

آتماتی متاهی (Dfa) :

یک ماشین متاهی معین یک 5 تائی به صورت زیر است $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ که در آن

Q : مجموعه متاهی از وضعیت ها (State ها)

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$: تابع تغییر حالت به شکل

q_0 : عضوی از Q است و State شروع می باشد.

F : زیر مجموعه ای از Q است $(F \subseteq Q)$ که مجموعه وضعیت های نهائی می باشد.

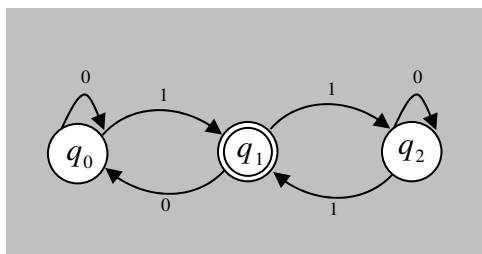
مثال: Dfa زبان زیر را رسم کنید. $M = \{(q_0, q_1, q_2), \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$

δ : $\delta(q_0, 0) = q_0$ $\delta(q_0, 1) = q_1$

$\delta(q_1, 0) = q_0$ $\delta(q_1, 1) = q_2$

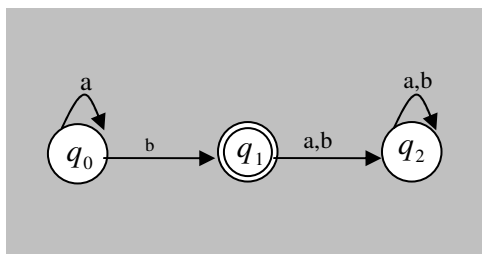
$\delta(q_2, 0) = q_2$ $\delta(q_2, 1) = q_1$

حل:



آتماتا ها به عنوان پذیرنده یک زبان بکار می روند، هر گاه از State شروع، شروع کرده و با طی یال ها به وضعیت نهائی برسیم دنباله ی بر چسب ها روی یال های طی شده رشته ای را تشکیل می دهد که توسط DFA پذیرفته می شود، به مجموعه تمام رشته هائی که توسط DFA پذیرفته می شود زبان DFA گفته می شود. مثلا رشته های 0111, 0101, 0001, 01 توسط DFA بالائی پذیرفته می شوند.

مثال: DFA زیر چه زبانی می پذیرد.



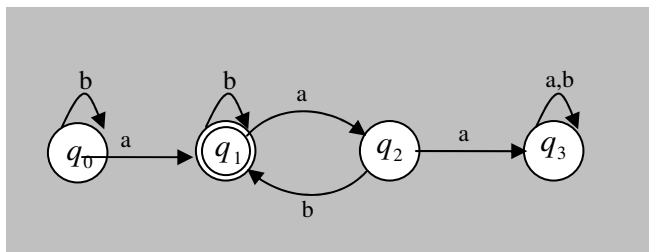
حل: a^*b

□ هر زبانی که بتوان آن را با یک DFA نشان داد، یک زبان منظم است

□ به ازای هر زبان منظم حداقل یک DFA موجود است و بالعکس، پس نتیجه می گیریم به ازای هر DFA یک عبارت منظم وجود دارد.

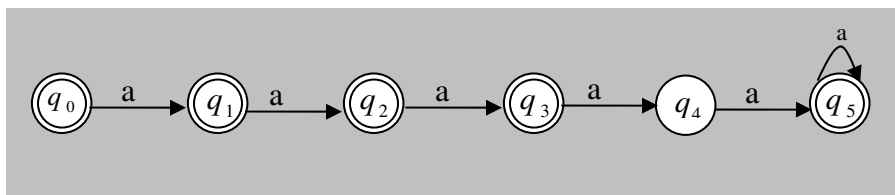
□ به ازای هر زبان یا نمی توان DFA پیدا کرد و یا می توان بی نهایت DFA رسم کرد که آن زبان را بپذیرد.

مثال: DFA زیر چه زبانی را می پذیرد.



حل: $b^*ab^*(ab)^*b^*$

مثال: نشان دهید که زبان $L = \{a^n : n \geq 0, n \neq 4\}$ منظم است.



خاصیت های DFA ،

1. در DFA از یک وضعیت با یک حرف نمی توان به بیش از یک State رفت.
2. در DFA به ازای تمامی حرف الفباء از یک وضعیت باید خروجی داشته باشیم.
3. برپسب یک یال نمی تواند λ باشد.

آتاماتای متناهی نامعین (NFA):

تعریف ما در مورد NFA در اکثر موارد شبیه DFA است با این تفاوت که تعریف تابع δ برای NFA به صورت زیر است.

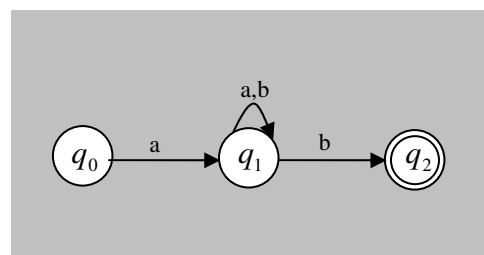
$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \lambda) \rightarrow 2^Q$$

از این تعریف چند نکته متوجه می شویم.

- 1- برپسب ها در NFA می توانند شامل λ هم باشند
- 2- خروجی تابع در NFA عضوی از 2^Q است، می دانیم هر عضوی از 2^Q یک مجموعه است پس طرف دوم تابع ما می تواند بیش از یکی باشد یعنی تابع ما می تواند از یک State با مشاهده یک حرف به بیش از یک State برود.
- 3- چون 2^Q شامل مجموعه تهی نیز هست، طرف دوم تابع می تواند تهی هم باشد، یعنی اینکه ما در یک State با یک یا چند از حروف الفباء ، هیچ خروجی نداریم

تفصیه:

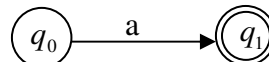
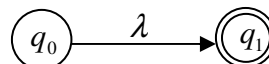
- به ازای هر NFA که یک زبان را می پذیرد، می توان یک DFA معادل آن و هم قدرت با آن ساخت که همان زبان را بپذیرد .
 - به ازای هر زبان منظم می توان NFA رسم کرد و هر NFA تولید کننده یک زبان منظم است.
- مثال: زبان $a(a|b)^*b$ را با NFA رسم کنید.



معادل است با (q_0)

پذیرنده یک حرف از Σ

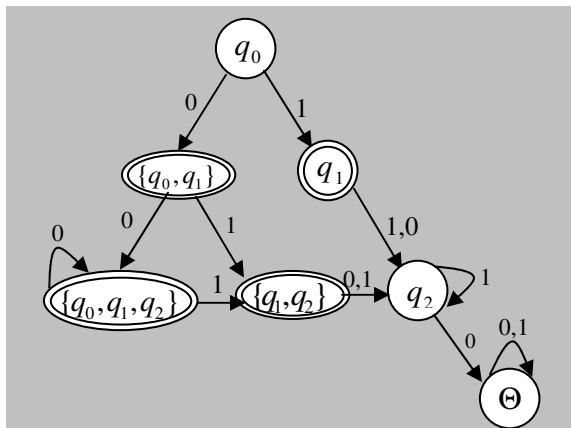
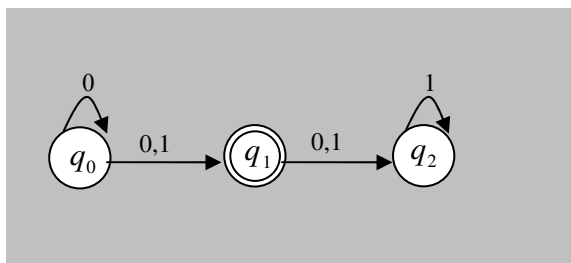
پذیرنده زبان تهی



تبدیل NFA به DFA:

از وضعیت شروع آغاز کرده و به ازای تمامی حروف الفباء، فروبی NFA را مشخص می‌کنیم. با توجه به تعریف NFA ممکن است از یک وضعیت فروبی نداشته باشیم، در این حالت یک وضعیت تهی ایجاد کرده و وضعیت فروبی مورد نظر را به طرف آن هدایت می‌کنیم. ممکن است از یک وضعیت با یکی از حروف الفباء، بیش از یک فروبی داشته باشیم، در این حالت وضعیت جدیدی ایجاد می‌کنیم که شامل State های ممکن باشد. اگر در NFA هر یک از آن State ها وضعیت پایانی بود، وضعیت جدید که در DFA داریم، آن را نیز پایانی در نظر می‌گیریم.

مثال: NDFA زیر را به DFA تبدیل کنید.

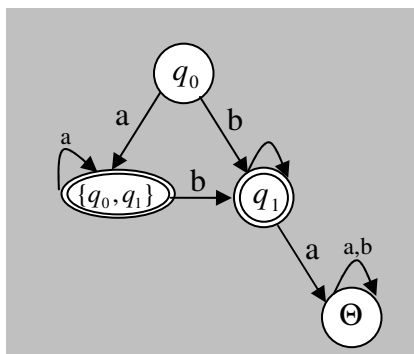


حل:

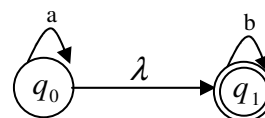
مثال:

برای a^*b^* یک DFA بسازید.

حل: ابتدا یک NDFA می‌سازیم و سپس تبدیل می‌کنیم



جواب:



لم تزریق: این لم براساس اصل لانه کبوتر اثبات شده است و می تواند به صراحت بیان کند که زبانی غیر منظم است ولی در مورد منظم بودن زبان نمی تواند نظری ارائه دهد.

□ می فوایم ثابت کنیم زبان L غیر منظم است، مثل یک بازی دو طرفه عمل می کنیم، اولین حرکت از طرف حریف، حرکت بعدی از طرف ما و الی ... در نهایت اگر توانستیم روالی را پیش بگیریم که به ازای هر حرکتان از طرف حریف به پیروزی برسیم. ثابت کردیم زبان غیر منظم است، در غیر این صورت نمی توان در مورد منظم یا غیر منظم بودن زبان صحبت کرد.

روال لم تزریق برای اثبات غیر منظم بودن زبان L

- 1- حریف یک عدد دلفوا از اعداد طبیعی مانند m را انتخاب می کند
- 2- ما رشته ای دلفوا از L انتخاب می کنیم که طولش بزرگتر مساوی m است
- 3- حریف رشته انتفابی ما را به سه قسمت x, y, z تقسیم می کند به شرطی که $|y| \geq 1, |x.y| \leq m$
- 4- اگر بتوانیم ثابت کنیم به ازای i دلفوا در بازه $0 \leq i < \infty$ در اعداد مسایی، رشته $xy^i z$ در زبان مورد نظر نیست، ثابت شده که زبان غیر منظم است.

مثال. ثابت کند زبان $l = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ غیر منظم است.

حل: با فرض $m > 0$ و $w = a^m b^m$ داریم $|a^m b^m| \geq m$

حال با در نظر گرفتن $w = xyz$ با شرایط مسئله داریم $x = a^{m-1}, y = a, z = b^m$

$$\forall i > 0, xy^i z = a^{m-1} a^i b^m \xrightarrow{\forall i=2} a^{m-1} a^2 b^m = a^{m+1} b^m \notin l$$

مثال. ثابت کنید زبان $l = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) < n_b(w)\}$ غیر منظم است.

حل: با فرض $m > 0$ و $w = a^m b^{m+1}$ داریم $|a^m b^{m+1}| \geq m$

حال با در نظر گرفتن $w = xyz$ با شرایط مسئله داریم $x = a^{m-1}, y = a, z = b^{m+1}$

$$\forall i > 0, xy^i z = a^{m-1} a^i b^{m+1} \xrightarrow{\forall i=2} a^{m-1} a^2 b^{m+1} = a^{m+1} b^{m+1} \notin l$$

ثابت کنید زبان $\{a^n \mid n \text{ عدد اول است}\}$ $L = \{a^n \mid n \text{ عدد اول است}\}$ غیر منظم است.

نکته: عدد اول عددی است که به صورت حاصل ضرب دو عدد نمی توان نوشت

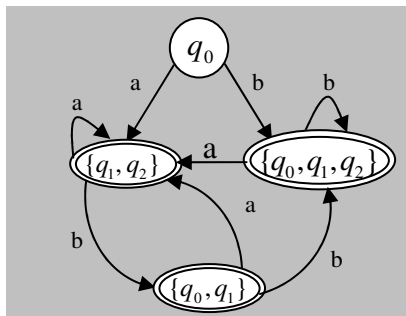
فرض شود $p \geq m$ است و یک عدد اول

$$|x.y.z| = p \Rightarrow |x.y^{p+1}.z| = |x.y.z| + |y^p| = p + p \mid y \mid = P(1+y) \rightarrow$$

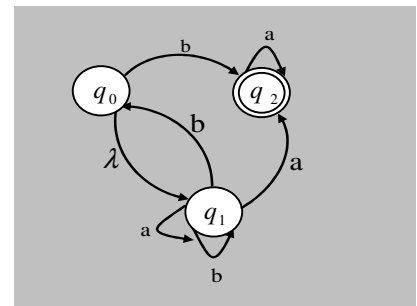
چون نتیجه ضرب دو عدد شده پس عدد اول نیست

تمرینات اضافی:

DFA-1 معادل ماشین زیر را رسم کنید.



جواب:



2- ثابت کنید زبان $w = \{a^n b^m c^k \mid n < m < k\}$ منظم نیست.

$$|a^m b^{m+1} c^{m+2}| \geq m$$

حل: با فرض $m > 0$ و $w = a^m b^{m+1} c^{m+2}$ داریم

$$x = a^{m-1}, y = a, z = b^{m+1} c^{m+2}$$

حال با در نظر گرفتن $w = xyz$ با شرایط مسئله داریم

$$\forall i > 0, xy^i z = a^{m-1} a^i b^{m+1} c^{m+2} \xrightarrow{\forall i=3} a^{m-1} a^3 b^{m+1} c^{m+2} = a^{m+2} b^{m+1} c^{m+2} \notin L$$

3- ثابت کنید زبان $w = \{a^n b^m c^k \mid n + m = k\}$ منظم نیست

$$|a^m b^{m+1} c^{2m+1}| \geq m$$

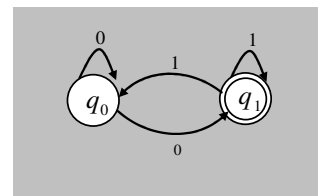
حل: با فرض $m > 0$ و $w = a^m b^{m+1} c^{2m+1}$ داریم

$$x = a^{m-1}, y = a, z = b^{m+1} c^{2m+1}$$

حال با در نظر گرفتن $w = xyz$ با شرایط مسئله داریم

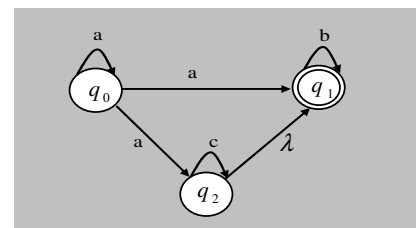
$$\forall i > 0, xy^i z = a^{m-1} a^i b^{m+1} c^{2m+1} \xrightarrow{\forall i=2} a^{m-1} a^2 b^{m+1} c^{2m+1} = a^{m+1} b^{m+1} c^{2m+1} \notin L$$

4- ماشین متناهی زیر چه زبانی را می پذیرد.



جواب: $0^+ 1^* (10^* 01^*)^*$

5- $NFA - \lambda$ زیر را به DFA تبدیل کنید.



جواب:

