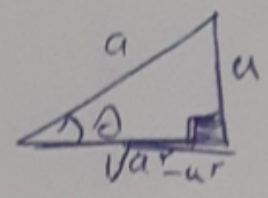
انتگرال‌های با جذر $\sqrt{a^2-u^2}$ ، $\sqrt{a^2+u^2}$ ، $\sqrt{u^2-a^2}$

الف) اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2-u^2}$ باشد از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ استفاده می‌کنیم در این حالت

$\sqrt{a^2-u^2}=a\cos\theta$, $du=a\cos\theta\,d\theta$ و

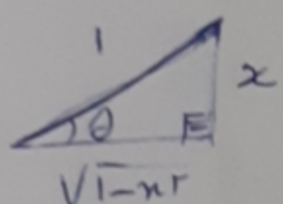


مثال،

$$I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$x=\sin\theta$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\overbrace{\sin 2\theta}^{2\sin\theta\cos\theta}\right)+C=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+C$$

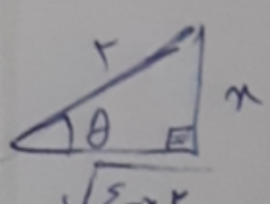


$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

$$I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx=\int\frac{\overbrace{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}^{\sqrt{4\cos^2\theta}}}{4\sin^2\theta}\,2\cos\theta\,d\theta=\int\cot^2\theta\,d\theta$$

$x=2\sin\theta\to dx=2\cos\theta\,d\theta$

$$=\int(\cot^2\theta+1-1)\,d\theta=-\cot\theta-\theta+C$$

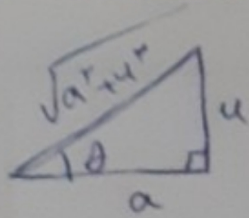


$$=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$$

ب) اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل جذر $\sqrt{a^2+u^2}$ باشد از تغییر متغیر $u=a\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ استفاده می‌کنیم در این صورت

$$\sqrt{a^2+u^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=a\sec\theta\ ,\ du=a\sec^2\theta\,d\theta$$

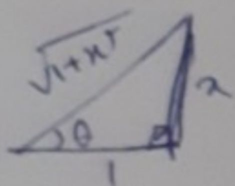
و هم چنین از شکل زیر استفاده می‌کنیم



مثال: $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta\, \sec\theta} = \int \frac{\sec\theta\, \cancel{\sec\theta}\, d\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, \cancel{\sec\theta}}$

$x=\tan\theta \to dx=\sec^2\theta\, d\theta$

$=\int \csc\theta\, d\theta = -\ln|\csc\theta+\cot\theta|+c$

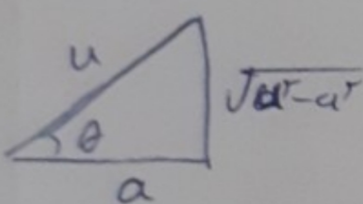


$=-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1}{x}\right|+c$

ب) اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عبارت $\sqrt{u^2-a^2}$ باشد از تغییر متغیر

$u=a\sec\theta$ $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$ استفاده می‌کنیم الزامی است

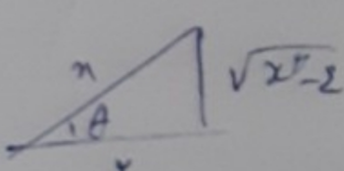
$du=a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$, $\sqrt{u^2-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=a\tan\theta$



مثال: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{\cancel{2}\sec\theta\, \cancel{\tan\theta}\, d\theta}{\cancel{2\tan\theta}} = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$

$x=2\sec\theta \to dx=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$=\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+c$

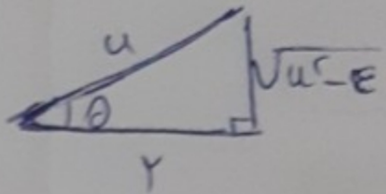


$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$

$x+2=u$

$u=2\sec\theta \to du=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$=\int \frac{\cancel{2}\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{\cancel{2}\cancel{\tan\theta}}=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$



$$=\ln\left|\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{u^2-4}}{2}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x+2}{2}+\frac{\sqrt{(x+2)^2-4}}{2}\right|+C$$

انتگرال گیری از توابع کسری گویا

برای محاسبه انتگرال $I=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند ابتدا دقت می‌کنیم درجه $f(x)$ از درجه $g(x)$ کمتر است زیرا در غیر اینصورت $f(x)$ را بر $g(x)$ تقسیم می‌کنیم.

چندجمله‌ای $g(x)$ را به حاصل ضرب عوامل درجه اول و درجه دوم تجزیه ناپذیر تجزیه می‌کنیم
فرض می‌کنیم $(x+a)$ یکی از عوامل درجه اول $g(x)$ و $(x+a)^m$ بزرگترین توانی از آن باشد که در تجزیه $g(x)$ ظاهر شده باشد، آنگاه به این عامل مجموع m کسر جزئی به شرح زیر نسبت می‌دهیم

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x+a)^m}$$

فرض کنیم (x^2+bx+c) یکی از عوامل درجه دوم در تجزیه $g(x)$ و $(x^2+bx+c)^n$ بزرگترین توانی از آن باشد که در تجزیه $g(x)$ ظاهر شده باشد، آنگاه به این عامل مجموع n کسر جزئی زیر را نسبت می‌دهیم

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

اینکار را برای هر یک از عوامل متمایز خطی درجه اول و دوم $g(x)$ انجام می‌دهیم

و سپس $\frac{f(x)}{g(x)}$ را به مجموع کسرهای ساده جزئی متحد قرار می‌دهیم و ضرایب A_i ها

و B_j و C_j ها را می‌یابیم

مثال:

$$I=\int \frac{x\,dx}{x^2+4x-5}=?$$

$$\frac{x}{x^2+4x-5}=\frac{x}{(x+5)(x-1)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+5)}{(x+5)(x-1)}$$

$$=\frac{(A+B)x-A+5B}{(x+5)(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A+5B=0 \end{cases} \rightarrow A=\frac{5}{6},\ B=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{5/6}{x+5}+\frac{1/6}{x-1}\right)dx=\frac{5}{6}\ln|x+5|+\frac{1}{6}\ln|x-1|+C'$$

$$I=\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$$

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2}$$

$$=\frac{A\overbrace{(x+1)^2}^{x^2+2x+1}(x-2)+B\overbrace{(x+1)(x-2)}^{x^2-x-2}+C(x-2)+D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

$$=\frac{A(x^3-3x-2)+B(x^2-x-2)+C(x-2)+D(x^3+3x^2+3x+1)}{(x+1)^3(x-2)}$$

$$=\frac{(A+D)x^3+(B+3D)x^2+(-3A-B+C+3D)+(-2A-2B-2C+D)}{(x+1)^3(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+D=0 \rightarrow A=-D \\ B+3D=1 \\ -3A-B+C+3D=0 \\ -2A-2B-2C+D=2 \end{cases} \xrightarrow{A=-D} \begin{cases} B-3A=1 \xrightarrow{B=1+3A} \\ -6A-B+C=0 \\ -3A-2B-2C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9A-1+C=0 \\ -9A-2C-2=2 \end{cases}$$

۴۵

$D=\frac{2}{9},\ B=\frac{1}{3},\ A=-\frac{2}{9}$ و لذا $C=-1$ از قرینه تابع را با یکدیگر جمع کنیم (۳)

$$\Rightarrow I = \int \frac{-\frac{2}{9}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{-1}{(x+1)^3}\,dx + \int \frac{\frac{2}{9}}{x-2}\,dx$$

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{(x+1)^n} = \int \frac{du}{u^n} = \int u^{-n}\,du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{(x+1)^{-n+1}}{-n+1} + c$

$u = x+1 \to du = dx$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} - x\,\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + \frac{2}{9}\ln|x-2| + c$$

$\cdot d4$

$$I = \int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}\right)dx = x - \underbrace{\int \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{J}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^4+2x^2+1 \\ \hline -x^4 & 1 \\ \hline -(2x^2+1) & \end{array}$$

$$\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \\ A + C = 0 \to C = 0 \\ B + D = 1 \to D = -1 \end{cases}$$

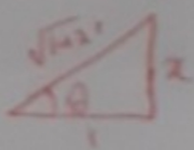
$$\Rightarrow J = \int \underbrace{\frac{2}{x^2+1}}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$2\tan^{-1}x$

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \to x = \tan\theta$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta} = \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$



$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\tan^{-1}x}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow I = x - 2\tan^{-1}x - \frac{\tan^{-1}x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + C$$

۴۹

تمرین: $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$ و $\int \frac{dx}{x^3+1}$ را حساب کنید و همچنین
$\int \frac{dx}{e^{x}-1}$ ، $\int \frac{dx}{e^{2x}-1}$

انتگرالهای گویا با توابع $\sin x$، $\cos x$

با تغییر متغیر $\tan\frac{x}{2}=t$ $(-\pi<x<\pi)$ داریم

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

صورت و مخرج را بر $\cos^2\frac{x}{2}$ تقسیم می‌کنیم

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2}=\tan^{-1}t \longrightarrow x=2\tan^{-1}t \longrightarrow dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

تابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$

مثال:
$$I=\int\frac{dx}{3\sin x+2\cos x+2} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}$$

$\tan\frac{x}{2}=t$

$$=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{6t+2-2t^2+2+2t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{3t+2} = \frac{1}{3}\ln|3t+2|+C$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|3\tan\frac{x}{2}+2\right|+C$$

$$I=\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t-1+t^2}{1+t^2}}$$

$t=\tan\frac{x}{2}$

$$=\int \frac{dt}{t^2+t} \underset{(*)}{=} \int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$

$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C$$

$(*)$ $$\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow B=-1$$

توابع هذلولی :

کسینوس هذلولی را $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$، سینوس هذلولی را $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ تعریف می‌کنیم. هر دو تابع e^{-x} و e^{x} روی $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیرند. لذا توابع $\sinh x$ و $\cosh x$ نیز بر $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیرند

$\sinh x$ تابعی فرد و $\cosh x$ تابعی زوج است زیرا

$$\sinh(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{-(-x)})=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})=-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-\sinh x$$

$$\cosh(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-(-x)})=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})=\cosh x$$

همچنین

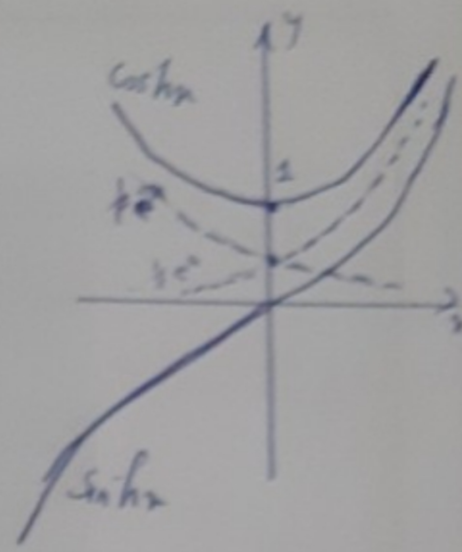
$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x$$

و لذا $\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$ ، $\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$

۴۸ $$\lim_{x\to\pm\infty}\sinh x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = +\infty$$



از مقادیر مشتق‌های فوق و بعد از قضیه مشتق تابع مرکب داریم

$$(\cosh u)' = u'\sinh u \,, \qquad (\sinh u)' = u'\cosh u$$

$$\to \int \sinh u\,du = \cosh u + C \qquad , \qquad \int \cosh u\,du = \sinh u + C$$

مثال: مشتق بگیرید.

$$y = \sinh(\underbrace{\cosh x}_{u}) \to y' = u'\cosh u = \sinh x \cosh(\cosh x)$$

$$y = \cosh(\underbrace{\tan^{-1} x}_{u}) \to y' = u'\sinh u = \frac{1}{1+x^2}\sinh(\tan^{-1} x)$$

مثال: انتگرال بگیرید.

$$\int_0^{\ln 2} \cosh x\,dx = \sinh x \Big|_0^{\ln 2} = \sinh(\ln 2) - \sinh 0 = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

اتحادهای هذلولوی:

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left[\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(4) = 1$$

۲) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})$

$= \frac{1}{4}\{e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - \cancel{e^{x-y}} + \cancel{e^{-x+y}} - e^{-(x+y)}\}$

$= \frac{1}{4}\{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}\} = \frac{1}{2}\{e^{x+y} - e^{-(x+y)}\} = \sinh(x+y)$

و به همین ترتیب - همین سبک ثابت می‌کنیم

۳) $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

٤) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

۵) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, ۶) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ و همچنین $= 2\cosh^2 x - 1$

$= 1 + 2\sinh^2 x$

و لذا:

$\Rightarrow \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$, $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

توابع دیگر هذلولوی .

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$

$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$ دو صفحه

$(\tanh u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$ ، $(\coth u)' = -u' \operatorname{csch}^2 u$ از مشتق داریم

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \int \frac{du}{\cosh^2 u} = \tanh u + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = \int \frac{du}{\sinh^2 u} = -\coth u + c$$

مثال:

$$\int \sinh^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)\, dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{x}{2} + c$$

$$\int \coth x\, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sinh x| + c$$

$u = \sinh x$

$$\int \frac{\sinh x}{3\cosh x + 2} dx = \int \frac{du}{3u+2} = \frac{1}{3}\ln|3u+2| + C = \frac{1}{3}\ln|3\cosh x + 2| + C$$

$u = \cosh x$

صورت و مخرج در $\cosh x$

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x} = \int \frac{\cosh x\, dx}{\sinh x \cosh^2 x} = \int \frac{1}{\tanh x}\frac{dx}{\cosh^2 x} = \ln|\tanh x| + c$$

$d(\tanh x) = \dfrac{dx}{\cosh^2 x}$

$$\int \operatorname{sech}(\ln x)\, dx = \int \frac{2}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} dx = \int \frac{2}{x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{2x\, dx}{x^2+1}$$

$$= \ln(x^2+1) + c$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + c$$

$$\int \frac{4\, dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + c$$

$$\int\sqrt{\cosh x-1}\,dx=\int\sqrt{2\sinh^2\frac{x}{2}}\,dx=\sqrt{2}\int\left|\sinh\frac{x}{2}\right|dx=2\sqrt{2}\cosh\frac{x}{2}+c$$

$$\int\frac{d\theta}{\cosh\theta+\sinh\theta}=\int\frac{d\theta}{e^{\theta}}=\int e^{-\theta}d\theta=-e^{-\theta}+c$$

$$\int\frac{\cosh\theta\,d\theta}{\cosh\theta+\sinh\theta}=\frac{1}{2}\int e^{-\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})d\theta=\frac{1}{2}\int(1+e^{-2\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right)+c$$

$$\int e^{x}\sinh 2x\,dx=\int e^{x}\left(\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})\right)dx=\frac{1}{2}\int(e^{3x}-e^{-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}\right)+c$$

$$\int\sinh^3x\,dx=\int\sinh^2x(\sinh x)\,dx=\int(\cosh^2x-1)\sinh x\,dx$$

$$u=\cosh x\rightarrow du=\sinh x\,dx$$

$$=\int(u^2-1)du=\frac{u^3}{3}-u+c=\frac{1}{3}\cosh^3x-\cosh x+c$$

ثل، ۳ ب ثابت کنید: $(\cosh x+\sinh x)^n=\cosh nx+\sinh nx$

$$(\cosh x+\sinh x)^n=(e^{x})^n=e^{nx}=\cosh nx+\sinh nx$$

ثل ۴ ب ثابت کنید $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=x$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}=\frac{1}{2}\ln e^{2x}=\frac{1}{2}2x=x$$

Q2

$$\tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$