بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمات حساب دیفرانسیل چند متغیره

مقدمات بردار و تابع برداری

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۶ فروردین ۱۴۰۰

عنوان مطالب:

۱. بردار، معرفی مختصات فضایی (فضای سه بُعدی حقیقی)، بردار مکان، بردارهای پایه، جبر بردار ها (جمع، تفریق و ضرب عدد در بردار)؛

۲. ضرب داخلی (عددی)، ضرب خارجی (برداری)، ضرب مختلط، معادلهٔ خط در فضا، معادلهٔ صفحه ؛

۳. تابع برداری، حسابان توابع برداری، کُنجِ فِرِنه، صفحهٔ بوسان، انحناء و تاب؛

۴. حل مسایل نمونه

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

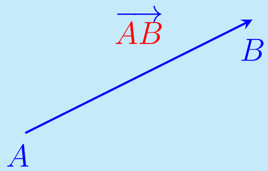
۱ بخش اول

معرفی بردار، مختصات فضایی و جبر بردارها

تعریف

بردار

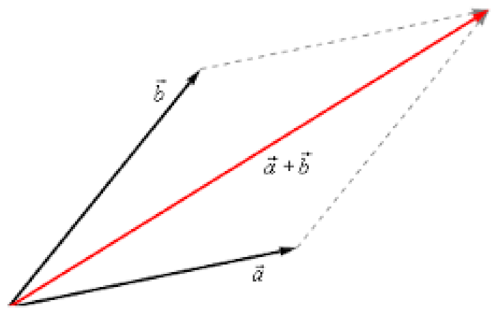
بعضی از کمیت ها در طبیعت علاوه بر دارا بودن مقدار ، دارای جهت نیز می باشند. مانند نیرو و سرعت و...؛ برای نمایش این کمیت ها از بردار استفاده می کنیم. به طور واضح، بردار پاره خطی جهت دار است که دارای ابتدا و انتها می باشد. مانندبردار $\overrightarrow{AB}$ که دارای ابتدای A وانتهای B است. طول یا اندازه این بردار، که فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B می باشد بانمادهای $|\overrightarrow{AB}|$ یا $\|\overrightarrow{AB}\|$ نمایش داده می شود.



هرگاه اندازه بردار یک شود یعنی $|\overrightarrow{AB}| = ۱$ ؛ در این صورت بردار را واحد یا یکه می نامیم.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱: نمایش جمع دو بردار

نمایش جمع هندسی دو بردار مطابق شکل فوق می باشد.

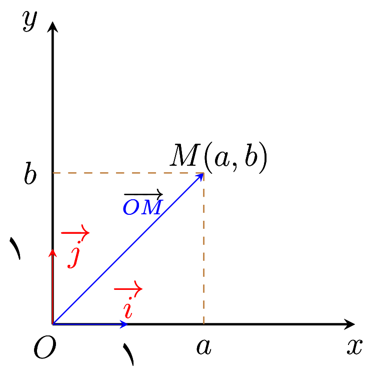
بردار مکان در صفحه

محور های مختصات معمولی و نقطهٔ $M(a,b)$ را در نظر می گیریم. اگر از مبدا مختصات به نقطهٔ M وصل کنیم، بردار $\overrightarrow{OM}$ را بردار مکان نقطهٔ M می نامیم و می نویسیم

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$$

که در آن بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ پایه در صفحه یا$\mathbb{R}^۲$ می باشند وبه صورت زیر تعریف می شوند.

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$



مطابق شکل فوق، اندازه بردار مکان $\overrightarrow{OM}$ برابراست با:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

علاوه براین برای دو نقطهٔ $A(a, b)$ و $B(c, d)$ مختصات بردار مکان آن به صورت زیر می باشد.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} c - a \\ d - b \end{bmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(c-a)^۲ + (d-b)^۲}$$

مثال

دو نقطهٔ $A(-۱,۱)$ و $B(۰,۲)$ را در نظر می گیریم. آیا بردار $\overrightarrow{AB}$ واحد است؟

حل :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۰-(-۱) \\ ۲-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{۱^۲+۱^۲} = \sqrt{۲}$$

بنابراین بردار $\overrightarrow{AB}$ واحد نیست.

جمع، تفریق و ضرب عدد در بردار

دو بردار $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j}$ و $\vec{U} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$ و عدد حقیقی r را در نظر می گیریم. در این صورت داریم:

$$\vec{V} \pm \vec{U} = \begin{bmatrix} a \pm a' \\ b \pm b' \end{bmatrix} \quad , \quad r\,\vec{V} = \begin{bmatrix} ra \\ rb \end{bmatrix}$$

تعریف

معرفی مختصات سه بعدی حقیقی

مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. مجموعهٔ $\mathbb{R}^۲$ همان صفحهٔ مختصات حقیقی است که از ضرب دکارتی $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\mathbb{R}^۲ = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \; | a, b \in \mathbb{R} \}$$

اکنون مجموعهٔ $\mathbb{R}^۳$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mathbb{R}^۳ = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) \; | a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

هر عضو $\mathbb{R}^۲$ را یک زوج مرتب و هر عضو $\mathbb{R}^۳$ را یک سه تایی مرتب می نامیم. اگر $M(a, b, c) \in \mathbb{R}^۳$ باشد، در این صورت a را مولفهٔ اول یا طول ، b را مولفهٔ دوم یا عرض و c را مولفهٔ سوم یا ارتفاع نقطه M می نامیم. برای نمایش آن سه محور عمود بر هم را مطابق شکل زیر در نظر گرفته، نقطهٔ M در فضای سه بعدی مشخص می گردد.

ارائه دهنده:

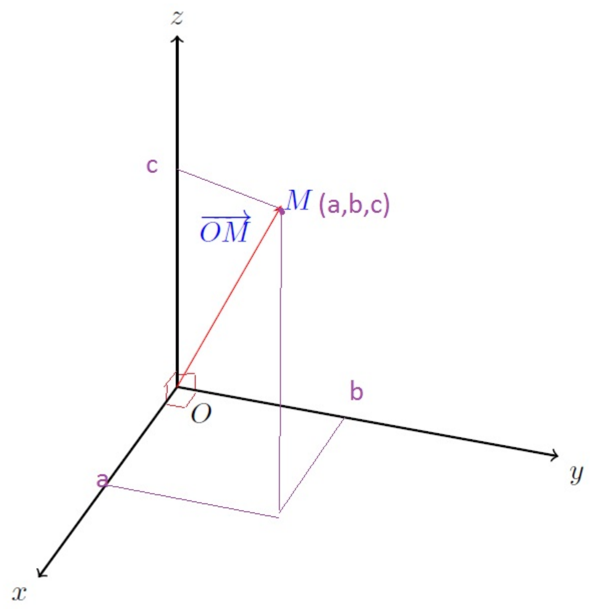
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه



شکل ۲: نمایش بردار مکان در فضا

علاوه بر این، بردار مکان نقطهٔ M و اندازهٔ آن به صورت زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \qquad |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

که در آن بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ پایه درفضا یا$\mathbb{R}^۳$ می باشند وبه صورت زیر تعریف می شوند.

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است برای دو نقطهٔ $A(a,b,c)$ و $B(a',b',c')$ در فضای سه بعدی بردار مکان $\overrightarrow{AB}$ و اندازهٔ آن به صورت زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a'-a \\ b'-b \\ c'-c \end{bmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a'-a)^۲ + (b'-b)^۲ + (c'-c)^۲}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

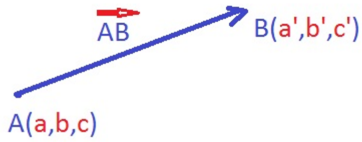
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه



شکل ۳: بردار مکان $\overrightarrow{AB}$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

دو نقطهٔ $A(۰,۱,۲)$ و $B(۱,-۱,۰)$ را در نظر می گیریم. آیا بردار $\overrightarrow{AB}$ واحد است؟

حل :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۱-۰ \\ -۱-۱ \\ ۰-۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{۱^۲+(-۲)^۲+(-۲)^۲} = \sqrt{۹} = ۳$$

بنابراین بردار $\overrightarrow{AB}$ واحد نیست.

جمع، تفریق و ضرب عدد در بردار

دو بردار $\overrightarrow{V}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{U}=a'\overrightarrow{i}+b'\overrightarrow{j}+c'\overrightarrow{k}$ و عدد حقیقی r را در نظر می گیریم. در این صورت داریم:

$$\overrightarrow{V}\pm\overrightarrow{U}=\begin{bmatrix}a\pm a'\\ b\pm b'\\ c\pm c'\end{bmatrix} \quad , \quad r\,\overrightarrow{V}=\begin{bmatrix}ra\\ rb\\ rc\end{bmatrix}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

دو بردار $\vec{U} = ۲\vec{i} - ۳\vec{k}$ و $\vec{V} = \vec{j} + ۲\vec{k}$ را در نظر می گیریم. حاصل بردارهای $۲\vec{U} - ۳\vec{V}$ و مقدار $|\vec{U} + \vec{V}|$ را بیابید.

حل :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \quad ۲\vec{U} - ۳\vec{V} = ۲\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ - ۰ \\ ۰ - ۳ \\ -۶ - ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \\ -۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ + ۰ \\ ۰ + ۱ \\ -۳ + ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \quad |\vec{U} + \vec{V}| = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۶}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

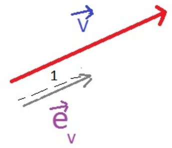
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه



شکل ۴: نمایش سُوی بردار $\vec{V}$

تعریف

سُوی بردار

سُوی بردار $\vec{V}$ را بانماد $\vec{e}_V$ نمایش می دهیم که برداری است هم جهت با بردار $\vec{V}$ که اندازهٔ آن یک یا واحد می باشد و مطابق دستور زیر محاسبه می گردد.

$$\vec{e}_V = \frac{1}{|\vec{V}|}\,\vec{V}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

سُوی بردار $\vec{V}=۳\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ را بیابید.

حل :

$$\vec{V}=\begin{bmatrix}۳\\-۱\\۲\end{bmatrix}\quad\rightsquigarrow\quad|\vec{V}|=\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۴}$$

بنابراین

$$\vec{e}_V=\frac{۱}{|\vec{V}|}\vec{V}=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\begin{bmatrix}۳\\-۱\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\\\frac{-۱}{\sqrt{۱۴}}\\\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\end{bmatrix}$$

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

۲ بخش دوم

ضرب داخلی (عددی)، ضرب خارجی (برداری)، ضرب مختلط، معادلهٔ خط در فضا، معادلهٔ صفحه ؛

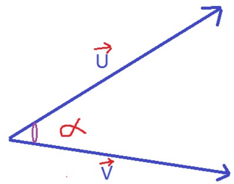
تعریف

ضرب داخلی (عددی)

دو بردار $\vec{U} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ و $\vec{V} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$ را در نظر می گیریم. ضرب داخلی یا عددی آنها را بانماد $\vec{U} \cdot \vec{V}$ نمایش می دهیم و مطابق دستورات زیر به دست می آیند.

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}|\,|\vec{V}|\,\cos\alpha \qquad\qquad \vec{U} \cdot \vec{V} = aa' + bb' + cc'$$

که در آن α زاویه بین دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ می باشد.

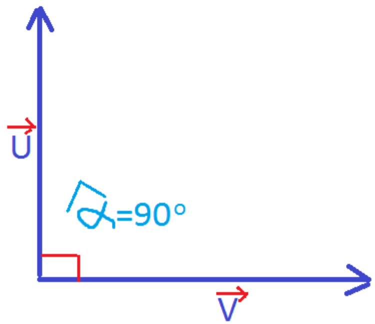


شکل ۵: α زاویه بین دو بردار است.

لازم به ذکر است که برای یافتن زاویهٔ بین دو بردار از ضرب داخلی دو بردار، مطابق دستور زیر استفاده می کنیم.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{|\vec{U}|\,|\vec{V}|} = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}\sqrt{a'^{۲}+b'^{۲}+c'^{۲}}}$$

باتوجه به تساوی فوق، هرگاه ضرب داخلی دو بردار صفر شود ، در این صورت $\cos\alpha = ۰$ ؛ در نتیجه $\angle\alpha = ۹۰^\circ$. به عبارت دیگر دو بردار بر هم عمودند.



شکل ۶: دو بردار عمود برهم

بنابراین

$$\vec{U}\cdot\vec{V}=\text{۰} \iff \vec{U}\perp\vec{V}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

دو بردار $\vec{U} = \vec{i} - ۲\vec{j} + ۲\vec{k}$ و $\vec{V} = -\vec{i} + ۲\vec{j} + ۳\vec{k}$ را در نظر می گیریم. اندازهٔ زاویه بین دو بردار را به دست آورید.

حل:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \rightsquigarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = ۱(-۱) + (-۲)۲ + ۲(۳) = -۱ - ۴ + ۶ = ۱$$

$$|\vec{U}| = \sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۹} = ۳ \qquad |\vec{V}| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۴}$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}|\,|\vec{V}|\,\cos\alpha = ۳\sqrt{۱۴}\,\cos\alpha$$

بنابراین

$$\underbrace{\vec{U} \cdot \vec{V}}_{۱} = ۳\sqrt{۱۴}\,\cos\alpha \rightsquigarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۳\sqrt{۱۴}} \rightsquigarrow \angle\alpha = \arccos\frac{۱}{۳\sqrt{۱۴}}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تعریف

کسینوس های هادی بردار

بردار مکان $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم. $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس های هادی بردار $\overrightarrow{OA}$ می نامیم که α ، β و γ به ترتیب زاویهٔ بردار $\overrightarrow{OA}$ با محور x ، محور y و محور z ها می باشد و به صورت زیر محاسبه می شود. (لازم به ذکر است که α زاویه بین بردار $\vec{i}$ و بردار $\overrightarrow{OA}$ می باشد.)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = |\vec{v}|\,|\vec{i}|\,\cos\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

به همین صورت $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ محاسبه می شود.

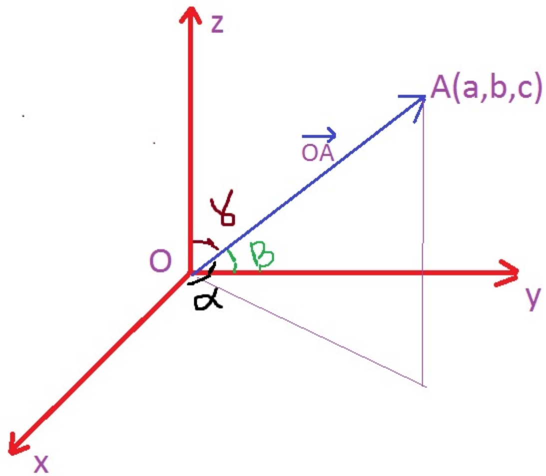
$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{j} = |\vec{v}|\,|\vec{j}|\,\cos\beta \quad \rightsquigarrow \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{k} = |\vec{v}|\,|\vec{k}|\,\cos\gamma \quad \rightsquigarrow \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۷: زاویهٔ بردار بامحورهای مختصات

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

کسینوس های هادی بردار $\vec{V}=۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ را به دست آورید.

حل :

$$\vec{V}=\begin{bmatrix}۲\\-۱\\۲\end{bmatrix} \quad\leadsto\quad |\vec{V}|=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳ \quad\leadsto\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{-۱}{۳} \qquad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{۲}{۳}$$

لازم به ذکراست در مثال فوق اندازهٔ زاویه بردار $\vec{V}$ با محور های مختصات نیز قابل محاسبه می باشد.
برای نمونه اندازهٔ زاویه بردار $\vec{V}$ بامحور z ها برابر است با:

$$\angle\gamma=\arccos(\frac{۲}{۳})$$

مفهوم فیزیکی ضرب داخلی

هرگاه $\overrightarrow{F}$ بردار نیرو وارد برجسم و بردار $\overrightarrow{d}$ جابجایی این جسم در نظر گرفته شود، در این صورت کار انجام شده توسط این نیرو برابر است با :

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d}$$

تعریف

ضرب خارجی (برداری) دو بردار

دو بردار $\overrightarrow{U} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{V} = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ را در نظر می گیریم. ضرب خارجی یا برداری آنها را بانماد $\overrightarrow{U} \times \overrightarrow{V}$ نمایش می دهیم و حاصل آن برداری است که بر دو بردار عمود می باشد و با استفاده از دستور دترمینان ۳ × ۳ به صورت زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{U} \times \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$= (bc' - cb')\overrightarrow{i} - (ac' - ca')\overrightarrow{j} + (ab' - ba')\overrightarrow{k}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تذکر

دترمینان ۲ × ۲ و دترمینان ۳ × ۳ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

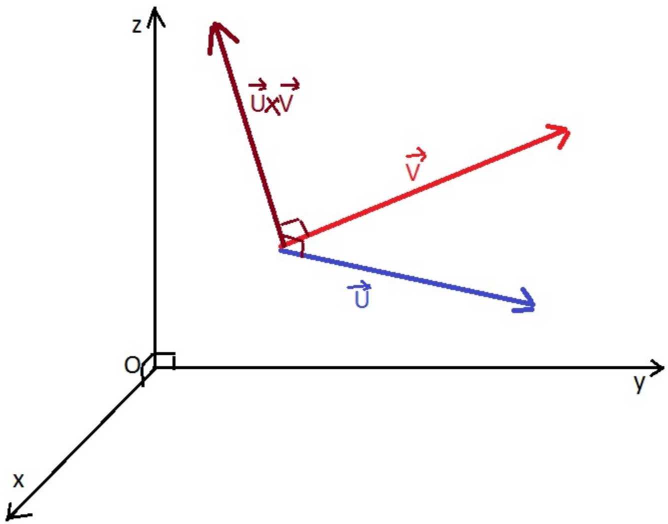
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

مثال :

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ \end{vmatrix} = -۱(-۳) - ۲(۰) = ۳ - ۰ = ۳$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} - (-۱) \begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} + ۳ \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(۰ - ۴) + ۱(۰ + ۲) + ۳(۰ + ۱) = -۸ + ۲ + ۳ = -۳$$



شکل ۸: نمایش ضرب خارجی دو بردار

واحد رودهن
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

برداری بیابید که بر دو بردار $\vec{U} = ۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$ و $\vec{V} = \vec{i} + ۲\vec{j} + \vec{k}$ عمود باشد.

حل :

ضرب خارجی دو بردار، بر دو بردار عمود است، لذا بردار $\vec{U} \times \vec{V}$ را می یابیم.

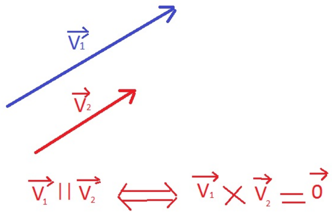
$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= (-۱ - ۶)\vec{i} - (۲ - ۳)\vec{j} + (۴ + ۱)\vec{k} = -۷\vec{i} + \vec{j} + ۵\vec{k}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۹: دو بردار موازی

ملاحظه

اگر α زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ باشد، آنگاه به راحتی ثابت می شود که

$$|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = |\vec{V}_1|\, |\vec{V}_2|\, \sin\alpha$$

بنابراین هرگاه دو بردار موازی یا هم راستا باشند، آنگاه $\alpha = 0$ ؛ در نتیجه $\sin\alpha = 0$ ، بنابراین $|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = 0$ ؛ به عبارت دیگر $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

تعیین مساحت مثلث

سه نقطه به رئوس $A(a,b,c)$ ، $B(a',b',c')$ و $C(a'',b'',c'')$ که تشکیل مثلث ABC می دهد را در نظر می گیریم. ثابت می شود مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

علاوه براین اندازهٔ زاویه راس A یعنی α مطابق ضرب داخلی به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}$$

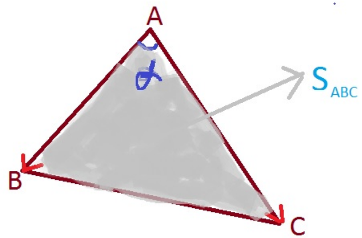
هم چنین محیط مثلث برابر است با :

$$P = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}|$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱۰: نمایش مساحت مثلث

لازم به ذکر است که بردارهای مکان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ در مثلث ABC به صورت زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a' - a \\ b' - b \\ c' - c \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} a'' - a \\ b'' - b \\ c'' - c \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} a'' - a' \\ b'' - b' \\ c'' - c' \end{bmatrix}$$

مثال : سه نقطه به رئوس $A(۲,۰,۰)$ ، $B(۰,۱,۰)$ و $C(۰,۰,۳)$ را در نظر می گیریم. مساحت مثلث ABC ، اندازهٔ زاویه راس A و محیط مثلث را به دست آورید.

حل : بردارهای مکان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ در مثلث ABC به صورت زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۰-۲\\ ۱-۰\\ ۰-۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}\qquad \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}۰-۲\\ ۰-۰\\ ۳-۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۰\\ ۳\end{bmatrix}\qquad \overrightarrow{BC}=\begin{bmatrix}۰-۰\\ ۰-۱\\ ۳-۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ -۱\\ ۳\end{bmatrix}$$

اکنون $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ را می یابیم :

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & ۱ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۳\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ -۲ & ۳\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ -۲ & ۰\end{vmatrix}$$

$$=(۳-۰)\vec{i}-(-۶-۰)\vec{j}+(۰+۲)\vec{k}=۳\vec{i}+۶\vec{j}+۲\vec{k}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بنابراین مساحت مثلث برابر اس با:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{۱}{۲} \sqrt{۳^۲ + ۶^۲ + ۲^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۹} = \frac{۷}{۲}$$

برای یافتن زاویه راس A از مثلث ABC ، ابتدا ضرب داخلی $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ و طول بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را به دست می آوریم.

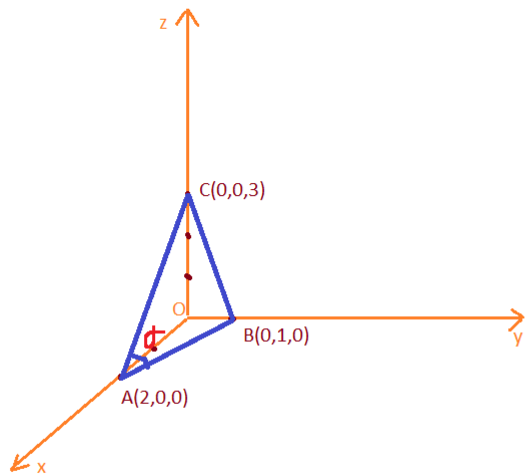
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} = -۲(-۲) + ۱(۰) + ۰(۳) = ۴$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۲)^۲ + ۱^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۵} \quad , \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-۲)^۲ + ۰^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳}$$

بنابراین $\cos\alpha$ برابر است با :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{۴}{\sqrt{۵}\sqrt{۱۳}} \quad \rightsquigarrow \quad \angle\alpha = \arccos(\frac{۴}{\sqrt{۵}\sqrt{۱۳}})$$

و در نهایت برای تعیین محیط مثلث ، چون $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{۰^۲ + (-۱)^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$ ؛ پس



شکل ۱۱: مثلث مختصاتی

$$P = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{۵} + \sqrt{۱۳} + \sqrt{۱۰}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

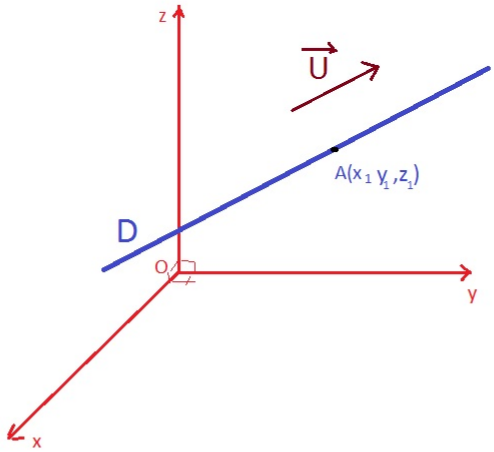
تعریف

معادلهٔ خط در فضا

فرض کنیم $A(x_1, y_1, z_1)$ یک نقطه روی خط D و بردار $\overrightarrow{U}(a, b, c)$ موازی یا هم راستا با خط D باشد، در این صورت معادلهٔ نرمال و پارامتری خط به صورت زیر نوشته می شود.

$$D : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_1 \end{cases}$$



شکل ۱۲: نمایش خط در فضا

واحد رودهن
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

معادلهٔ خطی را بنویسید که ازنقطهٔ $A(۲,-۱,۳)$ می گذرد و با بردار $\overrightarrow{U}(-۱,۲,-۳)$ موازی می باشد.

حل

$$\boldsymbol{D : \frac{x - \color{red}{۲}}{-۱} = \frac{y - \color{red}{(-۱)}}{۲} = \frac{z - \color{red}{۳}}{-۳}}$$

$$\begin{cases} x = at + \color{red}{x_۱} = -t + ۲ \\ y = bt + \color{red}{y_۱} = ۲t - ۱ \\ z = ct + \color{red}{z_۱} = -۳t + ۳ \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

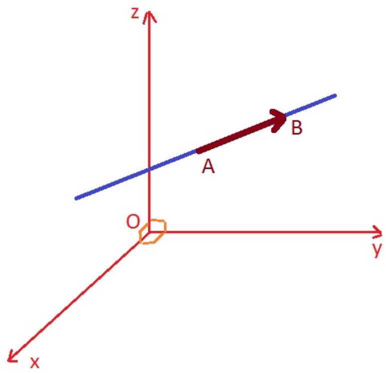
نوشتن معادلهٔ خط AB (خط گذرنده از دو نقطه)

دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $B(x_۲, y_۲, z_۲)$ را در نظر می گیریم. معادلات نرمال و پارامتری خطی که از این دو نقطهٔ می گذرد به صورت زیر نوشته می شود.

$$\boldsymbol{D : \frac{x - \color{red}{x_۱}}{x_۲ - x_۱} = \frac{y - \color{red}{y_۱}}{y_۲ - y_۱} = \frac{z - \color{red}{z_۱}}{z_۲ - z_۱}}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



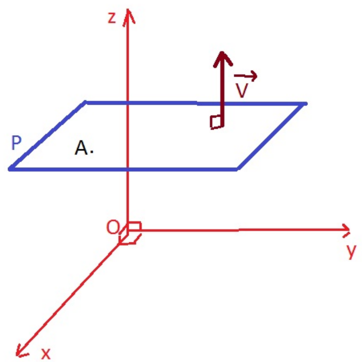
شکل ۱۳: نمایش خط AB

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1 \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

لازم به ذکر است که بردار $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ بردار هم راستا منطبق بر خط$\overrightarrow{AB}$ می باشد.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱۴: نمایش صفحه

تعریف

معادلهٔ صفحه

فرض کنیم $A(x_۱, y_۱, z_۱)$ یک نقطه روی صفحهٔ P و $\vec{V}(a,b,c)$ بردار عمود بر صفحه باشد، در این صورت معادلهٔ صفحه به صورت زیر است.

$$a(x - x_۱) + b(y - y_۱) + c(z - z_۱) = ۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

مثال

معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که نقطهٔ $A(۰,-۳,۲)$ می گذرد و بردار $\overrightarrow{V}=۲\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+۳\overrightarrow{k}$ بر آن عمود است.

حل :

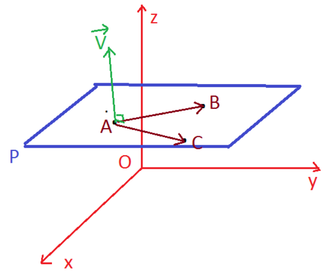
معادلهٔ این صفحه به صورت زیر است.

$$a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰ \quad \rightsquigarrow \quad ۲(x-۰)-(y-(-۳))+۳(z-۲)=۰$$

نوشتن معادلهٔ صفحه با داشتن سه نقطه روی آن (معادلهٔ صفحهٔ ABC)

برای نوشتن معادلهٔ صفحه ای که شامل سه نقطهٔ $A(a,b,c)$ ، $B(a',b',c')$ و $C(a'',b'',c'')$ می باشد، ابتدا بردار $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ که عمود بر صفحهٔ ABC است را تعیین می کنیم. یعنی

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱۵ : صفحهٔ شامل سه نقطه

$$\vec{V} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a' - a & b' - b & c' - c \\ a'' - a & b'' - b & c'' - c \end{vmatrix}$$

پس از محاسبهٔ ضرب خارجی فوق، فرض کنیم که $\vec{V} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (p_۱, p_۲, p_۳)$ ؛ در این صورت معادلهٔ صفحه برابر است با :

$$p_۱(x - a) + p_۲(y - b) + p_۳(z - c) = ۰$$

مثال

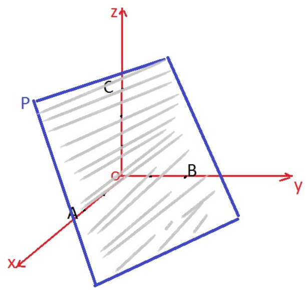
معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که شامل سه نقطهٔ $A(۲,۰,۰)$ ، $B(۰,۲,۰)$ و $C(۰,۰,۳)$ می باشد.

حل :

بردارهای $\overrightarrow{AB}=(۰-۲,۲-۰,۰-۰)$ و $\overrightarrow{AC}=(۰-۲,۰-۰,۳-۰)$ را در نظر می گیریم. بردار $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ را می یابیم.

$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -۲ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۳\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{vmatrix}-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ -۲ & ۳\end{vmatrix}+\overrightarrow{k}\begin{vmatrix}-۲ & ۲\\ -۲ & ۰\end{vmatrix}$$

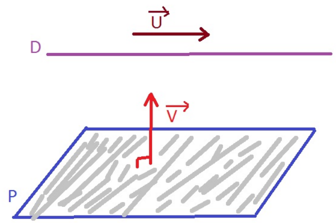
$$=(۶-۰)\overrightarrow{i}-(-۶-۰)\overrightarrow{j}+(۰+۴)\overrightarrow{k}$$



شکل ۱۶: صفحهٔ مختصاتی شامل سه نقطه

بنابراین بردار $\overrightarrow{V} = (۶,۶,۴)$ عمود بر صفحهٔ ABC می باشد، پس معادلهٔ صفحهٔ شامل نقاط A ، B و C عبارت است از :

$$۶(x-۲)+۶(y-۰)+۴(z-۰)=۰$$



شکل ۱۷: نمایش موازی بودن خط وصفحه

ملاحظه

برای یافتن نقطهٔ تلاقی یک خط و صفحه، معادلهٔ پارامتری خط را به دست آورده و آن را در معادلهٔ صفحه قرار داده و از آنجا پارامتر مجهول t را می یابیم. علاوه بر این هرگاه $\vec{U}$ بردار موازی یا منطبق بر خط D و $\vec{V}$ بردار عمود بر صفحهٔ P باشند. هنگامی که خط با صفحه موازی باشند، بردار $\vec{U}$ و بردار $\vec{V}$ بر هم عمودند. به عبارت دیگر $\vec{U} \cdot \vec{V} = ۰$.

مثال

محل تلاقی خط و صفحهٔ زیر را به دست آورید.

$$P : x + y - z = ۱ \qquad D : \begin{cases} x = t + ۲ \\ y = -t + ۳ \\ z = ۲t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

حل :

بجای x ، y و z معادلهٔ صفحه ، مختصات پارامتری خط را قرار داده ، سپس از حل معادله بر حسب t ، مجهول t را می یابیم.

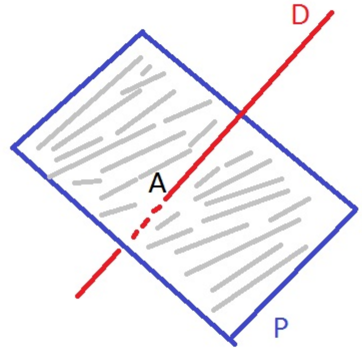
$$\boldsymbol{x + y - z = ۱ \quad \rightsquigarrow \quad t + ۲ - t + ۳ - ۲t = ۱ \quad \rightsquigarrow \quad ۵ - ۲t = ۱}$$

$$\boldsymbol{-۲t = -۴ \quad \rightsquigarrow \quad t = ۲}$$

بنابراین نقطهٔ $A(۲ + ۲, -۲ + ۳, ۲(۲)) = (۴, ۱, ۴)$ محل تلاقی خط و صفحه می باشد.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه



شکل ۱۸ : محل تلاقی خط و صفحه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۳ بخش سوم

تابع برداری، حسابان توابع برداری، کُنجِ فِرنه، صفحهٔ بوسان، انحناء و تاب؛

در این بخش پایانی به بیان توابع برداری ،روش های محاسبهٔ حد، مشتق ، انتگرال آنها می پردازیم. سپس به یک مفهوم فیزیکی که منجر به پدید آمدن کُنجِ فِرنِه می شود، اشاره خواهد شد.

تعریف

تابع برداری

اگر در یک بردار به جای مولفه های آن توابعی بر حسب یک متغیر مانندt قرار گیرد، در این صورت توابع برداری در صفحه و فضا به دست آمده است. تابع برداری در صفحه به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{cases} F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{2} \\ \overrightarrow{F(t)}=x(t)\ \overrightarrow{i}+y(t)\ \overrightarrow{j} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

به همین صورت تابع برداری در فضا تعریف می گردد.

$$\begin{cases} F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{3} \\ \overrightarrow{F(t)}=x(t)\ \overrightarrow{i}+y(t)\ \overrightarrow{j}+z(t)\ \overrightarrow{k} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

که در آن $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ توابع یک متغیره (توابع مختصاتی) می باشند. دامنهٔ تعریف تابع برداری ، مجموعه ای از اعداد حقیقی می باشد که در آن توابع مختصاتی تعریف شده باشند. به عبارت دیگر

$$D_F=D_x\cap D_y\cap D_z$$

منحنی وابسته به تابع برداری

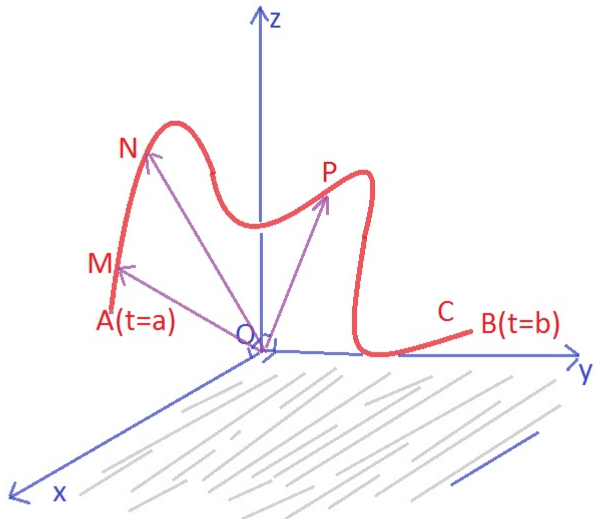
تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}$ را در فضای $\mathbb{R}^۳$ در نظر می گیریم. باتغییر پارامتر tدر دامنه اش بردار های مکان پدید می آید که مبدا همگی ، مبدا مختصات و انتهای آنها در فضا منحنی را بوجود می آورد که منحنی وابسته به تابع برداری نامیده می شود که شروع آن را در $t=a$ و پایان آن را در $t=b$ در نظر می گیریم و به شکل پارامتری زیر می نویسیم.

$$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad t\in[a,b]$$

که در آن $A(x(a),y(a),z(a))$ نقطهٔ شروع و $B(x(b),y(b),z(b))$ نقطهٔ انتها در نظر گرفته می شود و

باانتخاب $t=t_۱$ بردار مکان $\overrightarrow{OM}=\begin{bmatrix} x(t_۱) \\ y(t_۱) \\ z(t_۱) \end{bmatrix}$

به دست می آید که با تغییر t ، بردارهای مکان دیگر مانند$\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{OP}$ پدید می آید.



شکل ۱۹: نمایش منحنی وابسته به تابع برداری

به عنوان نمونه در تابع برداری $\overrightarrow{F(t)} = (t^{۲} - ۱)\vec{i} + \frac{۱}{t}\vec{j} + \sqrt{t}\,\vec{k}$ توابع مولفه ای عبارتند از

$$x(t) = t^{۲} - ۱ \qquad y(t) = \frac{۱}{t} \qquad z(t) = \sqrt{t}$$

دامنهٔ تعریف این توابع به ترتیب برابر است با :

$$D_x = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \qquad D_y = \mathbb{R} - \{t \mid \ t = ۰\ \}$$

$$D_z = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq ۰\ \}$$

لذا دامنهٔ تابع برداری برابر است با :

$$D_F == D_x \cap D_y \cap D_z = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{t \mid \ t = ۰\ \} \cap \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq ۰\ \} = (۰, +\infty)$$

وعلاوه بر این هرگاه $t = ۱$ از دامنه انتخاب شود بردار مکان $\overrightarrow{F(۱)} = (۱^۲ - ۱)\vec{i} + \frac{۱}{۱}\vec{j} + \sqrt{۱}\vec{k} = \vec{j} + \vec{k}$ حاصل می شود.

ملاحظه

برای دو تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}$ و $\overrightarrow{G(t)}$ حاصل اعمال $\overrightarrow{F(t)} \pm \overrightarrow{G(t)}$ ، $\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{G(t)}$ و $\overrightarrow{F(t)} \times \overrightarrow{G(t)}$ همانند اعمال جمع، تفریق ، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردار ها در $\mathbb{R}^۳$ می باشد. به عبارت دیگر هر عملی بین مولفه ها ی برداری تعریف شود مشابهاً آن عمل بین توابع مختصاتی تابع برداری تعریف خواهد شد.

حد، مشتق و انتگرال توابع برداری

بافرض این که توابع مولفه ای از یک تابع برداری مانند $\overrightarrow{F(t)} = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$ دارای حد، پیوستگی ، مشتق و انتگرال پذیری در نقطه یا یک فاصله باشند، تابع برداری دارای حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال پذیری در آن نقطه یا آن فاصله می باشد و مطابق دستورات زیر محاسبه می شوند.

$$\lim_{t\to a} \overrightarrow{F(t)} = \lim_{t\to a} x(t)\ \vec{i} + \lim_{t\to a} y(t)\ \vec{j} + \lim_{t\to a} z(t)\ \vec{k}$$

$$\overrightarrow{F'(t)} = x'(t)\ \vec{i} + y'(t)\ \vec{j} + z'(t)\ \vec{k}$$

$$\int_a^b \overrightarrow{F(t)}\ dt = \int_a^b x(t)\ dt\ \vec{i} + \int_a^b y(t)\ dt\ \vec{j} + \int_a^b z(t)\ dt\ \vec{k}$$

لازم به ذکر است هرگاه یکی از توابع مولفه ای حد نداشته ، مشتق پذیر نباشد ، انتگرال پذیر نباشد، در این صورت تابع برداری نیز حد نداشته ، مشتق پذیر نبوده ، انتگرال پذیر نمی باشد.

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

اگر معادلهٔ حرکت ذره ای روی منحنی C به صورت $\overrightarrow{F(t)}$ باشد، مشتق اول $\overrightarrow{F(t)}$ یعنی $\overrightarrow{F'(t)}$ ، سرعت لحظه ای ذره در زمان t است و تندی سرعت برابر است با:

$$|\overrightarrow{F'(t)}| = \sqrt{x'^{۲}(t) + y'^{۲}(t) + z'^{۲}(t)}$$

هم چنین مشتق دوم یعنی $\overrightarrow{F''(t)}$ ، شتاب لحظه ای ذره با سرعت $\overrightarrow{F'(t)}$ روی منحنی C است.هرگاه منحنی C به معادلات پارامتری فوق، در فاصلهٔ $[a,b]$ مشتق پذیر و مشتق آن پیوسته باشد و علاوه بر این برای تمام t ها ، $\overrightarrow{F'(t)} \neq ۰$ شود، C هموار نامیده می شود. ثابت می شود طول این منحنی هموار در فاصلهٔ $[a,b]$ برابراست با :

$$l = \int_a^b |\overrightarrow{F'(t)}|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'^{۲}(t) + y'^{۲}(t) + z'^{۲}(t)}\, dt$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال : تابع برداری زیر را در نظر می گیریم.

$$\overrightarrow{F(t)} = \sin t \ \overrightarrow{i} - \cos t \ \overrightarrow{j} + t \ \overrightarrow{k}$$

(۱) حاصل $\lim\limits_{t\to ۰} \overrightarrow{F(t)}$ ، $\overrightarrow{F'(t)}$ و $\overrightarrow{F''(۰)}$ را به دست آورید.

حل :

$$\lim_{t\to ۰} \overrightarrow{F(t)} = \lim_{t\to ۰} \ \sin t \ \overrightarrow{i} - \lim_{t\to ۰} \ \cos t \ \overrightarrow{j} + \lim_{t\to ۰} \ t \ \overrightarrow{k} = \sin ۰ \ \overrightarrow{i} - \cos ۰ \ \overrightarrow{j} + ۰ \ \overrightarrow{k} = ۰ \ \overrightarrow{i} - ۱ \ \overrightarrow{j} + ۰ \ \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F'(t)} = (\sin t)' \ \overrightarrow{i} - (\cos t)' \ \overrightarrow{j} + (t)' \ \overrightarrow{k} = \cos t \ \overrightarrow{i} + \sin t \ \overrightarrow{j} + \ \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F''(t)} = (\cos t)' \ \overrightarrow{i} + (\sin t)' \ \overrightarrow{j} + (۱)' \ \overrightarrow{k} = -\sin t \ \overrightarrow{i} + \cos t \ \overrightarrow{j} + ۰ \ \overrightarrow{k}$$

$$\rightsquigarrow \quad \overrightarrow{F''(۰)} = -\sin ۰ \ \overrightarrow{i} + \cos ۰ \ \overrightarrow{j} + ۰ \ \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j}$$

(۲) اگر $\overrightarrow{F(t)}$ معادلهٔ حرکت ذره ای روی منحنی وابسته به آن وقتی $۰ \leq t \leq ۲\pi$ ، باشد ، تندی سرعت را بیابید.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

حل :

$$|\overrightarrow{F'(t)}| = \sqrt{x'^{۲}(t) + y'^{۲}(t) + z'^{۲}(t)} = \sqrt{(\cos t)^{۲} + (\sin t)^{۲} + ۱^{۲}} = \sqrt{۲}$$

(۳) طول منحنی C وابسته به تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}$ را در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ به دست آورید.

حل :

$$l = \int_a^b |\overrightarrow{F'(t)}|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'^{۲}(t) + y'^{۲}(t) + z'^{۲}(t)}\, dt$$

$$= \int_۰^{۲\pi} \sqrt{\cos^{۲} t + \sin^{۲} t + ۱^{۲}}\, dt = \int_۰^{۲\pi} \sqrt{۲}\, dt = [\sqrt{۲}\, t]_۰^{۲\pi} = \sqrt{۲}(۲\pi) - \sqrt{۲}(۰) = ۲\pi\sqrt{۲}$$

(۴) مطلوب است حاصل ضرب داخلی $\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)}$ و حاصل ضرب خارجی $\overrightarrow{F(t)} \times \overrightarrow{F''(t)}$ ؟

حل :

$$\overrightarrow{F(t)}\cdot\overrightarrow{F'(t)}=\begin{bmatrix}\sin t\\ -\cos t\\ t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ ۱\end{bmatrix}=\sin t\ \cos t-\sin t\ \cos t+t=t$$

$$\overrightarrow{F(t)}\times\overrightarrow{F''(t)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \sin t & -\cos t & t\\ -\sin t & \cos t & ۰\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-\cos t & ۱\\ \cos t & ۰\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\sin t & ۱\\ -\sin t & ۰\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\sin t & -\cos t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}$$

$$=(۰-\cos t)\ \vec{i}-(۰+\sin t)\ \vec{j}+(\sin t\ \cos t-\sin t\ \cos t)\vec{k}=-\cos t\ \vec{i}-\sin t\ \vec{j}+۰\ \vec{k}$$

(۵) حاصل $\int_{۰}^{\pi}\overrightarrow{F(t)}\ dt$ را بیابید.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

حل :

$$\int_{0}^{\pi} \overrightarrow{F(t)}\, dt = \int_{0}^{\pi} \sin t\, dt\, \vec{i} - \int_{0}^{\pi} \cos t\, dt\, \vec{j} + \int_{0}^{\pi} t\, dt\, \vec{k}$$

$$= [-\cos t]_{0}^{\pi}\, \vec{i} - [-\sin t]_{0}^{\pi}\, \vec{j} + [\frac{t^{2}}{2}]_{0}^{\pi}\, \vec{k}$$

$$= (-\cos\pi + \cos 0)\, \vec{i} - (-\sin\pi + \sin 0)\, \vec{j} + (\frac{\pi^{2}}{2} - 0)\, \vec{k}$$

$$= 2\, \vec{i} + 0\, \vec{j} + \frac{\pi^{2}}{2}\, \vec{k}$$

★ ★ ★

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

تعریف

تابع برداری $\overrightarrow{F(t)} = x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j} + z(t)\ \overrightarrow{k}$ با منحنی هموار C وابسته به آن را در نظر می گیریم. وقتی که t از نقطهٔ $t=a$ شروع و به نقطهٔ $t=b$ پایان پذیرد؛ می نویسیم : $t \in [a,b]$. حال در هر نقطهٔ t ، بردار **مماس یکه** را با نماد $\overrightarrow{T(t)}$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{۱}{|\overrightarrow{F'(t)}|}\ \overrightarrow{F'(t)}$$

هرگاه در هر t ، بردار $\overrightarrow{T'(t)} \neq ۰$ باشد، **بردار قائم** را با نماد $\overrightarrow{N(t)}$ نمایش داده وبه صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{۱}{|\overrightarrow{T'(t)}|}\ \overrightarrow{T'(t)}$$

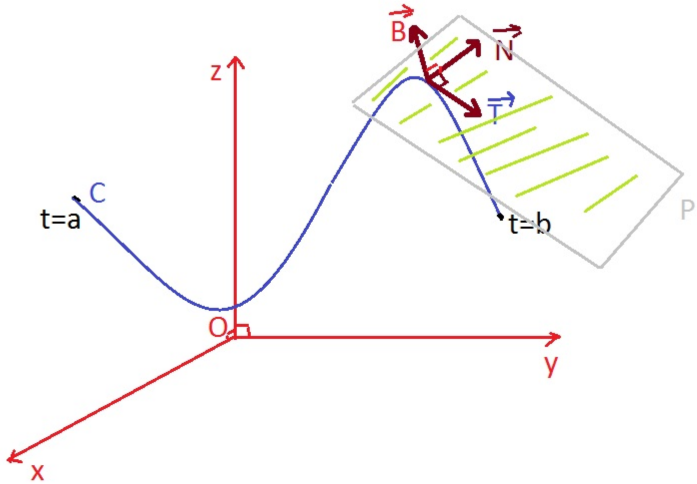
صفحه ای که از دو بردار $\overrightarrow{T(t)}$ و $\overrightarrow{N(t)}$ روی منحنی C می گذرد، **صفحهٔ بوسان** نامیده می شود.
بردار عمود بر صفحهٔ بوسان از حاصل ضرب خارجی $\overrightarrow{T}$ در $\overrightarrow{N}$ ، مطابق دستور زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$$

بردار $\overrightarrow{B(t)}$ را بردار **قائم دوم** می نامیم. اکنون به بردار های $\overrightarrow{T}$ ، $\overrightarrow{N}$ و $\overrightarrow{B(t)}$ ؛ که به صورت $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ می نویسیم، **کُنج فِرِنِه** منحنی C در t ...

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه



شکل ۲۰: نمایش کنج فرنه وصفحهٔ بوسان

مثال

تابع برداری $\overrightarrow{F(t)} = \cos t \ \vec{i} + \sin t \ \vec{j} + t \ \vec{k}$ را در نظر می گیریم. ابتدا **کنج فرنه** را برای این تابع برداری در نقطهٔ $t = \frac{\pi}{۲}$ به دست آورید. معادلهٔ **صفحهٔ بوسان** در نقطهٔ $t = \frac{\pi}{۲}$ روی آن را بیابید.

حل :

ابتدا مشتق تابع برداری و اندازهٔ آن را می یابیم.

$$\overrightarrow{F(t)} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{F'(t)} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$|\overrightarrow{F'(t)}| = \sqrt{(-\sin t)^۲ + (\cos t)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$$

بردار مماس یکه $\overrightarrow{T(t)}$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{۱}{|\overrightarrow{F'(t)}|}\,\overrightarrow{F'(t)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sin t}{\sqrt{۲}} \\ \frac{\cos t}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

حال بردار مشتق $\overrightarrow{T(t)}$ و اندازهٔ آن را به دست می آوریم.

$$\overrightarrow{T'(t)} = \begin{bmatrix} (\frac{-\sin t}{\sqrt{۲}})' \\ (\frac{\cos t}{\sqrt{۲}})' \\ (\frac{۱}{\sqrt{۲}})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos t}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-\sin t}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad |\overrightarrow{T'(t)}| = \sqrt{(\frac{-\cos t}{\sqrt{۲}})^۲ + (\frac{-\sin t}{\sqrt{۲}})^۲ + ۰^۲}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^۲ t + \sin^۲ t}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

بردار قائم اصلی $\overrightarrow{N(t)}$ از دستور زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{۱}{|\overrightarrow{T'(t)}|}\,\overrightarrow{T'(t)} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}\begin{bmatrix} \frac{-\cos t}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-\sin t}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ ۰ \end{bmatrix}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بردار های یکهٔ مماس و قائم اصلی در نقطهٔ $t=\frac{\pi}{2}$ به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\overrightarrow{T(\frac{\pi}{2})}=\begin{bmatrix}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}}\\ \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{N(\frac{\pi}{2})}=\begin{bmatrix}-\cos\frac{\pi}{2}\\ -\sin\frac{\pi}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

بردار قائم دوم به روش زیر محاسبه می شود.

$$\overrightarrow{B(\frac{\pi}{2})}=\overrightarrow{T(\frac{\pi}{2})}\times\overrightarrow{N(\frac{\pi}{2})}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(0+\frac{1}{\sqrt{2}})\,\vec{i}-(0-0)\,\vec{j}+(\frac{1}{\sqrt{2}}-0)\,\vec{k}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

به ازای $t=\frac{\pi}{2}$ در تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}$ ، نقطه ای روی صفحهٔ بوسان به دست می آیدکه بردار $\overrightarrow{B(\frac{\pi}{2})}$ عمود بر آن می باشد، لذا

$$\overrightarrow{F(\frac{\pi}{۲})} = (\cos\frac{\pi}{۲}, \sin\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) = (۰, ۱, \frac{\pi}{۲}) \qquad \overrightarrow{B(\frac{\pi}{۲})} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}(x-۰) + ۰\,(y-۱) + \frac{۱}{\sqrt{۲}}(z-\frac{\pi}{۲}) = ۰$$

بنابراین معادلهٔ صفحهٔ بوسان در $t = \frac{\pi}{۲}$ برابر است با:

$$x + z = \frac{\pi}{۲}$$

۴ مسایل نمونه

در این بخش چند مسئله در مورد بردارها و توابع برداری بیان می شود.

۱ـ بردار $\vec{V}=\vec{i}-\vec{k}$ چه زاویه ای با محور x ها می سازد؟

(۱) ۳۰° (۲) ۴۵° (۳) ۱۸۰° (۴) ۰°

۲ـ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{U}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{V}=\vec{j}-\vec{k}$ چقدر است؟

(۱) $\angle\alpha=\arccos(\frac{-۲}{\sqrt{۶}})$ (۲) $\angle\alpha=\arccos(\frac{۲}{\sqrt{۶}})$ (۳) $\angle\alpha=\arccos(\frac{-۱}{\sqrt{۶}})$ (۴) $\angle\alpha=\arccos(\frac{۱}{\sqrt{۶}})$

۳ـ اگر $\vec{U}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{V}=\vec{j}-\vec{k}$ ، حاصل $|\vec{U}\times\vec{V}|$ برابر است با :

(۱) $\sqrt{۳}$ (۲) $\sqrt{۵}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) $\sqrt{۶}$

۴ـ محیط مثلث به رئوس $A(۱,۰,۰)$ ، $B(۰,۱,۰)$ و $C(۰,۰,۱)$ چقدر است؟

(۱) $۳\sqrt{۳}$ (۲) $\sqrt{۶}$ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) $۳\sqrt{۲}$

۵ـ مساحت مثلث به رئوس $A(۱,۰,۰)$ ، $B(۰,۱,۰)$ و $C(۰,۰,۱)$ چقدر است؟

(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) $۳\sqrt{۲}$

۶ـ معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ $A(۱,۰,۰)$ ، $B(۰,۱,۰)$ و $C(۰,۰,۱)$ برابر است با:

(۱) $x+y+z=۰$ (۲) $x+y+z=۱$ (۳) $x-y-z=۱$ (۴) $x-y-z=۰$

۷ـ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,-۱,۰)$ و $(۱,۰,۱)$ صفحه به معادلهٔ $x+y+z=۳$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

(۱) $(۰,-۱,۲)$ (۲) $(۱,۰,۲)$ (۳) $(۰,۱,۲)$ (۴) $(-۱,۲,۰)$

دو تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}=\sin ۲t\ \vec{i}-\cos ۲t\ \vec{j}+t\ \vec{k}$ و $\overrightarrow{G(t)}=\ln t\ \vec{i}-e^{t-۱}\ \vec{j}+\sqrt{t}\ \vec{k}$ را در نظر می گیریم. به سوالات زیر پاسخ دهید.

۸ـ حاصل $\lim_{t\to ۰}\overrightarrow{F(t)}$ چقدر است؟

(۱) $\vec{j}$ (۲) $-\vec{j}$ (۳) $\vec{O}$ (۴) $\vec{i}-\vec{j}$

۹ـ حاصل $\lim_{t\to ۱}\overrightarrow{G(t)}$ چقدر است؟

(۱) $-\vec{j}+\vec{k}$ (۲) $-\vec{j}$ (۳) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ (۴) $\vec{i}-\vec{j}$

۱۰ـ مقدار ضرب داخلی $\overrightarrow{F(۰)}\cdot\overrightarrow{G(۱)}$ چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱۱ ـ مقدار حاصل ضرب خارجی $\overrightarrow{F(\pi)} \times \overrightarrow{G(۱)}$ چقدر است؟

(۱) $(۱-\pi)\,\vec{i}$ (۲) $\vec{O}$ (۳) $(\pi-۱)\,\vec{i}$ (۴) $\pi\,\vec{i}$

۱۲ ـ حاصل $|\overrightarrow{G'(۱)}|$ چقدر است؟

(۱) $\frac{۳}{\sqrt{۲}}$ (۲) $-\sqrt{۲}$ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۳ ـ بردار یکهٔ مماس برای تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}$ در نقطهٔ $t=\frac{\pi}{۲}$ کدام بردار است؟

(۱) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{k}$ (۲) $\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\vec{i}-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{k}$ (۳) $\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{k}$ (۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}\vec{i}-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{j}$

۱۴ ـ بردار قائم اصلی برای تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}$ کدام بردار است؟

(۱)) $\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}$ (۲) $-\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}$ (۳) $-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$ (۴) $\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$

۱۵ ـ بردار قائم دوم ($\overrightarrow{B(t)}$) برای تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}$ کدام بردار است؟

(۱) $-\vec{k}$ (۲) $\vec{k}$ (۳) $\vec{j}$ (۴) $-\vec{i}$

۱۶ ـ معادلهٔ صفحهٔ بوسان برای تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}$ در نقطهٔ $t=\frac{\pi}{۲}$ کدام صفحه است؟

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

(۱) $y=۱$ (۲) $x=۱$ (۳) $z=۱$ (۴) $z=-۱$

۱۷ــ طول منحنی پارامتری وابسته به تابع برداری $\overrightarrow{F(t)}=\sin t\,\overrightarrow{i}+\cos t\,\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ وقتی $\pi \leqslant t \leqslant ۰$ می باشد، چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) π (۳) ۲π (۴) $\frac{\pi}{۲}$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

با تشکر فراوان از توجه و حوصله شما

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی