بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمات حساب دیفرانسیل چند متغیره

مقدمات میدان برداری

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۱۲ دی ۱۳۹۹

عنوان مطالب:

۱. مفهوم میدان برداری، دیورژانس، کِرل میدان برداری، لاپلاسین؛

۲. مفهوم انتگرال خط، انتگرال خط میدان برداری، مفهوم کار انجام شده توسط نیرو، شکل دیگر انتگرال خط میدان برداری؛

۳. انتگرال خط روی منحنی بسته، رابطه بین انتگرال دوگانه و انتگرال خط (قضیه گرین)

۴. مسایل نمونه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱ بخش اول

مفهوم میدان برداری، دیورژانس و کِرل میدان برداری، لاپلاسین؛

تعریف

میدان برداری

هر تابع مانند F که دامنهٔ آن زیر مجموعه ای از نقاط صفحه یا فضا و بُردش مجموعه ای از بردارها در صفحه یا فضا باشد، **میدان برداری** نامیده می شود.
یک میدان برداری در صفحه به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = M(x,y)\ \overrightarrow{i} + N(x,y)\ \overrightarrow{j} \end{cases}$$

هم چنین میدان برداری در فضا به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ F(x,y,z) = M(x,y,z)\ \overrightarrow{i} + N(x,y,z)\ \overrightarrow{j} + P(x,y,z)\ \overrightarrow{k} \end{cases}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

مثال

فرض کنیم f یک تابع سه متغیره باشد که مشتقات جزئی آن وجود دارند، در این صورت بردار گرادیان یعنی ∇f یک میدان برداری در فضا می باشد. به عبارت دیگر

$$\nabla f = f_x \overrightarrow{i} + f_y \overrightarrow{j} + f_z \overrightarrow{k}$$

مثال : فرض کنیم $f(x,y,z) = x^۲ y^۳ z$، در این صورت میدان برداری ∇f به صورت زیر به دست می آید.

$$\nabla f = ۲xy^۳ z \overrightarrow{i} + ۳y^۲ x^۲ z \overrightarrow{j} + x^۲ y^۳ \overrightarrow{k}$$

هم چنین در میدان برداری $F(x,y,z) = (۲x - y + e^z) \overrightarrow{i} + x^۳ \cos y \sin z \overrightarrow{j} + \ln(x - y + z^۴) \overrightarrow{k}$ یک میدان برداری است که درآن

$$M(x,y,z) = ۲x - y + e^z \qquad N(x,y,z) = x^۳ \cos y \sin z \qquad P(x,y,z) = \ln(x - y + z^۴)$$

توابع سه متغیرهٔ مولفه ای می باشد.

تعریف

دیورژانس

میدان برداری $F = M\ \vec{i} + N\ \vec{j} + P\ \vec{k}$ که در آن مشتقات جزئی M_x ، N_y و P_z همگی موجود می باشند را در نظر می گیریم. دیورژانس F را بانماد $div\ F$ یا $\nabla \cdot F$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$div\ F = M_x + N_y + P_z$$

هرگاه در یک نقطه مانند (x, y, z) ، دیورژانس در آن مقدار مثبت باشد، نقطه را منبع می گوییم و هرگاه $divF(x, y, z) < ۰$ باشد، آنگاه نقطهٔ (x, y, z) را حفره می نامیم.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

فرض کنیم $F(x,y,z)=x^3y^2\overrightarrow{i}+y^3z^2\overrightarrow{j}+z^5x^2\overrightarrow{k}$ ، دیورژانس F را بیابید.

حل :

$$\boldsymbol{M=x^3y^2 \quad \rightsquigarrow \quad M_x=3x^2y^2 \quad , \quad N=y^3z^2 \quad \rightsquigarrow \quad N_y=3y^2z^2}$$

$$\boldsymbol{P=z^5x^2 \quad \rightsquigarrow \quad P_z=5z^4x^2}$$

بنابراین

$$\boldsymbol{div\ F=M_x+N_y+P_z=3x^2y^2+3y^2z^2+5z^4x^2}$$

مثال: فرض کنیم f یک تابع سه متغیره که مشتقات جزیی مرتبهٔ اول و دوم آن موجود باشد و علاوه بر آن $f_{xx}+f_{yy}=f_{zz}$ ؛ در این صورت ثابت کنید

$$\boldsymbol{div(\nabla f)=2f_{zz}}$$

حل: می دانیم $\nabla f=f_x\overrightarrow{i}+f_y\overrightarrow{j}+f_z\overrightarrow{k}$ ، بنا بر تعریف دیورژانس، می نویسیم:

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

$$div(\nabla f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \underbrace{f_{xx} + f_{yy}}_{f_{zz}} + f_{zz} = ۲ f_{zz}$$

تعریف

کِرل میدان برداری

میدان برداری $F = M\overrightarrow{i} + N\overrightarrow{j} + P\overrightarrow{k}$ که مشتقات جزئی توابع M ، N و P موجودمی باشند، را در نظر می گیریم. کِرل میدان برداری F را بانماد $Curl\ F$ یا $\nabla \times F$ نمایش می دهیم و از دستور زیر محاسبه می گردد.

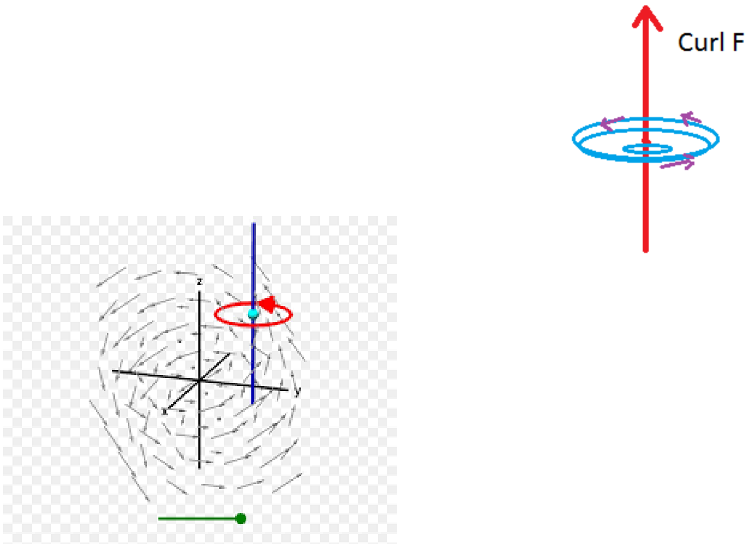
$$Curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ N & P \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & P \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix}$$

$$= (P_y - N_z)\overrightarrow{i} - (P_x - M_z)\overrightarrow{j} + (N_x - M_y)\overrightarrow{k}$$

هرگاه $Curl\ F = \overrightarrow{O}$ ، در این صورت F را غیر دورانی می گوییم. اگر F میدان سرعت یک سیال باشد، آنگاه $Curl\ F$ تمایل سیال به پیچش یا دوران حول یک محور را نمایش می دهد.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱ : مفهوم میدان برداری کِرل

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال: فرض کنیم $F(x,y,z)=\sin x\ \vec{i}+\cos y\ \vec{j}+e^{xy}\ \vec{k}$ یک میدان برداری باشد، حاصل بردار $Curl\ F$ را بیابید.

حل:

$$\boldsymbol{Curl\ F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \sin x & \cos y & e^{xy}\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \cos y & e^{xy}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \sin x & e^{xy}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \sin x & \cos y\end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{=\vec{i}\ (\frac{\partial e^{xy}}{\partial y}-\frac{\partial\cos y}{\partial z})-\vec{j}\ (\frac{\partial e^{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\sin x}{\partial y})+\vec{k}\ (\frac{\partial\cos y}{\partial x}-\frac{\partial\sin x}{\partial y})}$$

$$\boldsymbol{=\vec{i}\ (xe^{xy}-۰)-\vec{j}\ (ye^{xy}-۰)+\vec{k}\ (۰-۰)=xe^{xy}\ \vec{i}-ye^{xy}\ \vec{j}}$$

مثال

فرض کنیم تابع سه متغیره f دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد، در این صورت نشان دهید که کِرل گرادیان f صفراست. به عبارت دیگر

$$Curl\ \nabla f=\vec{o}$$

حل : می دانیم $\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$ ، بنابراین

$$Curl\ \nabla f = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_y & f_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_x & f_y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\ (f_{zy} - f_{xz}) - \vec{j}\ (f_{zx} - f_{xz}) + \vec{k}\ (f_{yx} - f_{xy})$$

چون مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته است، لذا $f_{zy} = f_{yz}$ ، $f_{zx} = f_{xz}$ و $f_{xy} = f_{yx}$ ، بنابراین

$$Curl\ \nabla f = \nabla \times \nabla f = ۰\ \vec{i} - ۰\ \vec{j} + ۰\ \vec{k} = \vec{o}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

تعریف

لاپلاسین

فرض کنیم f تابع سه متغیره که مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم آن موجود باشد. لاپلاسین f را با نماد $\nabla^۲ f$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\nabla^۲ f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

هرگاه $\nabla^۲ f = ۰$ شود، تابع f را تابع همساز می نامیم.

مثال : تابع $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ - ۲z^۲$ را در نظر می گیریم. حاصل $\nabla^۲ f$ را بیابید.

حل :

$$f_x = ۲x \quad \rightsquigarrow \quad f_{xx} = ۲ \quad , \quad f_y = ۲y \quad \rightsquigarrow \quad f_{yy} = ۲ \quad , \quad f_z = -۴z \quad \rightsquigarrow \quad f_{zz} = -۴$$

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = ۲ + ۲ + -۴ = ۰$$

چون $\nabla^۲ f = ۰$ ، لذا تابع f یک تابع همساز می باشد.

ملاحظه

اگر f یک تابع دو متغیره باشد که مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم آن موجودند، آنگاه $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy}$ می باشد.
برای تابع f معادلهٔ $\nabla^2 f = 0$ (معادله بامشتقات جزئی $f_{xx} + f_{yy} = 0$) را **معادلهٔ لاپلاس** می نامیم.

مثال

نشان دهید تابع $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند.

حل: مشتقات جزئی مرتبهٔ اول، به صورت $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ و $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ می باشد. مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\boldsymbol{f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}} \quad , \quad \boldsymbol{f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

بنابراین

$$\nabla^{۲} f = f_{xx} + f_{yy} = \frac{-۲x^{۲} + ۲y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}} + \frac{۲x^{۲} - ۲y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}} = \frac{-۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۲x^{۲} - ۲y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}} = ۰$$

مثال

فرض کنیم f تابع سه متغیره باشد که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن موجود باشند، ثابت کنید.

$$div\ (\nabla f) = \nabla^{۲} f$$

حل: چون $\nabla f = f_x \overrightarrow{i} + f_y \overrightarrow{j} + f_z \overrightarrow{k}$ ، لذا

$$div(\nabla f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \nabla^{۲} f$$

مثال

میدان برداری $F = M\overrightarrow{i} + N\overrightarrow{j} + P\overrightarrow{k}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید دیورژانس کِرل F صفر است.

حل: بر طبق تعریف، کِرل F به صورت زیر است.

$$Curl\ F = \nabla \times F = (P_y - N_z)\overrightarrow{i} - (P_x - M_z)\overrightarrow{j} + (N_x - M_y)\overrightarrow{k}$$

اکنون دیورژانسِ $Curl\ F$ را به دست می آوریم.

$$div\ (Curl\ F) = (P_y - N_z)_x + (-P_x + M_z)_y + (N_x - M_y)_z$$

$$= P_{yx} - N_{zx} - P_{xy} + M_{zy} + N_{xz} - M_{yz} = ۰$$

زیرا $P_{xy} = P_{yx}$ ، $N_{xz} = N_{zx}$ و $M_{zy} = M_{yz}$.

۲ بخش دوم

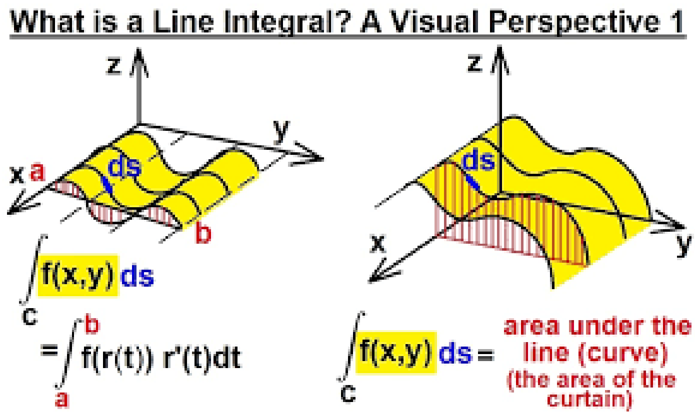
مفهوم انتگرال خط، انتگرال خط میدان برداری، شکل دیگر انتگرال خط میدان برداری؛

تعریف

انتگرال خط (انتگرال منحنی الخط)

فرض کنیم منحنی هموار C به صورت $r(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$ که $a \leq t \leq b$ ؛ و f تابعی پیوسته بر منحنی C باشد، در این صورت انتگرال خط f روی منحنی C با نماد $\int_C\ f(x,y,z)\ ds$ نمایش داده می شود و مطابق دستور زیر محاسبه می گردد.

$$\int_C\ f(x,y,z)\ ds = \int_a^b\ f(x(t),y(t),z(t))\ \ |\,r'(t)\,|\ \ dt$$

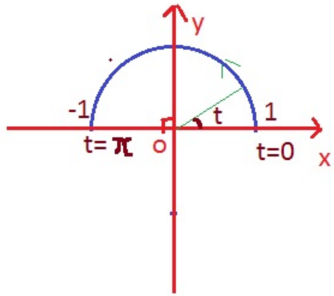


شکل ۲: مفهوم انتگرال خط

مثال : انتگرال خط $\int_C (x+y)\, ds$ ، که در آن C نیم دایرهٔ بالایی به مرکز مبدأ مختصات وشعاع یک می باشد را به دست آورید.

حل: دایره به مرکز مبدأ و شعاع یک به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ می باشد که شکل پارامتری آن به صورت $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ است. با در نظر گرفتن $۰ \leq t \leq \pi$ ، معادلهٔ پارامتری نیم دایرهٔ بالایی حاصل می شود. به عبارت دیگر

$$r(t) = \cos t \ \vec{i} + \sin t \ \vec{j} \quad , \quad ۰ \leq t \leq \pi \quad \rightsquigarrow \quad r'(t) = -\sin t \ \vec{i} + \cos t \ \vec{j}$$



شکل ۳: نیم دایره بالایی به مرکز مبدأ وشعاع یک

هم چنین $|r'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^۲ + (\cos t)^۲} = ۱$ ، بنابر این طبق دستور انتگرال خط داریم:

$$\int_C (x+y)\, ds = \int_۰^\pi (\cos t + \sin t)\, \underbrace{|r'(t)|}_{۱}\, dt = [\sin t - \cos t]_۰^\pi$$

$$= [(\sin\pi - \cos\pi) - (\sin ۰ - \cos ۰)] = ۰ + ۱ - (۰ - ۱) = ۲$$

مثال: حاصل $\int_C y \sin z \, ds$ را که درآن C منحنی به معادلهٔ $r(t) = \cos t \, \vec{i} + \sin t \, \vec{j} + t \, \vec{k}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ باشد، به دست آورید.

حل :

$$r(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \rightsquigarrow r'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow |r'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

بنابراین بر طبق فرمول انتگرال خط می نویسیم :

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin t}_{y} \sin \underbrace{t}_{z} \underbrace{|r'(t)|}_{\sqrt{2}} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \sqrt{2} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{4}\underbrace{\sin 4\pi}_{0} - 0\right] = \sqrt{2}\pi$$

مثال : حاصل انتگرال خط $\int_C (xy + z^2) \, ds$ را که در آن C پاره خط AB مطابق شکل زیر است، بیابید.

ارائه دهنده:

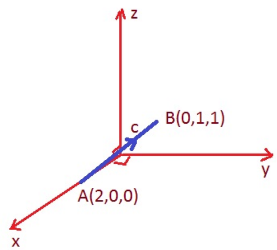
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه



شکل ۴: نمایش پاره خط AB

حل : فرض کنیم $A(۲,۰,۰)$ و $B(۰,۱,۱)$ نقاط روی پاره خط AB باشد. معادلهٔ پاره خط AB را می یابیم.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۰ - ۱ \\ ۱ - ۰ \\ ۱ - ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

بنابراین معادلهٔ پارامتری پاره خط AB به صورت زیر است.

$$C:\begin{cases} x = at + x_۱ = -۲t + ۲ \\ y = bt + y_۱ = ۱t + ۰ \\ z = ct + z_۱ = ۱t + ۰ \end{cases}$$

اکنون مقادیر t را برای شروع (با انتخاب طول نقطهٔ A) و پایان آن (با انتخاب طول نقطهٔ B) ، می یابیم.

$$x_A = ۲ \quad , \quad x_C = -۲t + ۲ \quad \rightsquigarrow \quad -۲t + ۲ = ۲ \quad \rightsquigarrow \quad -۲t = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad t = ۰$$

$$x_B = ۰ \quad , \quad x_C = -۲t + ۲ \quad \rightsquigarrow \quad -۲t + ۲ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad -۲t = -۲ \quad \rightsquigarrow \quad t = ۱$$

حال مشتقات منحنی پارامتری وسپس اندازهٔ $r'(t)$ را به دست می آوریم.

$$x' = -۲ \quad , \quad y' = ۱ \quad , \quad z' = ۱ \quad , \quad |\, r'(t) \,| = \sqrt{x'^۲ + y'^۲ + z'^۲} = \sqrt{(-۲)^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۶}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

انتگرال خط مطابق دستور زیر محاسبه می شود.

$$\int_C (xy+z^2)\,ds=\int_0^1 ((\underbrace{-2t+2}_{x})\underbrace{t}_{y}+\underbrace{t^2}_{z})\,\underbrace{|\,r'(t)\,|}_{\sqrt{6}}\,dt$$

$$=\sqrt{6}\int_0^1 (-t^2+2t)\,dt=\sqrt{6}\left[-\frac{t^3}{3}+2\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\sqrt{6}\,[-\frac{1}{3}+1]=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

تعریف

انتگرال خط میدان برداری

میدان برداری F را که روی منحنی هموار C پیوسته می باشد را در نظر می گیریم. انتگرال خط میدان برداری F را روی C با نماد $\int_C F\,.\,dr$ نمایش می دهیم. هرگاه منحنی C به صورت

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

که در آن $a \leq t \leq b$ ، آنگاه

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))\ .\,(x'(t), y'(t), z'(t))\ dt$$

مفهوم انتگرال خط روی میدان برداری همان **کار انجام شده** توسط نیروی F بر ذره ای متحرک روی منحنی C می باشد.

مثال : کاری که نیروی $F(x,y,z) = z\ \vec{i} + y\ \vec{j} + x\ \vec{k}$ روی منحنی C به معادلهٔ $r(t) = \cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j} + \vec{k}$ ، $\cdot \leq t \leq \pi$ انجام می دهد، را محاسبه کنید.

حل: $z(t) = ١$, $y(t) = \sin t$, $x(t) = \cos t$ بنابراین $r'(t) = (-\sin t, \cos t, \cdot)$ ؛ مطابق فرمول

انتگرال خط میدان برداری می نویسیم:

$$\int_C F\cdot dr=\int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\ .\ (x'(t),y'(t),z'(t))\ dt$$

$$=\int_۰^\pi F(\cos t,\sin t,۱)\,.\,(-\sin t,\cos t,۰)\ dt=\int_۰^\pi (۱,\sin t,\cos t)\,.\,(-\sin t,\cos t,۰)\ dt$$

$$=\int_۰^\pi (-\sin t+\sin t\ \cos t+۰\ \cos t)\ dt=\int_۰^\pi -sint+\frac{۱}{۲}\int_۰^\pi sin۲t\ dt$$

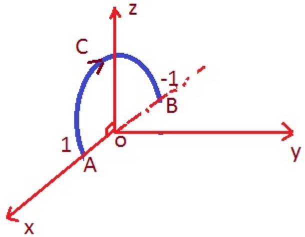
$$=[\cos t]_۰^\pi+\frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{۲}\ \cos ۲t]_۰^\pi=[\cos\pi-\cos ۰]+\frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{۲}\cos ۲\pi+\frac{۱}{۲}\cos ۰]=[-۱-۱]+\frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}]=-۲$$

مثال : متحرکی روی نیم دایره شکل زیر از نقطهٔ A به نقطهٔ B تحت اثر نیروی $F(x,y,z)=-z\vec{i}+x\vec{k}$ حرکت می کند، کار انجام شده توسط این نیرو بر متحرک را حساب کنید.

حل: این نیم دایره در صفحهٔ xoz مطابق شکل زیر دارای معادلهٔ زیر است:

$$r(t)=\cos t\ \vec{i}+\sin t\ \vec{k}\qquad,\qquad ۰\le t\le\pi$$

واحد رودهن
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه



شکل ۵: نمایش نیم دایره در صفحهٔ xoz

بنابراین $r'(t) = -\sin t \ \vec{i} + \cos t \ \vec{k}$ ، پس مقدار کار انجام شده برابر است با:

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{\pi} F(\cos t, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + 0 + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{\pi} dt = [t]_0^{\pi} = \pi$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

شکل دیگر انتگرال خط

فرض کنیم $F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ یک میدان برداری پیوسته بر منحنی C به معادلهٔ $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ، $a \leq t \leq b$ باشد. در این صورت

$$\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

$$= \int_a^b [M(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + N(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + P(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)]\,dt$$

مثال : فرض کنیم $r(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$ ، $0 \leq t \leq \pi$ ، حاصل انتگرال خط $\int_C x\,dx + y^2\,dy + xy\,dz$ را به دست آورید.

حل: $x(t) = \sin t \quad , \quad y(t) = \cos t \quad , \quad z(t) = 1$ ، پس $x'(t) = \cos t \quad , \quad y'(t) = -\sin t \quad , \quad z'(t) = 0$ ؛ بنابراین

$$\int_C x\,dx + y^2\,dy + xy\,dz = \int_0^\pi [\sin t \underbrace{\cos t}_{x'(t)} + \cos^2 t \underbrace{-\sin t}_{y'(t)} + \sin t\ \cos t \underbrace{0}_{z'(t)}]\,dt$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

$$= \int_{\cdot}^{\pi} (\sin t \ \cos t - \sin t \ \cos^{۲} t)\ dt = \frac{۱}{۲}\int_{\cdot}^{\pi} \sin ۲t\ dt + \int_{\cdot}^{\pi} (\underbrace{-\sin t}_{u'})(\underbrace{\cos t}_{u})^{۲}\ )\ dt$$

$$= \frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{۲}\cos ۲t]_{\cdot}^{\pi} + [\frac{\cos^{۳} t}{۳}]_{\cdot}^{\pi} = \frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{۲}\cos ۲\pi + \frac{۱}{۲}\cos \cdot] + [\frac{\cos^{۳}\pi}{۳} - \frac{\cos^{۳} \cdot}{۳}]$$

$$= \cdot - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{-۲}{۳}$$

مثال: حاصل انتگرال خط $\int_C \frac{۱}{۱+x^{۲}}\,dx + \frac{۱}{۱+y^{۲}}\,dy$ که درآن C ربع دایرهٔ واحد از $(۱,\cdot)$ به $(\cdot,۱)$ می باشد را محاسبه کنید.

حل : مطابق شکل زیر منحنی C به معادلهٔ $r(t) = \cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j}$ که در آن $\cdot \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ می باشد. در نتیجه $r'(t) = -\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j}$ ، بنابراین

$$\int_C \frac{۱}{۱+x^{۲}}\,dx + \frac{۱}{۱+y^{۲}}\,dy = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{\overbrace{-\sin t}^{x'(t)}}{۱+(\underbrace{\cos t}_{x(t)})^{۲}} + \frac{\overbrace{\cos t}^{y'(t)}}{۱+(\underbrace{\sin t}_{y(t)})^{۲}})\ dt$$

$$= \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{-\sin t}{۱+\cos^{۲} t}\,dt + \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos t}{۱+\sin^{۲} t}\,dt$$

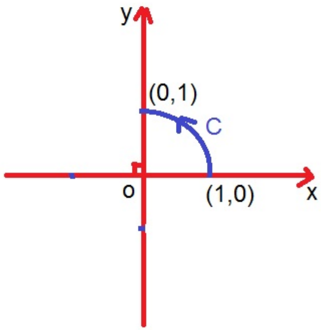
$$= [\arctan(\cos t)]_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} + [\arctan(\sin t)]_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} = [\arctan(\cos\frac{\pi}{۲}) - \arctan(\cos \cdot)] + [\arctan(\sin\frac{\pi}{۲}) - \arctan(\sin \cdot)]$$

$$= \arctan \cdot - \arctan ۱ + \arctan ۱ - \arctan \cdot = \cdot$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۶: نمایش ربع دایرهٔ واحد

۳ بخش سوم

انتگرال خط روی منحنی بسته، رابطه بین انتگرال دوگانه و انتگرال خط (قضیه گرین)؛

تعریف

میدان برداری بقا

میدان برداری F را در نظر می گیریم. هرگاه تابع چند متغیره f موجود باشد به طوری که

$$\nabla f = F$$

باشد، در این صورت F را یک میدان برداری بقا و f را یک تابع پتانسیل برای F می نامیم.

مثال

میدان برداری $F(x,y,z)=\sin y\cos z\ \overrightarrow{i}+x\cos y\cos z\ \overrightarrow{j}-x\sin y\sin z\ \overrightarrow{k}$ یک میدان برداری بقا است زیرا تابع سه متغیره $f(x,y,z)=x\sin y\cos z$ وجود دارد که

$$f_x=\sin y\cos z \quad , \quad f_y=x\cos y\cos z \quad , \quad f_z=-x\sin y\sin z$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\nabla f(x,y,z)=F(x,y,z)$$

یعنی f یک تابع پتانسیل برای میدان برداری F می باشد.

ملاحظه

برای میدان برداری بقا $F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ ، روابط زیر برقرار است:

$$N_x = M_y \quad , \quad M_z = P_x \quad , \quad P_y = N_z \quad (\star)$$

بر عکس، اگر دامنهٔ تعریف F تمام $\mathbb{R}^۳$ و روابط $(\star)$ برقرار باشند، آنگاه F یک میدان برداری بقا می باشد. به عبارت دیگر تابع سه متغیرهٔ f وجود دارد که $\nabla f = F$.
برای میدان برداری $F(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ ، روابط $(\star)$ تنها به تساوی $N_x = M_y$ تبدیل می شود.

مثال: کدام یک از میدان های برداری زیر، میدان برداری بقا است.

$$(۱)\ F(x,y) = \cos(x-y)\vec{i} + \sin(x+y)\vec{j} \qquad (۲)\ F(x,y,z) = ۲xyz\vec{i} + x^۲z\vec{j} + (x^۲y+۱)\vec{k}$$

حل : (۱) درستی تساوی $N_x = M_y$ را بررسی می کنیم.

$$N = \sin(x+y) \rightsquigarrow N_x = \cos(x+y) \quad , \quad M = \cos(x-y) \rightsquigarrow M_y = \sin(x-y)$$

چون $N_x \neq M_y$ می باشد، پس F میدان برداری بقا نیست.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

(۲) در ستی سه تساوی $N_x = M_y$ ، $M_z = P_x$ و $P_y = N_z$ را بررسی می کنیم.

$$M = ۲xyz \quad \rightsquigarrow \quad M_y = ۲xz \quad , \quad M_Z = ۲xy$$

$$N = x^۲z \quad \rightsquigarrow \quad N_x = ۲xz \quad , \quad N_z = x^۲$$

$$P = x^۲y + ۱ \quad \rightsquigarrow \quad P_x = ۲xy \quad , \quad P_y = x^۲$$

بنابراین $N_x = M_y = ۲xz$ ، $M_z = P_x = ۲xy$ و $P_y = N_z = x^۲$ ، لذا F میدان برداری بقا می باشد.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

ملاحظه

قضیه اساسی انتگرال خط

فرض کنیم C منحنی جهت دار و هموار از نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ به نقطهٔ $B(x_2, y_2, z_2)$ و میدان برداری بقا F بر نقاط منحنی C پیوسته که f تابع پتانسیل نظیر F باشد، در این صورت انتگرال خط میدان برداری F روی منحنی C از دستور زیر محاسبه می شود.

$$\int_C F \cdot dr = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

چون $\nabla f = F$ ، لذا انتگرال خط چنین نیز نوشته می شود.

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

نکتهٔ مهم در قضیهٔ فوق این است که انتگرال خط میدان برداری بقا، به منحنی C بستگی ندارد و تنها به نقاط شروع و پایان منحنی C وابسته است.

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

انتگرال خط $\int_C (e^x+y)\,dx+(x+۲y)\,dy$ که در آن منحنی C هموار در صفحه از نقطهٔ $A(۰,۱)$ تا نقطهٔ $B(۲,۳)$ می باشد را در نظر می گیریم. نشان دهید حاصل انتگرال خط به منحنی C وابسته نیست سپس حاصل آن را بیابید.

حل : مطابق قضیهٔ قبل برای این که نشان دهیم انتگرال خط وابسته به منحنی C نیست؛ ثابت می کنیم میدان برداری $F(x,y)=(e^x+y)\,\vec{i}+(x+۲y)\,\vec{j}$ یک میدان برداری بقا می باشد. قرار می دهیم

$$M(x,y)=e^x+y \qquad , \qquad N(x,y)=x+۲y$$

چون $M_y=N_x=۱$ ، پس F میدان برداری بقا است. اکنون برای محاسبه انتگرال خط ، مطابق قضیهٔ اساسی انتگرال خط، تابع پتانسیل f را چنان می یابیم که $\nabla f=F$ ؛ به عبارت دیگر

$$f_x\,\vec{i}+f_y\,\vec{j}=(e^x+y)\,\vec{i}+(x+۲y)\,\vec{j}$$

در نتیجه :

$$f_x=e^x+y \qquad , \qquad f_y=x+۲y$$

با انتگرال گیری بر حسب x و y داریم:

$$\int f_x\, dx = \int (e^x + y)\, dx = e^x + yx + g(y) \quad , \quad \int f_y\, dy = \int (x + 2y)\, dy = xy + y^2 + h(x)$$

از آنجا $f(x,y) = e^x + xy + y^2 + c$ که در آن $c \in \mathbf{R}$ یک عدد ثابت است. حال مطابق قضیه اساسی انتگرال خط مقدار آن به صورت زیر محاسبه می شود

$$\int_C (e^x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = [e^x + xy + y^2]_{(0,1)}^{(2,3)} = f(2,3) - f(0,1)$$

$$= (e^2 + 2(3) + 3^2) - (e^0 + 0(1) + 1^2) = e^2 + 13$$

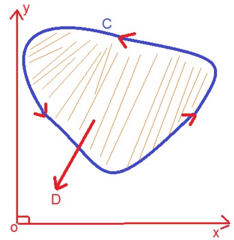
تذکر

اگر نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی C برهم منطبق باشند، آنگاه انتگرال خط میدان برداری بقا روی منحنی بسته C صفر است.

$$\int_C F \cdot dr = 0 \qquad\qquad \text{منحنی بسته است } C$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه



شکل ۷: نمایش ناحیهٔ سادهٔ بسته

ملاحظه

قضیهٔ گرین

فرض کنیم D یک ناحیهٔ بسته با منحنی هموار C و $F(x,y) = M(x,y)\ \vec{i} + N(x,y)\ \vec{j}$ یک میدان برداری باشد به طوری که توابع M و N دارای مشتقات جزئی اول پیوسته بر ناحیهٔ D باشد، دراین صورت

$$\int_C M\ dx + N\ dy = \int\int_D (N_x - M_y)\ ds$$

مثال

حاصل انتگرال خط $\int_C (y^۳ + y)\ dx + (۳y^۲x)\ dy$ که در آن منحنی C دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ می باشد را با استفاده از قضیهٔ گرین بیابید.

حل: شرایط قضیهٔ گرین برای انتگرال خط برقرار است، هم چنین $M = y^۳ + y$ و $N = ۳y^۲x$ که به وضوح در تمام نقاط ناحیهٔ محصور به C دارای مشتقات جزئی اول پیوسته می باشد و $N_x = ۳y^۲$ ، $M_y = ۳y^۲ + ۱$ ؛ بنابراین

$$\int_C (y^۳ + y)\ dx + (۳y^۲x)\ dy = \int\int_{D\ :x^۲+y^۲\le ۱} (۳y^۲ - ۳y^۲ - ۱)\ ds$$

$$= -\int\int_{D\ :x^۲+y^۲=۱} ds = -\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^۱ r\ dr$$

$$= -\int_۰^{۲\pi} d\theta\ [\frac{r^۲}{۲}]_۰^۱ = -\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi} d\theta = -\frac{۱}{۲}\ [\theta]_۰^{۲\pi} = -\pi$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تذکر

هرگاه ناحیهٔ D در صفحهٔ xoy دارای مرز بسته و جهت دار C باشد، آنگاه مساحت ناحیهٔ D از دستور زیر محاسبه می شود.

$$A = \frac{۱}{۲} \int_C x\, dy - y\, dx$$

مثال

با استفاده از دستور فوق مساحت دایرهٔ به مرکز مبداء شعاع r را محاسبه کنید.

حل:

منحنی ساده بستهٔ C دایره به مرکز مبداء وشعاع r به صورت $r(t) = r\cos t\,\vec{i} + r\sin t\,\vec{j}$ که $۰ \leq t \leq ۲\pi$ می باشد. بنابراین

$$A = \frac{۱}{۲} \int_C x\, dy - y\, dx = \frac{۱}{۲} \int_۰^{۲\pi} (r\cos t \underbrace{r\cos t}_{y'(t)} - r\sin t (\underbrace{-r\sin t}_{x'(t)}))\, dt$$

$$= \frac{۱}{۲} \int_۰^{۲\pi} r^۲ (\underbrace{\cos^۲ t + \sin^۲ t}_{۱})\, dt = \frac{r^۲}{۲} \int_۰^{۲\pi} dt = \frac{r^۲}{۲} [t]_۰^{۲\pi} = \frac{r^۲}{۲}(۲\pi) = \pi r^۲$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

حاصل انتگرال خط $\int_C ۲xy^۳z^۴\,dx+۳x^۲y^۲z^۴\,dy+۴x^۲y^۳z^۳\,dz$ که درآن C منحنی بستهٔ $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ می باشد، را به دست آورید.

حل: تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)=x^۲y^۳z^۴$ را در نظر می گیریم. گرادیان f به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\nabla f = ۲xy^۳z^۴\,\vec{i} + ۳x^۲y^۲z^۴\,\vec{j} + ۴x^۲y^۳z^۳\,\vec{k} = F(x,y,z)$$

بنابراین

$$\int_C ۲xy^۳z^۴\,dx + ۳x^۲y^۲z^۴\,dy + ۴x^۲y^۳z^۳\,dz = \int_C F\,.\,dr$$

لذا F یک میدان برداری بقا است که تابع f تابع پتانسیل آن می باشد. اکنون بنا به قضیهٔ اساسی انتگرال خط میدان برداری بقا، چون منحنی C بسته است، لذا حاصل انتگرال خط میدان برداری ، صفر است. یعنی

$$\int_C ۲xy^۳z^۴\,dx + ۳x^۲y^۲z^۴\,dy + ۴x^۲y^۳z^۳\,dz = ۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

۴ مسایل نمونه

در این بخش چند مسئله نمونه در ارتباط با میدان برداری و انتگرال خط و کاربرد های آن بیان می شوند.

۱ ــ **دیورژانس میدان برداری** $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(۲x+y)\overrightarrow{i}-۳y\overrightarrow{j}+(۴z^{۲}+z)\overrightarrow{k}$ کدام مقدار است؟

(۱) $۸z$ **(۲)** $۸z-۲$ **(۳)** $۸z-۱$ **(۴)** $۸z+۱$

۲ ــ برای تابع f با مشتقات جزئی پیوسته، حاصل **کِرل گرادیان** تابع f یعنی $\nabla\times(\nabla f)$ چقدر است؟

(۱) ۰ **(۲)** ۱ **(۳)** -۱ **(۴)** $f_{xx}-f_{yy}\overrightarrow{i}$

۳ ــ برای تابع سه متغیره f که مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم آن موجودند و $f_{xx}+f_{yy}=۰$ می باشد، حاصل **دیورژانسِ گرادیان** f یعنی $\nabla\cdot(\nabla f)$ چه مقدار است؟

(۱) ۰ **(۲)** f_{zz} **(۳)** $-f_{zz}$ **(۴)** -۱

۴ ــ **کِرل میدان برداری** $\overrightarrow{F}(x,y,z)=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ چه برداری است؟

(۱) $\overrightarrow{i}$ **(۲)** $\overrightarrow{j}$ **(۳)** $\overrightarrow{k}$ **(۴)** $\overrightarrow{o}$

۵ ــ حاصل **انتگرال خط** $\int_C (x-y+z)\,ds$ که درآن منحنی C وابسته به تابع پارامتری $\overrightarrow{r}(t)=\sin t\,\overrightarrow{i}+\cos t\,\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ که $۰\leq t\leq ۲\pi$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) ۲π **(۲)** π **(۳)** $۲\pi+۲$ **(۴)** $۲\pi-۲$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

۶ـ حاصل **انتگرال خط** $\int_C yx^۲\, ds$ که درآن منحنی C ، نیم دایرهٔ بالایی $x^۲+y^۲=۱$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) $-\frac{۲}{۳}$ (۴) $-\frac{۱}{۳}$

۷ـ اگر C پاره خط AB باشد که در آن $A(۰,۱,۲)$ و $B(۲,۰,-۱)$ ؛ آنگاه حاصل انتگرال خط $\int_C x\, dx + y\, dy + z\, dz$ کدام مقدار است؟

(۱) ۷ (۲) ۰ (۳) ۱۴ (۴) $\frac{۷}{۲}$

۸ـ متحرکی روی منحنی C وابسته به تابع برداری $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{k}$ که در آن $۰\le t\le \pi$ است، تحت نیروی $F(x,y,z)=-z\,\vec{i}+x\,\vec{k}$ حرکت می کند. **کار انجام شده** توسط این نیرو بر متحرک کدام مقدار است؟

(۱) π (۲) ۲ π (۳) ۰ (۴) ۳ π

۹ـ اگر D ناحیه ساده بسته با منحنی هموار C و $F=M\,\vec{i}+N\,\vec{j}$ میدان برداری با مشتقات جزئی اول پیوسته روی ناحیهٔ D باشد، در این صورت بنا به **قضیه گرین** ، حاصل انتگرال خط $\int_C M\, dx+N\, dy$ برابر کدام مقدار است؟

(۱) $\int\int_D(N_x+M_y)\, ds$ (۲) $\int\int_D(N_y-M_x)\, ds$

(۳) $\int\int_D(N_x-M_y)\, ds$ (۴) $\int\int_D(N_y+M_x)\, ds$

۱۰ـ حاصل $\int_C (x^۲y+x)\, dx+(۳xy+y^۲)\, dy$ که در آن C منحنی بستهٔ $x^۲+y^۲=۱$ می باشد، بنا به قضیهٔ گرین کدام مقدار است؟

$$(۱)\ \int\int_{D:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(۳y-x^{۲})\,ds$$

$$(۲)\ \int\int_{D:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(x^{۲}-۳y)\,ds$$

$$(۳)\ \int\int_{D:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(۳y+x^{۲})\,ds$$

$$(۴)\ \int\int_{D:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(۲xy-۱-۳x-۲y)\,ds$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مسایل نمونه

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

با سپاس فراوان از توجه شما