

خدمات دانشجویی بارسین

Barsian

درس : فیزیک حرارت و مکانیک (۱)

استاد: فرگس خدایار

کد جزوه: ۵۷

تحقیق	کافی نت
پایان نامه	جزوات اساتید
ویرایش پایان نامه با فرمت دانشگاه	کپی دانشجویی
انجام پروژه های دانشجویی	چاپ مقاله در مجلات داخلی و خارجی
فرم های پایان نامه	ترجمه
تایپ	سیمپی
پرینت رنگی و سیاه و سفید	صحافی (گالینگور)
پرینت اتو کد و ایلستریاتور	اسکن
چاپ عکس ۴×۳	لوازم التحریر

آماده همکاری با اساتید محترم و دانشجویان گرامی، جهت تایپ و تکثیر جزوات دانشجویی

تایپ و آماده سازی جزوات برای اساتید رایگان می باشد

آدرس: روبروی دانشگاه، پشت دکه، جنب کافه آرش

تلفن: ۰۹۱۲-۹۴۶۸۸۴۸ ، ۰۲۱-۷۶۵۱۵۸۰۱

«حوالتی»

فصل پنجم: کار و انرژی

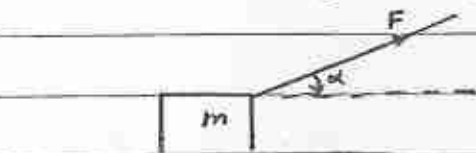
کار: بهرگاه نیروی بر جسمی وارد شود و باعث جابجایی جسم شود در این صورت این نیرو کار انجام داده است. کار انجام شده از ضرب برداری نیرو و جابجایی بدست می آید. کار کمیتی اسکالری است یعنی جواب بدست آمده یک عدد است مثبت یا منفی یا صفر.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \alpha$$

\downarrow کار یا انرژی \downarrow نیرو \downarrow جابجایی

(α : زاویه بین نیرو و راستای حرکت)

(واحد کار یا انرژی در سیستم اندازه گیری SI، ژول (J) نامیده می شود. واحد نیرو نیوتن (N) و واحد جابجایی متر (m) می باشد.)



اگر $\alpha = 0^\circ$ $\leftarrow \cos 0^\circ = 1 \leftarrow W = Fd$

اگر $\alpha = 90^\circ$ $\leftarrow \cos 90^\circ = 0 \leftarrow W = 0$

اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ \leftarrow ربع اول دایره مثلثاتی $\leftarrow \cos \alpha > 0 \leftarrow W > 0$ یعنی در اثر کار انجام شده بر روی جسم، انرژی جسم زیاد شده و به صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می شود. این کار کاری مفید است.

اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ \leftarrow ربع دوم دایره مثلثاتی $\leftarrow \cos \alpha < 0 \leftarrow W < 0$ یعنی کار انجام شده بر روی جسم باعث هدر رفتن انرژی به صورت گرما می شود و انرژی جسم کاهش یافته. این کار کار مفیدی نیست.

■ برای حل مسائل مربوط به این فصل ابتدا به سراغ نیروهای وارد بر جسم می رویم:

۱) نیروی وزن یا نیروی گرانشی (mg): این نیرو از لحاظ زمین بر اجسام وارد می شود و جهت این نیرو به طرف مرکز زمین می باشد. ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$ و شتاب گرانشی زمین)

۱۲) نیروی عکس العمل سطح (N): این نیرو از طرف سطح بر جسم وارد می شود جهت این نیرو از طرف سطح عمود بر سطح و به طرف جسم می باشد.

۱۳) نیروی اصطکاک ($f = \mu N$): این نیرو از طرف سطح بر جسم وارد می شود جهت این نیرو خلاف جهت حرکت جسم می باشد.

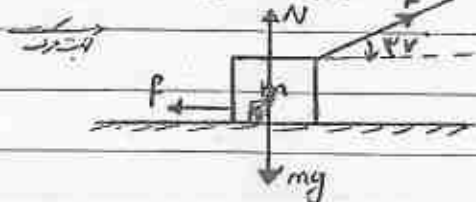
۱۴) نیروی کش طناب (T): این نیرو از طرف طناب بر جسم وارد می شود جهت آن به طرف طناب می باشد.

نکته: راه حل مسائل مربوط به این فصل استبداد جهت حرکت را مشخص کرده و نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و کار تک تک نیروها را محاسبه کرده و در پایان کار کل از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_f + W_T + \dots$$

مثال: جسمی به جرم 5 kg نیروی 50 N را بر کرده و آن را 1.0 m جابجا می کند. اگر مقدار نیروی اصطکاک 30 N باشد، کار تک تک نیروها و کار کل را محاسبه کنید. ($\sin 37^\circ = 0.6$ و $\cos 37^\circ = 0.8$)

$$W = Fd \cos \alpha$$



$$W_{mg} = mg(1.0) \cos 90^\circ = 0$$

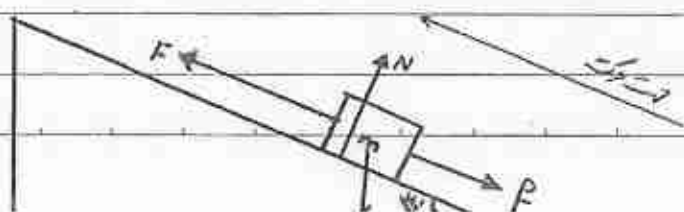
$$W_N = N(1.0) \cos 90^\circ = 0$$

$$W_f = f(1.0) \cos 180^\circ = -30 \text{ J}$$

$$W_F = 50(1.0) \cos 37^\circ = 40 \text{ J}$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_f + W_F = 10 \text{ J}$$

مثال: جسمی به جرم 5 kg روی سطح شیب داری نیروی 40 N را وارد کرده و جسم را روی سطح به اندازه 1.0 m جابجا می کند. اگر مقدار نیروی اصطکاک 10 N باشد، کار تک تک نیروها و کار کل را محاسبه کنید.



$$W = Fd \cos \alpha$$

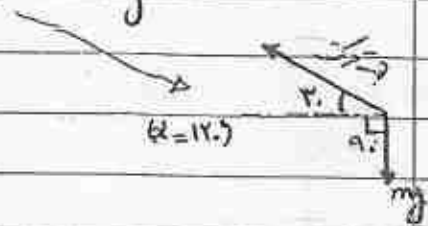
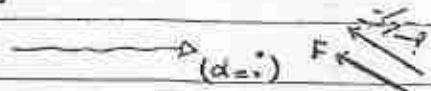
کاربردی عمود بر سطح $W_N = N(1.0) \cos 90^\circ = 0$

کاربردی افقی $W_F = F(1.0) \cos 180^\circ = 1.0(1.0)(-1) = -100 \text{ J}$

کاربردی عمود بر سطح $W_F = 9.0(1.0) \cos 90^\circ = 0$

کاربردی عمود بر سطح $W_{mg} = mg(1.0) \cos 120^\circ = 5.0(1.0)(-\frac{1}{2}) = -2.5 \text{ J}$

کاربردی کل $W = W_{mg} + W_N + W_F + W_F = 2.5 \text{ J}$



نکته: اگر جسمی با سرعت ثابت حرکت کند (حرکت یکنواخت) / $a = 0$ (ثابت) در این صورت:

کاربردی کل $W = Fd \cos \alpha$ $\xrightarrow{F=ma}$ $W = mad \cos \alpha$ $\xrightarrow{\text{حرکت یکنواخت}}$ $W = 0$ \checkmark

کاربردی کل $P = \frac{W}{t}$ $\xrightarrow{W=0}$ $P = 0$ \checkmark

بنابراین اگر جسمی با سرعت ثابت حرکت کند، کار کل و توان کل صفر است.

مثال: شخصی سوزن ۵۰ N را در یک سطح افقی با سرعت ثابت به اندازه ۱ m جابجا می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ۰.۷ باشد محاسبه کنید:

$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$

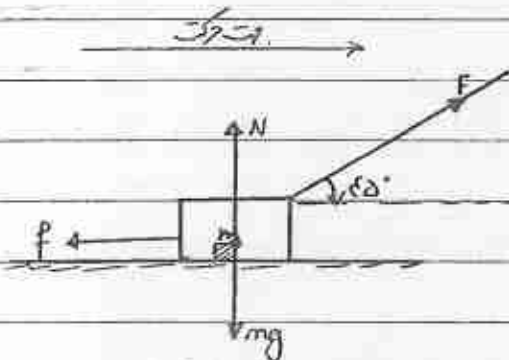
الف) کار کل و توان کل

ب) کاربرد نیروی وزن - کاربرد نیروی عمود بر سطح

ج) مقدار نیروی $F = ?$

د) کاربرد نیروی $F = ?$

ه) کاربرد نیروی اصطکاک $f = ?$



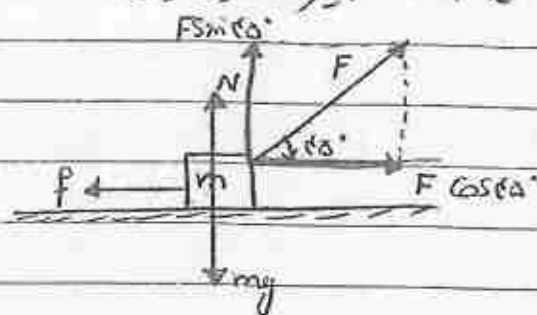
جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس $W = 0$ کار کل و $P = 0$ توان کل

ب) $W = Fd \cos \alpha$

کاربردی عمود بر سطح $W_{mg} = mg(1.0) \cos 90^\circ = 0$ \checkmark

کاربردی عمود بر سطح $W_N = N(1.0) \cos 90^\circ = 0$ \checkmark

ج) برای محاسبه نیرو از قوانین نیوتن استفاده می‌کنیم. اگر نیروی افقی یا عمودی نتواند به‌یاد آید ابتدا تجزیه می‌شود.



برای نیروهای عمودی: $N + F \sin \alpha - mg = 0 \rightarrow N + \gamma VF - \Delta a = 0$
 عمود حرکت $\rightarrow N = \Delta a - \gamma VF$

برای نیروهای افقی: $F \cos \alpha - f = ma$ حرکت یکدست $\rightarrow a = 0$
 $f = \mu N$

$\gamma VF - \mu N = 0 \rightarrow \gamma VF - \mu (\Delta a - \gamma VF) = 0$
 $\gamma VF - 1a + \gamma VF = 0 \rightarrow 1.8F = 1a \rightarrow F = 12N \checkmark$

کار $W = Fd \cos \alpha$

$W_F = 12(10) \cos 45^\circ = 12(10)(\frac{\gamma}{2}) = 84J \checkmark$

کل $W = W_{mg} + W_N + W_f + W_F$

$0 = W_f + 84 \rightarrow W_f = -84J \checkmark$

انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی جنبشی:

تألیت انجام کار توسط یک جسم متحرک را انرژی جنبشی می‌گویند. $K = \frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی

جسمی به جرم m را در نظر بگیرید. نیروی F بر آن وارد می‌شود و به آن شتاب a را می‌دهد. اگر سرعت اولیه جسم V_0 باشد و به سرعت نهایی V برسد در این صورت:

کار $W = Fd \cos \alpha$ $\frac{a=0}{\cos \alpha = 1} \rightarrow W = Fd$ $F = ma \rightarrow W = mad$ $a = \frac{V-V_0}{t}$
 $d = x = \frac{(V+V_0)t}{2}$

$W = m(\frac{V-V_0}{t}) (\frac{V+V_0}{2}t) = \frac{1}{2}m(V-V_0)(V+V_0) = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2$

$$W_{\text{کابل}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = k - k_0 = \Delta k$$

تغییرات انرژی جنبشی
انرژی جنبشی اولیه
انرژی جنبشی نهایی
k
k₀

بنابراین طبق قضیه کار-انرژی جنبشی: کار کل انجام شده بر روی یک جسم برابر است با تغییرات انرژی جنبشی.

مثال ۱: اتوبوسی با سرعت 72 km/h در حال حرکت است. ناگهان ترمز می‌کند و پس از طی مسافت 2.0 m می‌ایستد. ضریب اصطکاک $\mu = 0.1$ است. و جرم اتوبوس 1000 kg است. پاسخ دهید:

$$V = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000}{3600} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

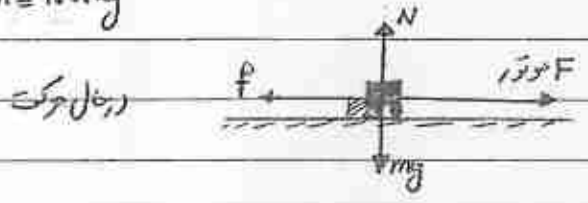
$$d = 2.0 \text{ m}$$

$$V = 0$$

$$\mu = 0.1$$

$$m = 1000 \text{ kg}$$

- الف) کار کل
ب) کار نیروی عمود بر سطح - کار نیروی وزن
ج) کار نیروی اصطکاک $W_f = ?$
د) کار نیروی کشش $W_F = ?$
ه) مقدار نیروی کشش $F = ?$



→ جهت حرکت



الف) اگر سرعت اولیه و سرعت نهایی را داشته باشیم برای محاسبه کار می‌توانیم از رابطه کار-انرژی جنبشی استفاده کنیم

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}(1000)(20)^2 = -200000 \text{ J} \quad \checkmark$$

(ب)

$$W_{\text{کابل}} = Fd \cos \alpha$$

$$W_{mg} = mg(2.0) \cos 90^\circ = 0 \quad \checkmark$$

$$W_N = N(2.0) \cos 90^\circ = 0 \quad \checkmark$$

$$W_f = fd \cos \alpha \xrightarrow{f = \mu N} W_f = \mu N(2.0) \cos 180^\circ \xrightarrow{N = mg = 10000} \quad (ج)$$

$$W_f = 0.1(10000)(2.0)(-1) = -20000 \text{ J} \quad \checkmark$$

(> وقتی که نیروی کشنده نیروی عمود بر نیروی ترمز تبدیل می شود و در حلقه حرکت قرار می گیرد.

$$W_{\text{کامل}} = W_{mg} + W_N + W_f + W_F$$

$$-200000 = -100000 + W_F \longrightarrow W_F = -100000 \text{ J} \checkmark$$

$$W = Fd \cos \alpha$$

$$\text{کار نیروی ترمز را داریم} \longrightarrow W_F = Fd \cos \alpha$$

$$-100000 = F(20) \cos 180^\circ$$

$$-100000 = -20F \longrightarrow F = 5000 \text{ N} \checkmark$$

نکته: اگر ارتفاعی باشد که جسم در آنستای تمام می کند در این صورت:

$$W_{mg} = +mgh \quad \text{کار نیروی وزن اگر جسم به طرف پایین برود}$$

$$W_{mg} = -mgh \quad \text{کار نیروی وزن اگر جسم به طرف بالا برود}$$

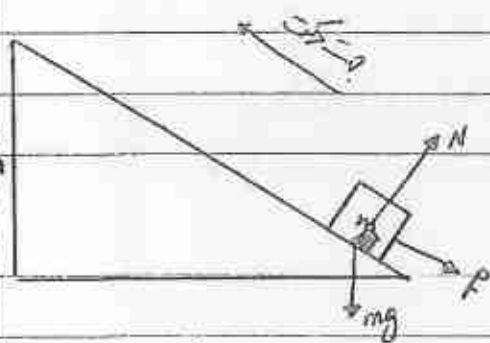
مثال: جسمی به جرم 5 kg از بالای سطح شیب داری به ارتفاع 2 m از حال سکون رها می شود و با سرعت 15 m/s به پایین می رسد.

الف) کار کل را می سنجید

ب) کار نیروی وزن - کار نیروی عکس العمل سطح را می سنجید

ج) کار نیروی اصطکاک

د) مقدار ضریب اصطکاک



ان (ا) با داشتن سرعت اول و سرعت ثانیه برای محاسبه کار می توانیم از رابطه کار - انرژی جنبشی استفاده کنیم

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(5)(15)^2 - 0 = 562.5 \text{ J} \checkmark$$

ب) برای محاسبه کار نیروی وزن باید از ارتفاع از بالای سطح شیب تا پایین استفاده کنیم

$$W = +mgh = (5) - (10)(2) = +100 \text{ J} \checkmark$$

$$W = Fd \cos \alpha$$

$$W_N = Nd \cos 90^\circ = 0 \checkmark$$

✓

$$\Delta K W = W_{mg} + W_F \quad (ج)$$

$$527.5 = 1000 + W_F \longrightarrow W_F = -472.5 \text{ J}$$

(د) چون مقدار کار نیروی اصطکاک را از قسمت ج داریم برای کسب ضرب اصطکاک در رابطه کار استفاده کنیم

$$W = F d \cos \alpha$$

$$W_F = F d \cos 180^\circ \xrightarrow{F = \mu N} W_F = \mu N d (-1) \xrightarrow[N = 5.0 \cos 30^\circ = 5.0 \sqrt{3} = 2.5\sqrt{3}]{\substack{\text{ساختار} \\ \text{ساختار}}}$$

$$W_F = -2.5\sqrt{3} (4.0) \mu$$

$$-472.5 = -2.5\sqrt{3} (4.0) \mu$$

$$\mu = \frac{472.5}{10\sqrt{3}}$$

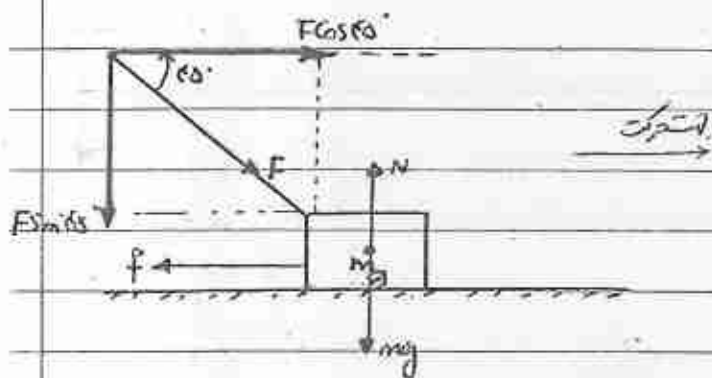
$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{فرضی}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{d} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{d}$$

$$d = 4.0 \text{ m}$$

تمرینات پایانی فصل

مثال) کارگر یک ارابه‌ای به جرم $2.0\sqrt{3} \text{ kg}$ را با سرعت ثابت روی یک سطح افقی با نیروی F جابجا کند. ضرب اصطکاک $\frac{1}{2}$ برابرند ارابه با اندازه 2 m جابجایی شود. اگر $\mu = 0.5$ باشد و $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ کسب کنید:



- الف) کار کل - توان کل
 ب) کار نیروی وزن - کار نیروی کش افقی سطح
 ج) مقدار نیروی F را کسب کنید
 د) کار نیروی F
 ه) کار نیروی اصطکاک

$$P = \text{توان کل}$$

$$W = \text{کار کل}$$

الف) چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس

$$W = F d \cos \alpha$$

ب)

$$W_{mg} = mg (4) \cos 90^\circ = 0$$

$$W_N = N (4) \cos 90^\circ = 0$$

ج) برای کسب نیروی F باید از توانی بیشتر استفاده کنیم. اگر نیروی افقی با محدودی نباشد نتیجه کار خواهد بود.

الف) $W_{mg(AB)} = +mgh = +1(1)(\frac{1}{r}) = +\Delta_j$

$[\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{فرض}} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{h}{R} \xrightarrow{R=1} h = \frac{1}{r}]$

ب) $W_{mg(AC)} = +mgh \xrightarrow{h=R=1m} W_{mgh} = +1(1)(1) = +1_j$

ج) $W_{mg(CD)} = -mgh = -1(1)(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r}_j$

$[\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{فرض}} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{OD}{OD} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{OC-h}{R} \xrightarrow{R=1} \frac{1}{r} = 1-h \rightarrow h = \frac{1}{r}]$

د) $W_{mg(AE)} = mgh \xrightarrow{h=0} W_{mg(AE)} = 0$

نکته: اگر نیروی ثابت باشد مانند $\vec{F} = 2\hat{i}$ برای محاسبه کار از رابطه $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم

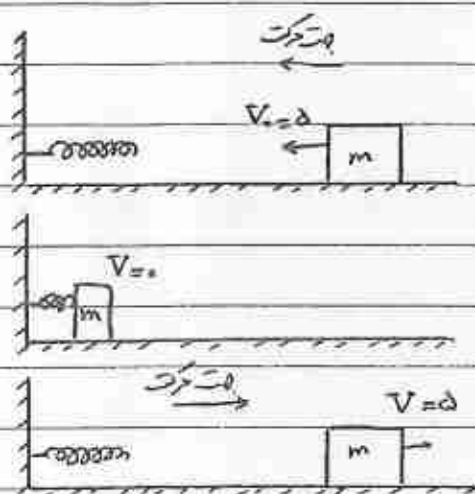
اگر نیروی متغیر باشد مانند $\vec{F} = 2x^2y^2\hat{i}$ برای محاسبه کار از رابطه $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ استفاده می‌کنیم که $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ این جاگانی است

فصل هشتم: تعادل انرژی (یا مکانیک انرژی)

نیروی ما به دو دسته نیروهای پتانسیل و نیروهای کینتیک تقسیم می‌شوند.
این نیروها را از چهار جنبه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

جنبه اول: نیروی پتانسیل نیرویی است که در یک مسیر رفت و برگشت، انرژی جنبشی اولیه و انرژی جنبشی نهایی با هم برابر باشند. یعنی وقتی جسم به محل اولیه خود بازمی‌گردد همان سرعت و همان انرژی جنبشی اولیه را داشته باشد.
در حالتی که نیروی پتانسیل خاصیتی ندارد.
نیروی پتانسیل: نیروی گرانشی (وزن) - نیروی کشسانی فنر - نیروی پتانسیل نیرو اصطکاکی

پتانسیل گرانشی W_{mg} $k=k_0$ انرژی جنبشی اولیه $V=V_0$ سرعت نهایی $V=V_0$ سرعت اولیه



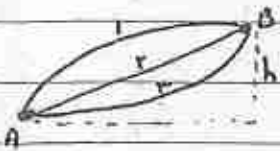
مثال: در شکل روبرو اصطکاکی وجود ندارد جسم با سرعت $V = 5 \text{ m/s}$ به طول فنر حرکت می‌کند. جسم به فنر برخورد کرده فنر را به حداکثر میزان فشرده می‌کند، متوقف می‌شود. جسم به محل برآورد اولیه برگردد با همان سرعت اولیه 5 m/s .
بنابراین نیروی کشسانی فنر، نیروی پتانسیل می‌باشد.

جنبه دوم: اگر نیروی پتانسیل در یک مسیر رفت و برگشت $W = 0$ باشد، آنوقت کار انرژی جنبشی $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ $v=v_0$ و برگشت

بنابراین: در یک مسیر رفت و برگشت کار کل برای نیروی پتانسیل صفر می‌شود.
در حالتی که برای نیروی پتانسیل خاصیتی نیست.

جنبه سوم: نیروی پتانسیل نیرویی است که به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر وابسته است.
در حالتی که نیروی پتانسیل مثل نیروی اصطکاکی به مسیر حرکت و جنس سطح وابسته می‌باشد.
نیروی وزن یک نیروی پتانسیل است. اگر جسم m را از نقطه A به نقطه B ببریم، از هر صیری که برویم شود (۱) یا (۲) یا (۳) مقدار کار انجام شده برابر است با $W_{mg} = -mgh$
وقتی جسم را از صیر (۱) یا (۲) یا (۳) از B به A ببریم $W_{mg} = +mgh$
 $W = +mgh - mgh = 0$ کار کل \leftarrow یعنی جنبه دوم برقرار است پس نیروی وزن،

یک نیروی پستیار است و فرقی نمی‌کند که از کدام یک از صبرهای (۱)، (۲) یا (۳) به معقد برده شود.



جنبه چهارم به نیروی پستیار نیروی است که فرایند آن برگشت پذیر است مانند نیروی وزن - نیروی کشش الکتریکی - نیروی نامیاریار - فرایند برگشت پذیر دارد مانند نیروی اصطکاک و فشار متغیعی معدن کاری که نیروی اصطکاک انجام می‌دهد به صورت گرا هدر می‌رود و مجدداً به جسم باز نمی‌گردد.

انرژی پتانسیل :
مقدار انرژی که با غلبه کردن بر یک نیروی پستیار در جسم ذخیره می‌شود را انرژی پتانسیل گوئیم (U)

$$\Delta U = -\Delta k = W$$

تغییرات انرژی پتانسیل تغییرات انرژی جنبشی

این رابطه نشان می‌دهد که کار انجام شده توسط نیروی پستیار به صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می‌شود. همچنین هر تغییری در انرژی جنبشی (Δk) برابر است با همان مقدار تغییر در انرژی پتانسیل با علامت مخالف.

✓ اگر بر نیروی پستیار غلبه کنیم یعنی کار نیروی پستیار منفی است ($W < 0$) $\rightarrow \Delta U > 0$ یعنی انرژی پتانسیل جسم زیاد می‌شود.
✓ اگر نیروی پستیار غالب باشد یعنی کار نیروی پستیار مثبت است ($W > 0$) $\rightarrow \Delta U < 0$ یعنی انرژی پتانسیل جسم کم می‌شود.

✓ اگر جسمی به جرم m نیروی پستیار F را بگذرد آن را از x_1 به x_2 ببرد در این صورت :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad \Delta U = U_2 - U_1 = - \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

نوعی که جسم در ابتدا و مبدأ پتانسیل باشد $U_1 = 0$

$$\vec{F} = - \frac{dU}{dx}$$

نیروی پستیار

انرژی مکانیکی:

$$E = k + U$$

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را انرژی مکانیکی گوئیم

قانون بقای انرژی مکانیکی:

اگر بر جسمی نیروی نیابتی وارد نشود، اگر هم وارد شود کار آن صفر باشد، در این صورت انرژی مکانیکی بقاء دارد.

$$E_1 = E_2$$

$$k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

نیروهایی که در این فصل با آنها سروکار داریم:

(۱) نیروی وزن یا گرانشی (mg) ← پتانسیل ← انرژی مکانیکی بقاء دارد.

(۲) نیروی فنر ← پتانسیل ← انرژی مکانیکی بقاء دارد.

(۳) نیروی عکس العمل سطح (N) ← نیابتی ← انرژی مکانیکی بقاء ندارد.(۴) نیروی اصطکاک (f) ← نیابتی ← انرژی مکانیکی بقاء ندارد.(۵) نیروی کشش طناب (T) ← نیابتی ← انرژی مکانیکی بقاء ندارد.

نکاتی برای حل مسائل مربوط به این فصل:

(۱) در حل مسائل مربوط به این فصل، معمولاً کار نیروی عکس العمل سطح و کشش طناب صفر باشد. لذا اگر در مسأله ای اصطکاک نداشته باشیم می توان گفت انرژی مکانیکی بقاء دارد $E_1 = E_2$

(۲) برای حل مسائل مربوط به این فصل، ابتدا مبدأ پتانسیل را مشخص کنیم. مبدأ پتانسیل یک مکان اختیاری است و معمولاً زمین را به عنوان مبدأ و در نظر بگیریم.

(۳) در این فصل با دو نمونه انرژی پتانسیل سروکار داریم: (در این جزوه درسی):

■ انرژی پتانسیل فنر: $U = \frac{1}{2} kx^2$ (k ثابت فنر باشد. x میزان تغییرات طول فنر)■ انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسم به یی مبدأ پتانسیل باشد $U = +mgh$ اگر جسم پایین مبدأ پتانسیل باشد $U = -mgh$ (۴) انرژی جنبشی: $k = \frac{1}{2} mV^2$

مسئله ۱) جسمی به جرم 1 kg را با سرعت 2 m/s به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. از تعداد متعادلهای آن در لحظه برخورد به یک قانون بقای انرژی مشتق جسم را در ارتفاع $h = 15\text{ m}$ محاسبه کنید. $g = 10\text{ m/s}^2$

حل

$$E_1 = E_2$$

اصطفاک کل سیستم پس از انرژی مکانیکی بقا دارد
مبدأ انرژی را منقش می‌کنیم

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}(2^2) = \frac{1}{2}v_2^2 + 150$$

$$200 - 150 = \frac{1}{2}v_2^2$$

$$50 = \frac{1}{2}v_2^2 \rightarrow v_2 = 10\text{ m/s}$$

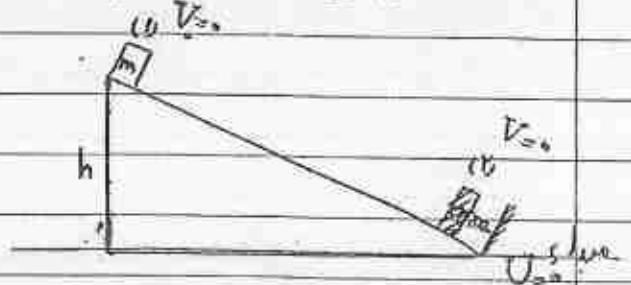


مسئله ۲) در شکل زیر جسمی به جرم 1 kg از بالای سطح شیب‌دار از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. ارتفاع سطح شیب‌دار 2 m را باشد. سطح شیب‌دار بدون اصطفاک است. جسم وقتی به پایین سطح می‌رسد فیزیکی ثابت $k = 400$ را فرود می‌آورد. حرکت را در لحظه برخورد محاسبه کنید. (به کمک قانون بقای انرژی حل شود) $g = 10\text{ m/s}^2$

حل) ابتدا مبدأ انرژی را منقش می‌کنیم. اصطفاک ندارد
پس انرژی مکانیکی بقا دارد

$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$



جسم وقتی در نقطه ۱ قرار دارد در مرتبه صفر است. $K_1 = 0$ انرژی جنبشی
وقتی در نقطه ۲ قرار دارد فیزیکاً متحرک می‌شود و آن زمانی است که جسم ساکن می‌شود. $K_2 = 0$ انرژی جنبشی

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

انرژی پتانسیل گرانشی + انرژی پتانسیل فنر = انرژی پتانسیل گرانشی + انرژی پتانسیل فنر

$$+mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

$$2mgh = kx^2 \rightarrow x^2 = \frac{2mgh}{k} \rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2(1)(10)(2)}{400}} = 1\text{ m}$$

نکته

آزادی طول l دارد نظر بگیرید که جرم به اندازه m به انتهای آن بسته شده است و با بار استاتی کاملاً ثابت است
پس از آن می‌خواهیم مقدار h را محاسبه کنیم:

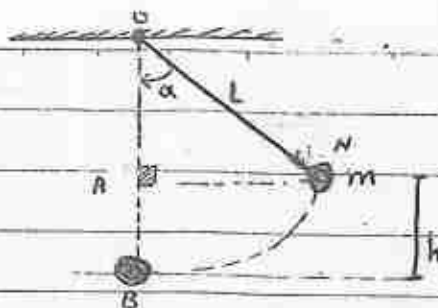
ΔOAN :

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OA}{ON} = \frac{OB-AB}{ON}$$

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l}$$

$$l \cos \alpha = l - h \rightarrow h = l - l \cos \alpha$$

$$h = l(1 - \cos \alpha)$$



مثال) مطابق شکل زیر طولی با جرم 1 kg به انتهای نخ به طول 1 m آویزان است. گلوله به یک مدار استای قائم زاویه α حرارت می‌دهد. گلوله را از حالت سکون رها می‌کنیم، اگر از اصطکاک و مقاومت هوا غافل شویم در این صورت به کمک قانون بقای انرژی

الف) سرعت گلوله را در پایین ترین نقطه محاسبه کنید.
ب) نیروی کشش نخ را در پایین ترین نقطه محاسبه کنید.

(الف)

حل: اصطکاک نداریم پس از قانون بقای انرژی استفاده کردیم
انرژی مکانیکی برابر دارد. مبدأ پتانسیل را مشخص کنیم.

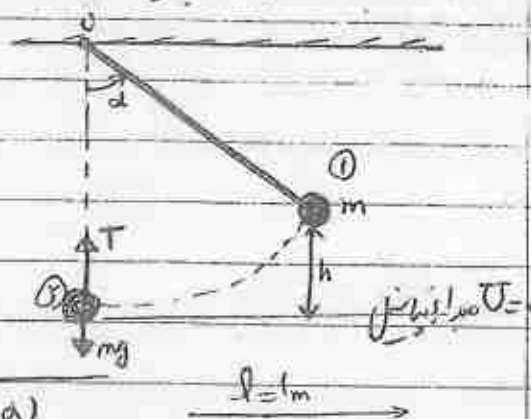
$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad h = l(1 - \cos \alpha) \rightarrow v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot (1 - \cos \alpha)} \quad \checkmark$$



حرکت جسم ادی مدار دایره ای است. پس از یافتن دایره ای استفاده می‌کنیم. نیروهای وارد بر جسم (ب) دارد نقطه (۲) رسم می‌کنیم.

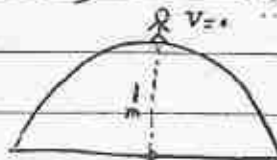
$$\text{برای نیرو در راستای شعاع: } \frac{mv^2}{R} \rightarrow \text{شعاع } 1 \text{ m}$$

$$T - mg = \frac{mv^2}{R}$$

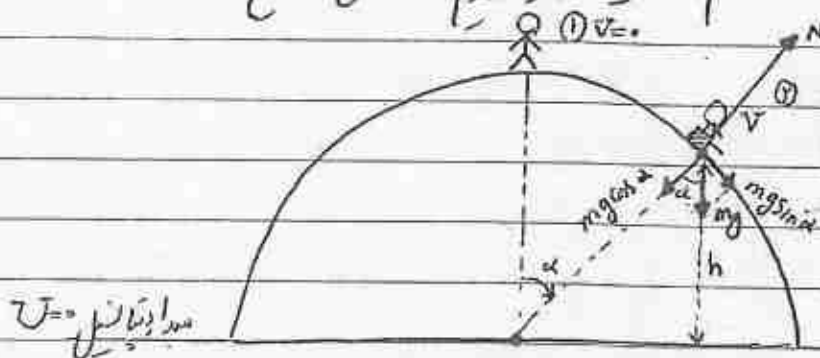
$$T - 10 = 1(20)(1 - \cos \alpha) \rightarrow T = 20 - 20 \cos \alpha + 10$$

$$T = 30 - 20 \cos \alpha \quad \checkmark$$

مثال) اسکویی از بالای کله غمی به شعاع $R=1\text{m}$ شروع به لغز خوردن می کند. (اصططاک وجود ندارد)
از قانون بقای انرژی استفاده کنید و محاسبه کنید که در چه ارتفاعی شخص از کله غمی جدا می شود؟ $g=10\text{m/s}^2$



حل) نیروی اصططاک وجود ندارد پس انرژی مکانیکی بقا دارد. حالت اول را با کمترین نقطه کله غمی در نظر می گیریم و حالت دوم را جایی در نظر می گیریم که شخص از سطح کله جدا شود. مبدأ پتانسیل را مشخص می کنیم.



$$E_i = E_f \rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$+mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$10 = \frac{1}{2}v^2 + 1 \cdot h \quad (1)$$

شخص بعدی مسیر دایره ای حرکت می کند پس از دینامیک دایره ای برای نقطه (۲) استفاده می کنیم. نیروهای وارد بر جسم را در نقطه (۲) رسم می کنیم. نیروی mg به سمت راستی شعاع دایره قرار دارد و نیروی N به سمت چپ آن را می خیزد.

$$\frac{mv^2}{R} = \text{برای نیروی دایره ای شعاع}$$

$$mg \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R}$$

و وقتی از سطح جدا شود $N=0$

$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R}$$

$$gh = v^2 \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{فرض}} = \frac{h}{R=1}$$

$$\cos \alpha = h$$

(۲) را در (۱) قرار می دهیم

$$10 = \frac{1}{2}(gh) + 1 \cdot h$$

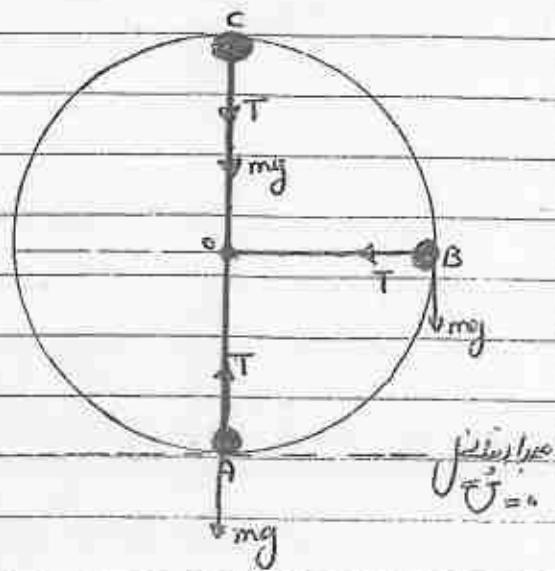
$$10 = 15h \rightarrow h = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{m}$$

مثال: یک گلوله ای به جرم 1 kg به انتهای نخ به طول 1 m بسته شده است و در راستای قائم بر روی محور دایره ای می چرخد. مقاومت هوا وجود ندارد. سرعت گلوله در پایین ترین نقطه مسیر $v_A = 8\text{ m/s}$ باشد. اگر $g = 10\text{ m/s}^2$ باشد، به کمک قانون بقای انرژی محاسب کنید:

(الف) سرعت گلوله در نقاط B و C

(ب) نیروی کشش نخ در نقاط A، B و C

حل: اصطکاک وجود ندارد پس انرژی مکانیکی بقا دارد
(الف) یعنی $E_1 = E_2$ بنابراین می نویسیم



برای نقطه B: $E_1 = E_2 \rightarrow E_A = E_B$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \rightarrow 1\text{ m}$$

$$32 = \frac{1}{2}v_B^2 + 10$$

$$22 = \frac{1}{2}v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{44} \text{ m/s}$$

برای نقطه C: $E_A = E_C \rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh \rightarrow 1\text{ m}$$

$$32 = \frac{1}{2}v_C^2 + 20$$

$$12 = \frac{1}{2}v_C^2 \rightarrow v_C = \sqrt{24} \text{ m/s}$$

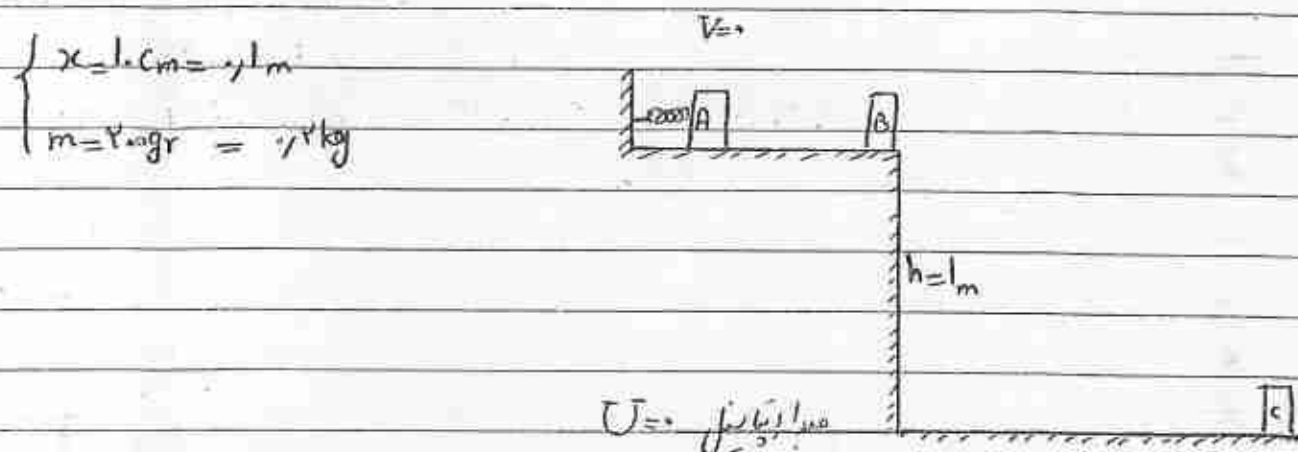
(ب) حرکت بر روی مسیر دایره ای است پس (نیابتیک دایره ای را برای هر کدام از نقاط A، B و C می نویسیم):
برای نیروی گسیل $\frac{mv^2}{R}$

برای نقطه A: $T - mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow T - 10 = \frac{1(44)}{1} \rightarrow T_A = 54\text{ N}$

برای نقطه B: $T = \frac{mv^2}{R} \rightarrow T = \frac{1(44)}{1} \rightarrow T_B = 44\text{ N}$

برای نقطه C: $T + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow T + 10 = \frac{1(24)}{1} \rightarrow T_C = 14\text{ N}$

مثال: جسمی به جرم 200 gr به فنری با ثابت $k = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ گسیخته داده شده است. فنر و جسم حداکثر 1.0 cm فشرده می‌شود. اگر دست خود را از روی جسم برداریم تا فنر باز شود و جسم پرتاب شود در این صورت به کمک قانون بقای انرژی سرعت جسم را در نقاط B و C محاسبه کنید. (اصطلاحات وجود ندارد) $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



حل: ابتدا مبدأ پتانسیل را مشخص کنیم. حد اکثر میزان فشرده‌گی فنر در نقطه A است. سرعت جسم در نقطه A صفر است. اصطلاحات نداریم پس انرژی مکانیکی بقا دارد.

$$E_A = E_B$$

$$k_A + U_A = k_B + U_B$$

انرژی پتانسیل کششی + انرژی پتانسیل فنر + انرژی پتانسیل گرانشی = $\frac{1}{2} m v_B^2 + mgh$

$$+ mgh + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh \quad h=1$$

$$kx^2 = m v_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = \frac{kx^2}{m} \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = x \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_B = 0.01 \sqrt{\frac{500}{0.2}} = 0.01(50) = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_A = E_C \quad \rightarrow \quad k_A + U_A = k_C + U_C$$

انرژی پتانسیل کششی + انرژی پتانسیل فنر + انرژی پتانسیل گرانشی = $\frac{1}{2} m v_C^2 + mgh$

$$+ mgh + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$0.2(10)(1) + \frac{1}{2}(500)(0.01)^2 = \frac{1}{2}(0.2) v_C^2$$

$$2 + 0.025 = 0.1 v_C^2$$

$$2.025 = 0.1 v_C^2 \quad \rightarrow \quad v_C = \sqrt{20.25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

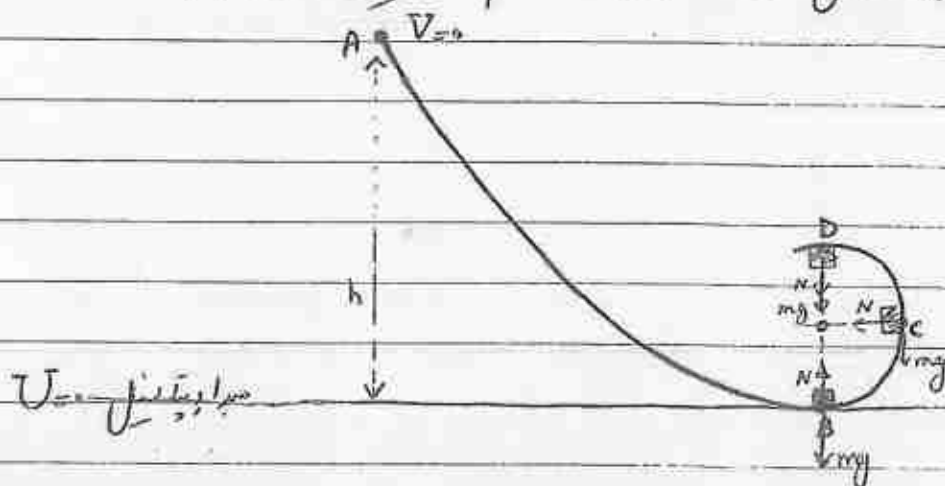
مثال) در شکل زیر جسم به جرم m و از نقطه A از حال سکون بر روی سطح کاملاً بدون اصطکاک رها می‌شود. نقطه A از سطح افقی $h=5$ متر باشد. جسم وارد یک مسیر دایره‌ای بدون اصطکاک می‌شود. به کمک قانون بقای انرژی مکانیکی:

الف) سرعت جسم در نقاط B و C و D

ب) نیروی عکس العمل سطح در نقاط B و C و D

ج) حداقل مقدار h جهت وارد شدن جسم روی مسیر دایره‌ای باقی بماند؟

مساحت دایره $R=1$ متر



الف) اعتبار مبدأ ینرژسی را مشخص کنیم. اصطکاک نداریم پس قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است:

$$E_A = E_B \rightarrow \cancel{k_A} + U_A = \cancel{k_B} + U_B \rightarrow +mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gh} = 10 \frac{m}{s}$$

$$E_A = E_C \rightarrow \cancel{k_A} + U_A = \cancel{k_C} + U_C \rightarrow +mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh$$

$$0 = \frac{1}{2}v_C^2 + 0$$

$$0 = \frac{1}{2}v_C^2 \rightarrow v_C = \sqrt{0} = 0 \frac{m}{s}$$

$$E_A = E_D \rightarrow \cancel{k_A} + U_A = \cancel{k_D} + U_D \rightarrow +mgh = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh$$

$$0 = \frac{1}{2}v_D^2 + 0$$

$$0 = \frac{1}{2}v_D^2 \rightarrow v_D = \sqrt{0} = 0 \frac{m}{s}$$

ب) نیروهای وارد بر جسم در نقاط B و C و D را رسم کنیم حرکت جسم بر روی مسیر دایره‌ای است. پس در نقاط دایره‌ای را برای این نقاط می‌نویسیم:

$$\text{برای نیروهای در راستای شعاع: } \frac{mv^2}{R}$$

B برای نقطه: $N - mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N - 10 = \frac{1(100)}{1} \rightarrow N_B = 110 \text{ N} \checkmark$

C برای نقطه: $N = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N_C = \frac{1(100)}{1} = 100 \text{ N} \checkmark$

D برای نقطه: $N + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N + 10 = \frac{1(90)}{1} \rightarrow N_D = 80 \text{ N} \checkmark$

ج) فرض کنیم مقدار h را در صورت مثال برده است.

تبادل انرژی: $E_A = E_D \rightarrow \frac{1}{2}k_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}k_D + \frac{1}{2}mv_D^2$
 $+ mgh = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh \rightarrow v_m$
 $10h = \frac{1}{2}v_D^2 + 20 \quad (1)$

نیاسی دایره ای را برای نقطه D می بینیم:

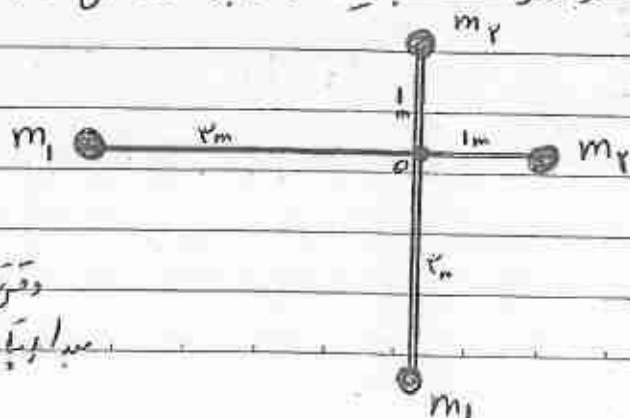
$N + mg = \frac{mv_D^2}{R} \rightarrow N + 10 = \frac{v_D^2}{1} \quad (2)$

برای اینکه h حداقل باشد طبق رابطه (1) پس v_D هم باید حداقل باشد.
 در رابطه (2) اگر v_D حداقل باشد پس سمت چپ هم باید حداقل باشد یعنی N باید کم ترن مقدار
 را داشته باشد یعنی $N=0$

در رابطه (1) $10 = v_D^2 \rightarrow v_D = \sqrt{10}$
 $N=0$ می گذاریم

در رابطه (2) $10h = \frac{1}{2} + 20 \rightarrow 10h = 20.5 \rightarrow h = 2.05 \text{ m}$
 می گذاریم

مثال) میله ای به جرم ناچیز دارد و نظر کنید دو طول به جرم های $\begin{cases} m_1 = 1 \text{ kg} \\ m_2 = 2 \text{ kg} \end{cases}$ به دو سر میله متصل شده است و میله می تواند حول
 نقطه O در صفحه قائم بر سطح زمین دوران کند. (از اصطکاک و شتاب زمین هوا غافل شویم) در ابتدا میله در
 حالت افقی قرار دارد و از حال سکون شروع به حرکت می کند. وقتی میله در وضعیت قائم قرار گیرد سرعت حرکت هر کدام
 از دو طول را محاسبه کنید. (از تبادل انرژی حل شود.)



حل) اصطکاک و شتاب هوا نداریم پس
 انرژی نیاسی تبادل دارد. حالت (1) را حالتی در
 نظر می گیریم که میله افقی باشد و حالت (2)
 را وقتی که میله عمودی است در نظر می گیریم.
 وقتی میله افقی است مرکز ثقل است پس $k_1 = 0$
 مبدأ پتانسیل را مشخص می کنیم

$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

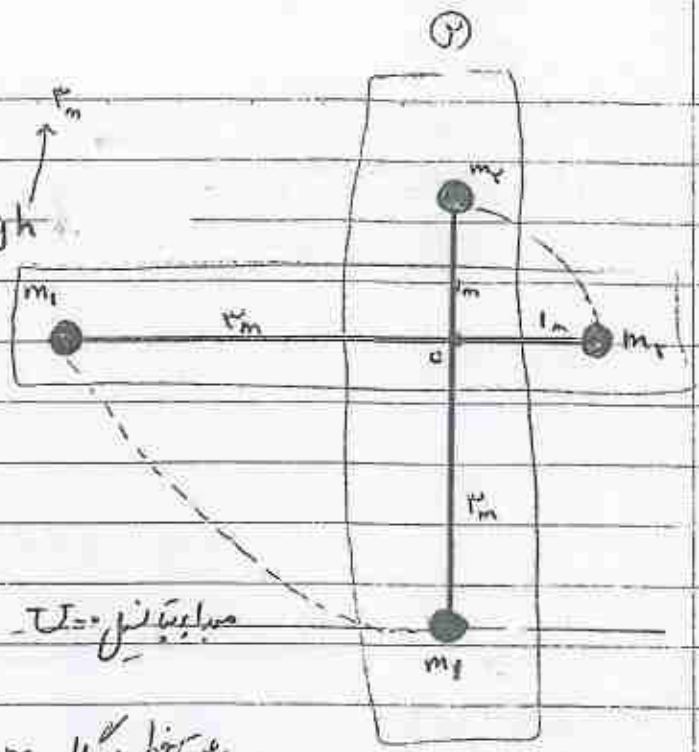
$$+ m_1 g h + m_2 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g h$$

$$v_0 + v_0 = \frac{1}{2} v_1^2 + v_2^2 + 2(1)(4)$$

$$1_0 = \frac{1}{2} v_1^2 + v_2^2$$

①

①



U=0

در لحظه خالی در طول m_2 و m_1 با هم متناوب است زیرا شعاع دوران هر دو
 با هم متناوب می‌کنند ولی پیرود طول مرکز ناویای (سا) (انگشت) برابر دارند.
 چون پیرود یک میله متصل هستند با یک سرعت زاویه‌ای حول نقطه 0 دوران
 می‌کنند.

$V = R\omega$
 سرعت زاویه‌ای
 شعاع دوران

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 \omega = 3\omega \\ V_2 &= R_2 \omega = 1\omega \end{aligned} \quad ②$$

$$1_0 = \frac{1}{2} v_1^2 + v_2^2$$

$$1_0 = \frac{1}{2} (9\omega^2) + \omega^2 \rightarrow 1_0 = \frac{11}{2} \omega^2 \rightarrow 2_0 = 11 \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2_0}{11}} = 1.4 \text{ Rad/s}$$

$$\begin{cases} v_1 = 3(1.4) = 4.2 \text{ m/s} \\ v_2 = 1\omega = 1.4 \text{ m/s} \end{cases}$$

نکته: اگر نیروی وارد بر جسم نیروی ناباسته باشد و کار آن صفر نباشد در این صورت انرژی مکانیکی قیام ندارد

$$E_2 - E_1 = W$$

کار نیروی ناباسته
 اگر در مسافتی مربوط به این فصل از مکانیک داشته باشیم انرژی مکانیکی قیام ندارد.

مثال: جسمی به جرم 2 kg از نقطه A از حال سکون رها می شود. پس از طی ربع دایره به شعاع 2 m با سرعت 4 m/s به نقطه B می رسد. مسیر افقی را طی می کند و در نقطه C متوقف می شود. در کل مسیر اصطکاک وجود دارد. ($Bc = 2\text{ m}$)
 به کمک قانون بقای انرژی مکانیکی محاسبه کنید:

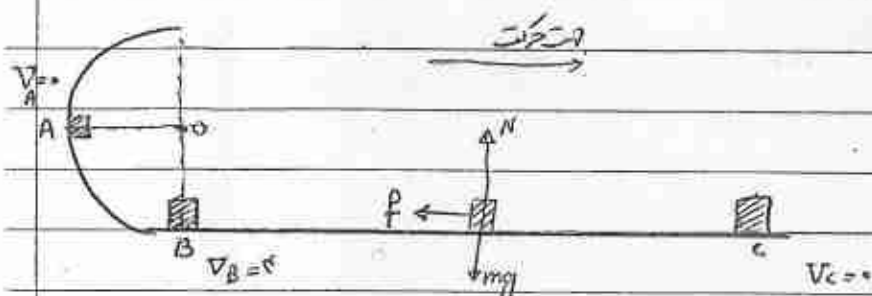
الف) کار نیروی اصطکاک برای مسیر AB

ب) کار نیروی اصطکاک برای مسیر BC

ج) کل گرمای ایجاد شده

د) ضریب اصطکاک برای مسیر BC

$U = 0$ مبدأ پتانسیل



$$E_f - E_i = W_{\text{کار نیروی اصطکاک}}$$

الف) در مسیر AB اصطکاک در این مسیر انرژی مکانیکی قیاس ندارد:
 مبدأ پتانسیل را مشخص می کنیم.

$$E_B - E_A = W_{F(AB)}$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh\right) = W_{F(AB)}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - (+mgh) = W_{F(AB)} \rightarrow W_{F(AB)} = \frac{1}{2}(2)(16) - 2(10)(2) = -24\text{ J}$$

$h = 2\text{ m}$

$$E_f - E_i = W_f$$

ب) در مسیر BC اصطکاک در این مسیر انرژی مکانیکی قیاس ندارد

$$E_C - E_B = W_{F(BC)}$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_C^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_B^2\right) = W_{F(BC)} \rightarrow W_{F(BC)} = -\frac{1}{2}mv_B^2 = -\frac{1}{2}(2)(16) = -16\text{ J}$$

ج) کار نیروی اصطکاک $Q = |W_f|$ مقدار گرمای ایجاد شده

$$Q = |W_{F(AB)}| + |W_{F(BC)}| = 24 + 16 = 40\text{ J}$$

کل گرمای ایجاد شده

$$W = Fd \cos \alpha$$

د) برای محاسبه ضریب اصطکاک برای مسیر BC، از رابطه کار استفاده می کنیم

$$W_{F(BC)} = F(2) \cos 180^\circ = -2F \rightarrow W_{F(BC)} = -20\text{ J}$$

کار اصطکاک در مسیر BC

$$N = mg = 20$$

$$W_{F(BC)} = -16$$

$$-16 = -20(2)\mu$$

$$\mu = \frac{16}{20} = 0.8$$

مثال) طولی ای میزنند بدون شیار بی شکل قائم بدون اصطکاک دوران کند جسم طول ۱ kg و ارتفاع ۱ m می باشد به یک قانون بقاء انرژی حداقل سرعت طول در نقطه A را می سنجند تا طول بدون این مسیر حرکت دورانی کامل داشته باشد. $\vec{g} = 10 \frac{m}{s^2}$

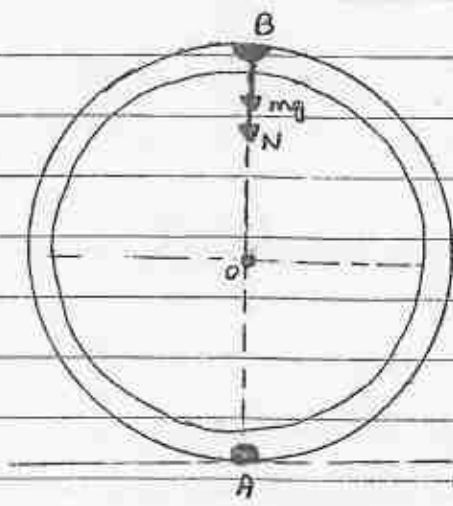
حل) اصطکاک نداریم پس انرژی مکانیکی بقاء دارد
مبدأ پتانسیل را انتخاب کنیم

$$E_1 = E_2 \rightarrow E_A = E_B$$

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h \quad h = r_m$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 = \frac{1}{2} v_B^2 + 20 \quad (1)$$



مبدأ پتانسیل
 $U = 0$

حرکت جسم روی دایره دایره ای است پس از نقطه A دایره ای است و در نقطه B دایره ای را میزنیم.
داریم باید به نقطه B برسد پس برای نقطه B دایره ای را میزنیم.

$$N + mg = \frac{m v_B^2}{R} \quad \text{برای نقطه B در راستای شعاع}$$

$$N + mg = \frac{m v_B^2}{R} \rightarrow N + 10 = v_B^2 \quad (2)$$

در صورتی که گفته شده است که v_A حداقل باشد. در رابطه (1) v_B و v_A نسبت مستقیم دارند پس v_B هم باید حداقل باشد. در رابطه (2) v_B و N هم رابطه مستقیم دارند پس N هم باید حداقل باشد.
یعنی $N = 0$

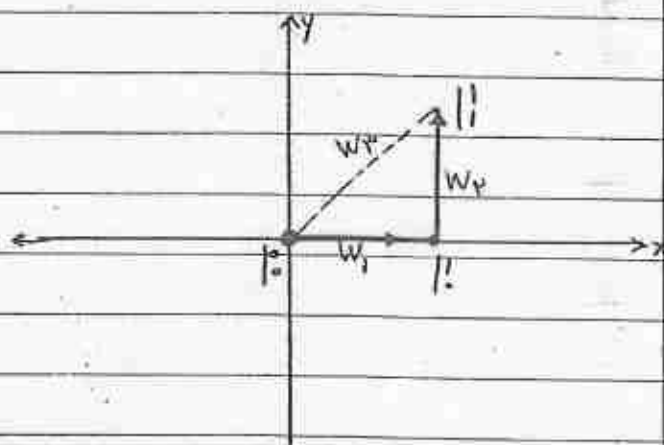
$$\text{در رابطه (2)} \quad N = 0 \rightarrow \sqrt{10} = v_B$$

$$\text{در رابطه (1) و } v_B = \sqrt{10} \rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 = \frac{1}{2} (10) + 20 \rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 = 25 \rightarrow v_A = \sqrt{50}$$

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \end{cases} \quad \text{نکته: در بردار } \vec{A}, \vec{B} \text{ رادرفضای سه بعدی در نظر بگیرید}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \text{ضرب درونی}$$

- مثال) نیروی $\vec{F} = 2xy^2\hat{j}$ بر جسمی که در مدار مشخصات قرار دارد وارد می شود.
- الف) کار نیروی F را در آن مدار محاسبه کنی جسم از $(0,0)$ به $(1,1)$ حرکت می کند.
- ب) \vec{F} یک نیروی محافظه دار است یا نه؟ اگر محافظه دار است، پتانسیل آن را پیدا کن.
- ج) اگر یک مدار جسم را از مدار به نقطه $(1,1)$ ببریم، کار انجام شده است؟
- د) آیا نیروی \vec{F} پتانسیل دارد؟



الف) نیروی \vec{F} محافظه دار است یا نه؟ برای محاسبه کار از رابطه انتگرالی استفاده کنیم.

$$\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad \begin{array}{l} \text{محور } z \text{ نداریم} \\ \text{محور } y \text{ نداریم} \end{array} \quad \vec{r} = dx\hat{i}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_1 = \int (2xy^2\hat{j}) \cdot (dx\hat{i}) = 0$$

$$\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad \begin{array}{l} \text{محور } z \text{ نداریم} \\ \text{محور } x \text{ نداریم} \end{array} \quad \vec{r} = dy\hat{j} \quad \text{ب)}$$

$$W_2 = \int (2xy^2\hat{j}) \cdot (dy\hat{j}) = \int 2xy^2 dy \quad \begin{array}{l} \text{محور } x \text{ نداریم} \\ x=1 \end{array} \quad W_2 = 2 \int y^2 dy$$

$$\int y^n dy = \frac{1}{n+1} y^{n+1} \quad W_2 = \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (1) - \frac{2}{3} (0) = \frac{2}{3}$$

$$\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad \begin{array}{l} \text{محور } z \text{ نداریم} \\ dz=0 \end{array} \quad \vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} \quad \text{ج)}$$

$$W_3 = \int (2xy^2\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \int 2xy^2 dy =$$

محاسبه کار در این مدار از ابتدا تا انتهای مدار
محور x نداریم
محور y نداریم
محور z نداریم

$$W_p = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{y}{3} (1) - \frac{y}{3} (-) = \frac{y}{3}$$

(د) می دانیم که کار نیروی \vec{F} برابر با تغییر انرژی جنبشی است. یعنی اگر جسم را از سرِ اول به مقصد رسانیم باید مقدار کارش برابر با مقدار کاری باشد که از سرِ دوم به مقصد رسانیم.

کارِ سرِ اول: $W' = W_1 + W_2 = 0 + \frac{y}{3} = \frac{y}{3}$

کارِ سرِ دوم: $W'' = W_2 = \frac{y}{3}$

کارِ سرِ اول \neq کارِ سرِ دوم \leftarrow پس نیروی \vec{F} ناپایدار است.

مثال) نیروی $\vec{F} = -3x^2 \hat{i}$ بر جسمی که در میدان مختصات قرار دارد وارد می شود.

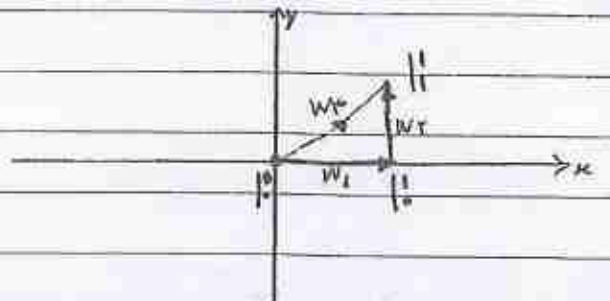
الف) کارِ نیروی \vec{F} را محاسبه کنید وقتی جسم از مبدأ به $(1, 0, 0)$ می رود.

ب) $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$ $(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$ $(1, 1, 0)$ $(1, 0, 0)$ $(0, 0, 0)$

ج) اگر یک جاده جسم را از مبدأ به نقطه $(1, 1, 1)$ ببریم، نیروی \vec{F} چقدر کار انجام داده است؟

د) آیا نیروی \vec{F} پایدار است؟

حل: نیروی \vec{F} متغیر است پس برای محاسبه کار از رابطی انتگرالی استفاده می کنیم.



الف) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W_1 = \int (-3x^2 \hat{i}) \cdot (dx \hat{i}) = \int -3x^2 dx = -\frac{3}{3} x^3 \Big|_0^1 = -x^3 \Big|_0^1 = -1$
 $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ $\xrightarrow{\substack{dz=0 \text{ حرکت در } x \\ dy=0 \text{ حرکت در } y \text{ است}}} d\vec{r} = dx \hat{i}$

ب) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W_2 = \int (-3x^2 \hat{i}) \cdot (dy \hat{j}) = 0$
 $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ $\xrightarrow{\substack{dz=0 \text{ حرکت در } z \\ dx=0 \text{ حرکت در } x \text{ است}}} d\vec{r} = dy \hat{j}$

ج) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W_7 = \int (-3x^2 \hat{i}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \int -3x^2 dx = -\frac{3}{3} x^3 \Big|_0^1 = -x^3 \Big|_0^1 = -1$
 $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ $\xrightarrow{dz=0 \text{ حرکت در } z} d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j}$

(۱) کار صیرادل = کار صیردرم \leftarrow نیروی F یا سبب حرکت

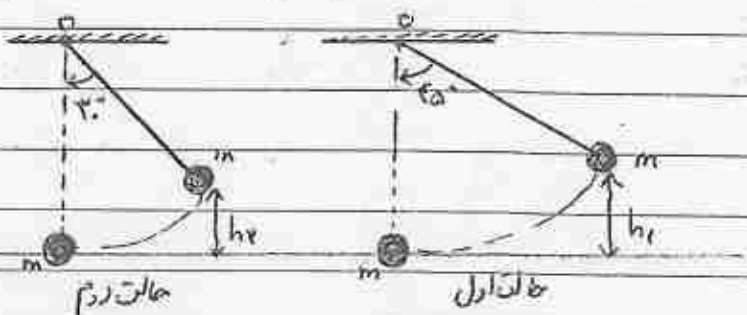
کار صیرادل: $W' = W_1 + W_2 = 0 - 1 = -1$ ج

کار صیردرم: $W'' = W_3 = -1$ ج

مثال: جسمی به جرم 1.0 kg را به انتهای نخ به طول 1 m آویخته به طوری که بتواند حول مرکز گریز در سطح قائم نوسان کند. اصطکاک و مقاومت هوا وجود ندارد. اگر آن را به اندازه زاویه 45° از وضع متعادل خارج کنیم و بدون سرعت اولیه رها کنیم، پس از رفتن در اثر اصطکاک با هوا، حداکثر زاویه‌ای که با براسهای قائم می‌سازد 30° خواهد بود. به کمک قانون بقای انرژی، مقدار گرمای ایجاد شده را محاسبه کنید. $g = 10 \text{ m/s}^2$

$m = 1 \text{ kg}$
 $\cos 45^\circ = \frac{v_y}{v} = 0.707$
 $\cos 30^\circ = \frac{v_y}{v} = 0.866$

مبدأ پتانسیل $U = 0$



مبدأ پتانسیل را مشخص کنیم. حالت اول را حالت زاویه 45° در نظر بگیریم و حالت دوم را حالت زاویه 30° در نظر بگیریم. اصطکاک داریم پس انرژی مکانیکی بقا ندارد

کار نیروی پتانسیل $E_2 - E_1 = W_p$

$(\frac{1}{2}mv_2^2 + U_2) - (\frac{1}{2}mv_1^2 + U_1) = W_p$

$(+mgh_2) - (+mgh_1) = W_p$

$h = l(1 - \cos \alpha)$

$\rightarrow mgl(1 - \cos \alpha_2) - mgl(1 - \cos \alpha_1) = W_p$

$1(10)(1)(1 - \cos 30^\circ) - 1(10)(1)(1 - \cos 45^\circ) = W_p$

$(1 - 0.866) - (1 - 0.707) = W_p$

$-0.866 + 0.707 = W_p$

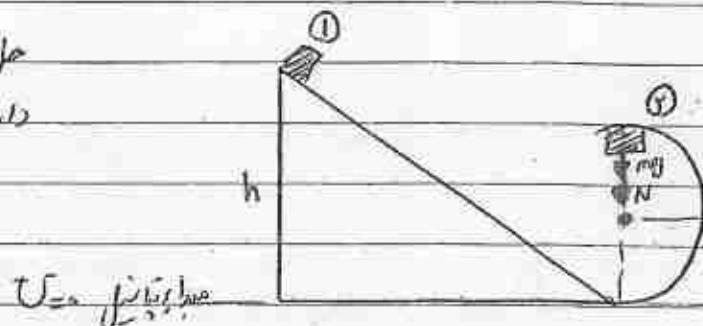
$W_p = -0.159 \text{ J}$ ✓

مقدار گرمای ایجاد شده $Q = |W_p| = 0.159 \text{ J}$ ✓

در حالت ۱) جسم سرعت ندارد پس $K_1 = 0$
 در حالت ۲) حداکثر زاویه 30° است پس جسم متوقف شده است پس $K_2 = 0$

مثال) خنجره‌ای از بالای سطح شیبدار بدون اصطکاک بدون سرعت اولیه به پایین می‌لغزد. مسیر دایره‌ای به شعاع $R=1$ را طی می‌کند. مسیر دایره‌ای نیز بدون اصطکاک می‌باشد. به کمک قانون تبار انرژی مقدار h را می‌توانیم بیابیم. به طوری که نیروی که از طرف دایره در بالا ترین قسمت مسیر به جسم وارد می‌شود برابر با mg باشد.

حل) اصطکاک نداریم پس انرژی مکانیکی تبار دارد. جدا از این اصل را می‌توانیم



حالت 1) در بالا از سطح شیبدار و حالت دوم را بالا ترین قسمت دایره در نظر می‌گیریم.

$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh' \rightarrow h=2$$

$$1 \cdot h = \frac{1}{2}v_2^2 + 2 \quad \text{①}$$

در نقطه 2) حرکت جسم بر روی مسیر دایره‌ای است پس از اینجاست که دایره‌ای برای نقطه 2) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{mv_2^2}{R} = \text{برای نیروی دایره در راستای شعاع}$$

$$N + mg = \frac{mv_2^2}{R} \xrightarrow[N=mg]{\text{در صورتی که گوییم}} mg + mg = \frac{mv_2^2}{R}$$

$$2mg = \frac{mv_2^2}{R} \rightarrow v_2 = \sqrt{2R} \cdot \frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{v_2 = \sqrt{2R}} 1 \cdot h = \frac{1}{2}(2) + 2$$

$$1 \cdot h = 3 \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

مثال) به مثله سخت و سبکی به طول 1 م. گلوله‌ای به جرم 1 کیلوگرم متحرک است. سر دیگر مثله طوری به گلوله بدون اصطکاک متصل شده است که می‌تواند در روی یک دایره در سطح قائم به سطح زمین حرکت کند. سطح دایره‌ای بدون اصطکاک است. گلوله در نقطه A متوقف می‌شود. سرعت اولیه گلوله v_0 باشد. به کمک تبار انرژی

- حالا سه گزینه:
- الف) سرعت اولیه v_0
 - ب) سرعت گلوله در نقطه B
 - ج) نیروی کشش مثله در نقطه B

(د) اگر جسمی به دایره ای کمی شش برزیم در این صورت وقتی طول با چنان سرعت اولیه V از نقطه A حرکت کند حداکثر تا نقطه C بالا نرود. کار نیروی اصطکاک را محاسبه کنید. $g = 10 \frac{m}{s^2}$

الف) ابتدا صیادینا لنیل را مشخص کنیم
اصطکاک وجود ندارد پس انرژی مکانیکی بقا دارد

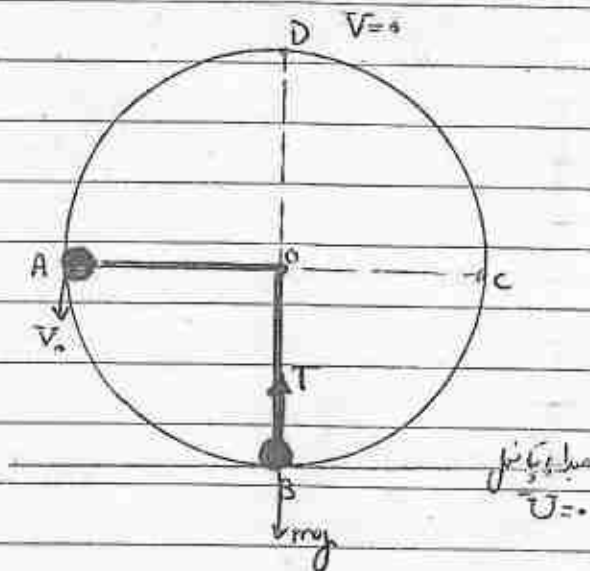
$$E_A = E_D$$

$$k_A + U_A = k_D + U_D$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = mgh' \rightarrow v_m$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 + 10 = 20$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 = 10 \rightarrow V_0 = \sqrt{20} \frac{m}{s}$$



(ب)

$$E_A = E_B \rightarrow k_A + U_A = k_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow \frac{(V_0)^2}{2} + 10 = \frac{1}{2}V_B^2$$

$$20 = \frac{1}{2}V_B^2 \rightarrow V_B = \sqrt{40} \frac{m}{s}$$

(ج) حرکت جسم روی سیر دایره ای است پس نیروی دایره ای را برای نقطه B میزنیم

$$F_{centrifugal} = \frac{mv^2}{R}$$

$$T - mg = \frac{mv_B^2}{r} \rightarrow T - 10 = 10 \rightarrow T = 20 \text{ N}$$

(د) در این قسمت بار محلی شش روی سیر دایره ای اصطکاک ایجاد شده پس انرژی مکانیکی دیگر بقا ندارد جسم تا

نقطه C حداکثر بالا نرود پس $V_C = 0$

$$E_f - E_i = W$$

کار نیروی اصطکاک

$$E_C - E_A = W_f$$

$$(k_C + U_C) - (k_A + U_A) = W_f$$

$$(0 + 0) - (\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh) = W_f \rightarrow 0 - (\frac{1}{2}(20)(10) + 10) = W_f$$

$$W_f = -10 \text{ J}$$

مثال) مطابق شکل جسم به جرم 1 kg از نقطه A بدون سرعت اولیه بر روی یک ربع دایره AB به شعاع 50 cm را طی می‌کند و با سرعت 2 m/s به نقطه B می‌رسد. (مسیر AB اصطکاک ندارد) و از آنجا به سمت C می‌خورد که اصطکاک دارد و ضریب اصطکاک آن $\mu = 0.5$ است. پس از طی مسافت $BC = 1.5\text{ m}$ در نقطه C وارد یک مسیر دایره‌ای بدون اصطکاک می‌شود. شعاع آن 50 cm می‌باشد. در نقطه D ارتباطش با سطح دایره‌ای قطع می‌شود. به کمک قانون تبار انرژی محاسب کنید:

(الف) کار انرژی اصطکاک در مسیر AB

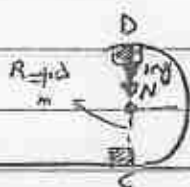
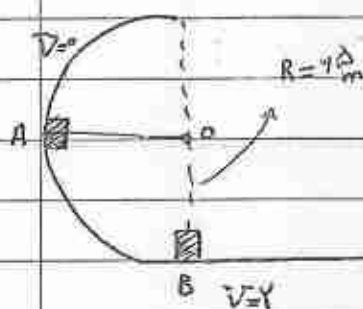
(ب) مقدار گرما که ایجاد شده در مسیر AB

(ج) سرعت جسم در نقطه D

(د) سرعت جسم در نقطه C

(ه) کار انرژی اصطکاک برای مسیر BC

(و) ضریب اصطکاک مسیر BC



شماره امتحان

(الف) ابتدا حساب می‌کنیم و مشخص می‌کنیم مسیر AB اصطکاک ندارد پس انرژی مکانیکی تبار ندارد.

$$E_f - E_i = W_f$$

$$E_B - E_A = W_{f(AB)} \rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh \right) = W_{f(AB)}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - (0 + mgh) = W_{f(AB)}$$

$$\frac{1}{2}(1)(4) - 1(1.0)(5) = W_{f(AB)}$$

$$\rightarrow W_{f(AB)} = -3\text{ J}$$

(ب) مقدار گرما که ایجاد شده در مسیر AB $Q = |W_f| = 3\text{ J}$

(ج) در نقطه D دایره‌ای را برای نقطه D می‌زنیم:

$$\frac{mv^2}{R} = \text{برای نیروی در راستای شعاع}$$

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = 0 \rightarrow mg = \frac{mv_D^2}{R} \rightarrow 1.0 = \frac{v_D^2}{0.5}$$

$$v_D = \sqrt{0.5}$$

ج

جاسیر CD بدون اصطکاک است پس انرژی مکانیکی تبادله دارد $E_C = E_D \rightarrow E_C = E_D$

$$k_C + \frac{1}{2}mv_C^2 = k_D + \frac{1}{2}mv_D^2$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh \rightarrow (2 \times 1.5 = 1.1)$$

$$\frac{1}{2}v_C^2 = \frac{1}{2}(1.5) + 1.0 \times 1 \rightarrow \frac{1}{2}v_C^2 = 1.25$$

$$v_C = \sqrt{2.5} \text{ m/s}$$

د) سیر BC با اصطکاک دارد پس انرژی مکانیکی تبادله ندارد کار تغییر $E_C - E_B = W_F$

$$E_C - E_B = W_{F(BC)}$$

$$(k_C + \frac{1}{2}mv_C^2) - (k_B + \frac{1}{2}mv_B^2) = W_{F(BC)}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{F(BC)} \rightarrow W_{F(BC)} = \frac{1}{2}(1)(2.5) - \frac{1}{2}(1)(1) = -0.75 \text{ J}$$

و) برای محاسبه ضربه اصطکاک می توانیم از رابطه ای کار برای سیر BC استفاده کنیم:

$$W = Fd \cos \alpha$$

$$W_{F(BC)} = F(1.5) \cos 180^\circ \rightarrow$$

$$F = \mu N$$

$$-0.75 = -\mu N \rightarrow N = mg = 1.0 \rightarrow 0.75 = (\mu)(1.0) \mu$$

$$\mu = \frac{0.75}{1} = 0.75 \checkmark$$

مثال) گلوله ای به جرم ۱ kg از نقطه A با سرعت ۱۰ m/s به پایین در لغز، این سطح AB با اصطکاک است $(AB = 2 \text{ m})$. ضربه اصطکاک سطح بسیار از B به B دارد و سطح افقی با اصطکاک دیگر BC ندارد. پس در نقطه C دارد که سیر دایره ای بدون اصطکاک به شعاع m از مرکز به گلوله تامل تبادله انرژی می کند.

الف) به کمک رابطه $W = Fd \cos \alpha$ ، کار نیروی اصطکاک را برای سیر AB محاسبه کنید.

ب) مقدار تغییران ایجاد شده برای سیر AB

ج) سرعت جسم در نقطه B

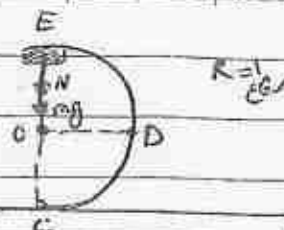
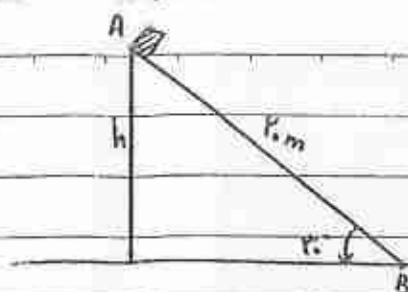
د) حداقل سرعت جسم در نقطه E جهت باز آمدن جسم به سیر دایره ای باقی می ماند؟

ه) سرعت جسم در نقطه C

و) کار نیروی اصطکاک برای سیر BC

ز) مقدار تغییران ایجاد شده در سیر BC

$v=1.$



$v=0$ مبدأ نیل

$W = Fd \cos \alpha$

AB سطح است، $W_{F(AB)} = F(r) \cos 120^\circ = -r \mu N$ (الف) در سطح سبک
 $N = mg \cos \alpha$
 $N = 1(10) \cos 30^\circ = 10 \times 0.866 = 8.66$

$W_{F(AB)} = -r(-1)(8.66) = -17.32$

مقدار کار انجام شده در مسیر AB $Q = |W_F| = 17.32$

ج) مبدأ نیل را نقطه شروع. مسیر AB سطح است. از روی مکانیکی قیاس می‌دارد.

$E_B - E_A = W_F$ کار می‌شود، نیل

$(\frac{1}{2}mv_B^2) - (\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh) = W_{F(AB)}$

$\frac{1}{2}mv_B^2 - (\frac{1}{2}(1)v^2 + 1(10)(1.0)) = -17.32$

$\frac{1}{2}v_B^2 - (\frac{1}{2}(1) + 10) = -17.32$

$\frac{1}{2}v_B^2 - 10.5 = -17.32$

$\frac{1}{2}v_B^2 = 3.82 \rightarrow v_B = \sqrt{7.64} \text{ m/s}$

$\sin \alpha = \frac{h}{r}$

$\sin 30^\circ = \frac{h}{1}$

$\frac{1}{2} = \frac{h}{1} \rightarrow h = 0.5 \text{ m}$

برای نیروی دوار: $\frac{mv^2}{R}$

$N + mg = \frac{mv^2}{r}$

محال است که $N=0$

(د) باید داریم، برای آن E داریم:

$mg = \frac{mv^2}{r} \rightarrow 10 = \frac{v^2}{1}$

$v = \sqrt{10} \text{ m/s}$

$E_1 = E_2$

(ه) مسیر دایره‌ای بدون اصطکاک است پس از روی مکانیکی قیاس می‌دارد

$E_C = E_E$

$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_E^2 + mgh$

$\frac{1}{2}v_C^2 = \frac{1}{2}(10) + 10 \rightarrow h = 1 \text{ m}$

$\frac{1}{2}v_C^2 = 15$

$v_C = \sqrt{30} \text{ m/s}$

(۹) سطح BC اصطکاک ندارد پس انرژی مکانیکی بقا می‌یابد

$$E_C - E_B = W_f$$

$$E_C - E_B = W_{f(BC)}$$

$$(K_C + U_C) - (K_B + U_B) = W_{f(BC)}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{f(BC)} \rightarrow \frac{1}{2}(1)(5)^2 - \frac{1}{2}(1)(\sqrt{11})^2 = W_{f(BC)}$$

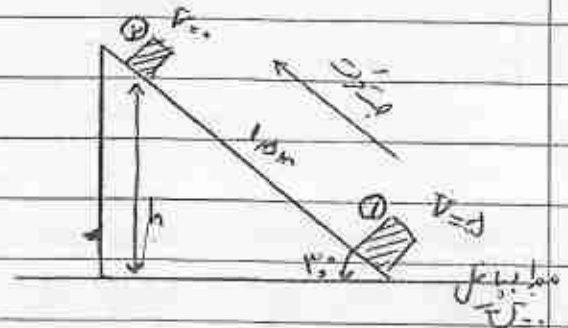
$$W_{f(BC)} = -1.8 \text{ J}$$

(۱۰) مقدار کارهای انجام شده در مسیر BC $Q = |W_{f(BC)}| = 1.8 \text{ J}$

مثال: جسمی به وزن ۴۴ نیوتن با سرعت اولیه ۵ م بر روی یک سطح شیبی به طرف بالا رانده می‌شود. این جسم پس از طی مسافت ۱.۵ م بر روی سطح می‌ایستد. پس به طرف پایین می‌گردد. اصطکاک وجود ندارد. (الف) به کمک قانون بقای انرژی مقدار نیروی اصطکاک را محاسبه کنید. (ب) جسم از بالا به سطح مجدداً شروع به حرکت کرد. به پایین سطح هر چه در سرعت جسم را وقتی به نقطه اولیه بازی گردیدیم.

حل: الف) $mg = 44 \text{ N} \rightarrow m = 4.4 \text{ kg}$

صدا و تبدیل را مشخص نمی‌کنیم
اصطکاک داریم پس انرژی مکانیکی بقا ندارد.
نقطه ۱ را پایین سطح و نقطه ۲ را بالا در نظر می‌گیریم



$$E_C - E_1 = W$$

$$(U_C + K_C) - (U_1 + K_1) = W_f$$

$$(mgh) - (\frac{1}{2}mv^2) = f d \cos \alpha$$

$$+mgh - \frac{1}{2}mv^2 = f (1.5) \cos 36.9^\circ$$

$$-44(-1.5) - \frac{1}{2}(4.4)(5)^2 = -1.5f$$

$$-33 - 55 = -1.5f$$

$$-88 = -1.5f$$

$$f = \frac{88}{1.5} = 58.67 \text{ N}$$

مقدار نیروی اصطکاک را از فرمولی که می‌خواهیم پیدا کنیم
 $f d \cos \alpha = W_f$
تا بتوانیم f را محاسبه کنیم.

$$S \sin \alpha = \frac{h}{1.5}$$

$$S \sin 36.9^\circ = \frac{h}{1.5}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{h}{1.5} \rightarrow h = 1.5 \text{ m}$$

نقطه ۱، ۱) با کمال سرعت نقطه ۲ را پس در نظر داریم

$$E_2 - E_1 = W$$

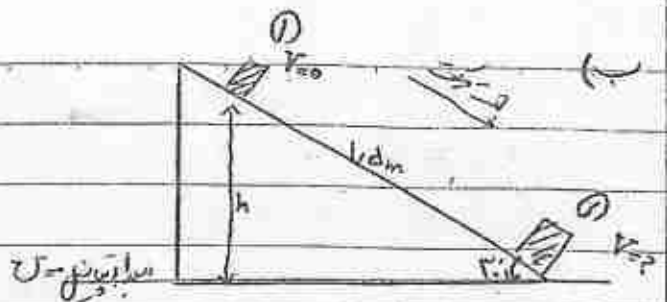
$$(U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = W_f$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - (+mgh) = f d \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}(4,4)v^2 - 44(1,75) = (14,7)(1,75) \cos 18^\circ$$

$$2,2v^2 - 77 = -22$$

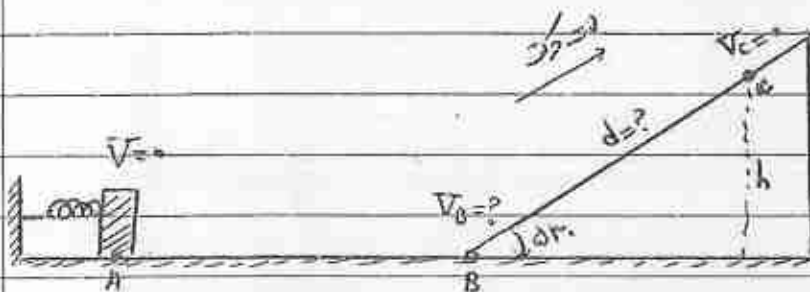
$$2,2v^2 = 55 \rightarrow v^2 = \frac{55}{2,2} = 25 \rightarrow v = \sqrt{25} = 5 \text{ m/s}$$



مثال) جسمی به جرم ۱۱ کیلوگرم در یک سطح بدون اصطکاک قرار دارد و به فیزی با ثابت $k = 400 \text{ N/m}$ متصل است. اگر به کمک جسم در نقطه A قرار داده شود. فشرده کنیم و سپس رها کنیم، جسم بر روی سطح افقی حرکت نکند و وارد سطح سیمابار بدون اصطکاک شود. به کمک تابلو انرژی کامل کنید: $(\sin 53^\circ = 0,8, \cos 53^\circ = 0,6)$

الف) سرعت جسم در نقطه B

ب) جسم حداکثر چه مسافتی را روی سطح سیمابار طی کند؟



$$U = 0 \text{ (مربوط به پتانسیل)}$$

$$E_A = E_B$$

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$(0 + 0) = \frac{1}{2}mv_B^2 + (0 + 0) \quad (\text{از رگم پتانسیل گرانشی + از رگم پتانسیل فن})$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = \frac{kx^2}{m} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = x \sqrt{\frac{k}{m}} = 1,2 \sqrt{\frac{400}{1}} = 1,2(2) = 2,4 \text{ m/s}$$

الف) در مسیر AB اصطکاک نداریم \rightarrow انرژی مکانیکی ثابت دارد.
جسم در نقطه A حداکثر فشرده‌گی را به فن اعمال می‌کند پس در نقطه A جسم را رها می‌کنیم $\rightarrow K_A = 0$

ب) فرض کنیم جسم تا نقطه C حرکت کرده و در آنجا متوقف می‌شود. در این حالت $k_c = 0$ و سطح شیبدار اصطکاک ندارد. انرژی مکانیکی برابر دارد.

$$E_B = E_C \rightarrow \frac{1}{2}k_B + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}k_C + \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = +mgh \rightarrow \frac{v_B^2}{2} = gh \rightarrow \frac{14}{2} = 1 \cdot h$$

$$h = 7 \text{ m} \quad \checkmark$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \rightarrow \sin 53^\circ = \frac{h}{d}$$

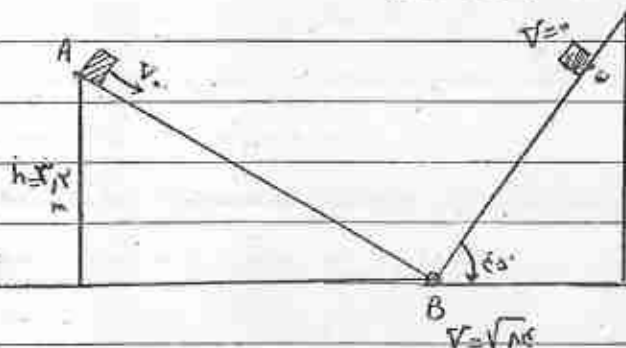
$$\frac{4}{5} = \frac{7}{d} \rightarrow d = 8.75 \text{ m} \quad \checkmark$$

مثال) جسمی به جرم ۱ kg از روی سطح شیبدار بدون اصطکاک از نقطه A به ارتفاع ۳/۲ m با سرعت اولیه v_0 به طرف پایین حرکت کند و با سرعت $\sqrt{85} \text{ m/s}$ به نقطه B برسد. در نقطه B دارای یک سطح شیبدار با ضریب اصطکاک ۰.۲ و زاویه شیب ۴۵° می‌شود و از سطح بالا می‌رود. به کمک قانون بقای انرژی محاسب کنید:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$$

الف) سرعت اولیه v_0

ب) حجم روی سطح دوم حداکثر چه مسافتی را به طرف بالا می‌تواند تا متوقف شود؟



$$U = 0 \text{ مبدأ پتانسیل}$$

الف) مبدأ پتانسیل را مشخص کنیم. سطح اول بدون اصطکاک است پس انرژی مکانیکی برابر دارد.

$$E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2}k_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}k_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + 3.2 = \frac{1}{2}(85) \rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 = 10 \rightarrow v_0 = \sqrt{20} \text{ m/s}$$

ب) سطح شیبدار دوم با اصطکاک است پس انرژی مکانیکی برابر ندارد.

$$E_A - E_B = W_f \text{ کار نیروی اصطکاک}$$

$$E_C - E_B = W_f$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_c^2 + U_c\right) - \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + U_B\right) = W_p$$

$$(W_p = f d \cos \alpha)$$

$$+mgh - \frac{1}{2}mv_B^2 = f d \cos \alpha$$

$$(f = \mu N)$$

$$1 \cdot h - \frac{1}{2}(v^2) = \mu N(d) \cos 15^\circ$$

$$N = mg \cos \alpha = 1 \cdot \cos 15^\circ = v$$

روی سطح شیبدار

$$1 \cdot h = \frac{1}{2}v^2 = -(-0.2)(v)d$$

$$1 \cdot h = \frac{1}{2}v^2 = -1.4d \quad (1)$$

$$S_{mid} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\sin} \rightarrow S_{15^\circ} = \frac{h}{\sin 15^\circ} \rightarrow \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{h}{d} \rightarrow h = \sin 15^\circ d \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2) داریم} \rightarrow 1 \cdot (\sin 15^\circ d) = \frac{1}{2}v^2 = -1.4d$$

$$v d = \frac{1}{2}v^2 = -1.4d$$

$$1.4d = \frac{1}{2}v^2$$

$$\rightarrow d = \frac{v^2}{2.8} = d_m$$

مثال) جسمی به جرم ۱ kg از نقطه A به ارتفاع ۲ m از سطح افقی بدون سرعت اولیه به سمت سطح میخیزد و بدون اصطکاک به طرف پایین حرکت می‌کند. در نقطه B دارد یک سطح افقی میخیزد (سطح افقی با اصطکاک) و در نقطه C دارد یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۱ m و بدون اصطکاک می‌شود. نیروی جاذبه از طرف دایره در بالا اثر می‌کند دایره نیمه است و دارد مرکز برابر با ۲mg می‌باشد. به کمک قانون بقای انرژی حل کنید:

الف) سرعت جسم در نقطه B

ب) به کمک دینامیک دایره‌ای سرعت جسم را در نقطه D محاسبه کنید

ج) سرعت جسم در نقطه C را محاسبه کنید

د) کار نیروی اصطکاک در مسیر BC



$v=0$ در نقطه C

$$E_A = E_B$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_A^2 + U_A\right) = \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + U_B\right)$$

$$+mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B^2 = 2gh$$

حل) سطح میخیزد و بدون اصطکاک ← انرژی مکانیکی بقا دارد ←

$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2} = 20 \frac{m}{s}$$

برای نیروی مرکز دایره ای $\frac{mv^2}{R}$ (نیروی دایره ای برای نقطه D لازم است)

$$N + mg = \frac{mv_D^2}{r}$$

در صورتی که گفته شده $N = 2mg$

$$mg + 2mg = \frac{mv_D^2}{r} \rightarrow \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$v_D = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

ج) مسیر دایره بدون اصطکاک است پس انرژی مکانیکی ثابت دارد

$$E_C = E_D$$

$$k_C + \frac{1}{2}mv_C^2 = k_D + \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh$$

$h = r_m$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}v_C^2 = \frac{1}{2}(2.0)^2 + 2.0 \rightarrow \frac{1}{2}v_C^2 = 4.0$$

$$v_C = \sqrt{8} \text{ m/s}$$

(>) مسیر BC اصطکاک دارد پس انرژی مکانیکی ثابت ندارد

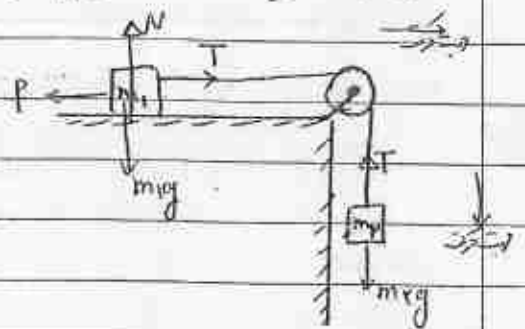
$$E_C - E_B = W_{f(BC)}$$

$$(k_C + \frac{1}{2}mv_C^2) - (k_B + \frac{1}{2}mv_B^2) = W_{f(BC)}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{f(BC)} \rightarrow W_{f(BC)} = \frac{1}{2}(v_C^2) - \frac{1}{2}(v_B^2) = 4.0 - 2.0 = 2.0 \text{ J}$$

مثالی) در شکل زیر ضربه اصطکاک بین جسم m_1 و سطح صاف ندارد. $m_1 = 8 \text{ kg}$ در جسم ابتدا در حال سکون قرار دارد.
 (الف) اگر جابجایی هر دو جسم 2.5 m باشد، کار کل را محاسبه کنید.
 ب) به کمک قضیه کار-انرژی جنبشی سرعت نهایی را محاسبه کنید.

الف) انرژی های در دو جسم را رسم کرده و کار را بدست می آوریم

$$W = Fd \cos \alpha$$


کار نیروی m_1g : $W_{m_1g} = m_1g(r, \alpha) \cos 90^\circ = 0$

کار نیروی m_2g : $W_{m_2g} = +m_2gh = 4(1.0)(2.5) = +10 \text{ J}$

کار N : $W_N = N(r, \alpha) \cos 90^\circ = 0$

کار نیروی T وارده بر m_1 : $W_T = T(r, \alpha) \cos 0^\circ = 2.5T$

کار نیروی T وارده بر m_2 : $W_T = T(2.5) \cos 180^\circ = -2.5T$

کار نیروی f : $W_f = f(r, \alpha) \cos 180^\circ = \mu N(-2.5) \xrightarrow{N = m_1g = 80} W_f = 0.4(80)(-2.5) = -80 \text{ J}$

کار کل $W = W_{m_1g} + W_{m_2g} + W_N + W_T + W_T + W_f = 10 + 2.5T - 2.5T - 80 = -70 \text{ J}$

ب) $W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$
 $q_0 = \frac{1}{2}(14)v^2 \rightarrow q_0 = 7v^2$
 $V = \sqrt{\frac{q_0}{V}} \text{ مودت ۴ ال}$

مثال) آونگ ساده ای به طول L از نقطه O آویزان است. در ابتدا در نقطه C به نقطه A از نقطه O یک سیخ افقی قرار دارد. اصطکاک و مقاومت هوا وجود ندارد. به کمک قانون بقای انرژی محاسب کنید آونگ را در ابتدا حاصل چند درجه از وضعیت قائم خارج کنیم و بدون سرعت اولیه را بتواند در سیخ عمود دایره ای کامل راجی کند.

الف) $OC = \frac{4L}{5} \leftarrow AC = L - \frac{4L}{5} = \frac{L}{5}$

فرضی کنیم در ابتدا جسم در وضعیت سیخ قرار دارد که سیخ عمود استکان قائم زاویه α در زاویه α گویا که در حالت تعادل است که جسم به دور سیخ که در نقطه C قرار دارد در چرخش. برای این که یک عمود دایره ای کامل راجی کند باید بالا رفتن نقطه A را در نظر بگیریم.

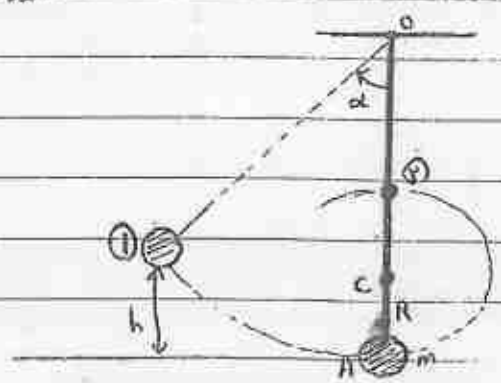


$R = \frac{L}{5}$

$E_1 = E_2$ اصطکاک نداریم انرژی تبادل دارد

$k_1 + U_1 = k_2 + U_2$
 $0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgh' \rightarrow h = 2R$

$h = L(1 - \cos\alpha)$
 $L(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}v^2 + L(1 - \frac{1}{5})$
 $L(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{4}{5}L$



میدانیم
 $U = 0$

برای نقطه ۱) در آنجا دایره ای را در نظر بگیریم.

$T + mg = \frac{mv^2}{R}$

برای این که در مسیر دایره ای کامل راجی شود حداقل باید به نقطه ۲) برسد

$mg = \frac{mv^2}{R}$

$V = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \times \frac{L}{5}}$

$V = \sqrt{2Lg}$ ۳)

۱) راجی ۲) راجی $L(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}(2L) + \frac{4}{5}L$

$L(1 - \cos\alpha) = \frac{6}{5}L \rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{3}{5}$

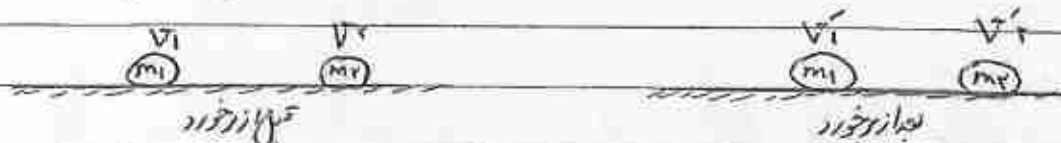
$\cos\alpha = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha = 66.4^\circ$

فصل ششم و دهم : برخورد و تقابل اندازه حرکت

(۱) برخورد کاملاً الاستیک یا کشش ان : در این نوع برخورد هم اندازه حرکت تقابل دارد و هم انرژی جنبشی. در این نوع برخورد تلف انرژی نداریم.

تقابل انرژی جنبشی : $K = K' \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

تقابل اندازه حرکت : $P = P' \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$



قبل از برخورد

بعد از برخورد

(۲) برخورد غیر الاستیک یا غیر کشش ان : در این نوع برخورد انرژی جنبشی تقابل ندارد ولی اندازه حرکت تقابل دارد.

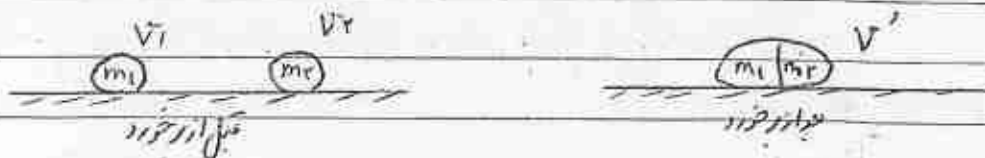
تقابل اندازه حرکت : $P = P' \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

مقدار گرما یا کار : $Q = K - K' = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right)$

(۳) برخورد کاملاً غیر کشش ان (پلاستیک) : در این نوع برخورد انرژی جنبشی تقابل ندارد و فقط اندازه حرکت تقابل دارد. دو جسم بعد از برخورد به هم چسبیده و به حرکت خود ادامه می دهند. بیشترین تلف انرژی در این نوع است.

تقابل اندازه حرکت : $P = P' \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$

مقدار گرما یا کار : $Q = K - K' = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$



قبل از برخورد

بعد از برخورد

ضرب جندگی : قدر ملکی خارج سمت ضرب استی که جسم پس از برخورد به سمت استی دو جسم قبل از برخورد

را ضرب جندگی گوئیم. هر چه در جسم سخت تر باشند ضربه جندگی بیشتر خواهد بود و نزدیک ۱

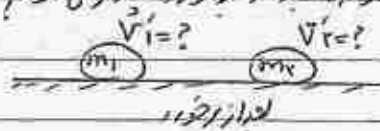
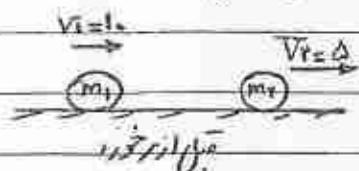
است و هر چه در جسم نرم تر و انعطاف پذیر تر باشند مقدار آن کم تر و به صفر نزدیک تر است.

برخورد کاملاً کشش ان : $0 \leq e \leq 1$ ، برخورد پلاستیک : $e = 0$

$$r = \left| \frac{v'_r - v'_i}{v_r - v_i} \right| \quad \text{ضرب جهنگی}$$

$r=0$ ← برخورد پلاستیک
 $r=1$ ← برخورد کاملاً الاستیک
 $0 < r < 1$ ← برخورد غیر الاستیک

مثال: روی سطح افقی بدون اصطکاک طولی ای به جرم 1 kg و با سرعت 1.0 m/s به طرف راست حرکت می‌کند. یک گلوله دیگری به جرم 2 kg و با سرعت 2 m/s به سمت چپ در حال حرکت است. پس از برخورد، گلوله 1 به سمت راست با سرعت v'_1 و گلوله 2 به سمت چپ با سرعت v'_2 حرکت می‌کند. ضریب جهنگی $r = 0.8$ را در نظر بگیرید. سرعت هر کدام از آنها بعد از برخورد چقدر می‌شود؟



$r = 0.8$ ← برخورد غیر الاستیک → در این نوع برخورد فقط اندازه حرکت، تبادل دارد

$$P = P' \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$1.0(1) + 2(2) = 1 v'_1 + 2 v'_2$$

$$5 = v'_1 + 2 v'_2 \quad \text{--- (1)}$$

$$r = \left| \frac{v'_r - v'_i}{v_r - v_i} \right| = 0.8 \rightarrow 0.8 = \frac{v'_2 - v'_1}{1 - 2} \rightarrow v'_2 - v'_1 = 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{cases} v'_1 + 2v'_2 = 5 \\ v'_2 - v'_1 = 4 \end{cases}$$

$$3v'_2 = 9 \rightarrow v'_2 = 3 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$v'_1 + 2v'_2 = 5$$

$$v'_1 + 6 = 5 \rightarrow v'_1 = -1 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

اگر حرکت جسم در دو بعد انجام شود، تبادل اندازه حرکت را برای هر دو بعد باید بنویسیم:

$$P_x = P'_x$$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

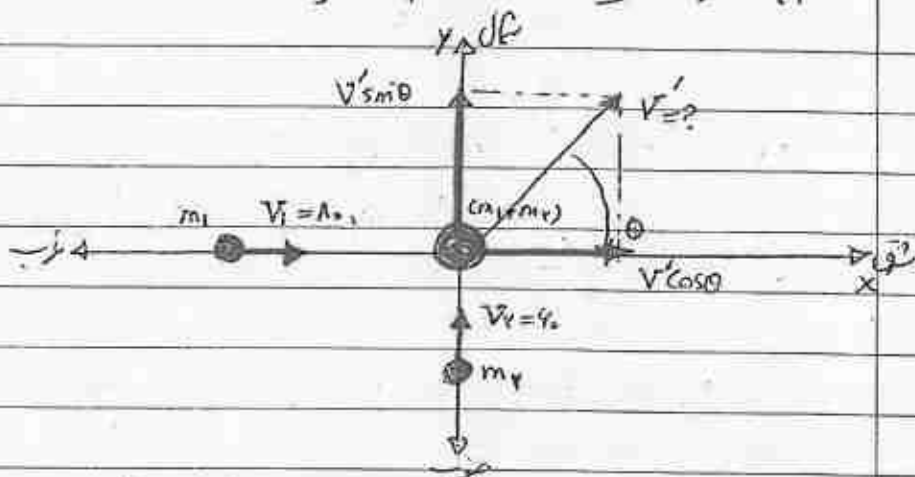
تبادل اندازه حرکت در راستای محور y ها

$$P_y = P'_y \rightarrow m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$

مسئله) دو قطره جرم‌های $m_1 = 10 \text{ kg}$ و $m_2 = 4 \text{ kg}$ با سرعت‌های $V_1 = 9.5 \text{ km/h}$ و $V_2 = 1 \text{ km/h}$ در حرکتند. ادبی به طرف شرق و دومی به طرف

شمال حرکت می‌کنند. بعد از برخورد دو قطره به هم چسبیده و به حرکت خود ادامه می‌دهند.
(الف) زاویه پراکندگی را محاسبه کنید.

(ب) سرعت نهایی دو قطره بعد از برخورد چقدر است؟



(الف) برخورد پلاستیک است. در این نوع برخورد فقط اندازه حرکت برابری دارد. چون شکل نواری است پس برای برخورد باید به هم چسبند $P = P'$ قبل و بعد

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V'$$

$$\begin{cases} m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = (m_1 + m_2) V'_x \\ m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = (m_1 + m_2) V'_y \end{cases}$$

$$V'_x = V' \cos \theta$$

$$V'_y = V' \sin \theta$$

$$\begin{cases} 10(9.5) = (10 + 4) V' \cos \theta \\ 4(1) = (10 + 4) V' \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 95 = 14 V' \cos \theta \\ 4 = 14 V' \sin \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{تقسیم در طرف راست} \\ \text{برهم} \end{array}$$

$$\frac{95}{4} = \frac{14 V' \cos \theta}{14 V' \sin \theta} \rightarrow \frac{23.75}{1} = \cot \theta \rightarrow \theta = 53^\circ$$

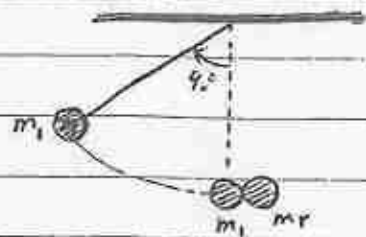
(ب) $\theta = 53^\circ$ را در یکی از روابط * قرار می‌دهیم تا V' را محاسبه کنیم:

$$4 = 14 V' \sin 53^\circ \rightarrow 4 = 14 V' (0.8) \rightarrow V' = \frac{4}{14(0.8)} = 0.36 \text{ km/h}$$

مسئله) جرم قطره آدنی 90g و طول نخ آن 9cm باشد. آن را به اندازه 60° از راستای قائم منحرف کنیم. در نقطه سکون رها کنیم. در هنگام عبور از وضعیت قائم با قطره آدنی به جرم 200g که ساکن است برخورد می‌کند. (مقادیر هدا برای آن قطره اول وجود ندارد.)

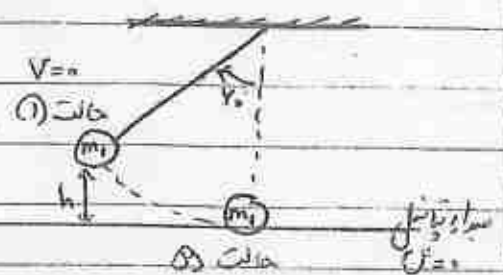
الف) به کمک قانون تبادلی انرژی حرکت طول اول را در وضعیت قائم محاسبه کنید.
ب) اگر بعد از برخورد طول آونگ ساکن شود، طول دوم با چه سرعتی به حرکت خود ادامه می دهد؟ (برخورد غیر الاستیک)

$$\begin{cases} m_1 = 100 \text{ gr} = 0.1 \text{ kg} \\ l = 90 \text{ cm} = 0.9 \text{ m} \\ m_2 = 200 \text{ gr} = 0.2 \text{ kg} \end{cases}$$



ان) برای حل قسمت الف) معادلات حرکت را بنویسید و با استفاده از آن، حالت الف) قبل از برخورد را نشان دهید. عبارت تانژنسی را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ K_1 + U_1 &= K_2 + U_2 \\ m_1 g h &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ v_1^2 &= 2gh \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \\ h &= l(1 - \cos \alpha) \rightarrow v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

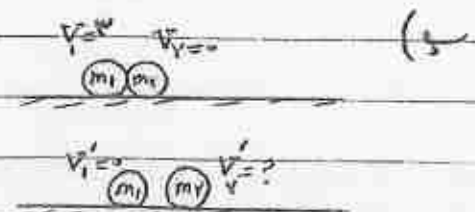


$$v_1 = \sqrt{2(10)(0.9)(1 - \cos 60^\circ)} = \sqrt{9} = 3 \text{ m/s}$$

برخورد غیر الاستیک و حفظ اندازه حرکت بقا دارد.
قبل $P = P'$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$0.1(3) = 0.2 v_2' \rightarrow v_2' = \frac{0.3}{0.2} = 1.5 \text{ m/s}$$



مثال) گلوله ای فولادی به جرم $m_1 = 1.5 \text{ kg}$ به سمت چپ با سرعت 18 m/s به سمت چپ در حال حرکت است. وقتی که به سمت راست حرکت می کند، به یک گلوله فولادی به جرم $m_2 = 2.5 \text{ kg}$ که ساکن است برخورد می کند. با استفاده از قانون تبادلی انرژی حرکت طول اول را در وضعیت قائم محاسبه کنید. (برخورد غیر الاستیک)

الف) به کمک قانون تبادلی انرژی حرکت طول اول را در وضعیت قائم محاسبه کنید. (برخورد غیر الاستیک)

ب) اگر بعد از برخورد طول آونگ ساکن شود، طول دوم با چه سرعتی به حرکت خود ادامه می دهد؟ (برخورد غیر الاستیک)

۴۶

الف) مقدار سرعت هر کدام پس از برخورد را بیابید

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$+ m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$$

$$v_1'^2 = 2gh \rightarrow v_1' = \sqrt{2gh}$$

$$v_1' = \sqrt{2(10)(1.5)} = 5.5 \text{ m/s} \checkmark$$

حالت اول

$$v = 0$$

$$m_1$$

L

الف)

مقدار پتانسیل

$$U = 0$$

$$v_1 = ?$$

حالت دوم

$$\begin{cases} m_1 = 1.5 \text{ kg} \\ m_2 = 2.5 \text{ kg} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

قبل از برخورد

$$v_1 = 5$$

$$v_2 = 0$$

ب)

$$v_1' = ?$$

$$v_2' = ?$$

بعد از برخورد

برخورد کامل الاست پس از آن هر دو با هم حرکت می کنند

$$k = k' \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\frac{1}{2} (1.5)(14) = \frac{1}{2} (1.5) v_1'^2 + \frac{1}{2} (2.5) v_2'^2$$

$$14 = v_1'^2 + 1.67 v_2'^2 \quad (1)$$

$$P = P' \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

پس از برخورد

$$1.5 \times 5 = 1.5 v_1' + 2.5 v_2'$$

$$5 = v_1' + 1.67 v_2' \rightarrow v_1' = 5 - 1.67 v_2' \quad (2)$$

با استفاده از (1) و (2)

$$14 = v_1'^2 + 1.67 v_2'^2$$

$$14 = (5 - 1.67 v_2')^2 + 1.67 v_2'^2$$

$$14 = 25 - 16.67 v_2' + 2.78 v_2'^2 + 1.67 v_2'^2$$

$$0 = 11.11 v_2'^2 - 16.67 v_2' + 11$$

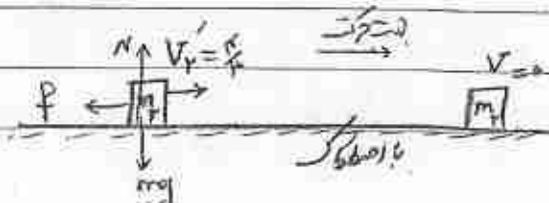
$$0 = v_2' (11.11 v_2' - 16.67) \rightarrow 11.11 v_2' - 16.67 = 0$$

$$v_2' = \frac{16.67}{11.11} = 1.5 \text{ m/s} \checkmark$$

$$v_1' = 5 - 1.67 v_2' = 2.5 \text{ m/s}$$

$$v_1' = 5 - \frac{1.5}{1.5} = 3.5 \text{ m/s} \checkmark$$

$$d = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$



ج)

اصطلاح داریم: μ از ضریب اصطکاک است

که بر حسب اینست: $E_p - E_1 = W_f$

$$(k_2 + U_2) - (k_1 + U_1) = W_f$$

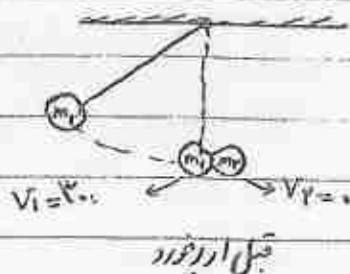
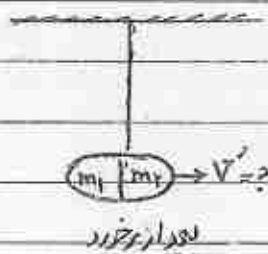
$$-\frac{1}{2} m v_2'^2 = f d \cos \alpha \xrightarrow{f = \mu N} -\frac{1}{2} m v_2'^2 = \mu N d \cos \alpha$$

$$N = m_2 g \rightarrow -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu (m_2 g) (1.5)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{14}{9} \right) = + \mu \rightarrow \frac{1}{9} = \mu \rightarrow \mu = \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \checkmark$$

مثال) آذنی به جرم 1.0 kg که از انتهای نخ آویزان است با سرعت 3.00 m/s با طول رشته 2.0 m که ساکن است برخورد می کند. گلوله را آذنی به تنه می زند.

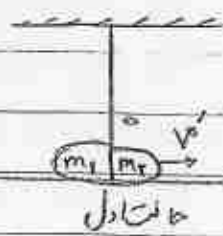
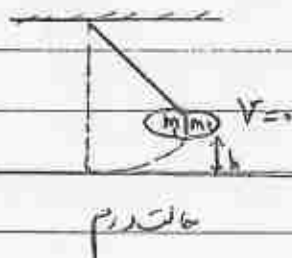
الف) سرعت گلوله را آذنی بعد از برخورد محاسب کنید.
ب) اگر از محاسبات به اصرار نکرده و گلوله را آذنی جدا می کند و آنرا می بیند (از تابلو از آن جدا می شود)



نقشه اندازه حرکت نیار: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$

$$1.0 (3.00) = (1.0 + 1.2) v'$$

$$v' = \frac{3.00}{1.0 + 1.2} = 2.99 \text{ m/s}$$



مبدأ انرژی: $U = 0$

ضاد است هر دو با هم

تساوی انرژی: $E_1 = E_2$

$$k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = (m_1 + m_2) g h \rightarrow v' = \sqrt{2gh}$$

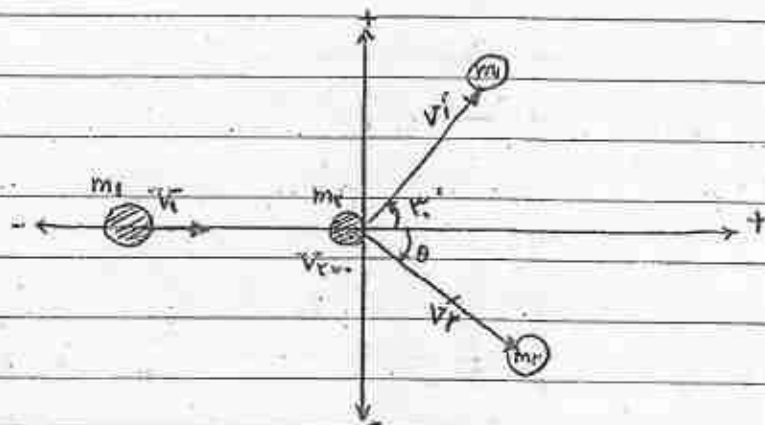
$$h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{(2.99)^2}{2 \times 9.8}$$

(تساوی انرژی را می توانیم بنویسیم)

مثال) یک موکول گاز با جرم m با سرعت $۳۰۰ m/s$ به طور عمود بر سطح یک جسم استوار قرار می‌گیرد. پس از برخورد موکول در جهت زاویه ۳۰° نسبت به راستای حرکت اولیه اش حرکت می‌کند و موکول دوم در جهت زاویه θ منحرف می‌شود.

زاویه انحراف موکول دوم را محاسبه کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m \\ v_1 = 300 \\ v_1' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 = m \\ v_2 = 0 \\ v_2' \end{array} \right.$$



برخورد کاملاً کشش آن است. پس هم اندازه حرکت، تبادله دارد و هم انرژی جنبشی.

تبادله انرژی جنبشی: $k = k' \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

$$90000 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (1)$$

چون حرکت دو بعدی است پس تبادله اندازه حرکت را برای دو بعد می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m(300) = m v_1' \cos 30^\circ + m v_2' \cos \theta \\ 0 = m v_1' \sin 30^\circ - m v_2' \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 300 = v_1' \cos 30^\circ + v_2' \cos \theta \\ 0 = v_1' \sin 30^\circ - v_2' \sin \theta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{دو طرف رابطه را به توان ۲ می‌زنیم} \\ \text{و با هم جمع می‌کنیم} \end{array}$$

$$90000 = (v_1' \cos 30^\circ + v_2' \cos \theta)^2 + (v_1' \sin 30^\circ - v_2' \sin \theta)^2$$

$$90000 = v_1'^2 \cos^2 30^\circ + v_2'^2 \cos^2 \theta + 2 v_1' v_2' \cos 30^\circ \cos \theta + v_1'^2 \sin^2 30^\circ + v_2'^2 \sin^2 \theta - 2 v_1' v_2' \sin 30^\circ \sin \theta$$

$$\rightarrow 90000 = v_1'^2 (\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ) + v_2'^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2 v_1' v_2' (\cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta)$$

$$\rightarrow 90000 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2 v_1' v_2' \cos(\theta + 30^\circ) \quad \text{از رابطه ۱} \quad \begin{array}{l} v_1'^2 + v_2'^2 = 90000 \\ v_1' + v_2' = 300 \end{array}$$

$$9 \text{ m/s} = 9 \text{ m/s} + 2V_1 V_2 \cos(0+30^\circ)$$

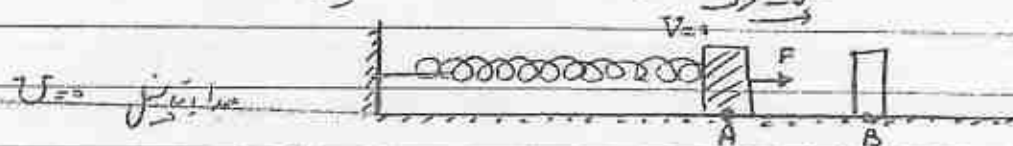
$$0 = 2V_1 V_2 \cos(0+30^\circ) \xrightarrow{V_1 \neq 0, V_2 \neq 0} \cos(0+30^\circ) = 0$$

$$\cos 90^\circ = 0 \rightarrow \cos(0+30^\circ) = \cos 90^\circ$$

$$0+30^\circ = 90^\circ \rightarrow \theta = 60^\circ \checkmark$$

مثال: جسمی به جرم 1.5 kg به نری به طول 4 m و ثابت فن $k = 60 \text{ N/m}$ متصل است و در نقطه A روی سطح افقی بدون اصطکاک ساکن قرار دارد. نیروی ثابت دافعی و عمود بر سطح $F = 20 \text{ N}$ بر جسم وارد می شود و آن را به طرف راست حرکت می دهد.

الف) به کمک تئوری انرژی مکانیکی جسم را تا کسب کند وقتی جسم به نقطه B به سمت راست حرکت می کند. (ب) به کمک تئوری انرژی مکانیکی دیگر زمانی که جسم به نقطه B در سه انرژی های F قطع شود، جسم به طرف چپ حرکت کند و این صورت حد اکثر تا چه فاصله ای از دیوار پیش خواهد رفت؟



الف) نیروی F عمود بر سطح است پس انرژی مکانیکی تبادله دارد ← کار یابنده $E_2 - E_1 = W$

$$E_B - E_A = W_F$$

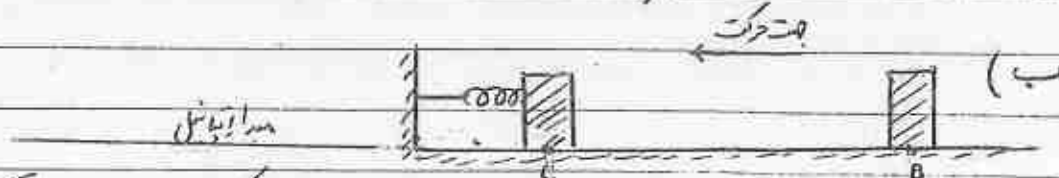
$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = Fd \cos \alpha$$

$$\left(\frac{1}{2} m V_B^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = F (1.25) \cos 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} (1.5) V_B^2 + \frac{1}{2} (60) (1.25)^2 = 0 \quad (1)$$

$$(1.5) V_B^2 + 1.25 = 0$$

$$1.5 V_B^2 = 1.25 \rightarrow V_B^2 = \frac{1.25}{1.5} = 0.83 \rightarrow V_B = \sqrt{0.83} \text{ m/s}$$



وقتی نیروی F قطع شود، دیگر نیروی یابنده نداریم پس انرژی مکانیکی تبادله دارد. فرض کنیم حالت اول، حالت 1B شود و حالت دوم حالت C باشد. حرکت چرخشی فن در نقطه C زمانی است که جسم در نقطه C متوقف می شود پس $K_C = 0$

$$E_B = E_C \rightarrow k_B + U_B = k_C + U_C$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} k x_C^2$$

$$0.5(1.5) + 4.0(0.15)^2 = 4.0 x_C^2$$

$$0.75 + 0.9 = 4.0 x_C^2$$

$$1.65 = 4.0 x_C^2 \rightarrow x_C = \sqrt{\frac{1.65}{4.0}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5 \text{ m}$$

$$0.5 - 0.15 = 0.35 \text{ m}$$

فاصله جسم تا دیوار:

مثال: سطح افقی شکل قطعه چوبی به جرم 980 g به نری با ثابت $k = 400 \text{ N/m}$ متصل است. گلوله ای به جرم 2.0 kg با سرعت 4.0 m/s از فاصله ای نزدیک به قطعه چوب شلیک می شود و در داخل آن قرار می گیرد. (قطعه چوب را می توانیم اینگونه فرض کنیم که در لحظه برخورد چوب به نری، چوب به نری می چسبد.) اگر سطح بدون اصطکاک باشد،

$$\begin{cases} m_1 = 980 \text{ kg} \\ v_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = 2.0 \text{ kg} \\ v_2 = 4.0 \end{cases}$$

(الف) برخورد را بررسی کنید. این نوع برخورد

حرکت تبادله دارد.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$400(0.15) = (980 + 2.0) v'$$

$$\boxed{v' = 0.06 \text{ m/s}}$$

سطح بدون اصطکاک است پس انرژی مکانیکی تبادله دارد.

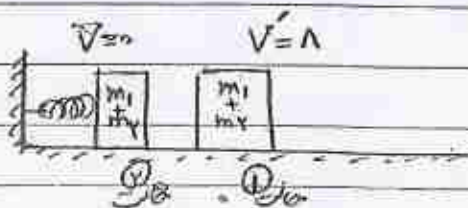
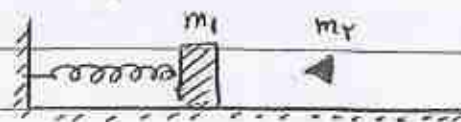
$$E_i = E_f$$

$$k_i + U_i = k_f + U_f$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$(980 + 2.0)(0.06)^2 = 400 x^2$$

$$0.36 = 400 x^2 \rightarrow x^2 = \frac{0.36}{400} \rightarrow x = \frac{0.6}{20} = 0.03 \text{ m}$$



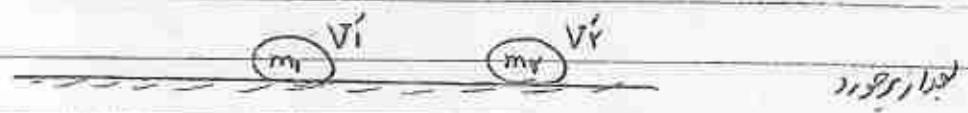
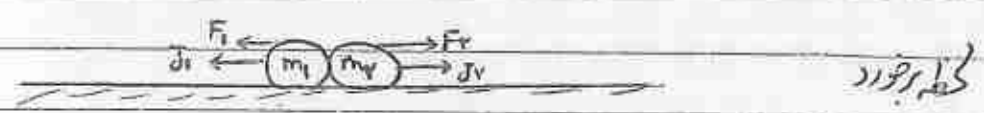
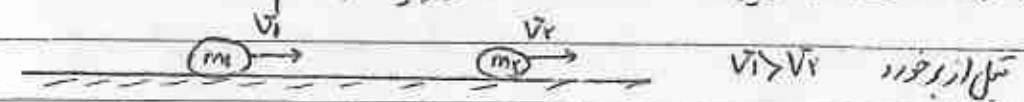
نکته: اگر دو یا چند جسم با هم برخورد کنند و بخواهیم هیچ نیروی خارجی بر سیستم اعمال نشود و فقط خود دو جسم بر هم نیرو وارد کنند، در این صورت اندازه حرکت کل سیستم همواره ثابت است (بدون قیل از برخورد چه بعد از برخورد).

چنان طور که در شکل می بینیم در مدت زمان کوتاه برخورد ($\Delta t \ll$) نیروهای بزرگی دو جسم بر هم وارد می کنند. در اثر نیرویی که بر هم وارد می کنند اندازه حرکت ایشان تغییر می کند.
(اگر برخورد در لحظه t_i شروع و در لحظه t_f ختم می یابد $\Delta t = t_f - t_i \ll$)

$$F = \frac{dp}{dt} \rightarrow dp = F dt \rightarrow \int_{p_i}^{p_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} F dt \rightarrow p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} F dt$$

$$\Delta p = \int_{t_i}^{t_f} F dt = \vec{J}$$

با انگرال $\int F dt = \vec{J}$ ضربه داریم. ضربه عبارت است از تغییرات اندازه حرکت در اثر نیرویی که بر جسم وارد شده است.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ضربه وارد بر ادی ۱} \quad \vec{J}_1 = m_1 (v_1' - v_1) \\ \text{ضربه وارد بر ادی ۲} \quad \vec{J}_2 = m_2 (v_2' - v_2) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{طبق قانون عمل و کس العمل}} \vec{J}_1 = -\vec{J}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نیروی وارد بر ادی ۱} \quad \vec{F}_1 = \frac{m_1 (v_1' - v_1)}{\Delta t} \\ \text{نیروی وارد بر ادی ۲} \quad \vec{F}_2 = \frac{m_2 (v_2' - v_2)}{\Delta t} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{طبق قانون عمل و کس العمل}} \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

مثال: یک توله ای به جرم m_1 با سرعت u به سمت راست می آید و یک توله دیگر به جرم m_2 با سرعت v به سمت چپ می آید. آن دو توله با هم برخورد می کنند و با هم برخورد کرده اگر بعد از برخورد ادی ۱ ساکن شود (برخورد غیر الاستیک) الف) سرعت توله دوم بعد از برخورد ب) مقدار حرکای تولید شده

- ج) ضربه وارد بر ادی ۱ و ادی ۲ در مدت زمان Δt چقدر است؟
د) نیروی وارد بر ادی ۱ و ادی ۲ در مدت زمان Δt چقدر است؟



$$\begin{cases} m_1 = 1.2 \text{ kg} \\ v_1 = 1.0 \\ v_1' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 = 1.4 \text{ kg} \\ v_2 = -2 \\ v_2' = ? \end{cases}$$

(الف)

برخورد غیر الاستیک است پس فقط انداز حرکت برابر دارد.

$$\begin{aligned} \text{قبل } P - P' &\rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ 1.2(1.0) + (1.4)(-2) &= 1.2 v_2' \\ 1.2 - 2.8 &= 1.2 v_2' \rightarrow v_2' = \frac{-1.6}{1.2} = -1.33 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\text{در برخورد غیر الاستیک: } Q = K - K' = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) \quad (\text{ب})$$

$$Q = \left(\frac{1}{2} \right) (1.2) (1.0)^2 + \left(\frac{1}{2} \right) (1.4) (-2)^2 - \frac{1}{2} (1.2) (0)^2 - \frac{1}{2} (1.4) (1.33)^2$$

$$Q = 1.0 + 2.8 - 1.18 = 2.62 \text{ J} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \text{ضربه دار برادری} & \vec{J}_1 = m_1(v_1' - v_1) = 1.2(0 - 1.0) = -1.2 \text{ N}\cdot\text{s} \\ \text{طریقۀ اول عمل دیگران العمل} & \vec{J}_2 = +1.2 \text{ N}\cdot\text{s} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} \text{ضربه دار برادری} & \vec{F}_1 = \frac{m_1(v_1' - v_1)}{\Delta t} = \frac{1.2(0 - 1.0)}{0.1} = -12 \text{ N} \\ \text{طریقۀ ثانوی عمل دیگران العمل} & \vec{F}_2 = 12 \text{ N} \end{cases}$$