بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمات حساب دیفرانسیل چند متغیره

توابع چند متغیره، مشتقات جزئی و چند کاربرد آن

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۲۶ مهر ۱۴۰۱

عنوان مطالب:

۱. معرفی توابع دو متغیره و سه متغیره ،مشتق جزیی مرتبهٔ اول، مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر
۲. دیفرانسیل کل، معادله صفحهٔ مماس بررویه، بردارگرادیان، مشتق جهتی
۳. مشتق مرکب(دستور زنجیره ای)، مشتق ضمنی، نقاط اکسترمم نسبی
۴. مسایل نمونه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱ بخش اول

توابع دو وسه متغیره ، مشتق جزیی مرتبهٔ اول، مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر

تعریف

معرفی توابع چند متغیره

تابعی که دامنهٔ آن مجموعه ای از بردارها و بُردش زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی می باشد؛ یک تابع چند متغیره نامیده می شود. این توابع را با حروف f ، g ، h و... نمایش می دهیم. نمایش کلی آن ها به صورت زیر است.

$$\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ (x_۱, x_۲, \cdots, x_n) \longmapsto \ f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) \end{cases}$$

هرگاه $n = ۱$، تابع را یک متغیره ؛ هرگاه $n = ۲$ ، تابع را دو متغیره و هرگاه $n = ۳$ ، تابع را سه متغیره می نامیم.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

توابع دو متغیره و سه متغیره

نمایش ضابطه ای تابع دو متغیره به صورت زیر است.

$$\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ \quad z = f(x,y) \end{cases}$$

هم چنین ضابطهٔ یک تابع سه متغیره به شکل زیر می باشد.

$$\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ \quad w = f(x,y,z) \end{cases}$$

مثال: تابع $z = f(x,y) = x^{۲} + y^{۳} - xy + \sqrt{x+y}$ نمونه ای از ضابطهٔ تابع دو متغیره می باشد که در آن مقادیر $f(۰,۱)$ و $f(-۱,۲)$ به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$f(۰,۱) = ۰^{۲} + ۱^{۳} - ۰(۱) + \sqrt{۰+۱} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$f(-۱,۲) = (-۱)^{۲} + ۲^{۳} - (-۱)۲ + \sqrt{-۱+۲} = ۱ + ۸ + ۲ + ۱ = ۱۲$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

نقطهٔ $(\circ, -1)$ در دامنهٔ تعریف f قرار ندارد زیرا حاصل $f(\circ, -1)$ تعریف نشده است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $w = f(x, y, z) = e^x + 3y^2 - \ln z$ ، سه متغیره می باشد که مقدار $f(\circ, 2, e)$ به صورت زیر به دست می آید.

$$f(\circ, 2, e) = e^{\circ} + 3(2)^2 - \ln e = 1 + 12 - 1 = 12$$

نقطهٔ $(\circ, 1, 2)$ در دامنهٔ تعریف f قرار ندارد زیرا حاصل $f(2, 1, \circ)$ تعریف نشده است.

تعریف

دامنهٔ تعریف توابع چند متغیره

دامنهٔ تعریف تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ زیر مجموعه ای از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ می باشد که درآن f تعریف شده باشد. به عبارت دیگر

$$D_f = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{تابع } f(x،y) \text{ تعریف شده باشد.}\ \}$$

و دامنهٔ تابع سه متغیره $w = f(x, y, z)$ زیر مجموعه ای از فضای $\mathbb{R}^3$ است که در آن f تعریف شده باشد. به عبارت دیگر

$$D_f = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{تابع } f(x،y،z) \text{ تعریف شده باشد.}\ \}$$

لازم به ذکر است که یک عبارت کسری به ازای ریشه های مخرج آن تعریف نشده است. عبارت رادیکالی با فرجهٔ زوج وقتی تعریف می شود که عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و اگر فرجهٔ رادیکال فرد و زیر رادیکال چندجمله ای باشد، در همهٔ نقاط حقیقی تعریف می شود. عبارت های $log_a\ U$ و $\ln U$ که در آن $a > ۰$ و $a \neq ۱$ می باشد، وقتی تعریف شده اند که $U > ۰$ باشد زیرا لگاریتم اعداد منفی و صفر تعریف نمی شود.

مثال

دامنهٔ تعریف توابع زیر را به دست آورید.

$$(۱)\ z = x^۲ + \frac{۱}{y} \qquad (۲)\ z = \sqrt{x} + \sqrt[۳]{y} \qquad (۳)\ z = \frac{۲y+۵}{y^۲ - x^۲} \qquad (۴)\ w = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

حل: (۱) عبارت $x^۲ + \frac{۱}{y}$ در همه نقاط صفحه بجز مقداری که مخرج کسر را صفر می کند تعریف شده است. در این جا، $y = ۰$ ریشهٔ مخرج کسر می باشد. بنابراین

$$D_f = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^۲\ \mid\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \ y \neq ۰\ \}$$

(۲) در عبارت $\sqrt{x} + \sqrt[۳]{y}$ ، $\sqrt{x}$ وقتی تعریف می شود که $x \geq ۰$ باشد و عبارت $\sqrt[۳]{y}$ در همه جا تعریف می شود. لذا

$$D_f = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^۲\ \mid\ x \geq ۰\ \ ,\ \ y \in \mathbb{R}\ \}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

(۳) دامنهٔ تابع $\frac{2y+5}{y^2-x^2}$ همهٔ نقاط صفحه بجز ریشه های مخرج کسر می باشد. از صفر قرار دادن مخرج کسر یعنی $y^-x^2 = 0$ داریم: $y^2 = x^2$ یا $y = \pm x$. بنابراین دامنهٔ تابع تمام نقاط صفحه، بجز نقاطی که روی نیمساز ربع های مختصات قرار دارند، می باشد.

(۴) دامنهٔ تابع $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ناحیه ای در فضا است که در آن $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ و $z \geq 0$ می باشد. این ناحیه را **یک هشتم اول** می نامیم.

تعریف

مشتق جزیی مرتبهٔ اول :

اگر در تابع چند متغیره بر حسب یک متغیر مشتق بگیریم و متغیرهای دیگر را ثابت فرض کنیم مشتق جزیی به دست آمده است. برای تابع دو متغیره $Z = f(x,y)$ ، هرگاه برحسب x مشتق بگیریم و متغیر y را ثابت فرض کنیم، مشتق جزیی مرتبهٔ اول حاصل شده است که با نماد Z_x یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ نمایش می دهیم. به همین نحو Z_y یا $\frac{\partial f}{\partial y}$ تعریف می شود. برای تابع سه متغیره $W = f(x,y,z)$ ، هرگاه برحسب یک متغیر مشتق بگیریم و دو متغیر دیگر را ثابت فرض کنیم مشتقات جزیی مرتبهٔ اول به دست می آیند که با نماد زیر بیان می شوند.

$$W_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad W_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad W_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

تذکر

چندفرمول مهم ازمشتق توابع یک متغیره به شرح زیر، یادآوری می شود.

$$(k)' = ۰ \quad , \quad (a\ x)' = a \quad , \quad (a\ x^n)' = na\ x^{n-۱}$$

$$(U.V)' = U'.V + V'.U \quad , \quad (\frac{U}{V})' = \frac{U'.V - V'.U}{V^۲} \quad , \quad (U^m)' = m\ U'.U^{m-۱}$$

$$(\sqrt{U})' = \frac{U'}{۲\sqrt{U}} \quad , \quad (\sqrt[n]{U})' = \frac{U'}{n\sqrt[n]{U^{n-۱}}} \quad , \quad (\ln U)' = \frac{U'}{U}$$

$$(e^U)' = U'e^U \quad , \quad (a^U)' = U'.a^U \ln a \quad , \quad (\sin\ U)' = U'.\cos\ U$$

$$(\cos\ U)' = -U'.\sin\ U \quad , \quad (\tan\ U)' = U'.(۱ + \tan^۲ U) \quad , \quad (\arctan\ U)' = \frac{U'}{۱ + U^۲}$$

ملاحظه

روش مشتق گیری جزئی

تابع $W = a\ x^n \pm b\ y^m \pm c'z^k$ را درنظر می گیریم. در این صورت

$$W_x = na\ x^{n-1} \quad , \quad W_y = mb\ y^{m-1} \quad , \quad W_z = kc\ z^{k-1}$$

و هرگاه $U = a\ x^n y^m z^k$، در این صورت

$$U_x = na\ x^{n-1} y^m z^k \quad , \quad U_y = ma\ x^n y^{m-1} z^k \quad , \quad U_z = ka\ x^n y^m z^{k-1}$$

مثال

مشتقات جزیی مرتبهٔ اول توابع زیر را محاسبه کنید.

(۱) $Z = 2x^3 - 4y^2 + 5x^2y^3 - 3x + y - 3$

(۲) $W = x^{-2} + y^{-1} - z^4 + 2xy^2z^3 - y^3z$

(۳) $Z = \ln(x^4 - y^3) + \sqrt{xy^2 + y}$

(۴) $W = e^{x^2 - y + z^4} + \sin(x^2y^3z^4)$

(۵) $Z = (x^2 + y^3)^2$

(۶) $W = \arctan(x^2 - y + z)$

(۷) $Z = \cos(x - y^2) + 4^{x^3y^5}$

(۸) $Z = \sqrt[3]{x^2 - y^3}$

حل:

(۱)

$$Z_x = 6x^2 + 10xy^3 - 3 \quad , \quad Z_y = -8y + 15x^2y^2 + 1$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

(۲)

$$W_x = -۲x^{-۳} + ۲y^۲z^۳ \quad , \quad W_y = -y^{-۲} + ۴xyz^۳ - ۳y^۲z \quad , \quad W_z = ۴z^۳ + ۶xy^۲z^۲ - y^۳$$

(۳)

$$Z_x = \frac{۴x^۳}{x^۴ - y^۳} + \frac{y^۲}{۲\sqrt{xy^۲ + y}} \quad , \quad Z_y = \frac{-۳y^۲}{x^۴ - y^۳} + \frac{۲xy + ۱}{۲\sqrt{xy^۲ + y}}$$

(۴)

$$W_x = ۲xe^{x^۲ - y + z^۴} + ۲xy^۳z^۴ \cos(x^۲y^۳z^۴) \quad , \quad W_y = -e^{x^۲ - y + z^۴} + ۳x^۲y^۲z^۴ \cos(x^۲y^۳z^۴) \quad ,$$

$$W_z = ۴z^۳e^{x^۲ - y + z^۴} + ۴x^۲y^۳z^۳ \cos(x^۲y^۳z^۴)$$

(۵)

$$Z_x = ۲(۲x)(x^۲ + y^۳) \quad , \quad Z_y = ۲(۳y^۲)(x^۲ + y^۳)$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

(۶)

$$W_x = \frac{۲x}{۱+(x^۲-y+z)^۲} \quad , \quad W_y = \frac{-۱}{۱+(x^۲-y+z)^۲} \quad , \quad W_z = \frac{۱}{۱+(x^۲-y+z)^۲}$$

(۷)

$$Z_x = -\sin(x-y^۲)+(۳x^۲y^۵)۴^{x^۳y^۵}\ln ۴ \quad , \quad Z_y = ۲y\sin(x-y^۲)+(۵x^۳y^۴)۴^{x^۳y^۵}\ln ۴$$

(۸)

$$Z_x = \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-y^۳)^۲}} \quad , \quad Z_y = \frac{-۳y^۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-y^۳)^۲}}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تعریف

مشتقات جزیی مرتبهٔ دوم:

اگرازمشتقات جزیی مرتبهٔ اول مشتق جزیی بگیریم، مشتقات جزیی مرتبهٔ دوم به دست می آید. برای تابع دومتغیره $Z=f(x,y)$ که دارای مشتقات جزیی مرتبهٔ اول $Z_x=\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ و $Z_y=\dfrac{\partial Z}{\partial y}$ می باشد، $Z_{xx}=\dfrac{\partial^۲ Z}{\partial x^۲}$ یعنی از Z_x برحسب x مشتق بگیریم و $Z_{yy}=\dfrac{\partial^۲ Z}{\partial y^۲}$ یعنی از Z_y برحسب y مشتق بگیریم. اگر از Z_x برحسب y مشتق جزیی بگیریم، نماد $Z_{xy}=\dfrac{\partial^۲ Z}{\partial y\partial x}$ بکارمی رود و همچنین نماد $Z_{yx}=\dfrac{\partial^۲ Z}{\partial x\partial y}$ یعنی از Z_y برحسب x مشتق جزیی بگیریم.

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

مشتقات جزیی مرتبهٔ دوم توابع زیر را محاسبه کنید.

(۱) $Z = x^۳ - y^۳ + ۳xy$

(۲) $Z = \ln(۲x + ۳y)$

(۳) $Z = \sin(xy)$

(۴) $Z = e^{x-y}$

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

حل:

(۱)
$$Z_x = ۳x^۲ + ۳y \quad \rightsquigarrow \quad Z_{xx} = ۶x \quad , \quad Z_{xy} = ۳$$
$$Z_y = -۳y^۲ + ۳x \quad \rightsquigarrow \quad Z_{yy} = -۶y \quad , \quad Z_{yx} = ۳$$

(۲)
$$Z_x = \frac{۲}{۲x + ۳y} \quad \rightsquigarrow \quad Z_{xx} = \frac{-۲(۲)}{(۲x+۳y)^۲} \quad , \quad Z_{xy} = \frac{-۳(۲)}{(۲x+۳y)^۲}$$
$$Z_y = \frac{۳}{۲x + ۳y} \quad \rightsquigarrow \quad Z_{yx} = \frac{-۲(۳)}{(۲x+۳y)^۲} \quad , \quad Z_{yy} = \frac{-۳(۳)}{(۲x+۳y)^۲}$$

(۳)
$$Z_x = y\ \cos(xy) \quad \rightsquigarrow \quad Z_{xx} = -y^۲\sin(xy) \quad , \quad Z_{xy} = \cos(xy) - yx\ \sin(xy)$$
$$Z_y = x\ \cos(xy) \quad \rightsquigarrow \quad Z_{yx} = \cos(xy) - yx\ \sin(xy) \quad , \quad Z_{yy} = -x^۲\sin(xy)$$

(۴)
$$Z_x = e^{x-y} \quad \rightsquigarrow \quad Z_{xx} = e^{x-y} \quad , \quad Z_{xy} = -e^{x-y}$$
$$Z_y = -e^{x-y} \quad \rightsquigarrow \quad Z_{yx} = -e^{x-y} \quad , \quad Z_{yy} = e^{x-y}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تعریف

مشتقات جزیی مراتب بالاتر:

هرگاه از مشتقات جزیی مراتب دوم ، مشتق جزیی بگیریم مشتق جزیی مرتبهٔ سوم به دست می آید. به همین ترتیب مشتق جزیی مرتبه n ام به دست می آید. برطبق قرارداد اگر $W = f(x, y, z)$ تابع سه متغیره باشد، دراین صورت منظور از W_{yxzx} یعنی از W چهار مرتبه مشتق می گیریم ابتدا برحسب y سپس برحسب x ،بارسوم برحسب z ودرنهایت برحسب x مشتق جزیی می گیریم و علاوه براین منظور از $\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial z \partial y}$ یعنی چهاربار به ترتیب برحسب y ، z و دو بار برحسب x مشتق جزیی می گیریم.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

مثال

فرض کنیم $W = x^۲y^۳z^۴$ ، در این صورت حاصل W_{xyzz} به صورت زیر محاسبه می شود

$$W_{x} = ۲xy^۳z^۴ \quad \Longrightarrow W_{xy} = ۶xy^۲z^۴ \quad \Longrightarrow W_{xyz} = ۲۴xy^۲z^۳$$

$$W_{xyzz} = ۷۲xy^۲z^۲$$

وهم چنین $\frac{\partial^۳ W}{\partial y^۲ \partial z}(-۱, ۲, ۱)$ معادل با $W_{zyy}(-۱, ۲, ۱)$ می باشد و

$$W_{z} = ۴x^۲y^۳z^۳ \quad \Longrightarrow W_{zy} = ۱۲x^۲y^۲z^۳ \quad \Longrightarrow W_{zyy} = ۲۴x^۲yz^۳$$

$$\Longrightarrow W_{zyy}(-۱, ۲, ۱) = ۲۴(-۱)^۲(۲)(۱)^۳ = ۴۸$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

مثال

(۱) فرض کنیم $W = Ln(x+y+z)$ ، ثابت کنید

$$x\frac{\partial W}{\partial x} + y\frac{\partial W}{\partial y} + z\frac{\partial W}{\partial z} = ۱$$

(۲) فرض کنیم $Z = Ln(x^۲ + y^۲)$ ، ثابت کنید.

$$Z_{xx} + Z_{yy} = ۰$$

(۳) فرض کنیم $Z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ ، ثابت کنید.

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = Z$$

(۴) فرض کنیم $Z = xe^y + ye^x$ ، ثابت کنید.

$$Z_{xx} + Z_{yy} = Z$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

حل:

(۱) ابتدا W_x ، W_y و W_z را محاسبه نموده در سمت چپ تساوی قرار می دهیم و سپس سمت راست را نتیجه می گیریم.

$$W_x = W_y = W_z = \frac{۱}{x+y+z} \quad \rightsquigarrow \quad x\frac{\partial W}{\partial x} + y\frac{\partial W}{\partial y} + z\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$= \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = ۱$$

(۲) ابتدا Z_{xx} و Z_{yy} را محاسبه نموده با جمع آنها تساوی ثابت می شود.

$$Z_x = \frac{۲x}{x^۲+y^۲} \quad \rightsquigarrow \quad Z_{xx} = \frac{۲(x^۲+y^۲)-(۲x)(۲x)}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{-۲x^۲+۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$Z_y = \frac{۲y}{x^۲+y^۲} \quad \rightsquigarrow \quad Z_{yy} = \frac{۲(x^۲+y^۲)-(۲y)(۲y)}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{۲x^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$Z_{xx}+Z_{yy} = \frac{-۲x^۲+۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} + \frac{۲x^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{-۲x^۲+۲y^۲+۲x^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = ۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

(۳) چون $Z_x = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+y^۲}}$ و $Z_y = \frac{۲y}{۲\sqrt{x^۲+y^۲}}$ ، لذا

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+y^۲}} + \frac{۲y^۲}{۲\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

$$= \frac{x^۲+y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}} = \sqrt{x^۲+y^۲} = Z$$

(۴) ابتدا Z_x و Z_y را به دست آورده و از آنجا Z_{xx} و Z_{yy} را می یابیم. می نویسیم:

$$Z_x = e^y + ye^x \quad \rightsquigarrow \quad Z_{xx} = ۰ + ye^x$$

$$Z_y = xe^y + e^x \quad \rightsquigarrow \quad Z_{yy} = xe^y + ۰$$

در نتیجه

$$Z_{xx} + Z_{yy} = ye^x + xe^y = Z$$

ملاحظه

اگردرتابع دومتغیره $Z=f(x,y)$ ، مشتقات Z_{xy} و Z_{yx} در یک نقطه موجود و پیوسته باشند، آنگاه در این نقطه تساوی زیر برقرار است.

$$Z_{xy}=Z_{yx}$$

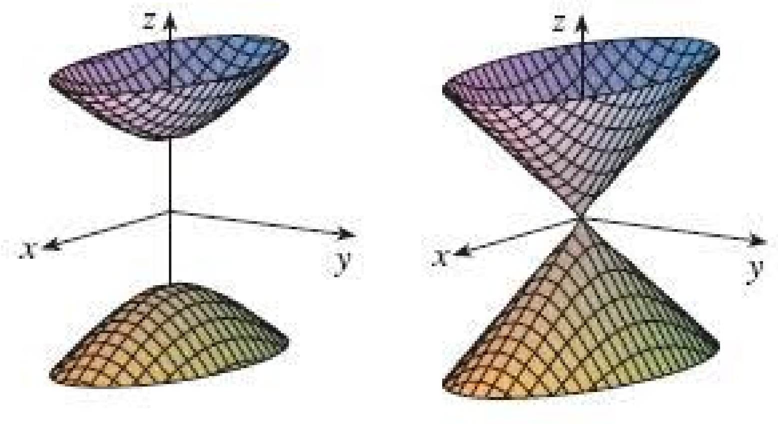
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

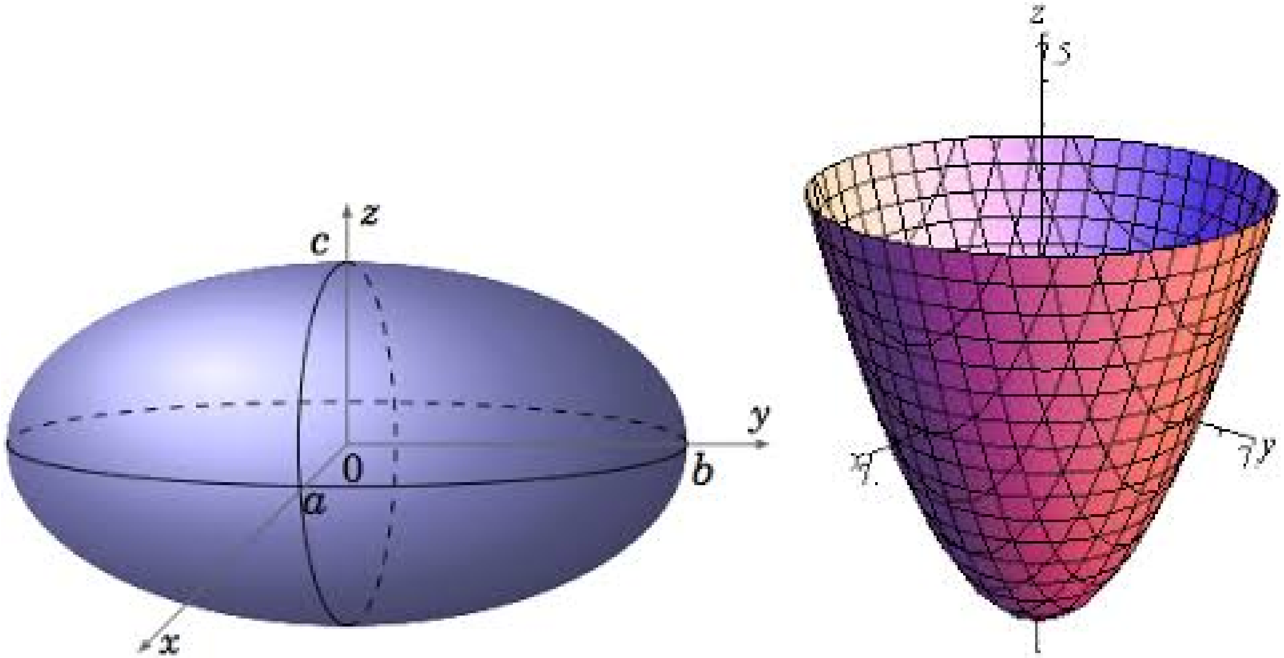
مسایل نمونه



شکل ۱ : سطوح درجهٔ دوم

درپایان این بخش شکل های چند رویهٔ درجهٔ دوم نمایش داده می شود.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

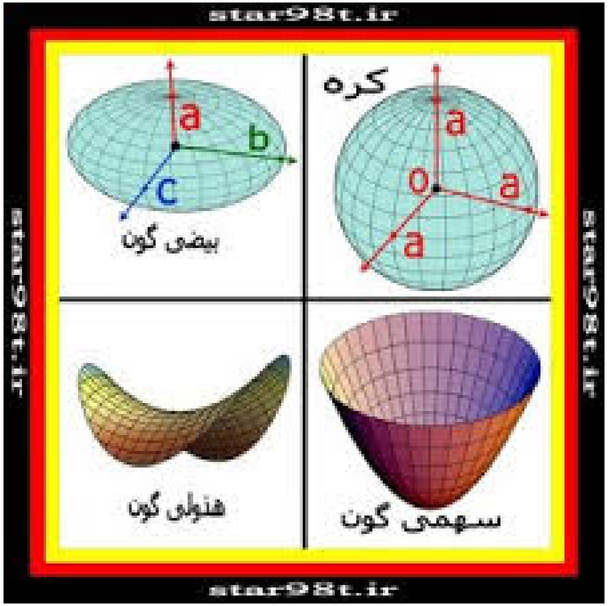


شکل ۲ : سطوح درجهٔ دوم

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۳: سطوح درجهٔ دوم

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

۲ بخش دوم

دیفرانسیل کل، معادله صفحه ی مماس بررویه، بردارگرادیان، مشتق جهتی

تعریف

دیفرانسیل کل:

دیفرانسیل کل توابع $Z = f(x, y)$ و $W = f(x, y, z)$ با نماد dZ و dW نمایش داده می شود وبه صورت زیر تعرف می شوند.

$$dW = W_x \; dx + W_y \; dy + W_z \; dz \qquad dZ = Z_x \; dx + Z_y \; dy$$

مثال

دیفرانسیل کل توابع زیر را بیابید.

(۱) $Z = e^{x^۲+y} + \sqrt{x-y}$ (۲) $W = \sqrt{x^۲y + ۳z}$

حل:

(۱)

$$dZ = Z_x \; dx + Z_y \; dy$$

$$= (۲x \; e^{x^۲+y} + \frac{۱}{۲\sqrt{x-y}}) \; dx + (e^{x^۲+y} - \frac{۱}{۲\sqrt{x-y}}) \; dy$$

(۲)

$$dW = W_x \; dx + W_y \; dy + W_z \; dz$$

$$= \frac{۲xy}{۲\sqrt{x^۲y+۳z}} \; dx + \frac{x^۲}{۲\sqrt{x^۲y+۳z}} \; dy + \frac{۳}{۲\sqrt{x^۲y+۳z}} \; dz$$

واحد رودهن
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

ملاحظه

معادله صفحهٔ مماس بر رویه $Z=f(x,y)$:

می خواهیم معادلهٔ صفحهٔ مماس بر $Z=f(x,y)$ در نقطهٔ $A(a,b)$ روی آن را به دست آوریم. ثابت می شود بردار عمود بر f در نقطهٔ A بردار $\overrightarrow{N}(a,b)$ می باشد که از دستور زیر به دست می آید.

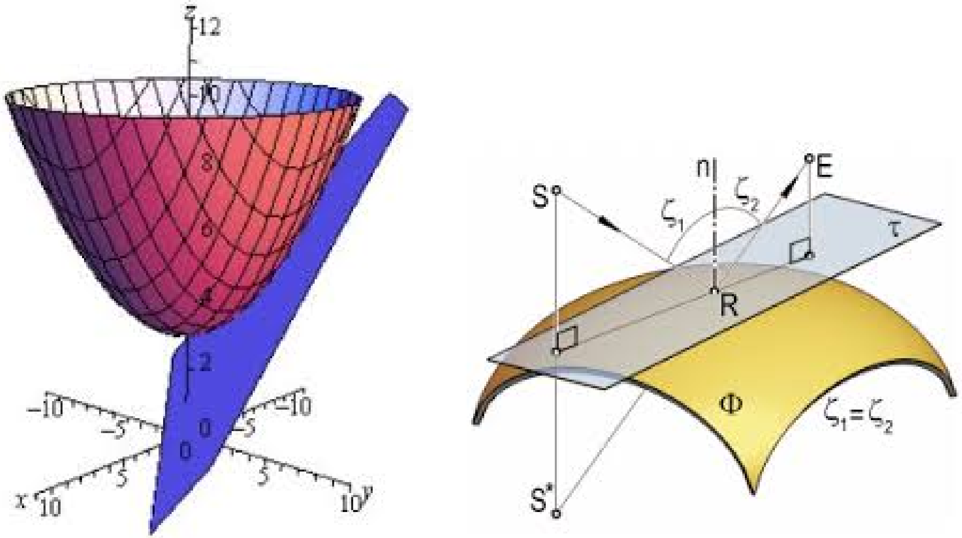
$$\overrightarrow{N}(a,b)=f_x(a,b)\ \overrightarrow{i}+f_y(a,b)\ \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$$

بنابراین معادلهٔ صفحهٔ مماس بر f درنقطهٔ $A(a,b,f(a,b))$ برابر است با:

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه



شکل ۴: صفحهٔ مماس بررویه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

معادلهٔ صفحهٔ مماس بر تابع $Z = e^{۲x-y}$ رادر نقطهٔ $(۱, ۲)$ روی آن را بنویسید.

حل:

بردار $\overrightarrow{N}$ در نقطهٔ $(۱, ۲)$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$f_x = ۲e^{۲x-y} \qquad \Longrightarrow f_x(۱, ۲) = ۲e^{۲(۱)-۲} = ۲e^{۰} = ۲$$

$$f_y = -e^{۲x-y} \qquad \Longrightarrow f_y(۱, ۲) = -e^{۲(۱)-۲} = -e^{۰} = -۱$$

$$\overrightarrow{N}(۱, ۲) = f_x(۱, ۲)\ \overrightarrow{i} + f_y(۱, ۲)\ \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = ۲\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

لذا معادلهٔ صفحهٔ مماس درنقطهٔ $(۱, ۲, f(۱, ۲))$ یا $(۱, ۲, ۱)$ برابر است با:

$$۲(x-۱) - (y-۲) - (z-۱) = ۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

تعریف

بردار گرادیان :

توابع دو متغیره وسه متغیره $f(x,y)$ و $f(x,y,z)$ را در نظرمی گیریم. هرگاه مشتقات جزیی مرتبهٔ اول موجود باشد، بردار گرادیان را بانماد ∇f نمایش می دهیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

ملاحظه

بردار گرادیان را می توان به عنوان بردار عمود بر منحنی تراز $f(x,y) = c$ یا $f(x,y,z) = c$ در نظرگرفت.

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

مثال

بردار یکه بیابید که بر دایره $x^2+y^2=2$ در نقطهٔ $(1,-1)$ عمود باشد.

حل: اگر $f(x,y)=x^2+y^2$ باشد، آنگاه این دایره سطح تراز $f(x,y)=2$ می باشد. گرادیان f در نقطهٔ $(1,-1)$ روی دایره، بر دایره عمود است. چون $f_x=2x$ و $f_y=2y$ می باشد، پس

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = 2x \vec{i} + 2y \vec{j}$$

پس

$$\nabla f = 2(1) \vec{i} + 2(-1) \vec{j} = 2 \vec{i} - 2 \vec{j}$$

این بردار عمود بر دایره $x^2+y^2=2$ در نقطهٔ $(1,-1)$ می باشد که سوی بردار آن برداریکه عمود است که به صورت زیر محاسبه می شود.

$$|\nabla f| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{e}_{\nabla f} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2 \vec{i} - 2 \vec{j})$$

ارائه دهنده:

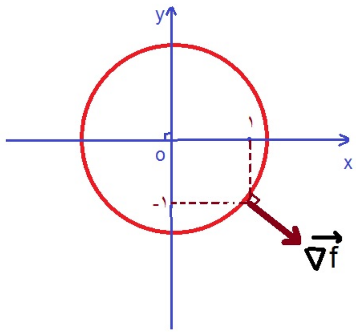
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه



شکل ۵: بردار گرادیان عمود بر دایره

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

معادلهٔ صفحهٔ مماس برسطح $f(x,y,z)=c$

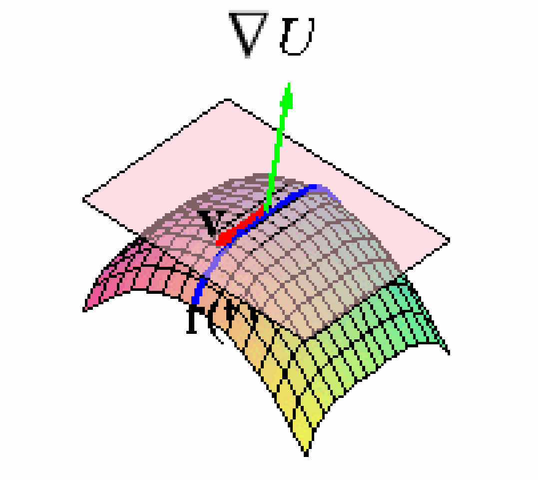
فرض کنیم $f(x,y,z)=c$ ، هرگاه f در نقطهٔ $A(a,b,c)$ روی f دارای مشتق ناصفر باشد، آنگاه ∇f برسطح $f(x,y,z)=c$ عمود است. بنابراین معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح مذکور در نقطهٔ A به صورت زیر به دست می آید که بردار عمود بر صفحهٔ مماس $\nabla f = f_x(a,b,c)\,\overrightarrow{i}+f_y(a,b,c)\,\overrightarrow{j}+f_z(a,b,c)\,\overrightarrow{k}$ می باشد.

$$\boldsymbol{f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۶: نمایش بردار گرادیان عمود برصفحهٔ مماس

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

معادلهٔ صفحهٔ مماس بر کره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ را درنقطهٔ $A(۱, -۱, ۰)$ بنویسید.

حل: چون $f(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ و $f(۱, -۱, ۰) = ۱^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ = ۲$ ، پس نقطهٔ A روی کره است. حال بردار گرادیان را در نقطهٔ A می یابیم. به وضوح $f_x = ۲x$ ، $f_y = ۲y$ و $f_z = ۲z$ ،پس

$$\nabla f = ۲x \overrightarrow{i} + ۲y \overrightarrow{j} + ۲z \overrightarrow{k} \quad \Longrightarrow \nabla f(۱, -۱, ۰) = ۲ \overrightarrow{i} - ۲ \overrightarrow{j} + ۰ \overrightarrow{k}$$

بنابراین معادلهٔ صفحهٔ مماس در نقطهٔ A به صورت زیر است.

$$۲(x - ۱) - ۲(y + ۱) + ۰(z - ۰) = ۰$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

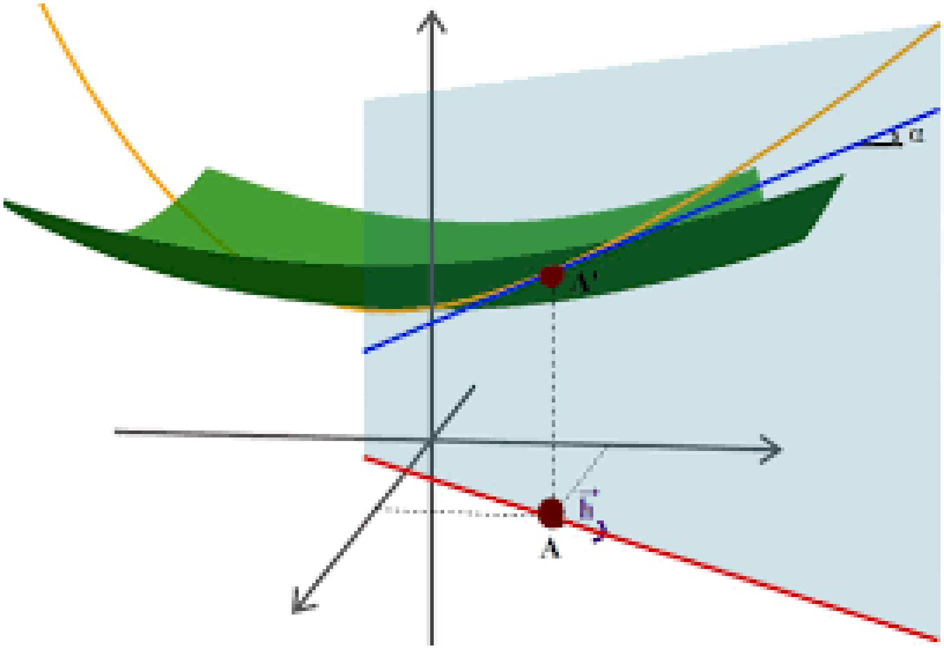
تعریف

مشتق جهتی :

فرض کنیم تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (a,b) دارای مشتقات جزیی مرتبهٔ اول باشد. اگر $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$ برداری یکه باشد،آنگاه مشتق جهتی تابع f درنقطهٔ (a,b) درجهت بردار $\overrightarrow{u}$ با نماد $D_uf(a,b)$ نمایش داده می شود وبرابر است با:

$$\boldsymbol{D_uf(a,b) = \nabla f \cdot \overrightarrow{u} = f_x(a,b)c + f_y(a,b)d}$$

لازم به ذکر است این دستور برای تابع سه متغیره نیز برقرار است. در واقع مشتق جهتی f در (a,b) شیب خط مماس بر منحنی فصل مشترک نمودار f با صفحهٔ عمود شامل خطی گذرنده از (a,b) در امتداد بردار یکه $\overrightarrow{u}$ در نقطهٔ $(a,b,f(a,b))$ را به دست می دهد.



شکل ۷: تعبیرهندسی مشتق جهتی

مثال

مشتق جهتی تابع $f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}$ در جهت بردار $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ را بیابید.

حل : چون بردار $\vec{u}$ یکه نیست، لذا سوی بردار آن را می یابیم.

$$\vec{u}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow |\vec{u}|=\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\vec{e_u}=\frac{۱}{|\vec{u}|}\vec{u}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

حال بردار گرادیان f را می یابیم.

$$\nabla f=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲x \\ ۲y \end{bmatrix} \Longrightarrow \nabla f(۱,۲)=\begin{bmatrix} ۲(۱) \\ ۲(۲) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

لذا

$$D_{\vec{u}}f(۱,۲)=\nabla f(۱,۲)\cdot\vec{e_u}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}-\frac{۴}{\sqrt{۲}}=\frac{-۲}{\sqrt{۲}}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^{۲}y-z^{۳}$ رادرجهت بردار $\vec{u}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\vec{i}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\vec{k}$ در نقطهٔ $(۱,-۱,۲)$ به دست آورید.

حل: بردار $\vec{u}$ یکه است ، زیرا

$$|\vec{u}|=\sqrt{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}+۰^{۲}+(-\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۱$$

حال بردارگرادیان f را می یابیم.

$$\nabla f=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲xy \\ x^{۲} \\ -۳z^{۲} \end{bmatrix} \Longrightarrow \nabla f(۱,-۱,۲)=\begin{bmatrix} ۲(۱)(-۱) \\ ۱^{۲} \\ -۳(۲)^{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ -۱۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین مشتق جهتی برابر است با:

$$D_uf(۱,-۱,۲)=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ -۱۲ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}=\frac{-۲}{\sqrt{۲}}+۰+\frac{۱۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}$$

۳ بخش سوم

مشتق مرکب(دستور زنجیره ای)، مشتق ضمنی، نقاط اکسترمم نسبی

تعریف

مشتق مرکب :

فرض کنیم توابع $Z = f(x,y)$ ، $x = g(t)$ و $y = h(t)$ مشتق پذیر باشند، در این صورت مشتق Z نسبت به t برطبق دستور زنجیره ای یا مشتق مرکب به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

ملاحظه

اگر توابع $W=f(x,y,z)$ ، $x=g(u,v)$ ، $y=h(u,v)$ و $z=k(u,v)$ مشتق پذیر باشند، آنگاه مشتقات W نسبت به دو متغیر u و v از دستورات زنجیره ای زیر محاسبه می شوند.

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial W}{\partial v}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

مثال

فرض کنیم $Z=۲x^۲-۳y^۳$ ، $x=\sqrt{t}$ و $y=t^۲+۱$، حاصل $\frac{\partial Z}{\partial t}$ را بیابید.

حل :

$$\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=(۴x-۰)(\frac{۱}{۲\sqrt{t}})+(۰-۹y^۲)(۲t)=(۴\sqrt{t})(\frac{۱}{۲\sqrt{t}})-۱۸(t^۲+۱)^۲t$$

مثال

فرض کنیم $W = x^۲ - y^۳ + z^۴$ ، $x = u^۲ - v^۳$ ، $y = e^{uv}$ و $z = \sin(u+v)$ ، حاصل $\frac{\partial W}{\partial u}$ و $\frac{\partial W}{\partial v}$ رابیابید.

حل:

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$= (۲x)(۲u) + (-۳y^۲)(ve^{uv}) + (۴z^۳)\cos(u+v)$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$= (۲x)(-۳v^۲) + (-۳y^۲)(ue^{uv}) + (۴z^۳)\cos(u+v)$$

مثال

فرض کنیم $Z=f(x^{۲}-y^{۲},y^{۲}-x^{۲})$ ، ثابت کنید.

$$y\,\frac{\partial Z}{\partial x}+x\,\frac{\partial Z}{\partial y}=۰$$

حل : ابتدا فرض کنیم $u(x,y)=x^{۲}-y^{۲}$ و $v(x,y)=y^{۲}-x^{۲}$ ، اکنون با استفاده از مشتق مرکب حاصل $\frac{\partial Z}{\partial x}$ و $\frac{\partial Z}{\partial y}$ را می یابیم که در آن $Z=f(u,v)$ می باشد.

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=Z_u\,(۲x)+Z_v\,(-۲x)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}=Z_u\,(-۲y)+Z_v\,(۲y)$$

بنابراین

$$y\,\frac{\partial Z}{\partial x}+x\,\frac{\partial Z}{\partial y}=y(۲xZ_u-۲xZ_v)+x(-۲yZ_u+۲yZ_v)$$

$$=۲yxZ_u-۲xyZ_v-۲xyZ_u+۲xyZ_v=۰$$

تعریف

مشتق تابع ضمنی

یک تابع ضمنی به صورت $f(x,y,z)=0$ یا $f(x,y)=0$ می باشدکه درآن یک متغیر به صورت صریح برحسب متغیرهای دیگردرتابع نوشته نشده است. دستور مشتق گیری یک متغیر برحسب متغیر دیگر مطابق دستورات زیر محاسبه می شود.

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{f_x}{f_z}\quad , \quad \frac{dy}{dz}=-\frac{f_z}{f_y}\quad , \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{f_y}{f_x}$$

مثال

در توابع ضمنی زیر مشتقات مربوطه را محاسبه کنید.

(۱) $\frac{dy}{dx}=?\qquad x^{۲}y^{۳}+e^{x^{۲}-y^{۳}}+۲x^{۳}-y^{۴}=۰$

حل:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{۲xy^{۳}+۲xe^{x^{۲}-y^{۳}}+۶x^{۲}}{۳x^{۲}y^{۲}-۳y^{۲}e^{x^{۲}-y^{۳}}-۴y^{۳}}$$

(۲) $\frac{dx}{dz}=?\quad \frac{dz}{dy}=?\qquad \sqrt{z+y}+\ln(x+y^{۲}-z)+\sin\,(x^{۲}-yz^{۳})=۰$

حل:

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{z+y}}+\frac{۲y}{x+y^{۲}-z}-z^{۳}\cos\,(x^{۲}-yz^{۳})}{\frac{۱}{۲\sqrt{z+y}}+\frac{-۱}{x+y^{۲}-z}-۳yz^{۲}\cos\,(x^{۲}-yz^{۳})}$$

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{f_z}{f_x}=-\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{z+y}}+\frac{-۱}{x+y^{۲}-z}-۳yz^{۲}\cos\,(x^{۲}-yz^{۳})}{\frac{۱}{x+y^{۲}-z}+۲x\,\cos\,(x^{۲}-yz^{۳})}$$

مثال

تابع ضمنی $F(x,y,z)=۰$ را در نظر می گیریم. ثابت کنید

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=-۱$$

حل :

چون $\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}$ ، $\frac{dy}{dz}=-\frac{F_z}{F_y}$ و $\frac{dz}{dx}=-\frac{F_x}{F_z}$ ؛ بنابر این

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=-\frac{F_y}{F_x}\cdot-\frac{F_z}{F_y}\cdot-\frac{F_x}{F_z}=(-۱)^{۳}=-۱$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

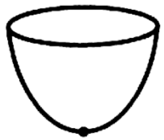
تعریف

نقاط بحرانی تابع دو متغیره

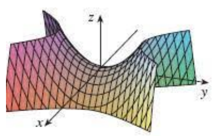
تابع چندجمله ای دو متغیره $Z = f(x,y)$ را در نظرمی گیریم. نقاط بحرانی در این تابع شامل نقاط ماکزیمم ومینیمم نسبی و زینی $(MinMax)$ است که از حل دو معادلۀ زیر، این نقاط به دست می آید.

$$Z_x = 0 \qquad Z_y = 0$$

شکل ۸: نقطهٔ ماکزیمم نسبی



شکل ۹: نقطهٔ مینیمم نسبی



شکل ۱۰: نقطهٔ زینی

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

تعیین نوع نقاط بحرانی

برای یافتن نوع نقاط بحرانی در تابع $Z = f(x,y)$ ، ابتدا Z_{xx} ، Z_{yy} و Z_{xy} را محاسبه می کنیم سپس D را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$D = Z_{xx}Z_{yy} - (Z_{xy})^۲$$

حال طول و عرض نقاط بحرانی را در D قرار می دهیم. دو حالت رخ می دهد.

(۱) اگر $D < ۰$ باشد، آنگاه نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ زینی است.

(۲) اگر $D > ۰$ باشد، آنگاه حاصل Z_{xx} یا Z_{yy} در نقطهٔ بحرانی می یابیم. در این صورت هرگاه $Z_{xx} > ۰$ ، نقطه Min نسبی است و اگر $Z_{xx} < ۰$ باشد، آنگاه نقطه ، Max نسبی است.

مثال

مثال : نقاط اکسترمم نسبی تابع $z = x^{۲} - y^{۲}$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا معادلات $z_x = ۰$ و $z_y = ۰$ را حل می کنیم. داریم:

$$z_x = ۲x - ۰ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad ۲x = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad x = ۰$$

$$z_y = ۰ - ۲y = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad -۲y = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad y = ۰$$

پس نقطهٔ $M(۰, ۰)$ نقطهٔ بحرانی است. برای نعیین نوع این نقطه، مشتقات جزئی z_{xx} ، z_{yy} و z_{xy} را می یابیم سپس D به دست می آوریم، می نویسیم:

$$z_{xx} = ۲ \quad , \quad z_{yy} = -۲ \quad , \quad z_{xy} = ۰$$

$$D = z_{xx}\, z_{yy} - (z_{xy})^{۲} = ۲(-۲) - ۰^{۲} = -۴ < ۰$$

در نتیجه نقطهٔ $M(۰, ۰)$ نقطهٔ زینی است

مثال

نقاط بحرانی (اکسترمم نسبی) و نوع آنها را برای تابع $Z = x^{۳} + y^{۳} - ۳xy$ تعیین کنید.

حل :

ابتدا Z_x و Z_y را به دست آورده سپس معادلات $Z_x = ۰$ و $Z_y = ۰$ را حل می کنیم . از آنجا نقاط بحرانی به دست می آید.

$$Z_x = ۳x^{۲} - ۳y = ۰ \quad \Longrightarrow ۳x^{۲} = ۳y \quad \Longrightarrow y = x^{۲}$$

$$Z_y = ۳y^{۲} - ۳x = ۰ \quad \Longrightarrow ۳(\underbrace{x^{۲}}_{y})^{۲} - ۳x = ۰$$

$$۳x^{۴} - ۳x = ۰ \quad \Longrightarrow ۳x(x^{۳} - ۱) = ۰$$

$$۳x = ۰ \quad , \quad x^{۳} - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \quad , \quad x = ۱$$

مثال

از $x = ۰$ چون $y = x^۲$ ، پس $y = ۰^۲ = ۰$ ، لذا $M_۱(۰, ۰)$ نقطهٔ بحرانی است.
از $x = ۱$ چون $y = x^۲$ ، پس $y = ۱^۲ = ۱$ ، لذا $M_۲(۱, ۱)$ نقطهٔ بحرانی است.
حال نوع این نقاط را تعیین می کنیم. برای این منظور مشتقات جزیی مرتبهٔ دوم را محاسبه می کنیم.

$$Z_{xx} = ۶x \qquad Z_{yy} = ۶y \qquad Z_{xy} = -۳$$

بنابراین

$$D = Z_{xx}Z_{yy} - (Z_{xy})^۲ = (۶x)(۶y) - (-۳)^۲ = ۳۶xy - ۹$$

برای نقطهٔ $M_۱$ ، $x = ۰$ و $y = ۰$ است پس $D = ۳۶(۰)(۰) - ۹ = -۹ < ۰$ ، لذا $M_۱$ نقطهٔ زینی است.
برای نقطهٔ $M_۲$ ، $x = ۱$ و $y = ۱$ است پس $D = ۳۶(۱)(۱) - ۹ = ۲۷ > ۰$ می باشد حال این نقطه را در $Z_{xx} = ۶x$ قرار می دهیم ، لذا $Z_{xx} = ۶(۱) = ۶ > ۰$ می باشد پس نقطهٔ $M_۲$ نقطهٔ Min نسبی است.

۴ مسایل نمونه

در این بخش چند مسئله در مورد مشتقات جزئی و کاربرد های آن بیان می شوند.

۱ ــ اگر $f(x,y)=x^{۲}-y^{۳}+x^{۲}y^{۳}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $f_x(۱,۰)+f_y(۰,۱)$ کدام مقدار است؟

(۱) ۱   (۲) -۱ (۳) ۰   (۴) ۵

۲ ــ اگر $f(x,y)=\ln(x-y)+e^{xy}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $f_x(۱,۰)+f_y(۰,-۱)$ کدام مقدار است؟

(۱) ۱   (۲) ۰   (۳) -۱ (۴) ۲

۳ ــ اگر $z=e^{xy}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $\frac{z_x+z_y}{z}$ کدام مقدار است؟

(۱) $x+y$ (۲) x (۳) e^{-xy} (۴) y

۴ ــ در تابع $Z=\ln(x-y)$ حاصل $Z_{xx}+Z_{yy}$ برابر کدام عبارت است؟

(۱) ۰   (۲) $\frac{۱}{(x-y)^{۲}}$ (۳) $\frac{-۲}{(x-y)^{۲}}$ (۴) $\frac{۲}{(x-y)^{۲}}$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

۵ـ اگر $W = x\sqrt{y}\, e^{z}$ باشد، آنگاه حاصل $W_{xyz}\,(۰,۱,۰)$ برابر است با:

(۴) $\frac{۱}{۲}$ (۳) e (۲) ۰ (۱) ۲

۶ـ اگر $Z = x^{y}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{Z_y}{Z_x}$ پس از ساده کردن کدام عبارت است؟

(۴) $\frac{y}{x}\ln x$ (۳) $\frac{x}{y}\ln x$ (۲) xy (۱) $\frac{x}{y}\ln y$

۷ـ اگر $z = \sin(x+y)$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $z_{xy}+z_{yy}$ کدام مقدار است؟

(۴) z (۳) $-۲z$ (۲) $-z$ (۱) ۰

۸ـ اگر $z = \ln(x-y)$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $(z_{xx}+z_{yy})(۲,۱)$ کدام مقدار است؟

(۴) ۱ (۳) ۰ (۲) ۲ (۱) -۲

۹ـ اگر $z = x^{۳}+y^{۳}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $x^{۲}\, z_{xx}+y^{۲}\, z_{yy}$ کدام مقدار است؟

(۴) ۰ (۳) $۶x^{۲}+۶y^{۲}$ (۲) $۶z$ (۱) z

۱۰ـ اگر $z = x^{۳}y^{۳}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل z_{xyxy} کدام مقدار است؟

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

(۱) $۱۸xy^۲$ (۲) $۱۸xy$ (۳) $۳۶xy$ (۴) $۳۶xy^۲$

۱۱ ــ اگر $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $x\,z_x+y\,z_y$ کدام مقدار است؟

(۱) ۰ (۲) $\frac{۲xy}{(x-y)^۲}$ (۳) $-\frac{۲xy}{(x-y)^۲}$ (۴) ۱

۱۲ ــ اگر $z=x^۲+y^۲$ تابع دو متغیره و $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ باشد، آنگاه حاصل $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$ کدام مقدار است؟

(۱) ۰ (۲) $۲r^۲$ (۳) $۲r^۲\sin\theta\cos\theta$ (۴) $۲\sin\theta\cos\theta$

۱۳ ــ اگر $z=x^۲y^۴$ تابع دو متغیره و $x=r-s^۲$ ، $y=s^۲+r$ باشد، آنگاه حاصل $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ کدام مقدار است؟

(۱) $۴x^۲y^۳+۲xy^۴$ (۲) $۴x^۲y^۳+۲xy^۲$ (۳) $۴xy^۲+۲xy^۴$ (۴) $۴y^۳x^۲+۲yx^۲$

۱۴ ــ اگر $z=x^۲y^۴$ تابع دو متغیره و $x=r-s^۲$ ، $y=s^۲+r$ باشد، آنگاه حاصل $\dfrac{۱}{s}\dfrac{\partial z}{\partial s}$ کدام مقدار است؟

(۱) $۸xy^۳+۴xy^۴$ (۲) $۸x^۲y^۳-۴xy^۴$ (۳) $-۸x^۲y^۳+۴xy^۴$ (۴) $۴xy^۳+۸x^۲y^۳$

۱۵ ــ اگر $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام مقدار

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

است؟

(۴) $z^۲$ (۳) z (۲) $-z$ (۱) ۰

۱۶ ـ اگر $z = e^{-ay}\cos ax$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل z_{xx} کدام مقدار است؟

(۴) az_x (۳) az_y (۲) $-az_y$ (۱) $-az_x$

۱۷ ـ اگر $w = x^۲ + yz$ تابع سه متغیره باشد، آنگاه حاصل $x\, w_x + y\, w_y + z\, w_z$ کدام مقدار است؟

(۴) $-۲w$ (۳) ۰ (۲) w (۱) $۲w$

۱۸ ـ اگر $z = \dfrac{۱}{x^۲ + y^۲}$ تابع دو متغیره باشد، آنگاه حاصل $x\, z_x + y\, z_y$ کدام مقدار است؟

(۴) z (۳) ۰ (۲) $-۲z$ (۱) $۲z$

۱۹ ـ در تابع $z = x^۳ + y^۲ - ۳x^۲ + ۲y$ ، کدام نقطه زینی ($Minmax$) می باشد؟

(۴) $(۰,۰)$ (۳) $(۰,۲)$ (۲) $(۲,-۱)$ (۱) $(۰,-۱)$

۲۰ ـ نقطهٔ$(-۱,۱)$ چه نوع نقطه ای از تابع $Z = x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y$ می باشد؟

نقطهٔ معمولی(۴)　$MinMax$ (زینی) (۳)　Max نسبی(۲)　Min نسبی (۱)

۲۱ ـ نقطهٔ$(-۱,۰)$ چه نوع نقطه ای از تابع $Z = x^{۳} + y^{۲} - ۳x$ می باشد؟

نقطهٔ معمولی(۴)　$MinMax$ (زینی) (۳)　Max نسبی(۲)　Min نسبی (۱)

شکل ۱۱ :   **گوتفرید لایبنیتس** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۶۴۶ میلادی ، درگذشت: ۱۷۱۶ میلادی

شکل ۱۲ :   **فریدریش گاوس** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۷۷۷ میلادی ، درگذشت: ۱۸۵۵ میلادی

با سپاس فراوان از توجه شما

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی