6

فصل ۹

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک سیگنال چنین تعریف میشود:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \quad , \quad s = \sigma + j\omega$$

مثال)

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-st}dt = \frac{1}{s+a}e^{-(a+s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$\frac{1}{s+a} \quad , \qquad Re[s+a] < 0$$

ROC

$$e^{-(s+a)(-\infty)} = e^{-(\sigma+j\omega+a)(-\infty)} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}[s+a] < 0 \\ +\infty & \mathrm{Re}[s+a] > 0 \end{cases}$$

مثال)

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1-3j}$$

$Re[s+1-3j] > 0$ $\qquad\qquad$ $Re[s] > -1$

مثال)

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \rightarrow for\ alls$$

$$\delta(t).e^{-st} = \delta(t).e^{-s(0)} = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

خواص ناحیه ی همگرایی:

۱) Rocبه صورت نوار هایی موازی محور $j\omega$ باشدکه شامل هیچ قطبی نیست

۲) اگر $x(t)$دارای طول محدود و انتگرال پذیر باشد ، Roc کل صفحه ی s است.

۳) اگر $x(t)$سمت راستی و$X(s)$ گویا باشد Roc سمت راستِ راست ترین قطب قرار میگیرد.

$$X(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots}$$

۴) اگر $x(t)$ سمت چپی و $X(s)$ گویا باشد Roc سمت چپِ چپترین قطب قرار میگیرد.

۵) اگر $x(t)$ دو طرفه باشد ، Roc یا محدود به قطب ها شده یا اصلا وجود ندارد.

مثال)

$$x(t) = e^{-at} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$

$$Re[s] > -a \quad Re[s] < a \quad \rightarrow -a < Re[s] < a$$

*اگرمحور $j\omega$ داخل Roc باشد میتوان تبدیل لاپلاس را به فوریه تبدیل کرد.

مثال) کلیه ی سیگنال هایی رامشخص کنید که تبدیل لاپلاس آنها به صورت زیر است:

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2(s-3)}$$

$$= \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2\left(s-3\right)} = \frac{s}{\left(s-j\right)^2\left(s+j\right)^2\left(s-3\right)}$$

$$= \frac{k_{11}}{s+j} + \frac{k_{12}}{(s+j)^2} + \frac{k_{21}}{s-j} + \frac{k_{22}}{(s-j)^2} + \frac{k_3}{s-3}$$

$$k_{11} = k_{21}^*$$

$$k_{22} = k_{12}^*$$

$$k_{12} = (s+j)^2 . s \Bigg|_{s=-j}$$

$$k_{11} = \frac{d}{ds}(s+j)^2 . s) \Bigg|_{s=-j}$$

خواص تبدیل لاپلاس:

۱) خطی بودن:

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad , \quad Roc: R_1$$

$$y(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) \quad , \quad Roc: R_2$$

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{L} aX(s) + bY(s) \quad , \quad Roc: R_1 \cap R_2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} \quad , \quad Re[s] > -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad , \quad Re[s] > -2$$

$$X(s) + Y(s), \qquad Re[s] > -1$$

۲) انتقال زمانی:

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad Roc: R_1$$

۳) وارون سازی زمانی:

$$x(-t) \xleftrightarrow{L} X(-s)$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+2} \quad , \quad Re[s] > -2$$

$$e^{2t}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-2} \quad , \quad Re[s] < 2$$

۴) تغییر مقیاس در حوزه ی زمان:

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X(^{s}/_{a})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-st} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\frac{s}{a}} dt$$

مثال)

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$$

$$\frac{1}{5}\delta(t) = \delta(5t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{5}$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \quad , \quad Re[s] > 0$$

۵) مزدوج گیری:

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s)$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(-j\omega)$$

۶) مشتق گیری:

$$x'(t) \xleftrightarrow{L} sX(s) \quad , \quad Roc: R_1$$

انتگرال گیری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}, \quad Roc: R_1 \cap Re[s] > 0$$

۸) مشتق گیری در حوزه ی s (لاپلاس)

$$tx(t) \stackrel{l}{\longleftrightarrow} \frac{-dX(s)}{ds}$$ و $Roc: R_1$

مثال)

$$e^{at}u(t) \stackrel{l}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}$$ و $Re[s] > a$

$$\boxed{te^{at}u(t)} \stackrel{l}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s-a)^2}$$ و $Re[s] > a$

$$\frac{t^n}{n!}e^{at}u(t) \stackrel{l}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s-a)^{n+1}}$$ و $Re[s] > a$

۹) کانولوشن

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X(s)H(s) \qquad , \qquad Roc: R_1 \cap R_2$$

تمرین : فرض کنید ورودی یک سیستم LTI به صورت $x(t)=e^{-t}u(t)$ و خروجی آن به صورت $y(t)=e^{-2t} - e^{-3t}$ باشد مطلوب است: پاسخ ضربه ی سیستم ، پاسخ ضربه ی سیستم وارون و معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ی ورودی و خروجی.

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

۱۰) قضایای مقادیر اولیه و نهایی

$$x(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sX(s)$$

$$x(+\infty) = \lim_{s\to0^+} sX(s)$$

مثال) فرض کنید:

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)} \quad , \quad Re[s] > -1$$

مطلوب است $x(0^+)$ و $x(+\infty)$:

$$x(0^+) = \lim s\,.\,\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)} = \mathbf{0}$$

$$x(+\infty) = \lim s\,.\,\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)} = +\infty$$

خواص سیستم های LTI

۱) علی بودن: شرط علی بودن آن است که $h(t)=0\ ,\ t<0$. بنابرین اگر $\mathrm{H(s)}$ گویا و $\mathrm{h(t)}$ علی باشد Roc آن سمت راستی است.

۲) پایداری: شرط پایداری آن است که پاسخ ضربه ی آن مطلقا انتگرال پذیر باشد . بنابریندارای تبدیل فوریه است .پس شرط پایداری آن است که محور $j\omega$ داخل Roc باشد.

اگر $H(s)$ گویا و $h(t)$ علی باشد شرط پایداری آن است که کلیه ی قطب های $H(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند.

مثال

$$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt \leq \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{2t} dt \;\rightarrow\; +\infty$$

علی و ناپایدار

مثال

$$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = (0-1) + (1-0) = 0$$

غیر علی و پایدار

مثال) فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI مشخص شده اند . تابع تبدیل آن را رسم کنید.

۱) سیستم علی است

۲) تابع تبدیل آن گویا بوده و فقط دو قطب در $s=-2$, $s=1$ دارد

۳) اگر t=1 باشد، h(t)=0

۴) $h(0^+)=4$

$$H(s)=\frac{p(s)}{Q(s)}=\frac{p(s)}{(s-1)(s+2)}$$

$$p(s)=as^2+bs+c \otimes$$

$$h(0^+)=\lim_{s\to+\infty}s.\frac{p(s)}{Q(s)}=\lim_{s\to+\infty}s.\frac{as^2+bs+c}{(s-1)(s+2)}=\lim_{s\to+\infty}\frac{as^3+bs^2+cs}{s^2-2s+1}=+\infty$$

$$p(s)=as+b$$

$$h(0^+)=\lim_{s\to+\infty} s.\frac{p(s)}{Q(s)}=\lim_{s\to+\infty} s.\frac{as+b}{(s-1)(s+2)}=\lim_{s\to+\infty}\frac{as^2+bs}{s^2-2s+1}=4$$

$$a=4$$

$$H(s)=\frac{4s+b}{(s-1)(s+2)}=\frac{\left(\dfrac{4+b}{3}\right)}{s-1}+\frac{\left(\dfrac{-8+b}{-3}\right)}{s+2}$$

$$h(t)=\left(\frac{4+b}{3}\right)e^{t}u(t)+\left(\frac{-8+b}{-3}\right)e^{-2t}u(t)$$

$$h(1)=\left(\frac{4+b}{3}\right)e+\left(\frac{-8+b}{-3}\right)e^{-2}=0$$