قاعدهٔ هوپیتال

قضیه (صورت های مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) فرض کنیم توابع f و g روی (a,b) مشتق پذیر و برای هر x در (a,b) ؛ $g'(x)\neq 0$ ، هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ (یا $\pm\infty$) و

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L \,.$$

L می‌تواند یک عدد حقیقی و یا $+\infty$ و یا $-\infty$ باشد. اگر $x\to a^+$ با $x\to b^-$ و یا $x\to c$ که در آن $a<c<b$ عوض شود باز هم قضیه درست است.

قضیه: اگر توابع f و g بر $(a,+\infty)$ مشتق پذیر و برای هر $x>a$ ، $g'(x)\neq 0$ و هرگاه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (یا $\pm\infty$) و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ آنگاه $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$

می‌توان برای $x\to-\infty$ نیز با تغییر اندک صورت قضیه ، چنین نتیجه‌ای را نیز گرفت.

مثال: حدود زیر را بدست آورید

الف) $$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}-a^{10}}{x-a} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to a}\frac{10x^9}{1} = 10a^9$$

ب) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1} = 1$$

ج) $$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

گاهی برای حل یک مساله ، ممکن است چند بار از قاعده هوپیتال استفاده کنیم

به عنوان مثال: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

تمرین: حدود زیر را بیابید

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

۲) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

۴) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos \alpha x}{1-\cos \beta x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x^3-3x+2}$

۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} x}{\frac{1}{x}}$

حل ۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} x}{\frac{1}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

ساده می‌کنیم

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \underset{Hop}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{2} = \dfrac{0\times 0}{2} = 0$

ساده می‌کنیم

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$

گاهی اوقات قاعده هوپیتال کاربرد ندارد مثل

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \dots$

ولی اگر بگیریم $\frac{1}{x}=t$ آنگاه $x\to 0^+$ میل کند به $+\infty$ ، $t\to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{t}{e^t} \underset{Hop}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{1}{e^t} = 0$

حالات مبهم $0\cdot\infty$ ، $\infty-\infty$ را می‌توان به شکل $\frac{0}{0}$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ تبدیل کرد و سپس از قاعده هوپیتال استفاده کرد.

به عنوان نمونه

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$

$\underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \overset{\text{ساده کردن}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi^2 - 4x^2)\tan x \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2 - 4x^2}{\cot x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-8x}{-(1+\cot^2 x)} = 4\pi$

حالات مبهم اگر 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0 باشد به شکل زیر عمل می‌کنیم

الف) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = ?$

قرار میدهیم $y = x^x$

$\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \ln \lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = ?$

قرار میدهیم $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

$\ln \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{a}{1+\frac{a}{x}} = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} y = e^a$

بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$

۵) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4} \overset{1^\infty}{=} ?$

قرار میدهیم $y=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4}$

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4}=\lim_{x\to+\infty}(x+4)\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

ساده میکنیم

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-2)}{\frac{1}{x+4}}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x+4)^2}}$$

ساده میکنیم

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-3}{(x+1)(x-2)}}{\frac{-1}{(x+4)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3(x+4)^2}{-(x+1)(x-2)}=+3$$

$$\Rightarrow \lim y=e^{+3}$$

فرمول تیلور و مک‌لورن

قضیه تیلور: فرض کنیم $f(x)$ در اطراف نقطه a دارای مشتق از هر مرتبه‌ای باشد، آنگاه برای هر x در همسایگی a

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

سمت راست تساوی بالا را سری تیلور یا بسط تیلور تابع f حول نقطه a می‌گوییم.

مثال: بسط تیلور تابع $f(x)=\ln x$ را حول نقطه $x=1$ بنویسید

$f(x)=\ln x \qquad f(1)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(1)=1$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}\ ,\quad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}\ ,\quad f'''(1)=2$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}\quad f^{(4)}(1)=-6$$

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+\cdots$$

در نتیجه:

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3-\frac{6}{4!}(x-1)^4+\cdots$$

مثال: سری تیلور $f(x)=\sin x$ را حول $\frac{\pi}{4}$ بیابید.

$$f(x)=\sin x\qquad f(\pi/4)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\cos x\qquad f'(\pi/4)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x\qquad f''(\pi/4)=-\frac{1}{2}$$

$$f'''(x)=-\cos x\qquad f'''(\pi/4)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x\qquad f^{(4)}(\pi/4)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=f(\pi/4)+\frac{f'(\pi/4)}{1!}(x-\pi/4)+\frac{f''(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2+\frac{f'''(\pi/4)}{3!}(x-\pi/4)^3+\frac{f^{(4)}(\pi/4)}{4!}(x-\pi/4)^4+\cdots$$

پس

$$\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1!}(x-\pi/4)+\frac{-\frac{1}{2}}{2!}(x-\pi/4)^2+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3!}(x-\pi/4)^3+\frac{\frac{1}{2}}{4!}(x-\pi/4)^4+\cdots$$

$$\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/4)-\frac{1}{2\times 2!}(x-\pi/4)^2-\frac{\sqrt{3}}{2\times 3!}(x-\pi/4)^3+\cdots$$

تعریف: سری تیلور تابع $f(x)$ در حول نقطه $x=0$ را سری مک لورن تابع $f(x)$ می‌گوییم

یعنی

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

مثال: سری مک لورن تابع $f(x)=\sin x$ ، $f(x)=e^x$ ، $f(x)=e^{x^2}$ را بنویسید

$f(x)=\sin x \quad , \quad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x \quad , \quad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \quad , \quad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \quad , \quad f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x \quad , \quad f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}(x)=\cos x \quad , \quad f^{(5)}(0)=1$

$\vdots$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\cdots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$f(x)=e^x \quad f(0)=1$

$f'(x)=e^x \quad f'(0)=1$

$f''(x)=e^x \quad f''(0)=1$

$f'''(x)=e^x \quad f'''(0)=1$

$f^{(4)}(x)=e^x \quad f^{(4)}(0)=1$

$\vdots$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

و لذا با جایگذاری x^2 به جای x داریم

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\cdots$$

مثال: سری مک لورن تابع $f(x)=\cos x$ و به کمک آن توابع $x^2\cos x$ و $\cos x^3$ را بنویسید.

$$f(x)=\cos x \quad ; \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=-\sin x \quad ; \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\cos x \quad ; \quad f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=\sin x \quad ; \quad f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(x)=\cos x \quad ; \quad f^{(4)}(0)=1$$
$$f^{(5)}(x)=-\sin x \quad ; \quad f^{(5)}(0)=0$$
$$f^{(6)}(x)=-\cos x \quad ; \quad f^{(6)}(0)=-1$$
$$\vdots$$

$$f(x)=\cos x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}x^4+\cdots$$
$$=1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{0}{5!}x^5+\frac{-1}{6!}x^6+\cdots$$
$$\Rightarrow \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$
$$\Rightarrow \cos x^3=1-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{12}}{4!}-\frac{x^{18}}{6!}+\cdots$$
و
$$x^2\cos x=x^2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)=x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}-\frac{x^8}{6!}+\cdots$$

مثال: بسط مک لورن تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ را بیابید

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(0)=1$$
$$f'(x)=\left((1-x)^{-1}\right)'=-(-1)(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=\left((1-x)^{-2}\right)'=-2(-1)(1-x)^{-3}=\frac{2}{(1-x)^3}\Rightarrow f''(0)=2$$
$$f'''(x)=\left(2(1-x)^{-3}\right)'=-6(-1)(1-x)^{-4}=\frac{6}{(1-x)^4}\Rightarrow f'''(0)=6$$
$$f^{(4)}(x)=\left(6(1-x)^{-4}\right)'=-24(-1)(1-x)^{-5}=\frac{24}{(1-x)^5}\Rightarrow f^{(4)}(0)=24$$
$$\vdots$$
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

و بنابراین

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \cdots = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

تمرین: بسط مک لورن $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ را بنویسید

راه حل:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x^2}{x} = \frac{\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\right)}{x} = x - \frac{x^5}{3!} - \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \cdots$$

۲۵ - ۱

حل تمرینات صفحه ۱۰ : مشتق توابع زیر را بیابید

1) $y = x^2 \ln x + e^{3x - x^2} + 5\sqrt{x^2+x}$

$y' = 2x \ln x + x^2\left(\frac{1}{x}\right) + (3-2x)e^{3x-x^2} + 5\,\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(e^u)' = u' e^u$

2) $y = \ln(x^3 + 2x^{-2} - x^4) \rightarrow y' = \frac{3x^2 - 4x^{-3} - 4x^3}{x^3 + 2x^{-2} - x^4}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

3) $y = 2x^{-3}\ln(x^2+1) \rightarrow y' = -6x^{-4}\ln(x^2+1) + 2x^{-3}\,\frac{2x}{x^2+1}$

4) $y = x^4 \ln\sqrt[4]{x^3 - x^2 + x - 1} = x^4 \ln(x^3 - x^2 + x - 1)^{\frac{1}{4}} = x^4 \times \frac{1}{4}\ln(x^3 - x^2 + x - 1)$

$\rightarrow y' = 4x^3 \times \frac{1}{4}\ln(x^3 - x^2 + x - 1) + x^4 \times \frac{1}{4}\,\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

5) $y = -2x^2\sqrt{5x^3 - x} \rightarrow y' = -4x\sqrt{5x^3 - x} + (-2x^2)\,\frac{15x^2 - 1}{2\sqrt{5x^3 - x}}$

6) $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} \rightarrow y = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-4}$

$\rightarrow y' = \frac{1}{2}(-2)x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} + \frac{1}{4}(-4)x^{-5} = -x^{-3} - x^{-4} - x^{-5}$

$(u^r)' = r u' u^{r-1}$

7) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x + x^2}} + \sqrt{3x - 1} + \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} = (1 - x + x^2)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{3x-1} + \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

$\rightarrow y' = -\frac{1}{2}(-1 + 2x)(1 - x + x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} + \frac{\frac{1(x+3) - 1(x-2)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}}$

8) $y = \ln(\ln x) \rightarrow y' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

9) $y = \ln(\cos x + 2) + \cos(\ln x - 2) \rightarrow y' = \frac{-\sin x}{\cos x + 2} - \frac{1}{x}\sin(\ln x - 2)$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

10) $y = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x - 1}}$

$y' = \frac{2x + \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{3x-1}}}$

15-2

11) $y=\cos(x-x^3)+\sin(x^2-x) \rightarrow y'=-(1-3x^2)\sin(x-x^3)+(2x-1)\cos(x^2-x)$

12) $y=\mathrm{Arcsin}\sqrt{x+x^2} \rightarrow y'=\dfrac{\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x+x^2})^2}}=\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}\sqrt{1-x-x^2}}$

$(\mathrm{Arcsin}\,u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

13) $y=\mathrm{Arccot}\sqrt{x}+\mathrm{Arccos}\dfrac{1}{x^2}$

$y'=\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}+\dfrac{-(-2x^{-3})}{\sqrt{1-(\frac{1}{x^2})^2}}$

$(\mathrm{Arccot}\,u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\mathrm{Arccos}\,u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14) $y=\ln\dfrac{(x^2+1)^4(x-1)^3\sqrt{x^2+3}}{(2x+1)^{10}(x^2+7x)^8}$

$y=\ln(x^2+1)^4(x-1)^3(x^2+3)^{\frac{1}{2}}-\ln(2x+1)^{10}(x^2+7x)^8$

$=4\ln(x^2+1)+3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+3)-10\ln(2x+1)-8\ln(x^2+7x)$

$\rightarrow y'=4\dfrac{2x}{x^2+1}+3\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+3}-10\dfrac{2}{2x+1}-8\dfrac{2x+7}{x^2+7x}$

15) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}(\cos x-2)^4(x^2+x)}{(3-x)^5\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$

از دو طرف لگاریتم طبیعی می‌گیریم

$\ln y=\ln\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}(\cos x-2)^4(x^2+x)}{(3-x)^5(x^2+2)^{2/3}}$

$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+1)+4\ln(\cos x-2)+\ln(x^2+x)-5\ln(3-x)-\frac{2}{3}\ln(x^2+2)$

مشتق

$\rightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}+4\dfrac{-\sin x}{\cos x-2}+\dfrac{2x+1}{x^2+x}-5\dfrac{-1}{3-x}-\dfrac{2}{3}\dfrac{2x}{x^2+2}$

$\rightarrow y'=y\left(\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{4\sin x}{\cos x-2}+\dfrac{2x+1}{x^2+x}+\dfrac{5}{3-x}-\dfrac{4x}{3(x^2+2)}\right)$