

به نام خدا

ساختمان های گستته

کاربرد در علوم کامپیووتر

مدرس : لیلا جوکار

۱۳۹۹ بهار

گزاره

۲-۱. گزاره (proposition)

تعریف. گزاره یک جمله‌ی خبری است که درست است یا نادرست، اگرچه درست یا نادرست بودن آن برما معلوم نباشد. ارزش راستی یک گزاره را در حالت درست بودن با T یا ۱ و در صورت نادرست بودن با F یا ۰ علامت‌گذاری می‌کنند.

مثال ۱.

کدام یک از عبارات زیر یک گزاره است.

الف. ۴ عدد اول است

ب. $1+101=110$

پ. درب را ببند

ت. ایکاش من یک پزشک بودم

گزاره

۱-۳. گزاره نما (propositional function)

در عبارت " $x = y + 3$ "، x و y اسامی اعداد معینی نیستند بلکه اسامی مبهمی برای هر یک از اعداد مورد بحث هستند. در این عبارت هر کدام از x و y را یک متغیر گوئیم. عبارت " $x = y + 3$ " به سبب نامشخص بودن x و y نه درست است و نه نادرست، و مادامی که مقداری به متغیرها نسبت داده نشده است تعیین ارزش درستی آن ممکن نیست. چنین عبارتی را یک گزاره نما گویند. معمولاً گزاره نماها را بر حسب متغیرهای فردی آنها با نمادهای (x, y) ، $P(x, y)$ و نظایر آن نشان می‌دهند. در گزاره‌نمای $P(x, y)$ اگر متغیرهای x و y را به اسامی اعداد معین مانند a و b تبدیل کنیم گزاره‌ی $P(a, b)$ حاصل می‌شود. چنین گزاره‌ای را یک نمونه‌ی آن گزاره‌نمای گویند. همچنین اگر راست باشد گوئیم a و b در $P(x, y)$ صدق می‌کنند.

مثال ۲.

اگر گزاره نمای " $x+y=z$ " را با $P(x, y, z)$ نشان دهیم آنگاه $P(1, 2, 3)$ یعنی " $1+2=3$ " یک گزاره‌ی درست است پس ۱ و ۲ و ۳ در $P(x, y, z)$ صدق می‌کنند، ولی $P(0, 0, 1)$ یعنی " $0+0=1$ " یک گزاره‌ی نادرست است یعنی ۰ و ۰ و ۱ در $P(x, y, z)$ صدق نمی‌کنند.

ساختمان گسته

۴-۱. گزاره‌ی ساده و گزاره‌ی مرکب

گزاره‌ی ساده گزاره‌ای است که به ساده‌ترین صورت ممکن بیان شده و قابل تجزیه به گزاره‌های ساده‌تر نیست. به گزاره‌های ساده گزاره‌های اولیه (primitive statements) یا گزاره‌های تجزیه ناپذیر (atomic statements) نیز گفته می‌شود. در واقع گزاره‌های ساده هستند که با حروف (compound statements) یا $P_1, P_2, P_1, \dots, P, Q, R, \dots$ و نظایر آن نام‌گذاری می‌شوند. گزاره‌ی مرکب از ترکیب گزاره‌های ساده بوسیله‌ی لفظهای خاصی که آن‌ها را رابطه‌ای گزاره‌ای یا لفظهای پیوند دهنده (logical operators) یا عملگرهای منطقی (connectives) گویند بدست می‌آیند.

ساختمان گستته

۱-۶. رابطه‌های گزاره‌ای (Connectives)

همان‌طوری که گفته شد گزاره‌های مرکب گزاره‌های ساخته شده از گزاره‌های ساده بوسیله لفظ‌هایی نحت عنوان رابطه‌های گزاره‌ای یا لفظ‌های پیوند دهنده یا عملگرهای منطقی به شرح زیر است.

- » لفظ "چنین نیست که" موسوم به ناقض که آنرا بانماد "¬" نشان می‌دهند.
- » لفظ "و" (AND) موسوم به عاطف که آنرا بانماد "∧" نشان می‌دهند.
- » لفظ "یا" (inclusive OR) موسوم به فاصل که آنرا بانماد "∨" نشان می‌دهند.

ساختمان گستته

۱-۷. نقیض (negation)

اگر P گزاره‌ی مشخصی باشد گزاره‌ی "چنین نیست که P " را که با علامت $\neg P$ نشان می‌دهند نقیض P گویند. واضح است که اگر P درست باشد $\neg P$ نادرست و اگر P نادرست باشد $\neg P$ درست خواهد بود. جدول ارزش برای نقیض به صورت زیراست.

| P | $\neg P$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |

۱-۸. ترکیب عطفی (conjunction)

اگر P و Q دو گزاره باشند، گزاره‌ی " P و Q " را که با علامت $P \wedge Q$ نشان میدهند ترکیب عطفی دو گزاره P و Q گویند. ترکیب عطفی دو گزاره فقط و فقط وقتی درست است که هر دو مؤلفه‌اش درست باشد.

ساختمان گستته

۱-۹. ترکیب فصلی (disjunction)

اگر P و Q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب "P یا Q" را که با علامت $P \vee Q$ نشان می‌دهند ترکیب فصلی P با Q گویند. ترکیب فصلی دو گزاره فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو مؤلفه‌اش نادرست باشد.

ساختمان گستته

۱-۱۱. توکیب شرطی (Conditional)

اگر P و Q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب "اگر P آنگاه Q " را ترکیب شرطی P با Q گویند، $P \rightarrow Q$ (antecedent) نشان می‌دهند. در گزاره‌ی شرطی $P \rightarrow Q$ ، P را مقدم (consequence) گزاره شرطی گویند. یک گزاره شرطی فقط وقتی نادرست است که مقدمش درست و تالی اش نادرست باشد. ترکیب شرطی $P \rightarrow Q$ را به مهای مختلفی به شرح زیر بیان می‌کنند:



ساختمان گستته

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow$

۱-۱۲. ترکیب دوشرطی (biconditional)

ترکیب عطفی گزاره‌ی $P \rightarrow Q$ را با عکس آن یعنی $P \rightarrow Q$ ترکیب دوشرطی P با Q گویند و با نماد $P \leftrightarrow Q$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$ به صورتهای مختلف مانند "اگر P آنگاه Q و بالعکس" ، "شرط لازم و کافی برای آن که P آن است که Q " ، " P iff Q " را بخوانید " P if and only if Q " (يا " P فقط و فقط اگر Q " خواند. $P \leftrightarrow Q$ فقط و فقط وقتی درست است که P و Q هم ارزش باشند یعنی هردو درست یا هردو نادرست باشند.

مثال ۶

ساختمان گستته

ارزش درستی کلیه عملگرهای منطقی ذکر شده در بالا در یک جدول درستی (truth table) به شرح زیر ارائه شده است.

| P | Q | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | F | T | T | F |
| F | F | F | F | T | T |

ساختمان گستته

۱-۵. هم ارزی (Equivalence)

دو گزاره P و Q را هم ارز یا معادل گویند و با نماد $P \Leftrightarrow Q$ نشان می‌دهند اگر موقعی که P درست باشد Q هم درست باشد و موقعی که P نادرست باشد Q هم نادرست باشد و بالعکس. مثلاً "اگر گزاره‌ی "علی متولد سال ۱۳۲۴ است" را با P و گزاره‌ی "علی در سال ۱۳۸۴ اشصت ساله خواهد بود" را با Q نشان دهیم بدیهی است که $P \Leftrightarrow Q$. (توضیح کاملتر هم ارزی در صفحات بعد)

ساختمان گستته

۱-۱۵. فرمولهای خوش ساخت (well - formed formula)

یک فرمول گزاره‌ای رشته‌ای است از متغیرها، پرانتزها و رابطه‌ای گزاره‌ای. منظور از یک فرمول، یک فرمول خوش ساخت است که با استفاده‌ی محدود از قوانین زیر بدست آمده باشد:

۱. یک متغیر گزاره‌ای مانند P و هریک از نمادهای ویژه T و F بتنهایی یک فرمول خوش ساخت است.
۲. اگر P یک فرمول خوش ساخت باشد، آنگاه $\neg P$ هم یک فرمول خوش ساخت است.
۳. اگر P و Q فرمولهای خوش ساخت باشند آنگاه $(P \rightarrow Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$ و $(P \leftrightarrow Q)$ نیز خوش ساخت هستند.

ساختمان گستته

مثال ۷

فرمولهای $(P \rightarrow (P \vee Q))$ و $\neg(P \vee Q)$ ، $((\neg P) \wedge Q)$ ، $((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge T))$ خوش ساخت هستند
ولی فرمول $\neg P \vee Q \rightarrow R$ خوش ساخت نیست زیرا دامنه‌های اعمال \neg و \vee و \rightarrow مشخص نیست اما
عبارت $(\neg P) \vee (Q \rightarrow R)$ خوش ساخت است. دامنه‌های اعمال را در یک فرمول در صورت لزوم
باید با پرانتز مشخص کرد تا از ورود عبارات بی معنی در بحث جلوگیری شود. هم چنین فرمول
 $(P \rightarrow Q) \rightarrow \vee Q$ خوش ساخت نیست (چرا؟).

ساختمان گستته

توجه: طبق فرار داد اگر فرمولی فاقد ہر انتز باشد در صورت وجود عملگر- در آن فرمول عملگر- به منغير پلا فاصله بعد از آن هربو ط می شود. مثلاً "منظور از $\neg P \wedge Q$ - یعنی $\neg(P \wedge Q)$ در غیر این صورت آن را به صورت $(P \wedge Q) \neg$ - نشان می دهیم.

ساختمان گستته

۱۶-۱. فرمولهای گزاره‌ای همیشه درست (tautologies) و همیشه نادرست (contradictions) فرمولهای گزاره‌ای ($P \vee \neg P$) و همچنین ($P \wedge \neg P$) را در نظر بگیرید. واضح است که فرمول اولی مستقل از گزاره‌ای که جانشین P می‌شود همیشه درست و فرمول دومی هم همیشه نادرست است.

تعریف: فرمول گزاره‌ای ($A(P_1, P_2, \dots, P_n)$) را همیشه درست (همیشه نادرست) گویند اگر ارزش درستی آن بازه 2^n حالت ارزش‌دهی متغیرهای سازای آن همواره درست (همواره نادرست) باشد.

ساختمان گستته

مثال ۸.

ثابت کنید فرمول $(P \rightarrow (P \vee Q))$ همیشه درست و فرمول $(P \wedge (\neg P \wedge Q))$ همیشه نادرست است

| P | Q | $\neg P$ | $\neg P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $(P \wedge (\neg P \wedge Q))$ | $(P \rightarrow (P \vee Q))$ |
|---|---|----------|-------------------|------------|--------------------------------|------------------------------|
| T | T | F | F | T | → F | → T |
| T | F | F | F | T | → F | → T |
| F | T | T | T | T | → F | → T |
| F | F | T | F | F | → F | → T |

همیشه نادرست

همیشه درست

ساختمان گستته

با استفاده از جدول ارزش نشان دهید که ارزش درستی گدام بگ از فرمول های مستقل از ارزش درستی مؤلفه های آنها است.

$$A(P, Q) = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$B(P, Q) = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

ساختمان گستته

| P | Q | $\neg P$ | $\neg Q$ | $P \rightarrow Q$ | $\neg P \wedge \neg Q$ | $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ | $A(P, Q)$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|------------------------|------------------------------|-----------|
| T | T | F | F | T | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T | F | F |

چون $A(P, Q)$ همیشه درست یا همیشه نادرست نیست پس ارزش درستی آن مستقل از ارزش درستی مؤلفه‌ها نیست.

حل ب. فرمول گزاره‌ای $B(P, Q) = (P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]$ همیشه درست است پس ارزش درستی آن ربطی به ارزش درستی P و Q ندارد. (تشکیل جدول بعهده دانشجو)

ساختمان گستته

۱-۱۷. فرمولهای هم ارز

تعریف: دو فرمول گزارهای $B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ و $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ را هم ارز یا معادل گویند و با نماد $A \Leftrightarrow B$ نشان می‌دهند اگر ارزش درستی آن‌ها در کلیه 2^n حالت ارزش دهی متغیرهای P_1, P_2, \dots, P_n باهم برابر باشند.

ساختمان گستته

توجه: می‌دانیم که گزاره‌ی مرکب $B \rightarrow A$ وقتی درست است که مؤلفه‌های آن همارش باشند یعنی A و B هردو درست یا هردو نادرست باشند. بنابراین از همارزی $A \leftrightarrow B$ نتیجه می‌گیریم که $B \rightarrow A$ یک گزاره‌ی همیشه درست است و بالعکس. توجه داشته باشید که علامت \leftrightarrow رابط گزاره‌ای نیست بلکه علامتی است در زبان مافوق و لذا $A \leftrightarrow B$ متعلق به زبان طبیعی بوده و به زبان صوری مربوط نیست.

ساختمان گستته

۱-۱۸. طرز تشخیص معادل بودن دو فرمول

- با توجه به موارد گفته شده در بالا می‌توان معادل بودن دو فرمول را به دو صورت زیر تشخیص داد.
- الف. تشکیل جدول ارزش درستی آن‌ها و مقایسه ارزش درستی در هر سطر.
- ب. اثبات اینکه ترکیب دوشرطی آنها همیشه درست است.

ساختمان گستته

اگر $A = \neg P \wedge \neg Q$ و $B = \neg [P \vee (\neg P \wedge Q)]$ با دو روش متفاوت بررسی کنید.
حل.

| P | Q | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \wedge Q$ | $P \vee (\neg P \wedge Q)$ | A | B | $B \leftrightarrow A$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|----------------------------|---|---|-----------------------|
| T | T | F | F | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | F | T | T | T |

ارزش درستی $A \leftrightarrow B$ در کلیه سطرها برابراست پس $A \leftrightarrow B$ است.

چون $A \leftrightarrow B$ همیشه درست است پس $B \leftrightarrow A$

ساختمان گستته

— چون $A \leftarrow D$ همیشه درست است پس $A \Leftrightarrow D$

— مثال ۱۱.

اگر $P \rightarrow Q$ دارای ارزش درستی F باشد، ارزش درستی فرمول گزاره‌ای $(\neg P) \vee (P \leftarrow Q)$ را بدست آورید.

$$P \leftarrow Q = F \text{ و } P \rightarrow Q = F \Rightarrow \begin{cases} P = T \Rightarrow \neg P = F \\ Q = F \end{cases} \text{ حل.}$$

$$(\neg P) \vee (P \leftarrow Q) = F \vee F = F \quad \text{درنتیجه}$$

ساختمان گستته

مثال ۱۲.

بدون استفاده از جدول ارزش نشان دهید که گزاره‌های $P \wedge \neg S$, $\neg R \vee S$, $Q \rightarrow R$, $P \leftrightarrow Q$ و $\neg S = T \Rightarrow S = F$ نمی‌توانند همگی و بطور هم زمان دارای ارزش T باشند.

حل. از $P \wedge \neg S = T$ نتیجه می‌گیریم $P = T$ و $\neg S = T$.

از $\neg R = T \Rightarrow R = F$ نتیجه می‌گیریم $S = F$ و $\neg R \vee S = T$.

از $R = F$ و $Q \rightarrow R = T$ نتیجه می‌گیریم $Q = F$. در صورت درست بودن هم‌زمان سه

فرمول اولی، P و Q دارای ارزش یکسان نیستند پس فرمول $P \leftrightarrow Q$ نمی‌تواند دارای ارزش T باشد.

ساختمان گستته