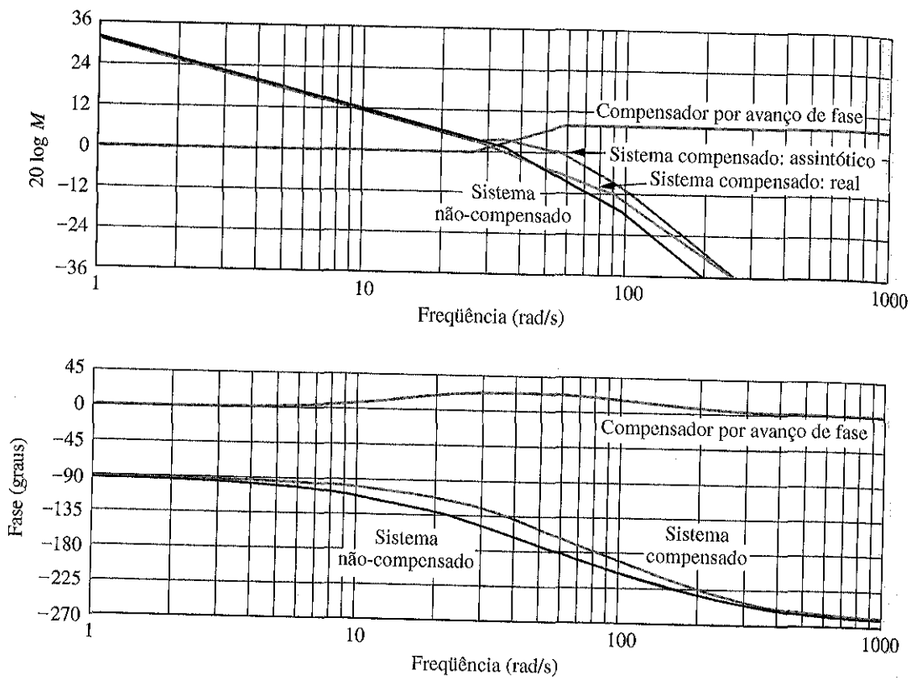


Fig. 11.9 Gráficos de Bode para a compensação por avanço de fase no Exemplo 11.3

Tabela 11.3 Características do sistema compensado por avanço de fase do Exemplo 11.3

Parâmetro	Especificação Proposta	Valor Real da Compensação por Ajuste de Ganho	Valor Real da Compensação por Avanço
K_v	40	40	40
Margem de fase	48,1°	33,9°	45,5°
Freqüência de margem de fase	—	29,7 rad/s	39 rad/s
Banda passante a malha fechada	46,6 rad/s	50 rad/s	68,8 rad/s
Ultrapassagem percentual	20	40	21
Instante de pico	0,1 s	0,1 s	0,075 s

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap11p3 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um compensador por avanço de fase. Você entrará com os valores desejados de ultrapassagem percentual, de instante de pico e de K_v. O MATLAB projeta, então, um compensador por avanço de fase usando os diagramas de Bode, calcula K_v e gera a resposta ao degrau do sistema a malha fechada. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 11.3.

Exercício de Avaliação 11.3

Problema: Projetar um compensador por avanço de fase para o sistema do Exercício de Avaliação 11.1 para atender as seguintes especificações: $\%UP = 20\%$, $T_s = 0{,}2$ s e $K_v = 50$.

Resposta: $G_{\text{avanço}}(s) = \dfrac{2{,}27(s + 33{,}2)}{(s + 75{,}4)}$; $G(s) = \dfrac{300.000}{s(s + 50)(s + 120)}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Tenha em mente que os exemplos anteriores foram projetos para sistemas de terceira ordem e devem ser simulados para assegurar os resultados transitórios desejados. Na próxima seção veremos a compensação por atraso e avanço de fase visando melhorar o erro de estado estacionário e a resposta transitória.

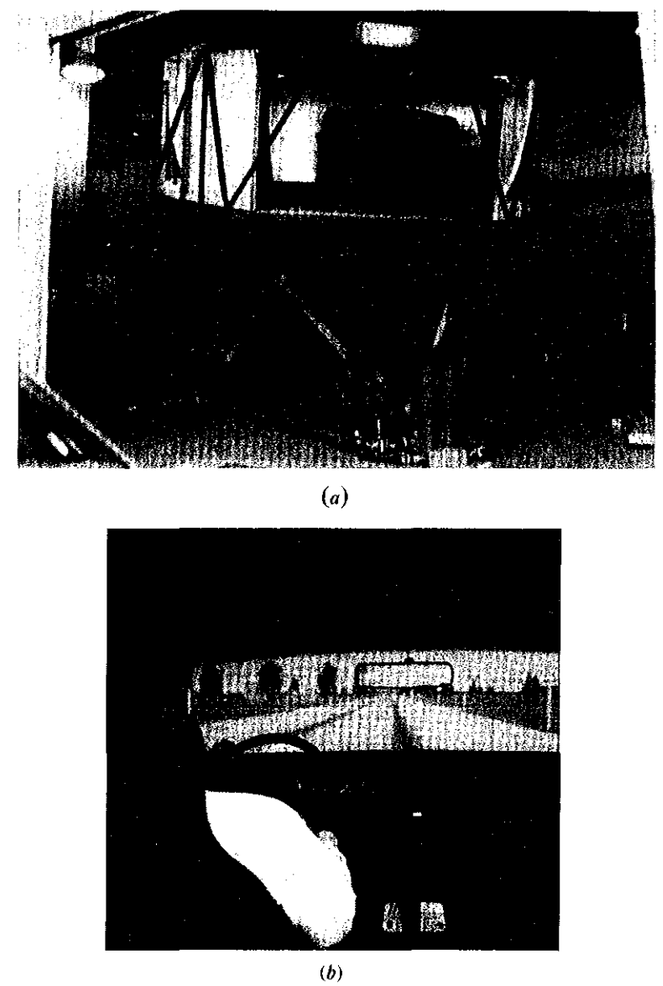
11.5 Compensação por Atraso e Avanço de Fase

Na Seção 9.4, projetamos a compensação por atraso e avanço de fase para melhorar a resposta transitória e o erro de estado estacionário usando o lugar das raízes. A Fig. 11.10 é um exemplo de sistema ao qual se pode aplicar a compensação por atraso e avanço de fase. Nesta seção repetimos o projeto, usando as técnicas de resposta de freqüência. Um método consiste em projetar um compensador por atraso de fase para reduzir o ganho nas altas freqüências, estabilizar o sistema e melhorar o erro de estado estacionário e em seguida projetar um compensador por avanço de fase para atender os requisitos de margem de fase. Vejamos um outro método.

A Seção 9.6 descreve uma estrutura de atraso e avanço de fase que pode ser usada no lugar de estruturas individuais de atraso e de avanço de fase. É mais econômico utilizar uma única estrutura passiva para executar ambas as tarefas, uma vez que o amplificador que separa as estruturas de atraso e de avanço de fase pode ser eliminado. Nesta seção, enfatizamos o projeto por atraso e avanço de fase, usando uma única estrutura passiva de atraso e avanço de fase.

A função de transferência de uma estrutura passiva única de atraso e de avanço de fase é

$$G_c(s) = G_{\text{avanço}}(s)\,G_{\text{atraso}}(s) = \left(\frac{s + \dfrac{1}{T_1}}{s + \dfrac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \dfrac{1}{T_2}}{s + \dfrac{1}{\gamma T_2}}\right) \tag{11.15}$$



(*a*)

(*b*)

Fig. 11.10 a. O Simulador de Direção de Iowa; **b.** teste de direção em simulador com imagens realistas

onde $\gamma > 1$. O primeiro termo entre parênteses produz a compensação por avanço de fase e o segundo termo entre parênteses, a compensação por atraso de fase. A restrição que deve ser observada aqui é que um único parâmetro γ substitui os parâmetros α da estrutura de atraso de fase na Eq. (11.2) e β da estrutura de avanço de fase na Eq. (11.6). Em nosso projeto, α e β devem ser o inverso um do outro. Um exemplo da resposta de freqüência da estrutura de atraso e avanço de fase passiva está mostrado na Fig. 11.11.

Estamos agora prontos para enumerar um procedimento de projeto.

Procedimento de Projeto

1. Usando uma aproximação de segunda ordem, obter a banda passante a malha fechada necessária para atender o requisito de tempo de assentamento, de instante de pico, ou de tempo de subida (ver as Eqs. (10.55) a (10.56)).
2. Ajuste o ganho, K, para a especificação de erro de estado estacionário requerido.
3. Trace os diagramas de Bode de magnitude e de fase para este valor de ganho.
4. Usando uma aproximação de segunda ordem, calcule a margem de fase para atender a relação de amortecimento ou o requisito de ultrapassagem percentual usando a Eq. (10.73).
5. Selecione uma nova freqüência de margem de fase próxima de ω_{BW}.
6. Na nova freqüência de margem de fase, determine o valor adicional do avanço de fase necessário para atender o requisito de margem de fase. Acrescente uma pequena contribuição angular que será necessária depois da inclusão do compensador por atraso de fase.
7. Projete o compensador por atraso de fase escolhendo a freqüência de corte superior uma década abaixo da nova freqüência de margem de fase. O projeto do compensador por atraso de fase não é crítico, e a tarefa de obter a margem de fase adequada será deixada ao compensador por avanço de fase. O compensador por atraso de fase simplesmente propicia a estabilização do sistema com o ganho requerido pela especificação de erro de estado estacionário. Obtenha o valor de γ a partir dos requisitos do compensador por avanço de fase. Usando a fase requerida do compensador de avanço de fase, pode-se utilizar a curva de resposta de fase da Fig. 11.8 para obter o valor de $\gamma = 1/\beta$. Este valor, juntamente com a freqüência de corte superior encontrada anteriormente, permite encontrar a freqüência de corte inferior do atraso de fase.
8. Projete o compensador por avanço de fase. Usando o valor de γ do projeto de atraso de fase e o valor admitido da nova freqüência de margem de fase, obtenha as freqüências de corte inferior e superior do compensador por avanço de fase, empregando a Eq. (11.9) e calculando T.
9. Verifique a banda passante para ter certeza de que o requisito de velocidade do passo 1 foi atendido.
10. Refaça o projeto se as especificações de margem de fase ou de regime transitório não forem atendidas, como mostrado através de análise ou de simulação.

Demonstremos o procedimento por meio de um exemplo.

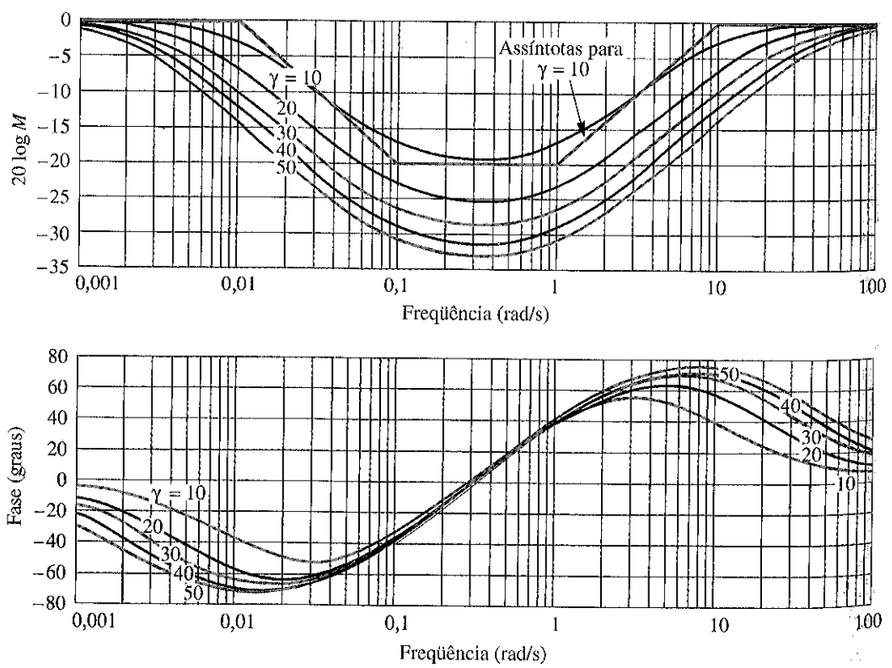


Fig. 11.11 Exemplos de curvas de resposta de freqüência para o compensador por atraso e avanço de fase, $G_c = [(s + 1)(s + 0{,}01)]/[(s + \gamma)(s + 0{,}1/\gamma)]$

Exemplo 11.4

Projeto de compensação por atraso e avanço de fase

Problema Dado o sistema com retroação unitária onde $G(s) = K/[s(s+1)(s+4)]$, projetar um compensador por atraso e avanço de fase passivo usando diagramas de Bode que leve a uma ultrapassagem percentual de 13,25%, a um instante de pico de 2 s e a $K_v = 12$.

Solução Seguiremos o procedimento estabelecido anteriormente nesta seção para o projeto de atraso e avanço de fase.

1. A banda passante necessária para atender o requisito de 2 s como instante de pico é 2,29 rad/s.
2. A fim de atender a especificação de erro de estado estacionário, $K_v = 12$, o valor de K é 48.
3. Os gráficos de Bode do sistema não-compensado para $K = 48$ estão mostrados na Fig. 11.12. Podemos ver que o sistema é instável.
4. A margem de fase necessária para uma ultrapassagem de 13,25% é de 55°.
5. Selecionemos $\omega = 1{,}8$ rad/s como nova freqüência de margem de fase.
6. Nesta freqüência, a fase não-compensada é $-175°$ e necessitaria, se fosse adicionada uma contribuição de $-5°$ do compensador por atraso de fase, de uma contribuição de 55° da parte de avanço de fase do compensador.
7. O projeto do compensador por atraso de fase vem a seguir. O projeto por atraso de fase permite manter o ganho de 48 necessário para $K_v = 12$ e não ter de reduzir o ganho para estabilizar o sistema. Quando o compensador por atraso de fase estabiliza o sistema, os parâmetros de projeto não são críticos, uma vez que a margem de fase será projetada com o compensador por avanço de fase. Por conseguinte, escolha o compensador por atraso de fase de modo que a resposta dele tenha efeito mínimo na nova freqüência de margem de fase. Escolhamos a freqüência de corte superior do compensador por atraso de fase uma década abaixo da nova freqüência de margem de fase, em 0,18 rad/s. Como necessitamos adicionar 55° de defasagem com o compensador por avanço de fase em $\omega = 1{,}8$ rad/s, a Fig. 11.8 nos diz que se $\gamma = 10$ (uma vez que $\gamma = 1/\beta$, $\beta = 0{,}1$), podemos obter cerca de 55° de deslocamento de fase a partir do compensador por avanço de fase. Portanto, com $\gamma = 10$ e uma nova freqüência de margem de fase em $\omega = 1{,}8$ rad/s, a função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_{\text{atraso}}(s) = \frac{1}{\gamma}\frac{\left(s + \dfrac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \dfrac{1}{\gamma T_2}\right)} = \frac{1}{10}\frac{(s + 0{,}18)}{(s + 0{,}018)} \tag{11.16}$$

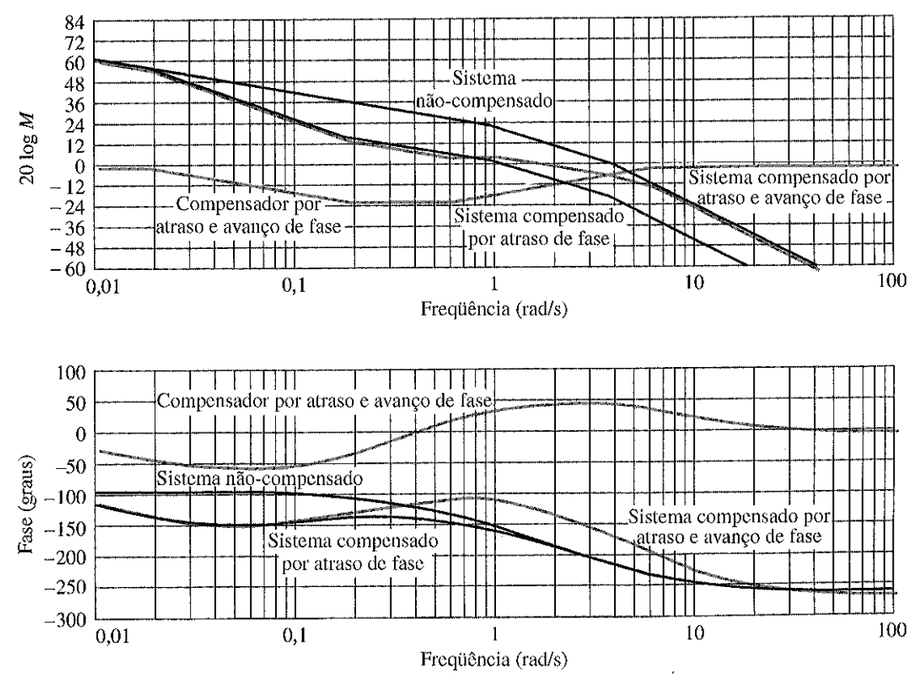


Fig. 11.12 Gráficos de Bode para a compensação por atraso e avanço de fase no Exemplo 11.4

onde o termo de ganho, $1/\gamma$, mantém o ganho estático do compensador por atraso de fase em 0 dB. A função de transferência a malha aberta do sistema compensado por atraso de fase é

$$G_{\text{comp-atraso}}(s) = \frac{4{,}8(s + 0{,}18)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 0{,}018)} \tag{11.17}$$

8. Projetamos agora o compensador por avanço de fase. Em $\omega = 1{,}8$ rad/s, o sistema compensado por atraso de fase possui um ângulo de fase de 180°. Usando os valores de $\omega_{\text{máx}} = 1{,}8$ e $\beta = 0{,}1$, a Eq. (11.9) leva à freqüência de corte inferior, $1/T_1 = 0{,}57$ rad/s. A freqüência de corte superior é então $1/\beta T_1 = 5{,}7$ rad/s. O compensador por avanço de fase é

$$G_{\text{avanço}}(s) = \gamma\frac{\left(s + \dfrac{1}{T_1}\right)}{\left(s + \dfrac{\gamma}{T_1}\right)} = 10\frac{(s + 0{,}57)}{(s + 5{,}7)} \tag{11.18}$$

A função de transferência a malha aberta do sistema compensado por atraso e avanço de fase é

$$G_{\text{comp-atraso-avanço}}(s) = \frac{48(s + 0{,}18)(s + 0{,}57)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 0{,}018)(s + 5{,}7)} \tag{11.19}$$

9. Verificamos agora a banda passante. A banda passante a malha fechada é igual à freqüência onde a resposta em magnitude a malha aberta é aproximadamente igual a −7 dB. Com base na Fig. 11.12, a magnitude é −7 dB em aproximadamente 4,5 rad/s (usando as assíntotas). Esta banda excede aquela requerida para atender o requisito de instante de pico.

O projeto é verificado agora por meio de uma simulação a fim de obter os valores reais de desempenho. A Tabela 11.4 resume as características do sistema. O requisito de instante de pico também é atendido. Uma vez mais, se os requisitos não tivessem sido atendidos, seria necessário refazer o projeto.

Tabela 11.4 Características do sistema compensado por ajuste de ganho do Exemplo 11.4

Parâmetro	Especificação Proposta	Valor Real
K_v	12	12
Margem de fase	55°	57°
Freqüência de margem de fase	—	1,7 rad/s
Banda passante a malha fechada	2,29 rad/s	3,1 rad/s
Ultrapassagem percentual	13,25	12
Instante de pico	2,0 s	1,59 s

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap11p4 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um compensador por atraso e avanço de fase. Você entrará com os valores desejados de ultrapassagem percentual, de instante de pico e de K_v. O MATLAB projeta, então, um compensador por atraso e avanço de fase usando os diagramas de Bode, calcula K_v e gera a resposta ao degrau do sistema a malha fechada. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 11.4.

Exercício de Avaliação 11.4

Problema: Projetar um compensador por atraso e avanço de fase para o sistema com retroação unitária com uma função de transferência à frente

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 8)(s + 30)}$$

para atender as seguintes especificações: $\%UP = 10\%$, $T_s = 0{,}6$ s e $K_v = 10$. Use as técnicas no domínio de freqüência.

Resposta: $G_{\text{atraso}}(s) = 0{,}456\dfrac{(s + 0{,}602)}{(s + 0{,}275)}$; $G_{\text{avanço}}(s) = 2{,}19\dfrac{(s + 4{,}07)}{(s + 8{,}93)}$; $K = 2400$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Estudos de Caso

Nosso sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, em andamento ao longo do livro, serve agora de exemplo para resumir os principais objetivos deste capítulo. Os casos a seguir demonstram o uso dos métodos de resposta de freqüência para (1) projetar um valor de ganho destinado a atender o requisito de ultrapassagem percentual da resposta ao degrau a malha fechada e (2) para projetar uma compensação em cascata destinada a atender os requisitos transitório e de erro de estado estacionário.

Projeto

Controle de Antena: Projeto do Ganho

Problema Dado um sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrado na contracapa traseira (Configuração 1), use as técnicas de resposta de freqüência para fazer o seguinte:

a. Determine o ganho necessário do pré-amplificador para que a resposta a malha fechada a uma entrada em degrau apresente uma ultrapassagem percentual de 20%.
b. Estime o tempo de assentamento.

Solução O diagrama de blocos relativo ao sistema de controle está mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1). O ganho de malha depois da redução do diagrama de blocos, é

$$G(s) = \frac{6{,}63K}{s(s + 1{,}71)(s + 100)} = \frac{0{,}0388K}{s\left(\dfrac{s}{1{,}71} + 1\right)\left(\dfrac{s}{100} + 1\right)} \tag{11.20}$$

Fazendo $K = 1$, os gráficos de magnitude e de fase da resposta de freqüência estão mostrados na Fig. 10.61.

a. Para obter K que leve a uma ultrapassagem de 20%, fazemos primeiro uma aproximação de segunda ordem e supomos que as equações que relacionam ultrapassagem percentual, relação de amortecimento e margem de fase sejam verdadeiras para este sistema. Assim, uma ultrapassagem percentual de 20% acarreta uma relação de amortecimento de 0,456. Usando a Eq. (10.73), esta relação de amortecimento acarreta uma margem de fase de 48,1°. O ângulo de fase deve ser, portanto, $(-180° + 48{,}1°) = -131{,}9°$. O ângulo de fase é $-131{,}9°$ em $\omega = 1{,}49$ rad/s, onde o ganho é −34,1 dB. Portanto, $K = 34{,}1$ dB $= 50{,}7$ para uma ultrapassagem percentual de 20%. Como o sistema é de terceira ordem, a aproximação de segunda ordem deve ser verificada. Uma simulação em computador mostra uma ultrapassagem de 20% na resposta ao degrau.
b. Ajustando o gráfico de magnitude da Fig. 10.61 para $K = 50{,}7$, obtemos −7 dB em $\omega = 2{,}5$ rad/s, que leva a uma banda passante a malha fechada de 2,5 rad/s. Usando a Eq. (10.55) com $\zeta = 0{,}456$ e $\omega_{BW} = 2{,}5$ rad/s, encontramos $T_s = 4{,}63$ s. Uma simulação em computador mostra um tempo de assentamento de aproximadamente 5 s.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo. Foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 3). Usando métodos de resposta de freqüência, faça o seguinte:

a. Determine o valor de K que leva a uma ultrapassagem de 25% para uma entrada em degrau.

MATLAB

b. Repita (a) usando o MATLAB.

Projeto

Controle de Antena: Projeto de Compensação em Cascata

Problema Dado o sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1), use as técnicas de resposta de freqüência e projete a compensação em cascata para obter uma resposta a malha fechada ao degrau com 20% de ultrapassagem, uma melhoria de cinco vezes do erro de estado estacionário em relação ao de um sistema compensado em ganho operando com 20% de ultrapassagem e um tempo de assentamento de 3,5 s.

Solução Seguindo o procedimento de projeto para atraso e avanço de fase, determinamos primeiro o valor do ganho, K, necessário para atender o requisito de erro de estado estacionário.
1. Usando a Eq. (10.55) com $\zeta = 0{,}456$ e $T_s = 3{,}5$ s, a banda passante necessária é de 3,3 rad/s.

2. Com base no estudo de caso anterior, a função de transferência a malha aberta do sistema compensado por meio de ganho era, para $K = 50{,}7$,

$$G(s)H(s) = \frac{6{,}63K}{s(s+1{,}71)(s+100)} = \frac{336{,}14}{s(s+1{,}71)(s+100)} \tag{11.21}$$

Esta função leva a $K_v = 1{,}97$. Se $K = 254$, então $K_v = 9{,}85$, uma melhoria de cinco vezes.

3. As curvas de resposta de freqüência da Fig. 10.61, que são traçadas para $K = 1$, serão usadas na solução.
4. Usando uma aproximação de segunda ordem, o valor de ultrapassagem de 20% requer uma margem de fase de 48,1°.
5. Escolha $\omega = 3$ rad/s como nova freqüência de margem de fase.
6. O ângulo de fase na freqüência de margem de fase escolhida é de $-152°$. Isto corresponde a uma margem de fase de 28°. Atribuindo uma contribuição de 5° proveniente do compensador por atraso de fase, o compensador por avanço de fase deve contribuir com $(48{,}1° - 28° + 5°) = 25{,}1°$.
7. Segue-se agora o projeto do compensador por atraso de fase. Escolha o corte superior do compensador por atraso de fase uma década abaixo da nova freqüência de margem de fase, ou seja, 0,3 rad/s. A Fig. 11.8 diz que podemos obter 25,1° de defasagem a partir da estrutura de avanço de fase se $\beta = 0{,}4$ ou $\gamma = 1/\beta = 2{,}5$. Portanto, o corte inferior para a estrutura de atraso de fase está em $1/\gamma T = 0{,}3/2{,}5 = 0{,}12$ rad/s.

   Portanto,

$$G_{\text{atraso}}(s) = 0{,}4\frac{(s+0{,}3)}{(s+0{,}12)} \tag{11.22}$$

8. Finalmente, projete o compensador por avanço de fase. Usando a Eq. (11.9), temos

$$T = \frac{1}{\omega_{\text{máx}}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{3\sqrt{0{,}4}} = 0{,}527 \tag{11.23}$$

Por conseguinte, a freqüência de corte inferior do compensador por avanço de fase é $1/T = 1{,}9$ rad/s, e a freqüência de corte superior é $1/(\beta T) = 4{,}75$ rad/s.

Portanto, o percurso à frente compensado por atraso e avanço de fase é

$$G_{\text{comp-atraso-avanço}}(s) = \frac{(6{,}63)(254)(s+0{,}3)(s+1{,}9)}{s(s+1{,}71)(s+100)(s+0{,}12)(s+4{,}75)} \tag{11.24}$$

9. Um gráfico da resposta de freqüência a malha aberta relativa ao sistema compensado por atraso e avanço de fase mostra -7 dB em 5,3 rad/s. Por conseguinte, a banda passante atende os requisitos de projeto quanto a tempo de assentamento.

   Uma simulação do sistema compensado mostra uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento de aproximadamente 3,2 s em comparação com os 20% de ultrapassagem e de tempo de assentamento de aproximadamente 5 s do sistema não-compensado. O valor de K_v do sistema compensado é 9,85 comparado ao valor de 1,97 do sistema não-compensado.

Desafio Damos agora a você um problema para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo: Foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 3). Usando métodos de resposta de freqüência, faça o seguinte:

a. Projete um compensador por atraso e avanço de fase que leve a uma ultrapassagem de 15% para uma entrada em degrau e a $K_v = 20$. Com a finalidade de aumentar a velocidade do sistema, a freqüência de margem de fase do sistema compensado será ajustada em um valor 4,6 vezes a freqüência de margem de fase do sistema não-compensado.

MATLAB

b. Repita (a) usando o MATLAB.

Sumário

Neste capítulo tratamos do projeto de sistemas de controle com retroação usando técnicas de resposta de freqüência. Aprendemos como projetar o ajuste de ganho bem como a compensação em cascata por atraso de fase, por avanço de fase e por atraso e avanço de fase. As características da resposta no domínio do tempo foram relacionadas à margem de fase, à freqüência de margem de fase e à banda passante.

O projeto por ajuste de ganho consistiu em ajustar o ganho para atender uma especificação de margem de fase. Posicionamos a freqüência de margem de fase e ajustamos o ganho em 0 dB.

Um compensador por atraso de fase é fundamentalmente um filtro passa-baixas. O ganho nas baixas freqüências pode ser aumentado para melhorar o erro de estado estacionário, e o ganho nas altas freqüências é reduzido para se obter estabilidade. A compensação por atraso de fase consiste em ajustar o ganho para atender o requisito de erro de estado estacionário e então reduzir o ganho de altas freqüências para criar estabilidade e atender o requisito de margem de fase da resposta transitória.

Um compensador por avanço de fase é fundamentalmente um filtro passa-altas. O compensador por avanço de fase aumenta o ganho nas altas freqüências conservando o ganho nas baixas freqüências. Portanto, o erro de estado estacionário deve ser projetado primeiro. Ao mesmo tempo, o compensador por avanço de fase aumenta o ângulo de fase nas altas freqüências. O efeito é a produção de um sistema estável, mais rápido, uma vez que a margem de fase ocorre agora a uma freqüência mais alta.

Um compensador por atraso e avanço de fase combina as vantagens dos compensadores por atraso de fase e por avanço de fase. Projeta-se primeiro o compensador por atraso de fase que leve a um erro de estado estacionário adequado com estabilidade melhorada. A seguir, projeta-se o compensador por avanço de fase para aumentar a velocidade da resposta transitória. Se for usada uma única estrutura como atraso de fase e avanço de fase, devem ser aplicadas considerações adicionais de projeto de modo que a relação entre os valores do zero e do pólo do atraso de fase seja a mesma entre o pólo e o zero do avanço de fase.

No próximo capítulo, retornaremos ao espaço de estados e desenvolveremos métodos para projetar as características desejadas de regime transitório e erro de estado estacionário.

Perguntas de Revisão

1. Qual a maior vantagem de se projetar compensadores pela resposta de freqüência em relação ao uso do lugar das raízes?
2. Qual a relação entre o ajuste de ganho nos diagramas de Bode e a resposta transitória?
3. Explique sucintamente como uma estrutura de atraso de fase permite aumentar o ganho nas baixas freqüências para melhorar o erro de estado estacionário sem que o sistema se torne instável.
4. Com base no gráfico de Bode, explique sucintamente como a estrutura de atraso de fase não afeta consideravelmente a velocidade da resposta transitória.
5. Por que a margem de fase aumentava acima do desejado ao se projetar um compensador por atraso de fase?
6. Compare os seguintes aspectos entre um sistema não-compensado e um sistema compensado por atraso de fase, visando obter a mesma resposta transitória: ganho nas baixas freqüências, freqüência de margem de fase, valores da curva de ganho e da curva de fase nas proximidades da freqüência de margem de fase.
7. Do ponto de vista do diagrama de Bode, explique sucintamente como uma estrutura de avanço de fase aumenta a velocidade da resposta transitória.
8. Baseado na resposta dada à Pergunta 7, explique por que as estruturas de avanço de fase não causam instabilidade.
9. Por que se adiciona uma parcela de correção à margem de fase necessária para atender a resposta transitória?
10. Ao projetar uma estrutura de atraso e avanço de fase, que diferença existe no projeto da parte de atraso de fase em comparação com o projeto de um compensador por atraso de fase separado?

Problemas

1. Projete o valor de ganho, K, para uma margem de ganho de 10 dB no sistema com retroação unitária da Fig. P11.1 se

   a. $G(s) = \dfrac{K}{(s+3)(s+9)(s+15)}$

   b. $G(s) = \dfrac{K}{s(s+3)(s+9)}$

   c. $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+3)(s+4)(s+5)}$

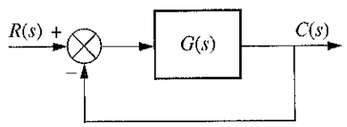


Fig. P11.1

2. Para cada um dos sistemas do Problema 1, projete o ganho, K, para uma margem de fase de 40°.
3. Dado o sistema com retroação unitária mostrado da Fig. P11.1, use os métodos de resposta de freqüência para determinar o valor de ganho, K, que leva a uma resposta ao degrau com 20% de ultrapassagem se

   a. $G(s) = \dfrac{K}{s(s+6)(s+12)}$

   b. $G(s) = \dfrac{K(s+4)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$

   c. $G(s) = \dfrac{K(s+2)(s+7)}{s(s+4)(s+8)(s+10)(s+15)}$

4. Dado o sistema com retroação unitária mostrado da Fig. P11.1, com

$$G(s) = \frac{K(s+20)(s+25)}{s(s+5)(s+8)(s+14)}$$

faça o seguinte:

   a. Use os métodos de resposta de freqüência para determinar o valor de ganho, K, que leva a uma resposta ao de-

grau com 15% de ultrapassagem. Faça as aproximações de segunda ordem necessárias.

MATLAB

b. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para testar sua aproximação de segunda ordem simulando o sistema projetado com o valor de K.

5. O sistema com retroação unitária da Fig. P11.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+7)}$$

está operando com uma ultrapassagem percentual de 15% e um tempo de assentamento de 2 s. Usando as técnicas de resposta de freqüência, projetar um compensador que leve a $K_v = 50$ com a freqüência de margem de fase e a margem de fase permanecendo aproximadamente com os mesmos valores do sistema não-compensado.

6. Dado o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. P11.1, com

$$G(s) = \frac{K(s+10)(s+11)}{s(s+3)(s+6)(s+9)}$$

faça o seguinte:

a. Use os métodos de resposta de freqüência para projetar um compensador por atraso de fase que leva a um $K_v = 1000$ e a uma resposta ao degrau com 15% de ultrapassagem. Faça as aproximações de segunda ordem necessárias.

MATLAB

b. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para testar sua aproximação de segunda ordem simulando o sistema com o valor de K e com o compensador por atraso de fase projetados.

7. O sistema com retroação unitária da Fig. P11.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+8)}$$

está operando com uma ultrapassagem percentual de 20%. Usando os métodos de resposta de freqüência, projetar um compensador que reduza o erro de estado estacionário a um quinto sem alterar significativamente a resposta transitória.

8. Projete um compensador por atraso de fase de modo que o sistema da Fig. P11.1, onde

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+6)(s+8)}$$

opere com uma margem de fase de 45° e uma constante de erro estático de 100.

9. Projete um controlador PI para o sistema da Fig. P11.2 que levará a um erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa e a uma ultrapassagem de 9,48% para uma entrada em degrau.

10. Para o sistema do Problema 6 faça o seguinte:

a. Use os métodos de resposta de freqüência para determinar o valor de ganho, K, necessário para uma ultrapassagem de 15%. Faça as aproximações de segunda ordem necessárias.

b. Use os métodos de resposta de freqüência para projetar um compensador PI que leva a um erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa sem alterar significativamente as características da resposta transitória projetada em (a).

MATLAB

c. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para testar sua aproximação de segunda ordem simulando o sistema com o valor de K e com o compensador PI projetados.

MATLAB

11. Escreva um programa em MATLAB que projetará um controlador PI supondo uma aproximação de segunda ordem. O programa deverá:

a. Permitir ao usuário entrar pelo teclado com o valor desejado de ultrapassagem percentual

b. Projetar um controlador PI e o ganho que levam a um erro de estado estacionário nulo na resposta ao degrau a malha fechada bem como atendem a especificação de ultrapassagem percentual

c. Apresentar a resposta ao degrau a malha fechada do sistema compensado

Teste seu programa com

$$G(s) = \frac{K}{(s+5)(S+10)}$$

e 25% de ultrapassagem.

12. Projete um compensador para o sistema com retroação unitária da Fig. P11.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

para obter $K_v = 2$ e uma margem de fase de 30°.

13. Considere o sistema com retroação unitária da Fig. P11.1 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+20)}$$

O sistema não-compensado apresenta cerca de 55% de ultrapassagem e um instante de pico de 0,5 s quando $K_v = 10$. Faça o seguinte:

a. Use os métodos de resposta de freqüência para projetar um compensador por avanço de fase para reduzir a ultrapassagem percentual para 10%, com aproximadamente os mesmos valores (ou valores menores) do instante de pico e do erro de estado estacionário. Faça as aproximações de segunda ordem que se fizerem necessárias.

MATLAB

b. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para testar sua aproximação de segunda ordem simulando o sistema com o valor de K projetado.

14. O sistema com retroação unitária da Fig. P11.1 com

$$G(s) = \frac{K(s+6)}{s(s+2)(s+3)}$$

está operando com 25% de ultrapassagem.

a. Determine o tempo de assentamento.

b. Determine K_v.

c. Determine a margem de fase e a freqüência de margem de fase.

d. Usando as técnicas de resposta de freqüência, projete um compensador que levará a uma melhoria de três vezes em K_v e a uma redução de duas vezes no tempo de assentamento conservando uma ultrapassagem de 25%.

15. Repita o projeto do Exemplo 11.3 no texto usando um controlador PD.

16. Repita o Problema 13 usando um controlador PD.

MATLAB

17. Escreva um programa em MATLAB que projetará um compensador por avanço de fase supondo válida uma aproximação de segunda ordem. O programa deverá:

a. Permitir ao usuário entrar pelo teclado com o valor desejado de ultrapassagem percentual, de instante de pico e ganho necessário para atender uma especificação de erro de estado estacionário

b. Exibir o diagrama de Bode compensado por ajuste de ganho

c. Calcular os valores necessários de margem de fase e de banda passante

d. Exibir o pólo, o zero e o ganho do compensador por avanço de fase

e. Exibir o diagrama de Bode compensado por avanço de fase

f. Dar como saída a resposta ao degrau do sistema compensado por avanço de fase para testar a aproximação de segunda ordem

Teste seu programa em um sistema com retroação unitária onde

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+6)}$$

e devem ser atendidas as seguintes especificações: ultrapassagem percentual = 10%, instante de pico = 0,1 s e $Kv = 30$.

MATLAB

18. Repita o Problema 17 com um controlador PD.

19. Use os métodos de resposta de freqüência para projetar um compensador por atraso e avanço de fase para um sistema com retroação unitária onde

$$G(s) = \frac{K(s+7)}{s(s+5)(s+15)}$$

e devem ser atendidas as seguintes especificações: ultrapassagem percentual = 15%, tempo de assentamento = 0,1 s e $K_v = 1000$.

MATLAB

20. Escreva um programa em MATLAB que projetará um compensador por atraso e avanço de fase supondo válida uma aproximação de segunda ordem. O programa deverá:

a. Permitir ao usuário entrar pelo teclado com os valores desejados de ultrapassagem percentual, de tempo de assentamento e de ganho necessário para atender uma especificação de erro de estado estacionário

b. Exibir o diagrama de Bode compensado por ajuste de ganho

c. Calcular os valores necessários de margem de fase e de banda passante

d. Exibir o pólo, o zero e o ganho do compensador por atraso e avanço de fase

e. Exibir o diagrama de Bode compensado por atraso e avanço de fase

f. Exibir a resposta ao degrau do sistema compensado por atraso e avanço de fase para testar a aproximação de segunda ordem

Use o programa para fazer o Problema 19.

21. Dado o sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

projetar um controlador PID para obter erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa, bem como uma ultrapassagem de 12% e um instante de pico menor que 2 s para uma entrada em degrau. Use somente os métodos de resposta de freqüência.

MATLAB

22. Um sistema com retroação unitária tem

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+6)}$$

Se este sistema possuir um retardo de 0,5 s, use o MATLAB para projetar o valor de K para 20% de ultrapassagem. Faça as aproximações de segunda ordem que forem necessárias, mas teste suas hipóteses através da simulação do projeto. O retardo pode ser representado colocando-se em cascata com $G(s)$ a função pade(T, n) do MATLAB, onde T é o retardo em segundos e n é a ordem da aproximação de Padé (usar $n = 5$). Escreva um programa em MATLAB para fazer o seguinte:

a. Aceitar o valor de ultrapassagem percentual por meio do teclado

b. Exibir o gráfico de Bode para $K = 1$

c. Calcular o valor necessário de margem de fase e obter a freqüência de margem de fase e a magnitude na freqüência de margem de fase.

d. Calcular e exibir o valor de K

Problemas de Projeto

23. Uma aeronave é utilizada algumas vezes para rebocar outros veículos. Um sistema de controle de rolamento para uma dessas aeronaves foi discutido no Problema 51 do Cap. 6. Se a Fig. P11.2 representa o sistema de controle de rolamento, use somente técnicas de resposta de freqüência para fazer o seguinte (Cochran, 1992):

a. Determinar o valor do ganho, K, para obter uma resposta ao degrau do sistema a malha fechada com 10% de ultrapassagem.

b. Estimar os valores de instante de pico e de tempo de assentamento usando a resposta de freqüência do sistema compensado por ajuste de ganho.

MATLAB

c. Use o MATLAB para simular o sistema. Compare os resultados da simulação com os requisitos em (a) e a estimativa de desempenho em (b).

24. Um sistema de controle do ângulo de rolamento de uma aeronave está mostrado na Fig. P11.3. O torque no *aileron* gera uma velocidade angular de rolamento. O ângulo de rolamento resultante é então controlado por meio de um sistema de retroação como mostrado. Projetar um compensador por avanço de fase para uma margem de fase de 60° e $K_v = 5$.

25. Veículos autônomos dirigidos (AGV), como o mostrado na Fig. P11.4(*a*), são usados nas fábricas para transportar

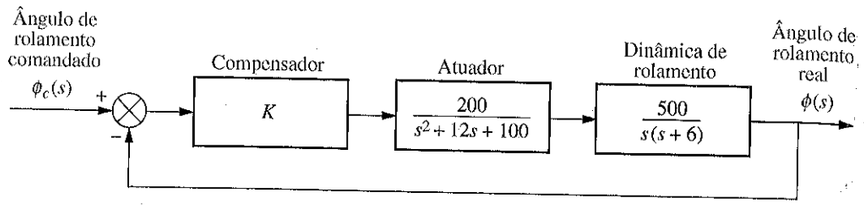


Fig. P11.2 Controle de rolamento de veículo rebocado

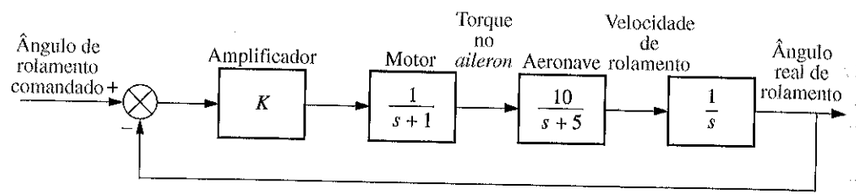
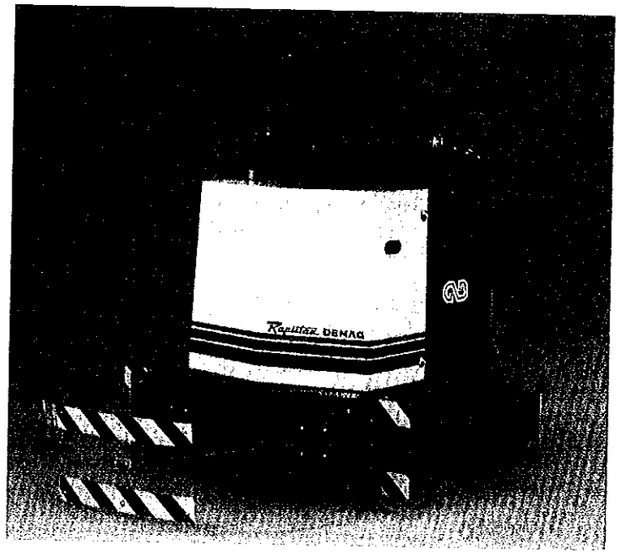
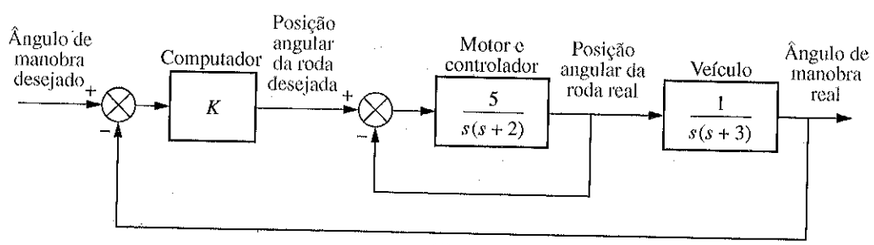


Fig. P11.3

produtos de uma seção para outra. Um dos métodos de construção consiste em embutir um condutor no piso para efetuar o guiamento. Um outro método consiste em utilizar um computador embarcado no veículo e um dispositivo laser para varredura. Dispositivos refletores com códigos de barras localizados em posições conhecidas permitem que o sistema determine a posição angular do veículo. Este sistema permite que o sistema trafegue em qualquer lugar, inclusive entre edificações (Stefanides, 1987). A Fig. P11.4(*b*) mostra um diagrama de blocos simplificado do sistema de controle de manobra do veículo. Para uma ultrapassagem de 11%, o ganho K é ajustado no valor 2. Projetar um compensador por atraso de fase usando as técnicas de resposta de freqüência para melhorar o erro de estado estacionário por um fator de 30 em relação ao do sistema não-compensado.



(*a*)



(*b*)

Fig. P11.4 a. Veículo Autônomo Guiado (AGV); **b.** diagrama de blocos simplificado

26. Um sistema de controle de atitude segundo o eixo de arfagem que utiliza um volante de inércia foi o assunto do Problema 50 no Cap. 8. Naquele problema, o compensador foi mostrado como um compensador PI. Desejamos substituir o compensador PI por um compensador por atraso e avanço de fase para melhorar tanto o desempenho transitório quanto o erro de estado estacionário. O diagrama de blocos do controle de atitude segundo o eixo de arfagem está mostrado na Fig. P11.5, onde $\theta_c(s)$ é o ângulo de arfagem comandado e $\theta(s)$ é o ângulo de arfagem real da aeronave. Se $\tau = 23$ s e $I_z = 9631$ in-lb-s², faça o seguinte (Piper, 1992):

a. Projete um compensador por atraso e avanço de fase e determine $G_c(s)$ e K para obter um sistema com as seguintes especificações de desempenho: ultrapassagem percentual = 20%, tempo de assentamento = 10 s, $K_v = 200$. Faça as aproximações de segunda ordem necessárias.

MATLAB

b. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador para testar sua aproximação de segunda ordem simulando o sistema com o valor de K e com o compensador por atraso e avanço de fase projetados.

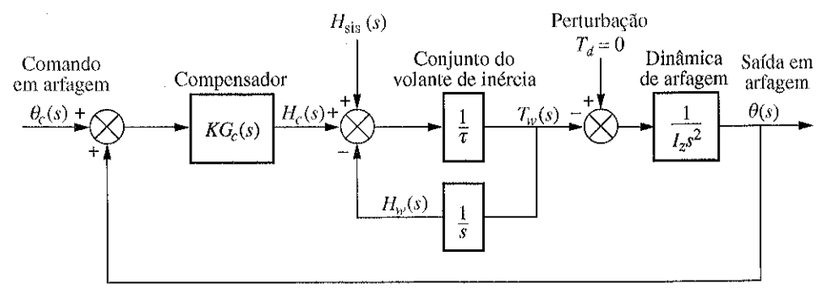


Fig. P11.5

Problema Progressivo de Análise e Projeto

27. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 trata do controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade. No Problema 62(*a*), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle pantográfico ativo. No Cap. 8, Problema 53, você projetou o ganho que levou a uma resposta ao degrau do sistema a malha fechada com 38% de ultrapassagem. Um gráfico da resposta ao degrau deveria ter mostrado um tempo de assentamento maior que 0,5 s bem como uma oscilação de alta freqüência superposta à resposta ao degrau. No Cap. 9, Problema 45, reduzimos o tempo de assentamento a cerca de 0,3 s, reduzimos a zero o erro de estado estacionário e eliminamos a oscilação de alta freqüência. Uma forma de eliminar a oscilação de alta freqüência usando um filtro supressor de faixa (*notch*) (O'Connor, 1997). Usando a função de transferência do canal direto em cascata com um filtro supressor especificado no Cap. 9, projetar, através das técnicas de resposta de freqüência, um compensador por atraso e avanço de fase para atender as seguintes especificações:

a. Pelo menos 35° de margem de fase
b. Um erro de estado estacionário máximo de 10% na resposta a malha fechada para entradas em degrau
c. Uma banda passante de, no mínimo, 35 rad/s

Bibliografia

Cochran, J. E.; Innocenti, M.; No, T. S.; and Thukral, A. Dynamics and Control of Maneuverable Towed Flight Vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 5, September–October 1992, pp. 1245–1252.

D'Azzo, J. J., and Houpis, C. H. *Feedback Control System Analysis and Synthesis.* 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1966.

Dorf, R. C. *Modern Control Systems.* 5th ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

Flower, T. L., and Son, M. Motor Drive Mechanics and Control Electronics for a High Performance Plotter. *HP Journal,* November 1981, pp. 12–15.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems.* 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Kuo, B. C. *Automatic Control Systems.* 5th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ogata, K. *Modern Control Engineering*. 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.

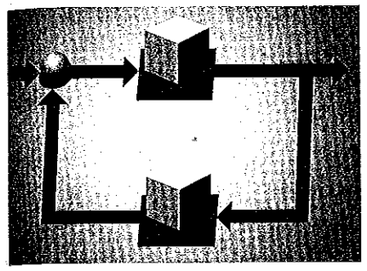
Phillips, C. L., and Harbor, R. D. *Feedback Control Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

Piper, G. E., and Kwatny, H. G. Complicated Dynamics in Spacecraft Attitude Control Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 4, July–August 1992, pp. 825–831.

Raven, F. H. *Automatic Control Engineering*. 4th ed. McGraw-Hill, New York, 1987.

Stefanides, E. J. Self-Guided Vehicles Upgrade Materials Handling. *Design News*, 7 December 1987, pp. 80–81.

CAPÍTULO 12



Projeto no Espaço de Estados

Espaço de Estados

Este capítulo trata somente de métodos no espaço de estados.

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo iremos aprender o seguinte:

- Como projetar um controlador com retroação de estado usando a alocação de pólos de modo a atender especificações de resposta transitória
- Como projetar um observador para sistemas nos quais os estados não estão disponíveis para o controlador
- Como projetar características de erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com os seguintes estudos de caso:

- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de especificar todos os pólos a malha fechada e em seguida projetar um controlador com retroação de estado que atenda especificações de resposta transitória.
- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de projetar um observador para estimar os estados.
- Dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira, você deverá ser capaz de combinar os projetos do controlador e do observador em um compensador viável para o sistema.

Fig. 12.1 Sistema de automação para farmácia hospitalar mostrando um robô selecionando medicamentos a serem depositados em bandejas personalizadas dos pacientes

12.1 Introdução

No Cap. 3, apresentamos os conceitos de análise e de modelagem de sistemas no espaço de estados. Mostramos que os métodos no espaço de estados, como os métodos de transformadas, são simplesmente ferramentas para analisar e projetar sistemas de controle com retroação. Contudo, as técnicas no espaço de estados podem ser aplicadas a uma classe mais ampla de sistemas do que os métodos de transformadas. Sistemas com não-linearidades, como o mostrado na Fig. 12.1, e sistemas com entradas e saídas múltiplas constituem apenas dois candidatos à abordagem no espaço de estados. Neste livro, no entanto, aplicamos a abordagem somente a sistemas lineares.

Nos Caps. 9 e 11 aplicamos os métodos no domínio de freqüência ao projeto de sistemas. A técnica básica consiste em criar um compensador em cascata com o processo a controlar ou no canal de retroação com pólos e zeros adicionais adequados à produção da resposta transitória e do erro de estado estacionário desejados.

Uma das dificuldades com os métodos de projeto no domínio de freqüência, seja utilizando o lugar das raízes, seja utilizando as técnicas de resposta de freqüência, é que depois de projetar a localização do par de pólos dominantes de segunda ordem, cruzamos os dedos torcendo para que os pólos de ordem superior não afetem a aproximação de segunda ordem. O que gostaríamos de fazer era poder especificar *todos* os pólos a malha fechada de ordem superior do sistema. Os métodos de projeto no domínio de freqüência não nos permitem especificar todos os pólos em sistemas de ordem superior a dois porque eles não levam em conta um número suficiente de parâmetros que permitam determinar univocamente todos os pólos a malha fechada. Um ganho para ajustar, ou um pólo e um zero para selecionar não fornecem um número suficiente de parâmetros para posicionar todos os pólos a malha fechada em localizações desejadas. Lembre-se de que para posicionar n grandezas desconhecidas precisamos de n parâmetros ajustáveis. Os métodos no espaço de estados resolvem este problema introduzindo no sistema (1) outros parâmetros ajustáveis e (2) a técnica para determinar estes valores de parâmetros, de modo que possamos posicionar adequadamente todos os pólos do sistema a malha fechada.[1]

Por outro lado, os métodos no espaço de estados não permitem a especificação de zeros a malha fechada, o que é possível com os métodos no domínio de freqüência através do posicionamento do zero do compensador por avanço de fase. Esta é uma das desvantagens dos métodos no espaço de estados, uma vez que a localização do zero afeta a resposta transitória. Além disso, o projeto no espaço de estados pode se mostrar muito sensível a variação de parâmetros.

Finalmente, há uma ampla gama de suporte computacional para os métodos no espaço de estados; diversos pacotes de software permitem o uso de álgebra com matrizes necessária aos procedimentos de projeto. Contudo, como mencionado anteriormente, as vantagens do suporte de computador são equilibradas pela perda da visão gráfica de conjunto num problema de projeto propiciada pelos métodos no domínio de freqüência.

Este capítulo deve ser considerado apenas uma introdução ao projeto no espaço de estados; apresentamos uma técnica de projeto no espaço de estados e aplicamos essa técnica somente a sistemas lineares. São necessários estudos avançados para aplicar as técnicas no espaço de estados além do escopo deste livro.

[1]Esta é uma vantagem desde que saibamos onde posicionar os pólos de ordem superior. Este nem sempre é o caso. Uma possibilidade de ação consiste em posicionar os pólos de ordem superior bem longe dos pólos dominantes de segunda ordem ou próximos de um zero a malha fechada para manter válido o projeto do sistema de segunda ordem. Uma outra abordagem consiste em utilizar conceitos de controle ótimo, que estão além do escopo deste texto.

12.2 Projeto do Controlador

Nesta seção mostramos como introduzir parâmetros adicionais em um sistema de modo que possamos controlar a localização de todos os pólos a malha fechada. Um sistema de controle de ordem n com retroação possui uma equação característica a malha fechada de ordem n da forma

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{12.1}$$

Como o coeficiente da maior potência de s é unitário, há n coeficientes cujos valores determinam a localização de cada um dos pólos a malha fechada. Portanto, se pudermos introduzir no sistema n parâmetros ajustáveis e relacioná-los aos coeficientes da Eq. (12.1), poderemos fazer com que todos os pólos do sistema a malha fechada possam ser situados arbitrariamente em localizações desejadas.

Topologia para o Posicionamento de Pólos

A fim de estabelecer os fundamentos da abordagem, considere um processo a controlar representado no espaço de estados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12.2a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.2b}$$

e mostrado graficamente na Fig. 12.2(a), onde as linhas finas são escalares e as linhas grossas são vetores.

Em um sistema de controle com retroação típico, a saída, y, é enviada de volta para a junção somadora. É agora que a topologia do projeto muda. Em vez de retroagir y, que tal utilizar a retroação de todas as variáveis de estado? Se cada uma das variáveis de estado for empregada de volta no controle, u, através de um ganho, k_i, haverá n ganhos, k_i, que podem ser ajustados para produzir os valores desejados dos pólos a malha fechada. A retroação através dos ganhos, k_i, está representada na Fig. 12.2(b) pelo vetor de retroação $-\mathbf{K}$.

As equações de estado do sistema a malha fechada da Fig. 12.2(b) podem ser escritas, por inspeção, como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{12.3a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.3b}$$

Antes de continuar, você deve ter uma boa noção de como o sistema de retroação da Fig. 12.2(b) é efetivamente implementado. Como exemplo, suponha a representação em diagrama de fluxo de sinal, com variáveis de fase, de um processo a controlar, como mostrado na Fig. 12.3(a). Cada uma das variáveis de estado é então utilizada de volta na entrada do sistema, u, através de um ganho, k_i, como mostrado na Fig. 12.3(b). Embora tratemos de outras representações mais tarde neste capítulo, a forma em variáveis de fase, com sua matriz de sistema companheira inferior típica, ou a forma canônica controlável, com sua matriz de sistema companheira superior típica, levam ao cálculo mais simples dos ganhos de retroação. Nas discussões a seguir, vamos utilizar a forma em variáveis de fase para desenvolver e demonstrar os conceitos. Problemas de final de capítulo darão a você a oportunidade de desenvolver e testar conceitos para a forma canônica controlável.

O projeto da retroação com variáveis de estado para o posicionamento dos pólos a malha fechada consiste em igualar a equação característica do sistema a malha fechada, como o mostrado na Fig. 12.3(b), à equação característica desejada e então determinar os valores dos ganhos de retroação, k_i.

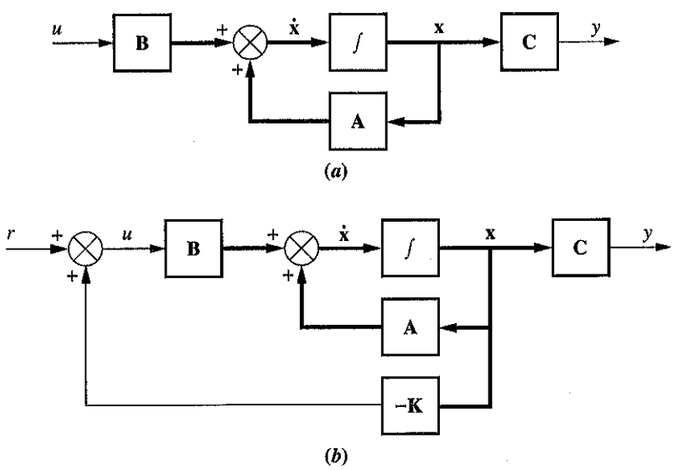


Fig. 12.2a. Representação no espaço de estados de um processo a controlar; **b.** processo a controlar com retroação de estado

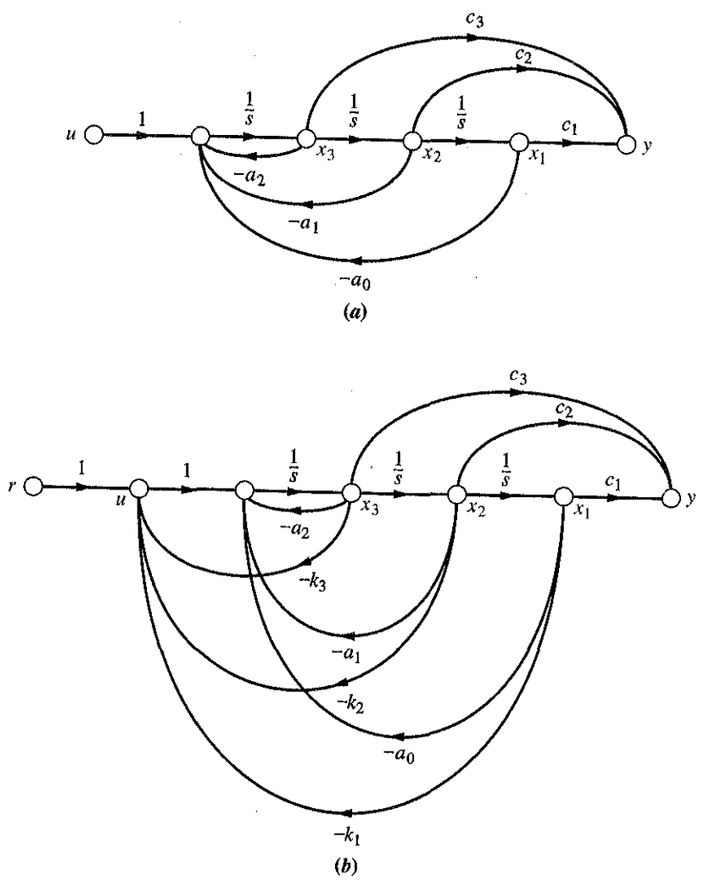


Fig. 12.3 a. Representação em variáveis de fase de um processo a controlar; **b.** processo a controlar com retroação de estado

Se um processo a controlar como o mostrado na Fig. 12.3(*a*) for de ordem elevada e não estiver representado na forma de variáveis de fase ou na forma canônica controlável, a solução para obter os k_i pode ser complicada. Em conseqüência, é recomendável transformar a representação do sistema em uma dessas formas, projetar os k_i e em seguida retornar à representação original. Executaremos esta conversão na Seção 12.4, onde será desenvolvido um método para efetuar as transformações. Até lá, dirijamos nossa atenção a processos representados na forma de variáveis de fase.

Alocação de Pólos de Processos a Controlar na Forma de Variáveis de Fase

Para aplicar a metodologia da alocação de pólos a processos representados na forma de variáveis de fase, adotamos os seguintes passos:

1. Representar o processo a controlar na forma de variáveis de fase.
2. Fazer a retroação de cada uma das variáveis de fase para a entrada do processo a controlar através de um ganho, k_i.
3. Determinar a equação característica do sistema a malha fechada representado no passo 2.
4. Decidir a localização de todos os pólos a malha fechada e determinar a equação característica equivalente.
5. Igualar os coeficientes semelhantes das equações características obtidas nos passos 3 e 4 e determinar os valores dos k_i.

Seguindo estes passos, a representação em variáveis de fase do processo a controlar é dada pela Eq. (12.2), com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \tag{12.4}$$

A equação característica do processo a controlar é então

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{12.5}$$

Construa agora o sistema a malha fechada aplicando a retroação de cada uma das variáveis de estado para produzir u, formando

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{12.6}$$

onde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \tag{12.7}$$

Os k_i são os ganhos de retroação das variáveis de estado.

Usando a Eq. (12.3*a*) com as Eqs. (12.4) e (12.7), a matriz de sistema, $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, do sistema a malha fechada é

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \cdots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix} \tag{12.8}$$

Como a Eq. (12.8) está na forma de variáveis de fase, a equação característica do sistema a malha fechada pode ser escrita por inspeção como

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \tag{12.9}$$

Observe a relação entre as Eqs. (12.5) e (12.9). Para processos representados na forma de variáveis de fase, podemos escrever, por inspeção, a equação característica a malha fechada a partir da equação característica a malha aberta adicionando o k_i apropriado a cada coeficiente.

Suponha agora que a equação característica desejada correspondente à alocação adequada dos pólos seja

$$s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \cdots + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0 \tag{12.10}$$

onde os d_i são os coeficientes desejados. Igualando-se as Eqs. (12.9) e (12.10), obtemos

$$d_i = a_i + k_{i+1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{12.11}$$

de onde

$$k_{i+1} = d_i - a_i \tag{12.12}$$

Agora que determinamos o denominador da função de transferência a malha fechada, obtenhamos o numerador. Aprendemos que, para sistemas representados na forma de variáveis de fase, o polinômio do numerador da função de transferência é formado a partir dos coeficientes da matriz de acoplamento de saída **C**. Como as Figs. (12.3*a*) e (*b*) estão ambas na forma de variáveis de fase e possuem a mesma matriz de acoplamento de saída, concluímos que os numeradores de suas funções de transferência são iguais. Vejamos um exemplo de projeto.

Exemplo 12.1

Projeto de controlador na forma de variáveis de fase

Problema Dado o processo a controlar

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)} \tag{12.13}$$

projetar os ganhos de retroação das variáveis de fase que levam a uma ultrapassagem percentual de 9,5% e a um tempo de assentamento de 0,74 s.

Solução Começamos pelo cálculo da equação característica a malha fechada desejada. Usando os requisitos da resposta transitória, os pólos a malha fechada são $-5{,}4 \pm j7{,}2$. Como o sistema é de terceira ordem, devemos selecionar um outro pólo a malha fechada. Poderíamos escolher o terceiro pólo a malha fechada para cancelar o zero a malha fechada. Contudo, para demonstrar o efeito do terceiro pólo e o procedimento de projeto, inclusive a necessidade de simulação, escolhamos $-5{,}1$ como localização do terceiro pólo a malha fechada.

Desenhemos, agora, o diagrama de fluxo de sinal do processo a controlar. O resultado está mostrado na Fig. 12.4(*a*). Em seguida, façamos a retroação de todas as variáveis de estado para o controle, u, através dos ganhos k_i, como mostrado na Fig. 12.4(*b*).

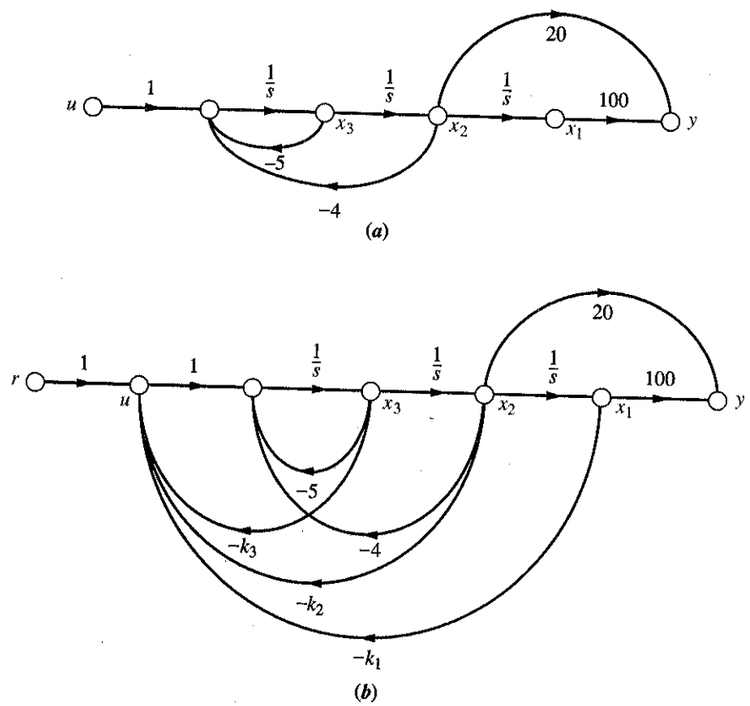


Fig. 12.4 a. Representação em variáveis de fase do processo a controlar do Exemplo 12.1; **b.** processo a controlar com retroação de estado

Escrevendo as equações de estado doÜ"istema a malha fechada a partir da Fig. 12.4(*b*), temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -(4+k_2) & -(5+k_3) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.14a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 100 & 20 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{12.14b}$$

Comparando a Eq. (12.14) à Eq. (12.3), identificamos a matriz de sistema a malha fechada como

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -(4+k_2) & -(5+k_3) \end{bmatrix} \tag{12.15}$$

Para determinar a equação característica do sistema a malha fechada, forme

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = s^3 + (5+k_3)s^2 + (4+k_2)s + k_1 = 0 \tag{12.16}$$

Esta equação deve combinar com a equação característica desejada,

$$s^3 + 15{,}9s^2 + 136{,}08s + 413{,}1 = 0 \tag{12.17}$$

formada a partir dos pólos $-5{,}4 + j7{,}2$, $-5{,}4 - j7{,}2$ e $-5{,}1$, determinados anteriormente.

Igualando os coeficientes das Eqs. (12.16) e (12.17), obtemos

$$k_1 = 413{,}1; \quad k_2 = 132{,}08; \quad k_3 = 10{,}9 \tag{12.18}$$

Finalmente, o termo referente ao zero da função de transferência a malha fechada é igual ao termo referente ao zero da função de transferência a malha aberta, ou seja, $(s + 5)$.

Usando a Eq. (12.14), obtemos a seguinte representação no espaço de estados para o sistema a malha fechada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -413{,}1 & -136{,}08 & -15{,}9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.19a}$$

$$y = [100 \quad 20 \quad 0]\mathbf{x} \tag{12.19b}$$

A função de transferência é

$$T(s) = \frac{20(s+5)}{s^3 + 15{,}9s^2 + 136{,}08s + 413{,}1} \tag{12.20}$$

A Fig. 12.5, uma simulação do sistema a malha fechada, mostra uma ultrapassagem de 11,5% e um tempo de assentamento de 0,8 s. Um novo projeto com o terceiro pólo cancelando o zero em −5 levará a um atendimento igual dos requisitos.

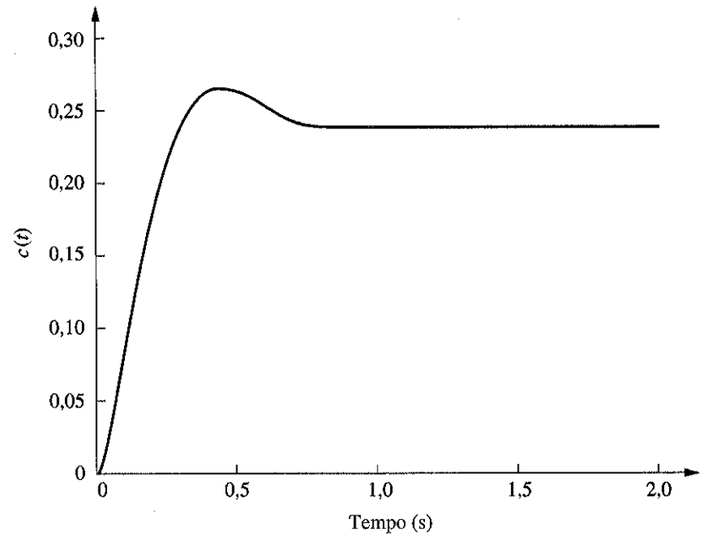


Fig. 12.5 Simulação do sistema a malha fechada do Exemplo 12.1

Como a resposta ao degrau unitário em regime permanente tende a 0,24 em vez de 1, há um grande erro de estado estacionário. Serão discutidas na Seção 12.8 técnicas de projeto para reduzir este erro.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap12p1 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um controlador em variáveis de fase usando a alocação de pólos. O MATLAB traçará o gráfico da resposta ao degrau do sistema projetado. Este exercício resolve o Exemplo 12.1 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 12.1

Problema: Para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+3)(s+12)}$$

representado no espaço de estados sob a forma de variáveis de fase por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & -15 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [1000 \quad 100 \quad 0]\mathbf{x}$$

projetar os ganhos de retroação das variáveis de fase que levam a uma ultrapassagem de 5% e a um instante de pico de 0,3 s.

Resposta: $\mathbf{K} = [2094 \quad 373{,}1 \quad 14{,}97]$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha o livro.

Nesta seção mostramos como projetar ganhos de retroação para processos a controlar representados em variáveis de fase objetivando alocar todos os pólos do sistema a malha fechada em posições desejadas do plano s. À primeira vista, parece que o método deve funcionar sempre para qualquer sistema. Contudo, este não é o caso. As condições que devem existir a fim de ser possível alocar os pólos onde desejamos que eles estejam é o tópico da próxima seção.

12.3 Controlabilidade

Considere a forma paralela mostrada na Fig. 12.6(*a*). Para controlar a localização de um pólo do sistema a malha fechada, estamos dizendo implicitamente que o sinal de controle, u, pode controlar o comportamento de cada uma das variáveis de estado em x. Se alguma das variáveis de estado não puder ser controlada pela ação de controle u, então não será possível alocar os pólos do sistema onde se deseja. Por exemplo, na Fig. 12.6(*b*), se x_1 não fosse controlável por intermédio do sinal de controle e além disso apresentasse uma resposta instável devida a uma condição inicial não-nula, não haveria como efetuar o projeto de retroação de estado para estabilizar x_1; a variável x_1 seguiria seu próprio caminho independentemente do sinal de controle, u. Portanto, em alguns sistemas, o projeto com retroação de estado não é possível.

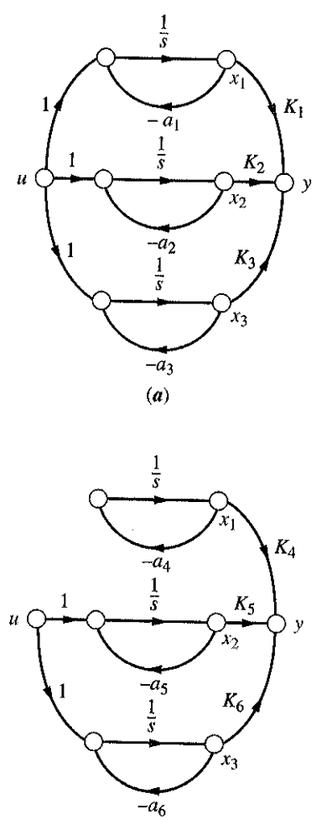


Fig. 12.6 Comparação entre sistemas **a.** controlável e **b.** não-controlável

Elaboraremos agora a seguinte definição baseada na discussão anterior:

Se for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um sistema de um valor inicial desejado para um estado final desejado, o sistema é dito *controlável*; em caso contrário, o sistema é *não-controlável*.

A alocação de pólos só constitui uma técnica de projeto viável para sistemas que são controláveis. Esta seção mostra como determinar, a priori, se a técnica de alocação de pólos é viável para o controlador.

Controlabilidade por Inspeção

Podemos explorar a controlabilidade de um outro ponto de vista: o da própria equação de estado. Quando a matriz de sistema for diagonal, como ocorre na forma paralela, fica evidente quando o sistema é ou não controlável. Por exemplo, a equação de estado relativa à Fig. 12.6(*a*) é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{12.21}$$

ou

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + u \tag{12.22a}$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 + u \tag{12.22b}$$

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_3 + u \tag{12.22c}$$

Como cada uma das Eqs. (12.22) é independente e desacoplada do resto, o controle u afeta cada uma das variáveis de estado. Isto é controlabilidade a partir de uma outra perspectiva.

Vejamos agora as equações de estado relativas ao sistema da Fig. 12.6(*b*):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & -a_5 & 0 \\ 0 & 0 & -a_6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{12.23}$$

ou

$$\dot{x}_1 = -a_4 x_1 \tag{12.24a}$$

$$\dot{x}_2 = -a_5 x_2 + u \tag{12.24b}$$

$$\dot{x}_3 = -a_6 x_3 + u \tag{12.24c}$$

Com base nas equações de estado em (12.23) e (12.24), vemos que a variável de estado x_1 não é controlada pela variável de controle u. Portanto, o sistema é dito não-controlável.

Em resumo, um sistema com autovalores distintos e uma matriz de sistema diagonal é controlável se a matriz de acoplamento de entrada **B** não possuir nenhuma linha nula.

A Matriz de Controlabilidade

Os testes de controlabilidade explorados até aqui não podem ser usados para representações do sistema que não sejam a forma diagonal ou a paralela com autovalores distintos. O problema de visualizar a controlabilidade se torna mais complicado se o sistema possuir pólos múltiplos, mesmo se for representado na forma paralela. Além do mais, não se pode sempre determinar a controlabilidade por inspeção para sistemas que não estejam representados na forma paralela. Nas outras formas, a existência de percursos da entrada para as variáveis de estado não constitui um critério de controlabilidade, uma vez que as equações não estão desacopladas.

Para determinar a controlabilidade ou, alternativamente, projetar a retroação de estado para um processo a controlar representado por uma escolha qualquer de variáveis de estado, podemos deduzir uma matriz dotada de uma propriedade particular se todas as variáveis de estado forem controladas pela entrada do processo, u. Enunciaremos agora os requisitos para controlabilidade, incluindo forma, propriedade e nome desta matriz.[2]

Um processo a controlar de ordem n cuja equação de estado é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{12.25}$$

é completamente controlável[3] se a matriz

$$\mathbf{C}_{\mathrm{M}} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{12.26}$$

for de posto n, onde $\mathbf{C}_{\mathrm{M}}$ é chamada a matriz de *controlabilidade*.[4] Como exemplo, escolhamos um sistema representado na forma paralela com raízes múltiplas.

[2]Para a dedução consulte o trabalho de Ogata (1990; 699-702) listado na Bibliografia.

[3]*Completamente controlável* significa que todas as variáveis de estado são controláveis. Neste livro usamos *controlável* para significar *completamente controlável*.

[4]Veja o Apêndice G no CD-ROM que acompanha o livro para a definição de posto. Para sistemas com uma única entrada e uma única saída, em vez de especificar o posto n, dizemos que $\mathbf{C}_{\mathrm{M}}$ deve ser não-singular, possuir inversa ou ter linhas e colunas linearmente independentes.

Exemplo 12.2

Controlabilidade por intermédio da matriz de controlabilidade

Problema Dado o sistema da Fig. 12.7, representado por um diagrama de fluxo de sinal, determinar sua controlabilidade.

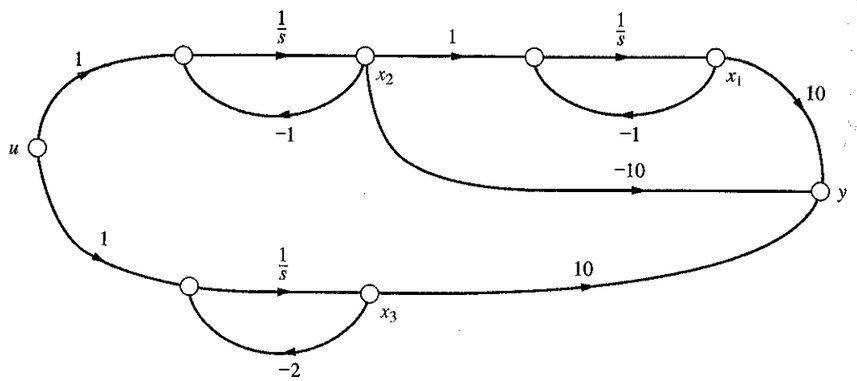


Fig. 12.7 Sistema para o Exemplo 12.2

Solução A equação de estado do sistema descrito em diagrama de fluxo de sinal é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{12.27}$$

À primeira vista parece que o sistema é não-controlável por causa do zero na matriz **B**. Lembre, contudo, que esta configuração conduz à não-controlabilidade somente se os pólos forem reais e distintos. Neste caso, temos pólos múltiplos em −1.

A matriz de controlabilidade é

$$\mathbf{C}_\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{12.28}$$

O posto de $\mathbf{C}_\mathbf{M}$ é igual ao número de linhas ou colunas linearmente independentes. O posto pode ser obtido determinando-se a submatriz quadrada de maior ordem que seja não-singular. O determinante de $\mathbf{C}_\mathbf{M} = -1$. Como o determinante é não-nulo, a matriz 3×3 é não-singular, e o posto de $\mathbf{C}_\mathbf{M}$ é 3. Concluímos que o sistema é controlável, uma vez que o posto de $\mathbf{C}_\mathbf{M}$ é igual à ordem do sistema. Portanto, os pólos do sistema podem ser posicionados usando-se o projeto de retroação das variáveis de estado.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap12p2 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para testar um sistema quanto à controlabilidade. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 12.2.

No exemplo anterior constatamos que mesmo quando um elemento da matriz de acoplamento de entrada era zero, o sistema era controlável. Se observarmos a Fig. 12.7 poderemos ver por quê. Nesta figura, todas as variáveis de estado são acionadas pela entrada u.

Por outro lado, se desconectarmos alguma das entradas em dx_1/dt, dx_2/dt ou dx_3/dt, pelo menos uma das variáveis de estado seria não-controlável. Para ver este efeito, desconectemos a entrada em dx_2/dt. Isto faz com que a matriz **B** se torne

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12.29}$$

Podemos ver que agora o sistema é não-controlável uma vez que x_1 e x_2 não mais são controladas pela entrada. Esta conclusão é confirmada pela matriz de controlabilidade, a qual é agora

$$\mathbf{C}_\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{12.30}$$

Não somente o determinante desta matriz é igual a zero, mas também o determinante de qualquer submatriz 2×2. Portanto, o posto da Eq. (12.30) é igual a 1. O sistema não é controlável porque o posto de $\mathbf{C}_\mathbf{M}$ é 1, menor que a ordem, 3, do sistema.

Exercício de Avaliação 12.2

Problema: Determine se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

é controlável.

Resposta: Controlável.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Em resumo, então, o projeto de alocação de pólos através da retroação de variáveis de estado é simplificado usando-se a forma de variáveis de fase nas equações de estado do processo a controlar. Contudo, a controlabilidade — condição para que o projeto de alocação de pólos tenha êxito — pode ser melhor visualizada na forma em paralelo, onde a matriz de sistema é diagonal quando as raízes são distintas. Em todos os casos, a matriz de controlabilidade sempre dirá ao projetista se é viável a implementação do projeto por retroação de estado.

Na próxima seção mostramos como projetar a retroação de variáveis de estado para sistemas não representados na forma de variáveis de fase. Usamos a matriz de controlabilidade como ferramenta para converter um sistema à forma de variáveis de fase visando ao projeto de retroação com variáveis de estado.

12.4 Abordagens Alternativas para o Projeto do Controlador

Na Seção 12.2 mostramos como projetar a retroação com variáveis de estado de modo a obter os pólos a malha fechada desejados. Demonstramos este método usando sistemas representados na forma de variáveis de fase e vimos quão simples foi calcular os ganhos de retroação. Muitas vezes a natureza física do problema requer a retroação de variáveis de estado que não são variáveis de fase. Para estes sistemas temos algumas escolhas quanto à metodologia de projeto.

O primeiro método consiste em igualar os coeficientes de $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))$ aos coeficientes da equação característica desejada, que é o mesmo método usado para sistemas representados em variáveis de fase. Esta técnica, em geral, conduz a cálculos difíceis dos ganhos de retroação, especialmente para sistemas de ordem elevada não representados por variáveis de fase. Ilustremos esta técnica com um exemplo.

Exemplo 12.3

Projeto de controlador igualando coeficientes

Problema Dado um processo a controlar, $Y(s)/U(s) = 10/[(s+1)(s+2)]$, projetar uma retroação de estado para o processo a controlar representado na forma em cascata para obter uma ultrapassagem de 15% com um tempo de assentamento de 0,5 s.

Solução O diagrama de fluxo de sinal referente ao processo a controlar na forma em cascata está mostrado na Fig. 12.18(*a*). A Fig. 12.18(*b*) mostra o sistema com a adição da retroação das variáveis de estado. Escrevendo as equações de estado com base na Fig. 12.18(*b*), temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -k_1 & -(k_2+1) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}r \tag{12.31a}$$

$$y = [10 \quad 0]\mathbf{x} \tag{12.31b}$$

BIBLIOTECA - UNOESC

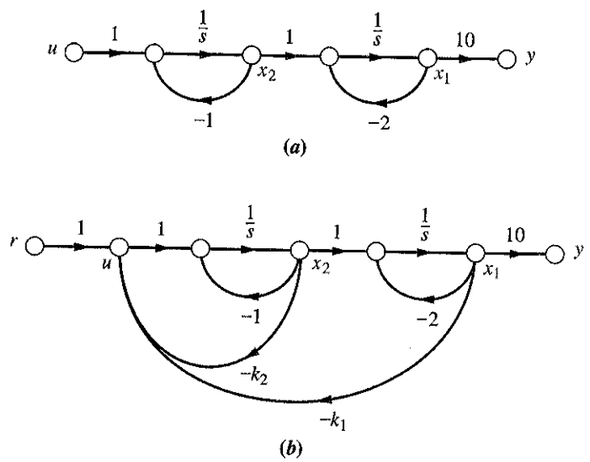


Fig. 12.8 a. Diagrama de fluxo de sinal em cascata para $G(s) = 10/[(s + 1)(s + 2)]$; **b.** sistema com a retroação de estado incluída

onde a equação característica é

$$s^2 + (k_2 + 3)s + (2k_2 + k_1 + 2) = 0 \tag{12.32}$$

Usando os requisitos da resposta transitória enunciados no problema, obtemos a equação característica desejada

$$s^2 + 16s + 239{,}5 = 0 \tag{12.33}$$

Igualando os coeficientes do meio das Eqs. (12.32) e (12.33), obtemos $k_2 = 13$. Igualando os últimos coeficientes dessas equações juntamente com o resultado para k_2 resulta $k_1 = 211{,}5$.

O segundo método consiste em transformar as variáveis de estado do sistema em variáveis de fase, projetar os ganhos de retroação e transformar o sistema projetado para as variáveis de estado de sua representação original.[5] Este método requer que desenvolvamos primeiro a transformação entre um sistema e sua representação na forma de variáveis de fase.

Suponha um processo a controlar não representado na forma de variáveis de fase,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{12.34a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{12.34b}$$

cuja matriz de controlabilidade é

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Mz}} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{12.35}$$

Admita que o sistema possa ser transformado na representação em variáveis de fase ($\mathbf{x}$) por meio da transformação

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{12.36}$$

Substituindo esta transformação na Eq. (12.34), obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{12.37a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{12.37b}$$

cuja matriz de controlabilidade é

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\mathbf{Mx}} &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^2(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \quad \cdots \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^{n-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B})] \\ &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \quad \cdots \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) \\ &\quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) \quad \cdots \quad (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B})] \\ &= \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\end{aligned} \tag{12.38}$$

[5]Veja as discussões sobre a fórmula de Ackermann em Franklin (1994) e Ogata (1990), listados na Bibliografia.

Substituindo a Eq. (12.35) na Eq. (12.38) e resolvendo para $\mathbf{P}$, obtemos

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_{\mathbf{Mz}}\mathbf{C}_{\mathbf{Mx}}^{-1} \tag{12.39}$$

Portanto, a matriz de transformação, $\mathbf{P}$, pode ser determinada com base nas duas matrizes de controlabilidade.

Após transformar a representação do sistema na forma de variáveis de fase, projetamos os ganhos de retroação como na Seção 12.2. Portanto, incluindo os sinais de retroação e de entrada, $u = -\mathbf{K}_x\mathbf{x} + r$, a Eq. (12.37) se torna

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_x\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}r \\ &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BK}_x)\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}r\end{aligned} \tag{12.40a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{12.40b}$$

Como esta equação está na forma de variáveis de fase, os zeros deste sistema a malha fechada são determinados a partir do polinômio formado com base nos elementos de $\mathbf{CP}$, como explicado na Seção 12.2.

Usando $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}$, transformamos a Eq. (12.40) em variáveis de fase de volta à representação original e obtemos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{B}r = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x\mathbf{P}^{-1})\mathbf{z} + \mathbf{B}r \tag{12.41a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{12.41b}$$

Comparando a Eq. (12.41) com a Eq. (12.3), o ganho de retroação das variáveis de estado, $\mathbf{K}_z$, para o sistema original é

$$\mathbf{K}_{\mathbf{z}} = \mathbf{K}_x\mathbf{P}^{-1} \tag{12.42}$$

A função de transferência deste sistema a malha fechada é igual à função de transferência para a Eq. (12.40), uma vez que as Eqs. (12.40) e (12.41) representam o mesmo sistema. Por conseguinte, os zeros da função de transferência a malha fechada são iguais aos do processo sem compensação, com base no desenvolvimento da Seção 12.2. Demonstremos isto com um exemplo de projeto.

Exemplo 12.4

Projeto de controlador através de transformação

Problema Projetar um controlador com retroação de variáveis de estado para obter uma ultrapassagem de 20,8% e um tempo de assentamento de 4 s para um processo,

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)} \tag{12.43}$$

representado na forma em cascata mostrada na Fig. 12.9.

Solução Primeiro, determine as equações de estado e a matriz de controlabilidade. As equações de estado escritas com base na Fig. 12.9 são

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{z} + \mathbf{B}_{\mathbf{z}}u = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{12.44}$$

$$y = \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{z} = [-1 \quad 1 \quad 0]\,\mathbf{z}$$

a partir das quais se calcula a matriz de controlabilidade

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Mz}} = [\mathbf{B}_{\mathbf{z}} \quad \mathbf{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{B}_{\mathbf{z}} \quad \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^2\mathbf{B}_{\mathbf{z}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.45}$$

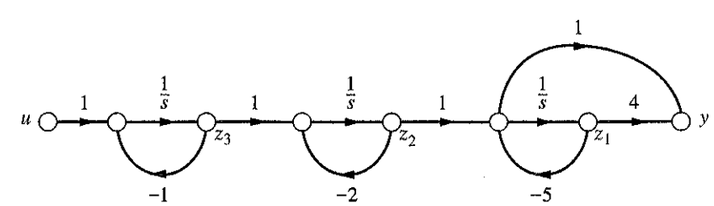


Fig. 12.9 Diagrama de fluxo de sinal para o processo a controlar do Exemplo 12.4

Como o determinante de $\mathbf{C}_{Mz}$ é -1, o sistema é controlável.

Podemos agora converter o sistema às variáveis de fase determinando a equação característica e usando esta equação para escrever a forma em variáveis de fase. A equação característica, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)$, é

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 = 0 \tag{12.46}$$

Usando os coeficientes da Eq. (12.46) e nosso conhecimento da forma em variáveis de fase, podemos escrever a representação do sistema em variáveis de fase como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_x\mathbf{x} + \mathbf{B}_x u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{12.47a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{12.47b}$$

A equação de saída foi escrita usando os coeficientes do numerador da Eq. (12.43), uma vez que a função de transferência é a mesma para as duas representações. A matriz de controlabilidade, $\mathbf{C}_{Mx}$, para o sistema em variáveis de fase é

$$\mathbf{C}_{Mx} = [\mathbf{B}_x \quad \mathbf{A}_x\mathbf{B}_x \quad \mathbf{A}_x^2\mathbf{B}_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 47 \end{bmatrix} \tag{12.48}$$

Usando a Eq. (12.39), podemos calcular agora a matriz de transformação entre os dois sistemas como

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_{Mz}\mathbf{C}_{Mx}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.49}$$

Projetamos agora o controlador usando a representação em variáveis de fase e, em seguida, usamos a Eq. (12.49) para levar o projeto de volta para a representação original. Para uma ultrapassagem de 20,8% e um tempo de assentamento de 4 s, um fator da equação característica do sistema a malha fechada projetado é $s^2 + 2s + 5$. Como o zero a malha fechada estará em $s = -4$, escolhemos o terceiro pólo a malha fechada para cancelar o zero a malha fechada. Por conseguinte, a equação característica total desejada para o sistema a malha fechada é

$$D(s) = (s + 4)(s^2 + 2s + 5) = s^3 + 6s^2 + 13s + 20 = 0 \tag{12.50}$$

As equações de estado para a forma em variáveis de fase com a retroação das variáveis de estado são

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_x - \mathbf{B}_x\mathbf{K}_x)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(10 + k_{1_x}) & -(17 + k_{2_x}) & -(8 + k_{3_x}) \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{12.51a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{12.51b}$$

A equação característica para a Eq. (12.51) é

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_x - \mathbf{B}_x\mathbf{K}_x)) &= s^3 + (8 + k_{3_x})s^2 + (17 + k_{2_x})s + (10 + k_{1_x}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12.52}$$

Comparando a Eq. (12.50) com a Eq. (12.52), vemos que

$$\mathbf{K}_x = [k_{1_x} \quad k_{2_x} \quad k_{3_x}] = [10 \quad -4 \quad -2] \tag{12.53}$$

Usando as Eqs. (12.42) e (12.49), podemos transformar o controlador de volta ao sistema original como

$$\mathbf{K}_z = \mathbf{K}_x\mathbf{P}^{-1} = [-20 \quad 10 \quad -2] \tag{12.54}$$

O sistema final a malha fechada com retroação das variáveis de estado está mostrado na Fig. 12.10, com a entrada aplicada como mostrado.

Verifiquemos agora o nosso projeto. As equações de estado para o sistema projetado mostrado na Fig. 12.10 com entrada r são

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}_z - \mathbf{B}_z\mathbf{K}_z)\mathbf{z} + \mathbf{B}_z r = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.55a}$$

$$y = \mathbf{C}_z\mathbf{z} = [-1 \quad 1 \quad 0]\mathbf{z} \tag{12.55b}$$

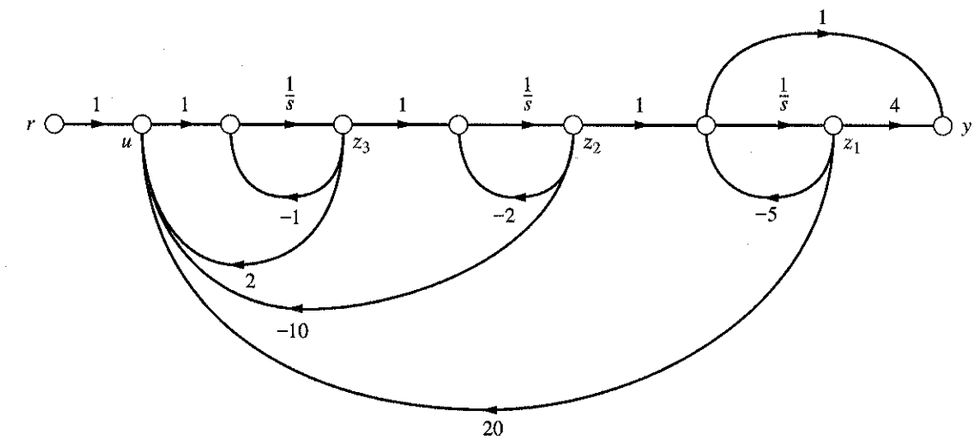


Fig. 12.10 Sistema projetado com retroação de estados para o Exemplo 12.4

Usando a Eq. (3.73) para determinar a função de transferência a malha fechada, obtemos

$$T(s) = \frac{(s + 4)}{s^3 + 6s^2 + 13s + 20} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \tag{12.56}$$

Os requisitos de nosso projeto foram atendidos.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap12p3 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um controlador para um processo não representado na forma de variáveis de fase. Você verá que o MATLAB não requer transformação para a representação em variáveis de fase. Este exercício resolve o Exemplo 12.4 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 12.3

Problema: Projetar um controlador linear com retroação de estado para obter uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento de 2 s para um processo a controlar

$$G(s) = \frac{(s + 6)}{(s + 9)(s + 8)(s + 7)}$$

representado no espaço de estados na forma em cascata por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} = [-1 \quad 1 \quad 0]\mathbf{z}$$

Resposta: $\mathbf{K}_z = [-40{,}23 \quad 62{,}24 \quad -14]$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção mostramos como projetar retroação com variáveis de estado de processos a controlar não representados sob a forma de variáveis de fase. Usando as matrizes de controlabilidade, fomos capazes de transformar uma representação qualquer de um processo na representação em variáveis de fase, projetar o controlador e, finalmente, retornar à representação original. O projeto do controlador depende da disponibilidade dos estados para retroação. Na próxima seção vamos discutir o projeto da retroação com variáveis de estado quando algumas ou todas as variáveis de estado não estiverem disponíveis.

12.5 Projeto do Observador

O projeto do controlador depende do acesso às variáveis de estado para efetuar a retroação por meio de ganhos ajustáveis. Este acesso deve ser fornecido através de hardware. Por exemplo, sensores giroscópicos podem medir posição e velocidade angulares em um veículo espacial. Algumas vezes é impraticável usar este hardware por ra-

zões de custo, exatidão ou disponibilidade. Por exemplo, no vôo propulsado de veículos espaciais, centrais inerciais podem ser usadas para calcular a aceleração. Contudo, o alinhamento dessas centrais se deteriora com o tempo; por conseguinte, são desejáveis outros meios de medir aceleração (Rockwell International, 1984). Em outras aplicações, algumas das variáveis de estado podem não estar de todo disponíveis, ou pode ser muito caro medi-las e enviá-las ao controlador. Quando as variáveis de estado não estiverem disponíveis em função da configuração do sistema ou do custo, é possível estimar os estados. Os estados estimados, no lugar dos estados reais, são então enviados ao controlador. Um esquema está mostrado na Fig. 12.11(*a*). Um *observador*, algumas vezes chamado de *estimador*, é usado para calcular as variáveis de estado que não estão acessíveis no processo a controlar. Aqui, o observador é um modelo do processo a controlar. Vejamos as desvantagens de uma configuração deste tipo.

Suponha um processo a controlar,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12.57a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.57b}$$

e um observador,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u \tag{12.58a}$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \tag{12.58b}$$

Subtraindo as Eqs. (12.58) das Eqs. (12.57), obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \tag{12.59a}$$

$$y - \hat{y} = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \tag{12.59b}$$

Portanto, a dinâmica da diferença entre os estados reais e os estados estimados é livre, e, se o processo a controlar for estável, esta diferença, devida às diferenças nos vetores de estado iniciais, tende a zero. Contudo, a velocidade de convergência entre o estado real e o estado estimado é a mesma da resposta transitória do processo a controlar, uma vez que a equação característica de (12.59*a*) é igual à de (12.57*a*). Como a convergência é muito lenta, buscamos uma forma de

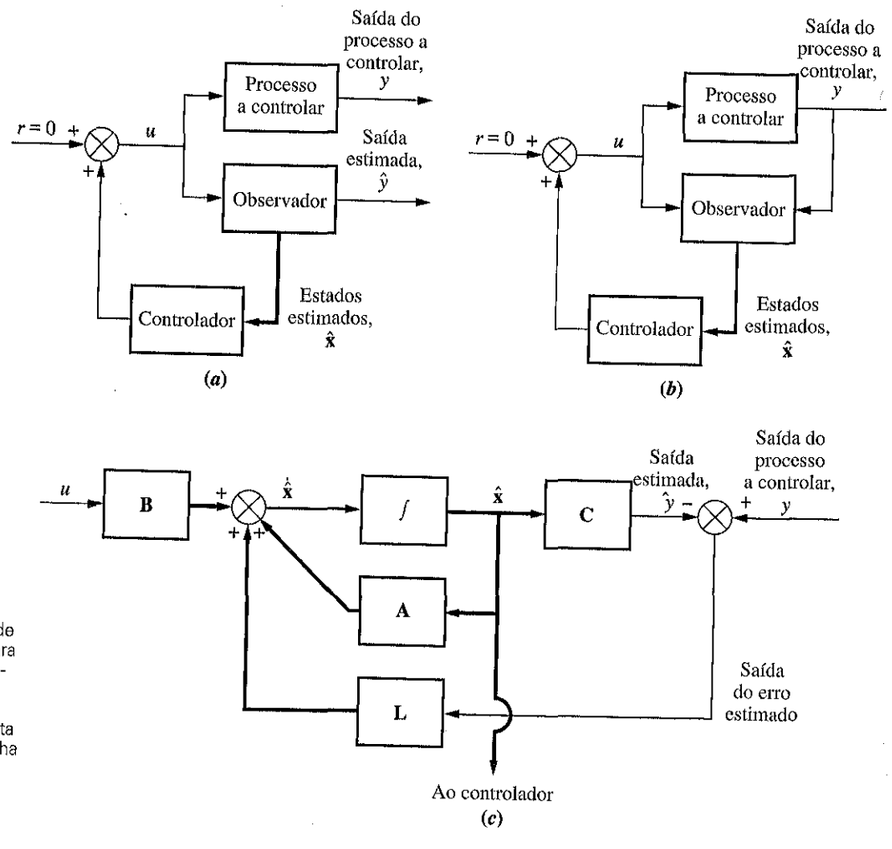


Fig. 12.11 Projeto com retroação de estados usando um observador para estimar as variáveis de estado não-disponíveis:
a. observador a malha aberta; **b.** observador a malha fechada; **c.** vista detalhada de um observador a malha fechada, mostrando a estrutura de retroação para reduzir o erro de estimação das variáveis de estado

aumentar a velocidade do observador e fazer com que seu tempo de resposta seja mais rápido que o do sistema controlado a malha fechada, de modo que, efetivamente, o controlador receba os estados estimados instantaneamente.

Para aumentar a velocidade de convergência entre os estados reais e os estados estimados, usamos retroação, mostrada de forma conceitual na Fig. 12.11(*b*) e com mais detalhes na Fig. 12.11(*c*). O erro entre as saídas do processo a controlar e do observador é enviado de volta às derivadas dos estados do observador. O sistema efetua as correções de modo a forçar este erro a zero. Com retroação, podemos projetar uma resposta transitória do observador que seja muito mais rápida que a do processo a controlar ou do sistema controlado a malha fechada.

Quando implementamos o controlador, constatamos que as formas com variáveis de fase ou canônica controlável levavam a uma solução fácil para obter os ganhos do controlador. No projeto de um observador, é a forma canônica de observador a que produz a solução fácil para os ganhos do observador. A Fig. 12.12(*a*) mostra um exemplo de um processo a controlar de terceira ordem representado na forma canônica de observador. Na Fig. 12.12(*b*), o processo a controlar é configurado como um observador com a inclusão da retroação, como descrito anteriormente.

O projeto do observador é separado do projeto do controlador. De modo semelhante ao do projeto do vetor controlador, **K**, o projeto do observador consiste em calcular o vetor constante, **L**, de modo que a resposta transitória do observador seja mais rápida que a resposta da malha controlada a fim de produzir rapidamente uma atualização do vetor de estado estimado. Vamos deduzir agora a metodologia de processo.

Determinaremos inicialmente as equações de estado do erro entre o vetor de estado real e o vetor de estado estimado, $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$. Em seguida determinaremos a equação característica para o erro do sistema e calcularemos **L** para atender uma resposta transitória rápida do observador.

Escrevendo as equações de estado do observador com base na Fig. 12.11(*c*), temos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}) \tag{12.60a}$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \tag{12.60b}$$

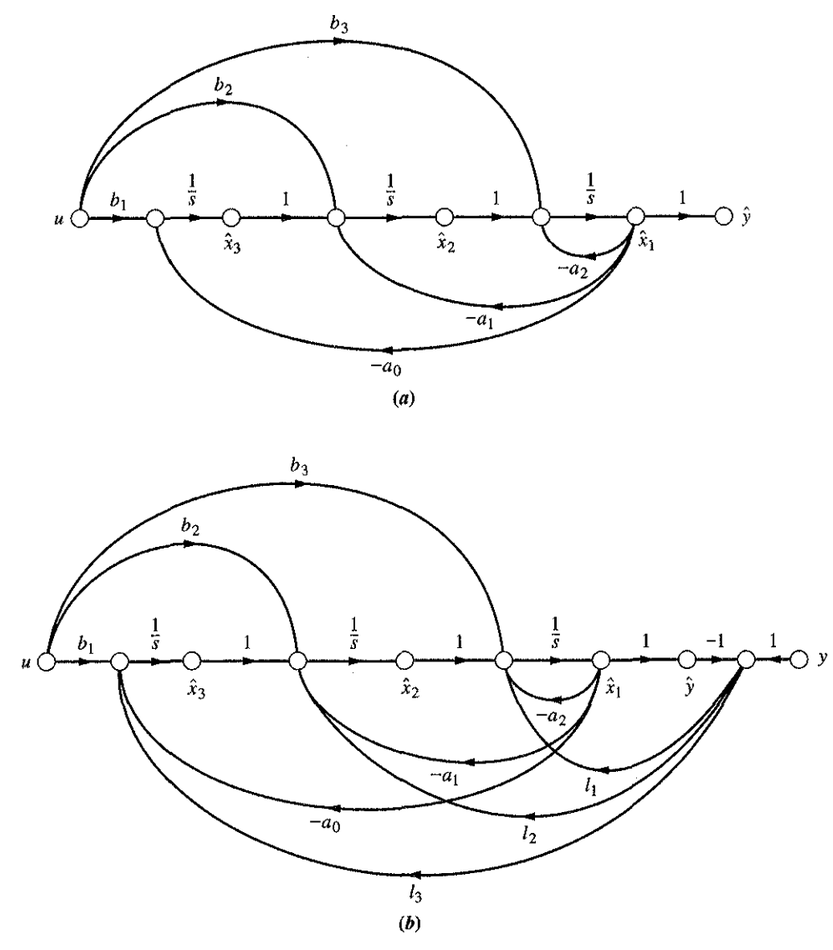


Fig. 12.12 Observador de terceira ordem na forma canônica de observador:
a. antes da inclusão da retroação; **b.** depois da inclusão da retroação

Mas as equações de estado do processo são

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12.61a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.61b}$$

Subtraindo as Eqs. (12.60) das Eqs. (12.61), obtemos

$$(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L}(y - \hat{y}) \tag{12.62a}$$

$$(y - \hat{y}) = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \tag{12.62b}$$

onde $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ é o erro entre o vetor de estado real e o vetor de estado estimado, e $y - \hat{y}$ é o erro entre a saída real e a saída estimada.

Substituindo a equação de saída na equação de estado, obtemos a equação de estado para o erro entre o vetor de estado estimado e o vetor de estado real:

$$(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \tag{12.63a}$$

$$(y - \hat{y}) = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \tag{12.63b}$$

Fazendo $\mathbf{e}_x = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$, temos

$$\dot{\mathbf{e}}_x = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}_x \tag{12.64a}$$

$$y - \hat{y} = \mathbf{C}\mathbf{e}_x \tag{12.64b}$$

A Eq. (12.64*a*) é livre. Se os autovalores forem todos negativos, o erro do vetor de estado, $\mathbf{e}_x$, decairá a zero. O projeto consiste então em calcular os valores de $\mathbf{L}$ que levem a uma equação característica desejada ou a uma resposta desejada das Eqs. (12.64). A equação característica é obtida das Eqs. (12.64) como

$$\det[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})] = 0 \tag{12.65}$$

Selecionamos agora os autovalores do observador para obter estabilidade e uma resposta transitória desejada mais rápida que a do sistema controlado a malha fechada. Estes autovalores determinam uma equação característica a qual será igualada à Eq. (12.65) para a determinação de $\mathbf{L}$.

Demonstremos o procedimento para um processo a controlar de ordem n representado na forma canônica de observador. Calculamos primeiramente $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$. A forma de $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{C}$ pode ser deduzida extrapolando-se a forma destas matrizes a partir de um processo a controlar de terceira ordem, que você pode deduzir com base na Fig. 12.12. Portanto,

$$\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$$= \begin{bmatrix} -(a_{n-1} + l_1) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(a_{n-2} + l_2) & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a_1 + l_{n-1}) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + l_n) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{12.66}$$

A equação característica para $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ é

$$s^n + (a_{n-1} + l_1)s^{n-1} + (a_{n-2} + l_2)s^{n-2} + \cdots + (a_1 + l_{n-1})s + (a_0 + l_n) = 0 \tag{12.67}$$

Observe a relação entre a Eq. (12.67) e a equação característica, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, relativa ao processo a controlar, que é

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{12.68}$$

Portanto, se desejado, a Eq. (12.67) pode ser escrita por inspeção se o processo a controlar estiver representado na forma canônica de observador. Agora vamos igualar a Eq. (12.67) à equação característica desejada do sistema a malha fechada, a qual é escolhida com base na resposta transitória desejada. Suponha que a equação característica desejada seja

$$s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \cdots + d_1 s + d_0 = 0 \tag{12.69}$$

Podemos agora resolver em função dos l_i igualando os coeficientes das Eqs. (12.67) e (12.69):

$$l_i = d_{n-i} - a_{n-i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{12.70}$$

Demonstremos o projeto de um observador usando a forma canônica de observador. Nas seções subseqüentes mostraremos como projetar o observador para outras formas diferentes da canônica de observador.

Exemplo 12.5

Projeto de observador na forma canônica de observador

Problema Projetar um observador para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{s+4}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} \tag{12.71}$$

representado na forma canônica de observador. O observador responderá 10 vezes mais rápido que a malha controlada do Exemplo 12.4.

Solução

1. Represente primeiro o processo a controlar estimado na forma canônica de observador. O resultado é mostrado na Fig. 12.13(*a*).
2. Forme agora a diferença entre a saída real do processo a controlar, y, e a saída estimada do observador, $\hat{y}$, e adicione os percursos de retroação desta diferença à derivada de cada uma das variáveis de estado. O resultado está mostrado na Fig. 12.13(*b*).
3. Determine a seguir o polinômio característico. As equações de estado para o processo estimado mostradas na Fig. 12.13(*c*) são

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u \tag{12.72a}$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = [1 \quad 0 \quad 0]\hat{\mathbf{x}} \tag{12.72b}$$

Com base nas Eqs. (12.64) e (12.66), o erro do observador é

$$\dot{\mathbf{e}}_x = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} -(8 + l_1) & 1 & 0 \\ -(17 + l_2) & 0 & 1 \\ -(10 + l_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{e}_x \tag{12.73}$$

Usando a Eq. (12.65), obtemos o polinômio característico

$$s^3 + (8 + l_1)s^2 + (17 + l_2)s + (10 + l_3) \tag{12.74}$$

4. Calcule agora o polinômio desejado, iguale os coeficientes deste polinômio aos da Eq. (12.74) e resolva os ganhos l_i. Com base na Eq. (12.50), observamos que o sistema controlado a malha fechada possui os pólos de segunda ordem dominantes em $-1 \pm j2$. Para tornar o nosso observador 10 vezes mais rápido, projetamos os pólos do observador em $-10 \pm j20$. Selecionamos o terceiro pólo igual a 10 vezes a parte real dos pólos dominantes de segunda ordem do observador, ou seja, em -100. Por conseguinte, o polinômio característico desejado é

$$(s + 100)(s^2 + 20s + 500) = s^3 + 120s^2 + 2500s + 50.000 \tag{12.75}$$

Igualando as Eqs. (12.74) e (12.75), obtemos $l_1 = 112$, $l_2 = 2483$ e $l_3 = 49.900$.

Uma simulação do observador com uma entrada de $r(t) = 100t$ está mostrada na Fig. 12.14. As condições iniciais do processo a controlar foram todas iguais a zero e a condição inicial de $\hat{x}_1$ foi 0,5. Como os pólos dominantes do observador são $-10 \pm j20$, o tempo de assentamento esperado deve ser cerca de 0,4 s. É interessante notar a resposta mais lenta na Fig. 12.14(*b*), onde os ganhos do observador foram desconectados e o observador é simplesmente uma cópia do processo a controlar com uma condição inicial diferente.

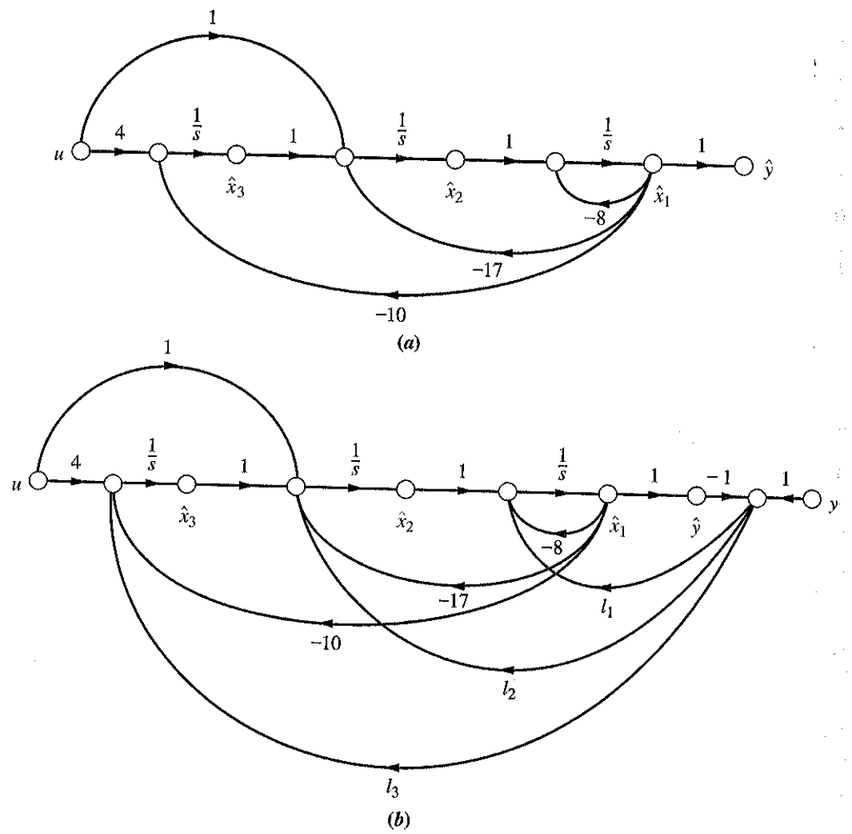


Fig. 12.13 a. Diagrama de fluxo de sinal de um sistema usando a variáveis da forma canônica de observador; **b.** retroação adicional para criar o observador

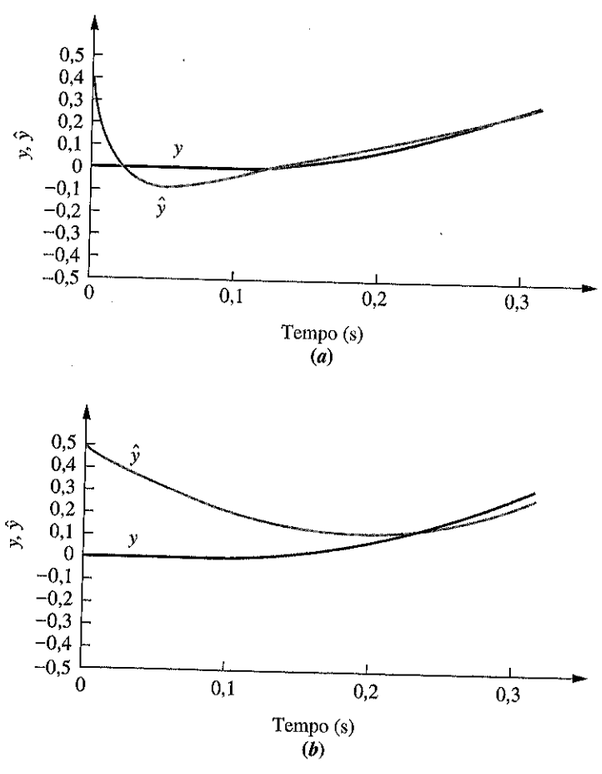


Fig. 12.14 Simulação mostrando a resposta do observador: **a.** a malha fechada; **b.** a malha aberta mostrando os ganhos do observador desconectados

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap12p4 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um observador usando a alocação de pólos. Este exercício resolve o Exemplo 12.5 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 12.4

Problema: Projetar um observador para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{(s+6)}{(s+7)(s+8)(s+9)}$$

cujo processo a controlar estimado é representado no espaço de estados na forma canônica de observador como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -24 & 1 & 0 \\ -191 & 0 & 1 \\ -504 & 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = [1 \quad 0 \quad 0]\hat{\mathbf{x}}$$

O observador responderá 10 vezes mais rápido que a malha controlada projetada no Exercício de Avaliação 12.3.

Resposta: $\mathbf{L} = [216 \quad 9730 \quad 383.696]^{\mathrm{T}}$, onde T significa o vetor transposto.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção projetamos um observador na forma canônica de observador que utiliza a saída de um sistema para estimar as variáveis de estado. Na próxima seção vamos examinar as condições sob as quais não se pode projetar um observador.

12.6 Observabilidade

Lembre-se de que a capacidade de controlar todas as variáveis de estado é o requisito para se projetar um controlador. Os ganhos de retroação das variáveis de estado não podem ser projetados se alguma das variáveis de estado não for controlável. A não-controlabilidade pode ser mais bem visualizada com sistemas diagonalizados. O diagrama de fluxo de sinal mostrou claramente que a variável de estado não-controlável estava desconectada do sinal de controle do sistema.

Um conceito semelhante rege a capacidade de criar um projeto de observador. Especificamente, estamos usando a saída de um sistema para deduzir as variáveis de estado. Se alguma das variáveis de estado não tiver nenhum efeito sobre a saída, então não podemos calcular esta variável de estado observando a saída.

A capacidade de observar uma variável de estado a partir da saída é mais bem vista em sistemas diagonalizados. A Fig. 12.15(*a*) mostra um sistema onde cada uma das variáveis de estado pode ser observada na saída, uma vez que cada uma delas está conectada à saída. A Fig. 12.15(*b*) é um exemplo de sistema onde nem todas as variáveis de estado podem ser observadas na saída. Aqui, x_1 não está conectada à saída e não poderá ser estimada com base em uma medida da saída.

Elaboraremos agora a seguinte definição baseada na discussão anterior:

> Se for possível obter um vetor de estado inicial, $\mathbf{x}(t_0)$, a partir da medida de $u(t)$ e de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito a partir de t_0, o sistema é dito *observável*; em caso contrário o sistema é dito *não-observável*.

Enunciada de forma simples, a observabilidade é a capacidade de se deduzir as variáveis de estado com base no conhecimento da entrada, $u(t)$, e da saída, $y(t)$. A alocação de pólos de um observador é uma técnica de projeto viável somente para sistemas observáveis. Esta seção mostra como determinar, a priori, se a técnica de alocação de pólos é viável para o projeto do observador.

Observabilidade por Inspeção

Podemos explorar a observabilidade com base na equação de saída de um sistema diagonalizado. A equação de saída do sistema diagonalizado da Fig. 12.15(*a*) é

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [1 \quad 1 \quad 1]\mathbf{x} \tag{12.76}$$

Por outro lado, a equação de saída do sistema não-observável da Fig. 12.15(*b*) é

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [0 \quad 1 \quad 1]\mathbf{x} \tag{12.77}$$

Observe que a primeira coluna da Eq. (12.77) é igual a zero. Nos sistemas representados na forma em paralelo com autovalores distintos, se alguma coluna da matriz de acoplamento de saída for zero, o sistema diagonal é não-observável.

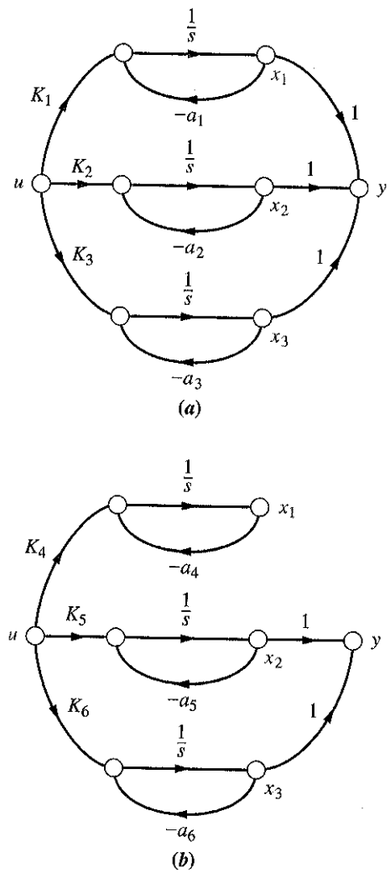


Fig. 12.15 Comparação entre sistema
a. observável e **b.** não-observável

A Matriz de Observabilidade

Uma vez mais, como para a controlabilidade, os sistemas representados sob outras formas que não sejam a forma diagonalizada não podem ser avaliados por inspeção quanto à observabilidade. Para determinar a observabilidade de sistemas sob quaisquer representações ou escolhas de variáveis de estado, podemos deduzir uma matriz dotada de uma propriedade particular se todas as variáveis de estado forem observáveis na saída. Enunciaremos agora os requisitos para observabilidade, incluindo forma, propriedade e nome desta matriz.

Um processo a controlar de ordem n cujas equações de estado e de saída são, respectivamente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{12.78a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.78b}$$

é completamente observável[6] se a matriz

$$\mathbf{O}_\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{12.79}$$

for de posto n, onde $\mathbf{O}_\mathbf{M}$ é chamada a matriz de *observabilidade*.[7]

Os dois exemplos a seguir ilustram o uso da matriz de observabilidade.

[6]*Completamente observável* significa que todas as variáveis de estado são observáveis. Neste livro usamos *observável* para significar *completamente observável*.
[7]Veja Ogata (1990; 706-08) para a dedução.

Exemplo 12.6

Observabilidade por intermédio da matriz de observabilidade

Problema Determinar se o sistema da Fig. 12.16 é observável.

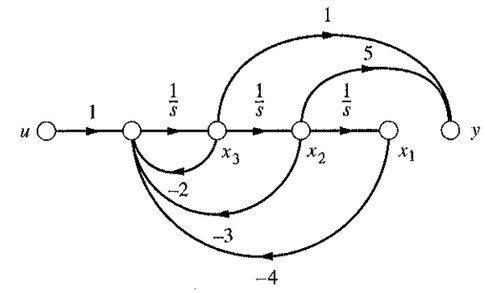


Fig. 12.16 Sistema do Exemplo 12.6

Solução As equações de estado e de saída da representação do sistema são

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{12.80a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [0 \quad 5 \quad 1]\mathbf{x} \tag{12.80b}$$

Em conseqüência, a matriz de observabilidade, $\mathbf{O}_\mathbf{M}$, é

$$\mathbf{O}_\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \\ -12 & -13 & -9 \end{bmatrix} \tag{12.81}$$

Como o determinante de $\mathbf{O}_\mathbf{M}$ é igual a –344, $\mathbf{O}_\mathbf{M}$ é de posto total igual a 3. O sistema é, portanto, observável.

Você poderia ter sido mal conduzido e concluído por inspeção que o sistema era não-observável porque a variável de estado x_1 não alimenta *diretamente* a saída. Lembre-se de que as conclusões, por inspeção, a respeito de observabilidade, são válidas somente para sistemas diagonalizados que possuam autovalores distintos.

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap12p5 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para testar um sistema quanto à observabilidade. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 12.6.

Exemplo 12.7

Não-observabilidade por intermédio da matriz de observabilidade

Problema Determinar se o sistema da Fig. 12.17 é observável

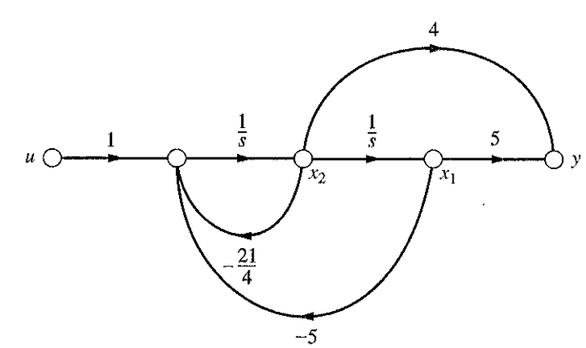


Fig. 12.17 Sistema do Exemplo 12.7

Solução As equações de estado e de saída para o sistema são

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -21/4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{12.82a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [5 \quad 4]\mathbf{x} \tag{12.82b}$$

A matriz de observabilidade, $\mathbf{O}_M$, deste sistema é

$$\mathbf{O}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -20 & -16 \end{bmatrix} \tag{12.83}$$

O determinante desta matriz de observabilidade é igual a 0. Por conseguinte, a matriz de observabilidade não tem posto máximo e o sistema é não-observável.

Uma vez mais, você poderia concluir por inspeção que o sistema é observável porque todos os estados alimentam a saída. Lembre-se de que a observabilidade por inspeção é válida somente para a representação diagonalizada de sistemas com autovalores distintos.

Exercício de Avaliação 12.5

Problema: Determinar se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [4 \quad 6 \quad 8]\mathbf{x}$$

é observável.

Resposta: Observável.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Agora que discutimos a observabilidade e a matriz de observabilidade, estamos prontos para falar sobre o projeto de um observador para um processo a controlar não representado na forma canônica de observador.

12.7 Abordagens Alternativas para o Projeto de Observadores

Discutimos anteriormente neste capítulo como projetar controladores para sistemas não representados na forma de variáveis de fase. Um dos métodos consistiu em igualar os coeficientes de $\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})]$ aos coeficientes do polinômio característico desejado. Este método pode conduzir a cálculos difíceis para os sistemas de ordem elevada. Um outro método consistiu em transformar a representação qualquer na representação com variáveis de fase, projetar o controlador e transferir o projeto de volta à sua representação original. As transformações foram deduzidas com base na matriz de controlabilidade.

Nesta seção usamos uma idéia semelhante para o projeto de observadores de sistemas não representados na forma canônica de observador. Um dos métodos consiste em igualar os coeficientes de $\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})]$ aos coeficientes do polinômio característico desejado. Uma vez mais, este método pode conduzir a cálculos difíceis para os sistemas de ordem elevada. Um outro método consiste em transformar primeiro a representação do processo a controlar na forma canônica de observador, de forma que as equações de projeto sejam simples, em seguida executar o projeto na forma canônica e finalmente transferir o projeto de volta à sua representação original. Persigamos este segundo método.

Primeiramente, deduziremos a transformação entre uma representação qualquer de um sistema e sua representação canônica de observador. Suponha um processo a controlar não representado na forma canônica de observador,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{12.84a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{12.84b}$$

cuja matriz de observabilidade é

$$\mathbf{O}_{Mz} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{12.85}$$

Admita, agora, que o sistema possa ser transformado na forma canônica de observador, $\mathbf{x}$, por meio da transformação

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{12.86}$$

Substituindo a Eq. (12.86) na Eq. (12.84) e pré-multiplicando a equação de estado por $\mathbf{P}^{-1}$, constatamos que as equações de estado na forma canônica de observador são

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{12.87a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{12.87b}$$

cuja matriz de observabilidade, $\mathbf{O}_{Mx}$, é

$$\mathbf{O}_{Mx} = \begin{bmatrix} \mathbf{CP} \\ \mathbf{CP}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) \\ \mathbf{CP}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) \\ \vdots \\ \mathbf{CP}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}\mathbf{P} \tag{12.88}$$

Substituindo a Eq. (12.85) na Eq. (12.88) e resolvendo para $\mathbf{P}$, obtemos

$$\mathbf{P} = \mathbf{O}_{Mz}^{-1}\mathbf{O}_{Mx} \tag{12.89}$$

Portanto, a matriz de transformação, $\mathbf{P}$, pode ser determinada com base nas duas matrizes de observabilidade.

Após transformar a representação do sistema na forma canônica de observador, projetamos os ganhos de retroação, $\mathbf{L}_x$, como na Seção 12.5. Usando as matrizes com base na Eq. (12.87) e a forma sugerida pela Eq. (12.64), temos

$$\dot{\mathbf{e}}_x = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{L}_x\mathbf{CP})\mathbf{e}_x \tag{12.90a}$$

$$y - \hat{y} = \mathbf{CP}\mathbf{e}_x \tag{12.90b}$$

Como $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}$ e $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{z}}$, então $\mathbf{e}_x = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_z$. A substituição de $\mathbf{e}_x = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_z$ nas Eqs. (12.90) transforma as Eqs. (12.90) de volta na sua representação original. O resultado é

$$\dot{\mathbf{e}}_z = (\mathbf{A} - \mathbf{PL}_x\mathbf{C})\mathbf{e}_z \tag{12.91a}$$

$$y - \hat{y} = \mathbf{C}\mathbf{e}_z \tag{12.91b}$$

Comparando a Eq. (12.91*a*) com a Eq. (12.64*a*), vemos que o vetor de ganho do observador é

$$\mathbf{L}_z = \mathbf{PL}_x \tag{12.92}$$

Demonstraremos agora o projeto de um observador para um processo a controlar não representado na forma canônica de observador. O primeiro exemplo utiliza transformações de ida e volta para a forma canônica de observador. O segundo exemplo iguala coeficientes sem transformação. Este método, contudo, pode se tornar difícil se a ordem do sistema for elevada.

Exemplo 12.8

Projeto de observador através de transformação

Problema Projetar um observador para o processo a controlar,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)} \tag{12.93}$$

representado na forma em cascata. O desempenho a malha fechada do observador é regido pelo polinômio característico usado no Exemplo 12.5: $s^3 + 120s^2 + 2500s + 50.000$.

Solução Primeiramente represente o processo em sua forma original em cascata.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{12.94a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{z} \tag{12.94b}$$

A matriz de observabilidade, $\mathbf{O}_{Mz}$, é,

$$\mathbf{O}_{Mz} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 25 & -7 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.95}$$

cujo determinante é igual a 1. Portanto, o sistema é observável.

A equação característica do processo a controlar é

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 = 0 \tag{12.96}$$

Podemos usar os coeficientes deste polinômio característico para obter a forma canônica de observador:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_x\mathbf{x} + \mathbf{B}_x u \tag{12.97a}$$

$$y = \mathbf{C}_x\mathbf{x} \tag{12.97b}$$

onde

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}_x = [1 \quad 0 \quad 0] \tag{12.98}$$

A matriz de observabilidade para a forma canônica de observador é

$$\mathbf{O}_{Mx} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x \\ \mathbf{C}_x\mathbf{A}_x \\ \mathbf{C}_x\mathbf{A}_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 47 & -8 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.99}$$

Projetamos agora o observador para a forma canônica de observador. Primeiramente formamos $(\mathbf{A}_x - \mathbf{L}_x\mathbf{C}_x)$,

$$\mathbf{A}_x - \mathbf{L}_x\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$= \begin{bmatrix} -(8 + l_1) & 1 & 0 \\ -(17 + l_2) & 0 & 1 \\ -(10 + l_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.100}$$

cujo polinômio característico é

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_x - \mathbf{L}_x\mathbf{C}_x)] = s^3 + (8 + l_1)s^2 + (17 + l_2)s + (10 + l_3) \tag{12.101}$$

Igualando este polinômio à equação característica do observador a malha fechada desejado, $s^3 + 120s^2 + 2500s + 50.000$, obtemos

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 112 \\ 2483 \\ 49.990 \end{bmatrix} \tag{12.102}$$

Agora transforme o projeto de volta à sua representação original. Usando a Eq. (12.89), a matriz de transformação é

$$\mathbf{P} = \mathbf{O}_{Mz}^{-1}\mathbf{O}_{Mx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.103}$$

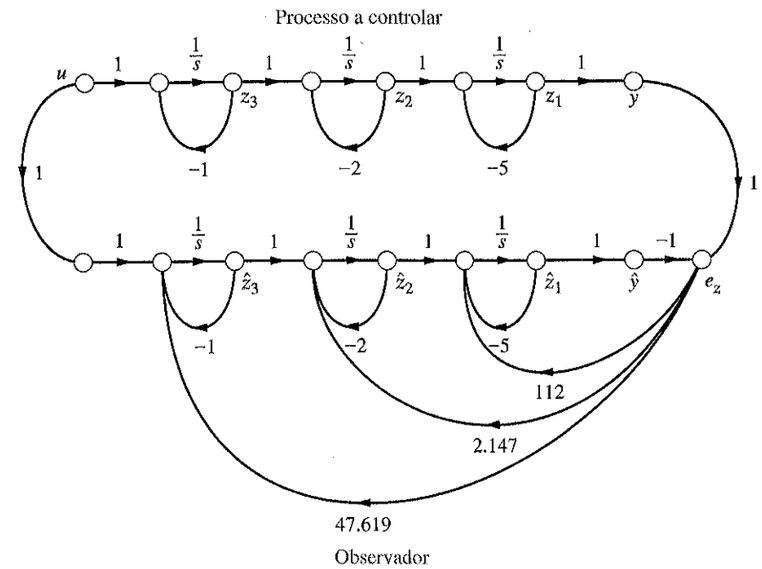
Transformando $\mathbf{L}_x$ na representação original, obtemos

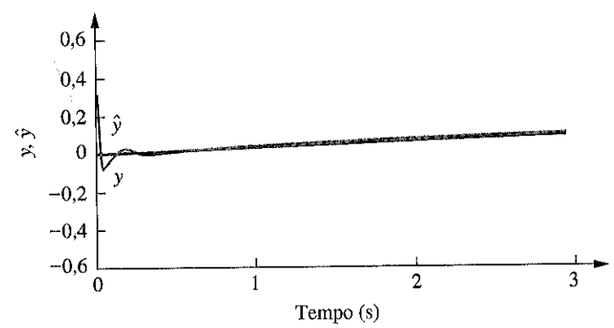
$$\mathbf{L}_z = \mathbf{P}\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 112 \\ 2147 \\ 47.619 \end{bmatrix} \tag{12.104}$$

A configuração final está mostrada na Fig. 12.18.

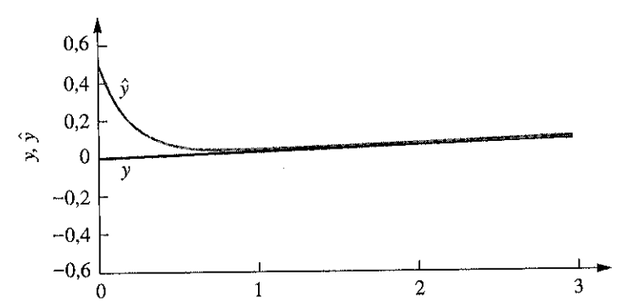
A simulação do observador está mostrada na Fig. 12.19(*a*). Para demonstrar o efeito do projeto do observador, a Fig. 12.19(*b*) mostra a velocidade reduzida se o observador for simplesmente uma cópia do processo a controlar com todos os percursos de retroação do observador desconectados.

Fig. 12.18 Projeto de observador





(*a*)



(*b*)

Fig. 12.19 Simulação da resposta ao degrau de um observador: **a.** a malha fechada; **b.** a malha aberta com os ganhos do observador desconectados

MATLAB

Os estudantes que estão usando o MATLAB devem executar agora o script cap12p6 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um observador de um processo não representado na forma canônica de observador. Você verá como o MATLAB não requer redução à forma canônica de observador. Este exercício usa o MATLAB para resolver o Exemplo 12.8.

Exemplo 12.9

Projeto de observador igualando coeficientes

Problema A Eq. (12.105) mostra um modelo em escala no tempo do nível de glicose no sangue do corpo humano. A saída do sistema é o desvio da concentração de glicose em relação ao seu valor médio em mg/100 ml e a entrada é a taxa de injeção intravenosa de glicose em g/kg/h (Milhorn, 1996).

$$G(s) = \frac{407(s + 0{,}916)}{(s + 1{,}27)(s + 2{,}69)} \tag{12.105}$$

Projetar um observador para variáveis de fase com uma resposta transitória descrita por $\zeta = 0{,}7$ e $\omega_n = 100$.

Solução Primeiramente devemos modelar o processo a controlar na forma de variáveis de fase. O resultado está mostrado na Fig. 12.20(*a*).

Para o processo a controlar,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3{,}42 & -3{,}96 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = [372{,}81 \quad 407] \tag{12.106}$$

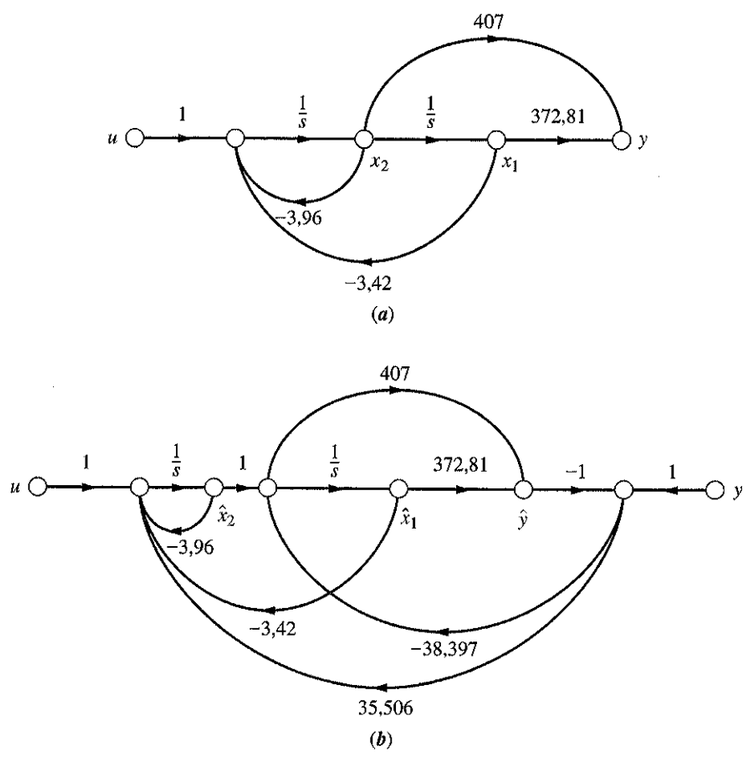


Fig. 12.20 a. Processo a controlar; **b.** observador projetado para o Exemplo 12.9

O cálculo da matriz de observabilidade, $\mathbf{O}_M = [\mathbf{C}\ \mathbf{CA}]^T$, mostra que o processo a controlar é observável e que podemos prosseguir com o projeto. A seguir, determine a equação característica do observador. Primeiro, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{LC} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3{,}42 & -3{,}96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [372{,}81 \quad 407] \\ &= \begin{bmatrix} -372{,}81 l_1 & (1 - 407 l_1) \\ -(3{,}42 + 372{,}81 l_2) & -(3{,}96 + 407 l_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12.107}$$

Calcule agora $\det[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})] = 0$ para obter a equação característica:

$$\begin{aligned} \det[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})] &= \det \begin{bmatrix} (\lambda + 372{,}81 l_1) & -(1 - 407 l_1) \\ (3{,}42 + 372{,}81 l_2) & (\lambda + 3{,}96 + 407 l_2) \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (3{,}96 + 372{,}81 l_1 + 407 l_2)\lambda \\ &\quad + (3{,}42 + 84{,}39 l_1 + 372{,}81 l_2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12.108}$$

Com base no enunciado do problema, desejamos $\zeta = 0{,}7$ e $\omega_n = 100$. Por conseguinte,

$$\lambda^2 + 140\lambda + 10.000 = 0 \tag{12.109}$$

Comparando os coeficientes das Eqs. (12.108) e (12.109), obtemos os valores de l_1 e de l_2, $-38{,}397$ e $35{,}506$, respectivamente. Usando a Eq. (12.60), onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3{,}42 & -3{,}96 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [372{,}81 \quad 407]; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -38{,}397 \\ 35{,}506 \end{bmatrix} \tag{12.110}$$

o observador é implementado e mostrado na Fig. 12.20(*b*).

Exercício de Avaliação 12.6

Problema: Projetar um observador para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{1}{(s + 7)(s + 8)(s + 9)}$$

cujo processo a controlar estimado é representado no espaço de estados sob a forma em cascata como

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = [1 \quad 0 \quad 0]\,\hat{\mathbf{z}}$$

A resposta ao degrau do observador a malha fechada deve apresentar uma ultrapassagem de 10% com um tempo de assentamento de 0,1 s.

Resposta:

$$\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 456 \\ 28.640 \\ 1{,}54 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Agora que exploramos o projeto da resposta transitória usando técnicas no espaço de estados, voltemo-nos ao projeto das características de erro de estado estacionário.

12.8 Projeto de Erro de Estado Estacionário por Intermédio do Controle Integral

Na Seção 7.8 discutimos como *analisar* sistemas representados no espaço de estados quanto ao erro de estado estacionário. Nesta seção discutiremos como *projetar* o erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados.

Considere a Fig. 12.21. O controlador projetado anteriormente discutido na Seção 12.2 está mostrado no interior da caixa delimitada por linhas tracejadas. Um percurso de retroação a partir da saída foi adicionado para formar o erro, e, que alimenta o percurso de ação à frente para o processo controlado por intermédio de um integrador. O integrador aumenta o tipo do sistema e reduz a zero o erro finito anterior. Deduziremos agora a forma das equações de estado para o sistema da Fig. 12.21 e em seguida usaremos essa forma para projetar um controlador. Por conseguinte, seremos capazes de projetar um sistema para erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau bem como projetar a resposta transitória desejada.

Uma variável de estado adicional, x_N, foi adicionada na saída do integrador mais à esquerda. O erro é a derivada desta variável. Agora, com base na Fig. 12.21,

$$\dot{x}_N = r - \mathbf{Cx} \tag{12.111}$$

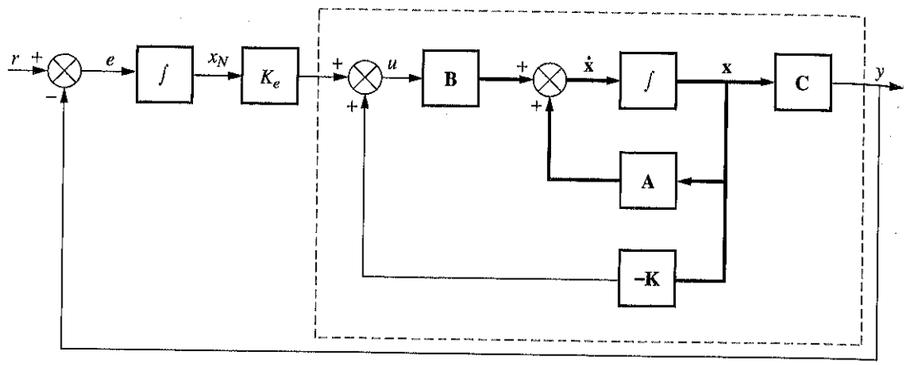


Fig. 12.21 Controle integral para projeto com erro de estado estacionário nulo

Escrevendo as equações de estado com base na Fig. 12.21, temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12.112a}$$

$$\dot{x}_N = -\mathbf{C}\mathbf{x} + r \tag{12.112b}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.112c}$$

As Eqs. (12.112) podem ser escritas como vetores e matrizes aumentados. Por conseguinte,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.113a}$$

$$y = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} \tag{12.113b}$$

Mas

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + K_e x_N = -[\mathbf{K} \quad -K_e] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} \tag{12.114}$$

Substituindo a Eq. (12.114) na Eq. (12.113*a*) e simplificando, obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) & \mathbf{B}K_e \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.115a}$$

$$y = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} \tag{12.115b}$$

Portanto, o tipo de sistema aumentou e podemos usar a equação característica associada à Eq. (12.115*a*) para projetar **K** e K_e para atender a resposta transitória. Perceba que agora temos um pólo adicional para alocar. O efeito sobre a resposta transitória de qualquer dos zeros a malha fechada no projeto final também deve ser levado em consideração. Uma hipótese possível é a de que os zeros a malha fechada serão os mesmos do processo a malha aberta. Esta hipótese, que naturalmente precisa ser verificada, sugere a alocação dos pólos de ordem superior nas posições dos zeros a malha fechada. Demonstremos com um exemplo.

Exemplo 12.10

Projeto de controle integral

Problema Considere o processo a controlar das Eqs. (12.116):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{12.116a}$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x} \tag{12.116b}$$

a. Projete um controlador sem controle integral para obter uma ultrapassagem de 10% e um tempo de assentamento de 0,5 s. Calcule o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário.

b. Repita o projeto de (a) usando controle integral. Calcule o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário.

Solução

a. Usando os requisitos de tempo de assentamento e de ultrapassagem percentual, constatamos que o polinômio característico desejado é

$$s^2 + 16s + 183{,}1 \tag{12.117}$$

Como o processo a controlar está representado na forma de variáveis de fase, o polinômio característico para o processo controlado com retroação de estado é

$$s^2 + (5 + k_2)s + (3 + k_1) \tag{12.118}$$

Igualando os coeficientes das Eqs. (12.117) e (12.118), temos

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] = [180{,}1 \quad 11] \tag{12.119}$$

Com base na Eq. (12.3), o processo controlado com retroação de variáveis de estado representado na forma de variáveis de fase é

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -183{,}1 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.120a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [1 \quad 0]\mathbf{x} \tag{12.120b}$$

Usando a Eq. (7.96), constatamos que o erro de estado estacionário a uma entrada em degrau é

$$\begin{aligned} e(\infty) &= 1 + \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \\ &= 1 + [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -183{,}1 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 0{,}995 \end{aligned} \tag{12.121}$$

b. Usamos agora as Eqs. (12.115) para representar o processo com controle integral a seguir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_e \\ -[1 \quad 0] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3 + k_1) & -(5 + k_2) & K_e \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \end{aligned} \tag{12.122a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} \tag{12.122b}$$

Usando a Eq. (3.73) e o processo a controlar das Eqs. (12.116), descobrimos que a função de transferência do processo a controlar é $G(s) = 1/(s^2 + 5s + 3)$. O polinômio característico desejado para o sistema com controle integral a malha fechada está mostrado na Eq. (12.117). Como o processo a controlar não possui zeros, vamos supor que não haverá zeros no sistema a malha fechada e aumentar a Eq. (12.117) com um terceiro pólo, $(s + 100)$, que possui parte real maior que cinco vezes a dos pólos dominantes de segunda ordem. O polinômio característico desejado para o sistema de terceira ordem a malha fechada é

$$(s + 100)(s^2 + 16s + 183{,}1) = s^3 + 116s^2 + 1783{,}1s + 18.310 \tag{12.123}$$

O polinômio característico para o sistema das Eqs. (12.122) é

$$s^3 + (5 + k_2)s^2 + (3 + k_1)s + K_e \tag{12.124}$$

Igualando os coeficientes das Eqs. (12.123) e (12.124), obtemos

$$k_1 = 1780{,}1 \tag{12.125a}$$

$$k_2 = 111 \tag{12.125b}$$

$$K_e = 18.310 \tag{12.125c}$$

Substituindo estes valores nas Eqs. (12.122) resulta o sistema com controle integral a malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783{,}1 & -116 & 18.310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12.126a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} \tag{12.126b}$$

Para verificar nossa hipótese quanto a zeros da função de transferência, aplicamos a Eq. (3.73) às Eqs. (12.126) e descobrimos que a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{18.310}{s^3 + 116s^2 + 1783{,}1s + 18.310} \tag{12.127}$$

Como a função de transferência verifica nosso projeto, temos a resposta transitória desejada.

Determinemos agora o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau. Aplicando a Eq. (7.96) às Eqs. (12.126), obtemos

$$e(\infty) = 1 + [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783{,}1 & -116 & 18.310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{12.128}$$

Por conseguinte, o sistema se comporta como um sistema do Tipo 1.

Exercício de Avaliação 12.7

Problema: Projetar um controlador integral para o processo a controlar

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad 1]\,\mathbf{x}$$

que produza uma resposta ao degrau com 10% de ultrapassagem, com um instante de pico de 2 s e erro de estado estacionário nulo.

Resposta: $\mathbf{K} = [2{,}21 \quad -2{,}7]$, $K_e = 3{,}79$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Agora que projetamos controladores e observadores para resposta transitória e erro de estado estacionário, resumiremos o capítulo com um estudo de caso demonstrando o procedimento de projeto.

Estudo de Caso

Projeto

Controle de Antena: Projeto de Controlador e de Observador

Neste estudo de caso usamos o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, em andamento ao longo do livro, para demonstrar o projeto combinado de um controlador e de um observador. Iremos supor que os estados não estejam disponíveis e que devem ser estimados com base na saída. O diagrama de blocos do sistema original está mostrado na parte interna da capa dianteira (Configuração 1). Ajustando arbitrariamente o ganho do pré-amplificador em 200 e removendo a retroação existente, a função de transferência de ação à frente é simplificada para a forma mostrada na Fig. 12.22.

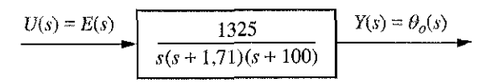


Fig. 12.22 Diagrama de blocos simplificado do sistema de controle de uma antena mostrado na contracapa dianteira (Configuração 1) com $K = 200$

O estudo de caso especificará uma resposta para o sistema e uma resposta transitória mais rápida para o observador. A configuração final de projeto consistirá no processo a controlar, do observador e do controlador, como mostrado conceitualmente na Fig. 12.23. Os projetos do observador e do controlador serão separados.

Problema Usando o diagrama simplificado do sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrado na Fig. 12.22, projete um controlador que leve a uma ultrapassagem de 10% e a um tempo de assentamento de 1 s. Localize o terceiro pólo dez vezes mais longe do eixo imaginário que o par de pólos de segunda ordem dominantes.

Admita que as variáveis de estado do processo a controlar não estejam acessíveis e projete um observador para estimar os estados. A resposta transitória desejada para o observador contempla uma ultrapassagem de 10% e uma freqüência natural 10 vezes superior à da resposta acima. Como no caso do controlador, posicione o terceiro pólo dez vezes mais longe do eixo imaginário que o par de pólos dominantes do observador.

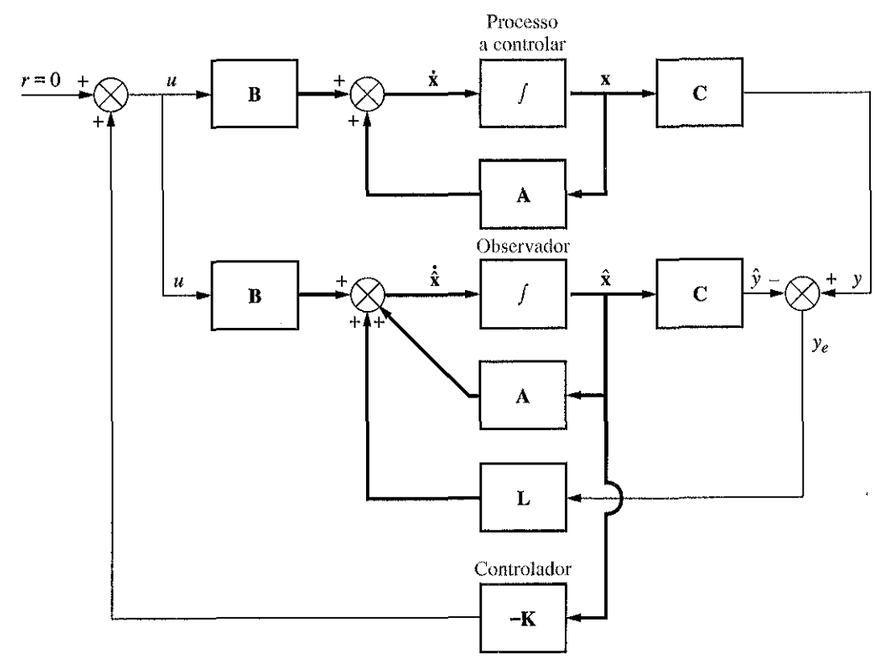


Fig. 12.23 Configuração conceitual de projeto no espaço de estados, mostrando processo a controlar, observador e controlador

Solução

Projeto do Controlador Projetamos primeiramente o controlador determinando a equação característica. Uma ultrapassagem de 10% e um tempo de assentamento de 1 s levam a $\zeta = 0{,}591$ e a $\omega_n = 6{,}77$. Por conseguinte, a equação característica para os pólos dominantes é $s^2 + 8s + 45{,}8 = 0$, onde os pólos dominantes estão situados em $-4 \pm j5{,}46$. O terceiro pólo ficará situado dez vezes mais longe do eixo imaginário, ou seja, em -40. Portanto, a equação característica desejada para o sistema a malha fechada é

$$(s^2 + 8s + 45{,}8)(s + 40) = s^3 + 48s^2 + 365{,}8s + 1832 = 0 \tag{12.129}$$

A seguir determinamos a equação característica real do sistema a malha fechada. O primeiro passo consiste em modelar o sistema a malha fechada no espaço de estados e então obter sua equação característica. Com base na Fig. 12.22, a função de transferência do processo a controlar é

$$G(s) = \frac{1325}{s(s + 1{,}71)(s + 100)} = \frac{1325}{s(s^2 + 101{,}71s + 171)} \tag{12.130}$$

Usando variáveis de fase, esta função de transferência é convertida no diagrama de fluxo de sinal mostrado na Fig. 12.24, e as equações de estado são escritas como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -171 & -101{,}71 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12.131a}$$

$$y = [1325 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.131b}$$

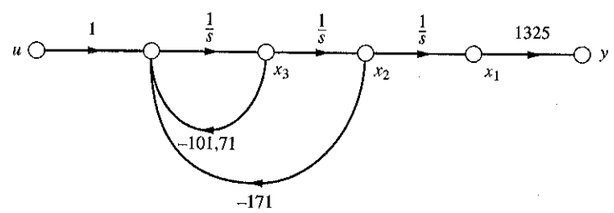


Fig. 12.24 Diagrama de fluxo de sinal para $G(s) = 1325/[s(s^2 + 101{,}75s + 171)]$

Fazemos agora uma pausa em nosso projeto para calcular a controlabilidade do sistema. A matriz de controlabilidade, $\mathbf{C}_M$, é

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -101{,}71 \\ 1 & -101{,}71 & 10.173{,}92 \end{bmatrix} \tag{12.132}$$

O determinante de $\mathbf{C}_M$ é -1; por conseguinte, o sistema é controlável.

Continuando com o projeto do controlador, mostramos a configuração do controlador com a retroação de todas as variáveis de estado na Fig. 12.25. Determinamos agora a equação característica do sistema da Fig. 12.25. Com base na Eq. (12.7) e na Eq. (12.131*a*), a matriz de sistema, $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, é

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -(171 + k_2) & -(101{,}71 + k_3) \end{bmatrix} \tag{12.133}$$

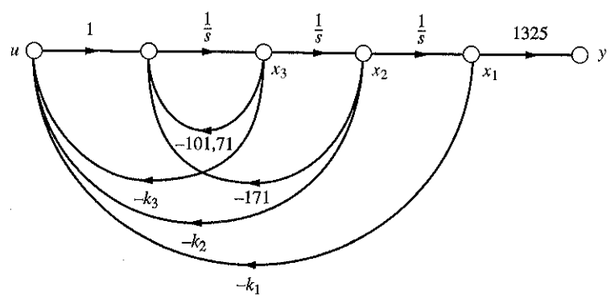


Fig. 12.25 Processo a controlar com retroação de estado para o projeto do controlador

Portanto, a equação característica do sistema a malha fechada é

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = s^3 + (101{,}71 + k_3)s^2 + (171 + k_2)s + k_1 = 0 \tag{12.134}$$

Igualando os coeficientes da Eq. (12.129) com os da Eq. (12.134), calculamos os k_i como a seguir:

$$k_1 = 1832 \tag{12.135a}$$

$$k_2 = 194{,}8 \tag{12.135b}$$

$$k_3 = -53{,}71 \tag{12.135c}$$

Projeto do Observador Antes de projetar o observador, testamos a observabilidade do sistema. Usando as matrizes **A** e **C** das Eqs. (12.131), a matriz de observabilidade, $\mathbf{O}_M$, é

$$\mathbf{O}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1325 & 0 & 0 \\ 0 & 1325 & 0 \\ 0 & 0 & 1325 \end{bmatrix} \tag{12.136}$$

O determinante de $\mathbf{O}_M$ é 1325^3. Portanto $\mathbf{O}_M$ tem posto 3, e o sistema é observável.

Prosseguimos agora o projeto do observador. Como a ordem do sistema não é elevada, projetaremos o observador diretamente sem primeiro convertê-lo à forma canônica de observador. Com base na Eq. (12.64*a*), precisamos obter primeiro $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$. As matrizes **A** e **C** das Eqs. (12.131) juntamente com

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \tag{12.137}$$

são usadas para calcular $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ como a seguir:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -1325l_1 & 1 & 0 \\ -1325l_2 & 0 & 1 \\ -1325l_3 & -171 & -101{,}71 \end{bmatrix} \tag{12.138}$$

A equação característica para o observador é calculada agora como

$$\begin{aligned} \det[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})] &= \lambda^3 + (1325l_1 + 101{,}71)\lambda^2 \\ &\quad + (134.800l_1 + 1325l_2 + 171)\lambda \\ &\quad + (226.600l_1 + 134.800l_2 + 1325l_3) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12.139}$$

Com base no enunciado do problema, os pólos do observador devem ser posicionados de modo a produzir 10% de ultrapassagem e uma freqüência natural 10 vezes a do par de pólos dominantes do sistema. Por conseguinte, os pólos dominantes do observador levam a $[s^2 + (2 \times 0{,}591 \times 67{,}7)s + 67{,}7^2] = (s^2 + 80s + 4583)$. A parte real das raízes deste polinômio é -40. O terceiro pólo é posicionado então 10 vezes mais longe do eixo imaginário em -400. A equação característica composta para o observador é

$$\begin{aligned} (s^2 + 80s + 4583)(s + 400) &= s^3 + 480s^2 + 36.580s \\ &\quad + 1.833.000 = 0 \end{aligned} \tag{12.140}$$

Igualando os coeficientes das Eqs. (12.139) e (12.140), calculamos os ganhos do observador:

$$l_1 = 0{,}286 \tag{12.141a}$$

$$l_2 = -1{,}57 \tag{12.141b}$$

$$l_3 = 1494 \tag{12.141c}$$

A Fig. 12.26, que segue a configuração geral da Fig. 12.23, mostra o projeto completo, incluindo o controlador e o observador.

Os resultados do projeto estão mostrados na Fig. 12.27. A Fig. 12.27(*a*) mostra a resposta ao impulso do sistema a malha fechada sem qualquer diferença entre o processo a controlar e seu modelo como observador. A ultrapassagem e o tempo de assentamento atendem aproximadamente os requisitos definidos no enunciado do problema com 10% e 1 s, respectivamente. Na Fig. 12.27(*b*), vemos a resposta projetada no interior do observador. Uma condição inicial de 0,006 foi atribuída a x_1 no processo para tornar diferentes os modelos do processo a controlar

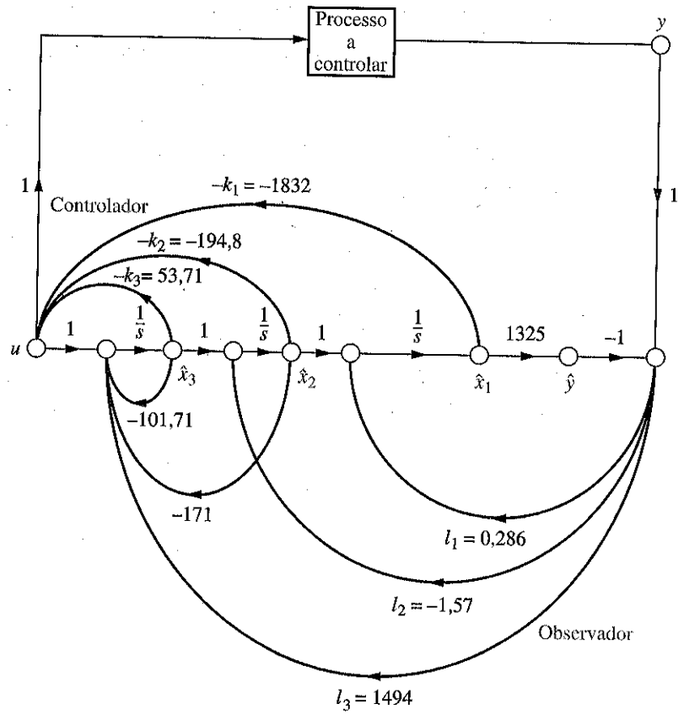
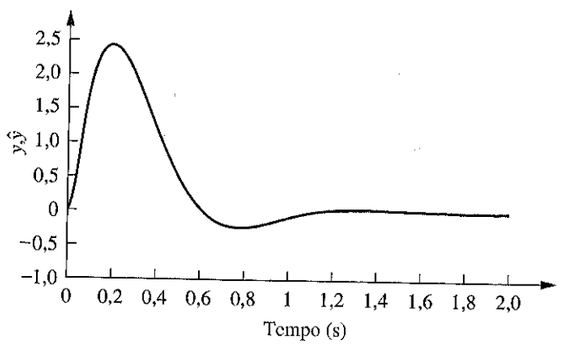
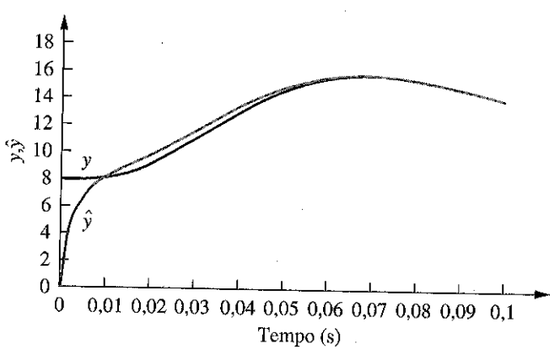


Fig. 12.26 Projeto completo no espaço de estados relativo ao sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrando o controlador e o observador



(*a*)



(*b*)

Fig. 12.27 Resposta projetada do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute: **a.** resposta ao impulso — processo a controlar e observador com as mesmas condições iniciais, $x_1(0) = \hat{x}_1(0)$; **b.** parte da resposta ao impulso — processo a controlar e observador com condições iniciais diferentes, $x_1(0) = 0{,}006$ para o processo e $\hat{x}_1(0) = 0$ para o observador

e do observador. Observe que a resposta do observador segue a resposta do processo a controlar quando o tempo de 0,006 s for alcançado

Desafio Damos agora a você um estudo de caso para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo: Foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente (Configuração 3). Se o ganho do pré-amplificador for $K = 20$, faça o seguinte:

a. Projete um controlador para obter 15% de ultrapassagem e um tempo de assentamento de 2 s. Posicione o terceiro pólo 10 vezes mais longe do eixo imaginário que o par de pólos dominantes de segunda ordem.

b. Refaça o diagrama esquemático mostrado na contracapa dianteira, onde se vê um tacômetro que propicia retroação de velocidade juntamente com ganhos ou atenuadores adicionais necessários para implementar os ganhos de retroação das variáveis.

c. Admita que o tacômetro não esteja disponível para fornecer retroação. Projete um observador para estimar os estados. O observador responderá com 10% de ultrapassagem e com uma freqüência natural 10 vezes superior à da resposta. Posicione o terceiro pólo 10 vezes mais afastado do eixo imaginário que o par de pólos dominantes de segunda ordem.

d. Refaça o diagrama esquemático mostrado na contracapa dianteira, mostrando a implementação do controlador e do observador.

MATLAB

e. Repita (a) e (c) usando o MATLAB.

Sumário

Este capítulo seguiu o caminho estabelecido pelos Caps. 9 e 11– projeto de sistemas de controle. O Cap. 9 usou as técnicas do lugar das raízes para projetar sistemas de controle com uma resposta transitória desejada. As técnicas de resposta de freqüência senoidal foram tratadas no Cap. 11, e neste capítulo usamos as técnicas de projeto no espaço de estados.

O projeto no espaço de estados consiste em especificar as localizações desejadas para os pólos do sistema e, em seguida, projetar um controlador elaborado por meio de ganhos de retroação das variáveis de estado visando atender esses requisitos. Se as variáveis de estado não estiverem disponíveis, projeta-se um observador para imitar o processo a controlar e fornecer variáveis de estado estimadas.

O projeto do controlador consiste em efetuar a retroação das variáveis de estado para a entrada, u, do sistema por meio de ganhos especificados. Os valores desses ganhos são obtidos igualando-se os coeficientes da equação característica do sistema aos coeficientes da equação característica desejada. Em alguns casos, o sinal de controle, u, não pode afetar uma ou mais variáveis de estado. Chamamos um sistema com esta característica de sistema *não-controlável*. Para este sistema, não é possível um projeto completo. Usando a matriz de controlabilidade, o projetista pode dizer se o sistema é ou não controlável antes do projeto.

O projeto do observador consiste em efetuar a retroação do erro entre a resposta real e a resposta desejada. Este erro é transformado em retroação para as derivadas das variáveis de estado por intermédio de ganhos especificados das variáveis de estado. Os valores desses ganhos são obtidos igualando-se os coeficientes da equação característica do observador aos coeficientes da equação característica desejada. A resposta do observador é projetada para ser mais rápida que a do controlador, de modo que as variáveis efetivamente pareçam instantâneas em relação ao controlador. Em alguns sistemas, as variáveis de estado não podem ser deduzidas a partir da saída do sistema, como é necessário ao observador. Um sistema com estas características é chamado de *não-observável*. Usando a matriz de observabilidade, o projetista pode dizer se o sistema é ou não-observável antes do projeto. Os observadores só podem ser projetados para sistemas observáveis.

Finalmente, discutimos formas de melhorar o desempenho de erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados. A inclusão de uma integração antes do processo a controlar leva à melhoria no erro de estado estacionário. Neste capítulo, esta integração adicional foi incorporada no projeto do controlador.

Três vantagens são evidentes no projeto no espaço de estados. Primeiro, em contraste com o método do lugar das raízes, é possível especificar a posição de todos os pólos para assegurar um efeito desprezível dos pólos não-dominantes sobre a resposta transitória. Com o lugar das raízes, fomos forçados a justificar a hipótese de que os pólos não afetavam consideravelmente a resposta transitória. Nem sempre somos capazes de fazer isso. Segundo, com o uso de um observador não somos mais forçados a adquirir as variáveis reais para efetuar a retroação. A vantagem aqui é que algumas vezes as variáveis de estado não podem ser acessadas fisicamente, ou pode se tornar muito caro prover esse acesso. Finalmente, os métodos mostrados levam à automação do projeto usando o computador digital.

Uma desvantagem dos métodos de projeto tratados neste capítulo é a incapacidade de projetar a localização de pólos e zeros a malha aberta e a malha fechada que podem afetar a resposta transitória. No projeto com o lugar das raízes e com a resposta de freqüência, os zeros do controlador do compensador por atraso ou avanço de fase podem ser especificados. Uma outra desvantagem dos métodos no espaço de estados diz respeito à capacidade do projetista em relacionar a localização de todos os pólos com a resposta desejada; esta relação nem sempre é evidente. Além disso, uma vez que o projeto seja concluído, podemos não ficar satisfeitos com a sensibilidade a variações de parâmetros. Finalmente, como discutido anteriormente, as técnicas no espaço de estados não satisfazem nossa intuição como as técnicas do lugar das raízes, onde o efeito de variações de parâmetros pode ser visto imediatamente como alterações na localização dos pólos a malha fechada.

No próximo capítulo retornaremos ao domínio de freqüência e projetaremos sistemas digitais usando o ajuste de ganho e a compensação em cascata.

Perguntas de Revisão

1. Descreva sucintamente uma vantagem que as técnicas no espaço de estados apresentam em relação às técnicas do lugar das raízes na alocação de pólos a malha fechada para o projeto da resposta transitória.
2. Descreva sucintamente o procedimento de projeto de um controlador.
3. Um mesmo sistema pode ser representado por diferentes diagramas de fluxo de sinal. Que forma de representação facilita o cálculo dos ganhos das variáveis de estado visando ao projeto do controlador?
4. Para que se efetive o projeto completo de um controlador, o sistema deve ser controlável. Descreva o significado físico de controlabilidade.
5. Sob que condições é possível inspecionar o diagrama de fluxo de sinal de um sistema e determinar imediatamente sua controlabilidade?
6. Para se determinar matematicamente a controlabilidade, constrói-se a matriz de controlabilidade e calcula-se seu posto. Qual é a última etapa na determinação da controlabilidade se a matriz de controlabilidade for uma matriz quadrada?
7. O que é um observador?
8. Sob que condições você poderia usar um observador no projeto de um sistema de controle no espaço de estados?
9. Descreva sucintamente a configuração de um observador.
10. Que configuração do processo a controlar torna mais fácil projetar um observador?
11. Descreva sucintamente a técnica de projeto de um observador, dada a configuração descrita na Pergunta 9.
12. Compare a principal diferença entre a resposta transitória de um observador e a de um controlador. Por que existe esta diferença?
13. A partir de que equação você determina a equação característica do sistema compensado com controlador?
14. A partir de que equação você determina a equação característica de um observador?
15. Para que se efetive o projeto completo de um observador, o sistema deve ser observável. Descreva o significado físico de observabilidade.
16. Sob que condições é possível inspecionar o diagrama de fluxo de sinal de um sistema e determinar imediatamente sua observabilidade?
17. Para se determinar matematicamente a observabilidade, constrói-se a matriz de observabilidade e calcula-se seu posto. Qual é a última etapa na determinação da observabilidade se a matriz de observabilidade for uma matriz quadrada?

Problemas

1. Considere as seguintes funções de transferência, onde $G(s) = Y(s)/U(s)$, $Y(s)$ é a transformada de Laplace da saída e $U(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de controle de entrada:

   i. $G(s) = \dfrac{(s+1)}{s(s+2)}$

   ii. $G(s) = \dfrac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}$

   iii. $G(s) = \dfrac{10(s+2)(s+3)}{s(s+4)(s+5)}$

   iv. $G(s) = \dfrac{10s}{(s+2)(s+4)(s+6)}$

   v. $G(s) = \dfrac{s^2+2s+10}{(s+7)(s^2+3s+100)}$

   Para cada uma destas funções de transferência, faça o seguinte:
   a. Desenhe o diagrama de fluxo de sinal na forma de variáveis de fase.
   b. Adicione a retroação das variáveis de fase ao diagrama de fluxo de sinal.
   c. Para cada diagrama de fluxo de sinal a malha fechada, escreva as equações de estado.
   d. Escreva, *por inspeção*, a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, para os diagramas de fluxo a malha fechada.
   e. Verifique as respostas para $T(s)$ determinando as funções de transferência a malha fechada a partir das equações de estado e da Eq. (3.73).

2. As seguintes funções de transferência podem ser representadas por um diagrama de fluxo de sinal na forma em cascata.

   i. $G(s) = \dfrac{20(s+5)}{(s+1)(s+4)(s+6)}$

   ii. $G(s) = \dfrac{5(s^2+3s+7)}{(s+2)(s^2+2s+10)}$

   Para cada uma delas, faça o seguinte:
   a. Desenhe o diagrama de fluxo de sinal e mostre a retroação das variáveis de estado.
   b. Determine a função de transferência a malha fechada com retroação de variáveis de estado.

3. As seguintes funções de transferência podem ser representadas por um diagrama de fluxo de sinal na forma paralela.

   i. $G(s) = \dfrac{100(s+10)(s+20)}{s(s+15)(s+30)}$

   ii. $G(s) = \dfrac{50(s+3)(s+4)}{(s+5)(s+6)(s+7)}$

   Para cada uma delas, faça o seguinte:
   a. Desenhe o diagrama de fluxo de sinal e mostre a retroação das variáveis de estado.
   b. Determine a função de transferência a malha fechada com retroação de variáveis de estado.

4. Dada a seguinte função de transferência a malha aberta de um processo a controlar,

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

projete um controlador que leve a uma resposta com 10% de ultrapassagem e a 0,5 s de tempo de assentamento. Posicione o terceiro pólo 10 vezes mais longe do eixo imaginário que o par de pólos dominantes. Use as variáveis de fase como variáveis de estado para fazer a retroação.

5. Mostramos na Seção 12.2 que o projeto do controlador era mais fácil de ser implementado quando o sistema não-compensado estava representado em variáveis de fase com sua matriz de sistema na forma companheira inferior típica.
   a. Refaça o controlador genérico tratado na Seção 12.2, supondo que o processo a controlar seja representado na forma canônica de controlador em vez de na forma de variáveis de fase.
   b. Aplique sua dedução ao Exemplo 12.1 quando o processo a controlar não-compensado estiver representado na forma canônica de controlador.

6. Dada a seguinte função de transferência a malha aberta de um processo a controlar,

$$G(s) = \frac{100(s+2)(s+20)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

projete um controlador que leve a uma resposta com 15% de ultrapassagem e a 0,5 s de instante de pico. Posicione o terceiro pólo 10 vezes mais longe do eixo imaginário que o par de pólos dominantes. Use as variáveis de fase como variáveis de estado para fazer a retroação.

7. Dada a seguinte função de transferência a malha aberta de um processo a controlar,

$$G(s) = \frac{50(s+1)}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

projete um controlador que leve a uma resposta com 20% de ultrapassagem e a 1 s de tempo de assentamento. Posicione o terceiro pólo 10 vezes mais longe do eixo imaginário que o par de pólos dominantes. Use as variáveis de fase como variáveis de estado para fazer a retroação.

8. Repita o Problema 4 supondo que o processo a controlar esteja representado na forma em cascata. Não converta a representação para a forma de variáveis de fase.
9. Repita o Problema 7 supondo que o processo a controlar esteja representado na forma em paralelo. Não converta a representação para a forma de variáveis de fase.
10. Dado o processo a controlar mostrado na Fig. P12.1, que relação deve existir entre b_1 e b_2 para que o sistema seja não-controlável?

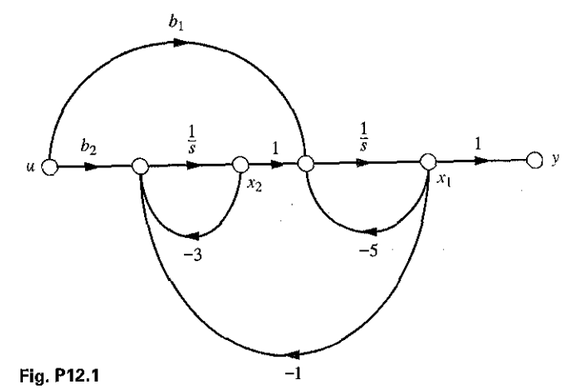


Fig. P12.1

11. Determinar a controlabilidade de cada um dos sistemas a controlar representados por diagramas de fluxo de sinal na Fig. P12.2. Se a controlabilidade puder ser determinada por inspeção, faça isto e depois verifique suas conclusões usando a matriz de controlabilidade.

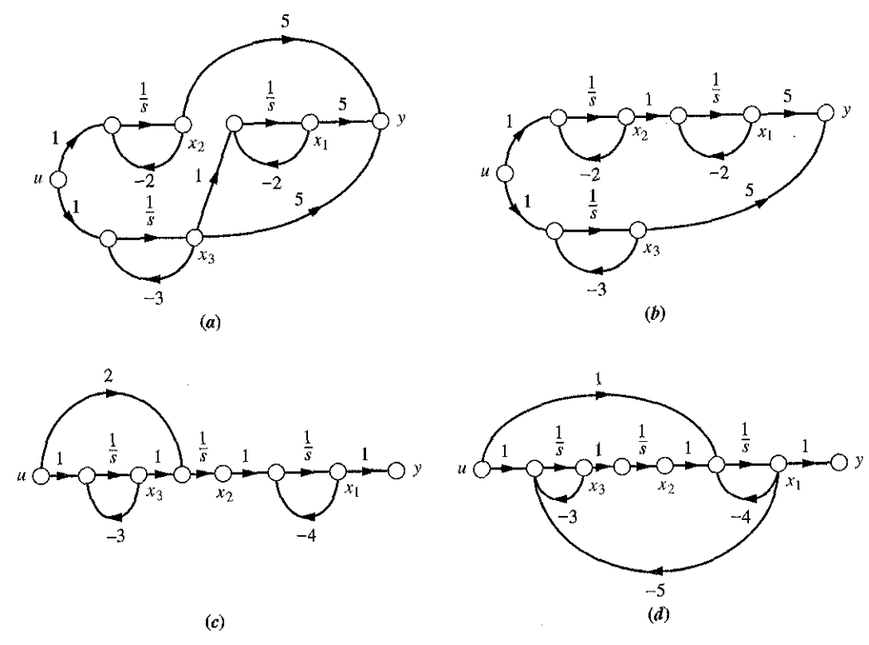
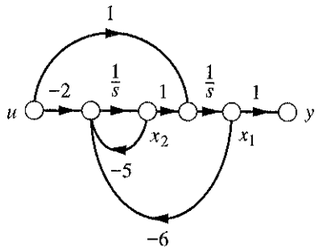
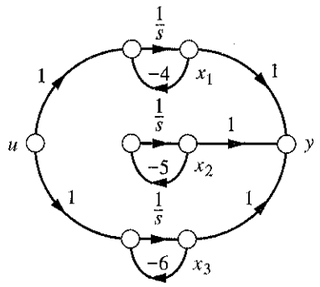


Fig. P12.2

Fig. P12.2 (continuação)



(*e*)



(*f*)

MATLAB

12. Use o MATLAB para determinar a controlabilidade dos sistemas das Figs. P12.2(*d*) e (*f*).

13. Discutimos na Seção 12.4 como projetar um controlador para sistemas não representados na forma de variáveis de fase com sua matriz companheira inferior típica. Descrevemos como converter a representação do sistema à forma de variáveis de fase, projetar o controlador e retornar à representação original. Esta técnica pode ser aplicada de modo igualmente fácil quando a representação original é convertida à forma canônica de controlador com sua matriz na forma companheira superior típica. Refaça o Exemplo 12.4 no texto projetando o controlador após a conversão do sistema não-compensado à forma canônica de controlador.

14. Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{(s+6)}{(s+3)(s+8)(s+10)}$$

Se o sistema estiver representado na forma em cascata, como mostrado na Fig. P12.3, projete um controlador que leve a uma resposta a malha fechada com 10% de ultrapassagem e com 1 s de tempo de assentamento. Projete o controlador transformando primeiro a representação do processo na forma de variáveis de fase.

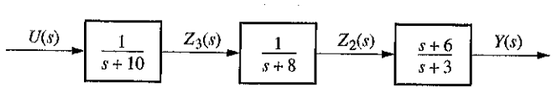


Fig. P12.3

MATLAB

15. Use o MATLAB para projetar os ganhos do controlador do sistema dado no Problema 14.

16. Repita o Problema 14 supondo que o processo a controlar esteja representado na forma paralela.

17. O sistema a malha aberta do Problema 14 é representado na forma mostrada na Fig. P12.4. Atribuindo uma variável de estado à saída de cada um dos blocos, projete os ganhos do controlador para retroação com base nestas variáveis de estado.

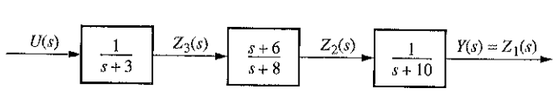


Fig. P12.4

18. Se um processo a malha aberta

$$G(s) = \frac{100}{s(s+4)(s+8)}$$

for representado na forma em paralelo, projete um controlador que leve a uma resposta a malha fechada com 15% de ultrapassagem e com um instante de pico de 0,2 s. Projete o controlador transformando a representação do processo na forma canônica de controlador.

19. Considere o processo a controlar

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+7)}$$

cujas variáveis de estado não estão disponíveis. Projete um observador com variáveis canônicas de observador que leve a uma resposta transitória descrita por $\zeta = 0{,}4$ e $\omega_n = 75$. Posicione o terceiro pólo 10 vezes mais distante do eixo imaginário que o par de pólos dominantes.

20. Projete um observador para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+6)(s+12)}$$

operando com 10% de ultrapassagem e com 2 s de instante de pico. Projete o observador para responder dez vezes mais rápido que o processo a controlar. Posicione o terceiro pólo do observador 20 vezes mais distante do eixo imaginário que os pólos dominantes do observador. Suponha que o processo a controlar esteja representado na forma canônica de observador.

21. Repita o Problema 19 supondo que o processo a controlar esteja representado na forma de variáveis de fase. Não faça a conversão para a forma canônica de observador.

22. Considere o processo a controlar

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+5)(s+9)}$$

cujas variáveis de estado não estão disponíveis. Projete um observador com variáveis de fase que leve a uma resposta transitória descrita por $\zeta = 0{,}6$ e $\omega_n = 120$. Não faça a conversão para a forma canônica de observador.

23. Determine se cada um dos sistemas mostrados na Fig. P12.2 é ou não observável.

MATLAB

24. Use o MATLAB para determinar a observabilidade dos sistemas das Figs. P12.2(*a*) e (*f*).

25. Dado o processo a controlar mostrado na Fig. P12.5, que relação deve existir entre c_1 e c_2 para que o sistema seja não-observável?

26. Projete um observador para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+13)(s+20)}$$

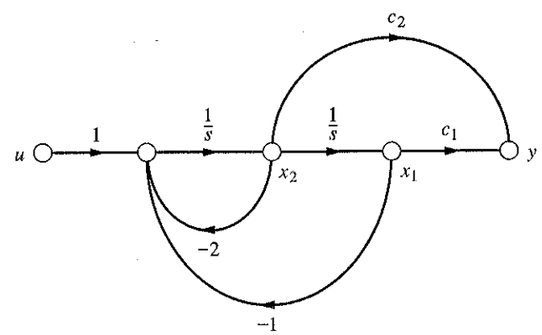


Fig. P12.5

representado na forma em cascata. Para projetar o observador, transforme a representação do processo na forma canônica de observador. Após concluir o projeto, retorne à representação em cascata. O polinômio característico do observador deve ser $s^3 + 600s^2 + 40.000s + 1.500.000$.

MATLAB

27. Use o MATLAB para projetar os ganhos do observador do sistema dado no Problema 26.

28. Repita o Problema 26 supondo que o processo a controlar esteja representado na forma em paralelo.

29. Projete um observador para o processo a controlar

$$G(s) = \frac{50}{(s+3)(s+6)(s+9)}$$

representado em variáveis de fase, para ter um desempenho desejado de 10% de ultrapassagem e de 0,5 s de tempo de assentamento. O observador deverá ser dez vezes mais rápido que o processo a controlar e o pólo não-dominante do observador deverá estar dez vezes mais distante do eixo imaginário que os pólos dominantes do observador. Projete o observador convertendo primeiro a representação do processo a controlar à forma canônica de observador.

30. Dado o processo a controlar

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u; \qquad y = [1 \quad 1]\mathbf{x}$$

projete um controlador integral que leve a uma resposta ao degrau unitário com 10% de ultrapassagem, com 0,5 s de tempo de assentamento e com erro de estado estacionário nulo.

31. Repita o Problema 30 para o seguinte processo a controlar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u; \qquad y = [1 \quad 1]\mathbf{x}$$

Problemas de Projeto

32. Um sistema de levitação magnética é descrito no Problema 42 do Cap. 9 (Cho, 1993). Remova a fotocélula na Fig. P911(*b*) e projete um controlador para variáveis de fase que leve a uma resposta ao degrau com 5% de ultrapassagem e com 0,5 s de tempo de assentamento.

33. O diagrama de blocos conceitual de um aquecedor a gás está mostrado na Fig. P12.6. A pressão de combustível comandada é proporcional à temperatura desejada. A diferença entre a pressão de combustível comandada e a pressão medida relacionada com a temperatura de saída é usada para acionar uma válvula e fornecer combustível ao aquecedor. A taxa da vazão de combustível determina a temperatura. Quando a temperatura de saída iguala a temperatura comandada equivalente, determinada pela pressão de combustível comandada, o fluxo de combustível é interrompido e o aquecedor desligado (Tyner, 1968).

Se a função de transferência do aquecedor, $G_H(s)$ for

$$G_H(s) = \frac{1}{(s+0{,}4)(s+0{,}8)}\ \frac{°\mathrm{F}}{\mathrm{ft}^3/\mathrm{min}}$$

e a função de transferência da válvula de combustível, $G_v(s)$, for

$$G_v(s) = \frac{5}{s+5}\ \frac{\mathrm{ft}^3/\mathrm{min}}{\mathrm{psi}}$$

substitua o percurso de retroação por um controlador com variáveis de fase que leve a uma ultrapassagem de 5% e a

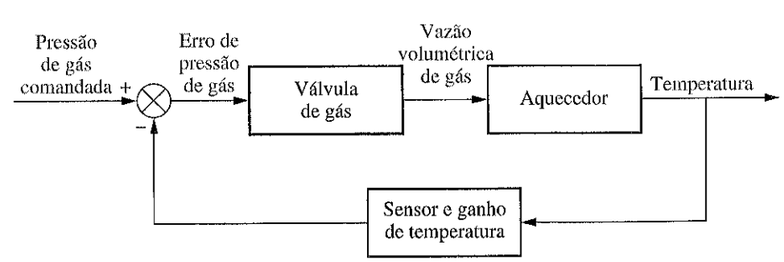


Fig. P12.6 Diagrama de blocos de um aquecedor a gás

um tempo de assentamento de 10 minutos. Além disso, projete um observador que responda dez vezes mais rápido que o sistema mas com a mesma ultrapassagem percentual.

34. O acionador de disco flexível do Problema 46 no Cap. 8 deve ter o projeto refeito com retroação de variáveis de estado. O controlador é substituído por um amplificador de ganho estático unitário, $G_a(s) = 800/(s + 800)$. O processo a controlar, $G_p(s) = 20.000/[s(s + 100)]$, está em cascata com o amplificador.

a. Projete um controlador que leve a uma ultrapassagem de 10% e a um tempo de assentamento de 0,05 s. Admita que as variáveis de estado sejam a posição de saída, a velocidade de saída e a saída do amplificador.

b. Calcule o erro de estado estacionário e refaça o projeto com um controlador integral para reduzir a zero o erro de estado estacionário. (É altamente recomendável o uso de um programa com capacidade de processamento simbólico.)

MATLAB

c. Simule a resposta ao degrau de ambos os sistemas: compensado com controlador e compensador com controle integral. Use o MATLAB ou qualquer outro programa de computador.

MATLAB

35. Dado o sistema de controle do ângulo de ataque para o avião AFTI/F16 mostrado na Fig. P9.12 (Monahemi, 1922), use o MATLAB para projetar um controlador para o processo que apresente uma resposta com 10% de ultrapassagem e com 0,5 s de tempo de assentamento. Admita que as variáveis de fase estejam acessíveis. Faça com que o programa apresente a resposta ao degrau do sistema não-compensado.

MATLAB

36. Para o sistema de controle do ângulo de ataque do Problema 35, use o MATLAB para projetar um observador com variáveis de fase que seja 15 vezes mais rápido que o sistema projetado como controlador.

37. Para o sistema de controle do ângulo de ataque do Problema 35, faça o seguinte:

a. Projete um controlador integral, usando variáveis de fase, para reduzir a zero o erro de estado estacionário. (É altamente recomendável o uso de um programa com capacidade de processamento simbólico.)

MATLAB

b. Use o MATLAB para obter a resposta ao degrau.

Problema Progressivo de Análise e Projeto

38. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O problema 17 no Cap. 1 trata do controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade (O'Connor, 1997). No Problema 62(*a*), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle pantográfico ativo. Para a parte a malha aberta do sistema pantográfico modelado no Cap. 5, faça o seguinte:

a. Projete um controlador que leve a uma ultrapassagem de 20% e a um tempo de assentamento de 1 s.

b. Repita (a) para um erro de estado estacionário nulo.

Bibliografia

Cho, D.; Kato, Y.; and Spilman, D. Sliding Mode and Classical Controllers in Magnetic Levitation Systems. *IEEE Control Systems,* February 1993, pp. 42–48.

D'Azzo, J. J., and Houpis, C. H. *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern.* 3d ed. McGraw-Hill, New York, 1988.

Franklin, G. F.; Powell, J. D.; and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems.* 3d ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.

Hostetter, G. H.; Savant, C. J., Jr.; and Stefani, R. T. *Design of Feedback Control Systems.* 2d ed. Saunders College Publishing, New York, 1989.

Kailath, T. *Linear Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

Luenberger, D. G. Observing the State of a Linear System, *IEEE Transactions on Military Electronics,* vol. MIL-8, April 1964, pp. 74–80.

Milhorn, H. T., Jr. *The Application of Control Theory to Physiological Systems.* W. B. Saunders, Philadelphia, 1966.

Monahemi, M. M.; Barlow, J. B.; and O'Leary, D. P. Design of Reduced-Order Observers with Precise Loop Transfer Recovery, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 6, November–December 1992, pp. 1320–1326.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ogata, K. *Modern Control Engineering.* 2d ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

Ogata, K. *State Space Analysis of Control Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

Rockwell International. *Space Shuttle Transportation System.* 1984 (Press Information).

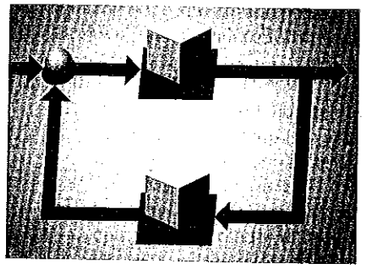
Shinners, S. M. *Modern Control System Theory and Design.* Wiley, New York, 1992.

Sinha, N. K. *Control Systems.* Holt, Rinehart & Winston, New York, 1986.

Timothy, L. K., and Bona, B. E. *State Space Analysis: An Introduction.* McGraw-Hill, New York, 1968.

Tyner, M., and May, F. P. *Process Engineering Control.* Ronald Press, New York, 1968.

CAPÍTULO 13



Sistemas de Controle Digital

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo você aprenderá o seguinte:

- Como modelar sistemas digitais
- Como projetar a estabilidade de sistemas digitais
- Como projetar sistemas digitais para atender especificações de erro de estado estacionário
- Como projetar sistemas digitais para atender especificações de resposta transitória usando ajuste de ganho
- Como projetar compensação em cascata para sistemas digitais

Objetivos do Estudo de Caso

Você deverá ser capaz de demonstrar seu conhecimento dos objetivos do capítulo com o estudo de caso a seguir:

- Dado o sistema de controle analógico de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa dianteira e na Fig. 13.1(*a*), você deverá ser capaz de convertê-lo no sistema digital mostrado na Fig. 13.1(*b*) e em seguida projetar o ganho para atender as especificações de resposta transitória.
- Dado o sistema de controle digital de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na Fig. 13.1(*b*), você deverá ser capaz de projetar um compensador digital em cascata para melhorar a resposta transitória.

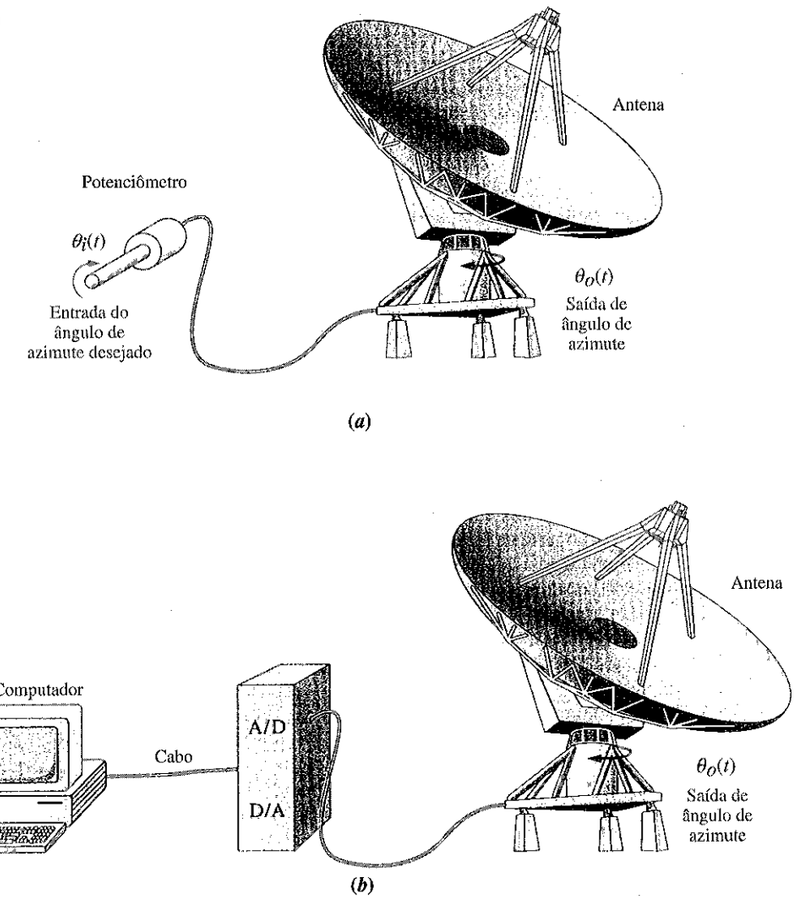


Fig. 13.1 Transformação do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute **a.** controle analógico para; **b.** controle digital

13.1 Introdução

Este capítulo é uma introdução aos sistemas de controle digitais e tratará somente da análise e do projeto no domínio de freqüência. Você é encorajado a continuar o estudo das técnicas no espaço de estados em um curso avançado sobre sistemas de controle com dados amostrados. Neste capítulo introduziremos a análise e o projeto de estabilidade, de erro de estado estacionário e de resposta transitória para sistemas controlados por computador.

Com o desenvolvimento do minicomputador nos meados de 1960 e do microcomputador em 1970, os sistemas físicos não precisam mais ser controlados por computadores de grande porte. Por exemplo, operações de moagem que no passado precisavam de computadores de grande porte podem ser agora controladas por um computador pessoal.

O computador digital pode executar duas funções: (1) supervisão — externa à malha de retroação; e (2) controle — interna à malha de retroação. Exemplos de funções supervisórias são o sincronismo de tarefas, a monitoração de valores fora de faixa de parâmetros e de variáveis e a seqüência de interrupção em condições seguras da operação. As funções de controle constituem nosso maior interesse, uma vez que um computador operando no interior da malha de retroação substitui os métodos de compensação discutidos até aqui. Exemplos de funções de controle são as compensações por atraso e por avanço de fase.

As funções de transferência, representando compensadores construídos com componentes analógicos, são agora substituídas por cálculos do computador digital que imitam o compensador físico. Quais as vantagens de se substituir componentes analógicos por um computador digital?

Vantagens dos Computadores Digitais

O uso de computadores digitais na malha leva às seguintes vantagens sobre os sistemas analógicos: (1) redução de custo, (2) flexibilidade para realizar mudanças de projeto, e (3) imunidade a ruído. Os sistemas de controle modernos requerem o controle simultâneo de numerosas malhas — pressão, posição, velocidade e tensão, por exemplo.

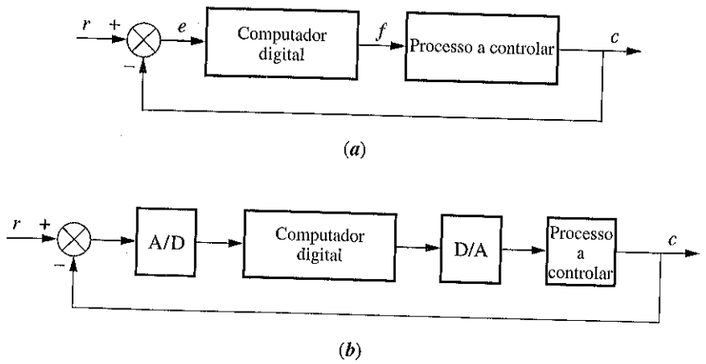


Fig. 13.2 a. Posicionamento do computador digital na malha; **b.** diagrama de blocos detalhado mostrando o posicionamento dos conversores A/D e D/A

Em uma indústria siderúrgica, um computador digital único pode substituir numerosos controladores analógicos com uma redução subseqüente no custo. Onde os controladores análogos exigem numerosos ajustes e alterações de equipamentos, os sistemas digitais estão sendo instalados. Pilhas de equipamentos, de instrumentos de medição e botões são substituídos por terminais do computador, onde as informações sobre ajustes e desempenho são obtidas através de menus e de telas de apresentação. O uso de computadores digitais na malha pode levar a uma grande flexibilidade na resposta a mudanças no projeto. Quaisquer mudanças ou modificações que sejam necessárias no futuro podem ser implementadas através de simples alterações no software em vez de modificações mais caras de hardware. Finalmente, os sistemas digitais possuem uma imunidade a ruídos maior que os sistemas analógicos em virtude dos métodos de implementação.

Onde então o computador é inserido na malha? Lembre-se de que o computador digital está controlando numerosas malhas; dessa forma, sua posição na malha depende da função que executa. Tipicamente, o computador substitui o compensador em cascata e, portanto, é posicionado no lugar mostrado na Fig. 13.2(*a*).

Os sinais, *r*, *e*, *f* e *c* mostrados na Fig. 13.2(*a*) podem ter duas formas: digital ou analógica. Até este ponto usamos exclusivamente sinais analógicos. Sinais digitais, que consistem em uma seqüência de números binários, podem ser encontrados nas malhas que contêm computadores digitais.

As malhas contendo os sinais analógicos e digitais devem fornecer um meio para conversão de uma forma em outra conforme as necessidades de cada subsistema. O dispositivo que converte sinais analógicos em sinais digitais é chamado de *conversor análogo-digital* (ou *conversor A/D*). Inversamente, um dispositivo que converte sinais digitais em sinais analógicos é chamado de *conversor digital-analógico* (ou *conversor D/A*). Por exemplo, na Fig. 13.2(*b*), se a saída do processo, *c*, e a entrada de sistema, *r*, forem sinais analógicos, então deve ser providenciada uma conversão análogo-digital na entrada do computador digital. Além disso, se a entrada de processo, *f*, for um sinal analógico, então deve ser providenciada uma conversão digital-analógica na saída do computador digital.

Conversão Digital-Analógica

A conversão digital-analógica é simples e efetuada de forma instantânea. Somam-se tensões elétricas ponderadas de forma adequada para produzir a saída analógica. Por exemplo, na Fig. 13.3 são somadas três tensões ponderadas com os pesos 1, 2 e 4. O código binário de três bits é representado pelas chaves. Dessa forma, se o número binário for 110_2, as chaves do centro e inferior estão ligadas, e a saída analógica é de 6 volts. Na tecnologia atual, as chaves são eletrônicas e acionadas pelo código binário de entrada.

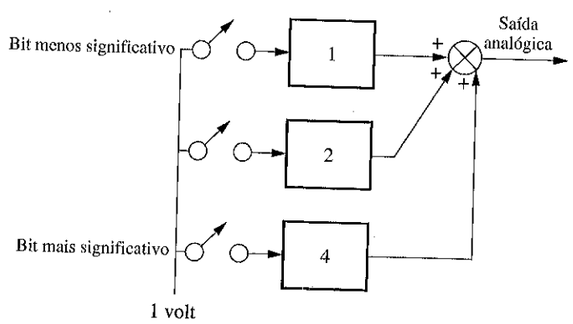


Fig. 13.3 Conversor digital-analógico

Conversão Análogo-Digital

A conversão análogo-digital, por outro lado, é um processo de duas etapas e não é instantâneo. Existe uma defasagem entre a tensão analógica de entrada e a palavra digital de saída. Na conversão análogo-digital, o sinal análogo é primeiro convertido em um sinal amostrado e depois transformado em uma seqüência de números binários, o sinal digital.

A taxa de amostragem deve ser pelo menos duas vezes a banda passante do sinal, ou ocorrerá distorção. Esta freqüência mínima de amostragem é chamada de *taxa de amostragem* ou *freqüência de Nyquist.*[1]

Na Fig. 13.4(*a*) começamos com o sinal analógico. Na Fig. 13.4(*b*) vemos sinal analógico amostrado em intervalos periódicos e mantido constante durante o período de amostragem por meio de um dispositivo chamado de *amostrador-extrapolador de ordem zero* (*z.o.h.*), que produz uma aproximação do sinal analógico, em forma de degraus. Extrapoladores de ordem superior, como o extrapolador de primeira ordem, geram formas de onda mais complexas e mais exatas entre os instantes de amostragem. Os valores do sinal amostrado são mantidos constantes antes de serem transformados em valores digitalizados porque a conversão análogo-digital converte o valor da tensão em um número através de um contador digital, no qual a operação consome tempo para alcançar o valor digital correto. Portanto, a tensão analógica deve ser mantida constante durante o processo de conversão.

Depois da amostragem e da retenção, a conversão análogo-digital converte o valor amostrado em um número binário (como mostrado na Fig. 13.4(*c*)), ao qual se chega da seguinte forma. A faixa dinâmica de valores de tensão do sinal analógico é dividida em níveis discretos, e a cada nível é atribuído um número binário. Por exemplo, na Fig. 13.4(*b*), o sinal analógico é dividido em oito níveis. Um número com três bits pode representar cada um dos oito níveis, como mostrado na figura. Dessa forma, a diferença entre níveis de quantização é $M/8$ volts, onde M é o valor máximo da tensão analógica. Em geral, para qualquer sistema, esta diferença é $M/2^n$ volts, onde n é o número de bits usados na conversão análogo-digital.

Observando a Fig. 13.4(*b*), podemos ver que haverá um erro associado a cada valor analógico digitalizado exceto nas tensões que correspondem aos limites, como $M/8$ e $2M/8$. Chamamos este erro de *erro de quantização.* Supondo que o processo de quantização faça o arredondamento das tensões analógicas para o nível mais próximo superior ou inferior, o valor máximo do erro de quantização é metade da diferença entre níveis de quantização na

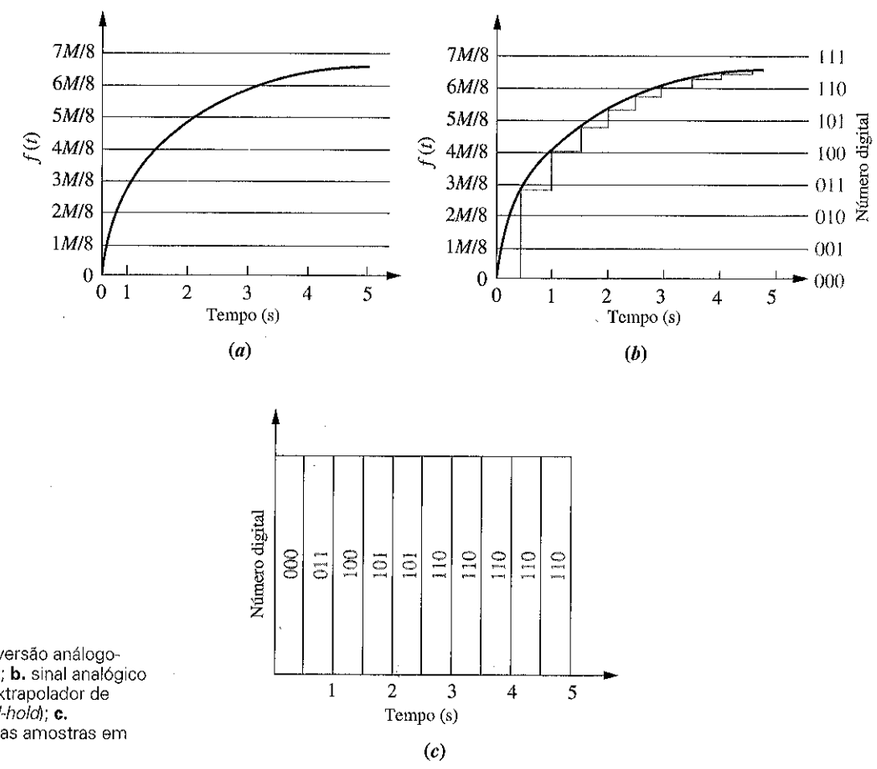


Fig. 13.4 Etapas na conversão análogo-digital: **a.** sinal analógico; **b.** sinal analógico depois do amostrador-extrapolador de ordem zero (*sample-and-hold*); **c.** conversão dos valores das amostras em valores digitais

[1]Veja Ogata (1987: 170-77) para uma discussão detalhada.

faixa de valores analógicos entre 0 e $15M/16$. Em geral, para qualquer sistema que use arredondamento, o erro de quantização será $(1/2)(M/2^n) = M/2^{n+1}$.

Agora aprendemos os conceitos básicos dos sistemas digitais. Descobrimos por que são usados, onde o computador digital é inserido na malha, e como converter sinais analógicos em digitais. Uma vez que o computador pode substituir o compensador, devemos nos dar conta de que o computador está operando com uma representação do sinal analógico quantizada em amplitude formada a partir dos valores desse sinal a intervalos discretos de tempo. Ignorando o erro de quantização, vemos que o computador opera da mesma forma que o compensador, exceto que os sinais passam pelo computador somente nos intervalos de tempo da amostragem. Descobriremos que a amostragem de dados produz um efeito pouco comum sobre o desempenho dos sistemas com retroação a malha fechada, visto que a estabilidade e a resposta transitória são agora dependentes da taxa de amostragem; se esta for muito lenta, o sistema pode ser instável, uma vez que os valores não estarão sendo atualizados com a rapidez necessária. Para analisar e projetar sistemas de controle com retroação dotados de computador digital na malha, devemos ser capazes de modelar o computador digital e os conversores associados às conversões digital-analógica e análogo-digital. A modelagem do computador juntamente com as conversões associadas é feita na próxima seção.

13.2 Modelando o Computador Digital

Se pensarmos sobre o assunto, a forma dos sinais em uma malha não é tão importante quanto o que acontece com eles. Por exemplo, se a conversão análogo-digital pudesse acontecer instantaneamente e o intervalo entre os instantes de amostragem tendesse a zero, não haveria diferença entre os sinais digitais e os sinais analógicos. Dessa forma, as técnicas de análise e de projeto anteriores seriam válidas apesar da presença do computador digital.

O fato de os sinais serem amostrados e retidos com valor constante em intervalos especificados faz com que o desempenho do sistema se altere ao se mudar a taxa de amostragem. Basicamente, então, o efeito do computador sobre o sinal decorre dessa amostragem e da retenção. Portanto, para modelar sistemas de controle digital, devemos falar primeiramente de uma representação matemática desse processo de amostragem e retenção (*sample-and-hold*).

Modelando o Amostrador

Nosso objetivo neste ponto é deduzir um modelo matemático para o computador digital representado por um amostrador e um extrapolador de ordem zero. A intenção é representar o computador por uma função de transferência semelhante à de qualquer subsistema. Contudo, quando os sinais são amostrados, a transformada de Laplace com a qual tivemos contato se torna um tanto incômoda. A transformada de Laplace pode ser substituída por uma outra transformação, chamada de *transformada z*. A transformada z vai aparecer naturalmente a partir do desenvolvimento da representação matemática do computador.

Considere os modelos de amostragem apresentados na Fig. 13.5. O modelo na Fig. 13.5(*a*) é uma chave ligando e desligando segundo uma taxa de amostragem uniforme. Na Fig. 13.5(*b*) a amostragem também pode ser considerada como o produto da forma de onda no domínio do tempo a ser amostrada, $f(t)$, por uma função de amostragem, $s(t)$. Se $s(t)$ for uma seqüência de pulsos de largura T_w, amplitude constante e taxa uniforme, como mostrado, a saída amostrada, $f^*_{T_W}(t)$, consistirá numa seqüência de segmentos de $f(t)$ nos intervalos regulares. Esta visão é equivalente ao modelo de chave da Fig. 13.5(*a*).

Podemos agora escrever a equação da forma de onda no domínio do tempo amostrada, $f^*_{T_W}(t)$. Usando o modelo mostrado na Fig. 13.5(*b*), temos

$$f^*_{T_W}(t) = f(t)s(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t-kT) - u(t-kT-T_W) \tag{13.1}$$

onde k é um número inteiro entre $-\infty$ e $+\infty$, T é o período do trem de pulsos, e T_w é a largura de cada pulso.

Como a Eq. (13.1) é o produto de duas funções do tempo, aplicar a transformada de Laplace para obter uma função de transferência não é simples. Uma simplificação pode ser feita se admitirmos que a largura uniforme dos pulsos, T_w, é pequena em comparação com o período, T, de modo que $f(t)$ possa ser considerada constante durante o intervalo de amostragem. Durante o intervalo de amostragem, então, $f(t) = f(kT)$. Portanto,

$$f^*_{T_W}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)[u(t-kT) - u(t-kT-T_W)] \tag{13.2}$$

para T_w pequeno.

A Eq. (13.2) pode ser mais simplificada através da visão fornecida pela transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace à Eq. (13.2), temos

$$F^*_{T_W}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\left[\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-kTs-T_Ws}}{s}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\left[\frac{1-e^{-T_Ws}}{s}\right]e^{-kTs} \tag{13.3}$$

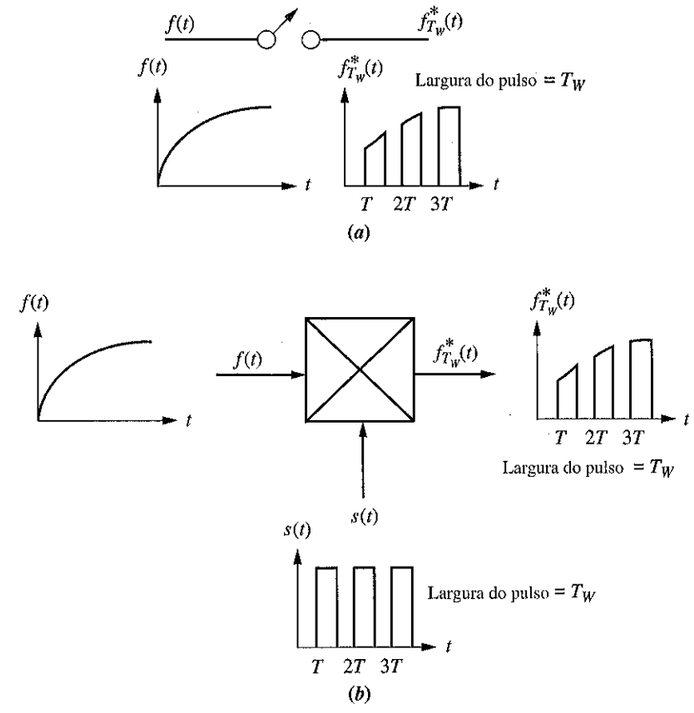


Fig. 13.5 Duas vistas da amostragem com taxa uniforme: **a.** abertura e fechamento da chave; **b.** produto do sinal no domínio do tempo pelo sinal de amostragem

Substituindo e^{-T_Ws} por sua expansão em série, obtemos

$$F^*_{T_W}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\left[\frac{1-\left\{1-T_Ws+\frac{(T_Ws)^2}{2!}-\cdots\right\}}{s}\right]e^{-kTs} \tag{13.4}$$

Para T_w pequeno, a Eq. (13.4) se torna

$$F^*_{T_W}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\left[\frac{T_Ws}{s}\right]e^{-kTs} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)T_We^{-kTs} \tag{13.5}$$

Finalmente, retornando ao domínio de tempo, temos

$$f^*_{T_W}(t) = T_W\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \tag{13.6}$$

onde $\delta(t-kT)$ são funções delta de Dirac.

Por conseguinte, o resultado da amostragem com pulsos retangulares pode ser vista como uma série de funções delta das quais a área é o produto da largura do pulso retangular pela amplitude da forma de onda amostrada, ou seja, $T_wf(kT)$.

A Eq. (13.6) é retratada na Fig. 13.6. O amostrador é dividido em duas partes: (1) um amostrador ideal descrito pela parte da Eq. (13.6) que não é dependente das características da forma de onda de amostragem,

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \tag{13.7}$$

e (2) a parte dependente das características da forma de onda de amostragem, T_w.

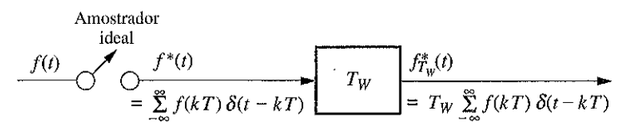


Fig. 13.6. Modelo de amostragem com trem de pulsos retangulares uniformes

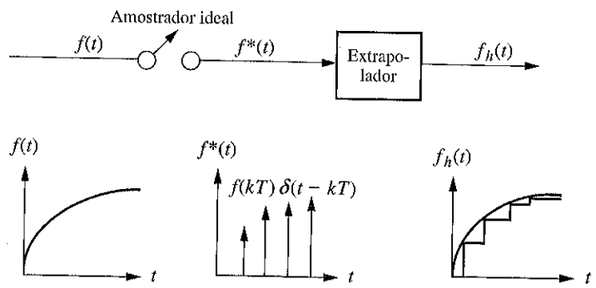


Fig. 13.7 Amostragem ideal e extrapolador de ordem zero (z.o.h.)

Modelando o Extrapolador de Ordem Zero

O passo final na modelagem do computador digital é modelar o extrapolador de ordem zero que segue o amostrador. A Fig. 13.7 resume a função do extrapolador de ordem zero, que consiste em reter o último valor amostrado de $f(t)$. Se admitirmos um amostrador ideal (equivalente a fazer $T_w = 1$), então $f^*(t)$ é representada por uma seqüência de funções delta. O extrapolador de ordem zero fornece uma aproximação em escada para $f(t)$. Portanto, a saída do extrapolador é uma seqüência de funções degrau cuja amplitude é $f(t)$ no instante de amostragem, ou seja, $f(kT)$. Vimos anteriormente que a função de transferência de qualquer sistema linear é igual à transformada de Laplace da resposta ao impulso, visto que a transformada de Laplace de um impulso unitário ou de uma função delta é igual à unidade. Uma vez que um impulso único do amostrador resulta em um degrau durante o intervalo de amostragem, a transformada de Laplace deste degrau de saída, $G_h(s)$, que é a resposta do extrapolador ao impulso, é a função de transferência do extrapolador de ordem zero. Usando um impulso aplicado no instante zero, a transformada do degrau resultante que inicia em $t = 0$ e termina em $t = T$ é

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{13.8}$$

Num sistema físico, os valores das amostras do sinal de entrada, $f(kT)$, são mantidos constantes durante o intervalo de amostragem. Podemos ver, com base na Eq. (13.8), que o circuito extrapolador integra a entrada e retém seu valor durante o intervalo de amostragem. Como a área sob as funções delta provenientes do amostrador ideal é $f(kT)$, podemos então integrar a forma de onda amostrada ideal e obter o mesmo resultado obtido para o sistema físico. Em outras palavras, se o sinal amostrado ideal, $f^*(t)$, for seguido de um extrapolador, podemos usar a forma de onda amostrada ideal como entrada, no lugar de $f^*_{T_w}(t)$.

Nesta seção modelamos o computador digital pela associação em cascata de dois elementos: (1) um amostrador ideal e (2) um extrapolador de ordem zero. Juntos, o modelo é conhecido como *amostrador retentor de ordem zero*. O amostrador ideal é modelado pela Eq. (13.7), e o extrapolador de ordem zero é modelado pela Eq. (13.8). Na próxima seção começaremos a criar uma abordagem dos sistemas digitais no domínio de transformadas introduzindo a transformada z.

13.3 A Transformada *z*

O efeito da amostragem sobre um sistema é considerável. Enquanto nos sistemas analógicos a estabilidade e a resposta transitória dependem do ganho e dos valores dos componentes, nos sistemas com dados amostrados a estabilidade e a resposta transitória dependem também da taxa de amostragem. Nosso objetivo é desenvolver uma transformada que contenha a informação de amostragem a partir da qual os sistemas com dados amostrados possam ser modelados por meio de funções de transferência, analisados, e projetados com a facilidade e com a visão de conjunto que usufruímos com a transformada de Laplace. Vamos desenvolver agora tal transformada e usar a informação da última seção para obter funções de transferência de dados amostrados para sistemas físicos.

A Eq. (13.7) é o sinal amostrado ideal. Aplicando a transformada de Laplace a este sinal amostrado obtemos

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \tag{13.9}$$

Agora, fazendo $z = e^{Ts}$, podemos escrever a Eq. (13.9) como

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \tag{13.10}$$

A Eq. (13.10) define a *transformada z*. Isto é, uma $F(z)$ pode ser transformada em $f(kT)$ ou uma $f(kT)$ pode ser transformada em $F(z)$. Alternativamente, podemos escrever

$$f(kT) \Longleftrightarrow F(z) \tag{13.11}$$

Estabelecendo um paralelo com o desenvolvimento da transformada de Laplace, podemos formar uma tabela relacionando $f(kT)$, o valor da função do tempo nos instantes de amostragem, a $F(z)$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 13.1

Transformada *z* de uma função do tempo

Problema Determine a transformada z de uma rampa unitária amostrada.

Solução Para a rampa unitária, $f(kT) = kT$. Portanto, o degrau amostrado ideal pode ser escrito a partir da Eq. (13.7) como

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kT\delta(t - kT) \tag{13.12}$$

Aplicando a transformada de Laplace obtemos

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-kTs} \tag{13.13}$$

Aplicando a transformada z admitindo $e^{-kTs} = z^{-k}$, temos

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) \tag{13.14}$$

A Eq. (13.14) pode ser convertida na forma fechada formando as séries para $zF(z)$ e subtraindo de $F(z)$. Multiplicando a Eq. (13.14) por z, obtemos

$$zF(z) = T(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots) \tag{13.15}$$

Subtraindo a Eq. (13.14) da Eq. (13.15), obtemos

$$zF(z) - F(z) = (z - 1)F(z) = T(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \tag{13.16}$$

Mas

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \tag{13.17}$$

que pode ser verificada executando-se a divisão indicada. Substituindo a Eq. (13.17) na (13.16) e resolvendo para $F(z)$, resulta

$$F(z) = T\frac{z}{(z - 1)^2} \tag{13.18}$$

como a transformada z de $f(kT) = kT$.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estão fazendo os exercícios do MATLAB e desejam explorar a capacidade adicional da *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB devem executar agora o script cap13sp1 no Apêndice E. Você aprenderá como usar o MATLAB para obter a transformada z de funções no domínio do tempo. O Exemplo 13.1 será resolvido usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB.

O exemplo demonstra que qualquer função de s, $F^*(s)$, que representa um sinal amostrado pode ser convertida em uma função de z, $F(z)$. O resultado final, $F(z) = Tz/(z - 1)^2$, está em uma forma fechada, diferente de $F^*(s)$. Se este for o caso de inúmeras outras funções do tempo amostradas, então temos a transformada conveniente que estávamos procurando. De modo semelhante, podem ser obtidas as transformadas z de outros sinais fazendo-se um paralelo com a tabela das transformadas de Laplace do Cap. 2. Uma tabela parcial de transformadas z é mostrada na Tabela 13.1, e uma tabela parcial dos teoremas sobre a transformada z está na Tabela 13.2. Para funções que não estejam na tabela, devemos executar o cálculo da transformada z inversa de modo semelhante à da transformada de Laplace inversa, por meio da expansão em frações parciais. Vejamos agora como podemos trabalhar no sentido inverso e determinar a função do tempo a partir de sua transformada z.

A Transformada *z* Inversa

Serão descritos dois métodos para determinar a transformada z inversa (a função do tempo amostrada a partir de sua transformada z): (1) expansão em frações parciais e (2) método da série de potências. Qualquer que seja o método

Tabela 13.1 Tabela parcial de transformadas s e z

	$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$f(kT)$
1.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$u(kT)$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	kT
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}
5.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$(-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n e^{-akT}$
6.	$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\operatorname{sen}\omega kT$
7.	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\cos\omega kT$
8.	$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\operatorname{sen}\omega kT$
9.	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\cos\omega kT$

usado, lembre-se de que, como a transformada z veio de um sinal amostrado, a transformada z inversa produzirá somente os valores da função do tempo nos instantes de amostragem. Tenha isto em mente ao prosseguir, porque mesmo que obtenhamos funções do tempo na forma fechada, elas são válidas somente nos instantes de amostragem.

Transformada z Inversa por Intermédio da Expansão em Frações Parciais Lembre-se de que a transformada de Laplace consiste de uma expansão em frações parciais que produz a soma de termos correspondentes a exponenciais, isto é, $A/(s+a)$. Seguindo esta direção e com base na Tabela 13.1, observamos que as funções exponenciais amostradas se relacionam com suas transformadas z da seguinte forma:

$$e^{-akT} \Longleftrightarrow \frac{z}{z-e^{aT}} \tag{13.19}$$

Prevemos então que uma expansão em frações parciais terá a seguinte forma:

$$F(z) = \frac{Az}{z-z_1} + \frac{Bz}{z-z_2} + \cdots \tag{13.20}$$

Tabela 13.2 Teoremas da transformada z

	Teorema	Nome
1.	$z\{af(t)\} = aF(z)$	Teorema da linearidade
2.	$z\{f_1(t)+f_2(t)\} = F_1(z)+F_2(z)$	Teorema da linearidade
3.	$z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{aT}z)$	Diferenciação complexa
4.	$z\{f(t-nT)\} = z^{-n}F(z)$	Translação real
5.	$z\{tf(t)\} = -Tz\frac{dF(z)}{dz}$	Diferenciação complexa
6.	$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$	Teorema de valor inicial
7.	$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$	Teorema de valor final

Nota: kT pode ser substituído por t na tabela.

Como a expansão de $F(s)$ não contém termos em s no numerador das frações parciais, primeiro formamos $F(z)/z$ para eliminar os termos z no numerador, executamos a expansão em frações parciais de $F(z)/z$, e finalmente multiplicamos o resultado por z para fazer aparecer os z's no numerador das frações. A seguir, um exemplo.

Exemplo 13.2

Transformada z inversa via expansão em frações parciais

Problema Dada a função da Eq. (13.21), determine a função no domínio do tempo amostrada.

$$F(z) = \frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)} \tag{13.21}$$

Solução Comece dividindo a Eq. (13.21) por z e executando a expansão em frações parciais.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0{,}5}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)} = \frac{A}{z-0{,}5} + \frac{B}{z-0{,}7} = \frac{-2{,}5}{z-0{,}5} + \frac{2{,}5}{z-0{,}7} \tag{13.22}$$

Depois, multiplique todo o resultado por z

$$F(z) = \frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)} = \frac{-2{,}5z}{z-0{,}5} + \frac{2{,}5z}{z-0{,}7} \tag{13.23}$$

Usando a Tabela 13.1, obtemos a transformada z inversa de cada fração parcial. Portanto, o valor da função no domínio do tempo nos instantes de amostragem é

$$f(kT) = -2{,}5(0{,}5)^k + 2{,}5(0{,}7)^k \tag{13.24}$$

Além disso, com base nas Eqs. (13.7) e (13.24), a função no domínio do tempo amostrada ideal é

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [-2{,}5(0{,}5)^k + 2{,}5(0{,}7)^k]\delta(t-kT) \tag{13.25}$$

Se substituirmos $k = 0, 1, 2$ e 3, podemos encontrar as quatro primeiras amostras do sinal amostrado. Portanto,

$$f^*(t) = 0\delta(t) + 0{,}5\delta(t-T) + 0{,}6\delta(t-2T) + 0{,}545\delta(t-3T) \tag{13.26}$$

Matemática Simbólica

Os estudantes que estão fazendo os exercícios do MATLAB e desejam explorar a capacidade adicional da *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB devem executar agora o script cap13sp2 no Apêndice E. Você aprenderá como usar o MATLAB para obter a transformada z inversa de funções no domínio do tempo amostradas. O Exemplo 13.2 será resolvido usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB.

Transformada z Inversa via Método de Série de Potências Os valores do sinal amostrado podem ser obtidos diretamente a partir de $F(z)$. Embora este método não leve a expressões na forma fechada para $f(kT)$, pode ser usado para a construção do gráfico. O método consiste em executar a divisão indicada, que leva a uma série de potências para $F(z)$. A série de potências pode então ser facilmente transformada em $F^*(s)$ e em $f^*(t)$.

Exemplo 13.3

Transformada z inversa via série de potências

Problema Dada a função na Eq. (13.21), determinar a função no domínio do tempo amostrada.

Solução Comece pela conversão do numerador e do denominador de $F(z)$ em polinômios em z.

$$F(z) = \frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)} = \frac{0{,}5z}{z^2-1{,}2z+0{,}35} \tag{13.27}$$

Agora execute a divisão indicada.

$$\begin{array}{r|l} & 0{,}5z^{-1} + 0{,}6z^{-2} + 0{,}545z^{-3} \\ \hline z^2 - 1{,}2z + 0{,}35 & 0{,}5z \\ & 0{,}5z - 0{,}6 + 0{,}175z^{-1} \\ \hline & \quad 0{,}6 - 0{,}175z^{-1} \\ & \quad 0{,}6 - 0{,}720z^{-1} + 0{,}21 \\ \hline & \qquad 0{,}545z^{-1} - 0{,}21 \end{array} \tag{13.28}$$

Usando o numerador e a definição de z, obtemos

$$F^*(s) = 0{,}5e^{-Ts} + 0{,}6e^{-2Ts} + 0{,}545e^{-3Ts} + \cdots \tag{13.29}$$

a partir da qual

$$f^*(t) = 0{,}5\delta(t - T) + 0{,}6\delta(t - 2T) + 0{,}545\delta(t - 3T) + \cdots \tag{13.30}$$

Você deve comparar a Eq. (13.30) com a Eq. (13.26), o resultado obtido via expansão em frações parciais.

Exercício de Avaliação 13.1

Problema Deduza a transformada z de $f(t) = \text{sen}\ \omega t\ u(t)$.

Resposta: $F(z) = \dfrac{z^{-1}\text{sen}(\omega T)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega T) + z^{-2}}$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Exercício de Avaliação 13.2

Problema Determine $f(kT)$ se $F(z) = \dfrac{z(z+1)(z+2)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)(z-0{,}9)}$.

Resposta: $f(kT) = 46{,}875(0{,}5)^k - 114{,}75(0{,}7)^k + 68{,}875(0{,}9)^k$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

13.4 Funções de Transferência

Agora que estabelecemos a transformada z, apliquemos os resultados obtidos aos sistemas físicos determinando funções de transferência de sistemas com dados amostrados. Considere o sistema contínuo mostrado na Fig. 13.8(a). Se a entrada for amostrada como indicado na Fig. 13.8(b), a saída é ainda um sinal contínuo. Se, contudo, ficarmos satisfeitos em obter a saída nos instantes de amostragem e não entre eles, a representação do sistema de dados amostrados pode ser grandemente simplificada. Nossa suposição é visualmente descrita na Fig. 13.8(c), onde a saída é amostrada conceitualmente em sincronização com a entrada por meio de um amostrador imaginário. Usando o conceito descrito na Fig. 13.8(c), vamos deduzir a função de transferência pulsada de $G(s)$.

Dedução da Função de Transferência Pulsada

Usando a Eq. (13.7), constatamos que a entrada amostrada, $r^*(t)$, para o sistema da Fig. 13.8(c) é

$$r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT) \tag{13.31}$$

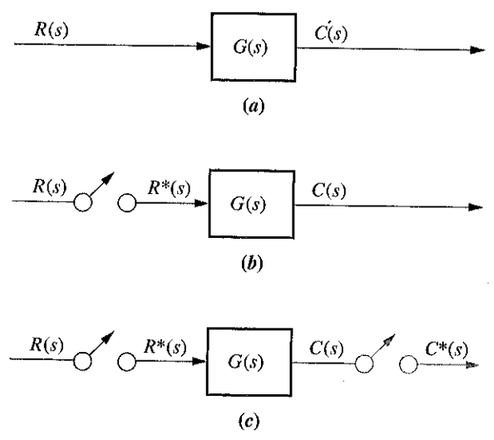


Fig. 13.8 Sistema com dados amostrados: **a.** contínuo; **b.** entrada amostrada; **c.** entrada e saída amostradas

Nota: O amostrador fictício está mostrado à direita do bloco $G(s)$ em (c).

a qual é uma soma de impulsos. Como a resposta ao impulso de um sistema, $G(s)$, é $g(t)$, podemos escrever a saída de $G(s)$ no domínio do tempo como a soma das respostas a impulso geradas pela entrada, Eq. (13.31). Por conseguinte,

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g(t - nT) \tag{13.32}$$

Com base na Eq. (13.10),

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT)z^{-k} \tag{13.33}$$

Usando a Eq. (13.32) com $t = kT$, obtemos

$$c(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g(kT - nT) \tag{13.34}$$

Substituindo a Eq. (13.34) na Eq. (13.33), obtemos

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g\left[(k-n)T\right]z^{-k} \tag{13.35}$$

Fazendo $m = k - n$, encontramos

$$C(z) = \sum_{m+n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g(mT)z^{-(m+n)}$$

$$= \left\{\sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m}\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}\right\} \tag{13.36}$$

onde o limite inferior, $m + n$, foi mudado para m. O raciocínio é que $m + n = 0$ leva a valores negativos de m para todos os valores de $n > 0$. Mas, como $g(mT) = 0$ para todos os valores de $m < 0$, m não é menor que zero. Alternativamente, $g(t) = 0$ para $t < 0$. Dessa forma, $n = 0$ no primeiro limite inferior do somatório.

Usando a definição da transformada z, a Eq. (13.36) torna-se

$$C(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n} = G(z)R(z) \tag{13.37}$$

A Eq. (13.37) é um resultado muito importante, uma vez que mostra que a transformada da saída amostrada é o produto da transformada da entrada amostrada pela função de transferência pulsada do sistema. Lembre-se de que, apesar de a saída do sistema ser uma função contínua, tivemos de supor uma saída amostrada (amostrador imaginário) para chegar no resultado compacto da Eq. (13.37).

Uma forma de obter a função de transferência pulsada, $G(z)$, é começar com $G(s)$, determinar $g(t)$, e então usar a Tabela 13.1 para encontrar $G(z)$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 13.4

Convertendo $G_1(s)$ em cascata com z.o.h em $G(z)$

Problema Dado um z.o.h. em cascata com $G_1(s) = (s + 2)/(s + 1)$, ou seja,

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{(s+2)}{(s+1)} \tag{13.38}$$

determinar a função de transferência de dados amostrados, $G(z)$, se o período de amostragem, T, for 0,5 s.

Solução A Eq. (13.38) representa uma ocorrência comum nos sistemas de controle digital, em outras palavras, uma função de transferência em cascata com um extrapolador de ordem zero. Especificamente, $G_1(s) = (s + 2)/(s + 1)$ está em cascata com um extrapolador de ordem zero, $(1 - e^{-Ts})/s$. Podemos formular uma solução geral para este tipo de problema deslocando o s no denominador do extrapolador de ordem zero para $G_1(s)$, resultando

$$G(s) = (1 - e^{-Ts})\frac{G_1(s)}{s} \tag{13.39}$$

a partir do qual

$$G(z) = (1 - z^{-1})z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} \tag{13.40}$$

Dessa forma, comece a solução encontrando a resposta ao impulso (transformada de Laplace inversa) de $G_1(s)/s$. Portanto,

$$G_2(s) = \frac{G_1(s)}{s} = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} \tag{13.41}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos

$$g_2(t) = 2 - e^{-t} \tag{13.42}$$

de onde

$$g_2(kT) = 2 - e^{-kT} \tag{13.43}$$

Usando a Tabela 13.1, obtemos

$$G_2(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \tag{13.44}$$

Substituindo $T = 0{,}5$ resulta

$$G_2(z) = z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}607} = \frac{z^2 - 0{,}213z}{(z-1)(z-0{,}607)} \tag{13.45}$$

A partir da Eq. (13.40),

$$G(z) = \frac{z-1}{z}G_2(z) = \frac{z-0{,}213}{z-0{,}607} \tag{13.46}$$

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p1 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para converter $G_1(s)$ em cascata com um extrapolador de ordem zero em $G(z)$. Este exercício resolve o Exemplo 13.4 usando o MATLAB.

Matemática Simbólica

Os estudantes que estiverem usando os exercícios do MATLAB e quiserem explorar a capacidade adicional da *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB devem executar agora o script cap13sp3 no Apêndice E. A *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB leva a um método alternativo para determinar a transformada z de uma função de transferência em cascata com um extrapolador de ordem zero. O Exemplo 13.4 será resolvido usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB com um método que segue de perto o cálculo feito à mão mostrado nesse exemplo.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p2 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para converter $G(s)$ em $G(z)$ quando $G(s)$ não estiver em cascata com um extrapolador de ordem zero. Isto é o mesmo que determinar a transformada z de $G(s)$.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p3 no Apêndice B. Você aprenderá como criar funções de transferência digitais diretamente.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p4 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para converter $G(z)$ em $G(s)$ quando $G(s)$ não estiver em cascata com um extrapolador de ordem zero. Isto é o mesmo que determinar a transformada de Laplace de $G(z)$.

Exercício de Avaliação 13.3

Problema Determine $G(z)$ para $G(s) = 8/(s+4)$ em cascata com um amostrador e extrapolador de ordem zero. O período de amostragem é de 0,25 segundo.

Resposta: $G(z) = 1{,}264/(z - 0{,}3679)$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

A principal descoberta desta seção é que, uma vez obtida a função de transferência pulsada, $G(z)$, de um sistema, a transformada da resposta da saída amostrada, $C(z)$, para uma dada entrada amostrada pode ser calculada usando a relação $C(z) = G(z)R(z)$. Finalmente, a função no domínio do tempo pode ser encontrada aplicando a transformada z inversa, como visto na Seção 13.3. Na próxima seção veremos a redução do diagrama de blocos para sistemas digitais.

13.5 Redução de Diagrama de Blocos

Até este ponto, definimos a transformada z e a função de transferência do sistema com dados amostrados e mostramos como obter a resposta amostrada. Basicamente, estamos fazendo um paralelo com a discussão da transformada de Laplace nos Caps. 2 e 4. Agora faremos um paralelo com alguns dos objetivos do Cap. 5, ou seja, a redução de diagrama de blocos. Nosso objetivo aqui é ser capaz de determinar a função de transferência com dados amostrados a malha fechada de um arranjo de subsistemas com um computador na malha.

Ao manipular diagramas de blocos de sistemas com dados amostrados, devemos ter cuidado para lembrar da definição da função de transferência do sistema com dados amostrados (deduzida na última seção) para evitar erros. Por exemplo, $z\{G_1(s)G_2(s)\} \neq G_1(z)G_2(z)$, onde $z\{G_1(s)G_2(s)\}$ designa a transformada z. As funções no domínio s devem ser multiplicadas antes de se aplicar a transformada z. Na discussão a seguir, usamos a notação $G_1G_2(s)$ para designar uma função única que é $G_1(s)G_2(s)$ depois de efetuar o produto. Portanto, $z\{G_1(s)G_2(s)\} = z\{G_1G_2(s)\} = G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z)$.

Vejamos os sistemas com dados amostrados indicados na Fig. 13.9. Os sistemas com dados amostrados são apresentados na coluna marcada com s. Suas transformadas z são mostradas na coluna marcada com z. O sistema padrão que deduzimos anteriormente é mostrado na Fig. 13.9(a), onde a transformada da saída, $C(z)$, é igual a $G(z)R(z)$. Este sistema forma a base para os outros elementos na Fig. 13.9.

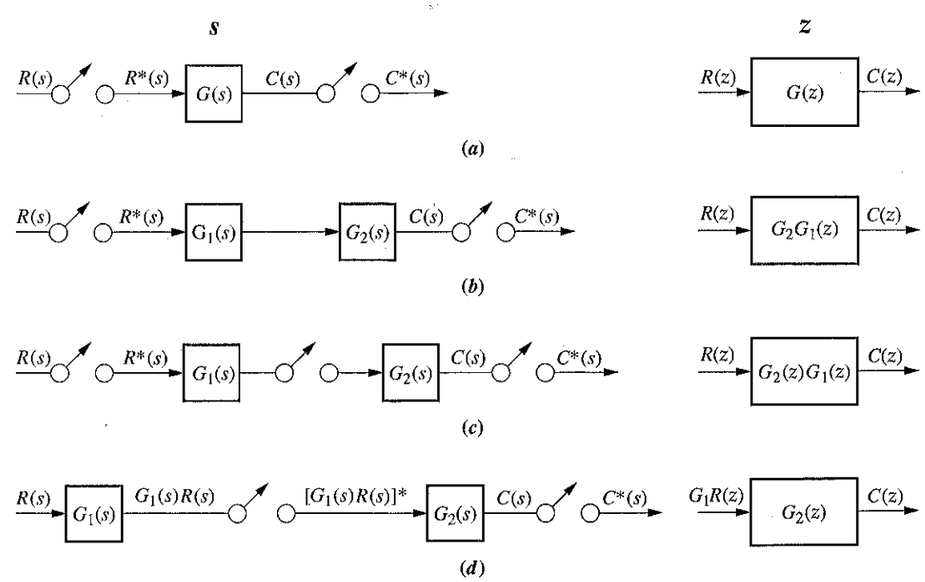
Na Fig. 13.9(b) não existe amostrador entre $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Dessa forma, podemos imaginar uma função única, $G_1(s)G_2(s)$, designada como $G_1G_2(s)$, existindo entre os dois amostradores e levando a uma função de transferência única, como mostrado na Fig. 13.9(a). Portanto, a função de transferência pulsada é $z\{G_1G_2(s)\} = G_1G_2(z)$. A transformada da saída é $C(z) = G_1G_2(z)R(z)$.

Na Fig. 13.9(c) temos dois subsistemas do tipo mostrado na Fig. 13.9(a) em cascata. Neste caso, então, a transformada z é o produto das duas transformadas z ou $G_2(z)G_1(z)$. Portanto, a transformada da saída é $C(z) = G_2(z)G_1(z)R(z)$.

Finalmente na Fig. 13.9(d), vemos que o sinal contínuo que entra no amostrador é $G1(s)R(s)$. Dessa forma, o modelo é o mesmo da Fig. 13.9(a) com $R(s)$ substituído por $G_1(s)R(s)$, e $G_2(s)$ na Fig. 13.9(d) substituindo $G(s)$ na Fig. 13.9(a). A transformada z de entrada em $G_2(s)$ é $z\{G_1(s)R(s)\} = z\{G_1R(s)\} = G_1R(z)$. A função de transferência pulsada do sistema $G_2(s)$ é $G_2(z)$. Portanto, a saída $C(z) = G_1R(z)G_2(z)$.

Usando as formas básicas mostradas na Fig. 13.9, podemos agora determinar a transformada z dos sistemas de controle com retroação. Mostramos que qualquer sistema, $G(s)$, com entrada amostrada e saída amostrada, como o exibido na Fig. 13.9(a), pode ser representado por uma função de transferência com dados amostrados, $G(z)$. Por conseguinte, podemos executar manipulações de diagramas de blocos que resultam em subsistemas, bem como o sistema com retroação completo, que tenha entradas amostradas e saídas amostradas. Então, podemos fazer a transformação em funções de transferência com dados amostrados. Segue um exemplo.

Fig. 13.9 Sistemas com dados amostrados e suas transformadas z



Exemplo 13.5

Função de transferência pulsada de um sistema com retroação

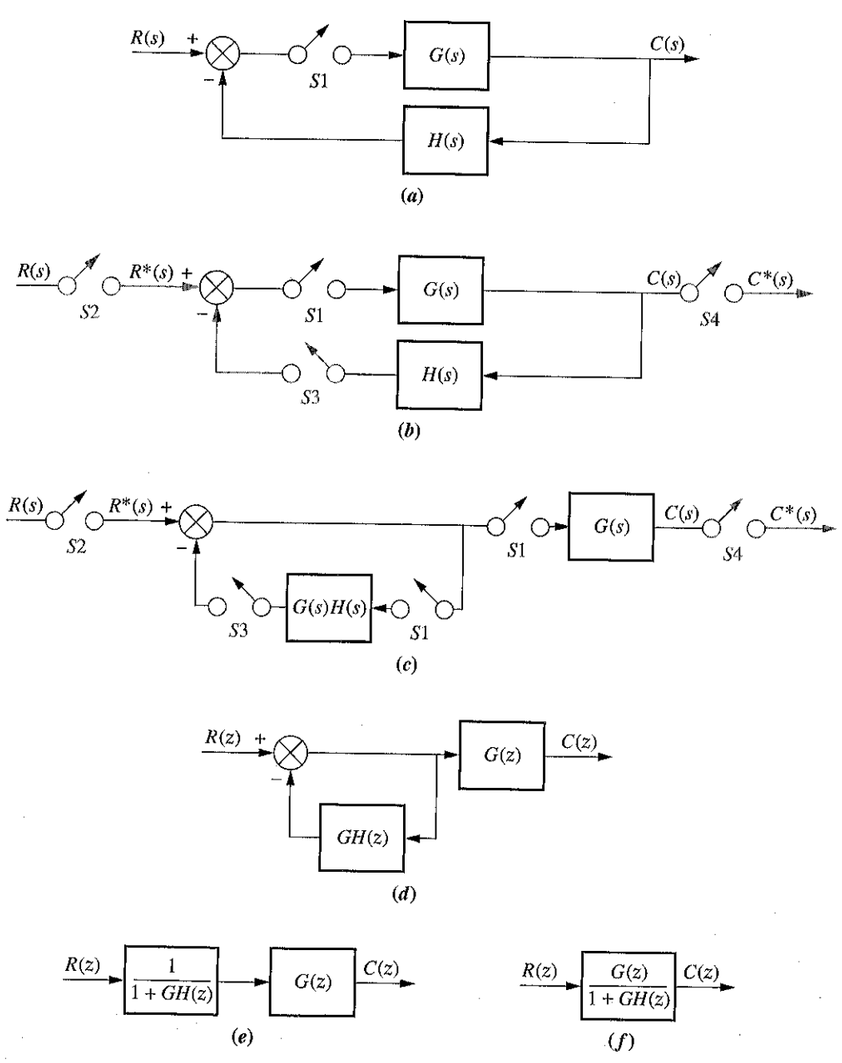
Problema Determine a transformada z do sistema mostrado na Fig. 13.10(a).

Solução O objetivo do problema é proceder de forma ordenada, começando com o diagrama de blocos na Fig. 13.10(a) e reduzindo-o ao mostrado na Fig. 13.10(f).

Uma operação que sempre podemos executar é colocar um amostrador imaginário na saída de qualquer subsistema que tenha uma entrada amostrada, desde que a natureza do sinal enviado para qualquer outro subsistema não seja mudado. Por exemplo na Fig. 13.10(b), o amostrador imaginário $S4$ pode ser acrescido. A justificativa para isto, é claro, é que a saída de um sistema de dados amostrados pode ser obtida de qualquer modo nos instantes de amostragem, e o sinal não é entrada para qualquer outro bloco.

Outra operação que pode ser executada é acrescentar amostradores imaginários $S2$ e $S3$ na entrada de uma junção somadora cuja saída é amostrada. A justificativa para esta operação é que a soma amostrada é equivalente à soma das entradas amostradas, desde que, é claro, todos os amostradores sejam sincronizados.

Fig. 13.10 Etapas na redução de diagramas de blocos de um sistema com dados amostrados



Nota: Os amostradores fictícios estão representados pelas chaves S2, S3 e S4.

Depois, desloque o amostrador $S1$ e $G(s)$ para a direita do ponto de distribuição de sinal, como mostrado na Fig. 13.10(c). A finalidade deste deslocamento é produzir um amostrador na entrada de $G(s)H(s)$ para combinar com a Fig. 13.9(b). Além disso, $G(s)$ com amostrador $S1$ na entrada e amostrador $S4$ na saída se iguala à Fig. 13.9(a). O sistema a malha fechada agora tem uma entrada amostrada e uma saída amostrada.

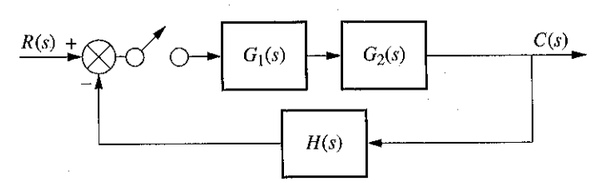
$G(s)H(s)$ com amostrador $S1$ e $S3$ se torna $GH(z)$, e $G(s)$ com amostrador S1 e S4 se transforma em $G(z)$, como mostrado na Fig. 13.10(d). Além disso, convertendo $R^*(s)$ em $R(z)$ e $C^*(s)$ em $C(z)$, agora temos o sistema representado totalmente no domínio z.

As equações deduzidas no Cap. 5 para as funções de transferência representadas com transformada de Laplace podem ser usadas para funções de transferência com dados amostrados com somente uma mudança na variável de s para z. Por conseguinte, usando a fórmula com retroação, obtemos o primeiro bloco da Fig. 13.10(e). Finalmente, a multiplicação de sistemas de dados amostrados em cascata leva ao resultado final mostrado na Fig. 13.10(f).

Exercício de Avaliação 13.4

Problema Determine $T(z) = C(z)/R(z)$ para o sistema mostrado na Fig. 13.11.

Fig. 13.11 Sistema digital para o Exercício de Avaliação 13.4



Resposta: $T(z) = \dfrac{G_1G_2(z)}{1 + HG_1G_2(z)}$.

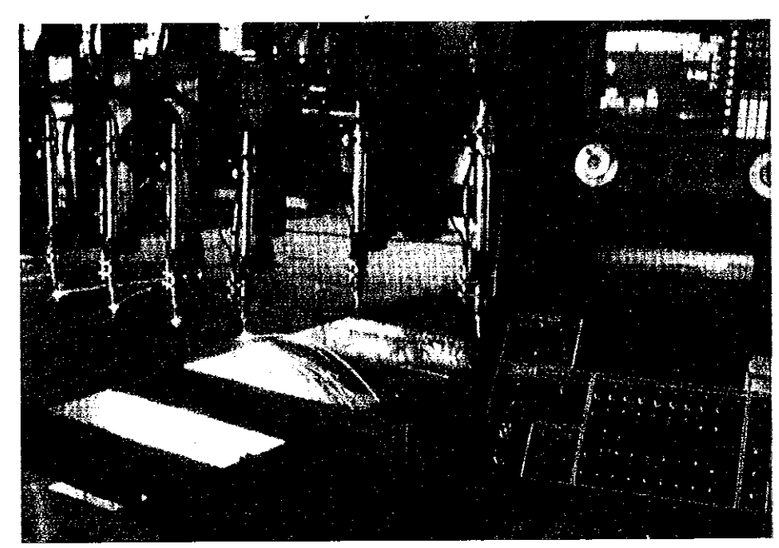
A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Esta seção estabeleceu um paralelo com o Cap. 5 mostrando como obter a função de transferência com dados amostrados a malha fechada de um conjunto de subsistemas. A próxima seção estabelece um paralelo com a discussão de estabilidade do Cap. 6.

13.6 Estabilidade

A diferença evidente entre os sistemas de controle com retroação analógicos e os sistemas de controle com retroação digitais, como mostrado na Fig. 13.12, é o efeito que a taxa de amostragem tem sobre a resposta transitória. Mudanças na taxa de amostragem não somente alteram a natureza da resposta de superamortecida para subamorteci-

Fig. 13.12 Maçaricos controlados por computador cortam lâminas espessas de metal usado em construção civil



da, mas também podem transformar um sistema estável em um sistema instável. Ao dar seqüência à nossa discussão, esses efeitos se tornarão aparentes. Você está encorajado a observar isto.

Discutiremos agora a estabilidade dos sistemas digitais a partir de duas perspectivas: (1) do plano z e (2) do plano s. Veremos que o critério de Routh-Hurwitz pode ser usado somente se executarmos a análise e o projeto no plano s.

Estabilidade do Sistema Digital no Plano z

No plano s, a região de estabilidade é o semiplano da esquerda. Se a função de transferência, $G(s)$, for transformada na função de transferência com dados amostrados, $G(z)$, a região da estabilidade sobre o plano z pode ser calculada a partir da definição, $z = e^{Ts}$. Fazendo $s = \alpha + j\omega$, obtemos

$$\begin{aligned} z = e^{Ts} &= e^{T(\alpha+j\omega)} = e^{\alpha T}e^{j\omega T} \\ &= e^{\alpha T}(\cos\,\omega T + j\,\text{sen}\,\omega T) \\ &= e^{\alpha T}\angle\omega T \end{aligned} \tag{13.47}$$

uma vez que $(\cos\,\omega T + j\text{sen}\,\omega T) = 1\angle\omega T$.

Cada região do plano s pode ser mapeada na região correspondente sobre o plano z (veja a Fig. 13.13). Os pontos que têm valores positivos de α estão no semiplano da esquerda do plano s, região C. Com base na Eq. (13.47), a magnitude dos pontos mapeados são $e^{\alpha T} > 1$. Portanto, os pontos no semiplano da direita do plano s são mapeados no exterior do círculo de raio unitário do plano z.

Os pontos sobre o eixo $j\omega$, região B, têm valores nulos de α e produzem pontos no plano z com magnitude $= 1$, o círculo unitário. Portanto, os pontos sobre o eixo $j\omega$ no plano s são mapeados nos pontos sobre o círculo unitário do plano z.

Finalmente, os pontos do plano s que levam a valores negativos de α (raízes do semiplano da esquerda, região A) são mapeados no interior do círculo unitário do plano z.

Por conseguinte, o sistema de controle digital é (1) estável se todos os pólos da função de transferência a malha fechada $T(z)$ estiverem dentro do círculo unitário do plano z, (2) instável se algum pólo estiver fora do círculo unitário e/ou existirem pólos de multiplicidade maior que um sobre o círculo unitário, e (3) marginalmente estável se pólos de multiplicidade estiverem sobre o círculo unitário e todos os outros pólos dentro do círculo unitário. Vejamos um exemplo.

Exemplo 13.6

Modelagem e estabilidade

Problema O míssil mostrado na Fig. 13.14(a) pode ser controlado aerodinamicamente por meio de torques criados pela deflexão de superfícies de controle sobre o seu corpo. Os comandos para defletir estas superfícies de controle vêm de um computador que usa dados de rastreamento juntamente com as equações de guiamento programadas para determinar se o míssil segue a trajetória. A informação proveniente das equações de guiamento é usada para desenvolver comandos de controle de vôo para o míssil. Um modelo simplificado é mostrado na Fig. 13.14(b). Aqui o computador executa a função de controlador usando a informação de guiamento para desenvolver comandos de entrada para o míssil. Um acelerômetro no míssil detecta a aceleração real, a qual é enviada ao computador. Determine a função de transferência digital a malha fechada para este sistema e determine se o sistema é estável para $K = 20$ e $K = 100$ com um período de amostragem de $T = 0{,}1$ segundo.

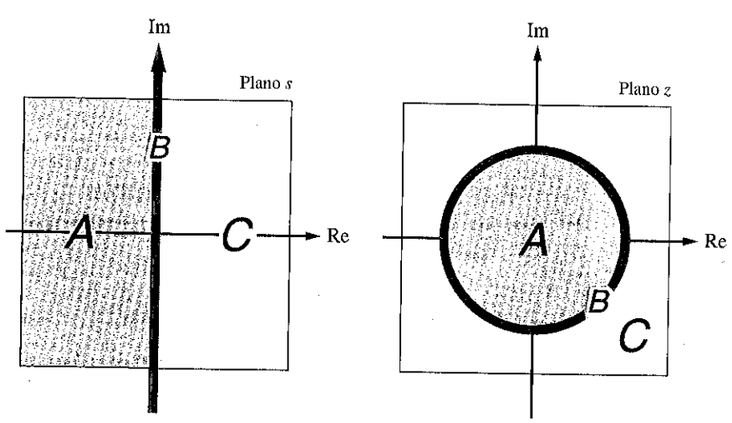


Fig. 13.13 Regiões de mapeamento do plano s no plano z

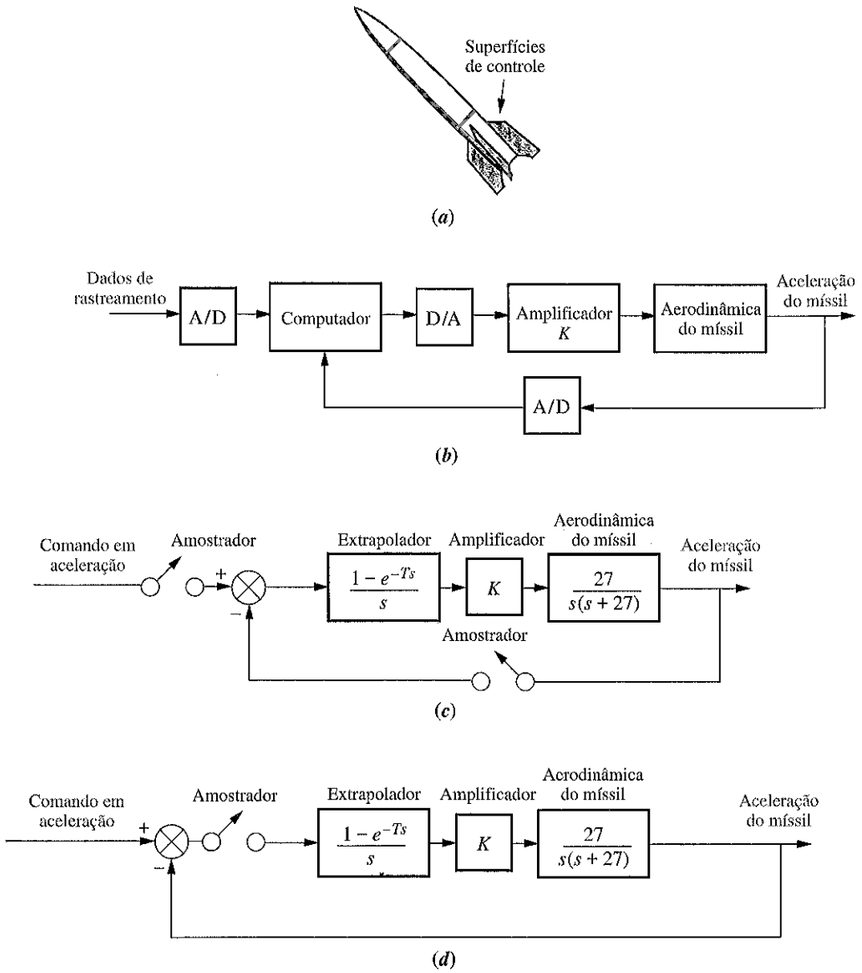


Fig. 13.14 Determinação da estabilidade do sistema de controle de um míssil: **a.** míssil; **b.** diagrama de blocos conceitual; **c.** diagrama de blocos; **d.** diagrama de blocos com o amostrador único equivalente

Solução A entrada para o sistema de controle é um comando de aceleração desenvolvido pelo computador. O computador pode ser modelado por um amostrador e retentor. O modelo do plano s é mostrado na Fig. 13.14(c). O primeiro passo na obtenção do modelo no plano z é encontrar $G(z)$, a função de transferência de percurso direto. A partir da Fig. 13.14(c),

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{Ka}{s(s+a)} \tag{13.48}$$

onde $a = 27$. A transformada z, $G(z)$, é $(1 - z^{-1})z\{Ka/[s^2(s+a)]\}$.

O termo $Ka/[s^2(s+a)]$ é expandido primeiramente em frações parciais, após o que determinamos a transformada z de cada um dos termos com base na Tabela 13.1. Portanto,

$$\begin{aligned} z\left\{\frac{Ka}{s^2(s+a)}\right\} &= Kz\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\} = Kz\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1/a}{s} + \frac{1/a}{s+a}\right\} \\ &= K\left\{\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z/a}{z-1} + \frac{z/a}{z-e^{-aT}}\right\} \\ &= K\left\{\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}\right\} \end{aligned} \tag{13.49}$$

Portanto,

$$G(z) = K\left\{\frac{T(z - e^{-aT}) - (z-1)\left(\dfrac{1 - e^{-aT}}{a}\right)}{(z-1)(z - e^{-aT})}\right\} \tag{13.50}$$

Fazendo $T = 0{,}1$ e $a = 27$, obtemos

$$G(z) = \frac{K(0{,}0655z + 0{,}02783)}{(z-1)(z - 0{,}0672)} \tag{13.51}$$

Finalmente, obtemos a função de transferência a malha fechada, $T(z)$, do sistema com retroação unitária:

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K(0{,}0655z + 0{,}02783)}{z^2 + (0{,}0655K - 1{,}0672)z + (0{,}02783K + 0{,}0672)} \tag{13.52}$$

A estabilidade do sistema é obtida determinando-se as raízes do denominador. Para $K = 20$, as raízes do denominador são $0{,}12 \pm j0{,}78$. O sistema é, portanto, estável para $K = 20$, uma vez que os pólos estão no interior do círculo unitário. Para $K = 100$, os pólos estão em $-0{,}58$ e $-4{,}9$. Como um dos pólos está fora do círculo unitário, o sistema é instável para $K = 100$.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p5 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para determinar a faixa de valores de K para estabilidade em um sistema digital. Este exercício resolve o Exemplo 13.6 usando o MATLAB.

No caso de sistemas contínuos, a determinação da estabilidade depende da capacidade de identificar se as raízes do denominador da função de transferência estão na região estável do plano s. O problema de sistemas de ordem elevada é complicado pelo fato de o denominador da função de transferência estar na forma polinomial, não fatorada. O mesmo problema vem à tona com as funções de transferência a malha fechada com dados amostrados.

Existem métodos tabulares para sistemas com dados amostrados para determinar a estabilidade, semelhantes ao método de Routh-Hurwitz usado em sistemas contínuos de ordem elevada. Estes métodos, que não são tratados neste capítulo de introdução aos sistemas de controle digital, podem ser usados para determinar a estabilidade de sistemas digitais de ordem superior. Se desejar ir além na área de estabilidade de sistemas digitais, você está encorajado a dar uma olhada no método tabular de Raible ou no teste de estabilidade de Jury. Eles permitem determinar o número de pólos a malha fechada de um sistema com dados amostrados fora do círculo unitário. Estes pólos indicam a instabilidade.[2]

O exemplo a seguir demonstra o efeito da taxa de amostragem sobre a estabilidade de um sistema de controle a malha fechada. Todos os parâmetros são constantes, exceto o período de amostragem, T. Você verá que a variação de T nos levará a regiões de estabilidade e de instabilidade da mesma forma como se estivéssemos variando o ganho do percurso direto, K.

Exemplo 13.7

Faixa de valores de T para estabilidade

Problema Determinar a faixa de valores do período de amostragem, T, que fará com que o sistema mostrado na Fig. 13.5 seja estável e a faixa que o fará instável.

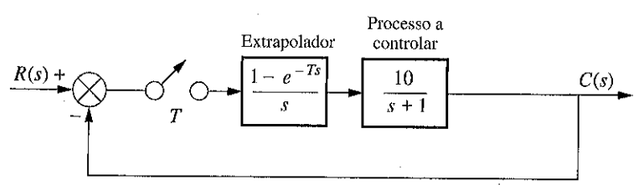


Fig. 13.15 Sistema digital para o Exemplo 13.7

[2]Uma discussão do método tabular de Raible e do teste de estabilidade de Jury pode ser encontrada em Kuo (1980: 278-86).

Solução Como $H(s) = 1$, a transformada z do sistema a malha fechada, $T(z)$, obtida da Fig. 13.10, é

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \tag{13.53}$$

Para obter $G(z)$, determinemos primeiro a expansão em frações parciais de $G(s)$.

$$G(s) = 10\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} = 10(1 - e^{-Ts})\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) \tag{13.54}$$

Aplicando a transformada z, obtemos

$$G(z) = \frac{10(z-1)}{z}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}}\right] = 10\frac{(1 - e^{-T})}{(z - e^{-T})} \tag{13.55}$$

Substituindo a Eq. (13.55) na Eq. (13.53) resulta

$$T(z) = \frac{10(1 - e^{-T})}{z - (11e^{-T} - 10)} \tag{13.56}$$

O pólo da Eq. (13.56), $(11e^{-T} - 10)$, decresce monotonicamente de $+1$ para -1 para $0 < T < 0{,}2$. Para $0{,}2 < T < \infty$, $(11e^{-T} - 10)$ decresce monotonicamente de -1 para -10. Por conseguinte, o pólo de $T(z)$ estará no interior do círculo unitário, e o sistema será estável se $0 < T < 0{,}2$. Em termos de freqüência, onde $f = 1/T$, o sistema será estável desde que a freqüência de amostragem seja igual ou superior a $1/0{,}2 = 5$ Hz.

Vimos agora, através do plano z, que os sistemas amostrados são estáveis quando seus pólos estão no interior do círculo unitário. Infelizmente este critério de estabilidade impede o uso do critério de Routh-Hurwitz, que detecta raízes no semiplano da direita em vez de raízes no exterior do círculo unitário. Contudo, existe um outro método que nos permite usar o já familiar plano s e o critério de Routh-Hurwitz para determinar a estabilidade de um sistema amostrado. Apresentemos este tópico.

Transformações Bilineares

As *transformações bilineares* nos dão a capacidade de aplicar as técnicas de análise e de projeto no plano s aos sistemas digitais. Podemos analisar e projetar no plano s como fizemos nos Caps. 8 e 9 e em seguida, usando essas transformações, transferir os resultados para o sistema digital que possui as mesmas propriedades. Vejamos um pouco mais sobre este tópico.

Podemos considerar $z = e^{Ts}$ e sua inversa $s = (1/T)\ln z$ como a transformação exata entre z e s. Portanto, se tivermos $G(z)$ e substituirmos $z = e^{Ts}$, obteremos $G(e^{Ts})$ como resultado da conversão a s. De modo semelhante, se tivermos $G(s)$ e substituirmos $s = (1/T)\ln z$, obteremos $G((1/T)\ln z)$ como resultado da conversão a z. Infelizmente ambas as transformações levam a funções transcendentes, as quais, naturalmente, evitamos ao longo da já complicada transformada z.

Gostaríamos de uma transformação simples que nos levasse a argumentos lineares ao realizar a conversão em ambos os sentidos (bilinear) através de substituição direta e sem a complicada transformada z.

Funções bilineares da forma

$$z = \frac{as + b}{cs + d} \tag{13.57}$$

e sua inversa

$$s = \frac{-dz + b}{cz - a} \tag{13.58}$$

foram deduzidas para produzir variáveis lineares em s e z. Valores diferentes de a, b, c e d foram deduzidos para aplicações particulares e levam a vários graus de exatidão ao se comparar propriedades de funções contínuas e amostradas.

Por exemplo, na próxima subseção iremos ver que uma escolha particular de coeficientes fará com que pontos escolhidos sobre o círculo unitário sejam mapeados em pontos sobre o eixo $j\omega$. Os pontos fora do círculo unitário serão mapeados no semiplano s da direita e os pontos no interior do círculo unitário serão mapeados no semiplano s da esquerda. Portanto, trabalhando no plano s seremos capazes de efetuar uma transformação simples do plano z no plano s e de obter informação de estabilidade do sistema digital.

Como as transformações não são exatas, somente a propriedade para a qual elas foram projetadas merece confiança. Com a transformação de estabilidade que acaba de ser discutida, não podemos esperar que a $G(s)$ resultante tenha a mesma resposta transitória de $G(z)$. Será tratada uma outra transformação que reterá essa propriedade.

Estabilidade do Sistema Digital no Plano *s*

Nesta subseção veremos uma transformação bilinear que mapeia os pontos sobre o eixo $j\omega$ do plano s nos pontos sobre o círculo unitário do plano z. Além disso, a transformação mapeia os pontos do semiplano s da direita em pontos fora do círculo unitário no plano z. Finalmente, a transformação mapeia os pontos do semiplano s da esquerda em pontos no interior do círculo unitário do plano z. Portanto, somos capazes de transformar o denominador, $D(z)$, da função de transferência pulsada, no denominador, $D(s)$, de uma função de transferência contínua e usar o critério de Routh-Hurwitz para determinar estabilidade.

A transformação bilinear

$$s = \frac{z+1}{z-1} \tag{13.59}$$

e sua inversa

$$z = \frac{s+1}{s-1} \tag{13.60}$$

realizam a transformação requerida (Kuo, 1992). Podemos mostrar este fato a seguir. Fazendo $s = \alpha + j\omega$ e substituindo na Eq. (13.60),

$$z = \frac{(\alpha+1)+j\omega}{(\alpha-1)+j\omega} \tag{13.61}$$

de onde

$$|z| = \frac{\sqrt{(\alpha+1)^2+\omega^2}}{\sqrt{(\alpha-1)^2+\omega^2}} \tag{13.62}$$

Portanto,

$$|z| < 1 \quad \text{quando} \quad \alpha < 0 \tag{13.63a}$$

$$|z| > 1 \quad \text{quando} \quad \alpha > 0 \tag{13.63b}$$

e

$$|z| = 1 \quad \text{quando} \quad \alpha = 0 \tag{13.63c}$$

Vejamos um exemplo que mostra como a estabilidade de sistemas amostrados pode ser obtida usando esta transformação bilinear e o critério de Routh-Hurwitz.

Exemplo 13.8

Estabilidade por intermédio de Routh-Hurwitz

Problema Dado $T(z) = N(z)/D(z)$, onde $D(z) = z^3 - z^2 - 0{,}2z + 0{,}1$, use o critério de Routh-Hurwitz para determinar o número de pólos no plano z de $T(z)$ situados no interior, fora do e sobre o círculo unitário. O sistema é estável?

Solução Substitua a Eq. (13.60) em $D(z) = 0$ e obtenha[3]

$$s^3 - 19s^2 - 45s - 17 = 0 \tag{13.64}$$

O arranjo tabular de Routh referente à Eq. (13.64), Tabela 13.3, mostra uma raiz no semiplano da direita e duas raízes no semiplano da esquerda. Portanto, $T(z)$ possui um pólo fora

Tabela 13.3 Tabela de Routh relativa ao Exemplo 13.8

s^3	1	−45
s^2	−19	−17
s^1	−45,89	0
s^0	−17	0

[3]Recomenda-se o uso de software de matemática simbólica, como a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB, para reduzir o trabalho necessário para executar a transformação.

do círculo unitário, nenhum pólo sobre e dois pólos no interior. O sistema é instável devido ao pólo fora do círculo unitário.

Exercício de Avaliação 13.5

Problema Determinar a faixa de valores do período de amostragem, T, que fará com que o sistema da Fig. 13.16 seja estável.

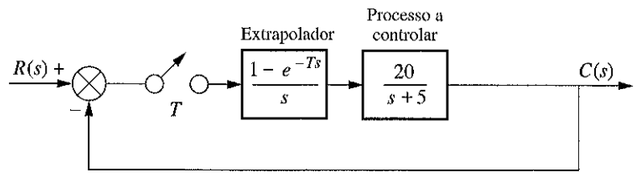


Fig. 13.16 Sistema digital para o Exercício de Avaliação 13.5

Resposta: $0 < T < 0{,}1022$ s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Exercício de Avaliação 13.6

Problema Dado $T(z) = N(z)/D(z)$, onde $D(z) = z^3 - z^2 - 0{,}5\,z + 0{,}3$, usar o critério de Routh-Hurwitz e determinar o número de pólos de $T(z)$ no interior do círculo unitário, fora e sobre. O sistema é estável?

Resposta: $T(z)$ possui um pólo fora do círculo unitário, nenhum pólo sobre e dois pólos no interior. O sistema é instável.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção tratamos dos conceitos de estabilidade de sistemas digitais. Foram discutidas as perspectivas do plano s e do plano z. Usando uma transformação bilinear, fomos capazes de usar o critério de Routh-Hurwitz para determinar a estabilidade.

O destaque da seção é que a taxa de amostragem (juntamente com os parâmetros do sistema, como ganho e valores dos componentes) ajuda a obter ou a destruir a estabilidade de um sistema digital. Em geral, se a taxa de amostragem for muito lenta, o sistema digital a malha fechada será instável. Vamos nos deslocar agora para os erros de estado estacionário estabelecendo um paralelo com a discussão anterior sobre erros de estado estacionário nos sistemas analógicos.

13.7 Erros de Estado Estacionário

Vamos examinar agora o efeito da taxa de amostragem sobre o erro de estado estacionário em sistemas digitais. Uma conclusão geral sobre o erro de estado estacionário é difícil por conta da dependência dessas conclusões do posicionamento do amostrador na malha. Lembre-se de que a posição do amostrador pode alterar a função de transferência a malha aberta. Na discussão sobre sistemas analógicos, havia uma única função de transferência a malha aberta, $G(s)$, sobre a qual foi baseada a teoria geral do erro de estado estacionário e de onde vieram as definições padrões de constantes de erro estático. Nos sistemas digitais, contudo, o posicionamento do amostrador altera a função de transferência a malha aberta e, portanto, impede quaisquer conclusões gerais. Nesta seção vamos admitir o posicionamento típico do amostrador após o erro e na posição do controlador em cascata e deduzir as conclusões correspondentes sobre o erro de estado estacionário de sistemas digitais.

Considere o sistema digital na Fig. 13.17(a), onde o computador digital está representado pelo amostrador e pelo extrapolador de ordem zero (z.o.h.). A função de transferência do processo a controlar está representada por $G_1(s)$ e a função de transferência do z.o.h. por $(1 - e^{-Ts})/s$. Fazendo $G(s)$ igual ao produto da função de transferência do z.o.h. por $G_1(s)$ e usando as técnicas de redução de diagramas de blocos para sistemas amostrados, podemos obter o erro amostrado $E^*(s) = E(z)$. Acrescentando amostradores sincronizados na entrada e na retroação, obtemos a Fig. 13.17(b). Empurrando $G(s)$ e seu amostrador de entrada para a direita do ponto de distribuição de sinal resulta a Fig. 13.17(c). Usando a Fig. 13.9(a), podemos converter cada um dos blocos na sua transformada z, resultando a Fig. 13.17(d).

Com base nesta figura, $E(z) = R(z) - E(z)G(z)$, ou seja,

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)} \tag{13.65}$$

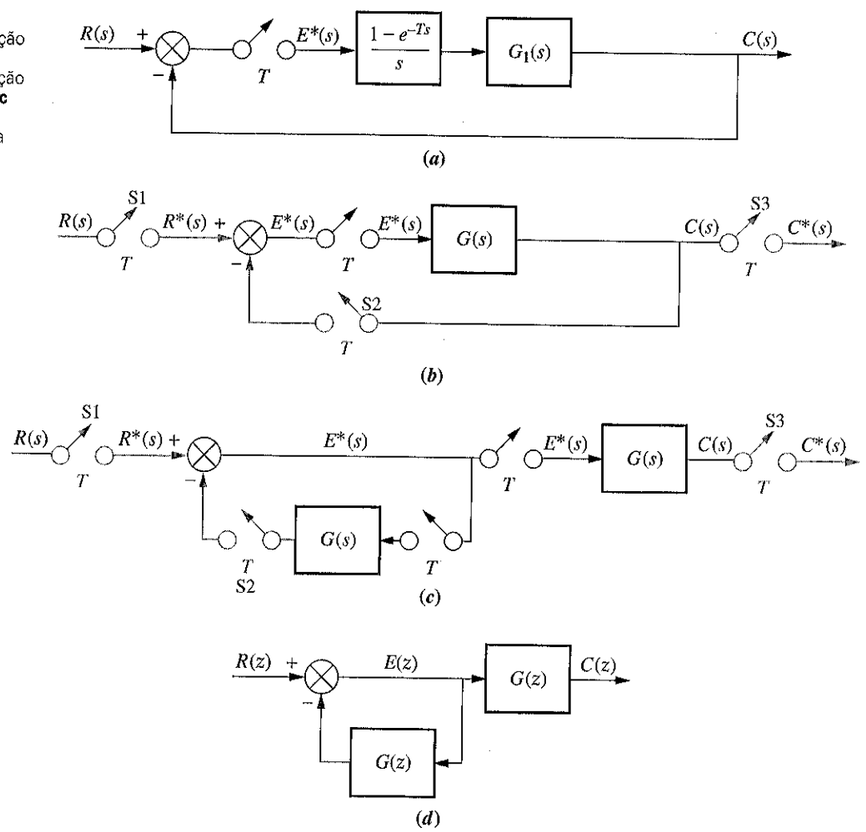


Fig. 13.17 a. Sistema de controle digital com retroação para cálculo dos erros de estado estacionário; **b.** adição de amostradores fictícios; **c** empurrando $G(s)$ e seus amostradores para a direita do ponto de derivação; **d.** sistema equivalente em transformada z

Nota: Foram incluídos amostradores fictícios S1, S2 e S3.

O teorema do valor final para sinais discretos estabelece que

$$e^*(\infty) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})E(z) \tag{13.66}$$

onde $e^*(\infty)$ é o valor final amostrado de $e(t)$ ou, alternativamente, o valor final de $e(kT)$.[4]

Usando o teorema do valor final na Eq. (13.65), descobrimos que o erro de estado estacionário amostrado, $e^*(\infty)$, para sistemas com retroação negativa unitária é

$$e^*(\infty) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})\frac{R(z)}{1 + G(z)} \tag{13.67}$$

A Eq. (13.67) deve ser agora calculada para cada uma das entradas: em degrau, em rampa e em parábola.

Entrada em Degrau Unitário

Para uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$. Com base na Tabela 13.1,

$$R(z) = \frac{z}{z - 1} \tag{13.68}$$

Substituindo a Eq. (13.68) na Eq. (13.67), temos

$$e^*(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{z \to 1} G(z)} \tag{13.69}$$

[4]Veja a dedução em Ogata (1987:59).

Definindo a constante de erro estático, K_p, como

$$K_p = \lim_{z \to 1} G(z) \tag{13.70}$$

reescrevemos a Eq. (13.69) como

$$e^*(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} \tag{13.71}$$

Entrada em Rampa Unitária

Para uma entrada em rampa unitária, $R(z) = Tz/(z - 1)^2$. Seguindo o procedimento da entrada em degrau podemos deduzir que

$$e^*(\infty) = \frac{1}{K_v} \tag{13.72}$$

onde

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z \to 1}(z - 1)G(z) \tag{13.73}$$

Entrada em Parábola Unitária

Para uma entrada em parábola unitária, $R(z) = T^2z(z + 1)/[2(z - 1)^3]$. De modo semelhante,

$$e^*(\infty) = \frac{1}{K_a} \tag{13.74}$$

onde

$$K_a = \frac{1}{T^2}\lim_{z \to 1}(z - 1)^2G(z) \tag{13.75}$$

Resumo dos Erros de Estado Estacionário

As equações desenvolvidas anteriormente para $e^*(\infty)$, K_p, K_v e K_a são semelhantes às desenvolvidas para os sistemas analógicos. Do mesmo modo que a colocação de pólos múltiplos na origem do plano s reduz a zero o erro de estado estacionário no caso analógico, podemos ver que a colocação de pólos múltiplos em $z = 1$ reduz a zero o erro de estado estacionário de sistemas digitais do tipo discutido nesta seção. Esta conclusão faz sentido quando se considera que $s = 0$ é mapeado em $z = 1$ por meio de $z = e^{Ts}$.

Por exemplo, para uma entrada em degrau, vemos que, se $G(z)$ na Eq. (13.69) possuir um pólo em $z = 1$, o limite se tornará infinito e o erro de estado estacionário se reduzirá a zero.

Para uma entrada em rampa, se $G(z)$ na Eq. (13.73) possuir dois pólos em $z = 1$, o limite se tornará infinito e o erro de estado estacionário se reduzirá a zero

Conclusões semelhantes podem ser extraídas para uma entrada em parábola e para a Eq. (13.75). Aqui $G(z)$ precisa de três pólos em $z = 1$ a fim de que o erro de estado estacionário seja zero. Vejamos um exemplo.

Exemplo 13.9

Determinação do erro de estado estacionário

Problema Determine o erro de estado estacionário do sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 13.17(a) para entradas em degrau, em rampa e em parábola, se

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s + 1)} \tag{13.76}$$

Solução Obtenha em primeiro lugar $G(s)$, produto das funções de transferência do z.o.h. e do processo a controlar.

$$G(s) = \frac{10(1 - e^{-Ts})}{s^2(s + 1)} = 10(1 - e^{-Ts})\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1}\right] \tag{13.77}$$

A transformada z é, então,

$$\begin{aligned} G(z) &= 10(1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z - 1)^2} - \frac{z}{z - 1} + \frac{z}{z - e^{-T}}\right] \\ &= 10\left[\frac{T}{z - 1} - 1 + \frac{z - 1}{z - e^{-T}}\right] \end{aligned} \tag{13.78}$$

Para uma entrada em degrau,

$$K_p = \lim_{z \to 1} G(z) = \infty; \qquad e^*(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \tag{13.79}$$

Para uma entrada em rampa,

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z - 1)G(z) = 10; \qquad e^*(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0{,}1 \tag{13.80}$$

Para uma entrada em parábola,

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} (z - 1)^2 G(z) = 0; \qquad e^*(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty \tag{13.81}$$

Você observará que as resultados obtidos são os mesmos dos sistemas analógicos. Contudo, como a estabilidade depende do intervalo de amostragem, antes de efetuar os cálculos de erro estacionário certifique-se de que você verificou a estabilidade após estabelecer o intervalo de amostragem.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p6 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para determinar K_p, K_v e K_a em um sistema digital, bem como verificar a estabilidade. Este exercício resolve o Exemplo 13.9 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 13.7

Problema Determine o erro de estado estacionário do sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 13.17(*a*) para entradas em degrau, em rampa e em parábola, se

$$G_1(s) = \frac{20(s + 3)}{(s + 4)(s + 5)}$$

Faça $T = 0{,}1$ s. Repita para $T = 0{,}5$ s.

Resposta: Para $T = 0{,}1$ s, $K_p = 3$, $K_v = 0$ e $K_a = 0$; para $T = 0{,}5$ s o sistema é instável.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção discutimos e calculamos o erro de estado estacionário de sistemas digitais para entrada em degrau, em rampa e em parábola. As equações do erro de estado estacionário são semelhantes às dos sistemas analógicos. Até mesmo as definições das constantes de erro estático foram semelhantes. Para melhorar o erro de estado estacionário, os pólos na origem do plano s dos sistemas analógicos foram substituídos por pólos em $+1$. Continuamos nossa discussão comparativa tratando agora da resposta transitória e do lugar das raízes de sistemas digitais.

13.8 Resposta Transitória no Plano *z*

Lembre-se de que nos sistemas analógicos um requisito de resposta transitória era especificado através da seleção de pólos a malha fechada, no plano s. No Cap. 8, os pólos a malha fechada ficavam sobre o lugar das raízes existente e o projeto consistia em um simples ajuste de ganho. Se os pólos não estivessem sobre o lugar das raízes existente, então era projetado um compensador em cascata para alterar a forma do lugar das raízes original fazendo-o passar pelo pólo a malha fechada desejado. Um ajuste de ganho completava então o projeto.

Nas duas próximas seções desejamos fazer uma comparação com os métodos analógicos descritos e aplicar técnicas semelhantes aos sistemas digitais. Neste capítulo introdutório, iremos fazer uma comparação com a discussão que trata do projeto através do ajuste de ganho. O projeto de compensação fica para um curso avançado.

O Cap. 4 estabeleceu as relações entre a resposta transitória e o plano s. Vimos que as retas verticais do plano s eram linhas de tempo de assentamento constante, as linhas horizontais eram linhas de instante de pico constante e as linhas radiais eram linhas de ultrapassagem percentual constante. Para extrair conclusões equivalentes no plano z, iremos mapear essas linhas através de $z = e^{sT}$.

As linhas verticais do plano s são linhas de tempo de assentamento constante e são caracterizadas pela equação $s = \sigma_1 + j\omega$, onde a parte real, $\sigma_1 = -4/T_s$, é constante e, para ser estável, está no semiplano da esquerda.

$$z = e^{\sigma_1 T} e^{j\omega T} = r_1 e^{j\omega T} \tag{13.82}$$

A Eq. (13.82) designa círculos concêntricos com raio r_1. Se σ_1 for positivo, o círculo terá um raio maior que o do círculo unitário. Por outro lado, se σ_1 for negativo, o círculo terá um raio menor que o do círculo unitário. Os círculos de tempo de assentamento constante, normalizados em relação ao intervalo de amostragem, estão mostrados na Fig. 13.18 com raio $e^{\sigma_1 T} = e^{-4/(T_s/T)}$. Além disso, $T_s/T = -4/\ln(r)$, onde r é o raio do círculo de tempo de assentamento constante.

As linhas horizontais são linhas de instante de pico constante. As linhas são caracterizadas pela equação $s = \sigma + j\omega_1$, onde a parte imaginária, $\omega_1 = \pi/T_p$, é constante. Substituindo isto em $z = e^{sT}$, obtemos

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega_1 T} = e^{\sigma T} e^{j\theta_1} \tag{13.83}$$

A Eq. (13.83) representa linhas radiais segundo um ângulo θ_1. Se σ_1 for negativo, esse trecho da linha radial ficará situado no interior do círculo unitário. Se σ_1 for positivo, esse trecho da linha radial ficará situado fora do círculo unitário. As linhas de tempo de assentamento constante, normalizadas em relação ao intervalo de amostragem, estão mostradas na Fig. 13.18. O ângulo de cada uma das linhas radiais é $\omega_1 T = \theta_1 = \pi/(T_p/T)$, de onde $T_p/T = \pi/\theta_1$.

Finalmente, mapeamos as linhas radiais do plano s no plano z. Lembre-se de que estas linhas são linhas de ultrapassagem constante no plano s. Com base na Fig. 13.19, estas linhas radiais são representadas por

$$\frac{\sigma}{\omega} = -\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1}\zeta) = -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{13.84}$$

Portanto,

$$s = \sigma + j\omega = -\omega \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} + j\omega \tag{13.85}$$

Transformando a Eq. (13.85) para o plano z, resulta

$$z = e^{sT} = e^{-\omega T(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})} e^{j\omega T} = e^{-\omega T(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})} \angle \omega T \tag{13.86}$$

Portanto, dada uma relação de amortecimento desejada, ζ, a Eq. (13.86) pode ser traçada no plano z para uma faixa de valores de ωT, como mostrado na Fig. 13.18. Estas curvas podem ser usadas como curvas de ultrapassagem percentual constante no plano z.

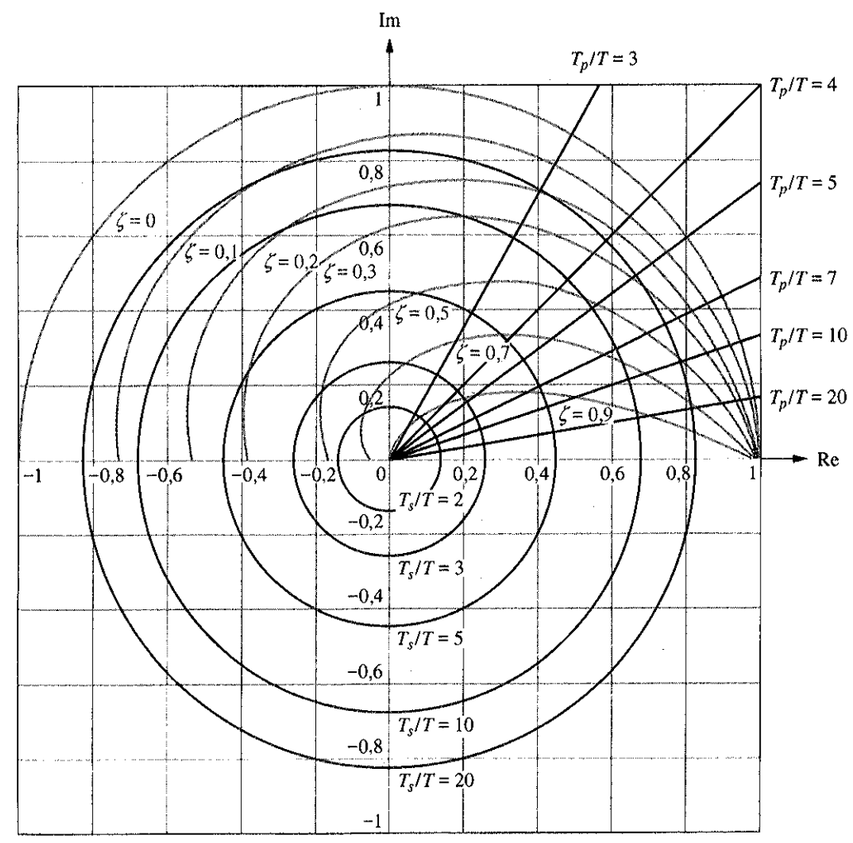


Fig. 13.18 Gráficos no plano z de relação de amortecimento constante, tempo de assentamento normalizado e instante de pico normalizado

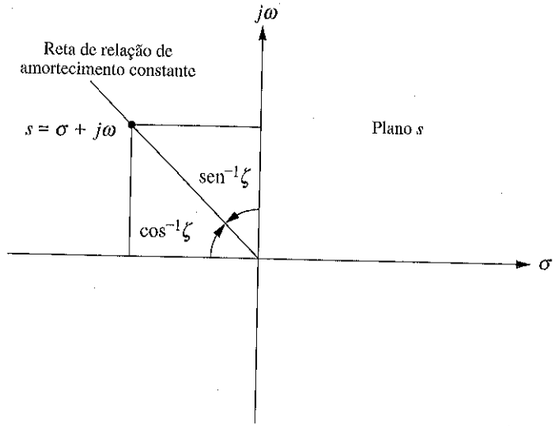


Fig. 13.19 Esboço no plano s da reta de ultrapassagem percentual constante

Esta seção preparou o cenário para a análise e o projeto da resposta transitória de sistemas digitais. Na próxima seção vamos aplicar os resultados aos sistemas digitais usando o lugar das raízes.

13.9 Projeto de Ajuste de Ganho no Plano z

Nesta seção vamos construir lugares das raízes e determinar o ganho necessário para estabilidade bem como o ganho necessário para atender requisitos de resposta transitória. Como as funções de transferência a malha aberta e a malha fechada do sistema digital genérico mostrado na Fig. 13.20 são idênticas às do sistema contínuo, exceto no que diz respeito à troca da variável s por z, podemos usar as mesmas regras para traçar um lugar das raízes.

Contudo, com base em nossa discussão anterior, a região de estabilidade no plano z está situada no interior do círculo unitário e não no semiplano s da esquerda. Portanto, a fim de determinar a estabilidade, devemos procurar a interseção do lugar das raízes com o círculo unitário em vez da interseção com o eixo imaginário.

Na última seção deduzimos as curvas de valores constantes de tempo de assentamento, de instante de pico e de relação de amortecimento. A fim de projetar a resposta transitória de um sistema digital devemos obter a interseção do lugar das raízes com as curvas apropriadas no plano z mostradas na Fig. 13.18. Vejamos o exemplo a seguir.

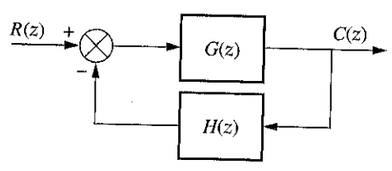


Fig. 13.20 Sistema genérico de controle digital com retroação

Exemplo 13.10

Projeto de estabilidade por intermédio do lugar das raízes

Problema Esboce o lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 13.21. Determine também a faixa de valores do ganho, K, para estabilidade, a partir do gráfico do lugar das raízes.

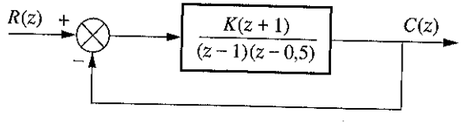


Fig. 13.21 Sistema de controle digital com retroação para o Exemplo 13.10

Solução Trate o sistema como se z fosse s e esboce o lugar das raízes. O resultado está mostrado na Fig. 13.22. Usando o programa de lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 contido no CD-ROM que acompanha o livro, investigue ao longo do círculo unitário a condição angular de 180°. A identificação do ganho, K, neste ponto leva a uma faixa de valores para se ter estabilidade. Usando o programa, descobrimos que a interseção do lugar das raízes com o círculo unitário é $1\angle 60°$. Portanto a faixa de valores do ganho para estabilidade é $0 < K < 0{,}5$.

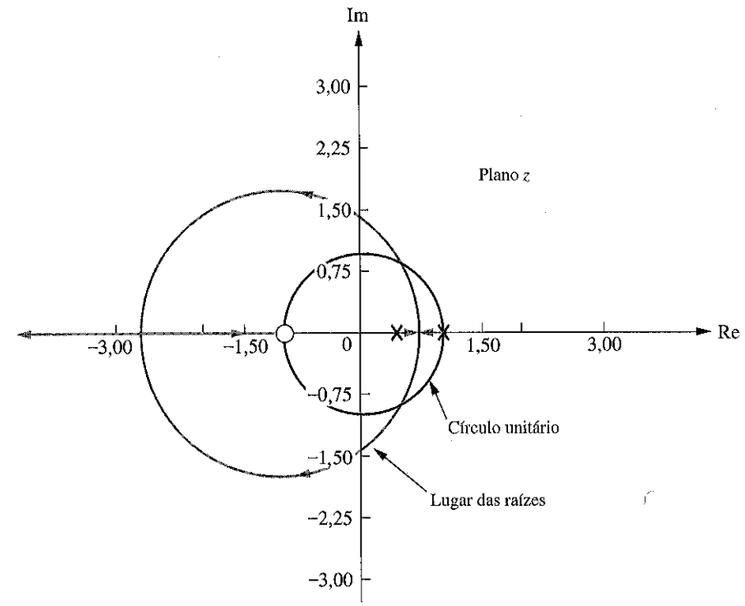


Fig. 13.22 Lugar das raízes relativo ao sistema da Fig. 13.21

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p7 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para traçar o lugar das raízes no plano z bem como superpor o círculo unitário. Você aprenderá como selecionar interativamente a interseção do lugar das raízes com o círculo unitário para obter o valor de ganho para estabilidade. Este exercício resolve o Exemplo 13.10 usando o MATLAB.

No próximo exemplo, projetamos o valor do ganho, K, na Fig. 13.21 para atender uma especificação de resposta transitória. O problema é manipulado de modo semelhante ao projeto de sistemas analógicos, onde obtivemos o ganho no ponto onde o lugar das raízes cruzava a curva especificada de relação de amortecimento, de tempo de assentamento ou de instante de pico. Nos sistemas digitais, estas curvas estão mostradas na Fig. 13.18. Resumindo, então, trace o lugar das raízes do sistema digital e superponha as curvas da Fig. 13.18. Determine em seguida onde o lugar das raízes intercepta a curva com o valor desejado de relação de amortecimento, de tempo de assentamento ou de instante de pico e calcule o ganho nesse ponto. Para simplificar os cálculos e obter resultados mais precisos, desenhe uma linha radial passando pelo ponto onde o lugar das raízes intercepta a curva apropriada. Meça o ângulo desta reta e use o programa de lugar das raízes do Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha o livro para procurar ao longo desta linha radial o ponto de interseção com o lugar das raízes.

Exemplo 13.11

Projeto de resposta transitória por intermédio de ajuste de ganho

Problema Para o sistema da Fig. 13.21, obtenha o valor do ganho, K, que leva a uma relação de amortecimento de 0,7.

Solução A Fig. 13.23 mostra a curva de relação de amortecimento constante superposta ao lugar das raízes do sistema como determinado em nosso último exemplo. Desenhe uma linha radial da origem à interseção do lugar das raízes com a curva de relação de amortecimento 0,7 (uma linha com inclinação de 16,62°). O programa de lugar das raízes discutido no Apêndice H.2 no CD-ROM que acompanha o livro pode ser usado agora para obter o ganho investigando a condição angular de 180° ao longo da reta de 16,62°, que passa pela interseção com o lugar das raízes. Os resultados do programa mostram que o ganho, K, é 0,0627 em $0{,}719 + j0{,}215$, o ponto onde a curva de relação de amortecimento 0,7 intercepta o lugar das raízes.

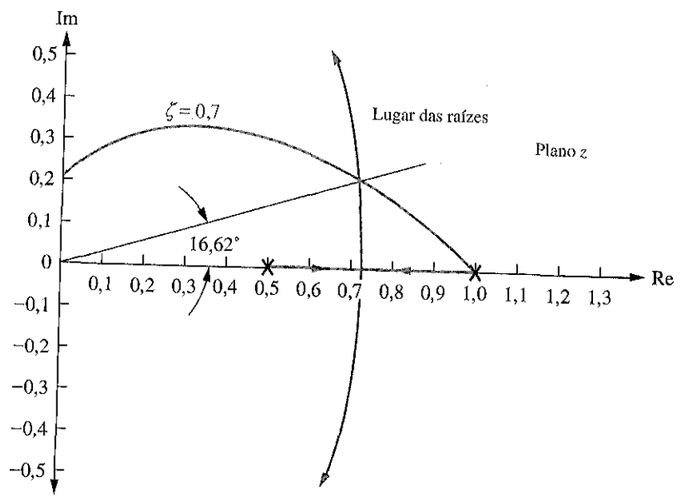


Fig. 13.23 Lugar das raízes relativo ao sistema da Fig. 13.21 com a curva de relação de amortecimento de 0,7

Podemos agora verificar o projeto da resposta ao degrau unitário amostrada relativa ao sistema da Fig. 13.21. Usando o projeto, $K = 0{,}0627$, juntamente com $R(z) = z/(z-1)$, uma entrada em degrau amostrada, descobrimos que a saída amostrada deve ser

$$C(z) = \frac{R(z)G(z)}{1+G(z)} = \frac{0{,}0627z^2 + 0{,}0627z}{z^3 - 2{,}4373z^2 + 2z - 0{,}5627} \tag{13.87}$$

Executando a divisão indicada, obtemos a saída válida nos instantes de amostragem, como mostrado na Fig. 13.24. Como a ultrapassagem é de aproximadamente 5%, o requisito de relação de amortecimento igual a 0,7 foi atendido. Você deve lembrar, contudo, que o gráfico é válido somente nos múltiplos inteiros do intervalo de amostragem.

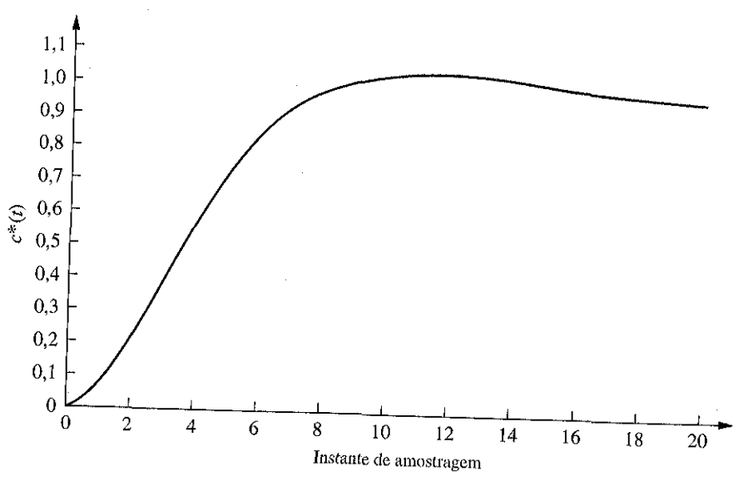


Fig. 13.24 Resposta ao degrau amostrada do sistema da Fig. 13.21 com $K = 0{,}0627$

Nota: Válido somente em valores múltiplos inteiros do instante de amostragem.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p8 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para traçar o lugar das raízes no plano z bem como superpor uma grade de curvas de relação de amortecimento. Você aprenderá como obter o ganho e a resposta ao degrau a malha fechada de um sistema digital depois de selecionar interativamente o ponto de operação no lugar das raízes. Este exercício resolve o Exemplo 13.11 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 13.8

Problema Para o sistema da Fig. 13.20, onde $H(z) = 1$ e

$$G(z) = \frac{K(z+0{,}5)}{(z-0{,}25)(z-0{,}75)}$$

determinar o valor do ganho, K, que leva a uma relação de amortecimento igual a 0,5.

Resposta: $K = 0{,}31$.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Simulink

O Simulink do MATLAB fornece um método alternativo para simulação de sistemas digitais visando obter a resposta em função do tempo. Os estudantes que estiverem executando exercícios do MATLAB e desejarem explorar a capacidade adicional do Simulink devem consultar agora o Apêndice C, Tutorial sobre o Simulink do MATLAB. O Exemplo C.4 no tutorial mostra como usar o Simulink para simular sistemas digitais.

Ferramenta GUI

O visualizador LTI Viewer do MATLAB fornece um outro método de simulação de sistemas digitais para obter a resposta em função do tempo. Os estudantes que estiverem executando exercícios do MATLAB e desejarem explorar a capacidade adicional do LTI Viewer do MATLAB devem consultar agora o Apêndice D, que contém um tutorial sobre o LTI Viewer bem como alguns exemplos. Um dos exemplos ilustrativos, Exemplo D.5, determina a resposta ao degrau a malha fechada de um sistema digital usando o LTI Viewer.

Nesta seção usamos o lugar das raízes e o ajuste de ganho para projetar a resposta transitória de um sistema digital. Este método padece das mesmas dificuldades encontradas na sua aplicação aos sistemas analógicos, ou seja, se o lugar das raízes não interceptar o ponto desejado de projeto, então um simples ajuste de ganho não atenderá o objetivo de projeto. Podem ser aplicadas então as técnicas de projeto de compensação.

13.10 Compensação em Cascata por Intermédio do Plano *s*

Nas seções precedentes deste capítulo, analisamos e projetamos sistemas digitais diretamente no domínio de z incluindo até o projeto por ajuste de ganho. Agora estamos prontos para projetar compensadores digitais, como os tratados nos Caps. 9 e 11. Em vez de continuar nesta linha de projeto diretamente no domínio de z, nos desviamos para tratar de técnicas de análise e de projeto que nos permitam fazer uso dos capítulos anteriores projetando no plano s e em seguida transformando o projeto no plano s em uma implementação digital. Cobrimos um aspecto de análise no plano s na Seção 13.6, onde usamos uma transformação bilinear para analisar estabilidade. Continuamos agora com a análise e o projeto no plano s aplicando-o ao projeto de um compensador em cascata. O projeto direto de compensadores no plano z é deixado para um curso específico sobre sistemas de controle digital.

Compensação em Cascata

Para realizar o projeto no plano s e depois transformar o compensador contínuo em um compensador digital, precisamos de uma transformação bilinear que preserve, nos instantes de amostragem, a resposta do compensador contínuo. A transformação bilinear tratada na Seção 13.6 não atende esse requisito. Uma transformação bilinear que pode ser aplicada manualmente e leva a uma função de transferência digital cuja resposta nos instantes de amostragem é aproximadamente a mesma da função de transferência analógica equivalente é chamada de *transformação de Tustin*. Esta transformação é usada para transformar o compensador contínuo, $G_c(s)$, no compensador digital, $G_c(z)$. A transformação de Tustin é dada por[5]

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \tag{13.88}$$

e sua inversa, por

$$z = \frac{-\left(s + \frac{2}{T}\right)}{\left(s - \frac{2}{T}\right)} = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \tag{13.89}$$

[5]Para dedução veja Ogata (1987: 315-318).

À medida que o período de amostragem, T, se torna menor (taxa de amostragem maior), a saída do compensador digital projetado se assemelha cada vez mais à do compensador analógico. Se a taxa de amostragem não for suficientemente alta, haverá uma discrepância nas freqüências mais altas entre as respostas de freqüência de filtros analógicos e digitais. Há métodos para corrigir a discrepância, mas eles estão além do escopo de nossa discussão. O leitor interessado deve investigar o tópico sobre *prewarping*, desenvolvido em livros dedicados ao controle digital e listados na Bibliografia no final deste capítulo.

Astrom e Wittenmark (Astrom, 1984) desenvolveram um roteiro para selecionar o intervalo de amostragem, T. Sua conclusão é que o valor de T em segundos deve ficar na faixa de $0{,}15/\omega_{\Phi_M}$ a $0{,}5/\omega_{\Phi_M}$, onde ω_{Φ_M} é a freqüência de zero dB (rad/s) da curva de magnitude da resposta de freqüência da associação em cascata do compensador analógico e do processo a controlar.

No exemplo a seguir projetaremos um compensador, $G_c(s)$, para atender especificações de desempenho necessárias. Usaremos então a transformação de Tustin para obter o modelo de um controlador digital equivalente. Na próxima seção mostraremos como implementar o controlador digital.

Exemplo 13.12

Projeto de um compensador digital em cascata

Problema Para o sistema de controle digital da Fig. 13.25(*a*), onde

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+6)(s+10)} \tag{13.90}$$

projete um compensador digital por avanço de fase, $G(z)$, como mostrado na Fig. 13.25(*c*), de modo que o sistema opere com uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento de 1,1 s. Crie o projeto no domínio de s e transforme o compensador para o domínio de z.

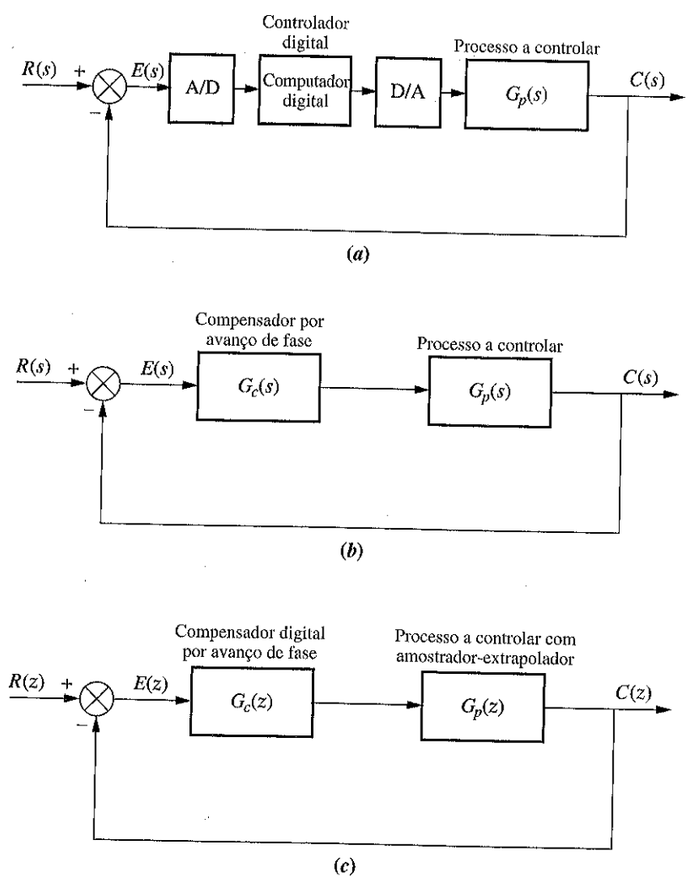


Fig. 13.25 a. Sistema de controle digital mostrando o computador digital executando a compensação; **b.** sistema contínuo usado para projeto; **c.** sistema digital transformado

Solução Usando a Fig. 13.25(*b*), projete um compensador por avanço de fase usando as técnicas descritas nos Caps. 9 ou 11. O projeto foi criado como parte do Exemplo 9.6, onde descobrimos que o compensador por avanço de fase era

$$G_c(s) = \frac{1977(s+6)}{(s+29{,}1)} \tag{13.91}$$

Usando as Eqs. (13.90) e (13.91), descobrimos que a freqüência de zero dB, ω_{Φ_M}, relativa a $G_p(s)G_c(s)$ é 5,8 rad/s. Utilizando as diretrizes descritas em (Astrom, 1984), o valor mais baixo de T deve estar na faixa $0{,}15/\omega_{\Phi_M} = 0{,}026$ s a $0{,}5/\omega_{\Phi_M} = 0{,}086$ s. Usemos $T = 0{,}01$ s.

Substituindo a Eq. (13.88) na Eq. (13.91) com $T = 0{,}01$ s, resulta

$$G_c(z) = \frac{1778z - 1674}{z - 0{,}746} \tag{13.92}$$

A transformada z do processo a controlar e do extrapolador de ordem zero, obtido pelo método discutido na Seção 13.4 com $T = 0{,}01$ s, é

$$G_p(z) = \frac{(1{,}602 \times 10^{-7}z^2) + (6{,}156 \times 10^{-7}z) + (1{,}478 \times 10^{-7})}{z^3 - 2{,}847z^2 + 2{,}699z - 0{,}8521} \tag{13.93}$$

A resposta em função do tempo na Fig. 13.26 ($T = 0{,}01$ s) mostra que o sistema a malha fechada compensado atende aos requisitos de resposta transitória. A figura também mostra a resposta para um compensador projetado com os tempos de amostragem nos extremos da diretriz de Astrom e Wittenmark.

MATLAB

Os estudantes que estiverem usando o MATLAB devem executar agora o script cap13p9 no Apêndice B. Você aprenderá como usar o MATLAB para projetar um compensador digital por avanço de fase usando a transformação de Tustin. Este exercício resolve o Exemplo 13.12 usando o MATLAB.

Exercício de Avaliação 13.9

Problema No Exemplo 11.3 foi projetado um compensador por avanço de fase para o sistema com retroação unitária cujo processo a controlar era

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+36)(s+100)}$$

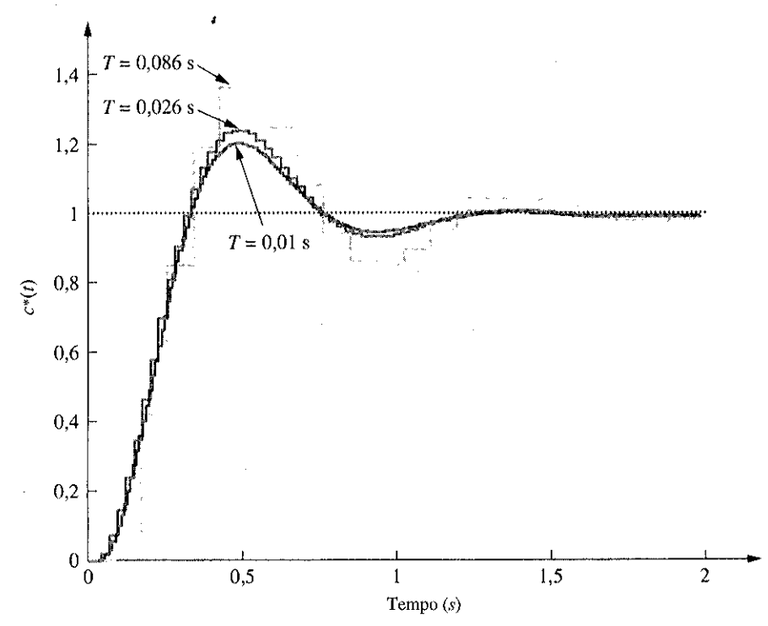


Fig. 13.26 Resposta a malha fechada do sistema compensado do Exemplo 13.12 mostrando o efeito de três diferentes freqüências de amostragem

Nota: Válido somente em valores múltiplos inteiros do instante de amostragem.

As especificações de projeto eram as seguintes: ultrapassagem percentual = 20%, instante de pico = 0,1 s e K_v = 40. Para atender os requisitos, o projeto levou a $K = 1440$ e a um compensador por avanço de fase,

$$G_c(s) = 2{,}38\frac{s + 25{,}3}{s + 60{,}2}$$

Determine o controlador digital, $G(z)$, para que o sistema seja controlado por computador.

Resposta: $G_c(z) = 2{,}34\dfrac{z - 0{,}975}{z - 0{,}9416}$, $T = 0{,}001$ s.

A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Agora que aprendemos como projetar um compensador digital em cascata, $G_c(z)$, a próxima seção nos ensinará a usar um computador digital para implementá-lo.

13.11 Implementação do Compensador Digital

O controlador, $G_c(z)$, pode ser implementado diretamente por meio de cálculo no computador digital do percurso direto mostrado na Fig. 13.27. Deduzamos agora um algoritmo numérico que o computador pode usar para se comportar como o compensador. Determinaremos uma expressão para a saída amostrada do computador, $x^*(t)$, cuja transformada está mostrada na Fig. 13.27 como $X(z)$. Veremos que esta expressão pode ser usada para programar o computador digital para que ele se comporte como o compensador.

Considere o compensador de segunda ordem, $G_c(z)$,

$$G_c(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}{b_2z^2 + b_1z + b_0} \tag{13.94}$$

Multiplicando em cruz,

$$(b_2z^2 + b_1z + b_0)X(z) = (a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0)E(z) \tag{13.95}$$

Resolvendo segundo o termo da maior potência de z na saída, $X(z)$,

$$b_2z^2X(z) = (a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0)E(z) - (b_1z + b_0)X(z) \tag{13.96}$$

Dividindo a Eq. (13.96) pelo coeficiente de $X(z)$ resulta

$$X(z) = \left(\frac{a_3}{b_2}z + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_2}z^{-1} + \frac{a_0}{b_2}z^{-2}\right)E(z) - \left(\frac{b_1}{b^2}z^{-1} + \frac{b_0}{b_2}z^{-2}\right)X(z) \tag{13.97}$$

Finalmente, aplicando a transformada z inversa,

$$\begin{aligned} x^*(t) = {} & \frac{a_3}{b_2}e^*(t + T) + \frac{a_2}{b_2}e^*(t) + \frac{a_1}{b_2}e^*(t - T) + \frac{a_0}{b_2}e^*(t - 2T) \\ & - \frac{b_1}{b_2}x^*(t - T) - \frac{b_0}{b_2}x^*(t - 2T) \end{aligned} \tag{13.98}$$

Podemos ver com base nesta equação que o valor amostrado presente da saída do compensador, $x^*(t)$, é uma função dos valores da amostra futura ($e^*(t + T)$), da amostra presente ($e^*(t)$) e das amostras passadas ($e^*(t - T)$) e ($e^*(t - 2T)$) de $e(t)$, juntamente com os valores das amostras passadas da saída, $x^*(t - T)$ e $x^*(t - 2T)$. Obviamente, se desejarmos implementar fisicamente este compensador, a saída não poderá depender de valores futuros da entrada. Portanto, para ser fisicamente realizável, a_3 deve ser igual a zero para que o valor futuro de $e(t)$ seja zero. Concluímos que o numerador da função de transferência do compensador deve ser de ordem igual ou inferior à do denominador para que o compensador seja fisicamente realizável.

Suponha, agora, que a_3 seja efetivamente igual a zero. A Eq. (13.98) se torna então

$$x^*(t) = \frac{a_2}{b_2}e^*(t) + \frac{a_1}{b_2}e^*(t - T) + \frac{a_0}{b_2}e^*(t - 2t) - \frac{b_1}{b_2}x^*(t - T) - \frac{b_0}{b_2}x^*(t - 2T) \tag{13.99}$$

Portanto, o valor da amostra da saída é uma função dos valores corrente e passados das amostras de entrada bem como dos valores passados das amostras da saída. A Fig. 13.28 mostra o fluxograma do compensador a partir do

Fig. 13.27 Diagrama de blocos mostrando o computador atuando como compensador digital

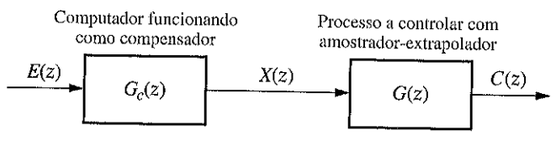
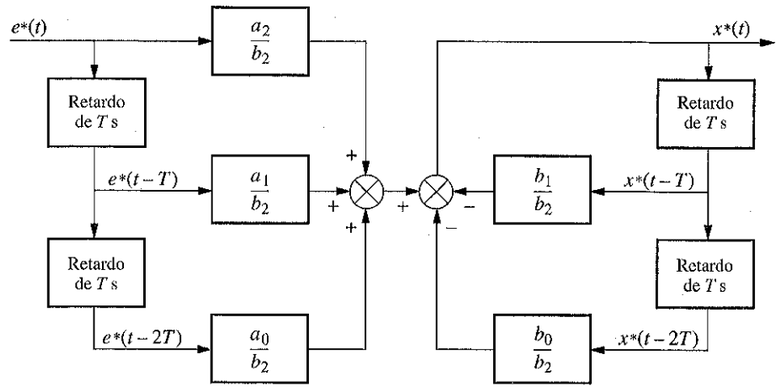


Fig. 13.28 Fluxograma de um compensador digital de segunda ordem



qual poderá ser escrito um programa para o computador digital.[6] A figura mostra que o compensador pode ser implementado armazenando-se diversos valores sucessivos de entrada e de saída. A saída é formada então por uma combinação linear ponderada dessas variáveis armazenadas. Vejamos um exemplo numérico.

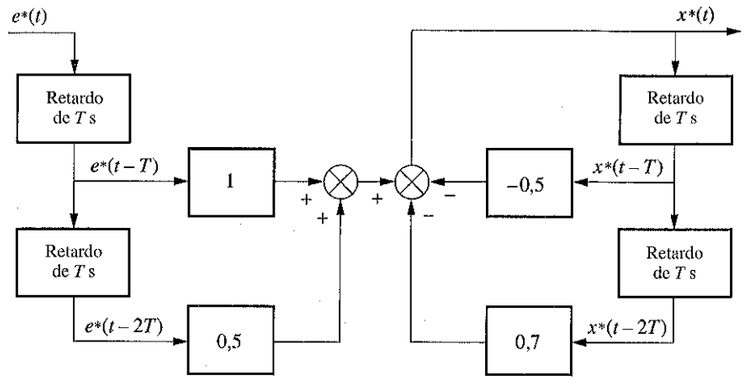
Exemplo 13.13

Implementação de um compensador digital em cascata

Problema Desenvolver um fluxograma para o compensador digital definido pela Eq. (13.100).

$$G_c(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{z + 0{,}5}{z^2 - 0{,}5z + 0{,}7} \tag{13.100}$$

Fig. 13.29 Fluxograma para implementar $G_c(z) = \dfrac{z + 0{,}5}{z^2 - 0{,}5z + 0{,}7}$



Solução Multiplique em cruz e obtenha

$$(z^2 - 0{,}5z + 0{,}7)X(z) = (z + 0{,}5)E(z) \tag{13.101}$$

Resolvendo em função da maior potência de z na saída, $X(z)$,

$$z^2X(z) = (z + 0{,}5)E(z) - (-0{,}5z + 0{,}7)X(z) \tag{13.102}$$

Resolvendo para $X(z)$ no lado esquerdo da equação,

$$X(z) = (z^{-1} + 0{,}5z^{-2})E(z) - (-0{,}5z^{-1} + 0{,}7z^{-2})X(z) \tag{13.103}$$

A implementação da Eq. (13.103) com o fluxograma da Fig. 13.29 completa o projeto.

[6]Para uma excelente discussão sobre fluxogramas básicos para representar compensadores digitais, incluindo a representação mostrada na Fig. 13.28 e fluxogramas alternativos com metade dos retardos, consulte Chassaing, R., *Digital Signal Processing*. Wiley, New York, 1999, pp. 135-143.

Exercício de Avaliação 13.10

Problema Desenhe um fluxograma a partir do qual o compensador

$$G_c(z) = \frac{1899z^2 - 3761z + 1861}{z^2 - 1{,}908z + 0{,}9075}$$

possa ser programado se o período de amostragem for 0,1 s.

Resposta: A solução completa está no CD-ROM que acompanha este livro.

Nesta seção, aprendemos como implementar um compensador digital. O fluxograma resultante pode servir como projeto de um programa de computador digital para o computador situado na malha de controle. O projeto consiste em retardos que podem ser encarados como armazenamento de valores de entrada e de saída. Os valores armazenados são ponderados e adicionados. O engenheiro poderá, então, implementar o projeto com um programa de computador.

Na próxima seção reuniremos os conceitos deste capítulo à medida que aplicarmos os princípios do projeto de sistemas de controle digital ao sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute.

Estudos de Caso

Projeto

Controle de Antena: Projeto da Resposta Transitória através do Ajuste de Ganho

Vamos demonstrar agora os objetivos deste capítulo retornando ao sistema de controle do posicionamento de uma antena em azimute, em andamento ao longo do livro. Iremos mostrar onde o computador é inserido na malha, modelar o sistema e projetar o ganho para atender um requisito de resposta transitória. Mais adiante será projetado um compensador digital.

O computador desempenhará duas funções na malha. Primeiramente, será usado como dispositivo de entrada. Receberá os sinais digitais do teclado em forma de comandos e os sinais digitais da saída do sistema a malha fechada. O teclado substituirá o potenciômetro de entrada, e um conversor análogo-digital (A/D) juntamente com um transdutor de retroação com ganho unitário substituirá o potenciômetro de saída.

A Fig. 13.30(*a*) mostra o sistema analógico original e a Fig. 13.30(*b*) mostra o sistema com o computador na malha. Por conseguinte, o computador está recebendo sinais digitais de duas fontes: (1) a entrada por meio do teclado ou de outros comandos de rastreamento e (*z*) a saída por meio de um conversor (A/D). O processo a controlar está recebendo sinais do computador digital através de um conversor digital-analógico (D/A) e de um amostrador-extrapolador de ordem zero (*sample-and-hold*).

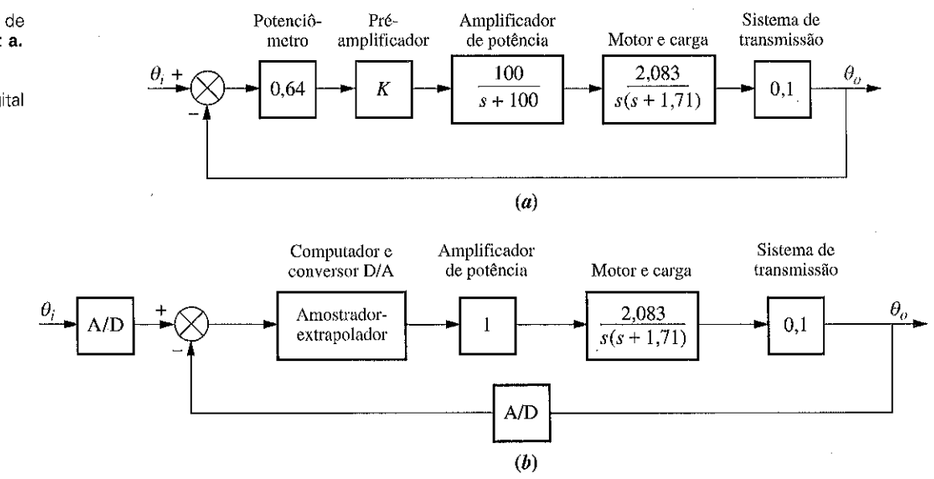


Fig. 13.30 Sistema de controle de antena: **a.** implementação analógica; **b.** implementação digital

A Fig. 13.30(*b*) mostra algumas simplificações que fizemos. O pólo do amplificador de potência é considerado longe o suficiente do pólo do motor para podermos representar o amplificador de potência por um ganho puro igual ao ganho estático unitário. Além disso, incorporamos o ganho eventual do pré-amplificador ao computador e seu conversor D/A associado.

Problema Projete o ganho do sistema de controle de posicionamento da antena em azimute mostrado na Fig. 13.30(*b*), que leve a uma relação de amortecimento de 0,5 para o sistema a malha fechada. Suponha um período de amostragem de $T = 0{,}1$ s.

Solução

Modelagem do Sistema Nosso primeiro objetivo é modelar o sistema no domínio *z*. A função de transferência direta, $G(s)$, que inclui o conjunto amostrador-extrapolador de ordem zero, amplificador de potência, motor e carga e sistema de transmissão, é

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{0{,}2083}{s(s+a)} = \frac{0{,}2083}{a}(1 - e^{Ts})\frac{a}{s^2(s+a)} \tag{13.104}$$

onde $a = 1{,}71$ e $T = 0{,}1$.

Como a transformada *z* de $(1 - e^{-sT})$ é $(1 - z^{-1})$ e, com base no Exemplo 13.6, a transformada *z* de $a/[s^2(s+a)]$ é

$$z\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\} = \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}\right] \tag{13.105}$$

a transformada z do processo a controlar, $G(z)$, é

$$G(z) = \frac{0{,}2083}{a}(1 - z^{-1})z\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\}$$

$$= \frac{0{,}2083}{a^2}\left[\frac{[aT - (1 - e^{-aT})]z + [(1 - e^{-aT}) - aTe^{-aT}]}{(z-1)(z - e^{-aT})}\right] \tag{13.106}$$

Substituindo os valores de a e de T, obtemos

$$G(z) = \frac{9{,}846 \times 10^{-4}(z + 0{,}945)}{(z-1)(z - 0{,}843)} \tag{13.107}$$

A Fig. 13.31 mostra o computador e o processo a controlar como parte de um sistema de controle digital com retroação.

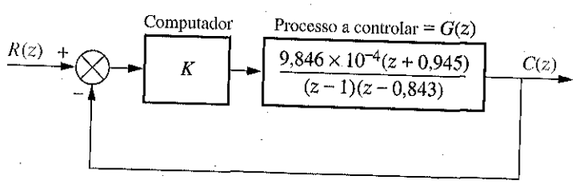


Fig. 13.31 Sistema de controle analógico de posicionamento de uma antena em azimute transformado em um sistema digital

Projeto da Resposta Transitória Agora que a modelagem no domínio z está completa, podemos começar a projetar o sistema para a resposta transitória requerida. Superpomos o lugar das raízes às curvas de relação de amortecimento constante no plano z, como mostrado na Fig. 13.32. Uma reta traçada a partir da origem até a interseção forma um ângulo de 8,58°. Investigando sobre esta reta a condição angular de 180°, descobrimos que a interseção ocorre em $-0{,}915 + j0{,}138$ com um ganho de malha, $9{,}846 \times 10^{-4}K$, de 0,0135. Portanto, $K = 13{,}71$.

A verificação do projeto através da determinação da resposta ao degrau amostrada para o sistema a malha fechada conduz ao gráfico da Fig. 13.33, que mostra uma ultrapassagem de 20% ($\zeta = 0{,}456$).

Desafio Damos agora a você um estudo de caso para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo. Foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute, mostrado na contracapa da frente

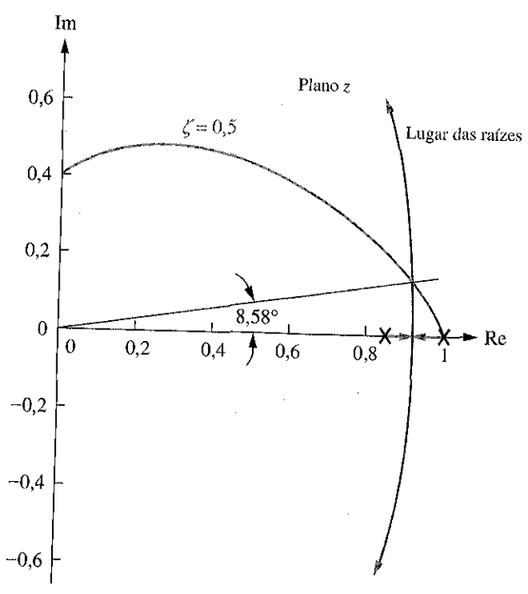
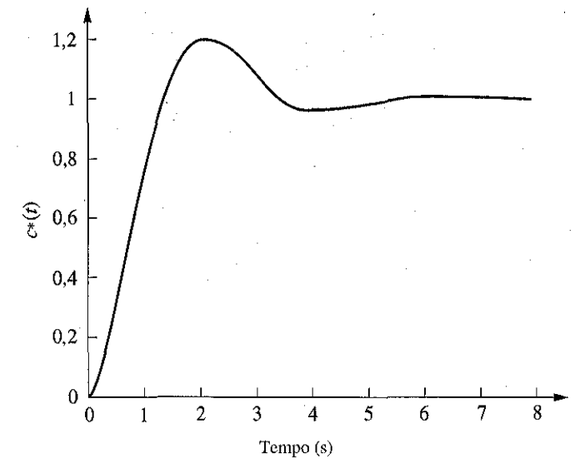


Fig. 13.32 Lugar das raízes superposto à curva de relação de amortecimento constante



Nota: Válido somente em valores múltiplos inteiros do instante de amostragem.

Fig. 13.33 Resposta ao degrau amostrada do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute

(Configuração 2). Faça o seguinte:

a. Converta o sistema em um sistema digital com $T = 0{,}1$ s. Para fins de conversão, suponha que os potenciômetros foram substituídos por transdutores de ganho unitário. Despreze a dinâmica do amplificador de potência.

b. Projete o ganho, K, para obter 16,3% de ultrapassagem.

c. Com o valor de ganho projetado, determine o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária.

MATLAB

d. Repita (*b*) usando o MATLAB.

Projeto

Controle de Antena: Projeto de um Compensador Digital em Cascata

Problema Projetar um compensador digital por avanço de fase para reduzir o tempo de assentamento a um valor 2,5 vezes menor que o do sistema de controle do posicionamento de uma antena em azimute no problema de Estudo de Caso anterior, neste capítulo.

Solução A Fig. 13.34 mostra um diagrama de blocos simplificado do sistema contínuo, desprezando a dinâmica do amplificador de potência e supondo que os potenciômetros tenham sido substituídos por transdutores de ganho unitário, como explicado anteriormente.

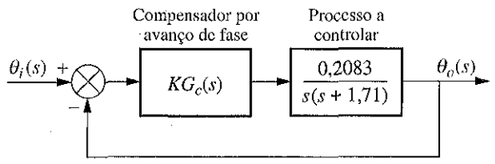


Fig. 13.34 Diagrama de blocos simplificado do sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute

Começamos com um projeto no plano s. A partir da Fig. 13.33, o tempo de assentamento é cerca de 5 s. Por conseguinte, nossos requisitos de projeto são um tempo de assentamento de 2 s e uma relação de amortecimento de 0,5. A freqüência natural é $\omega_n = 4/(\zeta T_s) = 4$ rad/s. Os pólos dominantes do sistema compensado estão localizados em $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j3{,}464$.

O projeto de um zero do compensador por avanço de fase para cancelar o pólo do processo no plano s em $-1{,}71$ leva a um pólo do compensador por avanço de fase em -4. Por conseguinte, o compensador por avanço de fase é dado por

$$G_c(s) = \frac{s + 1{,}71}{s + 4} \tag{13.108}$$

O uso do lugar das raízes para calcular o ganho, K, no ponto de projeto leva a $0{,}2083K = 16$, ou seja, $K = 76{,}81$.

Vamos selecionar agora a freqüência de amostragem apropriada como descrito na Seção 13.10. Usando o compensador em cascata,

$$KG_c(s) = \frac{76{,}81(s + 1{,}71)}{(s + 4)} \tag{13.109}$$

e o processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{0{,}2083}{s(s + 1{,}71)} \tag{13.110}$$

a função de transferência equivalente do percurso direto, $G_e(s) = KG_c(s)G_p(s)$, é

$$G_e(s) = \frac{16}{s(s + 4)} \tag{13.111}$$

A magnitude da resposta de freqüência da Eq. (13.11) é 0 dB em 3,1 rad/s. Por conseguinte, com base na Seção 13.10, o valor do período de amostragem deve ficar na faixa de $0{,}15/\omega_{\Phi_M} = 0{,}05$ a $0{,}5/\omega_{\Phi_M} = 0{,}16$ s. Escolhamos um valor menor, digamos $T = 0{,}025$ s.

Substituindo a Eq. (13.88) na Eq. (13.111), onde $T = 0{,}025$, resulta o compensador digital

$$KG_c(z) = \frac{74{,}72z - 71{,}59}{z - 0{,}9048} \tag{13.112}$$

A fim de simular o sistema digital, calculamos a transformada z do processo a controlar na Fig. 13.34 em cascata com um conjunto amostrador-extrapolador de ordem zero. A transformada z do sistema amostrado é calculada pelo método discutido na Seção 13.4 usando $T = 0{,}025$ s. O resultado é

$$G_p(z) = \frac{6{,}418 \times 10^{-5}z + 6{,}327 \times 10^{-5}}{z^2 - 1{,}958z + 0{,}9582} \tag{13.113}$$

A resposta ao degrau na Fig. 13.35 mostra uma ultrapassagem de aproximadamente 20% e um tempo de assentamento de 2,1 s para o sistema digital a malha fechada.

Concluímos o projeto obtendo o fluxograma do compensador digital. Usando a Eq. (13.112), onde definimos $KG(z) = X(z)/E(z)$, e multiplicando em cruz

$$(z - 0{,}9048)X(z) = (74{,}72z - 71{,}59)E(z) \tag{13.114}$$

Resolvendo em função da maior potência de z em $X(z)$,

$$zX(z) = (74{,}72z - 71{,}59)E(z) + 0{,}9048X(z) \tag{13.115}$$

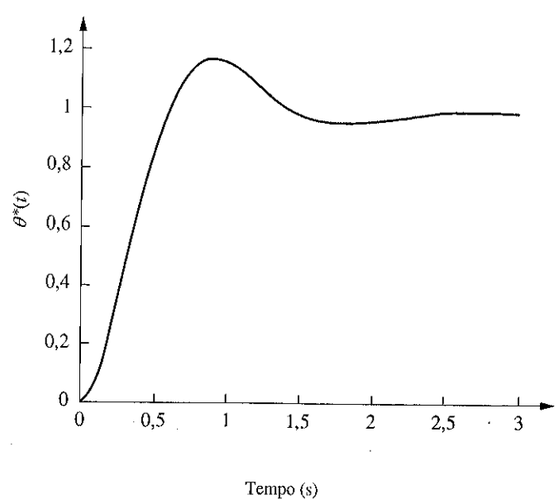


Fig. 13.35 Resposta ao degrau a malha fechada do sistema de controle digital de posicionamento de uma antena em azimute com um compensador por avanço de fase

Nota: Válido somente em valores múltiplos inteiros do instante de amostragem.

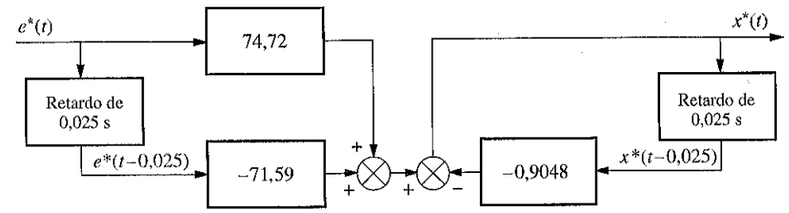


Fig. 13.36 Fluxograma relativo ao compensador digital por avanço de fase

Resolvendo para $X(z)$,

$$X(z) = (74{,}72 - 71{,}59z^{-1})E(z) + 0{,}9048z^{-1}X(z) \tag{13.116}$$

A implementação da Eq. (13.116) como fluxograma leva à Fig. 13.36.

Desafio Damos agora a você um estudo de caso para testar seus conhecimentos sobre os objetivos deste capítulo. Foi dado o sistema de controle de posicionamento de uma antena em azimute mostrado na contracapa da frente (Configuração 2). Substitua os potenciômetros por transdutores de ganho unitário, despreze a dinâmica do amplificador de potência e faça o seguinte:

a. Projete um compensador digital por avanço de fase que leve a 10% de ultrapassagem com 1 s de instante de pico. Projete no plano s e use a transformação de Tustin para especificar e implementar um compensador digital. Escolha um período de amostragem apropriado.

b. Desenhe um fluxograma para o compensador digital por avanço de fase.

MATLAB

c. Repita (*a*) usando o MATLAB.

Sumário

Neste capítulo tratamos do projeto de sistemas digitais usando métodos clássicos. As técnicas no espaço de estados não foram tratadas. Contudo, você está encorajado a prosseguir neste tópico em um curso dedicado a sistemas de controle com dados amostrados.

Vimos as vantagens dos sistemas de controle digital. Estes sistemas podem controlar numerosas malhas a custo reduzido. As alterações no sistema podem ser implementadas através de alterações de software em vez de modificações nos equipamentos.

Normalmente, o computador é colocado no percurso direto precedendo o processo a controlar. São necessárias conversões digital-analógica e análogo-digital no sistema para assegurar compatibilidade entre sinais analógicos e digitais ao longo do sistema. O computador digital na malha é modelado como uma estrutura de amostrador-extrapolador de ordem zero juntamente com a compensação que executa.

Ao longo do capítulo vimos comparações diretas com os métodos usados na análise de transitórios, de erros de estado estacionário e de estabilidade de sistemas analógicos no plano s. A comparação é possibilitada pela transformada z, a qual substitui a transformada de Laplace como escolha de transformada para análise de sistemas com dados amostrados. A transformada z permite representar sinais amostrados nos instantes de amostragem. Podemos manipular sistemas amostrados tão facilmente quanto os sistemas contínuos, incluindo a redução de diagramas de blocos, uma vez que tanto os sinais como os sistemas podem ser representados no domínio z e manipulados algebricamente. Sistemas complexos podem ser reduzidos a um único bloco através de técnicas que se comparam às usadas no plano s. As respostas no domínio do tempo podem ser obtidas através da divisão do numerador pelo denominador sem a expansão em frações parciais necessária no domínio de s.

A análise de sistemas digitais se faz por meio de técnicas semelhantes às do plano s na área de estabilidade. O círculo unitário se torna a fronteira de estabilidade, substituindo o eixo imaginário.

Constatamos também que os conceitos de lugar das raízes e de resposta transitória são facilmente transportados para o plano z. As regras para traçar o lugar das raízes não mudam. Podemos mapear pontos do plano s no plano z e associar características da resposta transitória aos pontos. O cálculo de sistemas com dados amostrados mostra que a taxa de amostragem, além do ganho e da carga, determinam a resposta transitória.

Compensadores em cascata também podem ser projetados para sistemas digitais. Um método é projetar primeiro o compensador no plano s ou através das técnicas de resposta de freqüência descritas nos Caps. 9 e 11, respectivamente. Em seguida o projeto resultante é transformado em compensador digital usando a transformação de Tustin. O projeto de compensadores em cascata diretamente no plano z constitui um método alternativo que pode ser usado. Estas técnicas, contudo, estão além do escopo deste livro.

Este curso introdutório de sistemas de controle agora está completo. Você aprendeu como analisar e projetar sistemas de controle linear usando técnicas no domínio de freqüência e no espaço de estados. Este curso é apenas um começo. Você deve considerar prosseguir seus estudos sobre sistemas de controle através de cursos avançados sobre controle digital, controle não-linear e controle ótimo, nos quais aprenderá novas técnicas para analisar e projetar classes de sistemas não tratados neste livro. Esperamos ter estimulado seu apetite em continuar o aprendizado na engenharia de sistemas de controle.

Perguntas de Revisão

1. Cite duas funções que o computador digital deve realizar quando usado com sistemas de controle com retroação.
2. Cite três vantagens do uso de computadores digitais na malha de controle.
3. Cite duas considerações importantes sobre a conversão análogo-digital que levam a erros.
4. Em que consiste o modelo em diagrama de blocos de um computador digital?
5. O que é a transformada z?
6. Qual o sinal produzido realmente pela transformada z inversa?
7. Cite dois métodos de obtenção da transformada z inversa.
8. Que método de obtenção da transformada z inversa leva a uma expressão em forma fechada da função do tempo?
9. Que método de obtenção da transformada z inversa leva imediatamente a valores da função do tempo nos instantes de amostragem?
10. Para obter a transformada z de $G(s)$, o que deve ser verdade com relação à entrada e à saída?
11. Se a entrada $R(z)$ ao sistema $G(z)$ produz a saída $C(z)$, qual é a natureza de $c(t)$?
12. Se um sinal no domínio do tempo, $c(t)$, na saída do sistema $G(z)$ for traçado usando a transformada z inversa, e resultar a resposta de um sistema de segunda ordem típico com relação de amortecimento de 0,5, podemos dizer que o sistema é estável?
13. O que deve existir para que sistemas com dados amostrados sejam representados pelo produto de suas funções de transferência pulsadas, $G(z)$?
14. Onde está a região de estabilidade no plano z?
15. Quais métodos para a determinação da estabilidade de sistemas digitais podem substituir o critério de Routh-Hurwitz para os sistemas analógicos?
16. Para forçar a zero o erro de estado estacionário nos sistemas analógicos, pode-se posicionar um pólo na origem do plano s. Onde, no plano z, se deve colocar um pólo para forçar a zero o erro de estado estacionário de um sistema com dados amostrados?
17. Como as regras para esboçar o lugar das raízes no plano z diferem das regras para esboçar o lugar das raízes no plano s?
18. Dado um ponto do plano z, como determinar os valores associados de ultrapassagem percentual, de tempo de assentamento e de instante de pico?
19. Dada uma ultrapassagem percentual e um tempo de assentamento, como se pode dizer qual ponto do plano z é o ponto de projeto?
20. Descreva como compensadores digitais podem ser projetados no plano s.
21. Que característica é comum entre um compensador em cascata projetado no plano s e o compensador digital ao qual é convertido?

Problemas

1. Deduza as transformadas z das funções do tempo listadas a seguir. Não utilize tabelas de transformada z. Use o plano $f(t) \rightarrow f^*(t) \rightarrow F^*(s) \rightarrow F(z)$, seguido da conversão de $F(z)$ à forma fechada, fazendo uso do fato de $1/(1 - z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$. Admita amostragem ideal.
   a. $e^{-at}u(t)$
   b. $u(t)$
   c. $t^2e^{-at}u(t)$
   d. $\cos \omega t\, u(t)$

Matemática Simbólica

2. Repita todas as partes do Problema 1 usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB.
3. Para cada $F(z)$, obtenha $f(kT)$ usando expansão em frações parciais
   a. $F(z) = \dfrac{z(z+3)(z+5)}{(z-0{,}4)(z-0{,}6)(z-0{,}8)}$
   b. $F(z) = \dfrac{(z+0{,}2)(z+0{,}4)}{(z-0{,}1)(z-0{,}5)(z-0{,}9)}$
   c. $F(z) = \dfrac{(z+1)(z+0{,}2)}{z(z-0{,}5)(z-0{,}6)}$

Matemática Simbólica

4. Repita todas as partes do Problema 3 usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB.
5. Para cada $F(z)$ no Problema 3 faça o seguinte:
   a. Obtenha $f(kT)$ usando expansão em série de potências.
   b. Verifique os resultados contra as respostas do Problema 3.
6. Usando a expansão em frações parciais e a Tabela 13.1, determine a transformada z para cada $G(s)$ a seguir se $T = 0{,}5$ s.
   a. $G(s) = \dfrac{(s+4)}{(s+2)(s+5)}$
   b. $G(s) = \dfrac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$
   c. $G(s) = \dfrac{27}{(s+2)(s^2+4s+13)}$
   d. $G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)(s^2+12s+61)}$

Matemática Simbólica

7. Repita todas as partes do Problema 6 usando o MATLAB e a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB.
8. Obtenha $G(z) = C(z)/R(z)$ de cada um dos diagramas de blocos mostrados na Fig. P13.1 se $T = 0{,}1$ s.

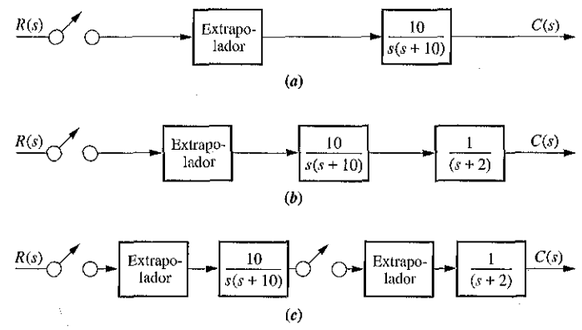


Fig. P13.1

9. Obtenha $G(z) = C(z)/R(z)$ de cada um dos diagramas de blocos mostrados na Fig. P13.2.

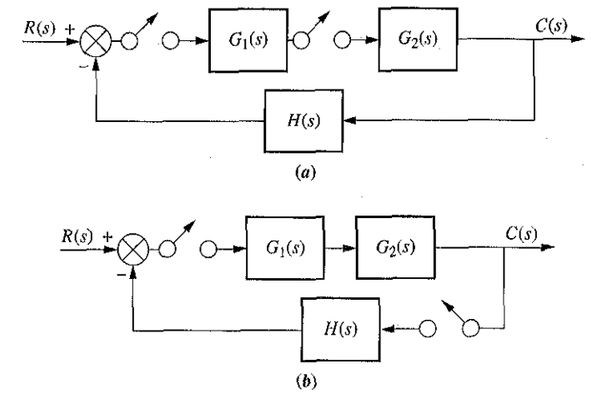


Fig. P13.2

10. Obtenha $C(z)$ em termos gerais para o sistema digital mostrado na Fig. P13.3.
11. Obtenha a função de transferência, $T(z) = C(z)/R(z)$ para o sistema mostrado na Fig. P13.4.
12. Dado o sistema da Fig. P13.5, determinar a faixa de valores do intervalo de amostragem, T, que mantém o sistema estável.

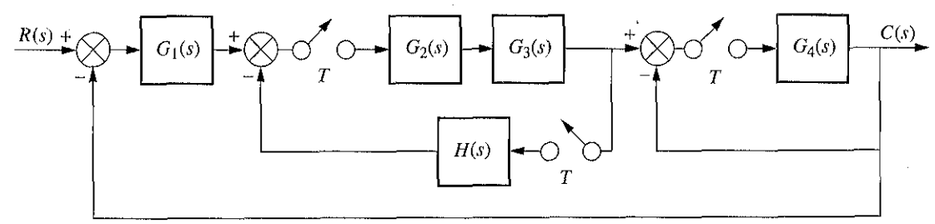


Fig. P13.3

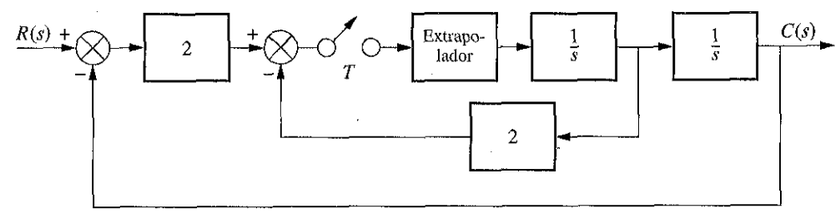


Fig. P13.4

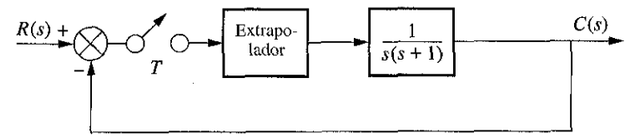


Fig. P13.5

MATLAB

13. Escreva um programa em MATLAB que possa ser usado para determinar a faixa de valores do período de amostragem, T, para estabilidade. O programa será usado em sistemas do tipo representado na Fig. P13.6 e deve atender aos seguintes requisitos:

a. O MATLAB converterá $G_1(s)$ em cascata com um amostrador-extrapolador de ordem zero em $G(z)$.

b. O programa calculará as raízes do sistema a malha fechada no plano z para uma faixa de valores de T, se houver, abaixo da qual o sistema será estável. O MATLAB mostrará este valor de T juntamente com os pólos da função de transferência a malha fechada no plano z.

Teste o programa em

$$G_1(s) = \frac{10(s+7)}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)}$$

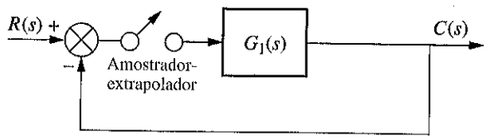


Fig. P13.6

14. Determine a faixa de valores de ganho, K, que torna o sistema da Fig. P13.7 estável.

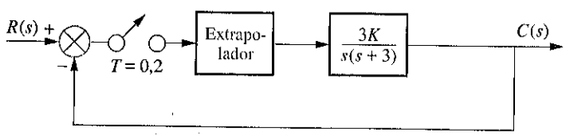


Fig. P13.7

15. Determine as constantes de erro estático e o erro de estado estacionário de cada um dos sistemas digitais mostrados na Fig. P13.8 se as entradas forem:

a. $u(t)$

b. $tu(t)$

c. $\frac{1}{2}t^2u(t)$

MATLAB

16. Escreva um programa em MATLAB que possa ser usado para determinar K_p, K_v e K_a em sistemas digitais. O programa será usado para sistemas do tipo representado na Fig. P13.6. Teste seu programa em

$$G(z) = \frac{0{,}04406z^3 - 0{,}03624z^2 - 0{,}03284z + 0{,}02857}{z^4 - 3{,}394z^3 + 4{,}29z^2 - 2{,}393z + 0{,}4966}$$

onde $G(z)$ é a função de transferência pulsada de $G_1(s)$ em cascata com o z.o.h. e $T = 0{,}1$ s.

17. Para o sistema digital mostrado na Fig. P13.6, onde $G_1(s) = K/[(s+1) \times (s+3)]$, determine o valor de K para produzir uma ultrapassagem de 16,3%. Além disso, obtenha a faixa de valores de K para estabilidade. Faça $T = 0{,}1$ s.

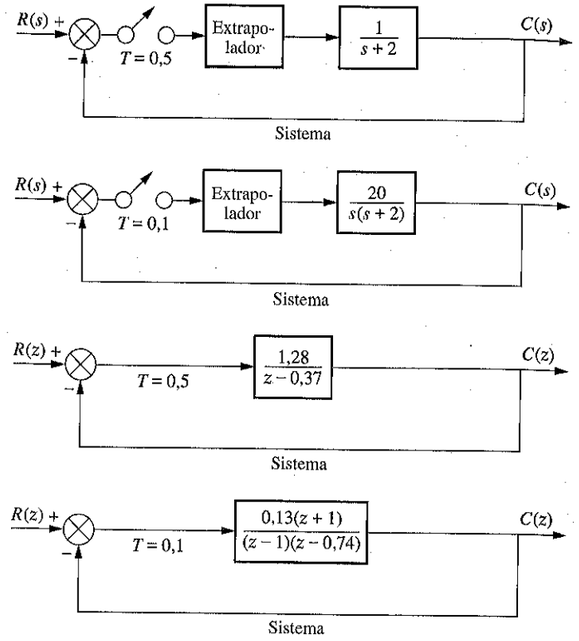


Fig. P13.8

Simulink

18. Use o Simulink para simular a resposta ao degrau do sistema do Problema 17. Ajuste o valor do ganho K ao projetado no Problema 17 para 16,3% de ultrapassagem.

Ferramenta GUI

19. Use o visualizador LTI Viewer do MATLAB para determinar o instante de pico e o tempo de assentamento da resposta ao degrau a malha fechada do Sistema 4 na Fig. P13.8.

MATLAB

20. Escreva um programa em MATLAB que possa ser usado para projetar o ganho de um sistema de controle digital para atender um requisito de ultrapassagem percentual. O programa será usado em sistemas do tipo representado na Fig. P13.6 e deve atender aos seguintes requisitos:

a. O usuário entrará com o valor desejado de ultrapassagem percentual.

b. O MATLAB converterá $G_1(s)$ em cascata com um amostrador-extrapolador de ordem zero em $G(z)$.

c. O MATLAB mostrará o lugar das raízes no plano z com a superposição da curva de ultrapassagem percentual.

d. O usuário clicará com o mouse na interseção do lugar das raízes com a curva de ultrapassagem percentual superposta e o MATLAB responderá com o valor do ganho seguido da exibição da resposta ao degrau do sistema a malha fechada.

Aplique seu programa ao Problema 17 e compare os resultados.

21. Para o sistema digital mostrado na Fig. P13.6, onde $G_1(s) = K/[s(s+1)]$, determinar o valor de K que leva ao instante de pico de 2 s se o período de amostragem, T, for de 0,1 s. Determine também a faixa de valores de K para estabilidade.

22. Para o sistema digital mostrado na Fig. P13.6, onde $G_1(s) = K/[s(s+1)(s+3)]$, determine o valor de K que leva a 20% de ultrapassagem se o período de amostragem, T, for de 0,1 s. Determine também a faixa de valores de K para estabilidade.

23. Para o sistema digital mostrado na Fig. P13.6, onde $G_1(s) = K(s+2)/[s(s+1)(s+3)]$, determine o valor de K que leva a um tempo de assentamento de 15 s se o período de amostragem, T, for de 0,1 s. Determine também a faixa de valores de K para estabilidade.

24. Um controlador PID foi projetado no Exemplo 9.5 para um sistema contínuo com retroação unitária. O processo a controlar no sistema era

$$G(s) = \frac{(s+8)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$$

O controlador PID projetado era

$$G_c(s) = 4{,}6\frac{(s+55{,}92)(s+0{,}5)}{s}$$

Determine a função de transferência digital, $G_c(z)$, do controlador PID para que o sistema seja controlado por computador se o período de amostragem, T, for de 0,01 s.

25. Um sistema contínuo com retroação unitária tem a função de transferência direta de

$$G(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+8)}$$

O sistema deve ser controlado por computador com as seguintes especificações:

Ultrapassagem percentual: 10%
Tempo de assentamento: 2 s
Período de amostragem: 0,01 s

Projete um compensador por avanço de fase que atenda as especificações do sistema digital.

MATLAB

26. Repita o Problema 25 usando o MATLAB.

Problemas de Projeto

27. **a.** Transforme o controle de rumo do veículo UFSS mostrado na contracapa traseira (Johnson, 1980) em um sistema controlado digitalmente.

b. Determine a função de transferência pulsada a malha fechada, $T(z)$, se $T = 0{,}1$ s.

c. Determine a faixa de valores do ganho de rumo para manter o sistema digital estável.

28. Um robô equipado para executar solda elétrica foi discutido no Problema 42, do Cap. 8. O robô foi compensado usando retroação dos sinais de pressão e de velocidade como mostrado na Fig. P8.13(*b*). Eliminando-se estes percursos de retroação chega-se ao diagrama de blocos da Fig. P13.9 (Hardy, 1967).

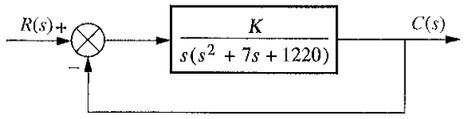


Fig. P13.9 Diagrama de blocos simplificado para o movimento do robô

a. Transforme o robô em um sistema de controle digital. Use um período de amostragem de 0,1 s.

b. Esboce o lugar das raízes.

c. Determine a faixa de valores de ganho, K, para manter o sistema digital estável.

MATLAB

d. Repita todas as partes anteriores usando o MATLAB.

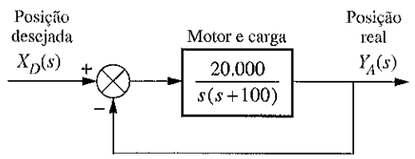


Fig. P13.10 Diagrama de blocos simplificado para o acionador de disco flexível

29. O acionador de disco flexível do Problema 46, no Cap. 8, deve ser controlado digitalmente. Se o sistema analógico for o mostrado na Fig. P13.10, faça o seguinte:

a. Transforme o acionador de disco em um sistema de controle digital. Use um período de amostragem de 0,01 s.

b. Determine a faixa de valores de ganho do controlador digital para manter o sistema estável.

c. Determine o valor de ganho do controlador digital para se obter 15% de ultrapassagem na resposta ao degrau do sistema digital.

MATLAB

d. Repita todas as partes anteriores e obtenha a resposta ao degrau para (*c*) usando o MATLAB.

30. Se ainda não tiver feito isto, faça o Problema 41 do Cap. 9. Nesse problema, você projeta um controlador PID para um sistema de controle de temperatura. Digitalize o projeto PID e desenhe o fluxograma a partir do qual o controlador PID possa ser implementado.

Problema Progressivo de Análise e Projeto

31. Pantógrafo para trem de alta velocidade. O Problema 17 no Cap. 1 trata do controle ativo de um mecanismo pantográfico para sistemas ferroviários de alta velocidade (O'Connor, 1997). No Problema 62(*a*), Cap. 5, você obteve a função de transferência a malha fechada para o sistema de controle pantográfico ativo. No Cap. 9 você projetou um controlador PID para produzir um tempo de assentamento de 0,3 s com erro de estado estacionário nulo. Supondo que o sis-

tema de controle ativo deva ser controlado por computador, faça o seguinte:

a. Transforme o controlador PID projetado no Problema Progressivo de Análise e de Projeto do Cap. 9 em um controlador digital, especificando sua função de transferência amostrada, $G_c(z)$. Admita que os potenciômetros foram substituídos por um teclado, conversores A/D e transdutores de ganho unitário.

b. Desenhe um fluxograma a partir do qual o controlador PID possa ser implementado.

MATLAB

c. Use o MATLAB para simular a resposta ao degrau do sistema digital de controle ativo.

Bibliografia

Astrom, K. J., and Wittenmark, B. *Computer Controlled Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

Boyd, M., and Yingst, J. C. PC-Based Operator Control Station Simplifies Process, Saves Time. *Chilton's I & CS,* September 1988, pp. 99–101.

Chassaing, R. *Digital Signal Processing.* Wiley, New York, 1999.

Hardy, H. L. Multi-Loop Servo Controls Programmed Robot. *Instruments and Control Systems,* June 1967, pp. 105–111.

Hostetter, G. H. *Digital Control System Design.* Holt, Rinehart & Winston, New York, 1988.

Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description.* NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, D.C., 1980.

Katz, P. *Digital Control Using Microprocessors.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

Kuo, B. C. *Automatic Control Systems.* 7th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

Kuo, B. C. *Digital Control Systems.* Holt, Rinehart & Winston, New York, 1980.

O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control,* vol. 119, March 1997, pp. 1–4.

Ogata, K. *Discrete-Time Control Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

Phillips, C. L., and Nagle, H. T., Jr. *Digital Control System Analysis and Design.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

Smith, C. L. *Digital Computer Process Control.* Intext Educational Publishers, NY, 1972.

Tou, J. *Digital and Sampled-Data Control Systems.* McGraw-Hill, New York, 1959.

APÊNDICE A

Lista de Símbolos

%UP	Ultrapassagem percentual
A	Ampère — unidade de corrente elétrica
A	Matriz de sistema da representação no espaço de estados
a_m	Constante de tempo do motor
B	Matriz de entrada da representação no espaço de estados
C	Capacitância elétrica em farads
C	Matriz de saída da representação no espaço de estados
$C(s)$	Transformada de Laplace da saída de um sistema
$c(t)$	Saída do sistema
$\mathbf{C}_M$	Matriz de controlabilidade
D	Coeficiente de atrito viscoso para sistema mecânico em rotação em N·m·s/rad
D	Matriz de transmissão direta da representação no espaço de estados
D_a	Coeficiente de amortecimento viscoso da armadura do motor em N·m·s/rad
D_m	Coeficiente de atrito total da armadura de um motor, incluindo o coeficiente de atrito viscoso da armadura e o coeficiente de atrito viscoso da carga refletido no eixo do motor em N·m·s/rad
E	Energia
$E(s)$	Transformada de Laplace do erro
$e(t)$	Erro; tensão elétrica
$E_a(s)$	Transformada de Laplace da tensão de entrada da armadura do motor; transformada de Laplace do sinal atuante
$e_a(t)$	Tensão de entrada da armadura do motor; sinal atuante
F	Farad — unidade de capacitância
$F(s)$	Transformada de Laplace de $f(t)$
$f(t)$	Força mecânica em newtons; função genérica do tempo
f_v	Coeficiente de atrito viscoso de sistema mecânico em translação
g	Aceleração da gravidade
G	Condutância elétrica em mhos
$G(s)$	Função de transferência do percurso direto
$G_c(s)$	Função de transferência do compensador
$G_c(z)$	Função de transferência amostrada de um compensador
G_M	Margem de ganho
$G_p(z)$	Função de transferência amostrada de um processo a controlar
H	Henry — unidade de indutância elétrica
$H(s)$	Função de transferência do percurso de retroação
I	Matriz identidade
$i(t)$	Corrente elétrica em ampères
J	Momento de inércia em kg·m²
J_a	Momento de inércia da armadura do motor em kg·m²
J_m	Momento de inércia total da armadura de um motor, incluindo o momento de inércia da armadura e o momento de inércia da carga refletido no eixo do motor em kg·m²
K	Matriz de ganho do controlador
K	Constante de mola de sistema mecânico em translação em N/m ou constante de mola de sistema mecânico em rotação em N·m/rad; ganho do amplificador; resíduo
k	Ganho de retroação do controlador; índice

K_a	Constante de aceleração
K_b	Constante de força contra-eletromotriz em V/rad/s
K_f	Ganho de retroação
kg	Quilograma = N·s²/m — unidade de massa
kg-m²	Quilograma metro quadrado — N·m·s²/rad — unidade de momento de inércia
K_m	Ganho do motor
K_p	Constante de posição
K_t	Constante de torque do motor relacionando o torque fornecido com a corrente de armadura em N·m/A
K_v	Constante de velocidade
L	Indutância elétrica em henries
$\mathbf{L}$	Matriz de ganho do observador
l	Ganho de retroação do observador
M	Massa em quilogramas; inclinação das assíntotas do lugar das raízes
m	Metro — unidade de deslocamento mecânico de translação
$M(\omega)$	Magnitude de uma resposta senoidal
m/s	Metros/segundo — unidade de velocidade mecânica de translação
M_p	Valor máximo de (valor de pico) magnitude da resposta senoidal
N	Newton — unidade de força mecânica de translação
N-s/m	Newton segundo/metro — unidade de coeficiente de atrito viscoso de translação mecânica
n	Tipo de sistema
N/m	Newton/m — unidade de constante de mola mecânica de translação
N-m	Newton-metro — unidade de torque mecânico
N-m-s/rad	Newton-metro-segundo/radiano — unidade de coeficiente de atrito viscoso de rotação mecânica
N-m/A	Newton-metro/ampère — unidade de constante de torque de motor
N-m/rad	Newton-metro/radiano — unidade de constante de mola de torção
$\mathbf{O}_M$	Matriz de observabilidade
$\mathbf{P}$	Matriz de transformação de similaridade
p_c	Pólo compensador
Q	Coulomb — unidade de carga elétrica
$q(t)$	Carga elétrica em coulombs
R	Resistência elétrica em ohms
$R(s)$	Transformada de Laplace da entrada de um sistema
r	Resistência elétrica não-linear
$r(t)$	Entrada de um sistema
R_a	Resistência de armadura do motor em ohms
rad	Radiano — unidade de deslocamento angular
rad/s	Radiano/segundo — unidade de velocidade angular
s	Segundo — unidade de tempo
s	Variável complexa da transformada de Laplace
$S_{F:P}$	Sensibilidade de F a uma mudança percentual em P
T	Constante de tempo; intervalo de amostragem para sinais digitais
$T(s)$	Função de transferência a malha fechada; transformada de Laplace de torque mecânico
$T(t)$	Torque mecânico em N·m
$T_m(t)$	Torque desenvolvido no eixo de um motor em N·m
$T_m(s)$	Transformada de Laplace do torque desenvolvido no eixo de um motor
T_p	Instante de pico em segundos
T_r	Tempo de subida em segundos
T_s	Tempo de assentamento em segundos
T_W	Largura de pulso em segundos
$\mathbf{u}$	Entrada ou vetor de controle da representação no espaço de estados
u	Sinal de controle de entrada da representação no espaço de estados
$u(t)$	Entrada em degrau unitário
V-s/rad	Volt-segundo/radiano — unidade de constante de força contra-eletromotriz de um motor
$v(t)$	Velocidade de translação mecânica em m/s; tensão elétrica
$v_b(t)$	Força contra-eletromotriz de um motor em volts
$v_e(t)$	Tensão de erro
$v_p(t)$	Entrada do amplificador de potência em volts
$\mathbf{x}$	Vetor de estados da representação no espaço de estados
$x(t)$	Deslocamento mecânico em translação em metros; variável de estado
$\dot{x}$	Derivada da variável de estado em relação ao tempo
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada do vetor de estado em relação ao tempo
$\mathbf{y}$	Vetor de saída da representação no espaço de estados

$y(t)$	Saída escalar da representação no espaço de estados
z	Variável complexa da transformada z
z_c	Zero compensador
α	Fator de escala do pólo do compensador por atraso de fase, onde $\alpha > 1$; ângulo de ataque
β	Fator de escala do pólo do compensador por avanço de fase, onde $\beta < 1$
γ	Fator de escala do pólo do compensador por atraso-avanço de fase, onde $\gamma > 1$
δ	Ângulo da força de empuxo
ζ	Relação de amortecimento
θ	Ângulo de um vetor com a extensão positiva do eixo real
$\theta(t)$	Deslocamento angular
θ_a	Ângulo de uma assíntota do lugar das raízes com a extensão positiva do eixo real
θ_c	Contribuição angular de um compensador no plano s
$\theta_m(t)$	Deslocamento angular da armadura de um motor
λ	Autovalor de uma matriz quadrada
σ	Parte real da variável, s, da transformada de Laplace
σ_a	Ponto de interseção das assíntotas do lugar das raízes sobre o eixo real
Φ_M	Margem de fase
$\Phi(t)$	Matriz de transição de estados
ϕ	Ângulo de fase de um sinal senoidal; orientação angular de um corpo
ϕ_c	Ângulo de fase senoidal de um compensador
θ_{max}	Valor máximo do ângulo de fase
Ω	Ohm — unidade de resistência elétrica
$\mho$	Mho — unidade de condutância elétrica
ω	Parte imaginária da variável, s, da transformada de Laplace
$\omega(t)$	Velocidade angular em rad/s
ω_{BW}	Banda passante em rad/s
ω_d	Freqüência de oscilação amortecida em rad/s
$\omega_{\Phi M}$	Freqüência de margem de fase em rad/s
ω_{GM}	Freqüência de margem de ganho em rad/s
ω_n	Freqüência natural em rad/s
ω_p	Freqüência de valor de pico da magnitude da resposta de freqüência em rad/s

APÊNDICE B

Tutorial do MATLAB

B.1 Introdução

O MATLAB é um ambiente computacional técnico de alto nível para resolver problemas científicos e de engenharia. Quando utilizado com rotinas do software parceiro, a *Toolbox* de Sistemas de Controle, o MATLAB pode ser empregado para analisar e projetar problemas de sistemas e controle como os tratados neste livro. O MATLAB e a *Toolbox* de Sistemas de Controle são produtos comerciais de software disponibilizados pela empresa The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick MA 01760-2098. Telefone: (508)647-7000. Endereço eletrônico: info@mathworks.com. Rede Mundial: http://www.mathworks.com.

Os exemplos em MATLAB, neste tutorial, consistem em problemas resolvidos que demonstram a aplicação do MATLAB na análise e no projeto de sistemas de controle. Muitos dos problemas foram retirados de exemplos existentes no texto (identificados com a vinheta MATLAB) que foram resolvidos sem o MATLAB. Um Sumário de Comandos no final deste Apêndice lista sentenças-chave do MATLAB e sua descrição.

O código neste tutorial está disponível também na pasta da *Toolbox* Engenharia de Controle no CD-ROM que acompanha o livro, nos endereços da Web http://www.mathworks.com/ support/books e http://www.wiley.com/college/elec/nise366013. Você precisa ter a Versão 5 do MATLAB e a Versão 4 da *Toolbox* de Sistemas de Controle instaladas na sua máquina para poder executar o código deste apêndice na Versão 3 da Control Systems Engineering Toolbox. Além disso, certifique-se de incluir cada uma das pastas da *Control Systems Engineering Toolbox* no caminho de busca do MATLAB utilizando o **Path Browser** encontrado no **Set Path** no menu **File** ou na barra de ferramentas da tela **MATLAB Command Window**. Para ver as respostas do computador depois de instalar os arquivos-M, execute cada um dos problemas digitando o nome do arquivo-M correspondente, como cap2p1, após o prompt (>>) na tela **MATLAB Command Window**. Para ver todo o arquivo-M ou parte dele, digite "type < nome do arquivo>" ou "help <nome do arquivo>", respectivamente, depois do prompt.

Se você não tiver os arquivos-M da pasta Control Systems Engineering Toolbox, é possível criar seus próprios arquivos-M digitando o código de cada problema deste apêndice em um arquivo-M separado (não há necessidade de digitar o último comando pause nem os comentários),[1] e dando um nome para cada arquivo-M com uma extensão .m, como em cap2p1.m. Você também pode digitar os códigos de mais de um problema em um único arquivo-M, incluindo o comando pause e o nome do arquivo-M com a extensão .m. Você pode então chamar o arquivo a partir da tela **MATLAB Command Window** e continuar depois dos comandos pause para o próximo problema pressionando qualquer tecla.

Por sua natureza, este apêndice não pode abranger todos os conhecimentos básicos e os detalhes necessários a uma compreensão completa do MATLAB. Para maiores detalhes, você deve consultar outras fontes, inclusive os manuais de referência do MATLAB e instruções específicas do seu computador particular. A bibliografia no fim deste apêndice fornece uma lista parcial de referências. Este apêndice deve fornecer informação suficiente para que você seja capaz de empregar o MATLAB nos problemas de análise e de projeto apresentados neste livro.

O código contido neste apêndice e na pasta Control Systems Engineering Toolbox foi desenvolvido em um PC usando a Versão 5.3 do MATLAB e a Versão 4.2 da Control Systems Toolbox. O código também poderá ser executado em estações de trabalho que aceitem o MATLAB. Consulte o *Guia de Instalação* do MATLAB de sua plataforma para conhecer os requisitos mínimos do hardware do sistema.

[1]Os comentários são precedidos do símbolo %. (N.T.)

B.2 Exemplos com o MATLAB

Capítulo 2: Modelagem no Domínio de Freqüência

cap2p1 Serão usadas cadeias de caracteres para identificar partes deste tutorial na saída do computador. As cadeias de caracteres são representadas por texto entre apóstrofos, como `'ab'`. Os comentários começam com % e são ignorados pelo MATLAB. Os números são digitados sem quaisquer outros caracteres. As operações aritméticas são executadas utilizando os operadores adequados. Os números podem ser atribuídos a variáveis usando um argumento à esquerda e um sinal de igualdade.

```
'(cap2p1)'                          % Exibe título.
'Como vai você?'                    % Exibe uma cadeia de caracteres.
-3.96                               % Exibe o número real -3,96.
-4+7i                               % Exibe o número complexo -4+7i.
-5-6j                               % Exibe o número complexo -5-6i.
(-4+7i)+(-5-6i)                     % Adiciona os números complexos e
                                    % Exibe a soma.
(-4+7j)*(-5-6j)                     % Multiplica os dois números
                                    % complexos e exibe o produto.
M=5                                 % Atribui o valor 5 a M e exibe o resultado.
N=6                                 % Atribui o valor 6 a N e exibe o resultado.
P=M+N                               % Atribui o valor M+N a P e exibe o resultado.
pause
```

cap2p2 Os polinômios em s podem ser representados por vetores linha contendo os coeficientes. Deste modo, $P_1 = s^3 + 7s^2 - 3s + 23$ pode ser representado pelo vetor mostrado a seguir, com os elementos separados por um espaço ou uma vírgula. Cadeias de caracteres podem ser usadas para identificar cada uma das seções deste tutorial.

```
'(cap2p2)'                          % Exibe o título.
P1=[1 7 -3 23]                      % Armazena o polinômio s^3 + 7s^2 -3s + 23
                                    % como P1 e exibe o resultado.
pause
```

cap2p3 A execução das instruções anteriores faz com que o MATLAB exiba os resultados na tela. A digitação de um comando com um ponto-e-vírgula suprime a exibição na tela. Digitar uma expressão sem atribuição à esquerda e sem o ponto-e-vírgula faz com que a expressão seja calculada e o resultado, exibido na tela. Digite `P2` na tela **MATLAB Command Window** após a execução.

```
'(cap2p3)'                          % Exibe o título.
P2=[3 5 7 8];                       % Atribui 3s^3 + 5s^2 +7s + 8 a P2
                                    % sem mostrar na tela.
3*5                                 % Calcula 3*5 e mostra o resultado.
pause
```

cap2p4 Uma $F(s)$ fatorada pode ser representada sob a forma de polinômio. Assim, $P_3 = (s + 2)(s + 5)(s + 6)$ pode ser transformado em polinômio através do comando `poly(V)`, onde `V` é um vetor linha contendo as raízes do polinômio e `poly(V)` forma os coeficientes do polinômio.

```
'(cap2p4)'                          % Mostra o título.
P3=poly([-2 -5 -6])                 % Armazena o polinômio
                                    % (s+2)(s+5)(s+6) como P3 e
                                    % exibe os coeficientes.
pause
```

cap2p5 Podemos determinar as raízes de polinômios usando o comando `roots(V)`. As raízes vêm na forma de um vetor coluna. Por exemplo, obtenha as raízes de $5s^4 + 7s^3 + 9s - 3s + 2 = 0$.

```
'(cap2p5)'                          % Exibe o título.
P4=[5 7 9 -3 2]                     % Forma 5s^4+7s^3+9s^2-3s+2 e
                                    % exibe o resultado.
raizes_P4=raizes(P4)                % Acha as raízes de 5s^4+7s^3+9s^2-3s+2,
                                    % atribui os valores às raizes_P4, e exibe
                                    % o resultado.
pause
```

cap2p6 Os polinômios podem ser multiplicados entre si usando o comando `conv(a,b)` (significando executar a convolução). Assim, $P_5 = (s^3 + 7s^2 + 10s + 9)(s^4 - 3s^3 + 6s^2 + 2s + 1)$ é gerado como a seguir:

```
'(cap2p6)'                                  % Exibe o título.
P5=conv([1 7 10 9],[1 -3 6 2 1])            % Forma o produto (s^3+7s^2+10s+9)(s^4-
                                            % 3s^3+6s^2+2s+1), atribui a P5, e
                                            % mostra o resultado.
pause
```

cap2p7 A expansão em frações parciais de $F(s) = b(s)/a(s)$ pode ser obtida usando o comando `[K,p,k] = residue(b,a)` (`K` = resíduos; `p` = raízes do denominador; `k` = quociente direto, que é obtido dividindo-se os polinômios antes de efetuar a expansão em frações parciais). Expandimos $F(s) = (7s^2 + 9s + 12)/[s[(s + 7)(s^2 + 10s + 100)]$, como exemplo. Usando os resultados do MATLAB, resulta: $F(s) = [(0{,}2554 - 0{,}3382i)/(s + 5.0000 - 8{,}6603i)] + [(0{,}2554 + 0{,}3382i)/(s + 5.0000 + 8{,}6603i)] - [0{,}5280/(s + 7)] + [0{,}0171/s]$.

```
'(cap2p7)'                                  % Exibe o título.
numf=[7 9 12];                              % Define o numerador de F(s).
denf=conv(poly([0 -7]),[1 10 100]);         % Define o denominador de F(s).
[K,p,k]=residue(numf,denf)                  % Acha os resíduos e os atribui a K;
                                            % acha as raízes do denominador e as
                                            % atribui a p; acha a
                                            % constante e a atribui a k.
pause
```

cap2p8 (Exemplo 2.3) Façamos o Exemplo 2.3 do livro usando o MATLAB.

```
'(cap2p8) Exemplo 2.3'                      % Exibe o título.
numy=32;                                    % Define o numerador.
deny=poly([0 -4 -8]);                       % Define o denominador.
[r,p,k] = residue(numy,deny)                % Calcula os resíduos, os pólos e
                                            % o quociente.
pause
```

cap2p9 Criando Funções de Transferência

Método Vetorial, Forma Polinomial: Uma função de transferência pode ser expressa como um polinômio em numerador dividido por um polinômio em denominador, *isto é*, $F(s) = N(s)/D(s)$. O numerador, $N(s)$, é representado por um vetor linha, `numf`, que contém os coeficientes de $N(s)$. De modo semelhante, o denominador, $D(s)$, é representado por um vetor linha, `denf`, que contém os coeficientes de $D(s)$. Formamos $F(s)$ com o comando `F = tf(numf,denf)`. `F` é chamado um objeto linear e invariante no tempo (LIT). Este objeto, ou função de transferência, pode ser usado como uma entidade em outras operações, como adição ou multiplicação. Mostramos isto com $F(s) = 150(s^2 + 2s + 7)/[s(s^2 + 5s + 4)]$. Observe que ao executar o comando `tf`, o MATLAB imprime, na tela, a função de transferência.

Método Vetorial, Forma Fatorada: Também podemos criar funções de transferência LIT se o numerador e o denominador estiverem representados na forma fatorada. Fazemos isto usando os vetores linha que contêm as raízes do numerador e do denominador. Assim, $G(s) = K^*N(s)/D(s)$ pode ser expresso como um objeto LIT, usando o comando `G = zpk(numg,deng,K)`, onde `numg` é um vetor linha contendo as raízes de $N(s)$ e `deng` é um vetor linha contendo as raízes de $D(s)$. A expressão `zpk` significa zeros (raízes do numerador), pólos (raízes do denominador) e ganho, K. Mostramos isto com $G(s) = 20(s + 2)(s + 4)/[(s + 7)(s + 8)(s + 9)]$. Observe que ao executar o comando `zpk`, o MATLAB imprime, na tela, a função de transferência.

Método da Expressão Racional em *s*, Forma Polinomial (Requer a Control Systems Toolbox 4.2): Este método permite que você digite a função de transferência como a escreveria normalmente. A instrução `s = tf('s')` deve preceder a função de transferência se você quiser criar uma função de transferência LIT na forma polinomial equivalente usando `G = tf(numg,deng)`.

Método da Expressão Racional em *s*, Forma Fatorada (Requer a Control Systems Toolbox 4.2): Este método permite que você digite a função de transferência como a escreveria normalmente. A instrução `s = zpk('s')` deve preceder a função de transferência se você quiser criar uma função de transferência LIT na forma fatorada equivalente usando `G = zpk(numg,deng,K)`.

Em ambos os métodos da expressão racional a função de transferência pode ser digitada sob qualquer forma, independentemente de se usar `s = tf('s')` ou `s = zpk('s')`. A diferença está na função de transferência LIT criada. Usamos os mesmos exemplos anteriores para demonstrar os métodos da expressão racional em *s*.

```
'(cap2p9)'                                  % Exibe título.
'Método Vetorial, Forma Polinomial,'        % Exibe título.
numf=150*[1 2 7]                            % Armazena 150(s^2+2s+7) em numf e
                                            % mostra o resultado.
denf=[1 5 4 0]                              % Armazena s(s+1)(s+4) em denf e
                                            % mostra o resultado na tela.
'F(s)'                                      % Exibe título.
F=tf(numf,denf)                             % Forma F(s) e mostra o resultado.
```



```
clear                                       % Apaga valores anteriores armazenados
                                            % na área de trabalho.
'Método Vetorial, Forma Fatorada'           % Exibe título.
numg=[-2 -4]                                % Armazena (s+2)(s+4) em numga e
                                            % mostra o resultado.
deng=[-7 -8 -9]                             % Armazena (s+7)(s+8)(s+9) em deng e
                                            % mostra o resultado.
K=20                                        % Define K.
'G(s)'                                      % Exibe título.
G=zpk(numg,deng,K)                          % Forma G(s) e mostra o resultado.
clear                                       % Apaga valores anteriores armazenados
                                            % na área de trabalho.
'Método da Expressão Racional, Forma Polinomial'
                                            % Exibe título.
s=tf('s')                                   % Define 's' como um objeto LTI em
                                            % forma polinomial.
F=150*(s^2+2*s+7)/[s*(s^2+5*s+4)]           % Forma F(s) como uma função de transferência
                                            % LTI em forma polinomial.
G=20*(s+2)*(s+4)/[(s+7)*(s+8)*(s+9)]        % Forma G(s) como uma função de transferência
                                            % LTI em forma polinomial.
clear                                       % Apaga valores anteriores armazenados
                                            % na área de trabalho.
'Método da Expressão Racional, Forma Fatorada'
                                            % Exibe título.
s=zpk('s')                                  % Define 's' como um objeto LTI em
                                            % forma fatorada.
F=150*(s^2+2*s+7)/[s*(s^2+5*s+4)]           % Forma F(s) como uma função de transferência
                                            % LTI em forma fatorada.
G=20*(s+2)*(s+4)/[(s+7)*(s+8)*(s+9)]        % Forma G(s) como uma função de transferência
                                            % LTI em forma fatorada.
pause
```

cap2p10 Os vetores do numerador e do denominador da função de transferência podem ser convertidos para a forma polinomial contendo os coeficientes e para a forma fatorada contendo as raízes. A função MATLAB, `tf2zp(numtf,dentf)`, converte os coeficientes do numerador e do denominador em raízes. Os resultados estão na forma de vetores coluna. Mostramos isto com $F(s) = (10s^2 + 40s + 60)/(s^3 + 4s^2 + 5s + 7)$. A função MATLAB, `zp2tf(numzp,denzp,K)`, transforma as raízes do numerador e do denominador em coeficientes. Os argumentos `numzp` e `denzp` devem ser vetores coluna. Na demonstração a seguir, o sinal de apóstrofo significa o vetor transposto. Vamos mostrar a conversão de raízes em coeficientes com $G(s) = 10(s + 2)(s + 4)/[s(s + 3)(s + 5)]$.

```
'(cap2p10)'                                 % Exibe título.
'Coeficientes de F(s)'                      % Exibe título.
numftf=[10 40 60]                           % Forma o numerador de F(s) =
                                            % (10s^2+40s+60)/(s^3+4s^2+5s+7).
denftf=[1 4 5 7]                            % Forma o denominador de F(s) =
                                            % (10s^2+40s+60)/(s^3+4s^2+5s+7).
'Raízes de F(s)'                            % Exibe título.
[numfzp,denfzp]=tf2zp(numftf,denftf)        % Converte F(s) à forma fatorada.
'Raízes de G(s)'                            % Exibe título.
numgzp=[-2 -4]                              % Forma o numerador de
K=10                                        % G(s) = 10(s+2)(s+4)/[s(s+3)(s+5)].
dengzp=[0 -3 -5]                            % Forma o denominador de
                                            % G(s) = 10(s+2)(s+4)/[s(s+3)(s+5)].
'Coeficientes de G(s)'                      % Exibe título.
[numgtf,dengtf]=zp2tf(numgzp',dengzp',K)    % Converte G(s) para a forma polinomial.
pause
```

cap2p11 Modelos LIT também podem ser convertidos entre as formas polinomial e fatorada. Os comandos MATLAB `tf` e `zpk` também são usados para conversão entre modelos LIT. Se a função de transferência, $Fzpk(s)$, for expressa como fatores em numerador e denominador, então `tf(Fzpk)` converte $Fzpk(s)$ em uma função de transferência expressa através dos coeficientes do numerador e do denominador. De modo semelhante, se uma função de transferência, $Ftf(s)$, for expressa através dos coeficientes do numerador e do denominador, então `zpk(Ftf)` converte $Ftf(s)$ em uma função de transferência expressa através dos fatores de numerador e de denominador. O seguinte exemplo mostra os conceitos.

```
'(cap2p11)'                                 % Exibe título.
'Fzpk1(s)'                                  % Exibe título.
Fzpk1=zpk([-2 -4],[0 -3 -5],10)             % Forma Fzpk1(s)=
                                            % 10(s+2)(s+4)/[s(s+3)(s+5)].
'Ftf1'                                      % Exibe título.
Ftf1=tf(Fzpk1)                              % Converte Fzpk1(s) à
                                            % forma de coeficientes .
'Ftf2'                                      % Exibe título.
```

```
Ftf2=tf([10 40 60],[1 4 5 7])          % Forma Ftf2(s)=
                                       % (10s^2+40s+60)/(s^3+4s^2+5s+7).
'Fzpk2'                                % Exibe título.
Fzpk2=zpk(Ftf2)                        % Converte Ftf2(s) à
                                       % forma fatorada.
pause
```

Capítulo 3: Modelagem no Domínio do Tempo

cap3p1 A matriz quadrada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

é escrita com um espaço ou uma vírgula separando os elementos da cada linha. A próxima linha é indicada por um ponto-e-vírgula ou por um retorno de carro.[2] A matriz inteira é delimitada por um par de colchetes.

```
'(cap3p1)'
A=[0 1 0;0 0 1;-9 -8 -7]               % Exibe título.
'ou'                                   % Representa a matriz A.
A=[0 1 0
0 0 1
-9 -8 -7]
pause                                  % Representa a matriz A.
```

cap3p2 Um vetor linha, como a matriz de saída **C**, pode ser representado com elementos separados por espaços ou vírgulas e entre um par de colchetes. Um vetor coluna, como a matriz de entrada **B**, pode ser escrito com os elementos separados por ponto-e-vírgulas ou retornos de carro, ou como transposta (') de um vetor linha.

```
'(cap3p2)'
C=[2 3 4]                              % Exibe título.
B=[7;8;9]                              % Representa o vetor linha C.
'ou'                                   % Representa o vetor coluna B.
B=[7
8
9]
'ou'                                   % Representa o vetor coluna B.
B=[7 8 9]'
pause                                  % Representa o vetor coluna B.
```

cap3p3 A *representação no espaço de estados* consiste em se especificar as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** seguidas da criação de um objeto LIT no espaço de estados usando o comando `ss(A,B,C,D)`. Por conseguinte, para as matrizes em (cap3p1) e (cap3p2), a representação no espaço de estados seria:

```
'(cap3p3)'
A=[0 1 0;0 0 1;-9 -8 -7];              % Exibe o título.
B=[7;8;9];                             % Representa uma matriz A.
C=[2 3 4];                             % Representa um vetor coluna B.
D=0;                                   % Representa um vetor linha C.
F=ss(A,B,C,D)                          % Representa uma matriz D.
pause                                  % Cria um objeto LTI e mostra o resultado.
```

cap3p4 (Exemplo 3.4) As funções de transferência representadas seja pelo numerador e denominador, seja por um objeto LIT podem ser convertidas para o espaço de estados. Para a representação em numerador e denominador, a conversão pode ser implementada usando `[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)`. A matriz **A** retorna em uma forma chamada canônica controlável, que será explicada no texto do Cap. 5. Para obter a forma em variáveis de fase, `[Af, Bf, Cf, Df]`, executamos as seguintes operações: `Af = inv(P)*A*P; Bf = inv(P)*B; Cf = C*P, Df = D`, onde **P** é uma matriz quadrada com valores unitários ao longo da subdiagonal inferior e zeros no resto. Estas transformações serão explicadas no texto do Cap. 5. O comando `inv(X)` obtém a inversa de uma matriz quadrada. O símbolo * significa multiplicação. Para sistemas representados *como objetos LIT*, o comando `ss(F)`, onde *F* é um objeto função de transferência LIT, pode ser usado para converter F em um objeto do espaço de estados. Vejamos o Exemplo 3.4 no texto. Para a representação numerador-denominador, observe que a resposta MATLAB associa o ganho, 24, ao vetor **C** em vez de fazê-lo com o vetor **B**, como no exemplo do texto. Ambas as representações são equivalentes. Para o objeto função de transferência LIT, a conversão para o espaço de estados não conduz à forma em variáveis de fase. O resultado é um modelo equilibrado que melhora a precisão no cálculo dos autovalores, os quais são tratados no Cap. 4. Como `ss(F)` não conduz a formas familiares das equações de estado (nem é possível converter facilmente em formas familiares) teremos, no momento, uso limitado dessa transformação.

[2]Obtido pressionando a tecla Enter.


```
'(cap3p4) Exemplo 3.4'                 % Exibe título.
'Conversão da representação numerador-denominador'
                                       % Exibe título.
'Forma canônica do controlador'        % Exibe título.
num=24;                                % Define o numerador de G(s)=C(s)/R(s).
den=[1 9 26 24];                       % Define o denominador de G(s).
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)               % Converte G(s) para a forma canônica
                                       % do controlador,
                                       % armazena as matrizes A, B, C, D, e
                                       % mostra o resultado.
'Representação com variáveis de fase'  % Exibe título.
P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0];                 % Forma a matriz de transformação.
Af=inv(P)*A*P                          % Forma a matriz A (variáveis de fase).
Bf=inv(P)*B                            % Forma o vetor B (variáveis de fase).

Cf=C*P                                 % Forma o vetor C,(variáveis de fase).
Df=D                                   % Forma D,(variáveis de fase).
'Representação em objeto LTI'          % Exibe título.
T=tf(num,den)                          % Representa T(s)=24/(s^3+9s^2+26s+24)
                                       % como um objeto função de transferência LTI.
                                       % Converte T(s) em representação no espaço de
Tss=ss(T)                              % estados.
pause
```

cap3p5 As representações no espaço de estados podem ser convertidas em funções de transferência representadas por um numerador e um denominador usando `[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)`, onde `iu` é o número da entrada em *sistemas de entradas múltiplas. Para sistemas com uma única entrada e uma única saída, iu = 1.* Para um sistema LIT no espaço de estados, `Tss`, a conversão pode ser implementada usando `Ttf = tf(Tss)` para se obter a função de transferência na forma polinomial ou usando `Tzpk = zpk(Tss)` para obter a função de transferência na forma fatorada. Por exemplo, a função de transferência representada pelas matrizes descritas em (cap3p3) pode ser obtida como:

```
'(cap3p5)'                             % Exibe título.
      'Não LTI'                        % Exibe título.
A=[0 1 0;0 0 1;-9 -8 -7];              % Representa A.
B=[7;8;9];                             % Representa B.
C=[2 3 4];                             % Representa C.
D=0;                                   % Representa D.
'Ttf(s)'                               % Exibe título.
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1)             % Converte uma representação
                                       % no espaço de estados
                                       % em função de transferência representada por
                                       % um numerador e um denominador,G(s)=num/den,
                                       % em forma polinomial,
                                       % e mostra num e den.
      'LTI'                            % Exibe título.
Tss=ss(A,B,C,D)                        % Constrói o modelo LTI no espaço de estados.
'Forma polinomial, Ttf(s)'             % Exibe título.
Ttf=tf(Tss)                            % Transforma a representação no espaço de
                                       % estados em função de transferência
                                       % na forma polinomial.
'Forma fatorada, Tzpk(s)'              % Exibe título.
Tzpk=zpk(Tss)                          % Transforma a representação no espaço de
                                       % estados em função de transferência
                                       % na forma fatorada.
pause
```

Capítulo 4: Resposta no Domínio do Tempo

cap4p1 (Exemplo 4.6) Podemos usar o MATLAB para calcular as *características de um sistema de segunda ordem*, como a relação de amortecimento, ζ, a freqüência natural, ω_n; a ultrapassagem percentual, *%PU* (pos); o tempo de assentamento, T_s; e o tempo de pico, T_p. Vejamos o Exemplo 4.6 no texto.

```
'(cap4p1) Exemplo 4.6'                 % Exibe título.
p1=[1 3+7*i];                          % Define o polinômio contendo o
                                       % primeiro pólo.
p2=[1 3-7*i];                          % Define o polinômio contendo o
                                       % segundo pólo.
deng=conv(p1,p2);                      % Multiplica os dois polinômios para
                                       % obter o polinômio de segunda ordem,
                                       % as^2+bs+c.
```

```
omegan=sqrt(deng(3)/deng(1))          % Calcula a freqüência natural,
                                      % wn = sqrt(c/a).
zeta=(deng(2)/deng(1))/(2*omegan)     % Calcula a relação de amortecimento,
                                      % z = ((b/a)/2*wn).
Ts=4/(zeta*omegan)                    % Calcula o tempo de assentamento,
                                      % Ts = (4/z*wn).
Tp=pi/(omegan*sqrt(1-zeta^2))         % Calcula o tempo de pico,
                                      % Tp = pi/wn*sqrt(1-z^2).
up=100*exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))   % Calcula a ultrapassagem percentual
                                      % up =(100*e^(z*pi/sqrt(1-z^2)).
pause
```

cap4p2 (Exemplo 4.8) Podemos usar o MATLAB para obter respostas de sistemas para entrada em degrau. Estas respostas são particularmente valiosas quando o sistema não é constituído somente de dois pólos mas possui pólos ou zeros adicionais. Podemos obter e traçar o gráfico da resposta ao degrau de uma função de transferência, $T(s)$ = num/den, usando o comando `step(T)`, onde `T` é um objeto função de transferência LIT. Podem ser obtidos gráficos múltiplos, usando `step(T1,T2,...)`.

Informações sobre os gráficos obtidos com `step(T)` podem ser determinadas clicando sobre a curva com o botão esquerdo do mouse. Você pode determinar o título da curva, bem como as coordenadas do ponto sobre o qual você clicou. Se você clicar com o botão direito, o traçado da curva será realçado e a curva será identificada. Dando um clique com o botão direito do mouse, fora da curva, aparece um menu. Neste menu você pode escolher (1) respostas do sistema a serem exibidas, (2) características da resposta a serem mostradas, (3) opções para aplicar zoom e (4) escolha para inserir ou retirar grade reticulada. Se você escolher uma característica da resposta, é mostrado um ponto apropriado do gráfico. Clicando no ponto obtêm-se as medidas da característica assinalada.

Se acrescentarmos o lado esquerdo, `[y,t] = step(T)`, criaremos vetores contendo os pontos do gráfico, onde `y` é o vetor com os valores da saída e `t` é o vetor com os instantes de tempo. Neste caso, não será produzido gráfico até que seja dado o comando `plot(t,y)`, onde se supõe ser desejado o gráfico da saída (y) em função do tempo (`t`). Podemos inserir o título do gráfico, rotular os eixos x e y com `title('ab')`, `xlabel('ab')` e `ylabel('ab')`, respectivamente. O comando `clf` limpa o gráfico anterior. Finalmente, o texto pode ser posicionado em qualquer lugar do gráfico usando o comando `text(X,Y,'texto')` onde `(X,Y)` são as coordenadas do gráfico onde o `'texto'` deverá ser mostrado. Vejamos o Exemplo 4.8 no texto.

```
'(cap4p2) Exemplo 4.8'                 % Exibe título.
'Execução de teste'                    % Exibe título.
clf                                    % Apaga o gráfico existente.
numt1=[24.542];                        % Define o numerador de T1.
dent1=[1 4 24.542];                    % Define o denominador de T1.
'T1(s)'                                % Exibe título.
T1=tf(numt1,dent1)                     % Cria e mostra T1(s).
step(T1)                               % Executa uma demonstração de
                                       % gráfico de resposta a um degrau.
title('Execução de Teste de T1(s)')    % Adiciona legenda do gráfico.
pause
'Execução completa'                    % Exibe título.
[y1,t1]=step(T1);                      % Executa a resposta de T1 a um degrau e
                                       % coleta
                                       % pontos.
numt2=[245.42];                        % Define o numerador de T2.
p1=[1 10];                             % Define (s+10) no denominador de T2.
p2=[1 4 24.542];                       % Define (s^2+4s+24.542) no
                                       % denominador de T2.
dent2=conv(p1,p2);                     % Multiplica (s+10)(s^2+4s+24.542) pelo
                                       % denominador de T2.
'T2(s)'                                % Exibe título.
T2=tf(numt2,dent2)                     % Cria e mostra T2.
[y2,t2]=step(T2);                      % Executa a resposta de T2 a um degrau e coleta
                                       % pontos.
numt3=[73.626];                        % Define o numerador de T3.
p3=[1 3];                              % Define (s+3) no denominador de T3.
dent3=conv(p3,p2);                     % Multiplica (s+3)(s^2+4s+24.542) pelo
                                       % denominador de T3.
'T3(s)'                                % Exibe título.
T3=tf(numt3,dent3)                     % Cria e mostra T3.
[y3,t3]=step(T3);                      % Executa a resposta de T3 a um degrau e coleta
                                       % pontos.
clf                                    % Apaga o gráfico existente.
plot(t1,y1,t2,y2,t3,y3)                % Plota os pontos coletados com os três
                                       % gráficos em uma única figura.
title('Resposta ao degrau de T1(s),T2(s) e T3(s)')
                                       % Adiciona legenda do gráfico.
xlabel('Tempo(s)')                     % Nomeia o eixo dos x como eixo dos tempos.
ylabel('Resposta Normalizada')         % Nomeia o eixo dos y como eixo da resposta.
```



```
text(0.7,0.7,'c3(t)')                  % Identifica a curva da resposta ao degrau
                                       % de T1.
text(0.7,1.1,'c2(t)')                  % Identifica a curva da resposta ao degrau
                                       % de T2.
text(0.5,1.3,'c1(t)')                  % Identifica a curva da resposta ao degrau
                                       % de T3.
pause
step(T1,T2,T3)                         % Usa método alternativo para plotar
                                       % as respostas ao degrau.
title('Step Responses of T1(s),T2(s),and T3(s)')
                                       % Adiciona legenda do gráfico.
pause
```

cap4p3 Também podemos obter a resposta ao degrau de sistemas representados no espaço de estados usando o comando `step(T,t)`. Aqui, `T` é qualquer objeto LIT e `t = a:b:c` é a faixa de valores para o eixo dos tempos, em que `a` é o instante inicial, `b` é o tamanho do incremento no valor de `t` e `c` é o instante final. Por exemplo, `t = 0:1:10` significa instantes de tempo de 0 a 10 segundos com incremento de 1 segundo. O campo `t` é opcional. Finalmente, neste exemplo apresentamos o comando `grid on`, que superpõe uma grade reticulada ao gráfico da resposta ao degrau. Coloque o comando `grid on` antes do comando `step(T,t)`.

```
'(cap4p3)'                             % Exibe título.
clf                                    % Apaga gráfico existente.
A=[0 1 0;0 0 1;-24 -26 -9];            % Gera a matriz A.
B=[0;0;1];                             % Gera o vetor B.
C=[2 7 1];                             % Gera o vetor C.
D=0;                                   % Gera D.
T=ss(A,B,C,D)                          % Gera objeto LIT, T, no espaço
                                       % de estados e mostra o resultado.
t=0:0.1:10;                            % Define a faixa de valores de tempo para
                                       % o gráfico.
grid on                                % Ativa a colocação de grade no desenho.
step(T,t)                              % Plota a resposta ao degrau para uma dada
                                       % faixa de valores de tempo.
pause
```

cap4p4 (Estudo de Caso: Controle de Antena) Usamos agora o MATLAB para plotar a resposta ao degrau solicitada no Estudo de Caso do Controle da Antena.

```
'(cap4p4) Estudo de Caso — Controle de Antena'
                                       % Exibe título.
clf                                    % Apaga gráfico existente.
numg=20.83;                            % Define numerador de G(s).
deng=[1 101.71 171];                   % Define denominador de G(s).
'G(s)'                                 % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                        % Forma e mostra a função de transferência
                                       % G(s).
step(G);                               % Gera a resposta ao degrau.
title('Resposta da Velocidade Angular')
                                       % Adiciona legenda.
pause
```

cap4p5 (Estudo de Caso: UFSS) Como exemplo final, usemos o MATLAB para tratar do Estudo de Caso referente ao veículo submersível autônomo UFSS do texto (Johnson, 1980). Introduzimos uma tabela de valores para determinar o tempo de subida. Usando o comando `table1(tab,x)`, montamos uma tabela de valores de amplitude e de tempo a partir da resposta ao degrau e procuramos os valores de tempo para os quais a amplitude é 0,1 e 0,9. Geramos também os dados da resposta em função do tempo sobre uma faixa definida de instantes de tempo usando `t = a:b:c` seguido por `[y,t] = step(G,t)`. Aqui, `G` é um objeto função de transferência LIT, `t` é a faixa de valores para o eixo dos tempos, onde `a` é o instante inicial, `b` é o valor do incremento de tempo e `c` é o instante final; `y` é a saída.

```
'(cap4p5) Estudo de Caso — UFSS'       % Exibe título.
clf                                    % Apaga gráfico.
'(a)'                                  % Exibe título.
numg=0.0169;                           % Define o numerador da aproximação
                                       % de 2ª ordem de G(s).
deng=[1 0.226 0.0169];                 % Define o termo de 2ª ordem do
                                       % denominador of G(s).
'G(s)'                                 % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                        % Cria e mostra G(s).
omegan=sqrt(deng(3))                   % Obtém a freqüência natural, wn.
zeta=deng(2)/(2*omegan)                % Obtém a relação de amortecimento, z.
Ts=4/(zeta*omegan)                     % Obtém o tempo de assentamento, Ts.
Tp=pi/(omegan*sqrt(1-zeta^2))          % Obtém o instante de pico, Tp.
up=exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))*100    % Obtém a ultrapassagem percentual.
```

```
t=0:0.1:35;                                  % Limita o tempo para determinar o tempo de
                                             % subida. t=0
                                             % a 35 em intervalos de 0,1.
[y,t]=step(G,t);                             % Gera e armazena pontos da resposta ao degrau
                                             % para uma faixa definida de valores de t.
T=[y,t];                                     % Forma uma tabela de valores a partir da
                                             % resposta ao degrau.
Tbaixo=table1(T,.1);                         % Tabela de busca do instante de tempo para o
                                             % qual y=0,1*valor_final.
Talto=table1(T,.9);                          % Tabela de busca do instante de tempo para o
                                             % qual y=0,9*valor_final.
Tr=Talto-Tbaixo                              % Calcula o tempo de subida, Tr.
'(b)'                                        % Exibe título.
numc=0.125*[1 0.435];                        % Define o numerador de C(s).
denc=conv(poly([0 -1.23]),[1 0.226 0.0169]);
                                             % Define o denominador de C(s).
[K,p,k]=residue(numc,denc)                   % Obtém a expansão em frações parciais.
'(d)'                                        % Exibe título.
numg=0.125*[1 0.435];                        % Define o numerador de G(s).
deng=conv([1 1.23],[1 0.226 0.0169]);        % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
[y,t]=step(G);                               % Gera a resposta completa ao degrau
                                             % e coleta pontos, pares(t,y).
plot(t,y)                                    % Plota os pares (t,y).
title('Resposta do Ângulo de Arfagem')       % Adiciona legenda.
xlabel('Tempo(s)')                           % Rotula o eixo dos tempos.
ylabel('Ângulo de Arfagem (rad)')            % Rotula o eixo dos y.
pause
```

Capítulo 5: Redução de Subsistemas Múltiplos

cap5p1 (Sistema de Controle em Arfagem do Veículo UFSS) O MATLAB pode ser usado para a redução de diagramas de blocos. Há três métodos à disposição: (1) Solução através dos Comandos Series, Parallel e Feedback, (2) Solução via Operações Algébricas e (3) Solução através dos Comandos Append e Connect. Vejamos cada um destes métodos.

1. Solução via Comandos Series, Parallel e Feedback:
A função de transferência a malha fechada é obtida usando os seguintes comandos sucessivamente, onde os argumentos são objetos LIT: `series(G1,G2)` para uma conexão em cascata de $G_1(s)$ e $G_2(s)$; `parallel(G1,G2)` para uma conexão em paralelo de $G_1(s)$ e $G_2(s)$; `feedback(G,H,sign)` para uma conexão a malha fechada com $G_1(s)$ no canal direto e $H(s)$ no canal de retroação e `sign` é -1 para sistemas com retroação negativa ou $+1$ para sistemas com retroação positiva. O argumento sign é opcional nos sistemas com retroação negativa.

2. Solução via Operações Algébricas:
Uma outra abordagem é realizar operações aritméticas sucessivas sobre funções de transferência LIT como a seguir: `G2*G1` para uma conexão em cascata de $G_1(s)$ e $G_2(s)$; `G1+G2` para uma conexão em paralelo de $G_1(s)$ e $G_2(s)$; `G/(1+G*H)` para uma conexão com retroação negativa a malha fechada com $G(s)$ no canal direto e $H(s)$ como retroação; `G/(1-G*H)` para sistemas com retroação positiva. Ao usar divisão prosseguimos com a função `minreal(sys)` para cancelar os fatores comuns ao numerador e ao denominador.

3. Solução via Comandos Append e Connect:
O último método, que define a topologia do circuito, pode ser usado eficazmente em sistemas complicados. Primeiro, os subsistemas são definidos. Em segundo lugar os subsistemas são adicionados, ou reunidos, em um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Pense neste sistema como um único sistema com uma entrada para cada subsistema e uma saída para cada um dos subsistemas. A seguir, as entradas e as saídas externas são especificadas. Finalmente os subsistemas são interconectados. Elaboremos cada um destes passos.

Os subsistemas são definidos criando-se funções de transferência LIT para cada um deles. Os subsistemas são adicionados usando o comando `G = append(G1,G2,G3,G4,.....Gn)`, onde `Gi` são as funções de transferência LIT dos subsistemas e `G` é o sistema reunido. Cada subsistema é definido agora por um número baseado na posição ocupada por ele no argumento da função append. Por exemplo, `G3` é 3, baseado no fato de que ele é o terceiro subsistema no argumento de append (não, no fato de que o escrevemos como `G3`).

Agora que criamos um sistema reunido, formamos os argumentos necessários para interconectar suas entradas e suas saídas para formar o nosso sistema. O primeiro passo identifica quais subsistemas possuem sinal de entrada externo e quais os que possuem sinal de saída externo. Por exemplo, usamos `inputs = [1 5 6]` e `outputs = [3 4]` para definir que as entradas externas são as entradas dos subsistemas 1, 5 e 6, e que as saídas externas são as saídas dos subsistemas 3 e 4. Para sistemas com uma única entrada e uma única saída, estas definições utilizam grandezas escalares. Portanto, `inputs = 5` e `outputs = 8` definem a entrada do subsistema 5 como uma entrada externa e a saída do subsistema 8 como uma saída externa.

Neste ponto instruímos o programa sobre como todos os subsistemas são interligados. Formamos uma matriz Q que apresenta uma linha para cada subsistema cuja entrada vem da saída de outro subsistema. A primeira coluna contém o número do subsistema. As colunas subseqüentes contêm os números dos subsistemas dos quais as entradas vêm. Assim, uma linha típica poderia ser: `[3 6 -7]` ou a entrada do subsistema 3 é formada pela soma da saída do subsistema 6 com o negativo da saída do subsistema 7.

Finalmente, todos os argumentos de interconexão são usados no comando `connect(G Q inputs, outputs)`, onde todos os argumentos foram previamente definidos.

Demonstremos os três métodos de obtenção da função de transferência global dando uma olhada na parte interna traseira da contracapa e obtendo a função de transferência a malha fechada para o controle de arfagem do veículo submarino UFSS com $K_1 = K_2 = 1$ (Johnson, 1980). O último método usando append e connect requer que todos os subsistemas sejam próprios (a ordem do numerador não pode ser maior que a do denominador). O sensor da velocidade de arfagem viola este requisito. Assim, para o terceiro método, executaremos algumas manobras no diagrama de blocos empurrando o sensor de velocidade de arfagem para a esquerda da junção somadora e combinando os blocos resultantes com o ganho de arfagem e do atuador do profundor. Estas mudanças estão refletidas no programa. O estudante deve verificar todos os resultados obtidos com o computador cotejando-os com os cálculos realizados a mão.

```
'(cap5p1) Sistema de Controle de Arfagem do UFSS'
                                             % Exibe título.
'Solução via Comandos Series, Parallel, e Feedback'
                                             % Exibe título.
numg1=[-1];                                  % Define o numerador de G1(s).
deng1=[1];                                   % Define o denominador de G1(s).
numg2=[0 2];                                 % Define o numerador de G2(s).
deng2=[1 2];                                 % Define o denominador de G2(s).
numg3=-0.125*[1 0.435];                      % Define o numerador de G3(s).
deng3=conv([1 1.23],[1 0.226 0.0169]);       % Define o denominador de G3(s).
numh1=[-1 0];                                % Define o numerador de H1(s).
denh1=[0 1];                                 % Define o denominador de H1(s).
G1=tf(numg1,deng1);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % G1(s).
G2=tf(numg2,deng2);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % G2(s).
G3=tf(numg3,deng3);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % G3(s).
H1=tf(numh1,denh1);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % H1(s).
G4=series(G2,G3);                            % Calcula o produto das funções de
                                             % transferência
                                             % representando a dinâmica do profundor e
                                             % do veículo submersível.
G5=feedback(G4,H1);                          % Calcula a função de transferência
                                             % a malha fechada da malha interna.
Ge=series(G1,G5);                            % Multiplica a função de transferência da
                                             % malha interna
                                             % pelo ganho de arfagem.
'T(s) via Comandos Series, Parallel e Feedback'
                                             % Exibe título.
T=feedback(Ge,1)                             % Obtém a função de transferência a malha
                                             % fechada.
'Solução via Operações Algébricas'           % Exibe título.
clear                                        % Apaga a sessão.
numg1=[-1];                                  % Define o numerador de G1(s).
deng1=[1];                                   % Define o denominador de G1(s).
numg2=[0 2];                                 % Define o numerador de G2(s).
deng2=[1 2];                                 % Define o denominador de G2(s).
numg3=-0.125*[1 0.435];                      % Define o numerador de G3(s).
deng3=conv([1 1.23],[1 0.226 0.0169]);       % Define o denominador de G3(s).
numh1=[-1 0];                                % Define o numerador de H1(s).
denh1=[0 1];                                 % Define o denominador de H1(s).
G1=tf(numg1,deng1);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % G1(s).
G2=tf(numg2,deng2);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % G2(s).
G3=tf(numg3,deng3);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % G3(s).
H1=tf(numh1,denh1);                          % Cria a função de transferência LIT,
                                             % H1(s).
G4=G3*G2;                                    % Calcula o produto das funções de
                                             % transferência representando a dinâmica
                                             % do profundor e do veículo submersível.
G5=G4/(1+G4*H1);                             % Calcula a função de transferência
                                             % a malha fechada da malha interna.
G5=minreal(G5);                              % Cancela os termos comuns.
```

```
Ge=G5*G1;                                   % Multiplica funções de transferência
                                            % da malha interna.
'T(s) via Operações Algébricas'             % Exibe título.
T=Ge/(1+Ge);                                % Obtém a função de transferência a malha
                                            % fechada.
T=minreal(T)                                % Cancela os termos comuns.
'Solução via Comandos Append e Connect'     % Exibe título.
'G1(s) = (-K1)*(1/(-K2s)) = 1/s'            % Exibe título.
numg1=[1];                                  % Define o numerador de G1(s).
deng1=[1 0];                                % Define o denominador de G1(s).
G1=tf(numg1,deng1)                          % Cria a função de transferência LIT,
                                            % G1(s) = ganho de arfagem*(1/sensor de
                                            % velocidade angular de arfagem).
'G2(s) = (-K2s)*(2/(s+2)'                   % Exibe título.
numg2=[-2 0];                               % Define o numerador de G2(s).
deng2=[1 2];                                % Define o denominador de G2(s).
G2=tf(numg2,deng2)                          % Cria a função de transferência LIT,
                                            % G2(s) = sensor de velocidade ang. de
                                            % arfagem* dinâmica do veículo.
'G3(s) = -0,125(s+0,435)/((s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169))'
numg3=-0.125*[1 0.435];                     % Exibe título.
deng3=conv([1 1.23],[1 0.226 0.0169]);      % Define o numerador de G3(s).
G3=tf(numg3,deng3)                          % Define o denominador de G3(s).
                                            % Cria a função de transferência LIT,
System=append(G1,G2,G3);                    % G3(s) = dinâmica do veículo.
input=1;                                    % Reúne todos os subsistemas.
output=3;                                   % A entrada é no primeiro subsistema, G1(s).
                                            % A saída é a saída do terceiro subsistema,
Q=[1 -3 0                                   % G3(s).
                                            % O subsistema 1, G1(s), obtém sua entrada
                                            % a partir do valor negativo da saída do
2 1 -3                                      % subsistema 3, G3(s).
                                            % O subsistema 2, G2(s),obtém sua entrada
                                            % a partir do subsistema 1, G1(s), e do valor
3 2 0];                                     % negativo da saída do subsistema 3, G3(s).
                                            % O subsistema 3, G3(s), obtém sua entrada
                                            % a partir do subsistema 2, G2(s).
T=connect(System,Q,input,output);           % Conecta os subsistemas.
'T(s) via Comandos Append e Connect'        % Exibe título.
T=tf(T);                                    % Cria uma função de transferência a malha
                                            % fechada LIT.
T=minreal(T)                                % Cancela termos comuns.
pause
```

cap5p2 (Exemplo 5.3) Podemos usar o MATLAB para calcular as características a malha fechada de um sistema de segunda ordem, como relação de amortecimento, ζ; freqüência natural, ω_n; ultrapassagem percentual, $\%UP$ (up); tempo de assentamento, T_s; e tempo de pico, T_p. O comando `[numt,dent] = tfdata(T,'v')` extrai o numerador e o denominador de $T(s)$ relativo a um sistema de uma única entrada e uma única saída no qual os cálculos estão baseados. O argumento `'v'` retorna o numerador e o denominador como vetores linha simples. A omissão de `'v'` faria retornar o numerador e o denominador como arranjos celulares necessitando de mais passos para obter os vetores linha. Concluímos gerando um gráfico da resposta ao degrau a malha fechada. Vejamos o Exemplo 5.3 no texto.

```
'(cap5p2) Exemplo 5.3'                      % Exibe título.
numg=[25];                                  % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -5]);                          % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                      % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                             % Cria e mostra G(s).
'T(s)'                                      % Exibe título.
T=feedback(G,1)                             % Determina T(s).
[numt,dent]=tfdata(T,'v');                  % Extrai o numerador e o denominador
                                            % de T(s).
wn=sqrt(dent(3))                            % Determina a freqüência natural, wn.
z=dent(2)/(2*wn)                            % Determina a relação de amortecimento, z.
Ts=4/(z*wn)                                 % Determina o tempo de assentamento, Ts.
Tp=pi/(wn*sqrt(1-z^2))                      % Determina o instante de pico, Tp.
up=exp(-z*pi/sqrt(1-z^2))*100               % Determina a ultrapassagem percentual, up.
step(T)                                     % Gera a resposta ao degrau.
pause
```

cap5p3 O MATLAB pode ser usado para converter funções de transferência em formas especificadas de representações no espaço de estados. O comando `[Acc Bcc Ccc Dcc] = tf2ss(num,den)` pode ser utilizado para converter $T(s)$ = num/den na forma canônica controlável com matrizes e vetores `Acc, Bcc, Ccc e Dcc`. Podemos então formar um objeto LIT no espaço de estados usando `Scc = ss(Acc,Bcc,Ccc,Dcc)`. Este objeto pode então ser convertido na forma paralela usando `Sp = canon(Scc,'tipo')`, onde `tipo = modal` conduz à forma paralela.

Uma outra escolha, que não foi utilizada aqui, é `tipo = companion`, que leva à representação da matriz de sistema na forma companheira direita. As matrizes de transformação podem ser usadas para converter em outras representações. Como exemplo, convertamos $C(s)/R(s) = 24/[(s+2)(s+3)(s+4)]$ em uma representação em paralelo no espaço de estados, como é feito na Seção 5.7 — Forma Paralela. Observe que o produto de valores nos vetores **B** e **C** conduzem aos mesmos resultados nas Eqs. (5.49) e (5.50). Portanto, as duas soluções são iguais, mas as variáveis de estado são ordenadas de forma diferente e os ganhos são repartidos entre os vetores **B** e **C**. Também podemos extrair as matrizes de sistema do objeto LIT usando `[A,B,C,D] = ssdata(S)`, onde `S` é um objeto LIT no espaço de estados e `A, B, C, D` são as matrizes e vetores associados.

```
'(cap5p3)'                                  % Exibe título.
numt=24;                                    % Define o numerador de T(s).
dent=poly([-2 -3 -4]);                      % Define o denominador de T(s).
'T(s)'                                      % Exibe título.
T=tf(numt,dent)                             % Cria e mostra T(s).
[Acc Bcc Ccc Dcc]=tf2ss(numt,dent);         % Converte T(s) à forma
                                            % canônica do controlador.
Scc=ss(Acc,Bcc,Ccc,Dcc);                    % Cria objeto LIT no espaço de estados
                                            % na forma canônica do controlador.
Sp=canon(Scc,'modal');                      % Converte a forma canônica do controlador
                                            % à forma modal (paralela).
'Forma Canônica do Controlador'             % Exibe título.
[Acc,Bcc,Ccc,Dcc]=ssdata(Scc)               % Extrai e mostra as matrizes
                                            % da forma canônica do controlador.
'Forma Paralela'                            % Exibe título.
[Ap,Bp,Cp,Dp]=ssdata(Sp)                    % Extrai e mostra as matrizes
                                            % da forma paralela.
pause
```

cap5p4 (Exemplo 5.10) Podemos usar o MATLAB para executar transformações de similaridade para obter outras formas. Vejamos o Exemplo 5.10 no texto.

```
'(cap5p4) Exemplo 5.10'                     % Exibe título.
Pinv=[2 0 0;3 2 0;1 4 5];                   % Define a inversa de P.
P=inv(Pinv)                                 % Calcula P.
'Original'                                  % Exibe título.
Ax=[0 1 0;0 0 1;-2 -5 -7]                   % Define o valor original de A.
Bx=[0 0 1]'                                 % Define o valor original de B.
Cx=[1 0 0]                                  % Define o valor original de C.
'Transformada'                              % Exibe título.
Az=Pinv*Ax*P                                % Calcula o novo valor de A.
Bz=Pinv*Bx                                  % Calcula o novo valor de B.
Cz=Cx*P                                     % Calcula o novo valor de C.
pause
```

cap5p5 Usando o comando do MATLAB `[P,d] = eig(A)`, onde as colunas de `P` são os autovetores de `A` e os elementos na diagonal de `d` são os autovalores de `A`, podemos determinar os autovetores da matriz de sistema e em seguida proceder à diagonalização do sistema. Também podemos usar `canon(S,'modal')` para diagonalizar um objeto LIT, `S`, representado no espaço de estados.

```
'(cap5p5)'                                  % Exibe título.
A=[3 1 5;4 -2 7;2 3 1];                     % Define o valor original de A.
B=[1;2;3];                                  % Define o valor original de B.
C=[2 4 6];                                  % Define o valor original de C.
[P,d]=eig(A)                                % Gera a matriz de transformação, P,
                                            % e os autovalores, d.
'Via Transformação'                         % Exibe título.
Adt=inv(P)*A*P                              % Calcula a matriz A do sistema diagonalizado.
Bdt=inv(P)*B                                % Calcula a matriz B do sistema diagonalizado.
Cdt=C*P                                     % Calcula a matriz C do sistema diagonalizado.
'Via Canon Command'                         % Exibe título.
S=ss(A,B,C,0)                               % Cria o objeto LIT no espaço de estados para
                                            % o sistema original.
Sp=canon(S,'modal')                         % Calcula o sistema diagonalizado
                                            % via comando canon.
pause
```

Capítulo 6: Estabilidade

cap6p1 (Exemplo 6.7) O MATLAB pode calcular os pólos de uma função de transferência a fim de determinar a estabilidade. Para calcular os pólos de $T(s)$ use o comando `pole(T)`. Vejamos o Exemplo 6.7 no texto.

```
'(cap6p1) Exemplo 6.7'                      % Exibe título.
numg=1;                                     % Define o numerador de G(s).
```

```
deng=conv([1 0],[2 3 2 3 2]);          % Define o denominador de G(s).
G=tf(numg,deng);                       % Cria o objeto G(s).
'T(s)'                                 % Exibe título.
T=feedback(G,1)                        % Calcula o objeto a malha fechada, T(s).
                                       % A retroação negativa é o default, com
                                       % omissão do parâmetro sign (sinal).
poles=pole(T)                          % Obtém os pólos de T(s).
pause
```

cap6p2 (Exemplo 6.9) Podemos usar o MATLAB para determinar a faixa de valores de um ganho para estabilidade gerando uma malha, variando o valor do ganho e determinando com que valor obtemos pólos no plano da direita.

```
'(cap6p2) Exemplo 6.9'                 % Exibe título.
K=[1:1:2000];                          % Define a faixa de valores K de 1 a 2000 em
                                       % incrementos de 1.
for n=1:length(K);                     % Definição do número de repetições do LAÇO DO
                                       % igual ao número de valores de K a serem
                                       % testados.
        dent=[1 18 77 K(n)];           % Define o denominador de T(s) para
                                       % o enésimo valor de K.
        poles=roots(dent);             % Obtém os pólos para o enésimo valor
                                       % de K.
        r=real(poles);                 % Forma um vetor contendo as partes
                                       % reais dos pólos para K(n).
              if max(r)>=0,            % Testa se a parte real dos pólos obtidos
                                       % com o enésimo valor de K é > ou = 0.
                     poles             % Mostra primeiro os pólos
                                       % com parte real > ou = 0.
                     K=K(n)            % Mostra o valor correspondente de K.
                     break             % Interrompe o laço se não forem encontrados
                                       % pólos no semiplano da direita
        end                            % Fim de if.
end                                    % Fim de for.
pause
```

cap6p3 (Exemplo 6.11) Podemos usar o MATLAB para determinar a estabilidade de um sistema representado no espaço de estados através do comando `eig(A)` para obter os autovalores da matriz de sistema, `A`. Apliquemos o conceito ao Exemplo 6.11 no texto.

```
'(cap6p3) Exemplo 6.11'                % Exibe título.
A=[0 3 1;2 8 1;-10 -5 -2]              % Define a matriz de sistema, A.
autovalores=eig(A)                     % Obtém os autovalores.
pause
```

Capítulo 7: Erros de Estado Estacionário

cap7p1 (Exemplo 7.4, sistema b) As constantes de erro estático são obtidas usando $\lim s^n G(s)$ quando $s \to 0$. Uma vez obtida a constante de erro estático, podemos calcular o erro de estado estacionário. Para calcular a constante de erro estático podemos usar o comando `dcgain(G)`, que calcula $G(s)$ em $s = 0$. Vejamos o Exemplo 7.4, sistema **b**, no texto.

```
'(cap7p1) Exemplo 7.4, sistema. b'     % Exibe título.
numg=500*poly([-2 -5 -6]);             % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -8 -10 -12]);             % Define o denominador de G(s).
G=tf(numg,deng);                       % Forma G(s)
'Verificar a Estabilidade'             % Exibe título.
T=feedback(G,1);                       % Forma T(s).
polos=pole(T)                          % Mostra os pólos a malha fechada.
'Entrada em Degrau'                    % Exibe título.
Kp=dcgain(G)                           % Calcula Kp=numg/deng para s=0.
ess=1/(1+Kp)                           % Calcula o erro de estado estacionário
                                       % para uma entrada em degrau.
'Entrada em Rampa'                     % Exibe título.
numsg=conv([1 0],numg);                % Define o numerador de sG(s).
densg=poly([0 -8 -10 -12]);            % Define o denominador de sG(s).
sG=tf(numsg,densg);                    % Cria sG(s).
sG=minreal(sG);                        % Cancela os termos comuns ao numerador(numsg)
                                       % e ao denominador(densg).
Kv=dcgain(sG)                          % Calcula Kv=sG(s) para s=0.
ess=1/Kv                               % Calcula o erro de estado estacionário
                                       % para uma entrada em rampa.
'Entrada em Parábola'                  % Exibe título.
nums2g=conv([1 0 0],numg);             % Define o numerador de s^2G(s).
dens2g=poly([-8 -10 -12]);             % Define o denominador de s^2G(s).
```



```
s2G=tf(nums2g,dens2g);                 % Cria s^2G(s)
s2G=minreal(s2G);                      % Cancela os termos comuns ao
                                       % numerador(nums2g) e
                                       % ao denominador(dens2g).
Ka=dcgain(s2G)                         % Calcula Ka=s^2G(s) para s=0.
ess=1/Ka                               % Calcula o erro de estado estacionário
                                       % para uma entrada em parábola.
pause
```

cap7p2 (Exemplo 7.6) Podemos usar o MATLAB para calcular o ganho, K, necessário para atender uma especificação de erro de estado estacionário. Vejamos o Exemplo 7.6 no texto.

```
'(cap7p2) Exemplo 7.6'                 % Exibe rótulo.
numgdK=[1 5];                          % Define o numerador de G(s)/K.
dengdK=poly([0 -6 -7 -8]);             % Define o denominador de G(s)/K.
GdK=tf(numgdK,dengdK);                 % Cria G(s)/K
numgkv=conv([1 0],numgdK);             % Define o numerador de sG(s)/K.
dengkv=dengdK;                         % Define o denominador de sG(s)/K.
GKv=tf(numgkv,dengkv);                 % Cria sG(s)/K.
GKv=minreal(GKv);                      % Cancela termos comuns ao numerador e
                                       % ao denominador de sG(s)/K.
KvdK=dcgain(GKv)                       % Calcula (Kv/K)=(numgkv/dengkv) para
                                       % s=0.
ess=0.1                                % Define o erro de estado estacionário.
K=1/(ess*KvdK)                         % Calcula o valor de K.
'Verifica a Estabilidade'              % Exibe rótulo.
T=feedback(K*GdK,1);                   % Forma T(s).
poles=pole(T)                          % Mostra os pólos a malha fechada.
pause
```

Capítulo 8: Técnicas do Lugar das Raízes

cap8p1 (Exemplo 8.7) O MATLAB permite traçar os lugares das raízes com o comando `rlocus(GH)`, onde $G(s)H(s)$ = `numgh/dengh` e `GH` é um objeto função de transferência LIT. Podem ser selecionados pontos sobre o lugar das raízes, de forma interativa, usando o comando `[K,p] = rlocfind(GH)`. O MATLAB fornece então o ganho(`K`) no ponto selecionado bem como todos os outros pólos(`p`) que têm esse ganho. Podemos ampliar ou reduzir o tamanho do lugar das raízes modificando os valores representados sobre os eixos através do comando `axis([xmin,xmax,ymin,ymax])`. O lugar das raízes pode ser construído sobre uma grade reticulada que mostra as curvas de valores constantes de relação de amortecimento(`z`) e freqüência natural(`wn`) usando o comando `sgrid(z,wn)`. Para plotar as curvas com os valores de ζ e de ω_n, use `z = zmin:zstep:zmax` e `wn = wnmin:wnstep:wnmax` para especificar as faixas de valores.

```
'(cap8p1) Exemplo 8.7'                 % Exibe rótulo.
clf                                    % Apaga gráfico na tela.
numgh=[1 -4 20];                       % Define o numerador de G(s)H(s).
dengh=poly([-2 -4]);                   % Define o denominador de G(s)H(s).
'G(s)H(s)'                             % Exibe rótulo.
GH=tf(numgh,dengh)                     % Cria G(s)H(s) e mostra.
rlocus(GH)                             % Desenha o lugar das raízes.
z=0.2:0.05:0.5;                        % Define valores de relação de amortecimento,
                                       % z: 0,2 a 0,5 em incrementos de 0,05.
wn=0:1:10;                             % Define valores de freqüência natural, wn: 0
                                       % a 10 em incrementos de 1.
sgrid(z,wn)                            % Gera linhas de grade de relação de
                                       % amortecimento e freqüência natural para
                                       % o lugar das raízes.
title('Lugar das Raízes')              % Define legenda para o lugar das raízes.
pause
rlocus(GH)                             % Desenha o lugar das raízes expandido.
axis([-3 1 -4 4])                      % Define faixas de valores dos eixos para o lugar
                                       % das raízes
                                       % para uma vista expandida do lugar das
                                       % raízes.
title('Vista Expandida')               % Define a legenda para o lugar das
                                       % raízes expandido.
z=0.45;                                % Define a reta de relação de amortecimento, z,
                                       % a ser superposta ao lugar das raízes
                                       % expandido.
wn=0;                                  % Suprime as curvas de
                                       % freqüência natural, wn, superpostas.
sgrid(z,wn)                            % Superpõe curva de relação de amortecimento,
                                       % z,
                                       % no lugar das raízes expandido.
for k=1:3                              % O laço permite escolher 3 pontos para
```

```
                                        % o Exemplo 8.7
                                        % (z=0,45, interseção com o eixo jw, ponto de
                                        % saída).
[K,p]=rlocfind(GH)                      % Gera o ganho, K, e os pólos
                                        % a malha fechada, p,
                                        % para os pontos selecionados de modo
                                        % interativo
                                        % sobre o lugar das raízes.
end                                     % Fim do laço for.
pause
```

cap8p2 (Exemplo 8.8) Podemos associar o projeto do ganho do lugar das raízes com a simulação da resposta ao degrau para o ganho selecionado. Introduzimos o comando `rlocus(G,K)`, que permite especificar a faixa de ganho, `K`, para o traçado do lugar das raízes. Este comando ajuda a suavizar o traçado usual através da especificação de um número maior de pontos através do argumento, `K`. Observe que o primeiro lugar das raízes traçado sem o argumento `K` não é suave. Introduzimos também o comando, `x = input('Digite x')`,[3] que permite entrar com o valor de `x`, via teclado, em resposta ao sinal de *prompt*. Aplicamos este comando para entrar com o valor de ultrapassagem percentual desejada. Adicionamos também um valor da variável à legenda dos gráficos do lugar das raízes e da resposta ao degrau inserindo um outro campo no comando `title` e usando `num2str(valor)` para converter o número `valor` em uma cadeia de caracteres a ser exibida. Apliquemos os conceitos ao Exemplo 8.8 no texto.

```
'(cap8p2) Exemplo 8.8'                  % Exibe rótulo.
clear                                   % Apaga variáveis da área de trabalho.
clf                                     % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=[1 1.5];                           % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -1 -10]);                  % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                  % Exibe rótulo.
G=tf(numg,deng)                         % Cria e mostra G(s).
rlocus(G)                               % Desenha o lugar das raízes (H(s)=1).
title('Lugar das Raízes Original')      % Acrescenta legenda.
pause
K=0:.5:50;                              % Especifica a faixa de valores de ganho
                                        % para um traçado suave do lugar das raízes.
rlocus(G,K)                             % Desenha o lugar das raízes suavizado
                                        %(H(s)=1).
title('Lugar das Raízes Suavisado Root Locus')
                                        % Acrescenta legenda.
up=input('Digite %UP');                 % Entra com a ultrapassagem percentual desejada
                                        % pelo teclado.
z=-log(up/100)/sqrt(pi^2+[log(up/100)]^2)  % Calcula a relação de amortecimento, z.
sgrid(z,0)                              % Superpõe a reta da relação de amortecimento
                                        % desejada sobre o lugar das raízes.
title(['Lugar das Raízes com a reta de ultrapassagem',num2str(up)])
                                        % Define a legenda do lugar das raízes
                                        % mostrando a ultrapassagem percentual usada.
[K,p]=rlocfind(G)                       % Gera o ganho, K, e os pólos
                                        % a malha fechada, p, para os pontos
                                        % selecionados de forma interativa sobre o
                                        % lugar das raízes.
pause
'T(s)'                                  % Exibe rótulo.
T=feedback(K*G,1)                       % Obtém e exibe a função de transferência a
                                        % malha fechada
                                        % com o valor de K selecionado.
step(T)                                 % Gera a resposta ao degrau do sistema
                                        % a malha fechada referente ao ponto
                                        % selecionado no lugar das raízes.
title(['Resposta ao Degrau para K=',num2str(K)])
                                        % Fornece a resposta ao degrau com legenda que
                                        % inclui o valor de K.
pause
```

Capítulo 9: Projeto via Lugar das Raízes

cap9p1 (Exemplo 9.3) Podemos usar o MATLAB para projetar controladores PD. O programa permite entrar com o valor de ultrapassagem percentual desejada via teclado. O MATLAB produz então um lugar das raízes do sistema sem compensação com uma linha de ultrapassagem percentual superposta. Selecionamos de forma interativa a interseção do lugar das raízes e da linha de ultrapassagem percentual desejada para ajustar o ganho. O MATLAB fornece como saída uma estimativa das especificações de desempenho do sistema sem compensação e a resposta

[3] O texto entre apóstrofos aparece na tela como sinal de *prompt*. (N.T.)

ao degrau do sistema não-compensado para que determinemos o tempo de assentamento necessário. Depois de entrar com o valor do tempo de assentamento através do teclado, o MATLAB projeta o controlador PD e produz o lugar das raízes do sistema compensado com PD a partir do qual podemos escolher o ganho de forma interativa. Finalmente, o MATLAB produz uma estimativa das especificações de desempenho e uma resposta ao degrau do sistema compensado com o controlador PD.

```
'(cap9p1) Exemplo 9.3'                  % Exibe rótulo.
clf                                     % Apaga gráficos existentes na tela.
'Sistema sem Compensação'               % Exibe rótulo.
numg=1;                                 % Gera o numerador de G(s).
deng=poly([0 -4 -6]);                   % Gera o denominador de G(s).
'G(s)'                                  % Exibe rótulo.
G=tf(numg,deng)                         % Cria e mostra G(s).
up=input('Digite o valor desejado de ultrapassagem percentual');
                                        % Entra com o valor desejado de ultrapassagem
                                        % percentual.
z=-log(up/100)/sqrt(pi^2+[log(up/100)]^2);
                                        % Calcula a relação de amortecimento, z.
rlocus(G)                               % Plota o lugar das raízes do sistema sem
                                        % compensação.
sgrid(z,0)                              % Superpõe a reta do valor desejado de
                                        % ultrapassagem
                                        % percentual.
title(['Lugar das Raízes do Sistema sem Compensação com a Reta de Ultrapassagem Percentual'
num2str(up),...])
                                        % Legenda do lugar das raízes sem compensação.
[K,p]=rlocfind(G);                      % Gera o ganho, K, e os pólos
                                        % a malha fechada, p, para os pontos
                                        % selecionados de forma interativa sobre o
                                        % lugar das raízes.
'Pólos a malha fechada = '              % Exibe rótulo.
p                                       % Mostra os pólos a malha fechada.
f=input('Dê o número do pólo que está no ponto de operação');
                                        % Escolhe o pólo dominante
                                        % do Sistema sem Compensação.
'Resumo das especificações estimadas para o ponto'
'selecionado no lugar das raízes do sistema não compensado'
                                        % Exibe rótulo.
ponto_de_operacao=p(f)                  % Exibe o pólo dominante
                                        % do sistema sem compensação.
ganho=K                                 % Exibe o ganho do sistema sem compensação.
tempo_de_assentamento_estimado=4/abs(real(p(f)))
                                        % Exibe o tempo de assentamento
                                        % do sistema sem compensação.
instante_de_pico_estimado=pi/abs(imag(p(f)))
                                        % Exibe o instante de pico do sistema sem
                                        % compensação.
ultrapassagem_percentual_estimada=up    % Exibe a ultrapassagem percentual
                                        % do sistema sem compensação.
relacao_de_amortecimento_estimada=z     % Exibe a relação de amortecimento
                                        % do sistema sem compensação.
frequencia_natural_estimada=sqrt(real(p(f))^2+imag(p(f))^2)
                                        % Exibe a freqüência natural
                                        % do sistema sem compensação.
numkv=conv([1 0],numg);                 % Ajusta o numerador para calcular Kv.
denkv=deng;                             % Ajusta o denominador para calcular Kv.
sG=tf(numkv,denkv);                     % Cria sG(s).
sG=minreal(sG);                         % Cancela os pólos e zeros comuns.
Kv=dcgain(K*sG)                         % Exibe o valor de Kv do sistema sem
                                        % compensação.
ess=1/Kv                                % Exibe o erro de estado estacionário, do
                                        % sistema sem compensação, para uma excitação
                                        % em rampa unitária.
'T(s)'                                  % Exibe rótulo.
T=feedback(K*G,1)                       % Obtém T(s)do sistema sem compensação.
step(T)                                 % Plota a resposta ao degrau
                                        % do sistema sem compensação.
title(['Resposta ao Degrau do Sistema sem Compensação, com Ultrapassagem Percentual',num2str(up),...])
                                        % Adiciona legenda na resposta ao degrau
                                        % do sistema sem compensação.
'Pressione qualquer tecla para optar por uma compensação PD'
                                        % Exibe rótulo.
pause
'Sistema compensado'                    % Exibe rótulo.
Ts=input('Digite o tempo de assentamento desejado');
                                        % Entra com o tempo de assentamento desejado
```

```
wn=4/(Ts*z);                                        % via teclado.
polo_desejado=(-z*wn)+(wn*sqrt(1-z^2)*i);           % Calcula a freqüência natural, wn.

                                                    % Calcula a posição desejada
                                                    % para o pólo dominante.
angulo_na_posicao_desejada_para_o_polo=(180/pi)*...
angle(polyval(numg,polo_desejado)/polyval(deng,polo_desejado));
                                                    % Calcula a contribuição angular
                                                    % para o pólo desejado sem o compensador PD.
angulo_do_PD=180-angulo_na_posicao_desejada_para_o_polo;
                                                    % Calcula a contribuição angular
                                                    % requerida do compensador PD.
zc=((imag(polo_desejado)/tan(PD_angle*pi/180))-real(polo_desejado));
                                                    % Calcula a localização do zero do compensador
                                                    % PD.
'Compensador PD'                                    % Exibe rótulo.
numc=[1 zc];                                        % Calcula o numerador de Gc(s).
denc=[0 1];                                         % Calcula o denominador de Gc(s).
'Gc(s)'                                             % Exibe rótulo.
Gc=tf(numc,denc)                                    % Cria e mostra Gc(s).
'G(s)Gc(s)'                                         % Exibe rótulo.
Ge=G*Gc                                             % Conecta G(s) e Gc(s) em cascata.
rlocus(Ge,0:0.5:100)                                % Plota o lugar das raízes do
                                                    % sistema com compensador PD.
sgrid(z,0)                                          % Superpõe a linha da ultrapassagem
                                                    % percentual desejada.
title(['Lugar das Raízes do Sistema com Compensador PD com Ultrapassagem Percentual de', num2str(up)])
                                                    % Adiciona legenda ao lugar das raízes do
                                                    % sistema
[K,p]=rlocfind(Ge);                                 % com compensação PD.
                                                    % Gera o ganho, K, e os pólos, p,
                                                    % poles, p, para os pontos selecionados
'Pólos a malha fechada = '                          % de forma interativa sobre o lugar das raízes.
p                                                   % Exibe rótulo.
                                                    % Mostra os pólos a malha fechada
f=input('Dê o número do pólo que está no ponto de operação');
                                                    % do sistema com compensador PD.
                                                    % Escolhe o pólo dominante
'Resumo das especificações estimadas para o ponto'  % do sistema com compensação PD.
'selecionado no lugar das raízes do sistema com compensador PD'
                                                    % Exibe rótulo.
ponto_de_operacao=p(f)                              % Exibe o pólo dominante
                                                    % do'sistema com compensação PD.
ganho=K                                             % Exibe o ganho do sistema com compensador PD.
tempo_de_assentamento_estimado=4/abs(real(p(f)))
                                                    % Exibe o tempo de assentamento
                                                    % do sistema com compensador PD.
instante_de_pico_estimado=pi/abs(imag(p(f)))
                                                    % Exibe o instante de pico do sistema com
                                                    % compensador PD.
ultrapassagem_percentual_estimada=up                % Exibe a ultrapassagem percentual
                                                    % do sistema com compensador PD.
relacao_de_amortecimento_estimada=z                 % Exibe a relação de amortecimento
                                                    % do sistema com compensador PD.
frequencia_natural_estimada=sqrt(real(p(f))^2+imag(p(f))^2)
                                                    % Exibe a freqüência natural
                                                    % do sistema com compensador PD.
s=tf([1 0],1);                                      % Cria a função de transferência, 's'.
sGe=s*Ge;                                           % Cria sGe(s).
sGe=minreal(sGe);                                   % Cancela os pólos e zeros comuns.
Kv=dcgain(K*sGe)                                    % Exibe o valor de Kv do sistema compensado.
ess=1/Kv                                            % Exibe o erro de estado estacionário
                                                    % para uma excitação em rampa do sistema
'T(s)'                                              % compensado.
T=feedback(K*Ge,1)                                  % Exibe rótulo.
                                                    % Cria e mostra T(s) para
                                                    % o sistema com compensador PD.
'Pressione qualquer tecla para continuar e obter resposta ao degrau do sistema com compensador PD'
pause                                               % Exibe rótulo.
step(T)
                                                    % Plota a resposta ao degrau
                                                    % do sistema com compensador PD.
title(['Resposta ao Degrau do Sistema com Compensador PD com Ultrapassagem Percentual',num2str(up)])
                                                    % Adiciona legenda na resposta ao degrau
pause                                               % do sistema com compensador PD.
```


cap9p2 (Exemplo 9.4) Podemos usar o MATLAB para projetar um compensador por avanço de fase. O programa permite entrar com o valor de ultrapassagem percentual desejada via teclado. O MATLAB produz então um lugar das raízes do sistema sem compensação com uma linha de ultrapassagem percentual superposta. Selecionamos de forma interativa a interseção do lugar das raízes e da linha de ultrapassagem percentual desejada para ajustar o ganho. O MATLAB fornece como saída uma estimativa das especificações de desempenho do sistema sem compensação e a resposta ao degrau do sistema não-compensado para que determinemos o tempo de assentamento necessário. Depois, através do teclado, entramos com os valores do tempo de assentamento e do zero do compensador por avanço de fase. Neste ponto, adotamos uma abordagem diferente da usada no exemplo anterior. Em vez de fazer com que o MATLAB calcule diretamente o pólo do compensador por avanço de fase, o MATLAB produz um lugar das raízes para cada uma das tentativas de obter interativamente o pólo do compensador. Cada um dos lugares das raízes contém as curvas dos valores desejados de relação de amortecimento e de freqüência natural. Quando nossa tentativa estiver correta, o lugar das raízes, a linha de relação de amortecimento e a curva de freqüência natural se interceptarão em um único ponto. Selecionamos, então, interativamente este ponto de interseção para entrar com o valor do ganho. Finalmente, o MATLAB produz uma estimativa das especificações de desempenho e uma resposta ao degrau do sistema compensado com o controlador por avanço de fase.

```
'(cap9p2) Exemplo 9.4'                              % Exibe rótulo.
clf                                                 % Apaga gráfico na tela.
'Sistema sem Compensação'                           % Exibe rótulo.
numg=1;                                             % Gera o numerador de G(s).
deng=poly([0 -4 -6]);                               % Gera o denominador de G(s).
'G(s)'                                              % Exibe rótulo.
G=tf(numg,deng)                                     % Cria e mostra G(s).
up=input('Digite a ultrapassagem percentual desejada');
                                                    % Entra com o valor desejado de ultrapassagem
                                                    % percentual, up.
z=-log(up/100)/sqrt(pi^2+[log(up/100)]^2);          % Calcula a relação de amortecimento.
rlocus(G)                                           % Plota o lugar das raízes do sistema sem
                                                    % compensação.
sgrid(z,0)                                          % Superpõe a linha de ultrapassagem
                                                    % percentual desejada.
title(['Lugar das raízes do sistema sem compensação com linha de ultrapassagem,' num2str(up)])
                                                    % Legenda do lugar das raízes do sistema sem
                                                    % compensação.
[K,p]=rlocfind(G);                                  % Gera o ganho, K, e os pólos
                                                    % a malha fechada, p, para os pontos
                                                    % selecionados
                                                    % de forma interativa sobre o lugar das raízes.
'Pólos a malha fechada = '                          % Exibe rótulo.
p                                                   % Exibe os pólos a malha fechada.
f=input('Dê o número do pólo que está no ponto de operação');
                                                    % Escolhe o pólo dominante do
                                                    % sistema sem compensação.
'Resumo das especificações estimadas para o ponto'
'selecionado no lugar das raízes do sistema não compensado'
                                                    % Exibe rótulo.
ponto_de_operacao=p(f)                              % Exibe o pólo dominante
                                                    % do sistema sem compensação.
ganho=K                                             % Exibe o ganho do sistema sem compensação.
tempo_de_assentamento_estimado=4/abs(real(p(f)))
                                                    % Exibe o tempo de assentamento
                                                    % do sistema sem compensação.
instante_de_pico_estimado=pi/abs(imag(p(f)))
                                                    % Exibe instante de pico do sistema sem
                                                    % compensação.
ultrapassagem_percentual_estimada=up                % Exibe a ultrapassagem percentual do sistema
                                                    % sem compensação.
relacao_de_amortecimento_estimada=z                 % Exibe relação de amortecimento do sistema
                                                    % sem compensação.
frequencia_natural_estimada=sqrt(real(p(f))^2+imag(p(f))^2)
                                                    % Exibe a freqüência natural do sistema
                                                    % sem compensação.
numkv=conv([1 0],numg);                             % Ajusta o numerador para calcular Kv.
denkv=deng;                                         % Ajusta o denominador para calcular Kv.
sG=tf(numkv,denkv);                                 % Cria sG(s).
sG=minreal(sG);                                     % Cancela os pólos e zeros comuns.
Kv=dcgain(K*sG)                                     % Exibe o valor de Kv do sistema sem
                                                    % compensação.
ess=1/Kv                                            % Exibe o erro de estado estacionário para uma
                                                    % excitação
                                                    % unitária do sistema sem compensação.
'T(s)'                                              % Exibe rótulo.
T=feedback(K*G,1)                                   % Cria e mostra T(s).
step(T)                                             % Plota a resposta ao degrau do sistema
                                                    % sem compensação.
```

```
title(['Resposta ao Degrau do Sistema sem Compensação com Ultrapassagem de',num2str(up)])
                                        % Adiciona legenda na resposta ao degrau
                                        % do sistema sem compensação.
'Pressione qualquer tecla para optar por uma compensação por avanço de fase'
pause                                   % Exibe rótulo.
Ts=input('Digite o Tempo de Assentamento Desejado');
                                        % Digite o tempo de assentamento desejado.
b=input('Digite o Zero do Compensador por Avanço de Fase, (s+b), b= ');
                                        % Entrar com o zero do compensador por avanço
                                        % de fase.
concluido=1;                            % Inicializa o contador do laço.
while concluido==1                      % Dá partida no laço tentando obter
                                        % o pólo do compensador.
a=input('Entre com um Pólo de Teste do Compensador por Avanço de Fase, (s+a), a = ');
                                        % Entrar com um pólo de teste do Compensador
                                        % por Avanço de Fase.
numge=conv(numg,[1 b]);                 % Gera o numerador de Gc(s)G(s).
denge=conv([1 a],deng);                 % Gera o denominador de Gc(s)G(s).
Ge=tf(numge,denge);                     % Crie Ge(s)=Gc(s)G(s).
wn=4/(Ts*z);                            % Calcula a freqüência natural desejada.
clf                                     % Apaga gráfico na tela.
rlocus(Ge)                              % Plota o lugar das raízes compensado com
                                        % o pólo de teste do compensador por avanço
                                        % de fase.
axis([-10,10,-10,10])                   % Muda os eixos do lugar das raízes
sgrid(z,wn)                             % do sistema compensado por avanço de fase.
                                        % Superpõe uma grade ao
                                        % lugar das raízes do sistema compensado por
                                        % avanço de fase.
title(['Lugar das Raízes do Sistema Compensado por Avanço de Fase com linha de ultrapassagem'
'percentual de', num2str(up), 'Pólo do Compensador em ', num2str(-a),' e Wn Requerido'])
                                        % Adiciona legenda ao lugar das raízes
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
concluido=input('Você terminou? (s=0,n=1) ');
                                        % Ajusta o contador do laço.
end                                     % Fim do laço para tentar obter
                                        % o pólo do compensador.
[K,p]=rlocfind(Ge);                     % Gera o ganho, K, e os pólos
                                        % a malha fechada, p, para os pontos
                                        % selecionados
                                        % de forma interativa sobre o lugar das raízes.
'Gc(s)'                                 % Exibe rótulo.
Gc=tf([1 b],[1 a])                      % Exibe o compensador por avanço de fase.
'Gc(s)G(s)'                             % Exibe rótulo.
Ge                                      % Exibe Gc(s)G(s).
'Pólos a malha fechada = '              % Exibe rótulo.
p                                       % Mostra os pólos a malha fechada
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
f=input('Dê o número do pólo que está no ponto de operação ');
                                        % Escolhe o pólo dominante
                                        % do sistema com compensação por avanço de
                                        % fase.
'Resumo das especificações estimadas para o ponto'
'selecionado no lugar das raízes do sistema não compensado'
                                        % Exibe rótulo.
ponto_de_operacao=p(f)                  % Exibe o pólo dominante
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
ganho=K                                 % Exibe o ganho da compensação por avanço
                                        % de fase.
tempo_de_assentamento_estimado=4/abs(real(p(f)))
                                        % Exibe o tempo de assentamento
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
instante_de_pico_estimado=pi/abs(imag(p(f)))
                                        % Exibe o instante de pico
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
ultrapassagem_percentual_estimada=up    % Exibe a ultrapassagem percentual
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
relacao_de_amortecimento_estimada=z     % Exibe a relação de amortecimento
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
frequencia_natural_estimada=sqrt(real(p(f))^2+imag(p(f))^2)
                                        % Exibe a freqüência natural
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
s=tf([1 0],1);                          % Cria a função de transferência, 's'.
sGe=s*Ge;                               % Cria sGe(s) para calcular Kv.
sGe=minreal(sGe);                       % Cancela os pólos e zeros comuns.
Kv=dcgain(K*sGe)                        % Exibe o valor de Kv da compensação por
                                        % avanço de fase.
ess=1/Kv                                % Exibe o erro de estado estacionário
```



```
                                        % para uma excitação em rampa unitária.
'T(s)'                                  % Exibe rótulo.
T=feedback(K*Ge,1)                      % Cria e mostra T(s)
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
'Pressione qualquer tecla para continuar e obter a resposta ao degrau '
'do sistema compensado por avanço de fase'
                                        % Exibe rótulo
pause
step(T)                                 % Plota a resposta ao degrau
                                        % do sistema compensado por avanço de fase.
title([Resposta ao Degrau de Sistema Compensado por Avanco de Fase com ',num2str(pos),...
'up'])                                  % Adiciona legenda à resposta ao
                                        % degrau do sistema compensado.
pause
```

Capítulo 10: Técnicas de Resposta de Freqüência

cap10p1 (Exemplo 10.3) Podemos usar o MATLAB para construir gráficos de Bode usando `bode(G)`, onde $G(s)$ = `numg/deng` e `G` é um objeto função de transferência LIT. Clicando com o botão direito do mouse sobre as curvas, podemos obter informações a respeito dos gráficos construídos através do comando `bode(G)`. Você pode descobrir a legenda da curva, bem como as coordenadas do ponto sobre o qual você clicou. Clicar com o botão direito do mouse realça e identifica a curva. Clicar com o botão direito do mouse sobre um ponto qualquer fora das curvas faz aparecer um menu. Neste menu você pode selecionar (1) respostas do sistema a serem apresentadas na tela, (2) características da resposta a serem mostradas, (3) opções de ampliar ou reduzir (zoom) e (4) opção de incluir ou suprimir uma grade reticulada a ser superposta. Se você selecionar uma característica da resposta, será assinalado um ponto apropriado do gráfico. Dando um clique nesse ponto aparecem os valores medidos da característica selecionada. Podemos obter pontos sobre o gráfico usando o comando `[mag,fase,w] = bode(G)`, onde a magnitude, a fase e a freqüência estão armazenados, respectivamente, em `mag`, `fase` e `w`. Magnitude e fase são armazenadas em *arrays* 3D. Usamos `mag(:,:)',fase(:,:)'` para converter os arrays em vetores coluna, onde os apóstrofos significam transposta de matriz. Vejamos o Exemplo 10.3 no texto.

```
'(cap10p1) Exemplo 10.3'                % Exibe rótulo.
clf                                     % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=[1 3];                             % Define o numerador de G(s).
deng=conv([1 2],[1 2 25]);              % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                  % Exibe rótulo.
G=tf(numg,deng)                         % Cria e mostra G(s).
grid on                                 % Ativa a grade para o gráfico de Bode.
bode(G)                                 % Constrói um gráfico de Bode.
title('Resposta de Freqüência a Malha Aberta')
                                        % Adiciona uma legenda ao gráfico de Bode.
[mag,fase,w]=bode(G);                   % Armazena pontos do gráfico de Bode.
pontos=[20*log10(mag(:,:))',fase(:,:)',w]  % Lista pontos do gráfico de Bode
                                        % com magnitude em dB.
pause
```

cap10p2 (Exemplo 10.5) Podemos usar o MATLAB para construir gráficos de Nyquist usando `nyquist(G)`, onde $G(s)$ = `numg/deng` e `G` é um objeto função de transferência LIT. Clicando com o botão direito do mouse sobre as curvas, podemos obter informações a respeito dos gráficos construídos através do comando `nyquist(G)`. Você pode descobrir a legenda da curva, bem como as coordenadas do ponto sobre o qual você clicou. Clicar com o botão direito do mouse realça e identifica a curva. Clicar com o botão direito do mouse sobre um ponto qualquer fora das curvas faz aparecer um menu. Neste menu você pode selecionar (1) respostas do sistema a serem apresentadas na tela, (2) características da resposta a serem mostradas, (3) opções de ampliar ou reduzir (zoom) e (4) opção de incluir ou suprimir uma grade reticulada a ser superposta.

Podemos obter pontos sobre o gráfico usando o comando `[re,im,w] = nyquist(G)`, onde a parte real, a parte imaginária e a freqüência estão armazenadas, respectivamente, em `re`, `im` e `w`, e `re` e `im` são *arrays* 3D. Podemos especificar a faixa de valores de `w` usando `[re,im] = nyquist(G,w)`. Usamos `re(:,:)',im(:,:)'` para converter os *arrays* em vetores coluna, onde os apóstrofos significam transposta de matriz. Vejamos o Exemplo 10.5 no texto.

```
'(cap10p2) Exemplo 10.5'                % Exibe título.
clf                                     % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=[1 2];                             % Define numerador de G(s).
deng=[1 0 0];                           % Define denominador de G(s).
'G(s)'                                  % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                         % Cria e mostra G(s).
grid on                                 % Ativa a grade para o gráfico de Nyquist.
nyquist(G)                              % Constrói o gráfico de Nyquist.
title('Resposta de Freqüência a Malha Aberta')
```

BIBLIOTECA - UNOESC

```
w=0:0.5:10;                                  % Adiciona uma legenda ao gráfico de Nyquist.
[re,im]=nyquist(G,w);                        % Faz 0<w<10 em incrementos de 0,5.
                                             % Obtém pontos do gráfico de Nyquist para
pontos=[re(:,:)',im(:,:)',w']                % uma faixa de valores de w.
                                             % Lista pontos especificados em uma faixa de
pause                                        % valores do gráfico de Nyquist.
```

cap10p3 (Exemplo 10.8) Podemos usar o MATLAB para obter a margem de ganho (G_m), a margem de fase (P_m), a freqüência de margem de ganho, onde o gráfico de fase atinge 180 graus (W_{cg}) e a freqüência de margem de fase, onde o gráfico de magnitude atinge o valor de zero dB(W_{cp}). Para obter estes valores usamos $[G_m, P_m, W_{cg}, W_{cp}]$ = margin(G), onde $G(s)$ = numg/deng e G é um objeto função de transferência LIT. Vejamos o Exemplo 10.8 no texto.

```
'(cap10p3) Exemplo 10.8'                     % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=6;                                      % Define numerador de G(s).
deng=conv([1 2],[1 2 2]);                    % Define denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
grid on                                      % Ativa a grade para o gráfico de Nyquist.
nyquist(G)                                   % Constrói um diagrama de Nyquist.
title('Resposta de Freqüência a Malha Aberta')
                                             % Adiciona uma legenda ao diagrama de Nyquist.
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G);                   % Obtém as margens de ganho e de fase
                                             % e as freqüências correspondentes.
'Margem de Ganho(dB); Margem de Fase(graus); freqüência de 180 graus (rad/s);'
'freqüência de 0 dB (rad/s)'                 % Exibe título.
margens=[20*log10(Gm),Pm,Wcg,Wcp]            % Exibe os dados de margens.
pause
```

cap10p4 (Exemplo 10.9) Podemos usar o MATLAB para determinar a faixa de valores de K para se ter estabilidade usando métodos de resposta de freqüência. Vejamos o Exemplo 10.9 no texto.

```
'(cap10p4) Exemplo 10.9'                     % Exibe título.
numg=1;                                      % Define o numerador de G(s).
deng=poly([-2 -4 -5]);                       % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G);                   % Obtém as margens de ganho e de fase
                                             % e as freqüências correspondentes.
K=Gm                                         % Mostra o valor de K para estabilidade.
pause
```

cap10p5 (Exemplo 10.11) Podemos usar o MATLAB para obter a resposta de freqüência a malha fechada. Vejamos o Exemplo 10.11 no texto.

```
'(cap10p5) Exemplo 10.11'                    % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=50;                                     % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -3 -6]);                        % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
'T(s)'                                       % Exibe título.
T=feedback(G,1)                              % Obtém e mostra a função de transferência
                                             % a malha fechada.
grid on                                      % Ativa a grade dos gráficos.
bode(T)                                      % Constrói um gráfico de Bode.
title('Resposta de Freqüência a Malha Fechada')
                                             % Adiciona uma legenda ao gráfico de Bode.
pause
nyquist(T)                                   % Constrói um gráfico de Nyquist.
title('Resposta de Freqüência a Malha Fechada')
                                             % Adiciona uma legenda ao gráfico de Nyquist.
pause
```

cap10p6 Podemos usar o MATLAB para plotar cartas de Nichols usando nichols(G), onde $G(s)$ = numg/deng e G é um objeto função de transferência LIT. A grade de Nichols pode ser adicionada usando o comando ngrid antes do comando nichols(G). Clicando com o botão direito do mouse sobre as curvas, podemos obter informações a respeito dos gráficos construídos através do comando nichols(G). Você pode descobrir a legenda da curva, bem como as coordenadas do ponto sobre o qual você clicou. Clicar com o botão direito do mouse realça e identifica a curva. Clicar com o botão direito do mouse sobre um ponto qualquer fora das curvas faz aparecer um menu.

Neste menu você pode selecionar (1) respostas do sistema a serem apresentadas na tela, (2) opções de ampliar ou reduzir (zoom) e (3) opção de incluir ou suprimir a grade a ser superposta. Construamos uma carta de Nichols de $G(s) = 1/[s(s+1)(s+2)]$.

```
'(cap10p6)'                                  % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=1;                                      % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -1 -2]);                        % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
grid on                                      % Ativa a grade do gráfico.
ngrid                                        % Adiciona a grade de Nichols.
nichols(G)                                   % Constrói um gráfico de Nichols.
pause
```

cap10p7 (Exemplo 10.15) Podemos usar o MATLAB e os métodos de resposta de freqüência para incluir um retardo na malha. O retardo é representado por [numd,dend] = pade[T,n], onde T é o retardo em segundos e n é a ordem. Valores mais elevados de n dão melhor aproximação para o retardo $G_d(s)$ = numd/dend. Como estamos construindo diversos gráficos, primeiro coletamos os dados a partir dos diagramas de Bode usando [mag,fase] = bode(G,w), onde w é especificada como uma faixa de valores de freqüência. Usamos então o comando genérico de plotar gráficos. Observe, também, os comandos utilizados para nomear os eixos e as curvas nos diagramas de Bode (veja o manual de instruções do MATLAB para detalhes). Vejamos o Exemplo 10.15 no texto.

```
'(cap10p7) Exemplo 10.15'                    % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
hold off                                     % Desativa a função hold.
numg=1;                                      % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -1 -10]);                       % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
w=0.01:0.1:10;                               % Faz 0,01<w<10 em incrementos de 0,1.
[magg,faseg]=bode(G,w);                      % Coleta dados dos diagramas de Bode de G(s).
[numd,dend]=pade(1,6);                       % Representa o retardo.
Gd=tf(numd,dend);                            % Cria e mostra o retardo,
                                             % Gd(s).
[magd,fased]=bode(Gd,w);                     % Coleta dados dos diagramas de Bode de Gd(s).
Ge=Gd*G;                                     % Forma Gd(s)G(s).
[mage,phasee]=bode(Ge,w)                     % Coleta dados dos diagramas de Bode de
                                             % Gd(s)G(s).
subplot(2,1,1)                               % Subdivide a área para plotar o gráfico 1.
semilogx(w,20*log10(mage(:,:)))              % Plota a curva de magnitude.
grid on                                      % Ativa a grade para o gráfico de magnitude.
axis([0.01,10,-80,20])                       % Limita os eixos do gráfico de Bode.
title('Magnitude da Resposta com Retardo')   % Adiciona legenda à resposta em magnitude.
xlabel('Freqüência (rad/s)')                 % Rotula o eixo x da magnitude
                                             % da resposta.
ylabel('20log M')                            % Rotula o eixo y axis da magnitude.
subplot(2,1,2)                               % Subdivide a área do gráfico para o gráfico 2.
semilogx(w,faseg(:,:),w,fased(:,:),w,fasee(:,:))
                                             % Plota as curvas de fase de G(s),
                                             % Gd(s) e G(s)Gd(s) em um único gráfico.
grid on                                      % Ativa a grade para o gráfico de fase.
axis([0.01,10,-900,0])                       % Limita os eixos do gráfico de Bode.
title('Resposta de Fase com Retardo')        % Adiciona legenda à curva de fase.
xlabel('Freqüência (rad/s)')                 % Rotula o eixo x da resposta de fase.
ylabel('Fase (graus)')                       % Rotula o eixo y axis da resposta de fase.
text(1.5,-50,'Retardo')                      % Gera dístico para identificar a curva de
                                             % retardo.
text(4,-150,'Sistema')                       % Gera dístico para identificar a curva
                                             % Sistema.
text(2.7,-300,'Total')                       % Gera dístico para identificar a curva Total.
pause
```

cap10p8 (Exemplo 10.18) Podemos usar o MATLAB e os métodos de resposta de freqüência para determinar experimentalmente uma função de transferência a partir dos dados de resposta de freqüência. Determinando as respostas de transferência de componentes simples e subtraindo sucessivamente suas respostas de freqüência, podemos aproximar a resposta de freqüência completa. Vejamos o Exemplo 10.18 no texto e utilizemos o MATLAB para uma parte do problema. Para praticar, você pode completar o programa. Neste problema, iremos gerar o gráfico original da resposta de freqüência por intermédio da função de transferência. Normalmente, os dados do gráfico da resposta de freqüência original estariam sob forma de tabela e o programa começaria na etapa: [MO,PO] = bode(GO,w), onde se geram os dados tabulares. Em outras palavras, em uma aplicação real, os dados consistiriam nos vetores coluna MO, PO e w'.

```
'(cap10p8) Exemplo 10.18'                    % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
hold off                                     % Desativa a função hold que retém gráfico
                                             % na tela.
% Gera os gráficos de Bode experimentais para G0(s)=numg0/deng0 i.e.
% M0,P0.
numg0=70*[1 20];                             % Define o numerador de G0(s).
deng0=conv([1 7],[1 2 25]);                  % Define parcialmente o denominador de
                                             % G0(s).
deng0=conv(deng0,[1 70]);                    % Completa o denominador de G0(s).
G0=tf(numg0,deng0);                          % Cria G0(s).
w=1:0.5:1000;                                % Faz 1<w<1000 em incrementos de 0,5.
[M0,P0]=bode(G0,w);                          % Gera tabela dos dados.
[20*log10(M0(:,:))',P0(:,:)',w'];            % Converte os dados de magnitude em dB.
grid on                                      % Ativa a grade para o gráfico de Bode.
bode(G0,w)                                   % Gera um gráfico de Bode.
title('Experimental')                        % Adiciona uma legenda.
pause
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
% Estima uma parte componente da função de transferência como
% G1(s)=25/(s^2+2*0,22*5s+5^2) e a subtrai da resposta
% de freqüência experimental.
numg1=5^2;                                   % Define o numerador de G1(s).
deng1=[1 2*0.22*5 5^2];                      % Define o denominador de G1(s).
'Primeira estimativa'                        % Exibe título.
G1=tf(numg1,deng1)                           % Cria e mostra G1(s).
[M1,P1]=bode(G1,w);                          % Gera os dados de Bode para G1(s).
M2=20*log10(M0(:,:))-20*log10(M1(:,:));      % Subtrai os dados de Bode da magnitude de G1
                                             % dos dados originais de magnitude .
P2=P0(:,:)-P1(:,:);                          % Subtrai os dados de fase do diagrama de Bode
                                             % de G1 dos
                                             % dados de fase originais.
subplot(2,1,1)                               % Divide a área do gráfico em duas para o
                                             % gráfico de magnitude.
semilogx(w(:,:),M2)                          % Traça a resposta de magnitude depois da
                                             % subtração.
grid on                                      % Ativa a grade para o gráfico de magnitude.
xlabel('Freqüência (rad/sec)')               % Nomeia o eixo x.
ylabel('Gain dB')                            % Nomeia o eixo y.
subplot(2,1,2)                               % Divide a área do gráfico em duas para o
                                             % gráfico de fase.
semilogx(w,P2)                               % Traça a resposta de magnitude depois da
                                             % subtração.
grid on                                      % Ativa a grade para o gráfico de fase.
title('Experimental Menos 25/(s^2+2*0,22*5s+5^2)')
                                             % Adiciona legenda.
xlabel('Freqüência (rad/sec)')               % Nomeia o eixo x.
ylabel('Fase (graus)')                       % Nomeia o eixo y.
'Isto completa uma parte do Exemplo 10.18.'
'O leitor deve continuar o programa para praticar.'
pause
```

Capítulo 11: Projeto via Resposta de Freqüência

cap11p1 (Exemplo 11.1) Podemos projetar o ajuste de ganho sobre os diagramas de Bode usando o MATLAB. Você entrará, via teclado, com o valor desejado de ultrapassagem percentual. O MATLAB calculará a margem de fase necessária e então buscará os diagramas de Bode que atendem essa margem de fase. A magnitude na freqüência de margem de fase é o inverso do valor necessário do ganho. O MATLAB plotará então a resposta ao degrau correspondente a esse ganho. Vejamos o Exemplo 11.1 no texto.

```
'(cap11p1) Exemplo 11.1'                     % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=[100];                                  % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -36 -100]);                     % Define o denominador de G(s).
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
up=input('Digite %UP ');                     % Entre com o valor desejado de ultrapassagem
                                             % percentual.
z=(-log(up/100))/(sqrt(pi^2+log(up/100)^2));
                                             % Calcula a relação de amortecimento
                                             % necessária.
Pm=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi);
                                             % Calcula a margem de fase necessária.
w=0.01:0.01:1000;                            % Ajusta a faixa de freqüências de 0,01 a
                                             % 1000 em incrementos de 0,01.
[M,P]=bode(G,w);                             % Coleta os dados de Bode.
Ph=-180+Pm;                                  % Calcula o ângulo de fase necessário.
for k=1:1:length(P);                         % Busca nos dados de Bode o ângulo de fase
```



```
if P(k)-Ph<=0;                               % necessário.
                                             % Se o ângulo de fase requerido for encontrado,
                                             % obter o valor da
M=M(k);                                      % magnitude na mesma freqüência.
'Valor requerido de K'                       % Exibe título.
K=1/M                                        % Calcula o ganho requerido.
break                                        % Interrompe o laço.
end                                          % Fim de if.
end                                          % Fim de for.
T=feedback(K*G,1);                           % Obtém T(s) usando o valor calculado de K.
step(T)                                      % Gera uma resposta ao degrau.
title(['Resposta ao Degrau a Malha Fechada para K= ',num2str(K)])
                                             % Adiciona legenda à resposta ao degrau.
pause
```

cap11p2 (Exemplo 11.2) Usemos o MATLAB para projetar um compensador de atraso de fase. O programa resolve o Exemplo 11.2 no texto e segue a mesma técnica de projeto mostrada nesse exemplo. Você entrará com o valor do ganho para atender os requisitos de erro de estado estacionário seguido do valor da ultrapassagem percentual desejada. O MATLAB projeta, então, um compensador por atraso de fase, calcula K_v e gera a resposta a malha fechada para uma entrada em degrau.

```
'(cap11p2) Exemplo 11.2'                     % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
K=input('Digite o valor de K para atender os requisitos de erro de estado estacionário ');
                                             % Entre com o valor de K.
up=input('Digite %UP ');                     % Entra com o valor desejado de ultrapassagem
                                             % percentual.
numg=[100*K];                                % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -36 -100]);                     % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                       % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                              % Cria e mostra G(s).
z=(-log(up/100))/(sqrt(pi^2+log(up/100)^2));
                                             % Calcula a relação de amortecimento
                                             % necessária.
Pm=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi)+10;
                                             % Calcula a margem de fase necessária.
w=0.01:0.01:100;                             % Ajusta a faixa de valores de freqüência
                                             % de 0,01 a 1000 em incrementos de 0,01.
[M,P]=bode(G,w);                             % Coleta os dados de Bode.
Ph=-180+Pm;                                  % Calcula o ângulo de fase necessário.
for k=1:1:length(P);                         % Procura nos dados de Bode o ângulo
                                             % de fase necessário.
if P(k)-Ph<=0;                               % Se o ângulo de fase necessário for
                                             % encontrado,
                                             % obter o valor da
M=M(k);                                      % magnitude na mesma freqüência.
wf=w(k);                                     % Nesta freqüência o gráfico de magnitude
                                             % deve interceptar a linha de 0 dB.
break                                        % Interrompe o laço.
end                                          % Fim de if.
end                                          % Fim de for.
wh=wf/10;                                    % Calcula o ponto de quebra de altas
                                             % freqüências do compensador por atraso
                                             % de fase.
wl=(wh/M);                                   % Calcula o ponto de quebra de baixas
                                             % freqüências do compensador por atraso de
                                             % fase; obtido com base nos requisitos de
                                             % ganho de altas e baixas freqüências do
                                             % compensador por atraso de fase,
                                             % Gc(s)=Kc(s+wh)/(s+wl).
                                             % Para valores baixos de w, ganho=1. Assim,
                                             % Kc*wh/wl=1.
                                             % Para valores altos de w, ganho=1/M. Assim
                                             % Kc=1/M. Portanto
                                             % Kc=wl/wh=1/M ou wl=wh/M.
numc=[1 wh];                                 % Gera o numerador do
                                             % compensador por atraso de fase, Gc(s).
denc=[1 wl];                                 % Gera o denominador do
                                             % compensador por atraso de fase, Gc(s).
Kc=wl/wh;                                    % Gera K para Gc(s).
'Compensador por Atraso de Fase'             % Exibe título.
Kc                                           % Exibe K do compensador por atraso de fase.
'Gc(s)'                                      % Exibe título.
Gc=tf(Kc*numc,denc)                          % Cria e mostra Gc(s).
'Gc(s)G(s)'                                  % Exibe título.
GcG=Gc*G                                     % Cria e mostra Gc(s)G(s).
s=tf([1 0],1);                               % Cria a função de transferência, 's'.
sGcG=s*GcG;                                  % Cria sGc(s)G(s).
```

```
sGcG=minreal(sGcG);                    % Cancela os termos comuns.
Kv=dcgain(sGcG)                        % Calcula Kv.
T=feedback(GcG,1);                     % Cria T(s).
step(T)                                % Gera uma resposta a malha fechada do sistema
                                       % a malha fechada, compensado por atraso de
                                       % fase,
                                       % para uma entrada em degrau.
title('Resposta ao Degrau do Sistema a Malha Fechada com um compensador por Atraso de Fase')
                                       % Adiciona legenda à resposta ao degrau.
pause
```

cap11p3 (Exemplo 11.3) Usemos o MATLAB para projetar um compensador de avanço de fase. O programa resolve o Exemplo 11.3 no texto e segue a mesma técnica de projeto mostrada nesse exemplo. Você entrará com os valores de ultrapassagem percentual, do instante de pico e K_v. O MATLAB, usando diagramas de Bode, projeta então um compensador por avanço de fase, calcula K_v e gera a resposta a malha fechada para uma entrada em degrau.

```
'(cap11p3) Exemplo 11.3'               % Exibe título.
up=input('Digite %UP ');               % Entra com o valor desejado de ultrapassagem
                                       % percentual.
Tp=input('Digite o instante de pico');  % Entre com o valor do instante de pico
                                       % desejado.
Kv=input('Digite o valor de Kv');      % Entre com o valor de Kv.
numg=[100];                            % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -36 -100]);               % Define o denominador de G(s).
G=tf(numg,deng);                       % Cria G(s).
s=tf([1 0],1);                         % Cria a função de transferência,'s'.
sG=s*G;                                % Cria sG(s).
sG=minreal(sG);                        % Cancela os fatores comuns.
K=dcgain(Kv/sG);                       % Calcula K.
'G(s)'                                 % Exibe título.
G=zpk(K*G)                             % Põe K em G(s), converte para a
                                       % forma fatorada, e mostra na tela.
z=(-log(up/100))/(sqrt(pi^2+log(up/100)^2));
                                       % Calcula a relação de amortecimento requerida.
Pm=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi);
                                       % Calcula a margem de fase necessária.
wn=pi/(Tp*sqrt(1-z^2));                % Calcula a freqüência natural
                                       % necessária.
wBW=wn*sqrt((1-2*z^2)+sqrt(4*z^4-4*z^2+2));
                                       % Determine a faixa passante requerida.
w=0.01:0.5:1000;                       % Define a faixa de freqüência de 0,01 a
                                       % 1000 em incrementos de 0,5
[M,P]=bode(G,w);                       % Coleta os dados de Bode.
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G);             % Obtém a margem de fase corrente.
Pmreq=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi);
                                       % Calcula a margem de fase requerida.
Pmreqc=Pmreq+10;                       % Adiciona um fator de correção
                                       % de 10 graus.
Pc=Pmreqc-Pm;                          % Calcula a contribuição de fase
                                       % requerida do compensador por avanço de fase.
% Projete o compensador por avanço de fase.
beta=(1-sin(Pc*pi/180))/(1+sin(Pc*pi/180));
                                       % Obtém o compensador beta.
magpc=1/sqrt(beta);                    % Obtém o pico de magnitude do compensador.
for k=1:1:length(M);                   % Obtém a freqüência na qual
                                       % o sistema sem compensação possui uma
                                       % magnitude de 1/magpc.
                                       % Esta freqüência será a nova
                                       % freqüência de margem de fase.
if M(k)-(1/magpc)<=0;                  % Procura o pico de magnitude.
wmax=w(k);                             % Esta é a freqüência na qual ocorre
                                       % o pico de magnitude.
break                                  % Interrompe o laço.
end                                    % Fim de if.
end                                    % Fim de for.
% Calcula o zero, o pólo e o ganho do compensador por avanço de fase.
zc=wmax*sqrt(beta);                    % Calcula a freqüência de corte inferior
                                       % do compensador por avanço de fase.
pc=zc/beta;                            % Calcula a freqüência de corte superior
                                       % do compensador por avanço de fase.
Kc=1/beta;                             % Calcula o ganho
                                       % do compensador por avanço de fase.
'Gc(s)'                                % Exibe título.
Gc=tf(Kc*[1 zc],[1 pc]);               % Cria Gc(s).
Gc=zpk(Gc)                             % Converte Gc(s) para a forma fatorada e
                                       % mostra o resultado.
'Ge(s)=G(s)Gc(s)'                      % Exibe título.
```



```
Ge=G*Gc                                % Forma Ge(s)=Gc(s)G(s).
sGe=s*Ge;                              % Cria sGe(s).
sGe=minreal(sGe);                      % Cancela os fatores comuns.
Kv=dcgain(sGe)                         % Calcula Kv.
T=feedback(Ge,1);                      % Obtém T(s).
step(T)                                % Gera a resposta ao degrau do sistema a
                                       % malha fechada
                                       % compensado por avanço de fase.
title('Resposta ao Degrau do Sistema Compensado por Avanço de Fase')
                                       % Adiciona legenda à resposta ao degrau do
                                       % sistema
                                       % compensado por avanço de fase.
pause
```

cap11p4 (Exemplo 11.4) Usemos o MATLAB para projetar um compensador de atraso e avanço de fase. O programa resolve o Exemplo 11.4 no texto e segue a mesma técnica de projeto mostrada nesse exemplo. Você entrará com os valores de ultrapassagem percentual, do instante de pico e K_v. O MATLAB, usando diagramas de Bode, projeta então um compensador de atraso e avanço de fase, calcula K_v e gera a resposta a malha fechada para uma entrada em degrau.

```
'(cap11p4) Exemplo 11.4'               % Exibe título.
up=input('Digite o valor de %UP');     % Entra com o valor desejado de ultrapassagem
                                       % percentual.
Tp=input('Digite o instante de pico');
                                       % Entra com o valor desejado do instante de
                                       % pico.
Kv=input('Digite o valor de Kv ');     % Entra com o valor desejado de Kv.
numg=[1];                              % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -1 -4]);                  % Define o denominador de G(s).
G=tf(numg,deng);                       % Cria G(s) sem K.
s=tf([1 0],1);                         % Cria a função de transferência, 's'.
sG=s*G;                                % Cria sG(s).
sG=minreal(sG);                        % Cancela os fatores comuns.
K=dcgain(Kv/sG);                       % Calcula o valor de K.
'G(s)'                                 % Exibe título.
G=tf(K*numg,deng);                     % Põe K em G(s).
G=zpk(G)                               % Converte G(s) para a forma fatorada
                                       % e mostra o resultado.
z=(-log(up/100))/(sqrt(pi^2+log(up/100)^2));
                                       % Calcula a relação de amortecimento
                                       % necessária.
Pmreq=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi)+5;
                                       % Calcula a margem de fase necessária.
wn=pi/(Tp*sqrt(1-z^2));                % Calcula a freqüência natural
                                       % necessária.
wBW=wn*sqrt((1-2*z^2)+sqrt(4*z^4-4*z^2+2));
                                       % Determina a faixa passante necessária.
wpm=0.8*wBW;                           % Escolhe a nova freqüência de margem de fase.
[M,P]=bode(G,wpm);                     % Obtém os dados de Bode.
Pmreqc=Pmreq-(180+P);                  % Determina a contribuição de fase requerida
                                       % do compensador por avanço de fase.
beta=(1-sin(Pmreqc*pi/180))/(1+sin(Pmreqc*pi/180));
                                       % Obtém beta.
                                       % Projeta o zero, o pólo e o ganho
                                       % do compensador por atraso de fase.
zc_atraso=wpm/10;                      % Calcula o zero do compensador por atraso
                                       % de fase.
pc_atraso=zc_atraso*beta;              % Calcula o pólo do compensador por atraso
                                       % de fase.
Kc_atraso=beta;                        % Calcula o ganho do compensador por atraso
                                       % de fase.
'Compensador por Atraso de Fase, G_atraso(s)'
                                       % Exibe título.
G_atraso=tf(Kc_atraso*[1 zc_atraso],[1 pc_atraso]);
                                       % Cria o compensador por atraso de fase.
G_atraso=zpk(G_atraso)                 % Converte G_atraso(s) para a forma fatorada
                                       % e mostra o resultado.
                                       % Projeta o zero, o pólo e o ganho
                                       % do compensador por atraso de fase.
zc_avan=wpm*sqrt(beta);                % Calcula o zero do compensador por avanço
                                       % de fase.
pc_avan=zc_avan/beta;                  % Calcula o pólo do compensador por avanço
                                       % de fase.
Kc_avan=1/beta;                        % Calcula o ganho do compensador por avanço
                                       % de fase.
'Compensador por Avanço de Fase'       % Exibe título.
```

```
G_avan=tf(Kc_avan*[1 zc_avan],[1 pc_avan]);
                                        % Cria o compensador por avanço de fase.
G_avan=zpk(G_avan)                      % Converte G_avan(s) para a forma fatorada
                                        % e mostra o resultado.
'Ge(s) Compensada por Atraso e Avanço de Fase'
                                        % Exibe título.
Ge=G*G_atraso*G_avan                    % Cria o sistema compensado,
                                        % Ge(s)=G(s)G_atraso(s)G_avan(s).
sGe=s*Ge;                               % Cria sGe(s).
sGe=minreal(sGe);                       % Cancela os fatores comuns.
Kv=dcgain(sGe)                          % Calcula Kv
T=feedback(Ge,1);                       % Obtém T(s).
step(T)                                 % Gera a resposta ao degrau do sistema a malha
                                        % fechada
                                        % compensado por atraso e avanço de fase.
title('Resposta ao Degrau do Sistema Compensado por Atraso e Avanço de Fase')
                                        % Adiciona legenda à resposta ao degrau
                                        % do sistema compensado por atraso e avanço
                                        % de fase.
pause
```

Capítulo 12: Projeto via Espaço de Estados

cap12p1 (Exemplo 12.1) Podemos usar o MATLAB para projetar os ganhos do controlador através da alocação de pólos. Você deverá entrar com os valores desejados de ultrapassagem percentual e de tempo de assentamento. Apresentamos os seguintes comandos: `[num,den] = ord2(wn,z)`, que produz um sistema de segunda ordem, dados os valores de freqüência natural (`wn`) e de relação de amortecimento (`z`). Em seguida usamos o denominador (`den`) para especificar os pólos dominantes; e `K = acker(A,B,polos)`, que calcula os ganhos do controlador a partir da matriz de sistema (`A`), da matriz de entrada (`B`) e dos pólos desejados (`polos`). Vejamos o Exemplo 12.1 no texto.

```
'(cap12p1) Exemplo 12.1'                % Exibe título.
clf                                     % Apaga gráficos existentes na tela.
numg=20*[1 5];                          % Define o numerador de G(s).
deng=poly([0 -1 -4]);                   % Define o denominador de G(s).
' G(s) sem Compensação'                 % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                         % Cria e mostra G(s).
up=input('Digite o valor desejado de %UP');  % Entra com o valor desejado de ultrapassagem
                                        % percentual.
Ts=input('Digite o valor desejado de tempo de assentamento');
                                        % Entra com o valor desejado de tempo de
                                        % assentamento.
z=(-log(up/100))/(sqrt(pi^2+log(up/100)^2));
                                        % Calcula o valor necessário da relação de
                                        % amortecimento.
wn=4/(z*Ts);                            % Calcula o valor necessário da freqüência
                                        % natural.
[num,den]=ord2(wn,z);                   % Produz um sistema de segunda ordem que
                                        % atende os requisitos
                                        % da resposta transitória.
r=roots(den);                           % Usa o denominador para especificar
                                        % os pólos dominantes.
polos=[r(1) r(2) -5.1];                 % Especifica a posição de
                                        % todos os pólos.
eq_caracteristica_desejada=poly(polos)  % Forma o polinômio característico
                                        % desejado para mostrar na tela.
[Ac Bc Cc Dc]=tf2ss(numg,deng);         % Obtém a representação de G(s) no espaço
                                        % de estados na forma canônica do controlador.
P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0];                  % Matriz de Transformação da forma
                                        % canônica do controlador para
                                        % a forma em variáveis de fase.
Af=inv(P)*Ac*P;                         % Transforma Ac em Af
                                        % com variáveis de fase.
Bf=inv(P)*Bc;                           % Transforma Bc em Bf
                                        % com variáveis de fase.
Cf=Cc*P;                                % Transforma Cc em Cf
                                        % com variáveis de fase.
Df=Dc;                                  % Transforma Dc em Df
                                        % com variáveis de fase.
Kf=acker(Af,Bf,polos)                   % Calcula os ganhos do controlador na
                                        % representação em variáveis de fase.
Afnova=Af-Bf*Kf;                        % Forma a matriz A compensada.
Bfnova=Bf;                              % Forma a matriz B compensada.
Cfnova=Cp;                              % Forma a matriz C compensada.
Dfnova=Dp;                              % Forma a matriz D compensada.
[numt,dent]=ss2tf(Afnova,Bfnova,Cfnova,Dfnova);
                                        % Forma o numerador e o
                                        % denominador de T(s).
'T(s)'                                  % Exibe título.
T=tf(numt,dent)                         % Cria e mostra T(s).
polos=roots(dent)                       % Exibe os pólos de T(s).
Tss=ss(Apnew,Bpnew,Cpnew,Dpnew)         % Cria e mostra Tss, um objeto LIT
                                        % no espaço de estados.
step(Tss)                               % Produz a resposta ao degrau do sistema
                                        % compensado.
title('Resposta ao Degrau do Sistema Compensado')
                                        % Adiciona legenda à resposta ao degrau
                                        % do sistema compensado.
pause
```


cap12p2 (Exemplo 12.2) Podemos testar a controlabilidade usando o comando do MATLAB `Cm = ctrb(A,B)` para determinar a matriz de controlabilidade dadas a matriz de sistema (`A`) e a matriz de entrada (`B`). Este comando é seguido da instrução `rank(Cm)` para testar o posto da matriz de controlabilidade (`Cm`). Apliquemos os comandos ao Exemplo 12.2.

```
'(cap12p2) Exemplo 12.2'                % Exibe título.
A=[-1 1 0;0 -1 0;0 0 -2]                 % Define a matriz A compensada.
B=[0;1;1]                               % Define a matriz B compensada.
Cm=ctrb(A,B)                            % Calcula a matriz de controlabilidade .
Posto=rank(Cm)                          % Determina o posto
                                        % matriz de controlabilidade.
pause
```

cap12p3 (Exemplo 12.4) Se projetarmos os ganhos do controlador usando o MATLAB, não será necessário converter o modelo para a representação com variáveis de fase. O MATLAB nos dará os ganhos do controlador para qualquer representação no espaço de estados usada como entrada. Vejamos o Exemplo 12.4 no texto.

```
'(cap12p3) Exemplo 12.4'                % Exibe título.
clf                                     % Apaga gráficos existentes na tela.
A=[-5 1 0;0 -2 1;0 0 -1];                % Define a matriz de sistema A.
B=[0;0;1];                              % Define a matriz de entrada B.
C=[-1 1 0];                             % Define a matriz de saída C.
D=0;                                    % Define a matriz D.
up=input('Digite o valor desejado de %UP ');
                                        % Entre com o valor desejado de ultrapassagem
                                        % percentual.
Ts=input('Digite o valor desejado do tempo de assentamento ');
                                        % Entre o valor desejado do tempo de
                                        % assentamento.
z=(-log(up/100))/(sqrt(pi^2+log(up/100)^2));
                                        % Calcula a relação de amortecimento
                                        % necessária.
wn=4/(z*Ts);                            % Calcula a freqüência natural
                                        % necessária.
[num,den]=ord2(wn,z);                   % Produz um sistema de segunda ordem
                                        % que atende os requisitos da resposta
                                        % transitória.
r=roots(den);                           % Use o denominador para especificar
                                        % os pólos dominantes.
polos=[r(1) r(2) -4];                   % Especifica a localização de
                                        % todos os pólos.
K=acker(A,B,polos)                      % Calcula os ganhos do controlador.
Anova=A-B*K;                            % Forma a matriz compensada A.
Bnova=B;                                % Forma a matriz compensada B.
Cnova=C;                                % Forma a matriz compensada C.
Dnova=D;                                % Forma a matriz compensada D.
Tss=ss(Anova,Bnova,Cnova,Dnova);        % Forma um objeto LIT no espaço de estados.
'T(s)'                                  % Exibe título.
T=tf(Tss);                              % Cria T(s).
T=minreal(T)                            % Cancela os termos comuns
                                        % e mostra T(s).
polos=pole(T)                           % Mostra os pólos de T(s).
step(Tss)                               % Produz a resposta ao degrau do sistema
                                        % compensado.
title('Resposta ao Degrau do Sistema Compensado')
                                        % Adiciona legenda à resposta ao degrau
                                        % do sistema compensado.
pause
```

cap12p4 (Exemplo 12.5) Podemos projetar os ganhos de um observador usando o comando `l = acker(A',C',polos)'`. Observe que usamos as transpostas das matrizes de sistema (`A`) e de saída (`C`) juntamente com os pólos desejados (`polos`). Vejamos o Exemplo 12.5 no texto.

```
'(cap12p4) Exemplo 12.5'                    % Exibe título.
numg=[1 4];                                 % Define o numerador de G(s).
deng=poly([-1 -2 -5]);                      % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                      % Exibe título.
G=tf(numg,deng)                             % Cria e mostra G(s).
[Ac,Bc,Cc,Dc]=tf2ss(numg,deng);             % Transforma G(s) na forma canônica do
                                            % controlador, no espaço de estados.
Ao=Ac';                                     % Transforma Ac na forma
                                            % canônica do observador, Ao.
Bo=Cc';                                     % Transforma Bc na forma
                                            % canônica do observador, Bo.
Co=Bc';                                     % Transforma Cc na forma
                                            % canônica do observador, Co.
Do=Dc;                                      % Transforma Dc na forma
                                            % canônica do observador, Do.
r=roots([1 2 5])                            % Obtém os pólos do sistema compensado
                                            % pelo controlador.
polos=10*[r' 10*real(r(1))]                 % Torna os pólos do observador 10x maiores.
lp=acker(Ao',Co',poles)'                    % Obtém os ganhos do observador na
                                            % forma canônica do observador.
pause
```

cap12p5 (Exemplo 12.6) Podemos testar a observabilidade usando o comando do MATLAB `Om = obsv(A,C)` para determinar a matriz de observabilidade dadas a matriz de sistema (`A`) e a matriz de saída (`C`). Este comando é seguido da instrução `rank(Om)` para testar o posto da matriz de observabilidade (`Om`). Apliquemos os comandos ao Exemplo 12.6.

```
'(cap12p5) Exemplo 12.6'                    % Exibe título.
A=[0 1 0;0 0 1;-4 -3 -2]                    % Define a matriz compensada A.
C=[0 5 1]                                   % Define a matriz compensada C.
Om=obsv(A,C)                                % Forma a matriz de observabilidade.
Posto=rank(Om)                              % Determina o posto da matriz de
                                            % observabilidade.
pause
```

cap12p6 (Exemplo 12.8) Podemos projetar os ganhos do observador usando o comando `l = acker(A',C',polos)'` sem converter o modelo do processo na forma canônica de observador. Vejamos o Exemplo 12.8 do texto.

```
'(cap12p6) Exemplo 12.8'                    % Exibe título.
A=[-5 1 0;0 -2 1;0 0 -1];                   % Define a matriz de sistema A.
B=[0;0;1];                                  % Define a matriz de entrada B.
C=[1 0 0];                                  % Define a matriz de saída C.
D=0;                                        % Define a matriz D.
polos=roots([1 120 2500 50000])             % Especifica a localização de
                                            % todos os pólos.
l=acker(A',C',polos)'                       % Calcula os ganhos do observador.
pause
```

Capítulo 13: Sistemas de Controle Digital

cap13p1 (Exemplo 13.4) Podemos converter $G_1(s)$ em cascata com um extrapolador de ordem zero (z.o.h.)[4] em $G(z)$ usando o comando do MATLAB `G = c2d(G1,T,'zoh')`, onde `G1` é um objeto de sistema contínuo LIT e `G` é um objeto de sistema amostrado LIT. `T` é o intervalo de amostragem e `'zoh'` é um método de transformação que supõe $G_1(s)$ em cascata com um z.o.h. Colocamos simplesmente $G_1(s)$ no comando (o z.o.h. é levado em conta automaticamente) e o comando retorna $G(z)$. Apliquemos o conceito ao Exemplo 13.4. Você entrará com o valor de `T` através do teclado.

```
'(cap13p1) Exemplo 13.4'                    % Exibe título.
T=input('Digite o valor de T ');            % Entra com o intervalo de amostragem.
numg1s=[1 2];                               % Define o numerador de G1(s).
deng1s=[1 1];                               % Define o denominador de G1(s).
'G1(s)'                                     % Exibe título.
G1=tf(numg1s,deng1s)                        % Cria e mostra G1(s).
'G(z)'                                      % Exibe título.
G=c2d(G1,T,'zoh')                           % Converte G1(s) em cascata com
                                            % um z.o.h. em G(z) e mostra o resultado.
pause
```

[4]Do inglês *zero order hold*. (N.T.)

cap13p2 Também podemos utilizar o MATLAB para converter $G(s)$ em $G(z)$ quando $G(s)$ não está em cascata com um z.o.h. O comando `H = c2d(F,T,'zoh')` transforma $F(s)$ em cascata com um z.o.h. em $H(z)$, onde $H(z) = ((z-1)/z)*Z\{F(s)/s\}$. Se fizermos $F(s) = sG(s)$, o comando resolve $H(z)$, onde $H(z) = ((z-1)/z)*Z\{G(s)\}$. Portanto, $z\{G(s)\} = (z/[z-1])*H(z)$. Em resumo, entre com $F(s) = sG(s)$ e multiplique o resultado de `H = c2d(F,T,'zoh')` por $(z/[z-1])$. Este processo é equivalente a obter a transformada z. Convertemos $G(s) = (s+3)/(s^2+6s+13)$ em $G(z)$. Entraremos com o valor de `T`, intervalo de amostragem, via teclado. `T` é usado para formar $H(z)$. Usamos um intervalo de amostragem não especificado, `T = []`, para formar $z/(z-1)$.

```
'(cap13p2)'                                 % Exibe título.
T=input('Digite o valor de T');             % Entra com o intervalo de amostragem.
numgs=[1 3];                                % Define o numerador de G(s).
dengs=[1 6 13];                             % Define o denominador de G(s).
'G(s)'                                      % Exibe título.
Gs=tf(numgs,dengs)                          % Cria e mostra G(s).
Fs=Gs*tf([1 0],1);                          % Cria F(s)=sG(s).
Fs=minreal(Fs);                             % Cancela pólos e zeros comuns.
Hz=c2d(Fs,T,'zoh');                         % Converte F(s) em H(z) supondo
                                            % a presença de um z.o.h.
Gz=Hz*tf([1 0],[1 -1],[]);                  % Forma G(z)=H(z)*z/(z-1).
'G(z)'                                      % Exibe título.
Gz=minreal(Gz)                              % Cancela pólos e zeros comuns.
pause
```

cap13p3 Criando Funções de Transferência Digitais Diretamente
Método Vetorial, Forma Polinomial:
Uma função de transferência digital pode ser expressa como um polinômio em numerador dividido por um polinômio em denominador, isto é, $F(z) = N(z)/D(z)$. O numerador, $N(z)$, é representado por um vetor, `numf`, que contém os coeficientes de $N(z)$. De modo semelhante, o denominador, $D(z)$, é representado por um vetor, `denf`, que contém os coeficientes de $D(z)$. Formamos $F(z)$ com o comando `F = tf(numf,denf,T)`, onde `T` é o intervalo de amostragem. `F` é chamado um objeto linear e invariante no tempo (LIT). Este objeto, ou a função de transferência, podem ser usados com entidade em outras operações, como adição ou multiplicação. Mostramos isto com $F(z) = 150(z^2 + 2z + 7)/(z^2 - 0{,}3z + 0{,}02)$. Usamos um intervalo de amostragem não especificado, `T = []`. Observe que depois de executar o comando `tf` o MATLAB imprime na tela a função de transferência.

Método Vetorial, Forma Fatorada:
Também podemos criar funções de transferência digitais LIT se o numerador e o denominador estiverem representados na forma fatorada. Fazemos isto usando os vetores que contêm as raízes do numerador e do denominador. Assim, $G(z) = K*N(z)/D(z)$ pode ser expresso como um objeto LIT usando o comando `G = zpk(numg,deng,K,T)`, onde `numg` é um vetor contendo as raízes de $N(z)$ e `deng` é um vetor contendo as raízes de $D(z)$, `K` é o ganho e `T` é o intervalo de amostragem. A expressão `zpk` significa zeros (raízes do numerador), pólos (raízes do denominador) e ganho, `K`. Mostramos isto com $G(z) = 20(z+2)(z+4)/[(z-0{,}5)(z-0{,}7)(z-0{,}8)]$ e um intervalo de amostragem não especificado. Observe que ao executar o comando `zpk`, o MATLAB imprime na tela a função de transferência.

Método da Expressão Racional em z, Forma Polinomial
(Requer a Control Systems Toolbox 4.2):
Este método permite que você digite a função de transferência como a escreveria normalmente. A instrução `z = tf('z')` deve preceder a função de transferência se você quiser criar uma função de transferência LIT na forma polinomial equivalente usando `G = tf(numg,deng,T)`.

Método da Expressão Racional em z, Forma Fatorada
(Requer a Control Systems Toolbox 4.2):
Este método permite que você digite a função de transferência como a escreveria normalmente. A instrução `z = zpk('z')` deve preceder a função de transferência se você quiser criar uma função de transferência LIT na forma fatorada equivalente usando `G = zpk(numg,deng,K,T)`.

Em ambos os métodos da expressão racional a função de transferência pode ser digitada sob qualquer forma, independentemente de se usar `z = tf('z')` ou `z = zpk('z')`. A diferença está na função de transferência LIT criada. Usamos os mesmos exemplos anteriores para demonstrar os métodos da expressão racional em z.

```
'(cap13p3)'                                 % Exibe título.
'Método Vetorial, Forma Polinomial'         % Exibe título.
numf=150*[1 2 7]                            % Armazena 150(z^2+2z+7) em numf e
                                            % mostra o resultado na tela.
denf=[1 -0.3 0.02 ]                         % Armazena (z^2-0.3z+0.02) em denf e
                                            % mostra o resultado na tela.
'F(z)'                                      % Exibe título.
```

```
F=tf(numf,denf,[])                          % Cria e mostra F(z).
clear                                       % Apaga variáveis anteriores da área de
                                            % trabalho.
'Método Vetorial, Forma Fatorada'           % Exibe título.
numg=[-2 -4]                                % Armazena (s+2)(s+4) em numg e
                                            % mostra o resultado na tela.
deng=[0.5 0.7 0.8]                          % Armazena (s-0.5)(s-0.7)(s-0.8) em deng e
                                            % mostra o resultado na tela.
K=20                                        % Define K.
'G(z)'                                      % Exibe título.
G=zpk(numg,deng,K,[])                       % Cria e mostra G(z).
clear                                       % Apaga variáveis anteriores da área de
                                            % trabalho.
'Método da Expressão Racional, Forma Polinomial'
                                            % Exibe título.
z=tf('z')                                   % Define z como um objeto LTI na forma
                                            % polinomial.
F=150*(z^2+2*z+7)/(z^2-0.3*z+0.02)          % Forma F(z) como uma função de transferência
                                            % LIT
                                            % na forma polinomial.
G=20*(z+2)*(z+4)/[(z-0.5)*(z-0.7)*(z-0.8)]
                                            % Forma G(z) como uma função de transferência
                                            % LIT na forma polinomial.
clear                                       % Apaga variáveis anteriores da área de
                                            % trabalho.
'Método da Expressão Racional, Forma Fatorada'
                                            % Exibe título.
z=zpk('z')                                  % Define z como um objeto LIT na forma
                                            % fatorada.
F=150*(z^2+2*z+7)/(z^2-0.3*z+0.02)          % Forma F(z) como uma função de transferência
                                            % LIT
                                            % na forma fatorada.
G=20*(z+2)*(z+4)/[(z-0.5)*(z-0.7)*(z-0.8)]
                                            % Forma G(z) como uma função de transferência
                                            % LIT
                                            % na forma fatorada.
pause
```

cap13p4 Também podemos utilizar o MATLAB para converter $G(z)$ em $G(s)$ quando $G(s)$ não está em cascata com um z.o.h. Primeiro criamos uma função de transferência amostrada LIT, como discutido em cap13p3. O comando `F = d2c(H,T,'zoh')` transforma $H(z)$ em $F(s)$ em cascata com um z.o.h., onde $H(z) = ((z-1)/z)*Z\{F(s)/s\}$. Se considerarmos $F(s) = sG(s)$, o comando resolve *para* $sG(s)$, dado $H(z)$. Finalmente $sG(s)/s = G(s)$ conduz ao resultado final. Em resumo, forme $H(z)$, onde $H(z) = ((z-1)/z)*G(z)$. Use `F = d2c(H,T,'zoh')` para obter $F(s) = sG(s)$. Divida o resultado por s e obtenha $G(s)$. Convertemos $G(z) = z/(z-0{,}3)$ em $G(s)$. Entraremos com o valor de `T`, o intervalo de amostragem, através do teclado.

```
'(cap13p4)'                                 % Exibe título.
T=input('Digite o valor de T');             % Entra com o intervalo de amostragem.
numgz=[1 0];                                % Define o numerador de G(z).
dengz=[1 -.3];                              % Define o denominador de G(z).
'G(z)'                                      % Exibe título.
Gz=tf(numgz,dengz,T)                        % Cria e mostra G(z).
Hz=Gz*tf([1 -1],[1 0],T);                   % Cria H(z)=((z-1)/z)*G(z).
Hz=minreal(Hz);                             % Cancela pólos e zeros comuns.
Fs=d2c(Hz,'zoh');                           % Converte H(z) em F(s)=sG(s).
Gs=Fs*tf(1,[1 0]);                          % Cria G(s)=F(s)(1/s).
'G(s)'                                      % Exibe título.
Gs=minreal(Gs)                              % Cancela pólos e zeros comuns.
pause
```

cap13p5 (Exemplo 13.6) Podemos usar o MATLAB para determinar o ganho que assegura estabilidade. Vejamos o Exemplo 13.6 no texto.

```
'(cap13p5) Exemplo 13.6'                    % Exibe título.
numgas=27;                                  % Define o numerador de Ga(s).
dengas=[1 27 0];                            % Define o denominador de Ga(s).
'Ga(s)'                                     % Exibe título.
Ga=tf(numgas,dengas)                        % Cria e mostra Ga(s).
'G(z)'                                      % Exibe título.
Gz=c2d(Ga,0.1,'zoh')                        % Obtém e mostra G(z) supondo Ga(s) em
                                            % cascata com um z.o.h.
for K=1:0.1:50;                             % Define a faixa de valores de K para
                                            % investigar
                                            % a estabilidade.
Tz=feedback(K*Gz,1);                        % Obtém T(z).
r=pole(Tz);                                 % Obtém os pólos para este valor de K.
```



```
rm=max(abs(r));                             % Determina o pólo com o maior valor absoluto
                                            % para este valor de K.
if rm>=1;                                   % Verifica se o pólo está fora
                                            % do círculo de raio unitário.
break;                                      % Interrompe se o pólo estiver fora
                                            % do círculo de raio unitário.
end;                                        % Fim de if.
end;                                        % Fim de for.
K                                           % Mostra o valor de K.
r                                           % Mostra os pólos a malha fechada para este
                                            % valor de K.
rm                                          % Mostra o valor absoluto do pólo.
pause
```

cap13p6 (Exemplo 13.9) Podemos usar o comando do MATLAB `dcgain(Gz)` para determinar os erros de estado estacionário. O comando calcula o ganho estático de `Gz`, um objeto função de transferência digital LIT, obtendo o valor de `Gz` em $z = 1$. Usamos o ganho estático para calcular K_p, K_v e K_a. Vejamos o Exemplo 13.9 no texto. Entraremos com o valor de `T`, o intervalo de amostragem, através do teclado.

```
'(cap13p6) Exemplo 13.9'                    % Exibe título.
T=input('Digite o valor de T');             % Entra com o intervalo de amostragem.
numg1s=[10];                                % Define o numerador de G1(s).
deng1s=poly([0 -1]);                        % Define o denominador de G1(s).
'G1(s)'                                     % Exibe título.
G1s=tf(numg1s,deng1s)                       % Cria e mostra G1(s).
'G(z)'                                      % Exibe título.
Gz=c2d(G1s,T,'zoh')                         % Converte G1(s) e z.o.h. em G(z)
                                            % e mostra o resultado na tela.
'T(z)'                                      % Exibe título.
Tz=feedback(Gz,1)                           % Cria e mostra T(z).
'Pólos a Malha Fechada no Plano z'          % Exibe título.
r=pole(Tz)                                  % Verifica a estabilidade.
M=abs(r)                                    % Exibe a magnitude das raízes.
pause
Kp=dcgain(Gz)                               % Calcula Kp.
GzKv=Gz*(1/T)*tf([1 -1],[1 0],T);           % Multiplica G(z) por (1/T)*(z-1). Divide,
                                            % também,
                                            % G(z) por z, o que torna própria
                                            % a função de transferência e resulta
                                            % o mesmo Kv.
GzKv=minreal(GzKv,0.00001);                 % Cancela pólos e zeros comuns.
Kv=dcgain(GzKv)                             % Calcula Kv.
GzKa=Gz*(1/T^2)*tf([1 -2 1],[1 0 0],T);     % Multiplica G(z) por (1/T^2)(z-1)^2.
                                            % Divide, também, G(z) por z^2, o que torna
                                            % própria
                                            % a função de transferência e resulta
                                            % o mesmo Ka.
GzKa=minreal(GzKa,0.00001);                 % Cancela pólos e zeros comuns.
Ka=dcgain(GzKa)                             % Calcula Ka.
pause
```

cap13p7 (Exemplo 13.10) Usamos agora o lugar das raízes para determinar o ganho que assegura estabilidade. Primeiro, criamos um objeto função de transferência digital LTI para $G(z) = N(z)/D(z)$, com um intervalo de amostragem não especificado. O objeto LIT é criado usando `tf(numgz,dengz,[])`, onde `numgz` representa $N(z)$, `dengz` representa $D(z)$ e [] indica um intervalo de amostragem não especificado. O MATLAB produz o lugar das raízes no plano z com um círculo de raio unitário superposto usando o comando `zgrid(z,wn)`, com `z = wn = 0`. Selecionamos, então, de forma interativa a interseção do lugar das raízes com o círculo de raio unitário. O MATLAB responde com os valores do ganho e dos pólos a malha fechada. Vejamos o Exemplo 13.10.

```
'(cap13p7) Exemplo 13.10'                   % Exibe título.
clf                                         % Apaga gráficos existentes na tela.
numgz=[1 1];                                % Define o numerador de G(z).
dengz=poly([1 0.5]);                        % Define o denominador de G(z).
'G(z)'                                      % Exibe título.
Gz=tf(numgz,dengz,[])                       % Cria e mostra G(z).
rlocus(Gz)                                  % Plota o lugar das raízes.
zgrid(0,0)                                  % Adiciona o círculo unitário ao lugar das
                                            % raízes.
title(['Lugar das Raízes no Pano z'])       % Adiciona legenda ao lugar das raízes.
[K,p]=rlocfind(Gz)                          % Fornece o valor de K correspondente ao ponto
                                            % escolhido no gráfico.
pause
```

cap13p8 (Exemplo 13.11) Usamos agora o lugar das raízes para atender os requisitos da resposta transitória. Programamos o MATLAB para permitir a entrada via teclado do valor desejado para a relação de amortecimento.

O MATLAB produz então o lugar das raízes no plano z juntamente com a curva de relação de amortecimento desejado superposta usando o comando `zgrid(z,wn)`. Selecionamos, então, de forma interativa, o ponto de operação desejado determinando o ganho. O MATLAB responde com o valor do ganho bem como com a resposta ao degrau do sistema amostrado a malha fechada usando `step(Tz)`, onde `Tz` é um objeto função de transferência digital LIT. Vejamos o Exemplo 13.11.

```
'(cap13p8) Exemplo 13.11'                    % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
numgz=[1 1];                                 % Define o numerador de G(z).
dengz=poly([1 0.5]);                         % Define o denominador de G(z).
'G(z)'                                       % Exibe título.
Gz=tf(numgz,dengz,[])                        % Cria e mostra G(z).
z=input('Digite o valor da Relação de Amortecimento');
                                             % Entra com o valor desejado da relação de
                                             % amortecimento.
rlocus(Gz)                                   % Plota o lugar das raízes.
zgrid(z,0)                                   % Adiciona a curva da relação de amortecimento
                                             % ao lugar das raízes.
title(['Lugar das Raízes no Plano z'])       % Adiciona legenda ao lugar das raízes.
[K,p]=rlocfind(Gz)                           % Permite obter o valor de K correspondente
                                             % ao ponto selecionado no gráfico.
'T(z)'                                       % Exibe título.
Tz=feedback(K*Gz,1)                          % Obtém T(z).
step(Tz)                                     % Obtém a resposta ao degrau
                                             % do sistema compensado por ganho.
title(['Resposta ao Degrau do Sistema Compensado por Ganho'])
                                             % Adiciona legenda à resposta ao degrau
pause                                        % do sistema compensado por ganho.
```

cap13p9 (Exemplo 13.12) Usemos agora o MATLAB para projetar um compensador digital de avanço de fase. O projeto no plano *s* foi executado no Exemplo 9.6. Aqui convertemos o projeto para o plano *z* e executamos uma simulação digital da resposta ao degrau. A conversão do compensador por avanço de fase no plano *s*, $Gc(s)$ = `numgcs/dengcs`, no compensador do plano *z*, $Gc(z)$ = `numgcz/dengcz`, é realizada usando o comando `Gcz = c2d(numgcs,dengcs,T,'tustin')` para executar a transformação de Tustin, onde `T` = intervalo de amostragem, que neste exemplo é 1/300. Este exercício resolve o Exemplo 13.12 usando o MATLAB.

```
'(cap13p9) Exemplo 13.12'                    % Exibe título.
clf                                          % Apaga gráficos existentes na tela.
T=0.01                                       % Define o intervalo de amostragem.
numgcs=1977*[1 6];                           % Define o numerador de Gc(s).
dengcs=[1 29.1];                             % Define o denominador de Gc(s).
'Gc(s) na forma polinomial'                  % Imprime título.
Gcs=tf(numgcs,dengcs)                        % Cria Gc(s) forma polinomial
                                             % e mostra o resultado.
'Gc(s) na forma polinomial'                  % Exibe título.
Gcszpk=zpk(Gcs)                              % Cria e mostra Gc(s) na
                                             % forma fatorada.
'Gc(z) em forma polinomial via Transformação de Tustin'
                                             % Exibe título.
Gcz=c2d(Gcs,T,'tustin')                      % Forma Gc(z) via transformação de Tustin.
'Gc(z) em forma fatorada via Transformação de Tustin'
Gczzpk=zpk(Gcz)                              % Mostra Gc(z) na forma fatorada.
numgps=1;                                    % Define o numerador de Gp(s).
dengps=poly([0 -6 -10]);                     % Define o denominador de Gp(s).
'Gp(s) na forma polinomial'                  % Exibe título.
Gps=tf(numgps,dengps)                        % Cria e mostra Gp(s)
                                             % na forma polinomial.
' Gp(s) na forma fatorada'                   % Exibe título.
Gpszpk=zpk(Gps)                              % Cria e mostra Gp(s)
                                             % na forma fatorada.
'Gp(z) na forma polinomial'                  % Exibe título.
Gpz=c2d(Gps,T,'zoh')                         % Forma Gp(z) via transformação com zoh.
'Gp(z) na forma fatorada'                    % Exibe título.
Gpzzpk=zpk(Gpz)                              % Forma Gp(z) na forma fatorada.
Gez=Gcz*Gpz;                                 % Forma Ge(z) = Gc(z)Gp(z).
'Ge(z) = Gc(z)Gp(z) na forma fatorada'       % Exibe título.
Gezzpk=zpk(Gez)                              % Forma e mostra Ge(z)
                                             % na forma fatorada.
'z-1'                                        % Exibe título.
zm1=tf([1 -1],1,T)                           % Forma z-1.
zm1Gez=minreal(zm1*Gez,0.00001);             % Cancela os fatores comuns.
'(z-1)Ge(z) para calcular o erro de estado estacionário'
                                             % Exibe título.
zm1Gezzpk=zpk(zm1Gez)                        % Forma e mostra (z-1)Ge(z)
                                             % na forma fatorada.
Kv=(1/T)*dcgain(zm1Gez)                      % Obtém Kv.
'T(z) = Ge(z)/(1+Ge(z))'                     % Exibe título.
Tz=feedback(Gez,1)                           % Obtém a função de transferência
                                             % a malha fechada, T(z)
step(Tz,0:T:2)                               % Obtém a resposta ao degrau.
title('Resposta ao Degrau de Sistema a Malha Fechada com Compensador Digital de Avanço de
Fase')                                       % Adiciona legenda à resposta ao degrau.
```


B.3 Resumo dos Comandos

`abs(x)`	Valor absoluto de x
`acker(A,B,polos)`	Determina os ganhos para alocação de pólos
`atan(x)`	Arc tg x
`axis ([xmin,xmax,ymin,ymax])`	Define a faixa de valores sobre os eixos de um gráfico
`bode(G,w)`	Traça os diagramas de Bode de uma função de transferência $G(s)$ sobre uma faixa de freqüências, ω. O campo ω é opcional
`break`	Interrompe um laço
`c2d(G,T, 'tustin')`	Converte $G(s)$ em $G(z)$ usando a transformação de Tustin. T é o intervalo de amostragem
`c2d(G,T, 'zoh')`	Converte $G(s)$ em cascata com um extrapolador de ordem zero (zoh) em $G(z)$. T é o intervalo de amostragem
`canon(S, 'modal')`	Converte um objeto no espaço de estados LIT, S, na forma paralela
`clear`	Apaga as variáveis existentes na área de trabalho
`clf`	Apaga a figura atual
`conv([a b c d], [e f g h])`	Multiplica $(as^3 + bs^2 + cs + d)$ por $(es^3 + fs^2 + gs + h)$
`ctrb(A,B)`	Obtém a matriz de controlabilidade
`d2c(G,T, 'zoh')`	Converte $G(z)$ em $G(s)$ em cascata com um extrapolador de ordem zero (zoh). T é o intervalo de amostragem
`dcgain(G)`	Obtém o ganho estático para $G(s)$ (isto é, $s = 0$) ou $G(z)$ (isto é, $z = 1$)
`eig(A)`	Calcula os autovalores da matriz **A**
`end`	Fim do laço
`exp(a)`	e^a
`feedback(G,H,sign)`	Obtém $T(s) = G(s)/[1 \pm G(s)H(s)]$. Sign = −1 ou é opcional para retroação negativa. Sign = +1 para retroação positiva
`grid on`	Põe uma grade reticulada sobre um gráfico
`hold off`	Desabilita a retenção de figuras sobre um gráfico; começa um novo gráfico
`imag(P)`	Forma uma matriz com as partes imaginárias dos componentes da matriz **P**
`input(' str ')`	Permite a entrada de valores a partir do teclado depois do prompt str
`inv(P)`	Obtém a inversa da matriz **P**
`length(P)`	Dimensão do vetor **P**
`log(x)`	Log natural de x
`log10(x)`	Logaritmo de x na base 10
`margin(G)`	Obtém as margens de ganho e de fase, e as freqüências de margem de ganho e de margem de fase da função de transferência, $G(s)$. Retorna [Margem de ganho, Margem de fase, Freqüência para 180°, Freqüência para 0 dB]
`max(P)`	Acha a componente máxima de **P**
`minreal(G,tol)`	Cancela os fatores comuns da função de transferência $G(s)$ dentro de uma tolerância, tol. Se o campo de 'tol' estiver vazio será usado um valor default
`ngrid`	Superpõe uma grade reticulada sobre o gráfico de Nichols
`nichols(G,w)`	Traça o gráfico de Nichols de uma função de transferência $G(s)$ sobre uma faixa de freqüências, ω. O campo ω é opcional
`nyquist(G,w)`	Traça o diagrama de Nyquist de uma função de transferência $G(s)$ sobre uma faixa de freqüências, ω. O campo ω é opcional
`obsv(A.C)`	Obtém a matriz de observabilidade
`ord2(wn,z)`	Cria um sistema de segunda ordem, $G(s) = 1/[s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2]$
`pade(T,n)`	Aproximação de Padé de ordem n para um retardo, T
`pause`	Interrompe a execução do programa até que uma tecla qualquer seja pressionada

`plot(t1,y1,t2,y2,t3,y3)`	Traça $y1$ versus $t1$, $y2$ versus $t2$, e $y3$ versus $t3$ sobre um mesmo gráfico
`pole(G)`	Obtém os pólos do objeto função de transferência LIT, $G(s)$
`poly([-a -b -c])`	Forma o polinômio $(s + a)(s + b)(s + c)$
`polyval(P,a)`	Obtém o valor do polinômio $P(s)$ calculado em a, isto é, $P(a)$
`rank(A)`	Obtém o posto da matriz **A**
`real(P)`	Forma uma matriz com as partes reais dos componentes da matriz **P**
`residue(numf, denf)`	Obtém os resíduos de $F(s)$ = `numf/denf`
`rlocfind(GH)`	Permite a seleção interativa de pontos sobre um lugar das raízes para determinar o ganho, $G(s)H(s)$. Retorna o valor de K e de todos os pólos a malha fechada com esse valor de K
`rlocus(GH,K)`	Traça o lugar das raízes para o ganho de malha, $G(s)H(s)$, sobre uma faixa de valores de K. O campo K é opcional
`roots(P)`	Obtém as raízes do polinômio, P
`semilogx(w,P1)`	Constrói o gráfico semilog de P_1 versus $\log_{10}(\omega)$
`series(G1,G2)`	Obtém $G_1(s)G_2(s)$
`sgrid(z,wn)`	Superpõe linhas de grade de `z`(ζ) e de `wn`(ω_n) sobre um lugar das raízes
`sin(x)`	sen(x)
`sqrt(a)`	$\sqrt{a}$
`ss2tf(A,B,C,D,1)`	Converte uma representação no espaço de estados em função de transferência. Retorna `[num,den]`
`ss(A,B,C,D)`	Cria um objeto S no espaço de estados LIT
`ss(G)`	Converte um objeto função de transferência LIT, $G(s)$, em objeto no espaço de estados LIT
`ssdata(S)`	Extrai as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** de um objeto no espaço de estados LIT, S
`step(G1,G2, . . Gn,t)`	Traça as respostas ao degrau de $G_1(s)$ a $G_n(s)$ em um mesmo gráfico para uma faixa de valores de tempo, t. O campo t é opcional, bem como os campos G_2 a G_n
`subplot(xyz)`	Divide a área do gráfico em uma grade de janelas x por y sendo z o número da janela atual
`table1(a,b)`	Valor b de uma tabela com valores de a
`tan(x)`	Obtém a tangente do ângulo x em radianos
`text(a,b, 'str')`	Coloca o texto str começando nas coordenadas $x = a$, $y = b$ de um gráfico
`tf2ss(numg,deng)`	Converte $G(s)$ = `numg/deng` na representação canônica controlável no espaço de estados. Retorna `[A,B,C,D]`
`tf2zp(numg,deng)`	Converte $G(s)$ = `numg/deng` na forma polinomial fatorada. Retorna `[zeros,pólos,ganhos]`
`tf(numg,deng,T)`	Cria uma função de transferência LIT, $G(s)$ = `numg/deng`, em forma polinomial. T é o intervalo de amostragem e deve ser usado somente se G for uma função de transferência amostrada
`tf(G)`	Converte uma função de transferência LIT, $G(s)$, para a forma polinomial
`tfdata(G, 'v')`	Extrai o numerador e o denominador de uma função de transferência LIT, $G(s)$, e converte os valores em um vetor. Retorna `[num,den]`
`title('str')`	Põe a legenda str em um gráfico
`xlabel('str')`	Rotula o eixo dos x de str
`ylabel('str')`	Rotula o eixo dos y de str
`zgrid(z,wn)`	Superpõe linhas de grade de `z`(ζ) e de `wn`(ω_n) sobre um lugar das raízes no plano z
`zp2tf([-a -b]',[-c -d]',k)`	Converte $F(s) = K(s + a)(s + b)/(s + c)(s + d)$ na forma polinomial. Retorna `[num,den]`
`zpk(numg,deng,K,T)`	Cria uma função de transferência LIT, $G(s)$ = `numg/deng`, na forma fatorada. T é o intervalo de amostragem e deve ser usado somente se G for uma função de transferência amostrada
`zpk(G)`	Converte uma função de transferência LIT, $G(s)$ na forma fatorada

Bibliografia

Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFFS) System Description.* NRL Memorandum Report 4393. Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1980.

The MathWorks, Inc. *MATLAB: Using* MATLAB, *Version 5.* The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1984-1999.

The MathWorks, Inc. *MATLAB: Control System Toolbox User's Guide, Version 4.* The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1992-1998.

APÊNDICE C

Tutorial do Simulink do MATLAB

C.1 Introdução

Os leitores que estiverem estudando o MATLAB devem explorar os recursos do Simulink do MATLAB. Antes de prosseguir, o leitor deverá estudar o Apêndice B, tutorial do MATLAB, incluindo a Seção B.1, que é aplicável a este apêndice.

Para usar o Simulink, são necessárias a Versão 3 do Simulink e a Versão 5 do MATLAB.

Os modelos descritos neste apêndice, disponíveis no CD-ROM que acompanha o livro e nos portais da rede mundial (*websites*) listados no Apêndice B, foram desenvolvidos em um PC usando a Versão 5.3 do MATLAB e a Versão 3.0 do Simulink. O código também poderá ser executado em estações de trabalho que aceitem o MATLAB. Consulte o Guia de Instalação do MATLAB de sua plataforma para conhecer as exigências mínimas de hardware do sistema.

O Simulink é usado para simular sistemas. Usa uma interface gráfica de usuário (GUI) para você interagir com blocos que representam subsistemas. Você pode posicionar os blocos, ajustá-los, rotulá-los, especificar seus parâmetros e interconectá-los para formar sistemas completos para os quais podem ser executadas simulações.

O Simulink possui bibliotecas de blocos a partir das quais podem ser feitas cópias de subsistemas, de fontes, (isto é, geradores de função) (*sources*) e dispositivos de visualização (*sinks*). Estão disponíveis blocos de subsistemas para representar sistemas lineares, não-lineares e discretos. Se a *Toolbox* de Sistemas de Controle estiver instalada, será possível gerar objetos LIT.

O recurso de Ajuda (*Help*) está disponível na barra de menus da tela **MATLAB Command Window**. No **Help** selecione a opção **Help Desk** e em seguida **Simulink**. Cada subsistema da biblioteca de blocos também conta com o recurso de Ajuda. Este recurso é acessado seja através do ícone do bloco, com um clique do botão direito do mouse sobre a opção **Simulink Library Browser**, seja por um duplo clique no bloco em questão e, em seguida, um clique no botão **Help**. Finalmente, contamos com o recurso de dicas de tela para alguns botões da barra de ferramenta. Deixe o cursor do mouse parado sobre o botão durante alguns segundos para ver a explicação.

C.2 Usando o Simulink

O resumo a seguir mostrará os passos para usar o Simulink. A Seção C.3 apresenta quatro exemplos que mostram e esclarecem estes passos.

1. **Acessando o Simulink:** O **Simulink Library Browser**, de onde começamos o Simulink, é acessado digitando *simulink* na janela **MATLAB Command Window** ou clicando no botão **Simulink Library Browser** na barra de ferramentas, como mostra a parte circulada na Fig. C.1.

   Em resposta, o MATLAB exibe a tela **Simulink Library Browser** mostrada na Fig. C.2(*a*). Criamos agora uma janela do modelo **untitled** (sem título), Fig. C.2(*b*), clicando sobre o botão **Create a new model** (dentro do círculo mostrado na Fig. C.2(*a*)) na barra de ferramentas da janela **Simulink Library Browser**. Você vai construir seu sistema nesta janela. Os modelos existentes podem ser abertos clicando no botão **Open a model** na barra de ferramentas **Simulink Library Browser**. Este botão está localizado do lado direito do botão **Create a new model**.
2. **Selecionando subsistemas:** Para revelar uma biblioteca de blocos oculta, como a do **Simulink**, dê um clique duplo nos ícones da biblioteca principal da janela **Simulink Library Browser**. Dê um clique duplo nas bibliotecas de blocos para explicitar as listas de blocos representados por ícones em forma de losango. Um clique simples no sinal de + mostrado na Fig. C.2(*a*) também explicita bibliotecas de blocos ou lista de blocos. Como exemplo, a biblioteca de blocos de sistemas contínuos **(Continuous)** na biblioteca de blocos principal do **Simulink** é mostrada na Fig. C.2(*a*). Os blocos reais existentes em cada biblioteca podem ser revelados através do clique com o botão direito no ícone da biblioteca e através da seleção do item no menu de aparecimento instantâneo. A Fig. C.3 mostra alguns exemplos de bibliotecas de blocos.

   Outra forma de mostrar os blocos reais seria clicar com o botão direito do mouse no ícone da biblioteca principal e em seguida selecionar o item no menu de aparecimento instantâneo. Por exemplo, clique com o botão direito no ícone de biblioteca do **Simulink**, o primeiro da janela **Simulink Library Browser**. O resultado obtido é a janela mostrada na Fig. C.4, que contém as bibliotecas de blocos.

   O duplo clique em qualquer uma das bibliotecas na Fig. C.4 mostra os mesmos tipos de janelas mostradas na Fig. C.3.
3. **Monte e rotule os subsistemas:** Arraste os subsistemas necessários (blocos) das janelas do *browser* ou das janelas de biblioteca, como as mostradas na Fig. C.2(*a*) ou na Fig. C.3, respectivamente, para a janela do modelo. Você pode posicionar, ajustar o tamanho e renomear os blocos. Para posicionar, arraste o bloco com o mouse; para ajustar, clique sobre o subsistema e arraste as cantoneiras; para renomear, clique sobre o nome existente, selecione o texto existente e digite o novo nome. O texto pode também ser reposicionado para o topo do bloco mantendo o botão do mouse pressionado e arrastando o texto.
4. **Interconecte subsistemas e rotule os sinais:** Posicione o cursor na pequena seta de saída ao lado de um subsistema, pressione o botão do mouse e arraste o cursor resultante em forma de retículo para a pequena seta de entrada do próximo subsistema. Será desenhada uma linha entre os dois subsistemas. Você pode mover partes da linha posicionando o cursor sobre a linha, pressionando o botão do mouse e arrastando o cursor em forma

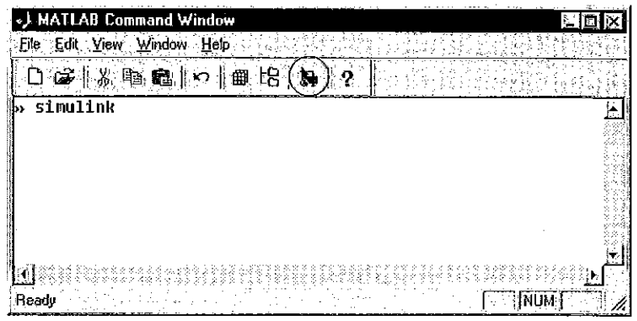


Fig. C.1 A janela **MATLAB Command Window** mostrando como acessar o Simulink. O botão **Simulink Library Browser** é assinalado com um círculo

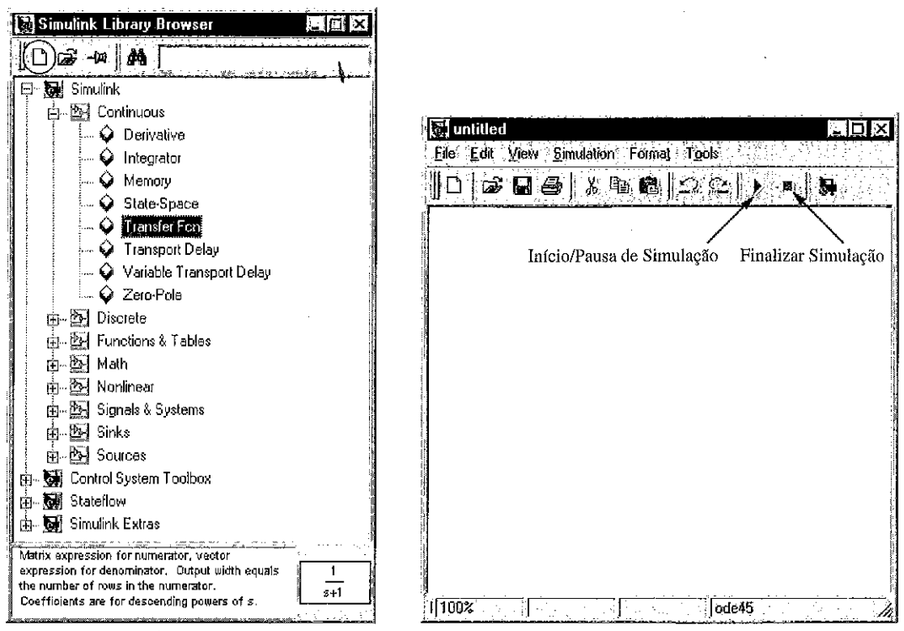
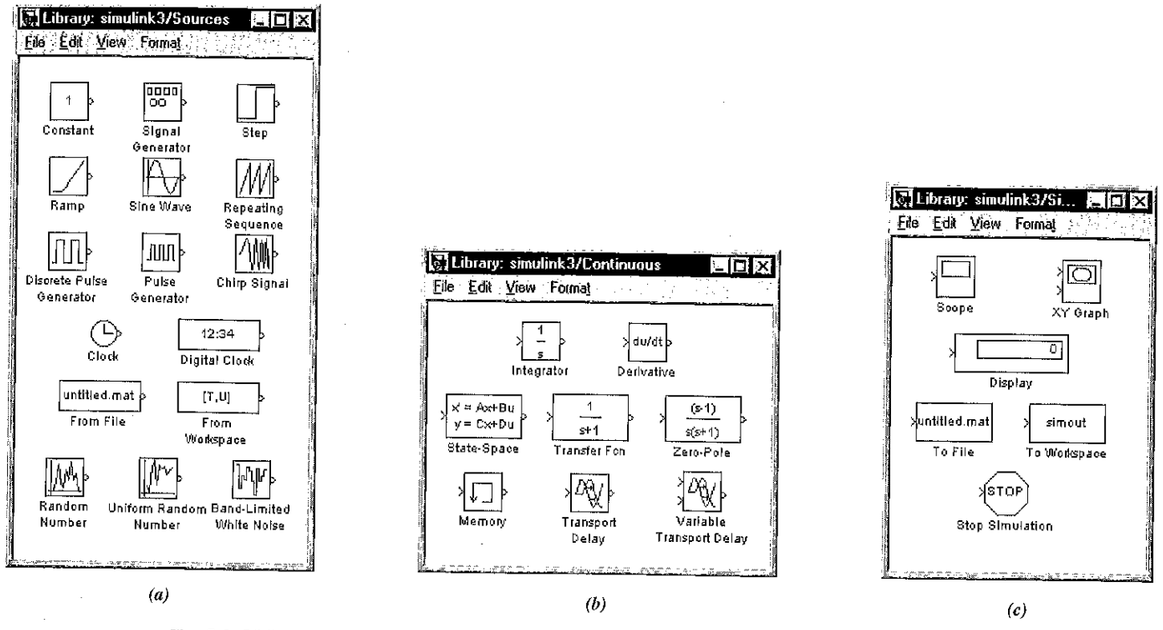


Fig. C.2 A janela **Simulink Library Browser** mostrando: **a.** o botão **Create a new model** assinalado com um círculo; **b.** a janela de modelo **untitled**



(a) (b) (c)

Fig. C.3 Bibliotecas Simulink: **a.** fontes (*sources*); **b.** sistemas contínuos; **c.** dispositivos de saída (*sinks*)

de quatro setas. Derivações de segmentos de linha podem ser desenhadas posicionando o cursor onde se deseja criar o segmento de linha, mantendo pressionado o botão direito do mouse e arrastando o cursor em forma de retículo resultante. Um novo segmento de linha será formado. É possível rotular os sinais dando um clique duplo na linha e digitando dentro da caixa resultante o texto desejado. Finalmente, os rótulos podem ser posicionados em qualquer lugar dando um clique duplo e digitando dentro da caixa resultante o texto que se deseja.

5. **Escolha de parâmetros para os subsistemas:** Dê um duplo clique no subsistema da janela do modelo e digite os parâmetros desejados. Algumas explicações são fornecidas na janela **Block Parameters**. Pressione o botão **Help** na janela **Block Parameters** para mais detalhes. Os parâmetros podem ser lidos mais tarde sem abrir o bloco. Deixe o cursor do mouse parado sobre o bloco por alguns segundos e uma dica de tela vai aparecer identificando o bloco e listando os parâmetros.
6. **Escolha de parâmetros para simulação:** Selecione **Parameters** no menu **Simulation** na janela do modelo para configurar parâmetros adicionais, como tempo de simulação. Pressione o botão **Help** na janela **Simulation Parameters** para obter mais detalhes.
7. **Inicie a simulação:** Ative sua janela do modelo. Dê um clique duplo no bloco **Scope** (normalmente o osciloscópio é usado para visualizar os resultados de simulação) para exibir a janela **Scope**. Selecione **Start** no menu **Simulation** na janela do modelo ou clique no ícone **Start/Pause** na barra de ferramentas da janela do modelo, como mostrado na Fig. C.2(*b*). Clicando no ícone **Stop**, a simulação será interrompida antes da finalização.
8. **Interaja com o gráfico:** Na janela **Scope** você pode usar o zoom para aproximar ou afastar o gráfico, modificar a escala dos eixos, salvar a configuração dos eixos e imprimir o gráfico resultante.
9. **Gravar o modelo:** Ao gravar o modelo, escolhendo a opção **Save** no menu **File**, cria-se um arquivo com extensão .mdl, a qual é necessária.

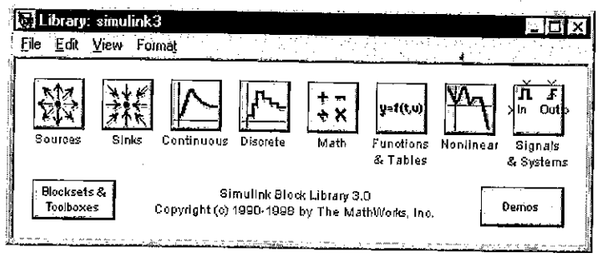


Fig. C.4 Janela Simulink Block Library (Biblioteca de Blocos do Simulink)

C.3 Exemplos

Esta seção apresentará quatro exemplos do uso do Simulink para simular sistemas lineares, não-lineares e digitais. Os exemplos irão mostrar os diagramas de blocos do Simulink, bem como explicar as configurações dos parâmetros dos blocos. Finalmente, serão mostrados os resultados das simulações.

Exemplo C.1

Simulação de sistemas lineares

Nosso primeiro exemplo desenvolve uma simulação de três sistemas lineares para comparar as respostas desses sistemas ao degrau. Em particular, resolvemos o Exemplo 4.8 no texto e reproduzimos as respostas mostradas na Fig. 4.24. A Fig. C.5 mostra um diagrama de blocos do Simulink formado seguindo os Passos de (1) a (5) na Seção C.2, ou seja:

Acessar o Simulink, selecionar, montar e rotular os subsistemas: A fonte (*source*) é uma entrada em degrau de 1 volt, obtida arrastando o bloco **Step** da janela **Library: simulink3/Sourcers** para a janela do modelo.

O primeiro sistema, T1, consiste em dois blocos, **Gain** (ganho) e **Transfer Fcn** (Função de transferência). O ganho é obtido arrastando o bloco **Gain** da janela **Library: simulink3/Math** para a janela do modelo. Os sistemas T2 e T3 são criados de maneira semelhante.

Os três sinais de saída, C1, C2 e C3, são multiplexados para entrar como uma única entrada do osciloscópio. O multiplexador é obtido arrastando o bloco **Mux** da janela **Library: simulink3/Signals & Sistems** para a janela do modelo.

O dispositivo de saída é um osciloscópio, obtido arrastando o bloco **Scope** da janela **Library: simulink3/Sinks** para a janela do modelo.

Alternativamente, todos os blocos podem ser arrastados da janela **Simulink Library Browser** para a janela do modelo.

Os rótulos dos blocos podem ser alterados para os mostrados na Fig. C.5 seguindo o Passo (3) da Seção C.2.

Interconectar subsistemas e rotular sinais: Siga o Passo (4) para interconectar os subsistemas e rotular os sinais. Para poder concluir a interligação dos sinais é preciso definir os parâmetros do mux. Veja o próximo parágrafo.

Escolher os parâmetros dos subsistemas: Configuremos agora os parâmetros de cada bloco usando o Passo (5). A janela **Block Parameters** é acessada por meio de um duplo clique sobre cada um dos blocos na janela do modelo. A Fig. C.6 mostra as janelas **Block Parameter** para os blocos entrada em degrau de 1 volt, ganho, função de transferência 1 e mux. Configure os parâmetros nos valores necessários, como mostrado.

O osciloscópio requer explicação adicional. O duplo clique no bloco **Scope** da janela do modelo acessa a tela de apresentação do osciloscópio, Fig. C.7(*a*).

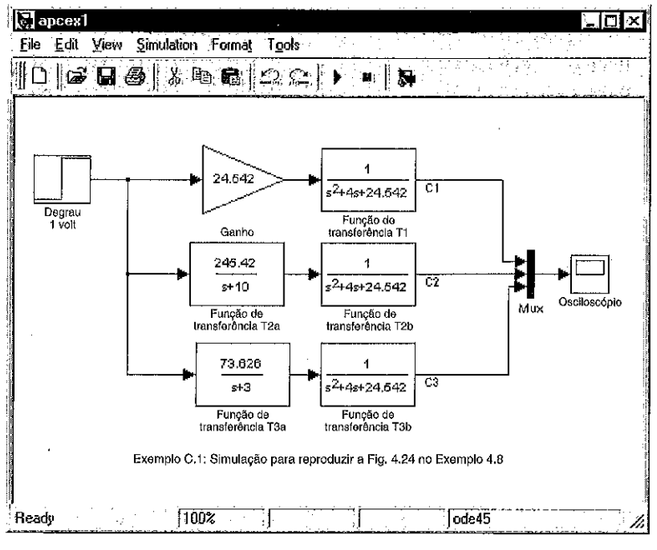


Fig. C.5 Diagrama de blocos em Simulink para o Exemplo C.1

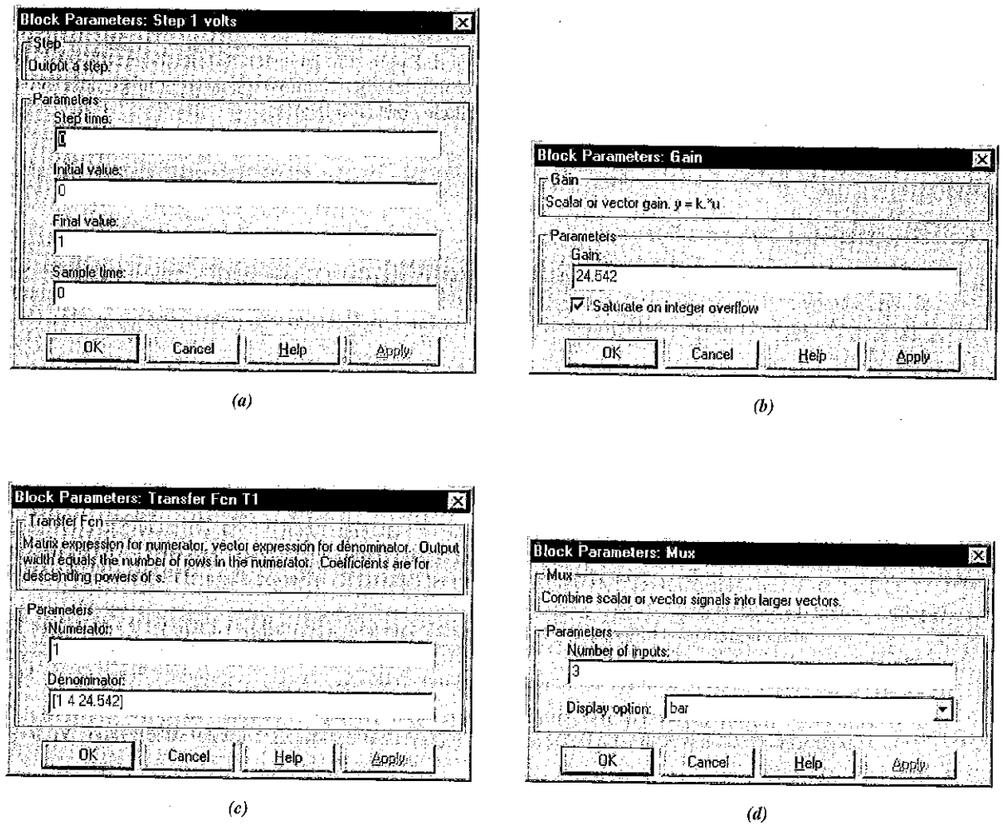


Fig. C.6 Janelas **Block Parameters** para: **a.** fonte em degrau de 1 volt; **b.** ganho; **c.** função de transferência 1; **d.** multiplexador (mux)

Clicando no ícone **Properties** na barra de ferramenta da janela **Scope**, mostrado na Fig. C.7(*a*), acessa-se a janela **'Scope' properties** mostrada na Fig. C.7(*b*). A janela **'Scope' properties** contém duas divisórias, **General** e **Data history**, como mostrado nas Figs. C.7(*b*) e (*c*), respectivamente. Finalmente, ao clicar com o botão direito do mouse na área esboçada da janela **Scope** aparece a janela **'Scope' properties: axis 1**, Fig. C.7(*d*). Agora podemos configurar os parâmetros da apresentação, como a faixa de valores do eixo vertical.

Escolher parâmetros para a simulação: Siga o Passo (6) para configurar os parâmetros de simulação. A Fig. C.8 mostra a janela **Simulation Parameters** resultante depois de selecionada a divisória **Solver**. Entre outros parâmetros, devem ser configurados o tempo de início e de término da simulação.

Iniciar a simulação: Execute agora a simulação seguindo o Passo (7). A Fig. C.9 mostra o resultado na janela **Scope**. Os gráficos são codificados em cores segundo a ordem em que aparecem na entrada do mux: amarelo, magenta, ciano, vermelho, verde e azul-escuro. Se o mux tiver mais entradas as cores se repetem, nesta ordem.

Interagir com o gráfico: A barra de ferramentas da janela **Scope** mostrada na Fig. C.9 tem alguns botões que podem ser usados para interagir com o gráfico. Resumamos a função e a operação de cada um deles. Descrevemos cada botão iniciando pelo situado mais à esquerda:
Botão 1: permite fazer um zoom do gráfico nas direções x e y. Pressione o botão e arraste um retângulo sobre a porção da curva que você deseja expandir.
Botão 2: permite o zoom somente na direção x. Arraste uma linha horizontal sobre o gráfico cobrindo a extensão de x que você deseja expandir.
Botão 3: permite o zoom somente na direção y. Arraste a linha vertical sobre o gráfico cobrindo a faixa de y que você quer expandir.
Botão 4: retorna ao gráfico original.
Botão 5: salva as configurações correntes dos eixos.
Botão 6: já foi explicado e é usado para definir os parâmetros do osciloscópio.
Botão 7: Executa uma impressão do gráfico.

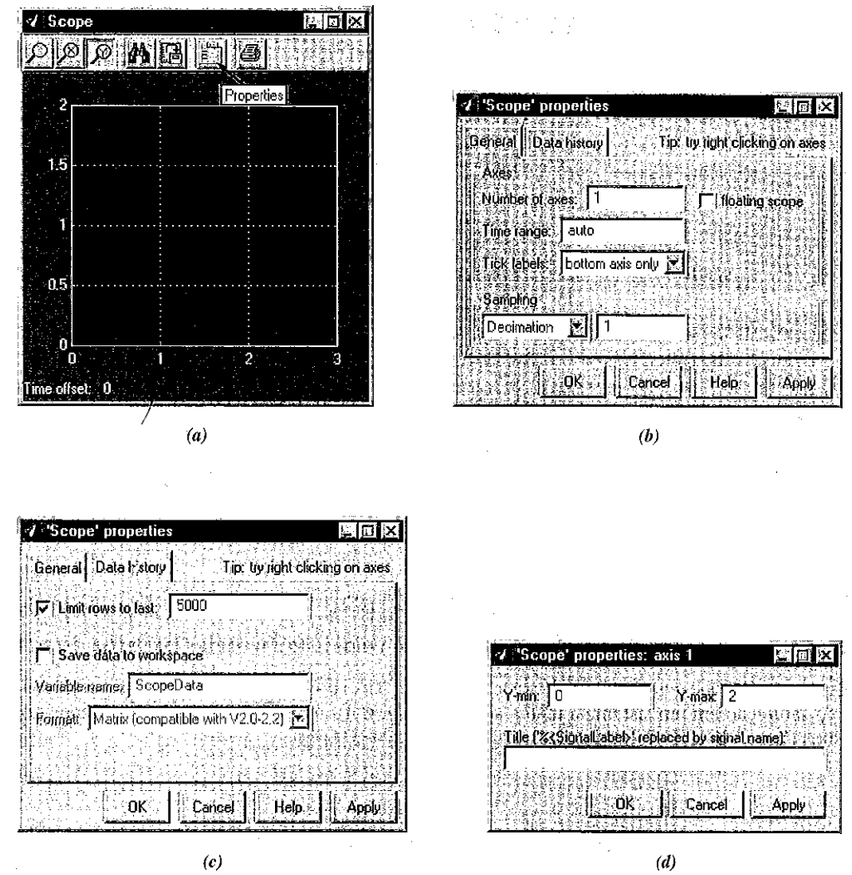


Fig. C.7 Janelas Scope para o osciloscópio: **a. Scope**; **b.** Opção **General**, **'Scope' properties**; **c.** Opção **Data history**, **'Scope' Properties**; **d. 'Scope' properties: axis 1**

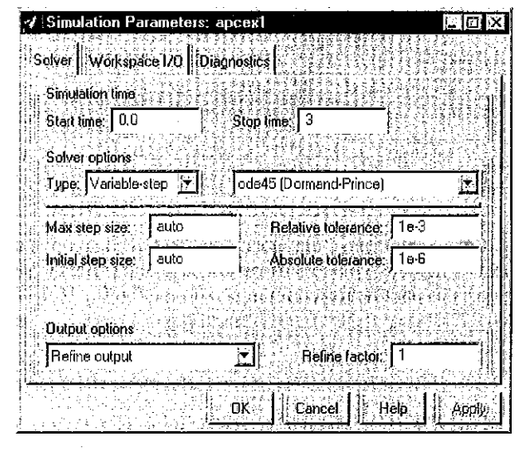


Fig. C.8 A janela **Simulation Parameters** para opção **Solver**

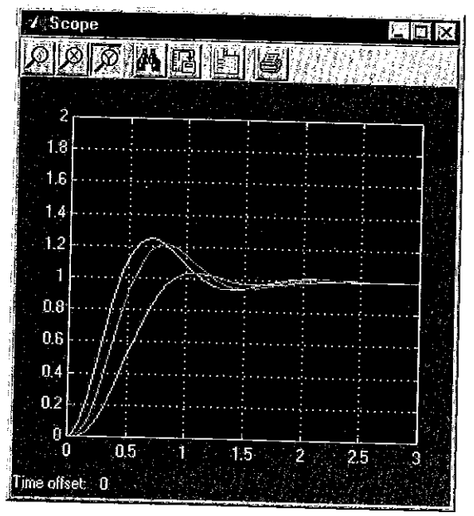


Fig. C.9 A janela **Scope** depois de terminada a simulação do Exemplo C.1

Exemplo C.2

Efeito da saturação do amplificador sobre a velocidade angular da carga do motor

Este exemplo, que gerou a Fig. 4.29 no texto, mostra o uso do Simulink para simular o efeito da não-linearidade do tipo saturação em um sistema a malha aberta. A Fig. C.10 mostra um diagrama de blocos do Simulink formado pelos Passos de (1) a (5) na Seção C.2 anterior.

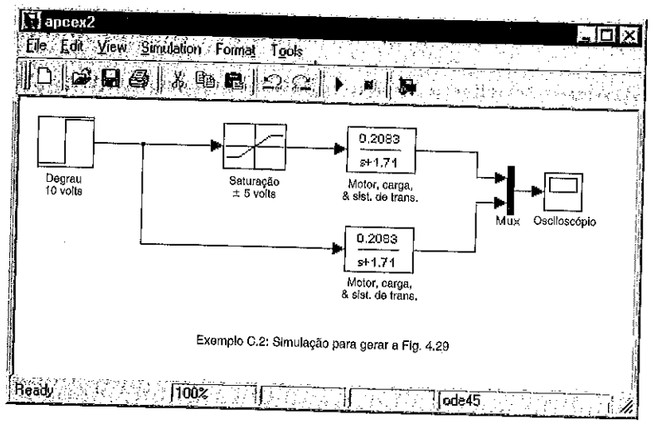


Fig. C.10 Diagrama de blocos em Simulink para o Exemplo C.2

A não-linearidade do tipo saturação é um bloco adicional que não tinha sido usado antes. A saturação é obtida arrastando para a janela do modelo o bloco **Saturation** da janela **Library: simulink3/Nonlinear** mostrada na Fig. C.11(*a*) e configurando estes parâmetros como mostrado na Fig. C.11(*b*).

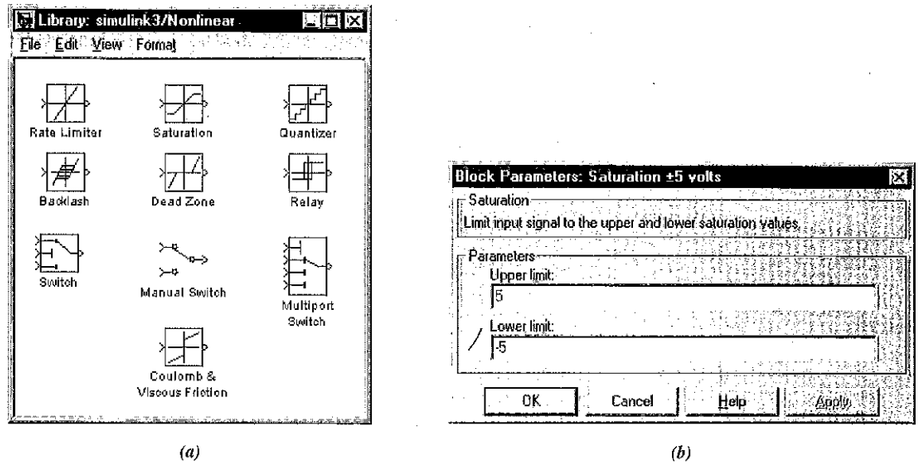


Fig. C.11 **a.** Biblioteca Simulink para não-linearidades; **b.** Configurações de parâmetros para o bloco saturação

Agora execute a simulação ativando a janela do modelo e selecionando a opção **Start** do menu **Simulation** da janela do modelo ou clicando no botão **Start/Pause** na barra de ferramentas da janela do modelo. A Fig. C.12 mostra o resultado na janela **Scope**.

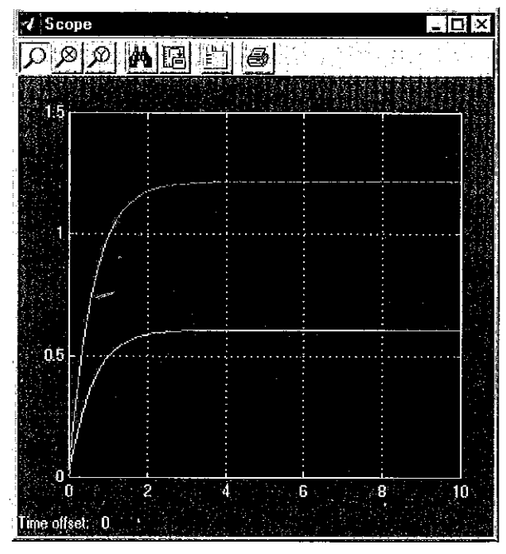


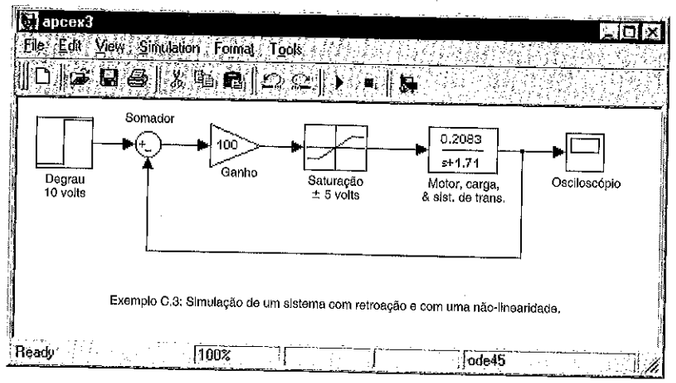
Fig. C.12 Janela Scope depois de terminada a simulação do Exemplo C.2. A curva inferior é a saída com saturação

Exemplo C.3

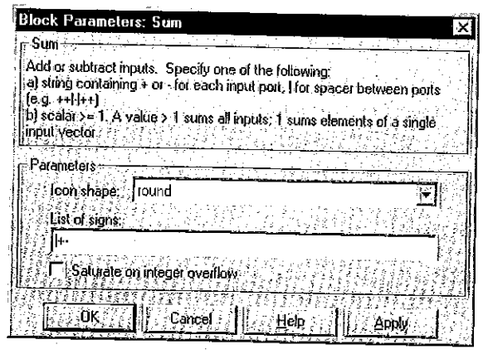
Simulando sistemas com retroação

O Simulink pode ser usado para a simulação de sistemas com retroação. A Fig. C.13(*a*) é um exemplo de um sistema com retroação dotado de saturação.

Neste exemplo foi adicionado um canal de retroação (veja o Passo (4) na Seção C.2) e uma junção de soma, obtida arrastando o bloco **Sum** da janela **Library: simulink3/Math** para a janela do modelo. A janela **Block Parameters: Sum**, Fig. C.13(*b*), mostra as configurações dos parâmetros do somador. Você pode ajustar a forma bem como definir as entradas positivas (sinal de +) e as entradas negativas (sinal de −). Na lista de sinais, o símbolo "|" significa um espaço. Colocando-o no início da definição de sinais resulta que estes começam a ser escritos em torno do somador a partir da posição de "nove horas" e não a partir da posição padronizada de "doze horas". Os resultados de simulação estão mostrados na Fig. C.14.



(*a*)



(*b*)

Fig. C.13 **a.** Diagrama de blocos de simulação para um sistema com retroação dotado de saturação; **b.** Janela Block parameter para o somador

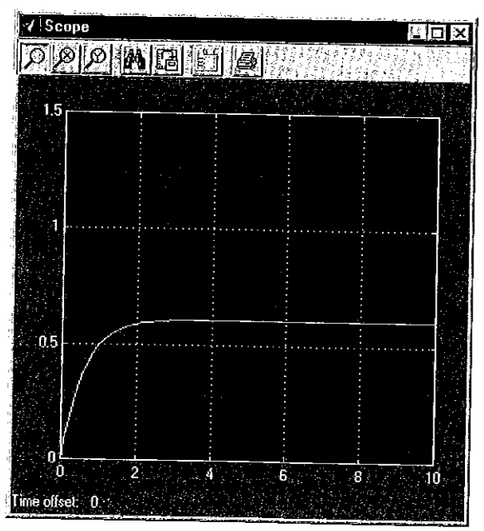


Fig. C.14 Saída da simulação do Exemplo C.3

Exemplo C.4

Simulando sistemas digitais

Neste exemplo demonstramos dois métodos para gerar sistemas digitais através do Simulink com o objetivo de simulação, como mostrado na Fig. C.15.

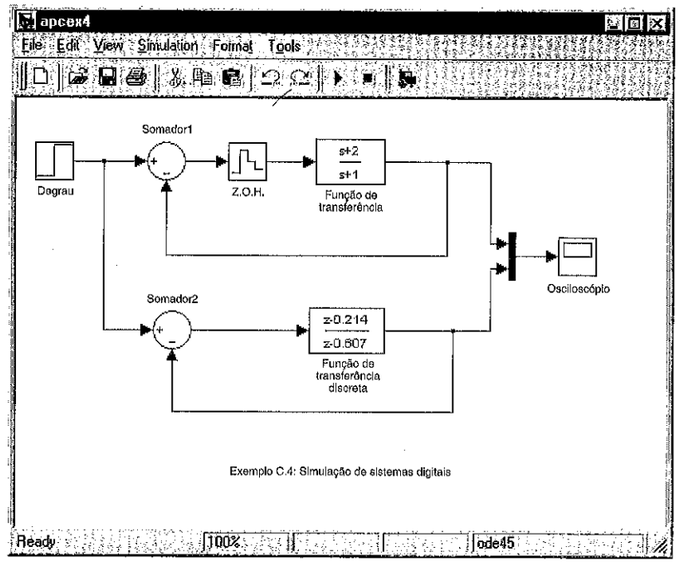


Fig. C.15 Diagrama de blocos Simulink para simulação de sistemas digitais de duas maneiras

A primeira abordagem utiliza uma função de transferência linear em cascata com um bloco extrapolador de ordem zero, **Zero-Order Hold**, obtido da janela **Library: simulink3/Discrete**, mostrado na Fig. C.16. O segundo método usa uma função de transferência discreta também obtida a partir da janela **Library: simulink3/Discrete**. O restante do diagrama de blocos foi obtido pelos métodos descritos anteriormente.

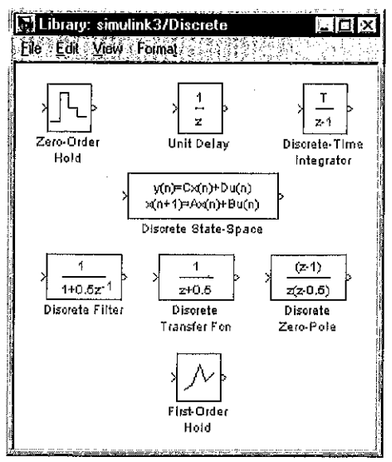


Fig. C.16 Biblioteca Simulink de partes de sistemas discretos

Os parâmetros de bloco para os blocos **Zero-Order Hold** e **Discrete Transfer Fcn** são definidos como mostrado nas Figs. C.17(*a*) e (*b*), respectivamente.

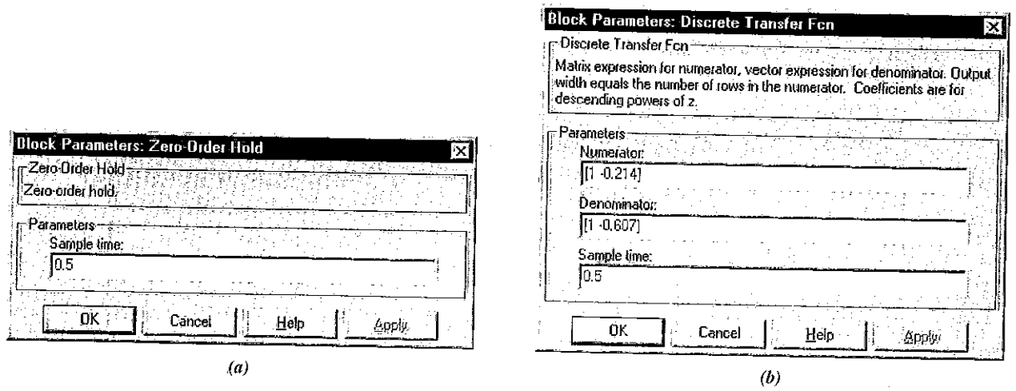


Fig. C.17 Janelas Block Parameter para: **a.** bloco **Zero-Order Hold** (z.o.h.); **b.** bloco **Discrete Transfer Fcn**

Selecione a opção **Parameters** no menu **Simulation** da janela do modelo e defina o tempo de parada da simulação em 4 segundos. O resultado da simulação está mostrado na Fig. C.18.

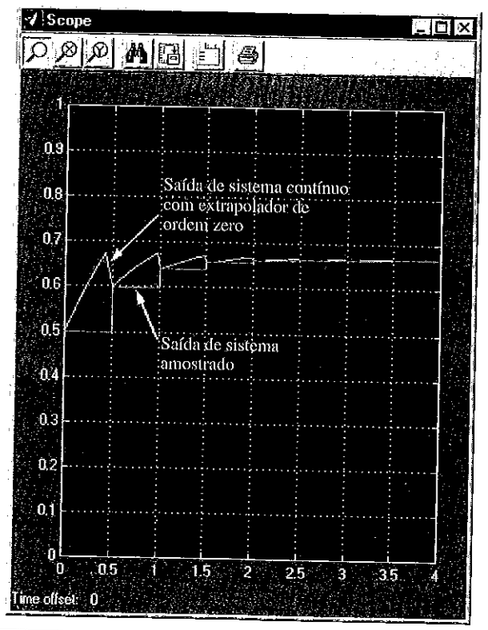


Fig. C.18 Saídas de sistemas digitais

C.4 Sumário

Este apêndice explicou o Simulink, suas vantagens, e como usá-lo. Os exemplos foram tirados dos Caps. 4, 5 e 13 e foi demonstrado o uso do Simulink na simulação de sistemas lineares, não-lineares e digitais.

O objetivo deste apêndice foi familiarizar você com o assunto e iniciar o uso do Simulink. Existem muitos blocos, parâmetros e preferências que não foram mostrados neste curto apêndice. Você está encorajado a explorar e expandir o uso de Simulink por meio da ajuda na tela explicada anteriormente. As referências na Bibliografia deste apêndice também fornecem uma oportunidade de aprender mais sobre o Simulink.

Bibliografia

The MathWorks, Inc. *Using MATLAB Version 5*. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1984-1999.

The MathWorks, Inc. *Using Simulink Version 3*. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1990-1999.

APÊNDICE D

Tutorial sobre Ferramentas de Interface Gráfica de Usuário (GUI) do MATLAB

D.1 Introdução

Os leitores que estiverem estudando o MATLAB devem explorar os recursos do LTI Viewer (Visualizador LIT) e da Root Locus Design GUI (Interface Gráfica de Usuário para Projeto com o Lugar das Raízes) do MATLAB. Antes de prosseguir, o leitor deverá estudar o Apêndice B, tutorial do MATLAB, incluindo a Seção B.1, que é aplicável a este apêndice.

Para usar as ferramentas descritas neste apêndice, é necessário dispor, além da Versão 5 do MATLAB, da Versão 4.2 da *Toolbox* de Sistemas de Controle do MATLAB.

Os arquivos M neste apêndice, que estão disponíveis no CD-ROM que acompanha o livro e nos portais da rede mundial (*websites*) listados no Apêndice B, foram desenvolvidos para PC usando a Versão 5.3 do MATLAB e a Versão 4.2 da *Toolbox* de Sistemas de Controle. O código poderá ser executado também em estações de trabalho que aceitem o MATLAB. Consulte o Guia de Instalação do MATLAB de sua plataforma, para conhecer as exigências mínimas de hardware do sistema.

D.2 O LTI Viewer: Descrição

O LTI Viewer é uma forma conveniente de obter e ver gráficos de resposta nos domínios do tempo e de freqüência de funções de transferência LIT e obter medições a partir destes gráficos. Em particular, alguns gráficos que o LTI Viewer pode criar são os gráficos de resposta ao degrau e ao impulso, os diagramas de Bode, de Nyquist, de Nichols e de pólos e zeros . Além disso, podem ser mostrados, com um clique do mouse, os valores dos pontos críticos nesses gráficos. A Tabela D.1 mostra os pontos críticos disponíveis para cada um dos gráficos.

Tabela D.1 Pontos críticos disponíveis para cada gráfico no LTI Viewer do MATLAB

	Valor de pico; instante de pico	Tempo de assentamento	Tempo de subida	Valor de estado estacionário	Margens de ganho/fase; freqüências zero dB/180°	Valor pólo zero
Degrau	•	•	•	•		
Impulso	•	•				
Bode	•					
Nyquist					•	
Nichols					•	
Pólo zero					•	•

D.3 Usando o LTI Viewer

Nesta seção indicaremos os passos que você deve seguir para usar o LTI Viewer com o objetivo de plotar as respostas nos domínios do tempo e de freqüência. Se você tiver alguma dificuldade, poderá obter ajuda na barra de menus e na **Barra de Status** do **LTI Viewer**, situada na parte inferior da janela do **LTI Viewer**, bem como na opção **Ref** da ***Toolbox* de Sistemas de Controle**, disponível na janela de **Help Desk**. O texto seguinte resume os passos a serem adotados para se obter os gráficos a partir do LTI Viewer:

1. **Acessar a janela:** A janela LTI Viewer, mostrada na Fig. D.1, pode ser acessada digitando *ltiview* na **Janela de Comando do MATLAB** ou executando este comando em um arquivo M.
2. **Criar funções de transferência LIT:** Cria funções de transferência como objetos LIT, para a resposta que você quer obter. As funções de transferência podem ser criadas em um arquivo M ou na **Janela de Comando do MATLAB**. Para carregar as funções de transferência na área de trabalho do MATLAB, execute o arquivo M correspondente ou digite comandos na **Janela de Comando do MATLAB**. Todos os objetos LIT na área de trabalho do MATLAB podem ser exportados para o LTI Viewer.
3. **Selecionar funções de transferência LIT para o LTI Viewer:** Escolha a opção **Import** no Menu File do **LTI Viewer** e selecione todos os objetos LIT cujas respostas você deseja mostrar no LTI Viewer durante a seção corrente.
4. **Selecionar os objetos LIT para obter um próximo gráfico:** Clique com o botão direito do mouse em qualquer parte da área do gráfico do LTI Viewer para obter um menu instantâneo conforme mostrado na Fig. D.1. Na opção **Systems**, selecione ou desmarque os objetos cujos gráficos você quer ou não mostrar no LTI Viewer. Pode ser selecionada mais de uma função de transferência.
5. **Selecionar o tipo de gráfico:** Clique com o botão direito do mouse em qualquer parte da área do gráfico do LTI Viewer para obter um menu instantâneo conforme mostrado na Fig. D.1. Na alternativa **Plot Type**, selecione o tipo de gráfico que você quer mostrar no LTI Viewer.
6. **Selecionar as características:** Clique com o botão direito do mouse em qualquer parte da área do gráfico do LTI Viewer para obter um menu instantâneo conforme mostrado na Fig. D.1. Na opção **Characteristics**, selecione as características do gráfico que você quer mostrar. Mais de uma característica pode ser selecionada. Para cada característica escolhida, será marcado um ponto no gráfico no local apropriado.
7. **Interagir com o gráfico:**
   Zoom: Para aproximar ou afastar, selecione **Zoom** no menu instantâneo obtido ao clicar com o botão direito do mouse e escolha a opção desejada. Para aproximar, selecione o zoom em x, em y, ou em ambos. Então arraste o mouse sobre a faixa do gráfico do LTI Viewer que você deseja mostrar. Para afastar, selecione **Out**.
   Grade: Para fazer aparecer e desaparecer a grade, selecione **Grid** no menu obtido ao clicar com o botão direito do mouse.
   Características: Leia os valores das características mantendo um dos botões do mouse pressionado e o cursor sobre o ponto da característica no gráfico.

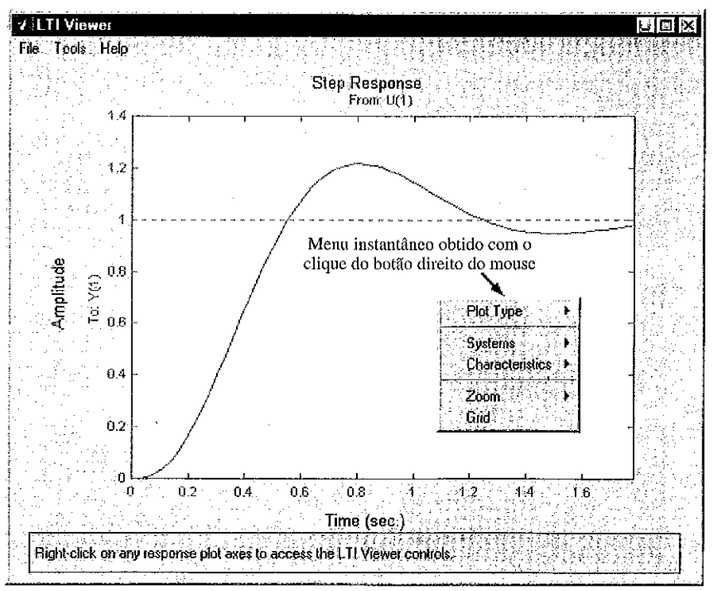


Fig. D.1 LTI Viewer mostrando o menu instantâneo obtido com o clique do botão direito do mouse

Coordenadas: Para obter as coordenadas de um ponto do gráfico, mantenha o botão esquerdo do mouse pressionado e o cursor sobre o ponto.
Identificar a curva: Mantenha o botão direito do mouse pressionado com o cursor sobre qualquer parte de um gráfico. O gráfico se torna cheio e é identificado com um rótulo instantâneo.

D.4 Exemplos de uso do recurso LTI Viewer

Esta seção apresenta cinco exemplos de uso do recurso LTI Viewer tirados dos Caps. 4, 10 e 13. Os exemplos mostrarão os arquivos M juntamente com a janela resultante no LTI Viewer.

Exemplo D.1

Resposta ao degrau

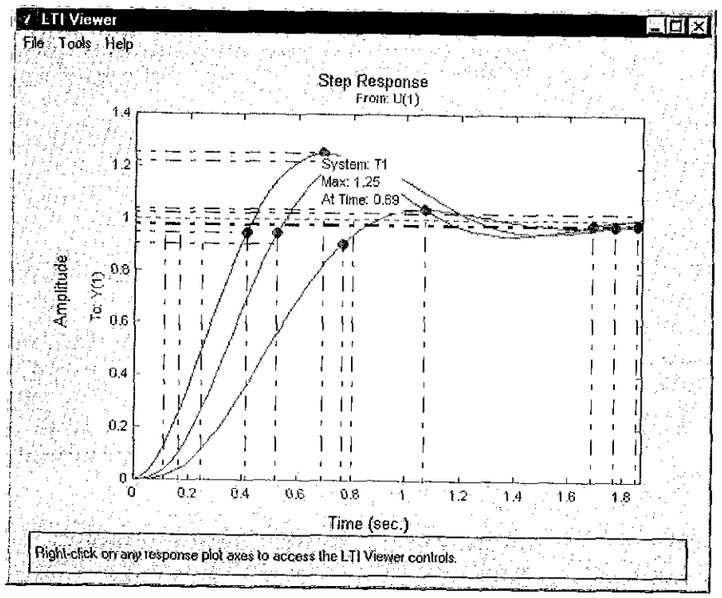
Este exemplo, tirado do Exemplo 4.8 no texto, mostra o uso do LTI Viewer para mostrar simultaneamente três respostas ao degrau, bem como seu instante de pico, tempo de assentamento, tempo de elevação e valores de estado estacionário. Sigamos os passos listados na Seção D.3.

Acesso ao LTI Viewer e criação de objetos LIT: Siga os Passos (1) e (2) da Seção D.3 para acessar o LTI Viewer e gerar as funções de transferências. A Fig. D.2(*a*) mostra o arquivo M usado para gerar as três funções de transferência.

Fig. D.2 LTI Viewer usado para resposta ao degrau: **a.** Arquivo M; **b.** Gráfico do LTI Viewer

```
'Exemplo D.1'                                  %Exibe título.
'LTI Viewer para o Cap. 4, Exemplo 4.8'        %Exibe título.
'Resposta ao degrau'                           %Exibe título.
'T1(s)'                                        %Exibe título.
T1=tf(24.542,[1 4 24.542])                     %Cria T1.
'T2(s)'                                        %Exibe título.
T2=tf(245.42,conv([1 10],[1 4 24.542]))        %Cria T2.
'T3(s)'                                        %Exibe título.
T3=tf(73.626,conv([1 3],[1 4 24.542]))         %Cria T3.
ltiview                                        %Chama o LTI Viewer.
```

(*a*)



(*b*)

Seleção de funções de transferências para ver as respostas: Após executar o arquivo M, siga os Passos (3) e (4) da Seção D.3 e selecione T1, T2 e T3.

Seleção do tipo de gráfico: Siga o Passo (5) da Seção D.3 e selecione **Step** (Degrau).

Seleção das Características: Siga o Passo (6) da Seção D.3 e selecione **Peak Response** (Valor de Pico da Resposta), **Settling Time** (Tempo de Assentamento), **Rise Time** (Tempo de Subida), e **Steady State** (Estado Estacionário).

Interação com o gráfico: Siga o Passo (7) da Seção D.3 e interaja com o gráfico. Em particular, leia o valor de pico e o instante de pico da resposta ao degrau de T1. A Fig. D.2(*b*) mostra a janela do **LTI Viewer** com as respostas e o instante e o valor de pico do sistema T1.

Exemplo D.2

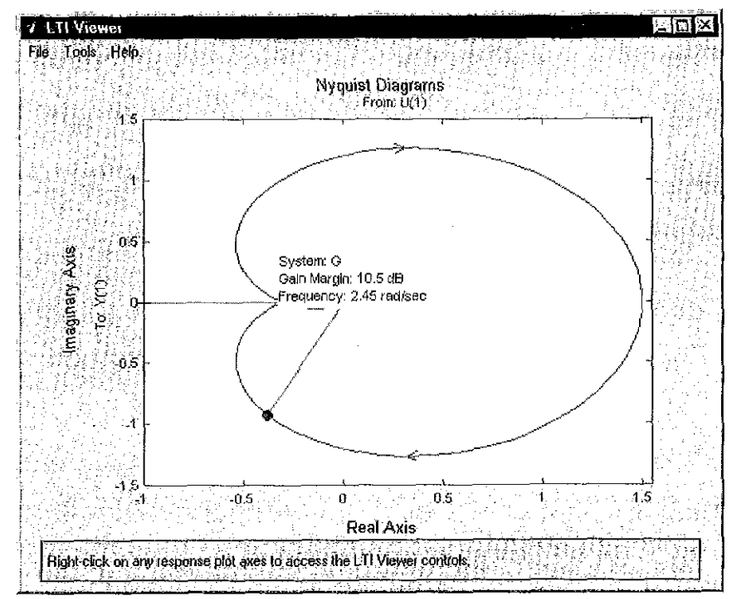
Diagrama de Nyquist e margens de ganho/fase

Este exemplo, tirado do Exemplo 10.8 do texto, mostra o uso do LTI Viewer para plotar um diagrama de Nyquist e obter a margem de ganho, a margem de fase, a freqüência de zero dB e a freqüência de 180°. Para criar este gráfico, siga os Passos (1) até (4) da Seção D.3 usando o arquivo M mostrado na Fig. D.3(*a*). Então, use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Nyquist** na opção **Plot Type**. Para obter as margens de ganho e de fase bem como a freqüência de margem de ganho e a freqüência de margem de fase use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Stability Margins** na opção **Characteristics**. A Fig. D.3(*b*) mostra o resultado da janela do **LTI Viewer**. A margem de ganho e a freqüência de 180° do sistema são mostradas.

Fig. D.3 LTI Viewer usado para diagrama de Nyquist: **a.** Arquivo M; **b.** Gráfico do LTI Viewer

```
'Exemplo D.2'                                  %Exibe rótulo.
'LTI Viewer para o Cap. 10, Exemplo 10.8'      %Exibe rótulo.
'Diagrama de Nyquist'                          %Exibe rótulo.
numg=6;                                        %Gera o numerador de G(s).
deng=conv([1 2],[1 2 2]);                      %Gera o denominador de G(s).
'G(s)'                                         %Exibe rótulo.
G=tf(numg,deng)                                %Cria e mostra G(s).
ltiview                                        %Chama o LTI Viewer.
```

(*a*)



(*b*)

Exemplo D.3

Gráficos de Bode e margens de ganho/fase

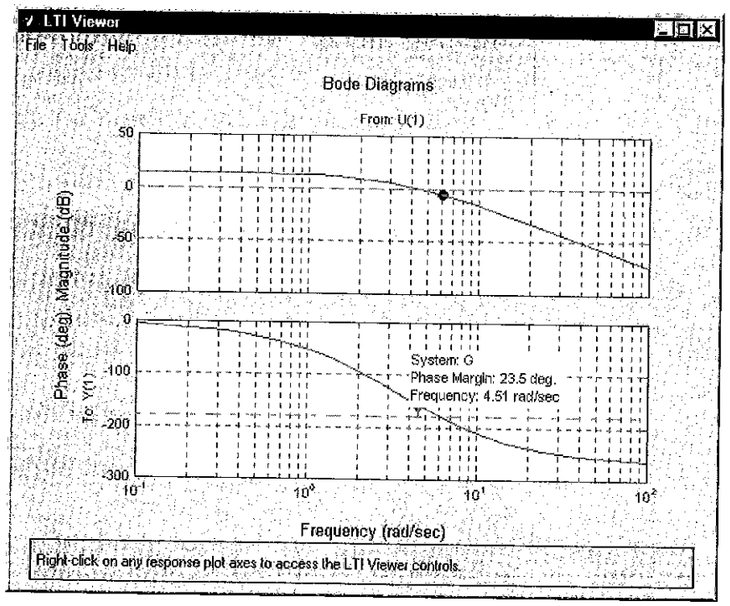
Este exemplo, tirado do Exemplo 10.10 do texto, mostra o uso do LTI Viewer na produção de um gráfico de Bode e na obtenção da margem de ganho, da margem de fase, da freqüência de zero dB e da freqüência de 180°. Para criar este gráfico, siga os Passos (1) até (4) da Seção D.3 usando o arquivo M mostrado na Fig. D.4(*a*). Então use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Bode** na opção **Plot Type**. Para achar as margens de ganho e de fase, bem como as freqüências de margem de ganho e de margem de fase, use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Stability Margins** na opção **Characteristics**. Use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Grid**. A Fig. D.4(*b*) mostra o resultado da janela **LTI Viewer**. A margem de fase e a freqüência de 0dB do sistema são mostradas.

Como o Exemplo 10.10 usou aproximações assintóticas para determinar as características, como margens de ganho e de fase, haverá algumas discrepâncias entre as características achadas usando o LTI Viewer, que usa a resposta de freqüência exata, e os resultados do Exemplo 10.10.

Fig. D.4 LTI Viewer usado para gráfico de Bode: **a.** Arquivo M; **b.** Gráfico do LTI Viewer

```
'Exemplo D.3'                                  %Exibe título.
'LTI Viewer para o Cap. 10, Exemplo 10.10'     %Exibe título.
'Gráfico de Bode'                              %Exibe título.
numg=200;                                      %Gera o numerador de G(s).
deng=poly([-2 -4 -5]);                         %Gera o denominador de G(s).
'G(s)'                                         %Exibe título.
G=tf(numg,deng)                                %Cria e mostra G(s).
ltiview                                        %Chama o LTI Viewer.
```

(*a*)



(*b*)

Exemplo D.4

Carta de Nichols e margens de ganho/fase

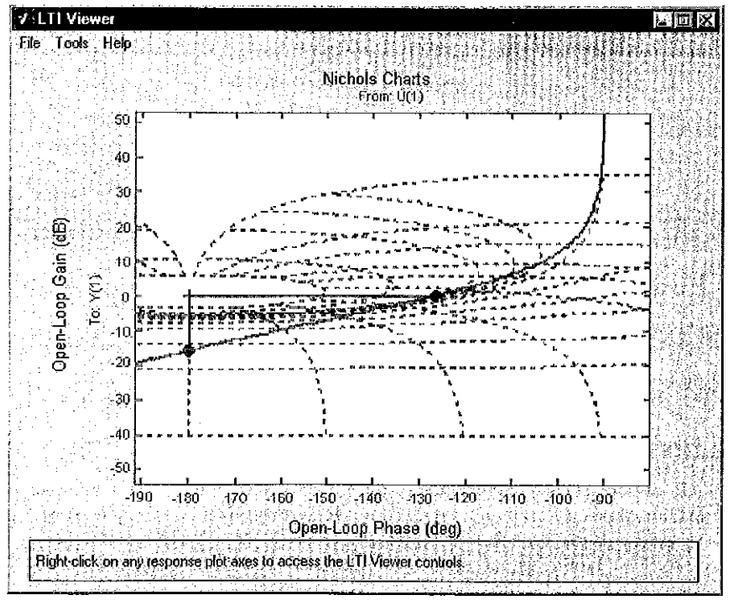
Este exemplo, que reproduz a Fig. 10.47 do texto, mostra o uso do LTI Viewer na produção da carta de Nichols e na obtenção da margem de ganho, da margem de fase, da freqüência de zero dB e da freqüência de 180°.

Para criar este gráfico, siga os Passos (1) até (4) da Seção D.3 usando o arquivo M mostrado na Fig. D.5(*a*). Então use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Nichols** na opção **Plot Type**. Para determinar as margens de ganho e de fase, bem como as freqüências de margem de ganho e de margem de fase, use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Stability Margins** na opção **Characteristics**. Use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Grid**. Finalmente, selecione **Zoom** no menu obtido com o clique do botão direito do mouse, escolha a opção **X-Y**, e arraste o cursor sobre uma parte do gráfico de Nichols para obter a vista detalhada mostrada na Fig. D.5(*b*). A Fig. D.5(*b*) também mostra os pontos a partir dos quais se podem ler as margens de ganho e de fase e freqüências de 0dB e de 180°.

Fig. D.5 LTI Viewer usado para carta de Nichols: **a.** Arquivo M; **b.** Gráfico do LTI Viewer

```
'Exemplo D.4'                                  %Exibe título.
'LTI Viewer para o Cap. 10, Fig. 10.47'        %Exibe título.
'Carta de Nichols'                             %Exibe título.
numg=1;                                        %Gera o numerador de G(s).
deng=poly([0 -1 -2]);                          %Gera o denominador de G(s).
'G(s)'                                         %Exibe título.
G=tf(numg,deng)                                %Cria G(s).
ltiview                                        %Chama o LTI Viewer.
```

(*a*)



(*b*)

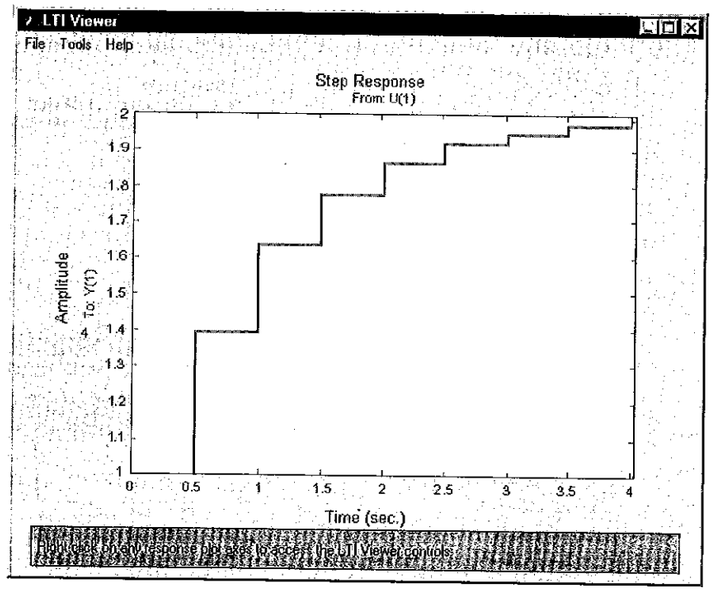
Exemplo D.5

Resposta ao degrau de sistemas digitais

Este exemplo mostra o uso do LTI Viewer para produzir respostas ao degrau de sistemas digitais. Para criar este gráfico, siga os Passos (1) até (4) da Seção D.3 usando o arquivo M mostrado na Fig. D.6(*a*). Então use o menu obtido com o clique do botão direito do mouse e selecione **Step** na opção **Plot Type**. A Fig. D.6(*b*) mostra a janela **LTI Viewer** com a resposta ao degrau do sistema digital.

```
'Exemplo D.5'                          %Exibe título.
'LTI Viewer para o Cap. 13'            %Exibe título.
'Resposta ao degrau de um sistema digital'  %Exibe título.
'G(z)'                                 %Exibe título.
G=tf([1 -0.214],[1 -0.607],0.5)        %Gera função de transferência amostrada.
'T(z)'                                 %Exibe título.
T=G/(1+G)                              %Calcula a função de transferência amostrada.
                                       %a malha fechada para sistema amostrado.
                                       %com retroação unitária.
ltiview                                %Chama o LTI Viewer.
```

(*a*)



(*b*)

Fig. D.6 LTI Viewer usado para resposta ao degrau digital: **a.** Arquivo M; **b.** Gráfico do LTI Viewer

D.5 Root Locus Design GUI: Descrição

O Root Locus Design GUI é uma forma conveniente e intuitiva para obter, ver e interagir com o lugar das raízes do sistema. Após a ferramenta produzir um lugar das raízes, você pode arrastar pólos a malha fechada ao longo do lugar das raízes e ler os valores de ganho, relação de amortecimento, freqüência natural e localização do pólo. Além disso, você também pode observar mudanças imediatas na resposta a malha fechada do sistema através do LTI Viewer. Você pode adicionar limites de desempenho, como tempo de assentamento, relação de amortecimento e freqüência natural. Outra função da ferramenta é o projeto interativo. Você pode posicionar e arrastar pólos e zeros de compensadores no plano *s* e ver seus efeitos imediatos sobre o lugar das raízes e sobre a resposta a malha fechada no LTI Viewer.

D.6 Usando o Root Locus Design GUI

Nesta seção apresentaremos os passos que você deve seguir para usar o Root Locus Design GUI para executar a análise e o projeto de sistemas. Se você encontrar dificuldades, a ajuda está disponível na barra de menu da janela **Root Locus Design**. Selecione **Help** e em seguida **Main Help**. Além disso, a ajuda pode ser obtida selecionando nesta janela o botão **Go to Help Desk** e em seguida **Control System Toolbox Ref**. A ajuda também está disponível na **Barra de Status** na parte inferior da janela **Root Locus Design**. A seguir estão resumidos os passos para usar o Root Locus Design GUI.

1. **Acessar o Root Locus Design GUI:** A janela **Root Locus Design**, mostrada na Fig. D.7, pode ser acessada teclando *rltool* na **Janela de Comando do MATLAB** ou executando este comando em um arquivo M.
2. **Criar funções de transferência LIT:** Cria funções de transferência a malha aberta como objetos LIT para as quais você deseja analisar características a malha fechada ou projetar compensadores. As funções de transferências podem ser criadas em um arquivo M ou na **Janela de Comando do MATLAB**. Para colocar funções de transferências na área de trabalho do MATLAB, execute o arquivo M ou os comandos correspondentes na **Janela de Comando do MATLAB**. Todos os objetos LIT da área de trabalho do MATLAB podem ser exportados para o Root Locus Design GUI. Neste exemplo, vamos executar um arquivo M e gerar o objeto LIT relativo a $G(s) = 1/[(s + 2)(s^2 + 2s + 2)]$.
3. **Criar um modelo a malha fechada para o Root Locus Design GUI:** Escolha a opção **Import Model** no menu **File** na janela **Root Locus Design** para exibir a janela mostrada na Fig. D.8. Pressione o botão **Other** para percorrer um conjunto de opções na escolha de estruturas de retroação e selecionar a configuração desejada. Após a estrutura ser escolhida, selecione um objeto LIT a partir da Área de Trabalho e o exporte para um dos blocos de seu sistema. Faça isso pressionando a seta que aponta para a direita próxima ao bloco selecionado (P, H ou F) localizado na seção da janela intitulada Design Model. Sua função de transferência selecionada aparece agora no espaço destinado para isso. Repita com outros blocos, caso necessário. Você pode também digitar funções de transferências LIT, apenas como `tf(num,den)`, diretamente dentro dos espaços. Clique em **OK** e feche a janela.

Fig. D.7 Janela **Root Locus Design**

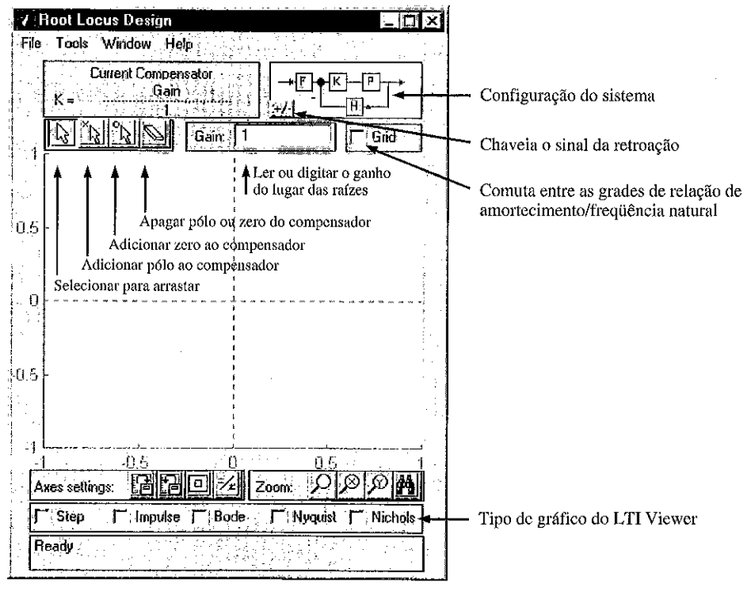
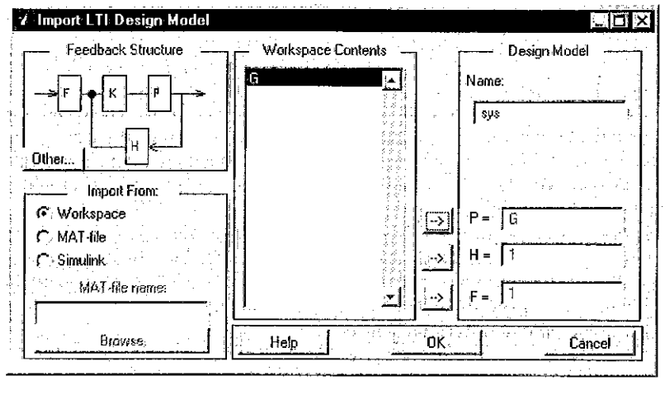


Fig. D.8 A janela **Import LTI Design Model** mostrando G selecionado como a planta, P



4. **Interagir com o lugar das raízes:** Após fechar a janela **Import LTI Design Model**, a janela **Root Locus Design** agora contém o lugar das raízes do sistema mostrado na Fig. D.9. Explicaremos depois como adicionar a reta de relação de amortecimento constante e a reta de tempo de assentamento constante mostradas na Fig. D.9. Por ora, selecione um tipo de gráfico na parte inferior da janela para abrir a janela do **LTI Viewer for Root Locus Design**. O LTI Viewer mostra a resposta selecionada para a posição corrente dos pólos a malha fechada no lugar das raízes (assinalados pelos quadrados pequenos na Fig. D.9). Selecione a seta na extremidade esquerda da barra de ferramentas da janela **Root Locus Design** para arrastar pólos e zeros. Posicione o cursor sobre um pólo a malha fechada desejado. O cursor se transforma em uma mão. Pressione o mouse e arraste os pólos a malha fechada ao longo do lugar das raízes. Conforme você arrasta os pólos de malha fechada, você pode ler na **Barra de Status** as coordenadas do pólo que está sendo arrastado, sua relação de amortecimento e sua freqüência natural. O ganho pode ser lido na caixa **Gain**, conforme mostrado na Fig. D.9. Note que a resposta no LTI Viewer também muda para refletir a localização corrente do pólo a malha fechada. Uma listagem de pólos e zeros a malha aberta bem como dos pólos e zeros a malha fechada pode ser obtida no menu **Tools** na Fig. D.9. Outra alternativa para análise é teclar o ganho na caixa **Gain**. Os pólos a malha fechada se reposicionam para este valor de ganho. Se quiser, você pode aproximar ou afastar o gráfico do lugar das raízes usando os botões de zoom. Estes botões estão localizados na barra de ferramenta inferior, como mostrado na Fig. D.9. Deixe o mouse parado por um instante em cada botão para obter a dica de tela que diz o que o botão faz. Selecione o botão de zoom desejado e então arraste o mouse para colocar o cursor sobre a parte do gráfico de lugar das raízes que você quer mostrar. Para afastar, selecione o botão com ícone em forma de binóculo.

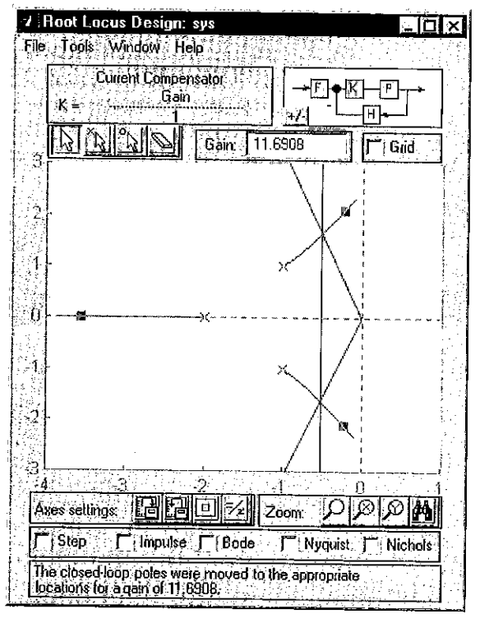
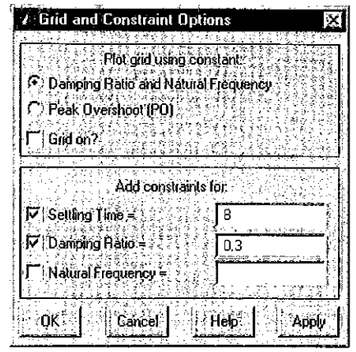


Fig. D.9 A janela **Root Locus Design** para o sistema criado com pólo a malha fechada no segundo quadrante selecionado

5. **Adicionar grades e limites:** Linhas de valores constantes de relação de amortecimento e curvas de freqüência natural podem ser ativadas e desativadas clicando na caixa de verificação **Grid**. Linhas de valores constantes de relação de amortecimento, de tempo de assentamento e de freqüência natural podem ser adicionados selecionando a opção **Add Grid/Boundary** no menu **Tools**. Aparece a janela **Grid and Constraints Options**, mostrada na Fig. D.10. Digite as restrições desejadas, clique em **OK**, e retorne à janela **Root Locus Design**. Você verá agora os limites conforme mostrado pelas retas radiais ($\zeta = 0{,}3$) e pela reta vertical ($T_s = 8$ segundos) na Fig. D.9. Agora você pode arrastar um pólo a malha fechada para a interseção do lugar das raízes com as duas linhas e ler o ganho necessário para que isto ocorra na caixa **Gain**. Você também pode posicionar o cursor sobre um pólo de ordem maior para ler sua localização. Quando o cursor se transformar em uma mão, clique e leia a localização do pólo na **Barra de Status**.

Fig. D.10 A janela **Grid and Constraint Options** com limites para oito segundos de tempo de assentamento e 0,3 de relação de amortecimento



6. **Adicionar pólos e zeros e projetar um compensador:** Você pode adicionar pólos e zeros no plano s como faria ao projetar um compensador. Para adicionar um pólo ou um zero, clique na seta apropriada na barra de ferramenta, como mostrado na Fig. D.7. Então, ponha o cursor, que agora contém um pólo ou um zero na ponta, no local do plano s onde deseja posicionar o pólo ou o zero. Clique o mouse, e o pólo ou o zero será adicionado. Há uma mudança imediata no lugar das raízes e na resposta da janela do **LTI Viewer for Root Locus Design**. Os pólos e zeros do compensador são mostrados em vermelho, em oposição aos pólos e zeros em azul da planta. Você pode agora agarrar os pólos e zeros do compensador, mover suas posições, e ver as mudanças imediatas no lugar das raízes e na resposta na janela **LTI Viewer for Root Locus Design**. Você pode projetar o compensador movendo um pólo ou um zero do compensador até que o lugar das raízes e os limites de projeto se cruzem. Finalmente, você pode apagar pólos e zeros do compensador clicando no apagador localizado na barra de ferramenta da janela **Root Locus Design**, posicionando o cursor, agora em forma de apagador, em cima do pólo ou do zero do compensador que você quer apagar, e clicando.

D.7 Sumário

Este apêndice descreveu duas ferramentas de Interface Gráfica de Usuário do MATLAB, o LTI Viewer e o Root Locus Design GUI. Façamos um resumo de cada uma delas.

Descrevemos como usar o LTI Viewer do MATLAB para obter gráficos de resposta nos domínios de tempo e de freqüência, bem como os pontos críticos nestes gráficos, para funções de transferência na área de trabalho do MATLAB. Foram dados diversos exemplos cobrindo a resposta ao degrau para sistemas contínuos ou amostrados, os diagramas de Nyquist, os gráficos de Bode e a carta de Nichols.

Além disso, diversas preferências que não descrevemos estão disponíveis no menu **Tools** do LTI Viewer. Nesse menu, escolha **Viewer Configuration** para selecionar o leiaute da resposta. **Response Preferences** permite as seguintes opções de gráfico: extensão e faixa de valores do gráfico, definições dos tempos de assentamento e de subida, extensão do eixo de freqüências, e unidades para variáveis de resposta de freqüência. Também dentro do menu **Tools**, a seleção de **Linestyle Preferences** permite que possam ser escolhidos cores, estilos de marcador e estilos de linha. O leitor interessado deve consultar a referência da *Toolbox* de Sistemas de Controles listada na Bibliografia deste apêndice para obter mais detalhes sobre opções não tratadas neste apêndice, bem como instruções adicionais sobre o LTI Viewer.

O Root Locus Design GUI é uma ferramenta conveniente e intuitiva para realizar a análise e o projeto usando o lugar das raízes. Você pode mover os pólos a malha fechada ao longo do lugar das raízes e ler imediatamente os valores de ganho, localizações de pólos a malha fechada e características de desempenho. Você também pode ver na janela do LTI Viewer um gráfico imediato das respostas selecionadas, como resposta ao degrau a malha fechada ou resposta de freqüência a malha aberta.

Há outras opções disponíveis no menu **File** e **Tools** e na barra de ferramentas na janela **Root Locus Design** que não abordamos. O leitor interessado deve consultar a referência da *Toolbox* de Sistemas de Controles listada na Bibliografia deste apêndice ou as telas de ajuda para obter mais detalhes sobre essas opções bem como instruções adicionais sobre o Root Locus Design GUI.

Finalmente, convém salientar que os resultados obtidos a partir das GUIs podem ser diferentes dos obtidos da análise apresentada nos capítulos. Por exemplo, as GUIs usam gráficos de resposta de freqüências não-assintóticos para obter resultados, enquanto nossa análise e projeto usaram gráficos de Bode assintóticos. Outro exemplo é o tempo de assentamento. No Cap. 4 aproximamos o tempo de assentamento de modo que ele fosse medido nos picos. Com as GUIs, o tempo de assentamento real é usado, isto é, o tempo em que pela primeira vez a curva entra e permanece no interior do intervalo de $\pm 2\%$ em torno do valor final.

Bibliografia

The MathWorks, Inc. *MATLAB: Using MATLAB, Version 5*. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1984-1999.

The MathWorks, Inc. *MATLAB: Control System Toolbox User's Guide, Version 4*. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1992-1998.

APÊNDICE E

Tutorial da Toolbox *de Matemática Simbólica do MATLAB*

E.1 Introdução

Os leitores que estiverem estudando o MATLAB devem explorar os recursos adicionais da *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB. Antes de prosseguir, o leitor deve estudar o Apêndice B, tutorial do MATLAB, incluindo a Seção B1, aplicável a este apêndice.

Para acrescentar processamento matemático simbólico aos seus arquivos-M, você precisa ter instalada em sua máquina, além da Versão 5 do MATLAB e da Versão 4 da *Toolbox* de Sistemas de Controle, a Versão 2 da *Toolbox* de Matemática Simbólica.

Os arquivos-M neste apêndice, que estão disponíveis no CD-ROM que acompanha o livro e nos portais da rede mundial (*websites*) listados no Apêndice B, foram desenvolvidos para PC usando a Versão 5.3 do MATLAB, a Versão 4.2 da *Toolbox* de Sistemas de Controle e a Versão 2.0 da *Toolbox* de Matemática Simbólica.

Os comandos de matemática simbólica são utilizados em seus arquivos-M juntamente com as instruções comuns do MATLAB. O único requisito adicional consiste em declarar as variáveis simbólicas antes que elas sejam usadas, através da instrução `syms x1 x2 ...`, em que `xi` são variáveis simbólicas.

Alguns dos recursos adicionais que a *Toolbox* de Matemática Simbólica fornece para análise e projeto de sistemas de controle são:

1. As funções e as equações podem ser introduzidas na forma simbólica. Ou seja, caracteres alfabéticos tanto quanto caracteres numéricos podem ser usados nos arquivos-M. Por exemplo, você pode entrar com `B=x^2+3*x+7` em vez de `B=[1 3 7]`. Você pode até mesmo entrar com `B=a*x^2+b*x+c` e obter seus fatores como

```
[            2          1/2]
[    -b + (b - 4 a c)     ]
[1/2 --------------------]
[            a            ]
[                         ]
[            2          1/2]
[    -b - (b - 4 a c)     ]
[1/2 --------------------]
[            a            ]
```

2. As expressões simbólicas podem ser manipuladas algebricamente e simplificadas.
3. As funções de transferência podem ser digitadas de modo quase igual à forma em que são escritas, tornando seus arquivos-M mais legíveis. Por exemplo, a instrução `G=(s+1)*(s+2)/[(s^2+3*s+10)*(s+4)]` pode substituir três outras, `numg=poly([-1 -2])`, `deng=conv([1 3 10],[1 4])` e `G=tf(numg,deng)`.
4. A transformada de Laplace e a transformada z, bem como suas inversas, podem ser digitadas e calculadas na forma simbólica.
5. As funções podem ser mostradas em "impressão bonita" (recurso *pretty*) para maior clareza na tela **MATLAB Command Window** e na saída impressa em papel.

Estas são apenas algumas das vantagens de se usar a *Toolbox* de Matemática Simbólica. Este apêndice irá explorar mais. O leitor é encorajado a não parar de investigar essas vantagens ao fim do Apêndice E, uma vez que há muito mais a ver além do que será tratado aqui. A Bibliografia do fim deste apêndice fornece referências para investigação adicional.

O formato dos exemplos deste apêndice é o mesmo do Apêndice B. Os programas simbólicos utilizam a designação capítulo<número>programa simbólico<número>, isto é, cap2**ps**3. Assim, os programas deste apêndice se diferenciam dos programas do Apêndice B pelo uso de "ps" (programa simbólico) antes do número do programa, em vez de "p" (programa), isto é, cap2**p**3. São incluídos exemplos da *Toolbox* de Matemática Simbólica nos Caps. 2, 3, 4 e 13. O leitor, contudo, é encorajado a aplicar o que aprendeu em outros capítulos.

E.2 Exemplos da Toolbox de Matemática Simbólica

Capítulo 2: Modelagem no Domínio de Freqüência

cap2ps1 A potência de cálculo do MATLAB é consideravelmente ampliada com o uso da *Toolbox* de Matemática Simbólica. Neste exemplo demonstramos essa potência calculando a transformada de Laplace inversa de $F(s)$. O início de qualquer cálculo simbólico requer a definição dos objetos simbólicos. Por exemplo, a variável, s, da transformada de Laplace ou a variável tempo, t, devem ser definidas como objeto simbólico. Esta definição é executada utilizando o comando `syms`. Assim, `syms s` define `s` como objeto simbólico; `syms t` define `t` como objeto simbólico; e `syms s t` define ambas as variáveis, `s` e `t`, como objetos simbólicos. Necessitamos somente definir objetos para entrar no programa. As variáveis produzidas pelo programa não necessitam ser definidas. Em conseqüência disto, se estivermos procurando transformadas de Laplace inversas, necessitamos apenas definir s como um objeto simbólico, uma vez que t resultará do cálculo. Uma vez definido o objeto, podemos digitar F como função de s como faríamos normalmente para escrevê-la. Não temos de usar vetores para representar o numerador e o denominador. As transformadas de Laplace ou as funções do tempo também podem ser exibidas na tela **MATLAB Command Window** como normalmente seriam escritas. Esta forma é chamada de "impressão bonita". O comando é `pretty(F)`, onde `F` é a função que se deseja imprimir na forma "bonita". No código a seguir, podemos ver a diferença entre a saída normal e a saída bonita se você executar o código sem os pontos-e-vírgulas, nos passos onde as funções, `F` ou `f`, são definidas. Se `F` tiver sido definida como $F(s)$, podemos obter a transformada de Laplace inversa usando o comando `ilaplace(F)`. No exemplo a seguir, obtemos as transformadas de Laplace inversas das funções no domínio de freqüência usadas nos Casos 2 e 3 na Seção 2.2 do texto.

```
'(cap2ps1)'                                  % Exibe título.
syms s                                       % Constrói objeto simbólico para
                                             % a variável de Laplace 's'.
'Transformada de Laplace inversa'            % Exibe título.
F=2/[(s+1)*(s+2)^2];                         % Define F(s) no exemplo do Caso 2.
'F(s) do Caso 2'                             % Exibe título.
pretty(F)                                    % Apresenta F(s) na forma "bonita".
f=ilaplace(F);                               % Obtém a transformada de Laplace inversa.
'f(t) do Caso 2'                             % Exibe título.
pretty(f)                                    % Apresenta f(t),do Caso 2, na forma
                                             % "bonita".
F=3/[s*(s^2+2*s+5)];                         % Define F(s) no exemplo do Caso 3.
'F(s) do Caso 3'                             % Exibe título.
pretty(F)                                    % Apresenta F(s) do Caso 3 na forma
                                             % "bonita".
f=ilaplace(F);                               % Obtém a transformada de Laplace inversa.
'f(t) do Caso 3'                             % Exibe título.
pretty(f)                                    % Apresenta f(t),do Caso 3, na forma
                                             % "bonita".
pause
```

cap2ps2 Neste exemplo, determinam-se as transformadas de Laplace de funções no domínio do tempo usando o comando `laplace(f)`, onde `f` é uma função no domínio do tempo, $f(t)$. Como exemplo, usamos as funções no domínio do tempo resultantes dos cálculos nos Casos 2 e 3 da Seção 2.2, no texto, e trabalhamos no sentido inverso para obter as transformadas de Laplace. Veremos que o comando, `laplace(f)`, fornece $F(s)$ em frações parciais. Além da "impressão bonita", discutida no exemplo anterior, a *Toolbox* de Matemática Simbólica é dotada de outros comandos que podem alterar em legibilidade e forma a aparência do resultado a ser apresentado. Alguns desses comandos são: `collect(F)` — reúne termos de `F` com coeficientes comuns; `expand(F)` — expande o produto de fatores de `F`; `factor(F)` — fatora `F`; `simple(F)` — obtém a forma mais simples de `F` com o menor número de termos; `simplify(F)` — simplifica `F`; `vpa(expressão,casas decimais)` — significando *variable precision arithmetic* (aritmética de precisão variável), este comando converte termos simbólicos fracionários em termos com um número especificado de casas decimais. Por exemplo, a fração simbólica, 3/16, seria convertida em 0,1875 se o argumento, `casas decimais`, fosse 4. No exemplo a seguir, determinamos a transformada de Laplace de uma função do tempo. O resultado é mostrado sob a forma de frações parciais. Para combinar as frações parciais, usamos o comando `simplify(F)`, onde `F` é a transformada de laplace de $f(t)$ obtida através de `laplace(f)`. Finalmente, usamos `F=vpa(F,3)` para converter as frações simbólicas em decimais no resultado mostrado.


```
'(cap2ps2)'                                  % Exibe título.
syms t                                       % Constrói objeto simbólico para
                                             % a variável 't'.
'Transformada de Laplace'                    % Exibe título.
'f(t) do Caso 2'                             % Exibe título.
f=2*exp(-t)-2*t*exp(-2*t)-2*exp(-2*t);       % Define f(t) do exemplo do Caso 2.
pretty(f)                                    % Apresenta f(t) do Caso 2 na forma
                                             % "bonita".
'F(s) do Caso 2'                             % Exibe título.
F=laplace(f);                                % Obtém a transformada de Laplace.
pretty(F)                                    % Forma "bonita" das frações parciais de
                                             % F(s) do Caso 2.
F=simplify(F);                               % Combina frações parciais.
pretty(F)                                    % Forma "bonita" das frações parciais
                                             % combinadas.
'f(t) do Caso 3'                             % Exibe título.
f=3/5-3/5*exp(-t)*[cos(2*t)+(1/2)*sin(2*t)]; % Define f(t) do exemplo do Case 3.
pretty(f)                                    % Apresenta f(t) do Caso 3 na forma "bonita"
'F(s) do Caso 3 - Frações simbólicas'        % Exibe título.
F=laplace(f);                                % Obtém a transformada de Laplace.
pretty(F)                                    % Forma "bonita" das frações parciais de
                                             % F(s) do Caso 3.
'F(s) do Caso 3 - Representação decimal'     % Exibe título.
F=vpa(F,3);                                  % Converte frações numéricas simbólicas em
                                             % representação decimal de F(s) com 3 casas
                                             % decimais.
pretty(F)                                    % Forma "bonita" da representação decimal.
F=simplify(F);                               % Combina frações parciais.
pretty(F)                                    % Forma "bonita" das frações parciais
                                             % combinadas.
pause
```

cap2ps3 A *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB pode ser usada, como mostrado a seguir, para simplificar a entrada de funções de transferência complicadas: inicialmente, entre com a função de transferência $G(s)$ = `numg/deng`, por intermédio de instruções de matemática simbólica. Converta, então, $G(s)$ em um objeto função de transferência LIT. Esta conversão é feita em dois passos. O primeiro usa o comando `[numg,deng]=numden(G)` para extrair o numerador e o denominador simbólicos de `G`. O segundo passo converte, separadamente, o numerador e o denominador em vetores usando o comando `sym2poly(S)`, onde `S` é um polinômio simbólico. O último passo consiste em formar um objeto função de transferência LIT usando a representação vetorial do numerador e do denominador da função de transferência. Como exemplo, formamos o objeto LIT, $G(s) = [54(s + 27)(s^3 + 52s^2 + 37s + 73)]/[s(s^4 + 872s^3 + 437s^2 + 89s + 65)(s^2 + 79s + 36)]$ utilizando a *Toolbox* de Matemática Simbólica para simplificar e tornar legível.

```
'(cap2ps3)'                                  % Exibe título.
syms s                                       % Constrói objeto simbólico para
                                             % a variável de freqüência 's'.
G=54*(s+27)*(s^3+52*s^2+37*s+73) ...
/(s*(s^4+872*s^3+437*s^2+89*s+65)*(s^2+79*s+36));
                                             % Forma simbólica de G(s).
'Symbolic G(s)'                              % Exibe título.
pretty(G)                                    % Apresenta G(s) na forma "bonita".
[numg,deng]=numden(G);                       % Extrai o numerador e o denominador
                                             % simbólicos.
numg=sym2poly(numg);                         % Forma o vetor do numerador de G(s).
deng=sym2poly(deng);                         % Forma o vetor do denominador de G(s).
'G(s) LTI na Forma Polinomial'               % Exibe título.
Gtf=tf(numg,deng)                            % Constrói e mostra o objeto LIT para G(s)
                                             % na forma polinomial.
'G(s) LTI na Forma Fatorada'                 % Exibe título.
Gzpk=zpk(Gtf)                                % Converte G(s) na forma fatorada.
pause
```

cap2ps4 (Exemplo 2.10) A *Toolbox* de Matemática Simbólica pode ser usada para simplificar a solução de equações simultâneas empregando a Regra de Cramer. Um sistema de equações simultâneas pode ser representado em forma matricial por $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$, onde $\mathbf{A}$ é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas das equações simultâneas, $\mathbf{x}$ é um vetor contendo as incógnitas, e $\mathbf{B}$ é um vetor contendo as entradas. A regra de Cramer estabelece que x_k, o k-ésimo elemento do vetor solução, $\mathbf{x}$, é obtido através de $x_k = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A})$, onde $\mathbf{A}_k$ é a matriz formada pela substituição da k-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$ pelo vetor de entrada, $\mathbf{B}$. No texto, chamamos det($\mathbf{A}$) de delta. No MATLAB, as matrizes são escritas com um espaço ou uma vírgula separando os elementos no interior de cada linha. A linha seguinte é indicada por um ponto-e-vírgula ou por um retorno de carro. A matriz, como um todo, é

delimitada por um par de colchetes. Aplicando o que acaba de ser dito à solução do Exemplo 2.10: `A=[(R1+L*s) -L*s;-L*s (L*s+R2+(1/(C*s)))]` e `Ak=[(R1+L*s) V;-L*s 0]`. A função det (matriz quadrada) calcula o determinante do argumento matriz quadrada. Determinemos a função de transferência, $G(s) = I_2(s)/V(s)$, pedida no Exemplo 2.10. O comando, `simple(S)`, onde `S` é uma função simbólica, é introduzido na solução. `Simple(S)` simplifica a solução reduzindo o tamanho da expressão `S`. O uso de `simple(I2)` reduz a solução combinando os termos de mesma potência da variável de Laplace, s.

```
'(cap2ps4) Exemplo 2.10'                    % Exibe título.
syms s R1 R2 L C V                          % Constrói objetos simbólicos para
                                            % a variável de freqüência 's', e 'R1',
                                            % 'R2', 'L', 'C' e 'V'.
A2=[(R1+L*s) V;-L*s 0]                      % Forma Ak = A2.
A=[(R1+L*s) -L*s;-L*s (L*s+R2+(1/(C*s)))]   % Forma A.
I2=det(A2)/det(A);                          % Usa a Regra de Cramer para
                                            % calcular I2(s).
I2=simple(I2);                              % Reduz a complexidade de I2(s).
G=I2/V;                                     % Forma a função de transferência,
                                            % G(s) = I2(s)/V(s).
'G(s)'                                      % Exibe título.
pretty(G)                                   % Apresenta G(s) na forma "bonita".
pause
```

Capítulo 3: Modelagem no Domínio do Tempo

cap3ps1 (Exemplo 3.6) A *Toolbox* de Matemática Simbólica pode ser usada para efetuar operações com matrizes. O código para realizar estas operações é intuitivo e fácil de ler. As operações são: adição `(+)`, subtração `(-)`, (inversão) `(^-1)` e potenciação `(^n)` de matrizes. Mostramos isso resolvendo o Exemplo 3.6 do texto através do uso direto da Eq. (3.73).

```
'(cap3ps1) Exemplo 3.6'                     % Exibe título.
syms s                                      % Constrói objeto simbólico para
                                            % a variável de freqüência 's'.
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -2 -3];                   % Cria a matriz A.
B=[10;0;0];                                 % Cria o vetor B.
C=[1 0 0];                                  % Cria o vetor C.
D=0;                                        % Cria D.
I=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];                      % Cria a matriz identidade.
'T(s)'                                      % Exibe título.
T=C*((s*I-A)^-1)*B+D;                       % Obtém a função de transferência.
pretty(T)                                   % Forma "bonita" da função de
                                            % transferência.
pause
```

Capítulo 4: Resposta no Domínio do Tempo

cap4ps1 (Exemplo 4.11) A *Toolbox* de Matemática Simbólica, tendo em vista o recurso de efetuar operações com matrizes, presta-se à solução da transformada de Laplace das equações de estado. Além disso, o comando `[V,D]=eig(A)` permite obter os autovalores de uma matriz quadrada, `A`, os quais são os elementos da matriz diagonal, `D`. Mostramos isso resolvendo o Exemplo 4.11.

```
'(cap4ps1) Exemplo 4.11'                    % Exibe título.
syms s                                      % Constrói objeto simbólico para
                                            % a variável de freqüência 's'
'a'                                         % Exibe título.
A=[0 1 0;0 0 1;-24 -26 -9];                 % Cria a matriz A.
B=[0;0;1];                                  % Cria o vetor B.
X0=[1;0;2];                                 % Cria o vetor condição inicial, X(0).
U=1/(s+1);                                  % Cria U(s).
I=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];                      % Cria a matriz identidade.
X=((s*I-A)^-1)*(X0+B*U);                    % Obtém a transformada de Laplace
                                            % do vetor de estado.
x1=ilaplace(X(1));                          % Cálculo de X1(t).
x2=ilaplace(X(2));                          % Cálculo de X2(t).
x3=ilaplace(X(3));                          % Cálculo de X3(t).
y=x1+x2;                                    % Cálculo da saída, y(t).
y=vpa(y,3);                                 % Converte frações em decimais.
'y(t)'                                      % Exibe título.
pretty(y)                                   % Forma "bonita" de y(t).
'b'                                         % Exibe título.
[V,D]=eig(A);                               % Obtém os autovalores, que são
                                            % os elementos da diagonal de D.
'Autovalores on diagonal'                   % Exibe título.
D                                           % Exibe D.
pause
```


cap4ps2 (Exemplo 4.12/4.13) Neste exemplo, usamos a *Toolbox* de Matemática Simbólica do MATLAB para resolver as equações de estado no domínio do tempo. Exploramos o recurso de efetuar integração da *Toolbox* de Matemática Simbólica. Primeiramente calculamos a matriz de transição de estados através da transformada de Laplace inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Utilizamos, em seguida, a integral de convolução para obter a solução. A integração é efetuada usando-se o comando `int(S,v,a,b)`, onde `S` é a função a ser integrada, `v` é a variável de integração, e `a` e `b` são, respectivamente, os limites inferior e superior de integração. Mostramos isso resolvendo o Exemplo 4.12 do texto.

```
'(cap4ps2) Exemplo 4.12/4.13'               % Exibe título.
syms s t tau                                % Constrói objetos simbólicos para
                                            % a variável de freqüência 's', 't'
                                            % e 'tau'.
'a'                                         % Exibe título.
A=[0 1;-8 -6]                               % Cria a matriz A.
B=[0;1]                                     % Cria o vetor B.
X0=[1;0]                                    % Cria o vetor de condição inicial, X(0).
U=1                                         % Cria u(t).
I=[1 0;0 1];                                % Cria a matriz identidade.
'E=(s*I-A)^-1'                              % Exibe título.
E=((s*I-A)^-1)                              % Obtém a transformada de Laplace da
                                            % matriz de transição de estados, (sI-A)^-1.
Fi11=ilaplace(E(1,1));                      % Obtém a transformada de Laplace inversa
Fi12=ilaplace(E(1,2));                      % de cada elemento
Fi21=ilaplace(E(2,1));                      % de (sI-A)^-1
Fi22=ilaplace(E(2,2));                      % para determinar a matriz de transição de
                                            % estados.
'Fi(t)'                                     % Exibe título.
Fi=[Fi11 Fi12;Fi21 Fi22];                   % Forma a matriz de transição de estados,
                                            % Fi(t).
pretty(Fi)                                  % Apresenta a matriz de transição de
                                            % estados, Fi(t), na forma "bonita".
Fitmtau=subs(Fi,t,t-tau);                   % Forma Fi(t-tau).
'Fi(t-tau)'                                 % Exibe título.
pretty(Fitmtau)                             % Apresenta Fi(t-tau) na forma "bonita".
x=Fi*X0+int(Fitmtau*B*1,tau,0,t);           % Calcula x(t).
x=simple(x);                                % Reúne os termos semelhantes.
x=simplify(x);                              % Simplifica x(t).
'x(t)'                                      % Exibe título.
pretty(x)                                   % Apresenta x(t) na forma "bonita".
pause
```

Capítulo 6: Estabilidade

cap6ps1 (Exemplo 6.2) A *Toolbox* de Matemática Simbólica pode ser usada para calcular os valores da tabela de Routh de modo satisfatório. Este recurso é particularmente muito útil nos casos de tabelas mais complicadas, em que são empregados objetos simbólicos, como épsilon. Neste exemplo, representamos cada linha da tabela de Routh por meio de um vetor. As expressões para os elementos das linhas subseqüentes são escritas usando as equações dadas na Tabela 6.2 do texto. O comando MATLAB, `det(M)`, é usado para obter o determinante da matriz quadrada, `M`, como mostrado para cada um dos elementos nas linhas da Tabela 6.2. Além disso, testamos o primeiro elemento da linha anterior para ver se ele é zero. Se for zero, substituímos este valor por épsilon, `e`, no cálculo da linha seguinte. Essa lógica é executada através da estrutura de comandos IF/ELSE/END do MATLAB, como está mostrado no código a seguir. Mostramos agora a elaboração de uma tabela de Routh usando a *Toolbox* de Matemática Simbólica em um problema que requer o método épsilon para completar a tabela. O programa mostrado a seguir gera a tabela de Routh relativa ao Exemplo 6.2 do texto. Além disso, para tornar os resultados mais claros, simplificamos e "embelezamos" as linhas depois de formar a tabela. ATENÇÃO!: Em geral, os resultados deste programa não são válidos se uma linha inteira tender para zero quando e tender para zero, como `[e 0 0 0]`. Este caso deve ser manipulado de modo diferente, como discutido na Seção 6.3 do texto, "A Linha Inteira é Zero".

```
'(cap6ps1) Exemplo 6.2'                     % Exibe título.
                                            % -det([si() si();sj() sj()])/sj()
syms e                                      % Gabarito para ser usado em cada célula.
                                            % Constrói um objeto simbólico para
                                            % epsilon.
%%%
```

```
-det([s5(1) s5(3);s4(1) s4(3)])/s4(1) 0 0];      % Cria a linha s^3 row da tabela de Routh
                                                 % se o primeiro elemento for 0.

else
      s3=[-det([s5(1) s5(2);s4(1) s4(2)])/s4(1) ...% Cria a linha s^3 da tabela de Routh
-det([s5(1) s5(3);s4(1) s4(3)])/s4(1) 0 0];      % se o primeiro elemento não for 0.

end
%%%
```

```
'G(z) calculado para T=0,5'          % Exibe título.
pretty(Gz)                           % Forma "bonita" de G(z) com valores
                                     % numéricos.
pause
```

E.3 Resumo dos Comandos

`compose(f,g)`	Substitui $g(y)$ por x em $f(x)$
`ilaplace(X)`	Transformada de Laplace inversa de $X(s)$
`int(S,v,a,b)`	Integra S em relação a v desde o limite inferior a até o limite superior b
`iztrans(F,k)`	Transformada z inversa. Fornece $f(kT)$ dada $F(z)$. Com o campo opcional, k, determina $f(nT)$
`laplace(x)`	Transformada de Laplace de $x(t)$
`numden(G)`	Extrai o numerador e o denominador simbólicos de $G(s)$
`pretty(x)`	Forma "bonita" de x
`simple(x)`	Obtém a forma mais simples do objeto simbólico x
`simplify(x)`	Simplifica x
`subs(S,velha,nova)`	Troca velha por nova no objeto simbólico S
`syms x y z`	Declara x, y e z como objetos simbólicos
`sym2poly(P)`	Converte o polinômio simbólico, P, em um vetor
`vpa(x,D)`	Usa precisão aritmética variável. Converte valores simbólicos fracionários em valores numéricos com D casas decimais.
`ztrans(f)`	Transformada z de $f(nT)$

Bibliografia

The MathWorks, Inc. MATLAB: *Control System Toolbox User's Guide, Version 4.* The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1992-1998.

The MathWorks, Inc. MATLAB: *Symbolic Math Toolbox User's Guide, Version 2.* The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1993-1997.

The MathWorks, Inc. MATLAB: *Using MATLAB, Version 5.* The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1984-1999.

APÊNDICE F

Obtenção de um Diagrama Esquemático de um Motor CC

O objetivo deste apêndice é obter um diagrama esquemático para um motor CC controlado pela armadura, incluindo as relações entre os parâmetros.[1] Este diagrama esquemático pode então ser usado para obter a relação entre a tensão de entrada e o deslocamento angular de saída do eixo do motor.

Começamos descrevendo o comportamento de uma corrente elétrica em presença de um campo magnético. Com base na Fig. F.1, um condutor de comprimento l, percorrido por uma corrente elétrica, i, em presença de um campo magnético de intensidade B, é submetido a uma força, F, igual a

$$F = Bli \tag{F.1}$$

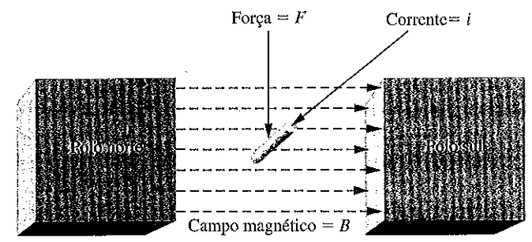


Fig. F.1 Condutor percorrido por corrente no interior de um campo magnético

Este princípio pode ser usado para construir um motor, uma vez que a força produzida pode ser usada para girar uma parte móvel chamada *rotor*. Basicamente, fixamos o condutor no rotor, criamos um campo magnético com ímãs, e fazemos com que a força atue no sentido de girar o rotor. Na Fig. F.2(*a*), mostramos o condutor enrolado longitudinalmente em torno de um rotor cilíndrico, chamado de *armadura*. O núcleo é feito de ferro doce, que conduz facilmente as linhas de fluxo magnético. Os ímãs são usinados para que, na superfície do rotor, as linhas do fluxo magnético sejam perpendiculares. A força produzida é tangente ao rotor e faz com que a armadura gire. Cada lado do enrolamento é submetido a uma força cujo valor é dado pela Eq. (F.1). Desta maneira, a força total, F, que age tangencialmente ao rotor, é

$$F = 2Bli_a \tag{F.2}$$

onde i_a é a corrente através do condutor da armadura. Se o raio da armadura for r, então o torque produzido, T_m, será

$$T_m = rF = r2Bli_a = K_t i_a \tag{F.3}$$

onde $K_t = 2Blr$ é chamada de *constante de torque*, e i_a é a *corrente da armadura*. Para produzir um valor maior de torque, podemos aumentar a intensidade do campo magnético, B, ou, de forma equivalente, K_t, enrolando uma bobina ao redor dos ímãs permanentes, como mostrado na Fig. F.2(*b*).

[1]Este apêndice resume os resultados discutidos em detalhes nas referências listadas na Bibliografia.

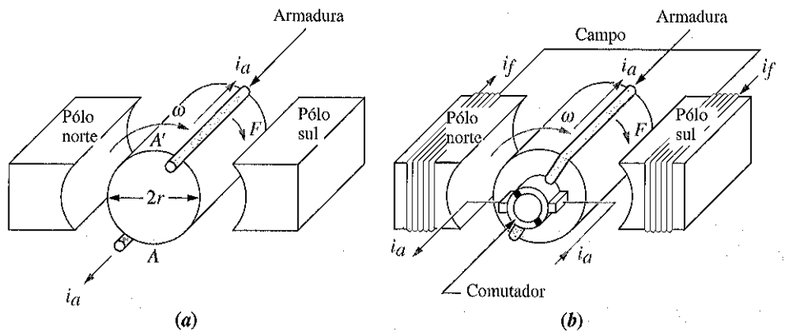


Fig. F.2 **a.** Condutor percorrido por corrente em um rotor; **b.** condutor percorrido por corrente em um rotor com comutação e com espiras adicionadas aos ímãs permanentes para aumentar a intensidade do campo magnético

Há um problema com o motor da Fig. F.2(*a*). Quando o trecho do condutor mostrado próximo ao ponto A' ultrapassa o ponto A, a força continuará sendo para baixo e a armadura começará a girar no sentido oposto. Para corrigir isto, precisamos inverter o sentido da corrente, i_a, quando este trecho alcançar o ponto A. Outra inversão é necessária novamente no ponto A'. A Fig. F.2(*b*) mostra como podemos inverter a corrente no condutor a cada meia volta para manter a armadura girando no mesmo sentido de rotação. Usando *um anel coletor* ao qual estão fixadas as extremidades do condutor, e *escovas* fixas apoiadas sobre o anel coletor, e fechando-se o circuito para que circule a corrente, i_a, esta se inverte a cada meia volta. Este arranjo de *anéis coletores* e *escovas* é chamado de *comutador*.

Até agora vimos que uma força é aplicada no condutor enrolado em torno da armadura. Agora exploraremos a possibilidade de uma tensão ser também induzida nos terminais deste condutor. O conhecimento desta tensão nos ajudará a estabelecer um modelo do motor sob forma de circuito. De acordo com a lei de Faraday, se uma espira de material condutor, como a que é enrolada ao redor da armadura, for mergulhada em um campo magnético variável, será induzida uma tensão

$$v_b(t) = -\frac{d\phi}{dt} \tag{F.4}$$

onde $v_b(t)$ é a tensão induzida e ϕ é o fluxo que atravessa a espira. Supondo que a densidade do fluxo, B, seja constante em qualquer ponto ao longo da superfície semicilíndrica envolvida pela espira, e usando $\phi = BA$, onde A é a área da superfície semicilíndrica, a tensão induzida em uma única espira é

$$v_b(t) = -B\frac{dA}{dt} \tag{F.5}$$

Para determinar a área da superfície semicilíndrica envolvida pela espira, examinamos a Fig. F.3, que é uma vista de trás da armadura mostrando as extremidades dos condutores e as linhas de fluxo magnético. A área, A_1,

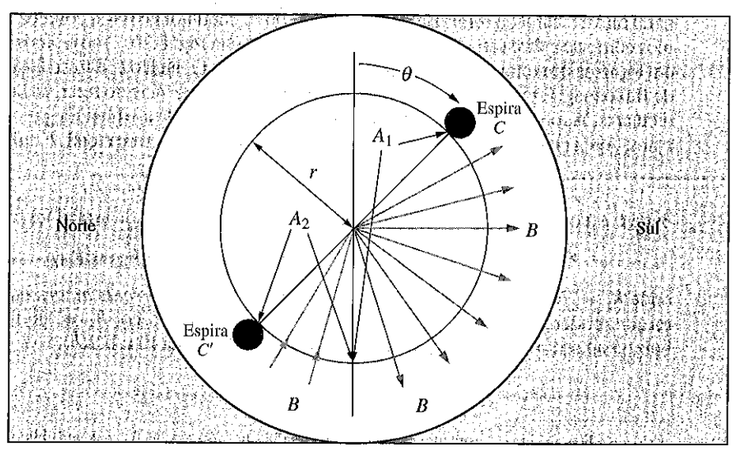


Fig. F.3 Densidade de fluxo magnético passando através de uma espira da armadura

através da qual o fluxo passa no sentido do centro para a superfície é o produto da circunferência pelo comprimento do cilindro, ou seja,

$$A_1 = r(\pi - \theta)l \tag{F.6}$$

A área, A_2, através da qual o fluxo passa no sentido da superfície para o centro é

$$A_2 = r\theta l \tag{F.7}$$

Assim,

$$v_b(t) = -\frac{dB(A_1 - A_2)}{dt} = -Brl\frac{d(\pi - 2\theta)}{dt} = 2Brl\frac{d\theta}{dt} = 2Brl\omega = K_b\omega \tag{F.8}$$

Para um motor, esta tensão induzida, $v_b(t)$, é chamada *força contra-eletromotriz*, ou *fcem*. A constante $K_b = 2Blr$ é chamada *constante de fcem*. Note que, em um sistema de unidades consistentes, $K_t = K_b$.

Finalmente, é possível aumentar o valor do torque produzido enrolando-se um certo número de espiras na armadura. Este conjunto é chamado *enrolamento da armadura*. A fcem de retroação também será aumentada porque estas espiras podem ser vistas como associadas em um circuito série, no qual as tensões das espiras se somam.

Resumindo, se um condutor através do qual circula uma corrente $i_a(t)$ cortar as linhas de fluxo de um campo magnético, será produzido um torque $T_m(t) = K_t i_a(t)$. Além disso, com base na lei de Faraday, o condutor apresentará uma tensão induzida chamada força contra-eletromotriz. Esta tensão é dada por $v_b(t) = K_b\omega(t)$.

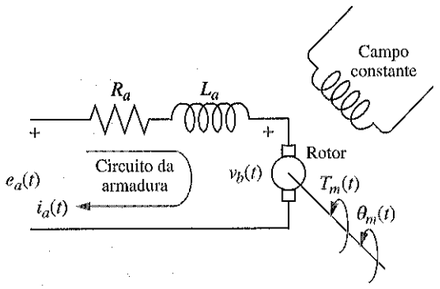


Fig. F.4 Diagrama em forma de circuito de um motor CC

Com base nas relações desenvolvidas, podemos criar um modelo de circuito para o motor, como o mostrado na Fig. F.4. O enrolamento da armadura é representado como tendo uma resistência, R_a, e, por ser enrolado ao redor da armadura, como tendo também uma indutância, L_a. A fcem é mostrada como $v_b(t)$ nos terminais do rotor. O campo constante é criado por um enrolamento percorrido por corrente. São mostrados na saída do rotor o torque produzido no eixo, $T_m(t)$, e o deslocamento angular de saída, $\theta_m(t)$.

Bibliografia

Chapman, S. J. *Electric Machinery Fundamentals,* 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1991.

Chiasson, J. *The Physics of a DC Motor for Control Courses,* Notes. University of Pittsburgh, PA, 1993.

Matsch, L. W. *Electromagnetic and Electromechanical Machines.* Harper & Row, New York, 1977.

Glossário

Abordagem clássica dos sistemas de controle *Ver* **técnicas no domínio de freqüência.**
Abordagem moderna dos sistemas de controle *Ver* **representação no espaço de estados.**
Admitância elétrica O inverso da impedância elétrica. A relação da transformada de Laplace da corrente pela transformada de Laplace da tensão.
Amplificador operacional Um amplificador caracterizado por uma impedância de entrada muito alta, por uma impedância de saída muito baixa e por um ganho muito elevado que pode ser usado para implementar a função de transferência de um compensador.
Análogos de circuitos elétricos Um circuito elétrico cujas variáveis e cujos parâmetros são análogos aos de um outro sistema físico. A analogia através de circuitos elétricos pode ser usada para obter a solução das variáveis de outro sistema físico.
Aproximação de Euler Um método de integração no qual a área a ser integrada é aproximada por seqüência de retângulos.
Armadura O componente rotativo de um motor CC através do qual circula corrente.
Autovalores Quaisquer valores, λ_i, que satisfaçam $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ com $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$. Ou seja, quaisquer valores, λ_i, que façam de $\mathbf{x}_i$ um autovetor da transformação $\mathbf{A}$.
Autovetor Qualquer vetor colinear com um vetor de base resultante de uma transformação de similaridade que conduza a uma representação diagonal do sistema.
Banda passante Freqüência na qual a magnitude da resposta de freqüência vale −3 dB em relação à magnitude na freqüência zero.
Base Vetores linearmente independentes que definem um espaço.
Carta de Nichols O lugar geométrico dos valores constantes de magnitude e de fase da resposta de freqüência de sistemas com retroação unitária traçada no plano valor de magnitude em dB versus ângulo de fase em graus.
Círculos de *M* constante O lugar geométrico dos pontos do plano complexo nos quais a magnitude da resposta de freqüência de sistemas com retroação unitária é constante. Permite determinar a magnitude da resposta de freqüência a malha fechada a partir da magnitude da resposta de freqüência a malha aberta.
Círculos de *N* constante O lugar geométrico dos pontos do plano complexo nos quais a fase da resposta de freqüência de sistemas com retroação unitária é constante. Permite determinar a fase da resposta de freqüência a malha fechada a partir da fase da resposta de freqüência a malha aberta.
Combinação linear Uma combinação linear de n variáveis, x_i, para $i = 1$ a n, dada pela soma, S, a seguir:

$$S = K_n x_n + K_{n-1}x_{n-1} + \cdots + K_1 x_1,$$

onde cada K_i é constante.
Compensação A inclusão de uma função de transferência no percurso direto ou no percurso de retroação com a finalidade de melhorar o desempenho transitório ou o desempenho em estado estacionário de um sistema de controle.
Compensação na malha principal Um método de compensação com retroação que adiciona um zero à função de transferência a malha aberta com o objetivo de melhorar a resposta transitória do sistema a malha fechada.
Compensação na malha secundária Um método de compensação com retroação que muda os pólos da função de transferência do percurso direto com o objetivo de melhorar a resposta transitória do sistema a malha fechada.
Compensador Subsistema inserido no percurso direto ou no percurso de retroação para melhorar a resposta transitória ou o erro de estado estacionário.
Compensador derivativo ideal. *Ver* **controlador proporcional e derivativo.**
Compensador digital Função de transferência amostrada usada para melhorar o desempenho da resposta de um sistema com retroação controlado por computador.
Compensador integral ideal (PI). *Ver* **controlador proporcional e integral.**

Compensador na retroação Subsistema colocado no percurso de retroação com a finalidade de melhorar o desempenho de um sistema a malha fechada.
Compensador por atraso de fase Função de transferência caracterizada por um pólo situado no eixo real negativo, próximo da origem, e por um zero próximo ao pólo e à esquerda do pólo. É usado com o objetivo de reduzir o erro de estado estacionário de um sistema a malha fechada.
Compensador por atraso-avanço de fase Função de transferência caracterizada por uma configuração de pólos e zeros que é uma combinação de um compensador por atraso de fase e de um compensador por avanço de fase. É usado com o objetivo de melhorar tanto a resposta transitória quanto o erro de estado estacionário de um sistema a malha fechada.
Compensador por avanço de fase Função de transferência caracterizada por um zero situado no eixo real negativo, próximo da origem, e por um pólo próximo ao zero e à esquerda do zero. É usado com o objetivo de melhorar a resposta transitória de um sistema a malha fechada.
Constante de aceleração

$$\lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

Constante de posição

$$\lim_{s\to 0} G(s)$$

Constante de tempo O tempo necessário para que e^{-at} decaia a 37% do valor inicial em $t = 0$.
Constante de velocidade

$$\lim_{s\to 0} sG(s)$$

Constantes de erro estático A coleção de valores que inclui a constante de posição, a constante de velocidade e a constante de aceleração.
Controlabilidade Propriedade de um sistema pela qual é possível obter uma entrada capaz de conduzir o sistema de um estado inicial qualquer a um estado final desejado em tempo finito.
Controlador O subsistema que produz a entrada do processo a controlar.
Controlador proporcional e derivativo (PD) Um controlador que supre o canal direto do processo com um sinal proporcional ao sinal atuante e à derivada deste sinal com o objetivo de melhorar a resposta transitória de um sistema a malha fechada.
Controlador proporcional e integral (PI) Um controlador que supre o canal direto do processo com um sinal proporcional ao sinal atuante e à integral deste sinal com o objetivo de reduzir o erro de estado estacionário de um sistema a malha fechada.
Controlador proporcional, integral e derivativo (PID) Um controlador que supre o canal direto do processo com um sinal proporcional ao sinal atuante, à integral e à derivada deste sinal, com o objetivo de melhorar a resposta transitória e de reduzir o erro de estado estacionário de um sistema a malha fechada.
Conversão digital-analógica (D/A) Dispositivo que converte sinais digitais em sinais analógicos.
Conversor analógico-digital Dispositivo que converte sinais analógicos em sinais digitais.
Critério de Nyquist Se um contorno, A, que envolve todo o semiplano da direita é mapeado através de $G(s)H(s)$, então o número de pólos a malha fechada, Z, no semiplano da direita é igual ao número de pólos, P, situados no semiplano da direita menos o número de voltas no sentido anti-horário, N, em torno de -1, do mapeamento; isto é, $Z = P - N$. O mapeamento é chamado de *diagrama de Nyquist* de $G(s)H(s)$.
Critério de Routh-Hurwitz Um método para determinar quantas raízes de um polinômio em s estão no semiplano direito do plano s, quantas estão no semiplano esquerdo e quantas estão no eixo imaginário. Exceto em alguns casos especiais, o critério de Routh-Hurwitz não fornece as coordenadas das raízes.
Curva torque-velocidade O gráfico que relaciona o torque no eixo do motor com a velocidade angular para um valor constante de tensão de entrada.
Década Conjunto de freqüências em que o valor da maior é dez vezes o valor da menor.
Decibel (dB) O decibel é definido como 10 log P_G, onde P_G é o ganho de potência de um sinal. De modo equivalente, o decibel também é definido como 20 log V_G, onde V_G é o ganho de tensão de um sinal.
Diagrama de blocos Uma representação da interconexão de subsistemas que formam um sistema. Em sistemas lineares, o diagrama de blocos consiste em blocos representando os subsistemas, de setas representando os sinais, de junções somadoras (pontos de soma) e de pontos de derivação.
Diagrama de fluxo de sinal Uma representação da interconexão de subsistemas que formam um sistema. Consiste em nós representando os sinais e em linhas representando subsistemas.
Diagrama de Nyquist (gráfico de Nyquist) Um gráfico polar da resposta de freqüência elaborado para a função de transferência a malha aberta.
Diagramas de Bode (gráficos de Bode) Gráficos da resposta de freqüência, nos quais o gráfico da magnitude é traçado separadamente do gráfico da fase. O gráfico da magnitude exprime o valor da magnitude em dB em função de log ω. O gráfico da fase exprime o valor do ângulo de fase em graus em função de log ω. Em sistemas de controle, os diagramas de Bode são usualmente feitos para a função de transferência a malha aberta. Os diagramas de Bode também podem ser traçados por meio de aproximações constituídas por segmentos de reta.

Equação característica Equação que se obtém igualando o polinômio característico a zero.
Equação de saída Em sistemas lineares, a equação que exprime as variáveis de saída do sistema como combinações lineares das variáveis de estado.
Equações de estado Um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem com n variáveis, em que as n variáveis a serem determinadas são as variáveis de estado.
Equilíbrio A solução de estado estacionário caracterizada por uma posição constante ou por uma oscilação com amplitude constante.
Erro A diferença entre a entrada e a saída de um sistema.[1]
Erro de estado estacionário A diferença entre a entrada e a saída de um sistema depois que a resposta natural se reduziu a zero.
Erro de quantização Em sistemas lineares, o erro associado à digitalização de sinais decorrente da diferença finita entre os níveis de quantização.
Espaço de estados O espaço n-dimensional cujos eixos são as variáveis de estado.
Estabilidade Característica de um sistema definida por meio de uma resposta natural que tende a zero à medida que o tempo tende a infinito.
Estabilidade marginal A característica de um sistema definido por uma resposta natural que nem decai nem cresce, mas permanece constante ou oscila à medida que o tempo tende a infinito, quando a entrada não for da mesma forma que a resposta natural do sistema.
Expansão em frações parciais Uma equação onde uma fração com n fatores no denominador pode ser representada por frações mais simples.
Extrapolador de ordem zero (*sample-and-hold* de ordem zero) Um dispositivo que produz uma aproximação em degraus de um sinal analógico.
Fasor Vetor rotativo que representa uma senóide da forma $A \cos(\omega t + \phi)$.
Filtro rejeita faixa (*notch*) Filtro cuja resposta de freqüência apresenta uma redução de ganho abrupta em uma freqüência senoidal particular. No plano s é caracterizado por um par de zeros complexos próximo do eixo imaginário.
Força contra-eletromotriz, (fcem) A tensão nos terminais da armadura de um motor.
Freqüência amortecida de oscilação A freqüência senoidal de oscilação de uma resposta subamortecida.
Freqüência de corte Uma freqüência onde o gráfico de magnitude de Bode muda de inclinação.
Freqüência de margem de fase Freqüência na qual a magnitude do gráfico da resposta de freqüência é igual a zero dB. É a freqüência na qual se mede a margem de fase.
Freqüência de margem de ganho Freqüência na qual a fase do gráfico da resposta de freqüência é 180°. É a freqüência na qual se mede a margem de ganho.
Freqüência natural A freqüência de oscilação de um sistema se todo o amortecimento for removido.
Função de transferência A relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada.
Função de transferência a malha aberta Para um sistema com retroação genérico tendo $G(s)$ no percurso direto e $H(s)$ no percurso de retroação, a função de transferência a malha aberta é o produto da função de transferência do percurso direto e da função de transferência da retroação, ou seja, $G(s)H(s)$.
Função de transferência a malha fechada Para um sistema com retroação genérico, tendo $G(s)$ no percurso direto e $H(s)$ no percurso de retroação, a função de transferência a malha fechada, $T(s)$, é $G(s)/[1 \pm G(s)H(s)]$, onde o sinal de + é usado quando a retroação é negativa e o sinal de −, quando a retroação é positiva.
Ganho A relação entre a saída e a entrada. É utilizado comumente para descrever a amplificação, em estado estacionário, da magnitude de sinais senoidais de entrada, incluindo sinais CC.
Ganho de malha Em um diagrama de fluxo de sinal, o produto dos ganhos dos ramos encontrados no percurso, no sentido do fluxo de informação, que começa e termina no mesmo nó, sem passar por qualquer outro nó mais do que uma única vez.
Ganho de malha disjunta O produto dos ganhos de malha que não se tocam tomados dois a dois, três a três, e assim por diante.
Ganho de percurso direto O produto dos ganhos obtidos ao se percorrer, no sentido do fluxo de informação, um percurso entre o nó de entrada e o nó de saída de um diagrama de fluxo de sinal.
Girômetro Dispositivo que responde a uma entrada em posição angular com uma tensão de saída proporcional à velocidade angular.
Impedância de um sistema mecânico em rotação A relação entre a transformada de Laplace do torque e a transformada de Laplace do deslocamento angular.
Impedância de um sistema mecânico em translação A relação entre a transformada de Laplace da força e a transformada de Laplace do deslocamento linear.
Impedância elétrica A relação da transformada de Laplace da tensão pela transformada de Laplace da corrente.
Independência linear As variáveis x_i, para $i = 1$ a n, são ditas linearmente independentes se sua combinação linear, S, for igual a zero *somente* se todo K_i for necessariamente igual a zero e não existir nenhum $x_i = 0$. Alternativamente, se as variáveis x_i forem variáveis linearmente independentes, então $K_n x_n + K_{n-1}x_{n-1} + \ldots + K_1 x_1 = 0$ não pode ser solucionado para nenhum x_k. Assim, nenhum x_k pode ser expresso como uma combinação linear dos outros x_i.

[1]Traduz a diferença entre o comportamento real e o comportamento idealizado de um sistema. (N. T.)

Instabilidade Característica de um sistema definido por uma resposta natural que cresce sem limites à medida que o tempo tende para infinito.
Instante de pico, T_p O tempo necessário para que a resposta ao degrau de um sistema subamortecido alcance o primeiro pico, ou pico máximo, pela primeira vez.
Junção somadora Um símbolo de diagrama de blocos que mostra a soma algébrica de dois ou mais sinais.
Lei de Newton A soma das forças é igual a zero. Alternativamente, depois de passar a força *ma* para o outro lado da equação, a soma de forças é igual ao produto de massa e aceleração.
Lei de Ohm Em circuitos resistivos, a relação entre a tensão e a corrente é uma constante chamada resistência.
Leis de Kirchhoff A soma das tensões ao longo de uma malha fechada é igual a zero. A soma das correntes em um nó é igual a zero.
Linearização O processo de aproximar uma equação diferencial não-linear por uma equação diferencial linear válida para pequenas excursões em torno do equilíbrio.
Lugar das raízes O lugar geométrico dos pólos a malha fechada à medida que um parâmetro do sistema varia continuamente. Comumente o parâmetro é o ganho. O lugar é obtido a partir dos pólos e zeros a malha aberta.
Malhas disjuntas Malhas que não possuem nós comuns.
Margem de fase O quanto de defasagem adicional a malha aberta, expresso em graus, é necessário para tornar o sistema a malha fechada instável, para um ganho unitário.
Margem de ganho O quanto de ganho adicional a malha aberta, expresso em decibéis (dB), é necessário para tornar o sistema a malha fechada instável, para uma defasagem de 180°.
Matriz de transição de estados A matriz que efetua uma transformação sobre $\mathbf{x}(0)$, levando $\mathbf{x}$ do estado inicial, $\mathbf{x}(0)$, para o estado $\mathbf{x}(t)$ para todo instante de tempo $t \geq 0$.
Método tabular de Raible Um método tabular para se determinar a estabilidade de sistemas digitais, semelhante ao método de Routh-Hurwitz para sinais analógicos.
Nós Pontos em um diagrama de fluxo que representam sinais.
Observabilidade Propriedade de um sistema pela qual qualquer estado inicial, $\mathbf{x}(t_0)$, pode ser obtido a partir das medidas de $u(t)$ e de $y(t)$ em um intervalo finito de tempo a partir de t_0. Enunciada de forma simples, a observabilidade é a propriedade pela qual as variáveis de estado podem ser estimadas a partir do conhecimento da entrada, $u(t)$, e da saída, $y(t)$.
Observador Uma configuração de sistema a partir da qual estados inacessíveis podem ser estimados.
Oitava Conjunto de freqüências em que o valor da maior é duas vezes o valor da menor.
Perturbação Sinal indesejado que corrompe a entrada ou a saída de um processo a controlar.
Polinômio característico O denominador de uma função de transferência. De modo equivalente, o polinômio que se obtém a partir da equação diferencial do sistema livre, substituindo-se os operadores diferenciais por s ou λ.
Pólos (1) Os valores da variável, s, da transformada de Laplace que tornam infinito o valor da função de transferência e (2) quaisquer raízes de fatores da equação característica no denominador que são comuns ao numerador da função de transferência.
Pólos dominantes Os pólos que geram de forma predominante a resposta transitória.
Ponto de distribuição de sinal Um símbolo de diagrama de blocos que mostra a distribuição de um sinal para diversos subsistemas.
Ponto de entrada (*break-in*) Um ponto sobre o eixo real do plano s onde o lugar das raízes entra no eixo real ao sair do plano complexo.
Ponto de saída (*breakaway*) Um ponto sobre o eixo real do plano s onde o lugar das raízes deixa o eixo real e entra no plano complexo.
Processo ou processo a controlar Subsistema cuja saída está sendo controlada pelo sistema.
Ramos Linhas que representam subsistemas em diagramas de fluxo de sinal.
Rede passiva Rede física que somente armazena ou dissipa energia. Nenhuma energia é produzida pela rede.
Regra de Mason A expressão matemática com a qual se pode determinar a função de transferência de um sistema formado pela interconexão de diversos subsistemas.
Relação de amortecimento A relação entre a freqüência de decaimento exponencial e a freqüência natural.
Representação no domínio do tempo *Ver* **representação no espaço de estados.**
Representação no espaço de estados Modelo matemático de um sistema que consiste em equações diferenciais simultâneas de primeira ordem e em uma equação algébrica de saída.
Resíduos As constantes do numerador dos termos de uma expansão em frações parciais.
Resposta com entrada zero A parte da resposta que depende somente do vetor de estado inicial e não da entrada.
Resposta criticamente amortecida Resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem com uma determinada freqüência natural, caracterizada por não apresentar ultrapassagem e por ter um tempo de subida mais rápido que qualquer resposta superamortecida com a mesma freqüência natural.
Resposta em estado estacionário *Ver* **resposta forçada.**
Resposta forçada Em sistemas lineares, a parte da função resposta total que é devida à entrada. De um modo geral, tem a mesma forma da entrada e de suas derivadas.
Resposta não-amortecida Resposta de um sistema de segunda ordem caracterizada por uma oscilação pura.

Resposta natural A parte da função resposta total devida ao sistema e à maneira como o sistema armazena ou dissipa energia.
Resposta no estado zero A parte da resposta que depende somente da entrada e não do estado inicial.
Resposta subamortecida Resposta de um sistema de segunda ordem caracterizada pela ultrapassagem.
Resposta superamortecida Resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem caracterizada por não apresentar ultrapassagem.
Resposta transitória A parte da curva de resposta devida ao sistema e à forma como este armazena ou dissipa energia. Em sistemas estáveis, é a parte do gráfico da resposta anterior ao estado estacionário.
Retroação O percurso através do qual um sinal retorna para ser adicionado ou subtraído de um sinal prévio do percurso direto.
Retroação negativa O caso em que o sinal de retroação é subtraído de um sinal anterior no percurso direto.
Retroação positiva O caso em que o sinal de retroação é adicionado a um sinal anterior no percurso direto.
Sensibilidade A alteração percentual de uma característica de sistema devida a uma alteração percentual de um parâmetro do sistema.
Sinal atuante Sinal que alimenta o controlador. Se este sinal for a diferença entre a entrada e a saída, é chamado de *erro*.
Sistema a malha aberta Um sistema cuja saída não é supervisionada nem se corrigem perturbações.
Sistema a malha fechada Um sistema que monitora sua saída e corrige perturbações. É caracterizado pela existência de canais de retroação a partir da saída.
Sistema de fase não-mínima Um sistema cuja função de transferência possui zeros no semiplano da direita. A resposta ao degrau é caracterizada por uma inversão inicial de sentido.
Sistema desacoplado Representação no espaço de estados na qual cada uma das equações de estado é função de uma única variável de estado. Em conseqüência, cada uma das equações diferenciais pode ser resolvida independentemente das outras equações.
Sistema linear Um sistema possuidor das propriedades de superposição e homogeneidade.
Solução homogênea *Ver* **resposta natural**.
Solução particular *Ver* **resposta forçada**.
Subsistema Sistema componente de um sistema maior.
Tacômetro Um gerador de tensão que desenvolve uma tensão de saída proporcional à velocidade da rotação na entrada.
Taxa de amostragem de Nyquist A freqüência mínima segundo a qual se deve amostrar um sinal analógico de modo a obter uma reconstrução correta. Esta freqüência é duas vezes a banda passante do sinal analógico.
Técnicas de resposta de freqüência Métodos para analisar e projetar sistemas de controle usando características da resposta de freqüência senoidal de um sistema.
Técnicas no domínio de freqüência Métodos para analisar e projetar sistemas de controle lineares usando funções de transferência e a transformada de Laplace, bem como as técnicas de resposta de freqüência.
Tempo de assentamento (*settling time*) T_S O tempo necessário para que a resposta ao degrau entre e depois permaneça no interior de uma faixa de $\pm$ 2% em torno do valor de estado estacionário. Estritamente falando, esta é a definição do tempo de assentamento de 2%. Outros valores de percentagem, por exemplo 5%, também são usados. Este livro utiliza o tempo de assentamento de 2%.
Tempo de subida (*rise time*), T_r O tempo necessário para que a resposta ao degrau vá de 0,1 a 0,9 do valor final.
Tipo *Ver* **tipo de sistema**.
Tipo de sistema O número de integrações puras no percurso direto de um sistema com retroação unitária.
Torque com rotor bloqueado O torque produzido na armadura quando a velocidade do motor é reduzida a zero, mantendo tensão constante na entrada.
Transdutor Dispositivo que transforma a natureza de um sinal em outra; por exemplo, um deslocamento mecânico em tensão elétrica.
Transformação bilinear Um tipo de mapeamento do plano complexo através do qual um ponto, s, é transformado em um outro ponto, z, através da expressão

$$z = (as + b)/(cs + d).$$

Transformação de Laplace Transformação que converte equações diferenciais lineares em expressões algébricas. A transformação é útil especialmente para modelar, analisar e projetar sistemas de controle bem como para resolver equações diferenciais lineares.
Transformação de Tustin Uma transformação que converte funções de transferência contínuas em amostradas e vice-versa. A característica importante da transformação de Tustin é que ambas as funções de transferência conduzem aos mesmos valores de resposta na saída, nos instantes de amostragem.
Transformação z Uma transformação relacionada com a transformação de Laplace, usada na representação, na análise e no projeto de sinais e sistemas amostrados.
Transformações de similaridade Transformação de uma representação no espaço de estados em outra representação no espaço de estados. Embora as variáveis de estado sejam diferentes, cada uma das representações é uma descrição válida do mesmo sistema e a relação entre entrada e saída.
Ultrapassagem percentual, *%UP* O valor de quanto a resposta ao degrau, no instante de pico, supera o valor de estado estacionário, ou final, expresso como percentagem do valor de estado estacionário.

Variáveis de estado O menor conjunto de variáveis de sistema linearmente independentes cujos valores no instante t_0, juntamente com o conhecimento das funções forçantes, determinam completamente o valor de todas as variáveis de sistema para todo $t \geq t_0$.
Variáveis de fase Conjunto de variáveis de estado em que a variável de estado subseqüente é a derivada da precedente.
Variável controlada A saída de um processo (ou processo a controlar) que o sistema está controlando com a finalidade de obter uma resposta transitória desejada, estabilidade e características de erro em estado estacionário.
Variável de sistema Qualquer variável que responde a uma entrada ou a condições iniciais em um sistema.
Velocidade em vazio (velocidade sem carga) A velocidade alcançada por um motor alimentado com tensão de entrada constante quando o torque na armadura é reduzido a zero.
Vetor de estado Um vetor cujos componentes são as variáveis de estado.
Zeros (1) Os valores da variável, s, da transformada de Laplace que tornam nulo o valor da função de transferência e (2) quaisquer raízes de fatores do numerador que são comuns à equação característica no denominador da função de transferência.

Respostas dos Problemas Selecionados

Capítulo 1

15. c. $x(t) = \frac{2}{5} - e^{-4t}\left(\frac{2}{5}\cos 3t + \frac{8}{15}\operatorname{sen} 3t\right)$

16. b. $x(t) = -e^{-t} + 9te^{-t} + 5e^{-2t} + t - 2$

Capítulo 2

3. b. $x(t) = \frac{15}{26}e^{-2t} - \frac{3}{10}e^{-4t} - \frac{18}{65}\cos 3t - \frac{1}{65}\operatorname{sen} 3t$

7. $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 8}{s^3 + 3s^2 + 5s + 1}$

8. c. $\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 15x = \frac{df}{dt} + 2f(t)$

16. a. $\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{2s + 1}$

18. b. $\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 3s + 1}{2s^2 + 7s + 2}$

33. $\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{3}{20s^2 + 13s + 4}$

34. $\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{1}{50s^2 + 100s + 100}$

43. $\frac{\theta_2(s)}{E_a(s)} = \frac{0{,}0833}{s(s + 0{,}75)}$

Capítulo 3

1. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{c_1} \\ i_L \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_i$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{c_1} \\ i_L \\ v_o \end{bmatrix}$

11. a. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$

$c(t) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

14. a. $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 2s + 3}$

19. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{D_{eq}}{J_{eq}} & 0 & \frac{K_t}{J_{eq}}\frac{N_1}{N_2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_b}{L_a}\frac{N_2}{N_1} & 0 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_L \\ \theta_L \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} e_a$

$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{N_2}{N_1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_L \\ \theta_L \\ i_a \end{bmatrix}$

Capítulo 4

14. $x(t) = \frac{1}{5}\left[1 - \sqrt{\frac{20}{19}}e^{-0{,}5t}\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{19}}\right)\right]$

20. a. $\zeta = 0{,}6$; $\omega_n = 11$ rad/s; $T_s = 0{,}606$ s; $T_p = 0{,}357$ s; $\%UP = 9{,}48$

23. a. $s = -6{,}67 \pm j9{,}88$

34. $s = -5{,}79,\ -1{,}21$

35. a. $s^3 - 8s^2 - 11s + 8 = 0$ **b.** $s = 9{,}11,\ 0{,}534,\ -1{,}64$

39. $y(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t}$

42.

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1{,}0455e^{-0{,}20871t} - 0{,}045545e^{-4{,}7913t} & 0{,}21822e^{-0{,}20871t} - 0{,}21822e^{-4{,}7913t} \\ -0{,}21822e^{-0{,}20871t} + 0{,}21822e^{-4{,}7913t} & -0{,}045545e^{-0{,}20871t} + 1{,}0455e^{-4{,}7913t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1{,}0455e^{-0{,}20871t} - 0{,}045545e^{-4{,}7913t} \\ -0{,}21822e^{-0{,}20871t} + 0{,}21822e^{-4{,}7913t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 0{,}60911e^{-0{,}20871t} + 0{,}39089e^{-4{,}7913t}$$

56. $D = 0{,}143$ N·m·s/rad

59. $R = 912\ \Omega$

Capítulo 5

2. $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_1 + 1)}{1 + G_2H_1(G_1 + 1) + G_1G_2H_1 + G_2 + G_2(G_1 + 1)}$

4. $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2 + G_5}{1 + G_5H + G_1G_2H + G_2G_4}$

6. $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_5}{1 + G_1G_2 + G_1G_3G_4G_5 + G_1G_3G_5G_6G_7 + G_1G_5G_8}$

9. $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G_4G_6 + G_2G_5G_6 + G_3G_5G_6}{1 + G_6 + G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_2G_6 + G_1G_3G_6 + G_4G_6G_7 + G_2G_5G_6G_7 + G_3G_5G_6G_7}$

26. $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{2 + G_2G_3G_4 + 2G_3G_4 + 2G_4}$

27. $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G_1G_6G_7(G_2 + G_3)(G_4 + G_5)}{1 - G_6G_7H_3(G_2 + G_3)(G_4 + G_5) - G_6H_1 - G_7H_2 + G_6G_7H_1H_2}$

28. $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$

30. b. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$

$y = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

37. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$

$c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

58. $D_L = 3560$ N·m·s/rad

Capítulo 6

1. 2 spd, 3 spe, 0 $j\omega$

2. 3 spd, 2 spe, 0 $j\omega$

3. 1 spd, 1 spe, 4 $j\omega$

4. 0 spd, 2 spe, 2 $j\omega$

8. Instável

15. 1 spd, 2 spe, 4 $j\omega$

20. $0 < K < 140{,}8$

36. a. $-4 < K < 20{,}41$; **b.** 1,36 rad/s

38. a. $0 < K < 19{,}69$; **b.** $K = 19{,}69$; **c.** $s = \pm j1{,}118, -4{,}5, -3{,}5$

39. $-\frac{2}{3} < K < 0$

Capítulo 7

3. $e(\infty) = 11{,}25$

6. $\dot{e}(\infty) = 0{,}9$

9. a. $\%UP = 14{,}01$; **b.** $T_s = 0{,}107$ s; **c.** $e_{\text{degrau}}(\infty) = 0$;
d. $e_{\text{rampa}}(\infty) = 0{,}075$; **e.** $e_{\text{parábola}}(\infty) = \infty$

12. a. $K_p = \frac{1}{3}$, $K_v = 0$, $K_a = 0$; **b.** $e(\infty) = 37{,}5, \infty, \infty$, respectivamente;
c. Tipo 0

18. $K = 110.000$

25. $\beta = 1$, $K = 1{,}16$, $\alpha = 7{,}76$, ou $\beta = -1$, $K = 5{,}16$, $\alpha = 1{,}74$

29. a. $K = 831.744$, $a = 831{,}744$

35. $K_1 = 125.000$, $K_2 = 0{,}016$

46. a. Degrau: $e(\infty) = 1{,}098$; rampa: $e(\infty) = \infty$

Capítulo 8

14. Ponto de saída $= -2{,}333$; assíntotas: $\sigma_a = -5$;
$j\omega$ cruzamento do eixo $= \pm j7{,}35$

17. b. Assíntotas: $\sigma_a = -\frac{8}{3}$; **c.** $K = 140{,}8$; **d.** $K = 13{,}12$

18. $K = 9997$; $\alpha = 7$

21. a. $\sigma_a = -\frac{5}{2}$; **b.** $s = -1{,}38, -3{,}62$; **c.** $0 < K < 126$;
d. $K = 10{,}3$

24. b. $K = 9{,}4$; **c.** $T_s = 4{,}62$ s, $T_p = 1{,}86$ s; **d.** $s = -4{,}27$;
e. $0 < K < 60$

28. $\alpha = 9$

37. a. $0 < K < 4366$; **b.** $K = 827{,}2$; **c.** $K = 527{,}6$

40. a. $K = 170{,}1$; **b.** $K = 16{,}95$

Capítulo 9

1. $G_c(s) = \dfrac{s + 0{,}1}{s}$; $K \simeq 22{,}5$ em ambos os casos; $K_{pO} = 1{,}25$; $K_{pN} = \infty$;
$\%UP_O = \%UP_N = 4{,}32$; $T_{sO} = T_{sN} = 0{,}89$ s

9. a. $s = -2{,}5 \pm j5{,}67$; **b.** Ângulo $= 9{,}78°$; **c.** $s = -35{,}39$
d. $K = 1049$; **e.** $s = -36{,}33, -1{,}057$

10. a. $s = -2{,}4 \pm j4{,}16$; **b.** $s = -6{,}06$; **c.** $K = 29{,}12$;
d. $s = -1{,}263$; **f.** $K_a = 4{,}8$

14. a. $G_c(s) = \dfrac{s + 7}{s + 37{,}42}$, $K = 5452$; pólos dominantes $= -4{,}13 \pm j10{,}78$

24. a. $K_{uc} = 10$; $K_c = 9{,}95$; **b.** $K_{p_{uc}} = 1{,}25$; $K_{p_c} = 6{,}22$;
c. $\%UP_{uc} = \%UP_c = 4{,}32$;
d. Não-compensado: sistema de segunda ordem exato, aproximação OK; compensado: pólo a malha fechada em $-0{,}3$; zero a malha fechada em $-0{,}5$; simular.
e. Tende ao valor final com maior duração que o tempo de assentamento do sistema não-compensado.
f. $G_{\text{LLC}}(s) = \dfrac{404{,}1(s + 0{,}5)(s + 4)}{(s + 2)(s + 4)(s + 0{,}1)(s + 28{,}36)}$ produz uma melhoria na velocidade de aproximadamente 5 vezes.

25. $G_c(s) = \dfrac{(s + 6{,}93)(s + 0{,}1)}{s}$, $K = 3{,}08$

28. Pólos $= -0{,}747 \pm j1{,}237, -2{,}51$; zeros—nenhum

Capítulo 10

10. Sistema 1: $0 < K < 810$; Sistema 2: $3{,}94 < K < \infty$; Sistema 3: $0 < K < 720$ (Resultado obtido da resposta de freqüência exata)

11. a. Sistema 1: $G_M = 4{,}19$ dB; $\Phi_M = 14{,}27°$ (Resultado obtido da resposta de freqüência exata)

15. c. $\omega_{\text{BW}} = 2{,}29$ rad/s

23. b. $T_s = 2{,}23$ s, $T_p = 0{,}476$ s, $\%UP = 42{,}62$ (Resultado obtido da resposta de freqüência exata)

38. $G_M = 1{,}17$ dB; $\Phi_M = 6{,}01°$ (Resultado obtido da resposta de freqüência exata)

Capítulo 11

1. a. $K = 1639$ (Resultado obtido a partir da resposta de freqüência exata)

2. a. $K = 1782$ (Resultado obtido a partir da resposta de freqüência exata)

3. a. $K = 260$ (Resultado obtido a partir da resposta de freqüência exata)

12. $G_c(s) = \dfrac{s + 1{,}124}{s + 4{,}149}$, $K = 354{,}24$ (Resultado obtido a partir da resposta de freqüência exata)

21. $G_c(s) = \dfrac{(s + 0{,}042)(s + 1{,}364)}{s}$, $K = 9{,}62$ (Resultado obtido a partir da resposta de freqüência exata)

Capítulo 12

1. d. Para a função **i**: $T(s) = \dfrac{s + 1}{s^2 + (2 + k_2)s + k_1}$

3. b. Para a função **i**: $G(s) = \dfrac{400/9}{s + 30} + \dfrac{100/9}{s + 15} + \dfrac{400/9}{s}$, $T(s) = \dfrac{100(s + 10)(s + 20)}{s^3 + as^2 + bs + c}$

onde $a = \left(\dfrac{400}{9}k_3 + \dfrac{100}{9}k_2 + \dfrac{400}{9}k_1 + 45\right)$

$b = \left(2000k_3 + \dfrac{1000}{3}k_2 + \dfrac{2000}{3}k_1 + 450\right)$

$c = 20.000k_3$

e $\mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 1]$; foi usada $\mathbf{B} = \dfrac{1}{9}[400 \quad 100 \quad 400]^T$

11. a. Não-controlável; **b.** Controlável; **c.** Controlável

14. $\mathbf{K} = [92{,}35 \quad 36{,}78 \quad -7]$ para um polinômio característico $(s + 6)(s^2 + 8s + 45{,}78) = s^3 + 14s^2 + 93{,}78s + 274{,}7$

22. $\mathbf{L} = [-671{,}19 \quad 1472{,}4]^T$ para um polinômio característico $s^2 + 144s + 14.400$

Capítulo 13

3. a. $f(kT) = 229{,}5(0{,}4)^k - 504(0{,}6)^k + 275{,}5(0{,}8)^k$

6. c. $G(z) = 3\left[\dfrac{z}{z - 0{,}368} - \dfrac{z^2 - 0{,}026z}{z^2 - 0{,}052z + 0{,}135}\right]$

8. b. $G(z) = 0{,}00125\dfrac{(z + 0{,}195)(z + 2{,}821)}{(z - 1)(z - 0{,}368)(z - 0{,}819)}$

9. a. $T(z) = \dfrac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$

14. $0 < K < 11{,}104$

15. a. $K_p = \dfrac{1}{2}$, $e^*(\infty) = \dfrac{2}{3}$; $K_v = 0$, $e^*(\infty) = \infty$; $K_a = 0$, $e^*(\infty) = \infty$

17. $K = 9{,}68$ para 16,3% de ultrapassagem; $0 < K < 86$ para estabilidade

Créditos

Créditos de Fotos e de Figuras

Figuras, fotos, Estudos de Caso, Exemplos e Problemas nos Capítulos 4, 5, 6, 8, 9, 13, Apêndice C e artigos: Adapted from Johnson, H., et al. *Unmanned Free-Swimming Submersible (UFSS) System Description,* NRL Memorandum Report 4393 (Washington, D.C.: Naval Research Laboratory, 1980). MATLAB screen shots in Appendixes C and D were reprinted with permission from The MathWorks.

Capítulo 1

1.2: Courtesy of United Technologies Otis Elevator. **1.3:** © Hank Morgan/ Rainbow/PNI. **1.4:** Courtesy of Pioneer Electronics, Inc. **1.7:** Courtesy of Quantum Corp. **1.8:** © Peter Menzel. **P1.3:** Adapted from Ayers, J. Taking the Mystery Out of Winder Controls, *Power Transmission Design,* April 1988. **P1.5:** Jenkins, H. E.; Kurfess, T. R.; and Ludwick, S. J. Determination of a Dynamic Grinding Model, *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control,* vol. 119, June 1997, p. 290. 1997 ASME. Reprinted with permission. **P1.6:** Vaughan, N. D., and Gamble, J. B. The Modeling and Simulation of a Proportional Solenoid Valve, *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control,* vol. 118, March 1996, p. 121. 1996 ASME. Reprinted with permission. **P1.9:** O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph, *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control,* vol. 119, March 1997, p. 2. 1997 ASME. Reprinted with permission.

Capítulo 2

2.34: © Debra Lex. **2.51:** Adapted from Milsum, J. H. *Biological Control Systems Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1966), p. 182. © 1966 McGraw-Hill, Inc. Used with permission of the publisher. **P2.35(a):** From O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph, *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control,* vol. 119, March 1997, p. 2. 1997 ASME. Reprinted with permission. **P2.35(b):** Adapted from O'Connor, D. N.; Eppinger, S. D.; Seering, W. P.; and Wormly, D. N. Active Control of a High-Speed Pantograph, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control,* vol. 119, March 1997, p. 3. 1997 ASME. Reprinted with permission.

Capítulo 3

3.13: Bruce Frisch/S.S./Photo Researchers. **P3.14(a), (b):** Hong, J.; Tan, X.; Pinette, B.; Weiss, R.; and Riseman, E. M. Image-Based Homing, *IEEE Control Systems,* Feb. 1992, pp. 38–45. © 1992 IEEE. **P3.15(a), (b):** Adapted from Cavallo, A.; De Maria, G.; and Verde, L. Robust Flight Control Systems: A Parameter Space Design, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 5, September–October, 1992, pp. 1210–1211. 1992 AIAA. Reprinted with permission. **P3.16:** Adapted from Chiu, D. K., and Lee, S. Design and Experimentation of a Jump Impact Controller, *IEEE Control Systems,* June 1997, Figure 1, p. 99. 1997 IEEE. Reprinted with permission.

Capítulo 4

4.22: Courtesy of Cybermotion, Inc. **4.27:** Adapted from Dorf, R. C. *Introduction to Electric Circuits,* 2nd ed. (New York: John Wiley & Sons, 1989, 1993), p. 583. © 1989, 1993 John Wiley & Sons. Reprinted by permission of the publisher. **4.33:** Courtesy of Naval Research Laboratory. **P4.11:** Courtesy of Pacific Robotics, Inc. **P4.20:** From Manring, N. D., and Johnson, R. E. Modeling and Designing a Variable-Displacement Open-Loop Pump, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control,* vol. 118, June 1996, p. 268. 1996 ASME. Reprinted with permission.

Capítulo 5

5.1: NASA-Houston. **5.34:** © Rob Catanach, Woods Hole Oceanographic Institution. **P5.32:** Tanis, D. *Space Shuttle GN&C Operations Manual* (Downey, CA: Rockwell International), August 1988. **P5.35(a):** Courtesy of Hank Morgan/Rainbow/ PNI. **P5.36(a):** Bailey, F. N.; Cockburn, J. C.; and Dee, A. Robust Control for High-Performance Materials Testing, *IEEE Control Systems,* April 1992, p. 63. ©1992 IEEE.

Capítulo 6

6.9: Courtesy of Woods Hole Oceanographic Institution. **6.11:** Courtesy of Fanuc Robotics. **P6.13(a):** Courtesy of Kazuhiko Kawamura, Vanderbilt University. **P6.15:** From Rober, S. J.; Shin, Y. C.; and Nwokah, O. D. I. A Digital Robust Controller for Cutting Force Control in the End Milling Process, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control,* vol. 119, June 1997, p. 147. 1997 ASME. Reprinted with permission. **P6.16(a):** ©Japan Air Lines/Photo Researchers. **P6.16(b):** Adapted from Bittar, A., and Sales, R. M. H_2 and H_∞ Control for MagLev Vehicles, *IEEE Control Systems,* vol. 18, no. 4, August 1998, Equations 7, 8, and Table 2 on pp. 20–21. ©1998 IEEE. Reprinted with permission.

Capítulo 7

7.9: Corbis/Charles O'Rear **7.23 (a):** Isailović, J., *Videodisc and Optical Memory Systems* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall), 1985, p. 77. © 1985 Prentice Hall, Inc. **P7.23(a), (c):** From Kumar, R. R.; Cooper, P. A.; and Lim, T. W. Sensitivity of Space Station Alpha Joint Robust Controller to Structural Modal Parameter Variations, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 6, Nov/Dec 1992, pp. 1427–1428. © 1992 AIAA. Reprinted with permission. **P7.26:** Hess, R. A.; Malsbury, T.; and Atencio, A., Jr. Flight Simulator Fidelity Assessment in a Ro-

torcraft Lateral Translation Maneuver, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 16, no. 1 Jan/Feb 1993, p. 80. © 1992 AIAA. Reprinted with permission. **P7.27(a), (b):** Ohnishi, K.; Shibata, M.; and Murakami, T. Motion Control for Advanced Mechatronics, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics,* vol. 1, no. 1, March 1996, (a): Figure 14, p. 62, (b): Figure 16, p. 62. ©1996 IEEE. Reprinted with permission.

Capítulo 8

8.4(a): Courtesy of ParkerVision. **P8.13(a):** Courtesy of FANUC Robotics. **P8.13(b):** Adapted from Hardy, H. L. Multi-Loop Servo Controls Programmed Robot, *Instruments and Control Systems,* June 1967, p. 105. **P8.14:** *GNC FSSR FC Ascent,* vol. 1, June 30, 1985 (Downey, CA: Rockwell International). **P8.15(a):** Bruner, A. M.; Belvin, W. K.; Horta, L. G.; and Juang, J. Active Vibration Absorber for the CSI Evolutionary Model: Design and Experimental Results, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 15, no. 5, Sept/Oct 1992, p. 1254. © 1992 AIAA. Reprinted with permission. **P8.18:** Cho, D., and Hedrick, J. K. Pneumatic Actuators for Vehicle Active Suspension Applications, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control,* March 1985, p. 68, fig. 4. **P8.21(a), (b):** Adapted from Annaswamy, A. M., and Ghonien, A. F. Active Control in Combustion Systems, *IEEE Control Systems,* December 1995, p. 50, 51, and 59. 1995 IEEE. Reprinted with permission. **P8.22(a):** Jim Corwin/Photo Researchers **P8.22(b), (c):** Adapted from Anderson, C. G.; Richon, J.-B.; and Campbell, T. J. An Aerodynamic Moment-Controlled Surface for Gust Load Alleviation on Wind Turbine Rotors, *IEEE transactions on Control System Technology*, vol. 6, no. 5, September 1998, pp. 577–595. ©1998 IEEE.

Capítulo 9

9.46: Photo by Mark E. Van Dusen. **P9.11(a):** Cho, D.; Kato, Y.; and Spilman, D. Sliding Mode and Classical Controllers in Magnetic Levitation Systems, *IEEE Control Systems,* Feb. 1993, p. 43, fig. 1. © 1993 IEEE. Reprinted with permission.

Capítulo 10

10.1: Courtesy of Hewlett-Packard. **P10.14:** © 1994 Adept Technology, Inc. All rights reserved. **P10.15(a):** Courtesy of Nikon, Inc.

Capítulo 11

11.10(a), (b): Courtesy of Jim Stoner, University of Iowa. **P11.4(a):** Courtesy of Rapistan Systems/Dematic.

Capítulo 12

12.1:©Dick Blume—Syracuse Newspapers / The Image Works.

Capítulo 13

13.12:© BlairSteitz/PhotoResearchers. **13.28:** Adapted from Chassaing, R. *Digital Signal Processing* (New York: John Wiley & Sons, Inc, 1999), p. 137. ©1999 John Wiley & Sons, Inc. **13.29:** Adapted from Chassaing, R. *Digital Signal Processing* (New York: John Wiley & Sons, Inc, 1999), p. 137. ©1999 John Wiley & Sons, Inc. **13.36:** Adapted from Chassaing, R. *Digital Signal Processing* (New York: John Wiley & Sons, Inc, 1999), p. 137. ©1999 John Wiley & Sons, Inc.

Fontes das Legendas das Figuras

1.2(b): *The World of Otis,* 1991, p. 2, and *Tell Me About Elevators,* 1991, pp. 20–25, United Technologies Otis Elevator Company. © 1991 Otis Elevator Company. **1.8:** Overbye, D. The Big Ear, *OMNI,* Dec. 1990, pp. 41–48. **4.22:** Cybermotion, Inc. advertising brochure. **5.34:** Ballard, R. D. *The Discovery of the Titanic* (New York: Warner Books, Inc., 1987). **6.9:** Ballard, R. D. The Riddle of the Lusitania, *National Geographic,* April 1994, pp. 68–85. **6.11:** M-400 data sheet, Fanuc Robotics North America, Inc., **7.9:** Bylinski, G. *Silicon Valley High Tech: Window to the Future* (Hong Kong: Intercontinental Publishing Corp., Ltd., 1985). **8.4(a):** ParkerVision specification sheets and advertising material. **10.1:** *Test & Measurement Catalog* 1998 (Palo Alto, CA: Hewlett-Packard Company, 1997). **P10.14:** Adept Technology, Inc. advertising brochure.

Marcas Comerciais

AMTRAK é uma marca comercial registrada da National Railroad Passanger Corporation. **Adobe** e **Acrobat** são marcas comerciais da Adobe Systems, Inc. **Nikon** é uma marca comercial registrada da Nikon Incorporated. **FANUC** é uma marca registrada da Fanuc Limited. **Camera Man** é uma marca comercial registrada da Parkervision, Inc. **Microsoft, Visual Basic** e **PowerPoint** são marcas comerciais registradas da Microsoft Corporation. **QuickBasic** é uma marca comercial da Microsoft Corporation. **MATLAB** e **SIMULINK** são marcas comerciais registradas da The MathWorks, Inc. The **Control Systems Toolbox, LTI Viewer, Root Locus Design GUI, Symbolic Math Toolbox** e **MathWorks** são marcas comerciais da The MathWorks, Inc. **Cyber-Guard** é uma marca comercial registrada da Cybermotion, Inc. **Intelligent Soft-Arm Control (ISAC)** é uma marca comercial da Intelligent Robotics Lab, Vanderbilt University. **Helpmate** é uma marca comercial da HelpMate Robotics, Inc.

Índice

A

Abcissa de convergência, 28
Absorção de medicamento, 113-115
Admitância, 44
Aeronave militar F4-E, 120
Aggarwal, J. K., 88
AIAA(American Institute of Aeronautics and Astronautics), 121, 297, 298, 346
Ajuste de coeficientes
  projeto de controlador por, 525
  projeto de observador por, 542
Altura de carga (nível de água), 115
Alvin, 214
Amortecedor viscoso, 51
Amortecimento, 17
Amostrador (Sampler), 562-563
  de ordem zero (z.o.h) - extrapolador, 561
  retentor de ordem zero (z.o.h), 564
Amplificador
  carregamento, 182-184
  operacional, 47-51, 397-401
    inversor, 47-48
    não-inversor, 49-51
Amplitude, 125
Analisador dinâmico de sinais HP 35670A, 418
Análise
  de malha, 39-42, 45-47
  e projeto, 10-12, 18
    qualitativos, 124
Análogo, 69-72
  em série, 70-72
  paralelo, 70-72
Anderson, C. G., 349
Anéis coletores, 674
Anestesia, 175
Ângulo
  de chegada, 317-319
  de partida, 317-319
Annaswamy, A. M., 349, 351
Aproximação de Padé, 347
Aqüífero, 115-116
Aragula, S., 177
Armadura, 17, 64, 673
Armazenamento de água em aqüíferos, 115-116
Arquivo-M, 606
Asma, 175
Assíntota, 424
  de altas freqüências , 424
  de baixas freqüências, 424
Associação
  com retroação, de diagrama de blocos, 182-184
  em cascata, de diagrama de blocos, 180-182
  em paralelo, de diagrama de blocos, 182
Astrom, K. J., 302, 588
Atencio, A., Jr., 300
Atrito, 51, 53, 57
  de Coulomb, 53
  viscoso, 51, 53, 57
Atuador(es)
  borracha (rubbertuator), 261
  de válvulas de combustível, 2
Autovalores e pólos de função de transferência, 156-157, 251
Autovetores, 211-212, 252
Avião
  de decolagem e pouso verticais (STOL – Short Takeoff and Landing), 259
  F4-E, 229, 348
Ayers, J., 22, 25

B

Bagchi, S., 262, 488
Bahill, A. T., 25
Bailarino, em sistema de bobinar, 22
Bailey, F. N., 229, 233
Ballard, R. D., 214, 233, 262
Banda passante, 457, 464
Barlow, J. B., 415, 556
Barrows, B., 233
Belvin, W. K., 351
Bennett, S., 4, 25
Benningfield, L. M., 88
Bessemer, H., 5
Bittar, A., 262
Bobinadeira, 22
Bode, H. W., 5, 25, 418, 488
Bona, B. E., 122, 177, 233, 262, 557
Boyd, M., 602
Bruner, A. M., 351
Budak, A., 415

C

Câmara fotográfica Nikon 35 mm, 487
Campbell, T. J., 351
Campo fixo, 64
Canal de retroação, 10
Cancelamento de pólo com zero, 151-152
Cannon, R. H., Jr., 25, 38, 88
Capacitores, 38, 40
Carlson, L. E., 88, 122
Cavallo, A., 120, 122, 230, 233, 347, 351
Cereijo, M. R., 122
Chapman, S. J., 675
Chassaing, R., 591, 602
Chebyshev, P. L., 4
Chesmond, C. J., 296, 300
Chiasson, J., 675
Chiu, D. K., 121
Cho, D., 347, 351, 414, 415, 556
Circuito
  elétrico
    análogo, 69-72
    com fonte dependente, 99-101
    em representação no espaço de estados, 97-98
    função de transferência de, 38-51
  transformado, 40
Círculos *M* constantes, 458-460, 463-465
Clifford, W. K., 4
Cochin, I., 88, 121
Cochran, J. E., 261, 262, 513
Cockburn, J. C., 233
Coeficiente
  de atrito viscoso, 51, 57
  na inversa, 242
Combinação linear, 93, 95
Compensação, 10, 354
  derivativa ideal. *Ver também* controlador PD, 365-372
  em cascata, 355, 587-590
    a partir da resposta de freqüência, 507-508
    para melhorar
      a resposta transitória, 364-376
        com compensação por avanço de fase, 371-376
        com controlador PD, 365-372
      o erro de estado estacionário, 356-364
        com compensação por atraso de fase, 360-364
      simultaneamente o erro de estado estacionário e a resposta transitória, 355, 376-387
        com compensador de atraso-avanço de fase, 380-385
        com filtro supressor de (notch), 385-388
        com controlador PID, 376-381
  em retroação, 355, 387-397
    em malha secundária, 394-397
  ideal derivativa, 365-372
  integral ideal, 356-361
  na retroação, 355, 387-397
    em malha secundária, 394-397
  por atraso de fase, 360, 494-498
    projeto de, usando resposta de freqüência, 494-498
  por atraso e avanço de fase, 383, 402-404, 503-506
    projeto de, usando resposta de freqüência, 503-506
  por avanço de fase, 371-376, 404-406, 498-502

projeto de, usando resposta de freqüência, 498-502
realização física por
circuito ativo, 397-400
circuito passivo, 400-401
Compensador, 10, 14
ativo, 397-401
derivativo ideal. *Ver* Controlador PD (proporcional derivativo)
digital, 590-592
dinâmico, 355
ideal, 355, 356, 364
integral. *Ver também* Controlador PI, 356-361
ideal. *Ver* Controlador PI
passivo, 400-401
por atraso de fase, 356, 362-364
por atraso e avanço de fase, 380-385, 388
por avanço de fase, 372-375, 388, 400-401, 498
realização de circuito passivo, 400-401
Computador digital, 10
modelagem, 562-564
amostrador (sampler), 562-563
extrapolador, 564
vantagens do, em sistemas de controle, 559
Comutador, 674
Condições iniciais, 36
Condutância, 44
Constante
de aceleração, 272
a partir da resposta de freqüência, 468-469
de erro estático
constante de aceleração, 272, 468-469
constante de posição, 272, 467-468
constante de velocidade, 272, 467
erro de estado estacionário a partir de, 272-274
de força contra-eletromotriz, 675
de mola, 51, 57
de posição, 272, 467
de tempo, 127
de torque, 673
de velocidade, 272, 467
Contorno, 440
pólos a malha aberta sobre o, no diagrama de Nyquist, 446-447
Controlabilidade
definida, 522
pela matriz de controlabilidade, 523-525
por inspeção, 523
Controlador, 8
de três modos. *Ver* PID
PD (proporcional derivativo), 365-368
PI (proporcional e integral), 356-360
PID (proporcional integral e derivativo), 376-381
projeto no espaço de estados de, 517-522, 525-529, 547-549
Controle
de temperatura, 4, 6
de velocidade, 4
Conversão
análogo-digital, 561-562
digital-analógica (D/A), 560
Cook, P. A., 88
Cooper, P. A., 300
Corrente de armadura, 673
Crawshaw, L. I., 25
Critério
de Routh-Hurwitz, 240-244
casos especiais, 240-248
exemplos adicionais, 245-251
para estabilidade, 238-240
de estabilidade via Routh-Hurwitz, 578
efeito do ganho sobre a estabilidade, 249
na fatoração de polinômios, 250
de Nyquist
dedução do, 439-442
determinação da estabilidade a partir do, 442-443
Cubitt, W., 4
Curva torque-velocidade, 67

D

Davis, S. A., 88
D'Azzo, J. J., 25, 262, 267, 300, 415, 513, 556
De Maria, G., 122, 233, 351
Década, 424
Decibel (dB), 421
Dee, A., 233
Definição de estabilidade entrada-limitada saída-limitada (BIBO - bounded-input, bounded-output), 235-236
Diagonalizando da matriz de sistema, 211-213
Diagrama
de blocos, 13-14, 16
associação
com retroação, 182-184
em cascata, 180-182
em paralelo, 182
conversão de, em diagrama de fluxo de sinal, 191-193
criando formas conhecidas, 184-186
funcional, 13-14, 16
redução de, 18, 184-188
para sistemas digitais, 571-573
de Bode (gráfico de Bode), 423-439
características de erro em estado estacionário a partir de, 466-470
experimentais, 474-476
para funções de transferência com fatores de primeira ordem, 423-427
para o projeto de compensação
por atraso de fase, para melhorar o estado estacionário, 496-498
por atraso e avanço de fase, para melhorar o erro de estado estacionário e a resposta transitória, 505-506
por avanço de fase, para melhorar a resposta transitória, 498-502
para sistemas com retardo, 470-473
de corpo livre, 51
de fluxo de sinal, 190-193
conversão de diagrama de blocos em, 191-193
de equações de estado, 195-197
redução por meio da regra de Mason, 193-195
de Nichols, 462-463
de Nyquist, 443-447
determinação da estabilidade a partir do, 447-451
esboço do, 443-447
margem de ganho e margem de fase por intermédio, 451-455
esquemático, 16
dedução de, para motor CC, 673-675
polar, de resposta de freqüência, 421
Dinamômetro, 67
Disco
compacto (CD), 6
de vídeo (video disc), 6-7
Divisão de tensão, 41-42
Doebelin, E. O., 25, 88
Domínio
de freqüência, 27-81, 91
circuitos elétricos análogos, 69-72
conversão
de uma função de transferência para o espaço de estados, 102-107
função de transferência
de circuitos elétricos, 38
de sistemas com engrenagens, 60-64
de sistemas eletromecânicos, 64-69
de sistemas mecânicos em rotação, 56-60
de sistemas mecânicos em translação, 50-56
linearização, 73-77
não-linearidades, 72-73
programas em MATLAB, 32, 37, 43, 607-610
transformada de Laplace, 28-36
do tempo, 90
aplicando a representação no espaço de estados, 96-102
conversão entre o domínio de freqüência e o
de funções de transferência para o espaço de estados, 102-107
função de transferência para o espaço de estados, 106-107
linearização, 109-111
programas em MATLAB, 105, 109, 610-611
representação geral no espaço de estados, 94-96
solução das equações de estado, 158-163
Dorf, R. C., 25, 88, 150, 177, 262, 351, 415, 488, 513
Drebbel, C., 4
D'Souza, A. F., 23, 25, 88
Dual, 203

E

El-Gamal, M., 262, 488
Elkins, J. A., 88, 122
Emami-Naeini, A., 25, 88, 122, 177, 351, 488, 556
Engenharia de Controle e Automação, 6-10
Enrolamento da armadura, 675
Entrada
em degrau, 18, 268, 283-284, 286, 580
em parábola, 18, 269, 580
em rampa, 18, 269, 283, 286, 581
senoidal, 18
Eppinger, S. D., 25, 89, 122, 177, 233, 262, 300, 352, 416, 489, 513, 556, 602
Equação(ões)
de estado, 92, 95
diagramas de fluxo de sinal das, 195-197
solução no domínio de transformada de Laplace das, 156-158
solução no domínio do tempo das, 156-158
transformações de similaridade das, 210-211
transformando as, 208-209
de Kirchhoff dos nós, 71
de movimento, 51
de saída, 92, 93, 95
desacopladas, 200, 211
diferencial linear e invariante no tempo, 17
Equilíbrio, 73
Erro. *Ver também* Erro de estado estacionário, 10
de estado estacionário, 8
a partir da resposta de freqüência, 466-470
análise e projeto
através do ajuste de ganho, 276
com controle integral, 543-546
pelo teorema do valor final, 284-285
por substituição da entrada, 285-287
constantes de erro estático, 271-274
de sistema no espaço de estados, 284
definição de, 264
em sistemas digitais, 579-582
especificações para, 275
fontes de, 266
melhoria do, através de compensação
integral, 356-361
por atraso de fase, 360-364, 403, 494-498
por atraso e avanço de fase, 380-385, 503-506
para perturbações, 277-278
para sistemas
com retroação não-unitária, 279-282
com retroação unitária
em termos da função de transferência a malha aberta, 267-271
em termos da função de transferência a malha fechada, 267-268
programas em MATLAB, 274, 276, 290, 294, 295, 618-619
sensibilidade, 282
sinais de teste para, 264
tipo de sistema e, 274
de quantização, 561
Escovas, 674
Estabilidade, 11
a partir do diagrama de Nyquist, 447-451
a partir dos diagramas de Bode, 453
aplicação do critério de Nyquist para determinar, 442-443
critério de Routh-Hurwitz para, 238-251, 578
em sistemas de controle digital, 573-579
faixa de
ganho para, 448
valores
de ganho para, 249, 254-256, 449, 453, 472
para o tempo de amostragem para, 576, 578
localização das raízes, 236-238
no espaço de estados, 251-253
programas em MATLAB, 241, 247, 250, 253, 255, 617-618
Estabilizador, 168
Estação Espacial Freedom, 297
Estável, 235, 236
Estimador, 530
Evans, J., 228, 233
Evans, W. R., 5, 302, 351, 418
Expansão
em frações parciais, 30-36
em série de Taylor, 74
Experimento, funções de transferência de primeira ordem obtidas por, 128-129
Extrapolador, 564
de ordem zero, 564
de primeira ordem, 561

F

Fasor, 418
Fílon de Bizâncio, 4
Filtro supressor faixa (notch), 385-388
Flower, T. L., 513
Foguete (booster) de propelente sólido, 227
Folga (backlash), 60, 73, 155
Força contra-eletromotriz (fcem), 65, 675
Forma
canônica
de controlador, 201-202, 517
de Jordan, 201
de observador, 202-204, 530-535
em cascata em representação no espaço de estados, 198-199
paralela em representação no espaço de estados, 199-202
Fórmula de Ackermann, 526
Frank, M. A., 488
Frankle, J. T., 25
Franklin, G. F., 25, 88, 122, 149, 177, 315, 351, 488, 526, 556
Freqüência
de oscilação amortecida, 131
de quebras, 424
exponencial amortecida, 141
natural, 134
Função de transferência, 17, 50
a malha
aberta, 184, 267-271, 308
fechada, 184, 236, 267-268
a partir
da regra de Mason, 194
de teste em resposta de freqüência, 474-476
autovalores e pólos, 156
conversão
a partir da representação no espaço de estados, 108-109
para a representação no espaço de estados, 102-107
de circuitos elétricos, 38-51
de sistema
eletromecânico, 64-69
mecânico em
rotação, 56-60
translação, 50-56
com engrenagens, 60-64
diagrama de blocos de, 36, 188-195
direta. *Ver* Função de transferência a malha aberta, 35
para o controle de antena, 78-79
para sistema
biológico, 79-81
digital, 568-571
polinômio em numerador, 106-107
pólos da, 124
pulsada, 568-569
zeros de, 124-127
Função delta de Dirac, 563

G

Gamble, J. B., 26, 233
Ganho, 2
ajuste de
em sistemas digitais, 584-587
para erro de estado estacionário, 276-277, 288-290
para o projeto de resposta transitória, 189-190, 492-494, 507
de amplificador, 188
de malha, 184, 193, 194
disjunta, 193
de percurso avante, 193, 194
de ramo, 193
faixa de valores de, para estabilidade, 249, 254-256, 448, 453, 472
unitário, 10
Ghonien, A. F., 351
Giroscópio, 119
Goldberg, N., 488
Good, M. C., 177, 487, 488
Gráfico
de Bode. *Ver também* Diagrama de Bode
de fatores de primeira ordem, 428-431
de fatores de primeira e segunda ordens, 435-439
de sistemas de segunda ordem, 431-435
determinação
da estabilidade a partir de, 453
das margens de ganho e de fase a partir de, 453-455
de fase, da resposta de freqüência. *Ver também* Diagrama de Bode, 421
de magnitude, de resposta de freqüência. *Ver também* Diagrama de Bode, gráfico logarítmico de magnitude, 421
logarítmico de magnitude, de resposta de freqüência, 423
Graus de liberdade, 53
Griggs, G. E., 88, 121
Guy, W., 347, 351

H

Hacisalihzade, S. S., 25
Hammel, H. T., 25
Harbor, R. D., 262, 514
Hardy, H. L., 344, 352, 602
Hedrick, J. K., 351
Helicóptero Black Hawk (UH-60A), 299
Heller, H. C., 25
Hess, R. A., 299, 300
Hogan, B. J., 23, 25
Homogeneidade, 73
Hong, J., 120, 122
Horta, L. G., 351
Hostetter, G. H., 25, 233, 262, 285, 300, 415, 488, 513, 556, 601
Houpis, C. H., 25, 262, 267, 300, 415, 513, 556
Hsu, J. C., 72

I

Impacto econômico, como consideração de projeto, 12
Impedância, 40
Impulso, 18
Independência linear, 95
Indutores, 38, 40
Inércia, 17
Inigo, R. M., 122
Innocenti, M., 262, 513
Instabilidade, 11
Instante de pico, 137, 139, 457-458, 465
Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), 120, 121, 230, 261, 299, 349, 350, 414
Integral de convolução, 160
Interface gráfica de usuário (GUI - Graphical User Interface), 20, 152
para o Projeto com Lugar das Raízes, 20, 327, 654-664
Interligação em cascata, 28
Isailovic, J., 290, 300

J

Jannett, T. C., 175, 177
Jason, 249
Jason Junior, 214
Jenkins, H. E., 23, 25
Johnson, H., 177, 218, 219, 230, 233, 254, 255, 334, 336, 352, 404, 415, 601, 613, 615
Johnson, R. E., 177
Juang, J., 351
Junção
de adição, 8
de soma, 180
Juntas rotativas solares alfa, 298

K

Kailath, T., 29, 88, 122, 556
Kandel, A., 115, 122
Kara, A., 261, 262, 485, 488
Kato, Y., 415, 556
Katz, P., 601
Kawamura, K., 262, 488
Kermurjian, A., 88
Klapper, J., 25
Krishnamurthy, B., 233
Ktesibios, 4
Kumar, R. R., 298, 300
Kuo, B. C., 177, 314, 352, 385, 415, 488, 513, 576, 601
Kuo, F. F., 88, 488
Kurfess, T. R., 25
Kurland, M., 228, 233
Kwatny, H. G., 352, 514

L

Lago, G., 88
Ledgerwood, B. K., 88
Lee, E., 4
Lee, S., 122
Lei(s)
de Faraday, 674
de Kirchhoff, 17, 38, 39, 40-42, 43, 45, 69, 76, 99, 112
de Newton, 17, 51
Lim, T. W., 300
Linearidade, definição de, 72
Linearização, 73-77, 109-111

Linkens, D. A., 175, 177
Lordi, N. G., 113, 122
Ludwick, S. J., 25
Luenberger, D. G., 556
Lugar das raízes, 302
  ângulos de partida e de chegada, 317-319, 321
  aperfeiçoando a resposta transitória, 354-355
  com assíntotas, 312-313
  definido, 305-307
  em sistemas de controle digital, 584-585
  esboço do, 310-313
    comportamento no infinito, 310, 321
    interseções com o eixo imaginário, 316-318, 321
    pontos de entrada e de saída, 310
      sobre o eixo real, 314-316
    pontos de início e término, 321
    ramos, número de, 310, 321
    segmentos sobre o eixo real, 310, 321
    simetria, 310, 321
  exemplo de, 321-323
  no controle de antena, 333, 402
  para o projeto da resposta transitória, 323-324
  para parâmetros diferentes do ganho, 327-328
  para sistemas com retroação positiva, 329-331
  problema do sistema de controle, 302
  programas em MATLAB, 322, 327, 334, 337, 371, 374, 404, 406, 620-625
  propriedades do, 309
  refinando o esboço, 313-321
  representação vetorial de números complexos, 303-307
  sensibilidade a pólo, 331-332
Lumelsky, V., 233
Lusitania, 249
Lyapunov, A. M., 4

M

Mablekos, V. E., 64, 88
Malha
  disjunta, 193
  principal, 389
  secundária, 389, 394-397
Malsbury, T., 300
Manring, N. D., 177
Mapeamento, 440
Margem
  de fase, 452, 472
  de ganho, 451-455
Martin, R. H., Jr., 25
Mason, S. J., 193, 233
Massa, 51
MathWorks, Inc., The, 606, 641, 653, 664, 672
MATLAB, 20-21, 140, 143, 220, 404, 606
  Interface Gráfica de Usuário para Projeto com Lugar das Raízes, 20, 327, 654-664
  lugar das raízes, 322, 327, 337, 371, 374, 406, 619-625
  para erro de estado estacionário, 274, 276, 290, 618-619
  para estabilidade, 247, 250, 253, 255, 617-618
  para modelagem no domínio
    de freqüência, 32, 35, 37, 607-610
    do tempo, 105, 109, 610-611
  para projeto no espaço de estados, 521, 524, 529, 535, 537, 541, 551, 632-634
  para redução de subsistemas múltiplos, 186, 189, 200, 201, 210, 213, 614-617
  para resposta no domínio do tempo, 143, 147, 158, 163
  para sistemas de controle digital, 565, 567, 570, 576, 582, 585, 589, 595, 597, 634-639
  resposta de freqüência, 438, 447, 452, 453, 455, 462, 472, 476, 479, 494, 498, 502, 506, 507, 508
  resumo de comandos, 639-640
  SIMULINK, 20, 148, 152, 155, 189, 587, 642-653
  Toolbox de Matemática Simbólica, 20, 35, 37, 43, 158, 163, 251, 250, 598, 665-672
  Visualizador LIT, 20, 148, 453, 455, 462, 587, 654-660, 663
Matriz
  companheira, 202
  de controlabilidade, 523-525
  de entrada, 199, 203
  de observabilidade, 536-538
  de saída, 169-170
  de sistema, 199, 202-204, 211-213, 251
    diagonalização, 211-213
  de transformação, 207-215
  de transição de estados, 160-163
    solução no domínio do tempo da, 160-163
    transformada de Laplace da, 160, 162
Matsch, L. W., 675
Maxwell, J. C., 4
May, F. P., 557
Mayr, O., 4, 25
Meier, R., 23, 25
Memória de acesso aleatório (RAM), 275
Método
  de malha, 39-44, 50
  dos nós, 43-46, 50
  epsílon, 240
  tabular de Raible, 576
Meyer, A. U., 88
Milhorn, H. T., Jr., 228, 233, 542, 556
Milsum, J. H., 79, 88
Minorsky, N., 5, 88
Momento de inércia, 57
Monahemi, M. M., 415, 556
Motor
  CC, 673-675
  principal do ônibus espacial (SSME - Space Shuttle Main Engine), 10, 227
Multiplicidade, 33
Murakami, T., 300

N

Nagle, H. T., Jr., 177, 601
Não-linearidade, 72
  efeito de, na resposta no domínio do tempo, 152-155
Navio, controle de rolamento, 168
Nieuwland, J., 25
Nilsson, J. W., 28, 420, 488
Nó, de diagramas de fluxo de sinal, 190
No, T. S., 262, 513
Novosad, J. P., 25
Número complexo, 303-307
Nwokah, O. D. I., 262
Nyquist, H., 5, 25, 418, 488

O

Observabilidade
  definida, 535
  por inspeção, 535-536
  por intermédio de matriz de, 537
Observador, 529-530
  controle de antena, 547-551
  projeto
    para a forma canônica do observador, 530-535
    por ajuste de coeficientes, 542
    por transformação, 538-543
O'Connor, D. N., 24, 25, 89, 122, 177, 262, 300, 352, 416, 488, 513, 556
Ogata, K., 25, 89, 177, 416, 489, 495, 514, 523, 526, 556, 561, 580, 587, 601
Ohnishi, K., 299, 300
Oitava, 424
O'Leary, D. P., 415, 556
Ônibus espacial, 5, 180, 227, 344
Oscilação amortecida, 14

P

Pantógrafo
  para ferrovia de alta velocidade, 24, 87, 121, 177, 232, 488
  para trem de alta velocidade, 262, 300, 351, 513, 556, 601
Papin, D., 4
Papson, T. P., 233
Parâmetro(s)
  concentrado, 58
  distribuídos, 58
Período de amostragem, faixa de valores do, para estabilidade, 576
Perna, humana, 79-81
Perturbação, 8
  erro de estado estacionário devido a, 277-278
Philco Technological Center, 122
Phillips, C. L., 177, 262, 514, 601
Pinette, B., 122
Piper, G. E., 348, 352, 514
Plano *s*, 577-579, 587-590
Plano *z*, 574-577
  lugar das raízes no, 584-587
  resposta transitória no, 581-584
Pólo, 124, 236
  a malha aberta, 310-313, 354, 439-442, 445-447
  a malha fechada, 305-307, 310, 324-328, 439-442
  alocação de, em projeto no espaço de estados, 517-522
  da resposta do sistema, 145-148
  distribuição a partir da tabela de Routh com linha de zeros, 244-245
  dominantes, 145, 323
  e autovalor da matriz de sistema, 156
  imaginário, 243
  para compensação, 354
  quadrantal, 243
  real, 243
  sensibilidade a, 331-332
Ponto(s)
  de chegada (break-in), 314, 315
  de coleta de sinal, 180
  de interseção do eixo imaginário, pelo lugar das raízes, 316-318
  de saída (breakaway), 314, 315
Popular Photography, 487, 488
Potenciômetro, 9
Powell, J. D., 25, 88, 122, 177, 351, 488, 556
Pré-compressão (*prewarping*), 588
Princípio de d'Alembert, 17
Problema dos sistemas de controle, 302
Processos, 2
  representação em variáveis de fase, 518-522
Programas em MATLAB, 165, 613
Projeto
  ascendente (bottom-up), 6
  assistido por computador, 19-20
  de cima para baixo, 6
  de controlador, no espaço de estados, 517-522
  de sistema de terceira ordem, 324-327
  para erro de estado estacionário nulo
    através de
      ajuste de ganho, 276, 288-290
      compensação, 355-364, 376-387, 494, 496-498, 505-506
    na representação de espaço de estados, 543-546
  para estabilidade via critério de Routh-Hurwitz, 249
  para resposta transitória
    através de compensação, 364-376, 498-502, 507-508
    do ganho, 507
    por intermédio de ajuste de ganho, 492-494
  procedimento, 16
  robusto, 12

R

Raiz múltipla, 33
Ramo de (arco de)
  de lugar das raízes, 310
  diagrama de fluxo de sinal, 190
Raven, F. H., 89, 514
Referência, 8
Regra
  de Cramer, 43
  de Mason, 193-195
Relação de amortecimento, 134
  e resposta de freqüência a malha
    aberta, 463-466
    fechada, 455-457
Representação
  em variáveis de fase, 103, 518-522, 526
  geral no espaço de estados, 91, 94-96
  no espaço de estados. *Ver também* Domínio do tempo, 17, 91
    aplicação da, 96-102
    controlabilidade
      pela matriz de controlabilidade, 523-525
      por inspeção, 523
    controle de antena no, 112-114, 215-218, 547-551
    de absorção de medicamento, 113-115
    de armazenamento de água em aqüíferos, 115-116
    de circuito elétrico, 97-98
    de sistema de controle com retroação, 204-206
    de sistema mecânico, representações de modelo
      forma canônica do
        controlador, 201-202
        observador, 202-204
      forma em cascata, 198-199
      forma paralela, 199-202
    determinação da matriz de transformação P, 207-215
    diagonalizando de uma matriz de sistema da, 211-212
    em veículo UFSS, 218-220
    estabilidade no, 251-253
    no domínio do tempo, 96-102
    programas em MATLAB, 521, 524, 529, 535, 537, 541, 551, 632-634
    projeto de controlador
      através
        da alocação de pólos, 517-522
        de transformação, 527-529
        do ajuste de coeficientes, 525
    projeto de observador
      através
        de transformação, 538-543
        do ajuste de coeficientes, 542
    transformação
      de equações de estado, 208-209
      de espaços de estados para função de transferência, 108-109
      de função de transferência para espaço de estados, 102-107
      de vetores, 207
Resíduos, 151-152
Resistores, 38, 40
Resposta
  a malha aberta, 164-166
  ao degrau
    com mais de dois pólos, 145-148
    com zeros, 148
    de sistema de
      primeira ordem, 127-129
      segunda ordem, 129-133
  com entrada zero, 160
  criticamente amortecida, 132-133
  de estado estacionário, 8, 11, 124
  de freqüência. *Ver também* Diagrama de Bode
    a malha aberta e a malha fechada, relação entre, 458-466
      e resposta transitória a malha fechada, 455-459, 463-466
    a malha fechada e a malha aberta, relação entre, 455-458
    características do erro de estado estacionário a partir de, 466-470
    conceito de, 418-419
    Critério de Nyquist, dedução do, 439-443
    Diagrama de Nyquist
      determinação da estabilidade a partir do, 447-451
      esboço do, 443-447
    diagramas de
      fase, 421
      magnitude, 421
    expressões analíticas de, 420-421
    fase de, 419
    gráfico de, 421-423
      aproximação por retas assintóticas (gráfico de Bode), 423-439
      estabilidade a partir do, 453
      exato, 422
    magnitude de, 419
    margem de
      fase, 451-455, 492-494
      ganho, 451-452
    obtido experimentalmente, 474-476
    para sistemas com retardo, 470-473
    Programas em MATLAB, 438, 447, 452, 453, 455, 462, 472, 476, 479, 494, 498, 502, 506, 507, 508, 625-632
    projeto da resposta transitória via ajuste de ganho, 492-494
    projeto de compensação
      por atraso de fase, para melhorar o erro em estado estacionário, 494-498
      por atraso e avanço de fase para melhorar simultaneamente o erro em estado estacionário e a resposta transitória, 503-506
      por avanço de fase, para melhorar a resposta transitória, 498-502
    resposta transitória a partir de, 463-466, 492-494
  do sistema, 8
    a partir dos pólos, 124-126
    com mais de dois pólos, 145-148
    com pólos adicionais, 145-148
    com zeros, 148-152
    de primeira ordem, 127-129
      constante de tempo, 127
      pólos e zeros, 124-127
      tempo de assentamento, 128, 137
      tempo de subida, 128, 137
    de segunda ordem, 129-133
      criticamente amortecido, 132-133
      geral, 134-136
      sem amortecimento, 132
      superamortecido, 129-130
    efeitos de não-linearidades na resposta no domínio do tempo, 152-155
    exponencial, 125, 128
    forçado, 11, 125, 126
    natural, 11, 125, 126
    soluções das equações de estado,
      no domínio do tempo, 158-163
      por transformada de Laplace, 156-158
    subamortecido, 136-145
  no domínio do tempo
    com mais de dois pólos, 145-148
    com zeros, 148-152
    conceito de pólos, zeros e resposta de sistema, 124-128
    efeitos de não-linearidades sobre a, 152-155
    para o controle de antena, 164, 215, 333, 402, 478, 507-508, 547, 551, 593-597
    para veículo UFSS, 165-168, 334-337, 404-406
    primeira ordem, 127-129
    programas em MATLAB, 143, 147, 148, 158, 163, 164, 165, 167, 611-614
    segunda ordem, 129-133
      geral, 134-136
      subamortecido, 136-145
    solução das equações de estado
      no domínio do tempo, 158-163
      por transformada de Laplace, 156-158
  no estado zero, 160
  sem amortecimento, 132
  subamortecida, 131-132
  superamortecida, 129-130
  transitória, 8, 10-11
    a malha fechada
      e resposta de freqüência a malha aberta, 463-466
      fechada, 455-459
    com mais de dois pólos, 145-148
    com zeros, 148
    compensação de, 503-506
    de sistema
      com retroação, 188-190
      de primeira ordem, 127-129
      de segunda ordem, 129-133
      digital, 581-584
    melhoria da, por compensação em cascata
      usando lugar das raízes, 354, 364-388, 402
      usando resposta de freqüência, 507-508
    projeto de melhoria por meio de ajuste de ganho, 190
      usando lugar das raízes, 323-324
      usando resposta de freqüência, 493-494
Retardo, 470-473
Retroação
  negativa, 183
  positiva, 183
    lugar das raízes, para sistema com, 329-331
Richon, J.-B., 351
Riedel, S. A., 88
Riegelman, S., 122
Riseman, E. M., 122
Rober, S. J., 261, 262
Robô
  AdeptOne, 486
  HelpMate, 228, 299
  M-400 FANUC, 253
  Soft Arm, 260, 485
  SR3 da Cybermotion, 145
Rockwell International, 6, 10, 26, 227, 345, 530, 557
Rolamento, de navio, 168
Rotor, 65
Routh, E. J., 4, 238, 262
Rover (robô), 3

S

Saída, 8
Sales, R. M., 262
Saturação, 73
Savant, C. J., Jr., 25, 233, 262, 300, 415, 488, 513, 556
Sawusch, M. R., 177
Schierman, J. D., 259, 262
Schmidt, D. K., 262
Schneider, R. T., 177, 300
Seering, W. P., 25, 89, 122, 177, 233, 262, 300, 352, 416, 489, 513, 556, 601
Senóides, 418-419
Sensibilidade, 18
Shaw, D. A., 26
Shibata, M., 300
Shin, Y. C., 262
Shinners, S. M., 557
Simulador de Direção, 503

Simulink, 20, 148, 152-155, 189, 587, 642-653
Sinal
atuante, 10, 279
estado estacionário nos sistemas com retroação unitária, 281
de entrada, 8
em degrau, 18, 268, 285, 580
em impulso, 18
em rampa, 18, 269, 286, 581
parabólica, 18, 269, 581
senoidal, 18, 418-419
tabela, 19
Sinha, N. K., 557
Sistema(s)
a malha aberta, 8-10
a malha fechada, 9
resposta de freqüência
a malha aberta, 458-463
resposta transitória
e resposta de freqüência a malha fechada, 455-459
análise e objetivos de projeto
estabilidade, 11
impacto econômico, 12
projeto robusto, 12
resposta em estado estacionário, 11
resposta transitória, 10-11
benefícios do, 2
biológico, 79-81
características da resposta de, 8
com retroação, 9-10, 182
não-unitária, 279-282
unitária, erro de estado estacionário, para, 267-272
procedimento de análise e projeto, 18, 188-190
redução de diagrama de blocos, 18, 184-188
procedimento de projeto
diagrama de blocos funcional, 16
esquemático, 16
modelo matemático, 17
transformar requisitos, 16
representação
em diagrama de blocos, 182-184
no espaço de estados, 204-206
configurações de, 8-10
controlado por computador, 10
de CamaraMan ® Presenter Camera, 306
de fase não-mínima, 149-152
de manobra orbital (OMS), 5
de posição de uma antena em azimute, 13-14, 78-79, 112-114, 164-166, 215-218, 254, 288, 333, 402, 478-479, 507-508, 547-551, 593-597
de primeira ordem, 127-129
constante de tempo, 127
gráfico de Bode, 423-427
pólos e zeros, 124
tempo de
assentamento (settling time), 128, 137
subida (rise time), 128-138
de reação (RCS), 6
de segunda ordem, 129-133
geral, 134-136
gráfico de Bode, 431-435
subamortecido, 136-145
de transporte com levitação magnética, 261
definido, 2
derivativo, 356
digital
compensação em cascata, 587-590
conversão
analógica-digital (A/D), 561-562
digital-analógica (D/A), 560
erro de estado estacionário, 579-582
estabilidade de, 573-579
função de transferência de, 568-571
implementação de compensador digital, 590-592
lugar das raízes, 584-585
modelagem de computador em, 562-564
para controle de antena, 593-597
programas em MATLAB, 565, 567, 570, 576, 582, 585, 589, 595, 597, 634-639
projeto de ajuste de ganho, 584-587
redução de diagramas de blocos para, 571-573
resposta transitória de, 581-584
transformada z, 564-568
vantagens dos computadores digitais, 559
eletromecânico, 64-69
história de, 4-6
instável, 235
integral, 356, 543-546
marginalmente estável, 235, 236
mecânico
com engrenagens, 60-64
em movimento de
rotação, 56-60
translação, 50-56, 101
função de transferência de, 50-56
representação no espaço de estados de, 101
não-controlável, 522
não-observável, 535
no espaço de estados. *Ver também* Domínio do tempo
erro de estado estacionário de, 284
proporcional, 356
razões para elaborar, 2
seccionalmente linear, 87
Skewis, T., 233
Smith, C. L., 601
Soluções
homogêneas, 11, 124
particulares, 11, 124
Son, M., 513
Spilman, D., 415, 556
Spirule™, 313
Stefani, R. T., 25, 178, 233, 262, 296, 300, 415, 488, 513, 556
Stefanides, E. J., 514
Strobel, K. L., 177, 488
Subsistema
em cascata, 180-182
em paralelo, 182
em retroação, 182
múltiplos, 292
análise e projeto de sistemas com retroação, 188-190
diagrama de fluxo de sinal, 190
das equações de estado, 195-197
regra de Mason para redução de, 193-195
em controle de antena, 215-218
no veículo UFSS, 214, 218-220
programas em MATLAB, 186, 189, 200, 201, 210, 213, 614-617
representação
alternativa no espaço de estados, 197
de, em diagrama de blocos, 180-188
transformações de similaridade, 205-214
Substituição de entrada, 285
Summers, T. A., 177
Superposição, 72
Susceptância, 44
Sweet, L. M., 177, 488

T

Tabela de Routh
com linha de zeros, 242-246
interpretação, 239
produzindo uma, 238-239
zero
na primeira coluna, 246
somente na primeira coluna, 240-242
Tacômetro, 389
Tan, X., 122
Taxa de amostragem de Nyquist, 561
Técnica(s)
clássicas. *Ver também* Domínio de freqüência, Função de transferência, 91
de controle moderno. *Ver também* Domínio do tempo, Representação no espaço de estados, 91
Telescópio Espacial Hubble (HST - Hubble Space Telescope), 487
Tempo
de assentamento (settling time), 128, 137, 139-140, 457-458, 465
de subida (rise time), 128, 137, 140
e resposta de freqüência a malha fechada, 457-458
Teofilina, 175
Teorema
de Norton, 44, 45
do valor final, 284-285
Termistor, 10
Teste
de estabilidade de Jury, 576
funções de transferência obtidas por, 474-476
Three Mile Island, 3
Thukral, A., 262, 513
Timothy, L. K., 122, 177, 233, 262, 557
Tipos de sistema, 274
Titanic, 214
Toolbox
de Matemática Simbólica, 20, 35, 37, 43, 158, 163, 241, 250, 598, 665-672
de Sistemas de Controle, 20
Torque, 57
de partida, 67
Tou, J., 601
Transdutor de entrada, 8
Transformação(ões)
bilinear, 577
de similaridade
para achar matriz de transformação, 207-210
para diagonalização da matriz de sistema, 211-213
para exprimir vetores em termos de vetores de uma base, 205-207
para transformar equações de estado, 210-211
de Tustin, 587
para a forma canônica
projeto de
controlador por, 527-529
observador por, 538-543
Transformada
de Laplace, 17, 28
da matriz de transição de estados, 160
inversa, 29, 30
solução das equações de estado, 156-158
z, 562, 564-568
de função do tempo, 565
de sistema com retroação, 572-573
inversa, 565-568
por intermédio de expansão em frações parciais, 566-567
via método de série de potências, 567-568
Trem de engrenagens, 64
função de transferência de sistemas com, 60-64
Turnbull, G. A., 26
Tyner, M., 557

U

Ultrapassagem (overshoot), 137, 139, 463, 472

V

Válvulas de combustível, 2
Van de Vegte, J., 416
Van Valkenburg, M. E., 89
Variável(is)
controlada, 8
de estado, 91, 65, 117
desacopladas, 97
linearmente independentes, 96
número mínimo de, 96-98
de fase, 103
de sistema, 95
Vaughan, N. D., 26, 230, 233
Vazão de conservação, 115
Veículo UFSS (Unmanned Free-Swimming Submersible), 166-168, 214, 218-220, 230, 254, 255, 334-337, 404-406, 601
programas em MATLAB, 167-168, 186, 613-616
Velocidade sem carga, 67
Verde, L., 122, 233, 351
Vetor
base, 205-207
de estado, 95, 115
exprimindo de qualquer, em termos dos vetores da base, 205-207
representação de números complexos, 303-307
transformações, 207-215
Vetorização de empuxo, 227
Videodisco (video disc), 289
Vidyasagar, M., 89
Visualizador LIT, 20, 148, 452, 455, 462, 587, 654-660, 663

W

Watt, J., 4
Weiss, R., 122
Wie, B., 488, 489
Wittenmark, B., 601
Wormly, D. N., 25, 89, 122, 177, 233, 262, 300, 352, 416, 489, 513, 556, 604

Y

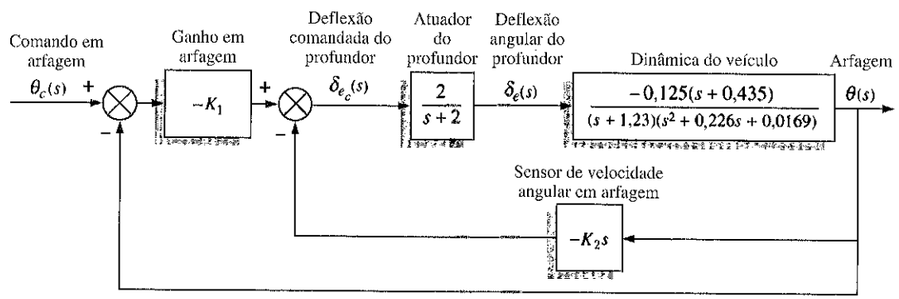
Yingst, J. C., 601

Z

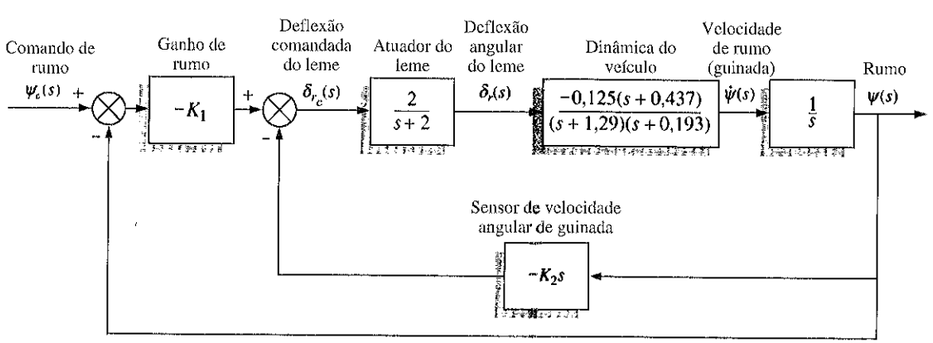
Zbinden, A. M., 25
Zeros, 124-127
a malha aberta, 310
cancelamento com pólo, 151-152
de compensação, 354, 381-385
de função de transferência, 124
de sistema de primeira ordem, 124-128
do denominador da função de transferência a malha fechada, 439-440
resposta de sistema com, 124, 148-152
Zona morta, 73, 152

Veículo Submersível Autônomo Não-Tripulado (UFSS)

Sistema de Controle em Arfagem



Sistema de Controle de Rumo



Equações Principais

Modelagem

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (2.97); \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_1(s)+Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (2.104)$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.133); \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (2.135)$$

$$\left(\frac{\text{Número de dentes da engrenagem no eixo de } \textit{destino}}{\text{Número de dentes da engrenagem no eixo de } \textit{origem}}\right)^2$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} \quad (2.153)$$

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{\text{bloq}}}{e_a} \quad (2.162); \quad K_b = \frac{e_a}{\omega_{\text{vazio}}} \quad (2.163)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.73)$$

Resposta no Domínio do Tempo

$$T_r = \frac{2,2}{a} \quad (4.9); \quad T_s = \frac{4}{a} \quad (4.10)$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.22)$$

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 \quad (4.38)$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%UP/100)}} \quad (4.39)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.34); \quad T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (4.42)$$

Erro de Estado Estacionário

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)} \quad (7.30); \quad K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \quad (7.33)$$

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} \quad (7.31); \quad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \quad (7.34)$$

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} \quad (7.32); \quad K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) \quad (7.35)$$

Lugar das Raízes

$$\angle KG(s)H(s) = -1 = 1\angle(2k+1)\,180° \quad (8.15)$$

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\#\text{pólos finitos} - \#\text{zeros finitos}} \quad (8.27)$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\text{pólos finitos} - \#\text{zeros finitos}} \quad (8.28)$$

$$\theta = \sum \text{ângulos dos zeros finitos} - \sum \text{ângulos dos pólos finitos}$$

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{1}{M} = \frac{\prod \text{comprimentos dos pólos finitos}}{\prod \text{comprimentos dos zeros finitos}} \quad (8.51)$$

Resposta de Freqüência

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (10.52); \quad \omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (10.53)$$

$$\omega_{\text{BW}} = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (10.54)$$

$$\Phi_M = \text{tg}^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} \quad (10.73)$$

$$\phi_{\text{máx}} = \text{tg}^{-1}\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}} = \text{sen}^{-1}\frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (11.11)$$

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \quad (11.9); \quad |G_c(j\omega_{\text{máx}})| = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad (11.12)$$

Espaço de Estados

$$\mathbf{C_M} = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}\ \cdots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (12.26)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}r; \quad y = \mathbf{Cx} \quad (12.3); \quad \mathbf{O_M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (12.79)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}_\mathbf{x}; \quad y - \hat{y} = \mathbf{Ce}_\mathbf{x} \quad (12.64)$$

Controle Digital

$$e^*(\infty) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})E(z) \quad (13.66)$$

$$K_p = \lim_{z\to 1} G(z) \quad (13.70); \quad K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G(z) \quad (13.73)$$

$$K_a = \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z) \quad (13.75)$$