توانهای اعداد مختلط

قضیه (قضیه دوموآور): اگر $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ آنگاه برای عدد صحیح و مثبت n

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

مثال: اگر $z_1=-1+\sqrt{3}\,i$ و $z_2=1+i$ مقدار $\dfrac{z_1^6}{z_2^5}$ را بیابید

حل: ابتدا شکل قطبی z_1 و z_2 را می‌نویسیم

$z_1=-1+\sqrt{3}\,i$

$a=-1,\ b=\sqrt{3}$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{-1}{2}\\[2mm] \sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$z_2=+1+i$

$a=1,\ b=1$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

لذا $z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ و درنتیجه

$$\frac{z_1^6}{z_2^5}=\frac{2^6\left(\cos 6\frac{2\pi}{3}+i\sin 6\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}^{\,5}\left(\cos 5\frac{\pi}{4}+i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{64(1+0)}{4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\frac{64}{4(-1-i)}\times\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{64(-1+i)}{4\times 2}=8(-1+i)$$

ریشه‌های اعداد مختلط

فرض کنیم $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ عددی مختلط و n عددی صحیح و مثبت باشد.

ریشه n ام z ، عدد مختلطی مانند $w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ است که $w^n=z$

(و یا $w=z^{\frac{1}{n}}$) لذا

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

چون قدر مطلق (طول) دو طرف مساوی است نتیجه می‌گیریم $r = \rho^n$ و یا $\rho = \sqrt[n]{r}$.

و هم چنین از تساوی دو عدد مختلط نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases}\cos n\alpha = \cos\theta \\ \sin n\alpha = \sin\theta\end{cases} \Rightarrow n\alpha = 2k\pi + \theta \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi + \theta}{n}$$

یعنی ریشه n اُم عدد مختلط z (یا $z^{\frac{1}{n}}$) عبارت است از

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حال برای هر مقدار $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ از تساوی فوق یک مقدار برای w بدست می‌آید که هر آن ریشه n اُم z می‌گوییم.

مثال: ریشه‌های سوم واحد را بیابید (معادله $z^3 = 1$ را حل کنید)

$$z^3 = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \Rightarrow z = 1^{\frac{1}{3}} = \{1(\cos 0 + i\sin 0)\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

پس ریشه‌های سوم واحد عبارتند از

$k = 0 \rightarrow z_0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 2 \longrightarrow z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال: معادله $z^5 = -\sqrt{3} + i$ را حل کنید

حل:

$$z = (-\sqrt{3} + i)^{\frac{1}{5}} = \left\{2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$$

ریشه‌ها $z_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)$

$k=0,1,2,3,4$

تمرین:

۱- ریشه‌های پنجم واحد را بیابید

۲- چهار ریشه چهارم ۱۶- را بیابید (معادله $z^4=-16$ را حل کنید)

۳- معادله $z^3+i-\sqrt{3}=0$ را حل کنید

۴- ریشه‌های معادله $z^2-(2-i)z+3-i=0$ را بیابید

۵- ریشه‌های معادله $z^4-2z^2+4=0$ را بیابید.

۶- معادله $z^4=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ را حل کنید

۷- اگر $z=1+i$ ، آنگاه مقدار z^{25} را بیابید

۸- ریشه‌های دوم $z=1+i$ را بیابید

۹- حاصل $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^{22}$ را بیابید

۳-۱

حل تمرینات صفحه ۳

۱- ریشه‌های پنجم واحد را بیابید.

$$z^5 = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \Rightarrow z = 1^{\frac{1}{5}} = \left\{1(\cos 0 + i\sin 0)\right\}^{\frac{1}{5}}$$
$$= 1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5} + i\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right)$$

و $k=0,1,2,3,4$

۲- چهار ریشه عدد ۱۶- را بیابید (معادله $z^4=-16$ را حل کنید)

$$z^4 = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi) \to z = \left\{16(\cos\pi + i\sin\pi)\right\}^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)$$

به ازای $k=0,1,2,3$

$$k=0 \to z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2(1+i)$$
$$k=1 \to z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2(-1+i)$$
$$k=2 \to z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2(-1-i)$$
$$k=3 \to z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i\right) = \sqrt2(1-i)$$

۳- معادله $z^3+i-\sqrt3=0$ را حل کنید

$$z^3+i-\sqrt3=0 \to z^3=\sqrt3-i \to z=\left\{\sqrt3-i\right\}^{\frac13}=\left\{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right\}^{\frac13}$$
$$=2^{\frac13}\left(\cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{6}}{3}+i\sin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{6}}{3}\right)$$

$k=0,1,2$

۴- ریشه‌های معادله $z^2-(2-i)z+3-i=0$ را بیابید

$$\Delta = (-(2-i))^2 - 4(1)(3-i) = 4-4i+i^2-12+4i = -9$$

ریشه‌ها $z_1, z_2 = \dfrac{2-i\pm\sqrt{-9}}{2} = \dfrac{2-i\pm(3i)}{2} \to 1+i,\ 1-2i$

۵- ریشه‌های معادله $z^4-2z^2+4=0$ را بیابید

قرار می‌دهیم $z^2=t$ پس معادله به شکل $t^2-2t+4=0$ در می‌آید و

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = -12 \to t = z^2 = \frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} = 1\pm\sqrt{-3} = 1\pm\sqrt3\, i$$

اگر $t=z^2=1+\sqrt3\, i \to z=(1+\sqrt3)^{\frac12}=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{\frac12}=\sqrt2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$

اگر $z^2=1-\sqrt3\, i \to z=(1-\sqrt3 i)^{\frac12}=\left\{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right\}^{\frac12}=\sqrt2\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$ $k=0,1$

$k=0,1$

(۳۴-۲)

۶- ریشه ۴ام عبارت $z^4 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$

$$z^4 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\to z = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right\}^{\frac{1}{4}} \Rightarrow z = \sqrt{2}^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{4}\right)$$

$k=0,1,2,3$

۷- اگر $z=1+i$ مقدار z^{20} را بیابید

$$z^{20} = (1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20} = \sqrt{2}^{20}\left(\cos 20\frac{\pi}{4} + i\sin 20\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\cos 5\pi + i\sin 5\pi\right) = 2^{10}(-1+0) = -2^{10}$$

۸- ریشه‌های سوم $z=1+i$ را بیابید.

$$z^{\frac{1}{3}} = (1+i)^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

$k=0,1,2$

۹- حاصل $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^{24}$ را بیابید.

$-1+\sqrt{3}i = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^{24} = \left(\frac{2\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}}{2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{24} = \left(\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{24} = \left(\mathrm{cis}\,\frac{11\pi}{12}\right)^{24}$$

$$= \mathrm{cis}\left(24\,\frac{11\pi}{12}\right) = \mathrm{cis}\,22\pi = \cos 22\pi + i\sin 22\pi = 1+0 = 1$$

مشتق

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی x تعریف شده باشد. منظور از مشتق تابع f در x، تابعی است که با f' نمایش داده می‌شود و مقدارش،

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

تعریف می‌شود. به شرطی که حد موجود باشد. عملی که ما را از f به f' می‌رساند مشتق‌گیری نسبت به متغیر x نام دارد. اگر $f'(x)$ متناهی باشد، f را در x مشتق‌پذیر می‌گوییم.

هرگاه x_0 عدد خاصی از قلمرو تابع f باشد، آنگاه

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

، با تغییر متغیر $x=x_0+\Delta x$ داریم

$\Delta x\to 0\equiv x\to x_0$ و لذا

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مشتق تابع $y=f(x)$ را علاوه بر نماد $f'(x)$ با نمادهای زیر نیز نمایش می‌دهیم

$$y'\ ,\ \frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{df}{dx}$$

مثال: اگر $y=f(x)=c$ (c عدد ثابت) آنگاه،

$$c'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

مثال دیگر: $y=f(x)=x^n$ (n عدد صحیح مثبت) آنگاه

$$(x^n)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n - \cancel{x^n}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= n x^{n-1}$$

مثال: اگر $y = f(x) = \sqrt{x}$ ؛ آنگاه:

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: از توابع $\sin x$ و $\cos x$ مشتق بگیرید:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$\boxed{\sin a - \sin b = 2 \sin\frac{a-b}{2} \cos\frac{a+b}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

به همین ترتیب، $(\cos x)' = -\sin x$

قضایای مشتق

۱- اگر c عددی ثابت و $y=f(x)=c$ آنگاه $y'=0$

مثال: $\left(-\frac{2}{5}\right)'=0$ ، $\left(-\frac{\pi\sqrt{2}}{5}\right)'=0$ ، $(4)'=0$

۲- اگر r عددی گویا و $y=f(x)=x^r$ آنگاه $y'=rx^{r-1}$

مثال:

$$(x)'=1\ ,\ (x^2)'=2x\ ,\ (x^3)'=3x^2\ ,\ (x^4)'=4x^3$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(x^{-\frac{4}{5}})'=-\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1}$$

و ...

۳- اگر توابع f و g در x مشتق‌پذیر باشند آنگاه

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\qquad (g(x)\neq 0)$$

صفحه ۴

نتیجه: ۱) $(af(x))' = af'(x)$ و لذا $(ax^r)' = rax^{r-1}$

مثال: $(ax)' = a$ ، $\left(-\frac{2}{3}x^6\right)' = -\frac{2}{3}(6)x^{6-1} = -4x^5$

$$(-2x^{-3})' = (-2)(-3)x^{-3-1} = 6x^{-4}$$

۲) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

و همین طور $(\cot x)' = -\csc^2 x = -(1+\cot^2 x)$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید

الف) $y = \frac{2x-4}{-3x+5}$ ؛ ب) $y = (2-x^2)\cos x$ ؛ پ) $y = (3x^2-5)(x^2+5x^{-1})$

حل: الف) $$y' = \frac{(2x+4)'(-3x+5) - (2x-4)(-3x+5)'}{(-3x+5)^2}$$

$$= \frac{2(-3x+5) - (2x+4)(-3)}{(-3x+5)^2} = \frac{22}{(-3x+5)^2}$$

ب) $$y' = (2-x^2)'(\cos x) + (2-x^2)(\cos x)'$$

$$= -2x\cos x + (2-x^2)(-\sin x)$$

پ) $$y' = (3x^2-5)'(x^2+5x^{-1}) + (3x^2-5)(x^2+5x^{-1})'$$

$$= 6x(x^2+5x^{-1}) + (3x^2-5)(2x-5x^{-2})$$

۴- مشتق تابع مرکب: هرگاه تابع g در x، تابع f در g(x) مشتق پذیر باشد

آنگاه تابع مرکب fog در x مشتق پذیر است و

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

نتیجه: اگر u تابعی مشتق پذیر از x باشد آنگاه

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، $(\sin u)' = u'\cos u$ ، $(\cos u)' = -u'\sin u$

$(u^r)' = r\,u'\,u^{r-1}$ ، $(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u)$

$(\cot u)' = -u'(1+\cot^2 u)$

مثال: مشتق بگیرید.

الف) $y = (2x^2-5x+3)^{10}$

اگر $u = 2x^2-5x+3$ آنگاه $y = u^{10}$ پس

$$y' = 10u'u^{10-1} = 10(4x-5)(2x^2-5x+3)^9$$

ب) $y = \sqrt{5x-x^2}$

$$u = 5x-x^2 \longrightarrow y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$$

پ) $y = \sin^3(5x^{-1}+3x^4)$

$$\sin(5x^{-1}+3x^4) = u \longrightarrow y = u^3 \longrightarrow y' = 3u^2u'$$

آنگاه

$$u = \sin(\underbrace{5x^{-1}+3x^4}_{v}) \longrightarrow u' = v'\cos v = (-5x^{-2}+12x^3)\cos(5x^{-1}+3x^4)$$

$v = 5x^{-1}+3x^4$

و در نتیجه

$$y' = 3\sin^2(5x^{-1}+3x^4)(-5x^{-2}+12x^3)\cos(5x^{-1}+3x^4)$$

ت) $y = \sqrt{\dfrac{2x^2+1}{3x^2-1}}$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{3x^2-1}}} = \frac{\dfrac{4x(3x^2-1) - 6x(2x^2+1)}{(3x^2-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{3x^2-1}}}$$

فرمول‌های زیر مشتق

$(e^x)' = e^x$ ، $(e^u)' = u' e^u$

$(a^x)' = a^x \ln a$ ، $(a^u)' = u' a^u \ln a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ، $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ ، $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

$(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $(\operatorname{Arcsin} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\operatorname{Arccos} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $(\operatorname{Arccos} u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\operatorname{Arctan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ، $(\operatorname{Arctan} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\operatorname{Arccot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ ، $(\operatorname{Arccot} u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید

الف) $y = x\ln x$

$y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$

ب) $y = \sqrt{2x^2+x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}$ $\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}$

$y = \sqrt{2x^2+x^3} + \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2x^2+x^3} + (4-x^2)^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y' = \frac{4x+3x^2}{2\sqrt{2x^2+x^3}} + \left(-\frac{1}{3}\right)(-2x)(4-x^2)^{-\frac{1}{3}-1}$

تمرین: مشتق توابع زیر را به کمک فرمول‌های ذکر شده در بالا بیابید

۱) $y = x^2\ln x + e^{3x-x^2} + 5\sqrt{x^2+x}$

۲) $y = \ln(x^3 + 2x^{-2} - x^4)$

۳) $y = 2x^{-3}\ln(x^2+1)$

۴) $y = x^4 \ln\sqrt[4]{x^3-x^2+x-1}$

۵) $y = -2x^2\sqrt{5x^3-x}$

۶) $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4}$

۷) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x+x^2}} + \sqrt{3x-1} + \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

صفحه ۱۰