فصل اول: زبان‌هــا

۱-۱ الفبا و زبان[۱]

تئوری زبان‌ها چیست؟ برای پاسخ به این پرسش ما ابتدا باید بدانیم که زبان چیست؟ وبستر[۲] زبان را به این صورت تعریف می‌کند: زبان پیکره ای از کلمات و روش‌های ترکیب کلمات استفاده شده و فهم شده توسط یک جامعه[۳] می باشد. هرچند این تعریف بحد کافی برای ساختن یک تئوری ریاضی از زبان کافی نیست و ما باید یک زبان صوری[٤] انتزاعی[٥] را به عنوان بخشی از یک سیستم یا سامانه تعریف کنیم . این فرمول بندی ما را قادر به ایجاد جمله های دشوار[٦] درباره زبانهای صوری و توسعه پیکره ای از دانشی که میتواند برای این زبانها در مدلهای مناسب استفاده شود رهنمون می سازد . این ایده ها بسیار مهم هستند بنابراین لازم است تا مفاهیم کلیدی و اصطلاحاتی را که استفاده میکنیم تعریف کنیم.

فرضیهٔ زبانهای صوری با کوششهای نوام چامسکی[۸] در سال‌های ۱۹۵۰هنگامی‌که چامسکی سعی در به‌دست آوردن ویژگیهای مشخصی از ساختار زبانهای طبییعی داشت؛ تکامل یافت. هدف او تعریف نحو[۹] زبان با استفاده از قوانین دقیق ریاضی بود و بعدها مشخص شد که نحو زبانهای برنامه نویسی را میتوان با استفاده از مدلهای گرامری چامسکی توصیف کرد. بعدها ریاضی دانانی چون آکسل[۱۰] و پست [۱۱]و کلین[۱۲] سمبلهای باینری را با توجه به ویژگیهای ریاضی رشته ها و مجموعه ها بررسی کردند.

۱-۱-۲ الفبا

الفبا مجموعه ای است متناهی از عناصر ساده ای که تجزیه ناپذیرند که طول هر عنصر آن برابر واحد و یا یک است. پس الفبا بعنوان یک مجموعهٔ متناهی از سمبلها[۷] در نظر گرفته شده است . گرچه تعداد نامتناهی غیر قابل شمارش از سمبلها هم وجود دارد ما باید تنها یک زیر مجموعه متناهی قابل شمارش از همگی مجموعه های قابل نمایش را روی کنیم . این زیر مجموعه شامل ارقام ، حروف بزرگ و کوچک و سمبلها و علائم خاصی چون # ،@، . . . هستند .هر تعداد قابل شمارشی از جمله های اضافی که بتوان آنها را مناسب یافت غیر قابل اضافه کردن به این مجموعه است . مجموعه الفبا را معمولا با Σ نشان میدهند.

$$\Sigma = \{0,1,\ldots,9,a,\ldots,z,+,*,\%,\mathrm{Div}, \mathrm{Mod}, \mathrm{If}, \mathrm{Then}, \mathrm{Else},\ldots\}$$

[1] alphabet and language
[۲] Webster
[۳] Community
[۴] Formal Language یعنی زبانهای قراردادی یا رسمی و ظاهری مانند زبانهای طبیعی یا کامپیوتری که از قواعد نحوی خاصی پیروی میکنند .
[۵] Abstractly
[۶] Rigorous Statements
[۸] Noam Chomsky
[۹] Syntax
[۱۰] Axel
[۱۱] Emil Post
[۱۲] Stephen Kleene
[۷] Symbols

۱-۲ رشته [1]

دنباله متناهی از عناصر الفبا (متعلق به یک مجموعه الفبا) تشکیل یک رشته را میدهند. طول رشته برابر عناصر الفبای موجود دررشته است.

$\Sigma=\{0,1\}$ $\omega1=1010$, $Length(\omega1)=4$

λ رشته نول [2]یا تهی رشته ای است که دارای هیچ سمبلی نباشدو با λ نشان داده میشود و دارای طول صفر است.و هیچگاه نمیتواند جزو الفبا باشد .

عناصر الفبا را سمبلهای پایانی [3] مینامند . در زبانهای طبیعی ، کلمات الفبای زبان را تشکیل میدهند و در زبان کامپیوتر الفبای زبان معمولاً Token نامیده میشود . مثلاً در زبان پاسکال شامل کلمات کلیدی [3]، شناسه گرها[4] و سمبلهای خاص [5] مانند /,&,%,$,#,@,! و ... میباشد .

$\lambda\in\Sigma^*$

Σ : مجموعه کلیه رشته های قابل تولید از الفبای Σ که نامتناهی میباشد.

$\Sigma=\{1\}$ $\Sigma^*=\{1,11,111, \ldots,\underbrace{1\ldots1}_{n},\ldots\}$

Σ^* شامل λ هم میباشد و Σ^+ مجموعه $\Sigma^*-\{\lambda\}$

۱-۳ زبان

هر مجموعه از رشته ها روی الفبا یک زبان می باشد. اغلب زبانهای مورد بررسی شامل تعداد نامتناهی جمله هستند. سه پرسش بسیار مهم در اینجا قابل طرح است:

۱ – چگونه میتوانیم یک زبان را نمایش دهیم؟ اگر زبان تنها شامل تعداد متناهی جمله باشد پاسخ ساده است: لیستهای ساده ای از مجموعه های متناهی از رشته ها. به‌عبارت دیگر اگر زبان نامحدود باشد ما با مساله چگونگی پیدا کردن نمایش متناهی برای زبان مواجه هستیم. این نمایش محدود بخودی خود معمولاً یک رشته از سمبلها روی الفبا باشد و همراه با برخی تفسیرهای قابل فهم که مرتبط با یک نمایش خاص از زبان مفروض میباشد.

۲ – آیا یک نمایش متناهی برای هر زبان وجود دارد؟ از یک جنبه شاید پاسخ منفی باشد. ما باید ببینیم که مجموعه همگی جمله ها روی یک الفبا نامتناهی و قابل شمارش باشد. یک زبان زیر مجموعه همگی جمله ها و رشته ها میباشد و این جنبه معین و مشخص در تئوری مجموعه هاست که مجوعه همگی زیرمجموعه های یک مجموعه نامتناهی شمارش پذیر ، شمارش پذیر نامتناهی نیست . هرچند ما تعریف نکردیم که چه چیز جانشین یک نمایش محدود و متناهی است. ما میدانیم که هر تعریف با معنی از نمایش متناهی تنها در یک تعداد شمارش پذیر از نمایشهای متناهی نتیجه خواهد داد چون باید قادر به نوشتن چنین نمایشهایی به رشته ای از سمبلها باشیم. بنابراین، تعداد زیادی زبان با نمایش‌های متناهی وجود دارند.

۳ – درباره ساختار کلاس‌های زبان که نمایش‌های متناهی دارند چه میتوان گفت؟

---

[1] String
[2] Null string
[3] Terminal symbol
[3] Keyword
[4] Identifier
[5] Special symbol

۱-۳-۱ روش تولید رشته های متعلق به Σ

عملگرها
- اتحاد دومجموعه از رشته ها
- اتحاد دو مجموعه از رشته ها
- ستاره (*)
- بعلاوه (+)

❑ مثال ۱-۱ : $\Sigma=\{a,b\}$

$X=\{aa,ba\}$ $\quad Y=\{bba,a\}$

$X\cup Y = Y\cup X=\{aa,ba,bba,a\}$ اتحاد

$XY=\{aabba,aaa,babba,baa\}$ اتصال

$YX=\{bbaaa,bbaba,aaa,aba\}$

بنابر این اگر X,y دو مجموعه از رشته ها از مجموعه الفبای Σ باشند:

I: $X\cup Y=\{\omega | \omega\in X \text{ or } \omega\in Y\}$

II: $XY=\{\omega|\omega=\alpha1\alpha2 \quad ; \alpha1\in X, \alpha2\in Y\}$

- باید توجه داشته باشیم که X,Y هر دو از یک Σ ساخته شده اند.

❑ مثال ۱-۲ : $\Sigma=\{a,b\}\quad X=\{\lambda\}\quad Y=\{aa,bb,\lambda\}$

$XY=\{\lambda\}\{aa,bb,\lambda\}=\{\lambda aa,\lambda bb,\lambda\lambda\}=\{aa,bb,\lambda\}$

یعنی λ عضو خنثی عمل اتصال است.

$\lambda X=X\lambda=X$

$X0=\lambda$

$X_1=\{a,b\}$ طول =۱

$X_2=X_1X_1=\{a,b\}\{a,b\}=\{aa,ab,ba,bb\}$ طول =۲

$X_3=X_2X_1$ طول=۳

.

.

$X_n=X_{n-1}X_1$ طول = n

$\cup \Rightarrow \Sigma^*$

۱-۳-۲ اتصال دورشته

اگر $u,v\in\Sigma^*$ در اینصورت uv به صورت زیر تعریف میشود:

۱ – اگر $length(u)=0$ یعنی $u=\lambda$ در اینصورت $uv=\lambda v=v\lambda=v$

۲ – اگر $length(u)=0$ یعنی $u=\lambda$ در اینصورت $a\in\Sigma^*$عنصر الفبا و رشته $\omega\in\Sigma^*$ وجود دارند به‌قسمی‌که:

$length(\omega)=length(u)-1 \qquad u=a\omega$

$\Rightarrow uv=(a\omega)v=a(\omega v)$

این روش اتصال دورشته را روش بازگشتی اتصال دورشته گویند.

- مثال ۱–۳ : $\Sigma=\{a,b,c\}$ $u=ac$, $v=ba$

$uv=(ac)(ba)=a(\,(\,c)\ ba))=a((c\lambda)(ba))=a(c((\lambda)ba)))=a(c(ba))$
$=a(cba)=acba$

$$\Sigma^*=\bigcup_{i\geq 0} X_i \quad ; \quad X_i=X_1.X_1.\,.\,.\,X_1$$

$X_0=\{\lambda\}$
$X_1=\Sigma$
$X_2=\Sigma\Sigma=\Sigma^2$
$X_3=X2X1=\Sigma^3$
.
.
$X_n=\Sigma^n$

$$\Sigma^* =(\bigcup_{k\geq 1}\Sigma^k) \cup\{\lambda\}$$

یعنی Σ^* اتحاد اتصال‌های مکرر Σ با خودش و رشته λ است. و هم چنین Σ^+ اتحاد اتصال‌های مکرر Σ با خودش است.

- مثال ۱–٤ :

$\Sigma=\{a,b\}$ $x=\{\},y=\{a\}$ $\varnothing\cup u=u$, $\varnothing u=u\varnothing=u$
$x\cup y=\{a\}$ $xy=\{\}$
$\Sigma=\{a,b\}$ $x=\{\lambda\},y=\{a\}$
$x\cup y=\{\lambda,a\}$ $xy=\{a\}$

عملگرها
۱ –اتحاد
۲ – اتصال ← مجموعه ها ، رشته ها
۳ – *
٤ – +

- مثال ۱–۵ : با فرض $\Sigma=\{0,1,a\}$ مطلوبست
  - مجموعه ای از رشته ها به‌طول ۳

$$X=(\Sigma\Sigma)\Sigma=\Sigma^2\,\Sigma=\Sigma^3=\{0,1,a\}\{0,1,a\}\{0,1,a\}$$

  - مجموعه ای از رشته ها به‌طول ۲ یا ۳

$$Y=\Sigma^3\bigcup\Sigma^2=(\{0,1,a\}\{0,1,a\}\{0,1,a\})\bigcup(\{0,1,a\}\{0,1,a\})$$

  - مجموعه ای از رشته ها که طول آنها مخالف ۲ و ۳ است .

$$Z=\{0,1,a\}^*-Y$$

- مجموعه ای از رشته ها بطول زوج

$$T = (\{0,1,a\}\{0,1,a\})^*$$

- مجموعه ای از رشته ها بطول فرد

$$E = \{0,1,a\}^* - (\{0,1,a\}\{0,1,a\})^* = (\sum^2)^* \sum$$

- مجموعه ای از رشته ها که حتماً شامل زیر رشتهٔ a1 باشند

$$Y = \{a\}\{1\} \quad , X = \{0,1,a\}^*, Z = \{0,1,a\}^*$$
$$w = X.Y.Z$$

- مجموعه ای از رشته ها که زیر رشتهٔ a1 در آنها ظاهر نشود

$$Q = \sum^* - W$$

- مجموعه ای از رشته ها که زیررشتهٔ a1 فقط و فقط دو بار ظاهر شود

$$Q\{a\}\{1\}\}Q\{a\}\{1\}Q\{a\}\{1\}$$

- مجموعه ای از رشته ها که با {a}{1} شروع یا به {a}{1} ختم شوند

$$(\{1\}\{a\}\{0,1,a\}^*) \bigcup (\{0,1,a\}\{a\}\{1\})$$

- مثال ۱–٦ : اگر $\Sigma=\{a\}$ مطلوبست تولید مجموعه رشته های به‌طول زوج

$y=\Sigma\Sigma=\{aa\}$

$\rightarrow x=\{\bigcup\limits_{n\geq1} y^n) \cup\{\lambda\}\rightarrow x=y^*$

- مثال ۱–۷ : اگر $\Sigma=\{a,b,c\}$ مطلوبست مجموعه رشته های زیر

1. $x= \{\omega|\omega\lambda\in\Sigma^*, \text{length}(\omega)=3\}$
2. $y=\{\omega|\omega\lambda\in\Sigma^*, \text{length}(\omega)=3k, k\geq0\}$

$1 \rightarrow x=\{a,b,c\}\{a,b,c\}\{a,b,c\}$
$2 \rightarrow y=x^*$

- مثال ۱–۸ : اگر $\Sigma=\{a,b,c\}$ مطلوبست تولید رشته های زیر :

الف) مجموعه کلیه رشته‌هایی که فقط از a,b تشکیل شده باشند.

$X=\{a,b\}$ $\qquad$ $y=x^+$

ب) مجموعه کلیه رشته هایی که با a شروع و به b ختم شده باشند.

$X=\{a\}\Sigma^*\{b\}$

ج)مجموعه تمامی رشته هایی که در آنها ab حداقل یکبار ظاهر شده باشند

$\Sigma^*\{a\}\{b\}\Sigma^*=\Sigma^*\{ab\}\Sigma^*$

- مثال ۱–۹ : روی الفبای {a,b,c} رشتهٔ $\{a,b\}^*\{c\}^+$ دنباله ای از عناصر الفبا میباشد که با تعدادی (صفر یا بیشتر) a و b شروع شده و در انتهای آنها دنباله ای از c (حداقل یک c) قرار دارد.

۱-٤ مجموعه های با قاعده[۱] یا منظم

تعریف: یک مجموعه را با قاعده گویند اگر آنرا بتوان از المانهای الفبا با استفاده ازاتصال[۲] و عمل * تولید کرد. مجموعه های باقاعده بخش مهمی از زبان را تشکیل می دهند هم در نظریه زبانهای صوری و هم نظریه ماشینهای متناهی[۳] کاربرد دارند. مجموعه با قاعده از ترکیب مجموعه تهی و مجموعه‌های تکین[۳] همراه با عملیات مجاز روی مجموعه ها به دست می آیند.

تعریف :اگر Σ مجموعه الفبا باشد مجموعه با قاعده روی Σ به شکل بازگشتی زیر می‌باشد:

۱ . به ازای هر عنصر $\{a\},\{\lambda\},\varnothing,\ a\in\Sigma$ مجموعه های باقاعده هستند.← مجموعه های ابتدایی

۲ . اگر x,y مجموعه های باقاعده باشند در اینصورت $x^*,x^+,xy,x\cup y$ هم با قاعده هستند.← مجموعه های بازگشتی

۳ . x یک مجموعه باقاعده میباشد، اگر بتوان آنرا تنها با استفاده از المانهای ابتدایی یا مجموعه های ابتدایی با تعداد محدودی از اعمال مکرر عملگرهای اتصال ، اتحاد، *،+ تولید کرد.

- مثال ۱–۹ : مجموعه ای از رشته ها که با دنباله هایی از a شروع و بلافاصله با دنباله ای از b ختم می شوند با قاعده هستند؟

$\Sigma=\{a,b\}$
$\omega=a\ldots ab\ldots b$
$x=\{a\}^*\{b\}^*$

- مثال ۱–۱۰: اگر در سوال قبل تعداد aها و b ها برابر باشند مجموعه ها با قاعده هستند؟

$\omega=a\ldots ab\ldots b=\{a\}^n\{b\}^n$

خیر زیرا با هیچیک از عملگرهای اتحاد ، اتصال ، *،+ نمیتوان ساخت.پس نتیجه میگیریم که همهٔ زیرمجموعه های Σ^* را نمیتوان با استفاده از عملگرهای اتحاد و اتصال و* و + تولید کرد .

- مثال ۱–۱۱ : $\Sigma=\{a,b,c\}$ مجموعه با قاعده ω را تولید کنید به‌قسمی‌که ω شامل رشته هایی از Σ باشد که c تنها و تنها یکبار در آنها ظاهر شده باشد.

$\{a\},\{b\},\{c\},\{\lambda\}$ مجموعه های ابتدایی   یعنی $\omega=\ldots c\ldots$

$\omega=\{a,b\}^*\{c\}\{a,b\}^*$

- مثال ۱–۱۲ : با فرض $\Sigma=\{a,b,c\}$ مجموعه با قاعده ω' را تولید کنید به‌قسمی‌که در آن رشته ها تعداد c زوج باشد.

$\omega'=(\omega\omega)^*\{a,b\}^*$

اتصال با رشته هایی که تعداد c آنها صفر است.

---

[۱] Regular set
[۲] Concatenation
[۳] Finite state machine
[۳] singletone

- مثال ۱–۱۳ : با فرض $\Sigma=\{a,b,c\}$ مجموعه با قاعده ω'' بقسمیکه در آن رشته ها تعداد c فرد باشد.

$\omega''=(\omega\omega)^*\omega$

- مثال ۱–۱٤ : مجموعه های باقاعده ای که در رشته های آن زیر رشته های aa,bb حداقل یکبار ظاهر شوند.مانند aaababbb . (a,b به شکل کلی قابل قبول نیستند)

$x=((aabb)^+ \cup (abab)^+ \cup (abba)^+ \cup (baab)^+ \cup (baba)^+)^+$

۱–۵ عملگر تفاضل

برای تولید مجموعه های با قاعده معمولا از این عملگر استفاده می کنیم . مثلاً

$\Sigma=\{a,b,c\}$

x={ω|تعداد c هازوج باشد}

y=Σ*-x ، y={ω|تعداد c هافرد باشد}

عبارات باقاعده[۱] ← مفهوم جدیدی از مجموعه با قاعده است

تعریف :اگر Σ الفبا باشد عبارت با قاعده روی Σ به شکل بازگشتی زیر قابل تعریف است:

۱ – برای هر عنصر الفبا $\varnothing,\lambda,a,a\in\Sigma$ عبارت های باقاعده هستند← عبارت با قاعده ابتدایی

۲ – اگر E2,E1 دو عبارت با قاعده باشند در اینصورت عبارتهای E1.E2,E1UE2, E1*,E2+ نیز با قاعده هستند.

۳ – Eعبارت با قاعده است اگر بتوان آنرا فقط از عبارات ابتدایی با قاعده و توسط اعمال مکرر عملگرهای اتصال، اتحاد ، +، * بدست آورد.

- مثال ۱–۱۵ : $\Sigma = \{a,b,c\}$

a, b,c,λ و {a},{b},{c},{λ} مجموعه های با قاعده هستند .

- مثال ۱–۱٦ : عبارت با قاعده‌ای که عناصر آن فقط از a درست شده باشد.

$$X' = a^+$$

- مثال ۱–۱۷ : مجموعه های با قاعده ای که رشته های آن تنها از a درست شده باشند

$$X = \{a\}^+$$

- مثال ۱–۱۸ : عبارت با قاعده ای که عناصر آن بطول ۳ هستند

y′ مجموعه با قاعده ای که رشته های آن بطول ۳ هستند.

abc,aba,. . .

y={{a}{b}{c}{b}{a}{c},. . .} یا y={a,b,c}{a,b,c}{a,b,c}

$y'=(a\cup b\cup c)(a\cup b\cup C)(a\cup b\cup c)$

$E = (a\cup b) \Rightarrow E= a,b$

$E1= (a\cup b)$, $E2=c$

$E=E1E2=(a\cup b)c \Rightarrow E=ac,bc$

$E=(a\cup b)(a\cup b)c$

$\Rightarrow E=aac,abc,bac,bbc$

- مثال ۱–۱۹ : $\Sigma=\{a,b,c\}$

---

[۱] Regular Expression

E را طوری بسازید که aa تنها وتنها یکبار ظاهر شود و a در جای دیگر ظاهر نشود.

$E=(b\cup c)^*aa(b\cup c)^*$

- مثال ۱–۲۰ : عبارت با قاعده ای بنویسید که یا با aa شروع شود یا به bb ختم گردد.

$\in 1=aa...$ E1=aa(aUbUc)* E2 در E1 مستتر است

$\in 2=...bb$ $\Rightarrow$ E=E1UE2

$\in 3=aa...bb$ E2=(aUbUc)bb

E3 در E2 مستتر است

- اگر در مثال فوق یای انحصاری یا Xor باشد.

$E3 = aa(a\cup b\cup c)^*bb$

$E' =(E1UE2)-E3$

- مثال ۱–۲۱ : عبارت با قاعده ای بنویسید که فاقد Ca باشد (فقط با استفاده از اتحاد ،اتصال ،×،+)

$(a\cup C^*b^*)^*C^*$

- مثال ۱–۲۲ : عبارت با قاعده ای که در آن aحتما پیش از b و b حتما پیش از c ظاهر شود

$((a)^*(b)^*(c)^*) \cup ((c)^*(a)^*)$

اگر a,b با هم آمدند aحتما قبل از b و b حتما قبل از c باشد

- مثال ۱–۲۳ : مجموعهٔ باقاعده ای بنویسید که رشته های ان شامل حروف a,b,c باشد به‌طوری‌که a قبل از c و b هم قبل از a رخ دهد $\{c,b\}^*\cup\{b\}^*\{a\}^*\{c\}^*$

- مثال ۱–۲٤ : $\Sigma=\{a,b\}$ و مجموعه $\{ba\omega ab \mid \omega\in \{a,b\}^*\}$ روی Σ با قاعده است.

مجموعه	عبارت
{a}	A
{b}	B
{a}{b}	Ab
$\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}$	$a,b=a\cup b$
{b}{a}={ba}	Ba
{a,b}*	$(a\cup b)^*$
{ba}{a,b}*	$ba(a\cup b)^*$
{ba}{a,b}*{ab}	$(ba)(a\cup b)^*(ab)$

- مثال ۱–۲۵ :عبارتی را نشان دهید که دقیقا دو تا b در آن ظاهر شده باشد
$a^*(ba^*ba^*)$

عبارت‌های با قاعده ای که از یک مجموعه به دست می آیند، یکتا نیستند و دو عبارت که یک مجموعه را نشان میدهند همانند هستند. جدول زیر همانندی عبارت ها را نشان می دهد.

جدول همانندی‌های عبارت‌های باقاعده[1]

1- ∅u=u∅=∅	13-(λ*∅*)*=λ
2- λu=uλ=u	14-λ-{∅*}=λ-{λ}={λ}
3- ∅*=∅	15- u*=(u*)*
4- λ*=λ	16- u(v∪ω)=uv∪uω
5- u∪v=v∪u 6- u∪∅=∅∪u=u 7- u∪u=u 8-u*∪∅*=u*	17- (u∪v)ω=uω∪vω
9-(λ∪u)*=u*	18-(uv)*u=u(vU)*
10-(∅∪u)*=u*	19- (u∪v)*=(u*∪v)*=(u*∪v*)* =u*(u∪v)*=(u∪vu*)* =(u*v*)*=u*(vu*)* =(u*vu*)*
11-u*.u=u.u*=u+	20- u.(v+ω)=uv+uω
12- u.u*+λ=u*	21- (u+v)*=(u*+v*)*=(u*.v*)*=u*.(vu*)*

مسائل فصل اول

۱-۱ نشان دهید (u∪v)*=(u*∪v*)

۱-۲ نشان دهید (u∪v)*=(u*.v*)*

۱-۳ نشان دهید (uv)*=u*.v* همشه برقرار نیست .

۱-٤ نشان دهید u*.v=v∪u*.uv

۱-٥ نشان دهید $\phi^* = \lambda$

۱-٦ نشان دهید A.(B ∪ C)=A.B ∪ A.C

۱-۷ نشان دهید u(vu)*=(uv)*.u

۱-۸ با فرض $\Sigma = \{a,b\}, L1 = \{a, ab, abb\}, L2 = \{\lambda, b, a, bb\}$ آن گاه L1.L2 را بنویسید.

۱-۹ ثابت کنید عبارت r=a*(a+b) منظم است.

۱-۱۰ ثابت کنید $r = (0+1)^*(0+\lambda)$ منظم است .

۱-۱۱ فرض کنید L1={10,1} و L2={011,11} در اینصورت :

۱-۱۲ با فرض آنکه $\Sigma = \{0,1\}$ مطلوبست:

- عبارت منظمی بنویسید که از صفرها و یک ها تشکیل شده باشد .
- عبارت منظمی بنویسید که از صفرها و یک ها تشکیل شده و دارای حداقل دو صفر متوالی است .

[1] Regular Expression Identities

- عبارت منظمی بنویسید که از صفرها و یک ها تشکیل شده و دارای حداقل دو صفر است .

- عبارت منظمی بنویسید که شامل رشته ای از صفرها و یک ها هستند و با یک شروع میشوند و شامل دو صفر متوالی نیستند .

- عبارت منظمی بنویسید که شامل رشته ای از صفرها و یک ها هستند و شامل دو صفر متوالی نستند .

- عبارت منظمی بنویسید که از صفرها و یک ها تشکیل شده و به 011 ختم میشوند .

- عبارت منظمی بنویسید که نشاندهندهٔ مجموعه رشته هائی باشد که با صفر شروع میشوند و با یک خاتمه می یابند .

- عبارت منظمی بنویسید که نشاندهندهٔ مجموعه رشته های دودوئی غیر تهیی باشد که با بیت یکسانی شروع و خاتمه می یابند .

- مجموعه تمامی رشته هائی که یک ندارند .
- مجموعه تمامی رشته هائی که دقیقاً یک 1 دارند.

- مجموعه تمامی رشته هائی که دقیقاً دو 1 دارند.

- مجموعه تمامی رشته هائی که حداقل دو 1 دارند.

- عبارتهای منظمی شامل مجموعه رشته هائی که صفرهای متوالی ندارند .

۱-۱۳ با فرض آنکه $u,v \in \sum^*$ ثابت کنید :

$$(uv)^R = v^R u^R$$

منظور از نماد R وارون رشته است .

۱-۱٤ عبارت منظمی روی $\Sigma = \{0,1\}$ بنویسید که شامل زیر رشتهٔ 101 باشد .

۱-۱۵ ثابت کنید $(b^*(a \cup \lambda)b^*)^* = (a \cup b)^*$

۱-۱٦ با فرض آنکه $\Sigma = \{0,1,2\}$ باشد عبارت با قاعده ای بنویسید که شامل یک 0 و هر تعداد 1 و 2 باشد.

۱–۱۷ عبارت باقاعدهٔ L را بنویسید که همهٔ رشته های aو b را شامل شود و تعداد فردی کاراکتر b داشته باشد .

۱–۱۸ عبارت های منظم زیر را در نظر بگیرید:

R1=b*a(a+b)*
R2=(a+b)*a(a+b)*
R3=(a*b*)*ab*
R4=(a+b)*ab*

این عبارات نشاندهندهٔ چه رشته هائی هستند و کدامیک با هم همانند هستند ؟

۱–۱۹ با فرض آنکه α و β نشاندهندهٔ عبارات منظم باشند ؛ کدام یک از برابری های زیر ممکن است همیشه برقرار نباشد؟

1) $(\alpha+\beta)^* = \alpha^*(\beta\alpha)^*$
2) $(\alpha+\beta)^* = (\alpha^*\beta^*)^*$
3) $(\alpha+\beta)^* = \alpha^*(\beta\alpha^*)^*$
4) $(\alpha+\beta)^* = (\alpha^*+\beta^*)^*$

۱–۲۰ نشان دهید $(ba)^+.(a^*b^*\cup a^*) = (ba)^*.ba^+(b^*\cup\lambda)$

۱–۲۱ با فرض آنکه ω رشته ای دلخواه باشد ثابت کنید: $\forall i \geq 0 \quad (\omega^R)^i = (\omega^i)^R$