۸) $y = \ln(\ln x)$

۹) $y = \ln(\cos x + 2) + \cos(\ln x - 2)$

۱۰) $y = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x-1}}$

۱۱) $y = \cos(x - x^2) + \sin(x^3 - x)$

۱۲) $y = \operatorname{Arcsin} \sqrt{x + x^2}$

۱۳) $y = \operatorname{Arccot} \sqrt{x} + \operatorname{Arccos} \dfrac{1}{x^2}$

۱۴) $y = \ln \dfrac{(x^3+1)^4 (x-1)^3 \sqrt{x^3+3}}{(2x+1)^{10} (x^3+7x)^8}$

۱۵) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\,(\cos x - 2)^4 (x^3+x)}{(3-x)^5 \sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$

فرض کنیم u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند و $y = u^v$. برای محاسبه y' یا $\dfrac{dy}{dx}$ ، ابتدا لگاریتم طبیعی طرفین را محاسبه کرده، بعد از ساده کردن، از طرفین مشتق می‌گیریم

مثال: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید

الف) $y = x^x$

ابتدا لگاریتم طبیعی طرفین را محاسبه می‌کنیم

$\ln y = \ln(x^x) = x \ln x$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \quad \frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\longrightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

ب) $y = (x^2+1)^{\ln x}$

$\ln y = \ln (x^2+1)^{\ln x} = \ln x \ln(x^2+1)$ لگاریتم طبیعی طرفین را می‌گیریم

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln(x^2+1) + \ln x \frac{2x}{x^2+1}$

$\longrightarrow y' = y\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \frac{2x\ln x}{x^2+1}\right)$

تمرین: مشتق بگیرید

$y = (\sin x)^{2+\cos x}$

$y = (x^2)^{-1+x}$

مشتق توابع پارامتری: اگر $\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$ که در آن x و y خود توابعی از متغیر t باشند آنگاه معادلات $\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$ را معادلات پارامتری می‌نامیم. در این صورت اگر y را تابعی از x در نظر بگیریم آنگاه:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

مثال: مشتق بگیرید

الف) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-\sin t}{1-\cos t}$$

ب) $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 2t + t^3 \end{cases}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 + 3t^2}{1 - 2t}$$

توابع ضمنی و مشتق آنها

فرض کنیم معادله $F(x,y) = 0$ که در آن F تابعی از دو متغیر x و y است داده شده باشد

تابع $y = f(x)$ را چنان بیابیم که برای هر x در D_f، $F(x, f(x)) = 0$ در این صورت

می‌گوییم y را ($y = f(x)$) تابع ضمنی از x است (یعنی ضابطه تابع $y = f(x)$ به طور

صریح داده نشده است). برای محاسبه $y' = \frac{dy}{dx}$ از دستور زیر استفاده می‌کنیم

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\text{مشتق } F \text{ تنها برحسب } x \text{ (وقتی } y \text{ ثابت است)}}{\text{مشتق } F \text{ تنها برحسب } y \text{ (وقتی } x \text{ ثابت است)}}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید

الف) $4x^2 + 8\ln y = 9 - x^9 e^y$

$$F(x,y) = 4x^2 + 8\ln y - 9 + x^9 e^y = 0$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{8x - 9x^8 e^y}{8\frac{1}{y} + x^9 e^y}$$

ب) $\sqrt{x^2 - 5y} + y^2 \operatorname{Arctan} x = 0$

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 - 5y} + y^2 \operatorname{Arctan} x = 0$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 5y}} + \frac{y^2}{1 + x^2}}{\frac{-5}{2\sqrt{x^2 - 5y}} + 2y \operatorname{Arctan} x}$$

مشتق مرتب بالاتر: برای تابع $y=f(x)$، تعریف کردیم $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$،

و $f'(x)$ را مشتق اول تابع $y=f(x)$ نامیدیم و با y' و $\frac{df}{dx}$ نمایش دادیم. $f'(x)$ خود تابعی از

x است. اگر $f'(x)$ برحسب x مشتق پذیر باشد، مشتق آن را با $f''(x)$ (یا y'' و

$\frac{d^2f}{dx^2}$ یا $\frac{d^2y}{dx^2}$) نمایش داده و $f''(x)=(f'(x))'$ به همین ترتیب، اگر $f''(x)$

مشتق پذیر باشد، مشتق آن یعنی $(f''(x))'$ را مشتق سوم تابع $f(x)$ و گوییم و با
آن را مشتق درجه سوم f گوییم

$f'''(x)$ (یا y''' و $\frac{d^3f}{dx^3}$) نمایش میدهیم. به طور کلی مشتق مرتبه n ام تابع را

با $f^{(n)}(x)$ نمایش داده و $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

به عنوان مثال، اگر $y=f(x)=-5x^4+12x^3+5x-1$ آنگاه

مشتق اول $y'=-20x^3+24x+5$

مشتق دوم $y''=(y')'=-60x^2+24$

مشتق سوم $y'''=(y'')'=-120x$

مشتق چهارم $y^{(4)}=-120$

و لذا

$y^{(5)}=y^{(6)}=\dots=0$

مثال: مشتق دوم تابع زیر را بنویسید

$y=\sqrt{x^2-2x}$

مشتق اول $y'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

مشتق دوم $=y''=(y')'=\frac{(x-1)'\sqrt{x^2-2x}-(\sqrt{x^2-2x})'(x-1)}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2-2x} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}(x-1)}{x^2-2x}$$

مثال: مشتق دوم تابع $y = x^2 e^x$ را بیابید

$$y' = 2x e^x + x^2 e^x$$

$$y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x$$

$$= 2e^x + 4xe^x + x^2e^{2x}$$

صفحه ۱۵

دیفرانسیل: گیریم تابع $f(x)$ در x مشتق‌پذیر باشد یعنی حد $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
فرض
موجود و برابر $f'(x)$ است. پس اگر $|\Delta x|$ به اندازه کافی کوچک باشد آنگاه

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cong f'(x) \Longrightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\cong f'(x)\Delta x$$

سمت چپ رابطه $\Delta f(x)$ و تغییرات تابع f در x است و عبارت سمت راست یعنی $f'(x)\Delta x$، دیفرانسیل تابع در x نام دارد.

تعریف: دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ را با df یا dy و یا $df(x)$ نمایش داده و به صورت $df=f'(x)\Delta x$ تعریف می‌کنیم.

تذ). برای تابع $y=f(x)=x$، داریم $dy=f'(x)\Delta x$ و یا $dy=1\Delta x=\Delta x$.
از طرفی چون $y=x$ آنگاه $dy=dx$ و لذا $dx=\Delta x$. بنابراین دیفرانسیل متغیر مستقل x را با $dx=\Delta x$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه برای تابع $y=f(x)$

$$\boxed{dy=f'(x)dx}$$

مثال: دیفرانسیل توابع زیر را بیابید

الف) $y=f(x)=\sin(2x^2-x+1)$

جواب: $dy=y'dx=(4x-1)\cos(2x^2-x+1)dx$

ب) $y=\sqrt{x^2+\sqrt{2x+4}}$

جواب: $dy=y'dx=\dfrac{2x+\dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}}}{2\sqrt{x^2+\sqrt{2x+4}}}dx$

ج) $y=\sin t-5t^2$

جواب: $dy=(\cos t-10t)dt$

ات $d(-5x+3) = ?$

جواب $d(-5x+3) = (-5x+3)'dx = -5dx$

از $f(x+\Delta x)-f(x) \cong f'(x)\Delta x$ داریم که اگر $|\Delta x|$ به قدر کافی کوچک باشد

$$\boxed{f(x+\Delta x) \cong f'(x)\Delta x + f(x)}$$

از این فرمول معمولاً برای یافتن مقدار تقریبی یک عدد یا یک عبارت استفاده می‌کنیم

مثلاً مقادیر تقریبی $\sqrt{101}$ و $\sqrt{98}$ را بدست آورید.

ابتدا قرار می‌دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ ولذا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ و درنتیجه

$$\sqrt{101} = f(101) = f(\underbrace{100}_{x}+\underbrace{1}_{\Delta x}) \cong f'(100)(1)+f(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}}(1)+\sqrt{100} = \frac{1}{20}+10$$
$$= 10.05$$

$$\sqrt{98} = f(98) = f(\underbrace{100}_{x}+\underbrace{(-2)}_{\Delta x}) \cong f'(100)(-2)+f(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}}(-2)+\sqrt{100} = -\frac{1}{10}+10$$
$$= 9.9$$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{31.8}$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=\sqrt[5]{x}$ ولذا $f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

$$\sqrt[5]{31.8} = f(31.8) = f(\underbrace{32}_{x}+\underbrace{(-0.2)}_{\Delta x}) \cong f(32) + f'(32)(-0.2)$$

$\sqrt[5]{32^4} = (\sqrt[5]{32})^4 = 2^4 = 16$

$$= \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}\left(-\frac{2}{10}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{400} = 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{100} = 2 - \frac{25}{10000} = 1.9975$$

$\frac{25}{100}$

تمرین: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{9}$ ، $\sin 29^\circ$ را بیابید.

قاعدهٔ هوپیتال

قضیه (صورت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) فرض کنیم توابع f و g روی (a,b) مشتق‌پذیر و برای هر x در (a,b) ؛ $g'(x)\neq 0$ ، هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0$ (یا $\pm\infty$) و

$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آنگاه $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

L می‌تواند یک عدد حقیقی و یا $+\infty$ و یا $-\infty$ باشد. اگر $x\to a^+$ با $x\to b^-$ و یا $x\to c$ که در آن $a<c<b$ عوض شود، باز هم قضیه درست است.

قضیه: اگر توابع f و g بر $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر و برای هر $x>a$ ، $g'(x)>0$ و هرگاه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ (یا $\pm\infty$) و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آنگاه $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

می‌توان برای $x\to-\infty$ نیز با تغییر اندک صورت قضیه، چنین نتیجه‌ای را نیز گرفت.

مثال: حدود زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to a}\frac{x^{10}-a^{10}}{x-a}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to a}\frac{10x^9}{1}=10a^9$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1}=1$

ج) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{2}=\frac{\ln 2}{2}$

گاهی برای حل یک مسأله، ممکن است چند بار از قاعده هوپیتال استفاده کنیم

به عنوان مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

تمرین: حدود زیر را بیابید

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

۲) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

٤) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos \alpha x}{1-\cos \beta x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$

۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}{\frac{1}{x}}$

حل ۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}{\frac{1}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$ ساده می‌کنیم

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \underset{Hop}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x e^{-\frac{1}{x^2}}}{2} = \dfrac{0\times 0}{2} = 0$ ساده می‌کنیم

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$

گاهی اوقات قاعده هوپیتال کاربرد ندارد مثل

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \dots$

ولی اگر بگیریم $\frac{1}{x} = t$ آنگاه: $x \to 0^+$ معادل است با $t \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{t}{e^t} \underset{Hop}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{1}{e^t} = 0$

حالات مبهم $\infty . 0$ ، $\infty - \infty$ را می‌توان به شکل $\frac{0}{0}$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ تبدیل کرده و سپس از قاعده هوپیتال استفاده کرد.

به‌عنوان نمونه

الف) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x + x\cos x}$

$\underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$ ساده کرد $= \lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi^2-4x^2)\tan x \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2-4x^2}{\cot x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-8x}{-(1+\cot^2 x)} = 4\pi$

حالات مبهم اگر 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0 باشند به مانند شکل‌های زیر عمل می‌کنیم

الف) $\lim\limits_{x\to0} x^x = ?$

قرار می‌دهیم $y=x^x$

$\ln\lim\limits_{x\to0} y = \ln\lim\limits_{x\to0}x^x = \lim\limits_{x\to0}\ln x^x = \lim\limits_{x\to0} x\ln x = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} y = e^0 = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = ?$

قرار می‌دهیم $y=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

$\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{1+\frac{a}{x}} = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y = e^a$

بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$

مثال ۱) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4} \quad 1^{\infty} \quad =?$

قرار می‌دهیم $y=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4}$

$$\ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+4}=\lim_{x\to+\infty}(x+4)\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

ساده می‌کنیم
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-2)}{\frac{1}{x+4}}\underset{Hop}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x+4)^2}}$$

ساده کنیم
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-3}{(x+1)(x-2)}}{\frac{-1}{(x+4)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3(x+4)^2}{-(x+1)(x-2)}=+3$$

$$\Rightarrow \lim y=e^{+3}$$

فرمول تیلور و مکلورن

قضیه تیلور: فرض کنیم $f(x)$ در اطراف نقطه a دارای مشتق از هر مرتبه‌ای باشد، آنگاه برای هر x در همسایگی a

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

سمت راست تساوی بالا را سری تیلور یا بسط تیلور تابع f حول نقطه a می‌گوییم.

مثال: بسط تیلور تابع $f(x)=\ln x$ را حول نقطه $x=1$ بنویسید

$f(x)=\ln x \qquad f(1)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(1)=1$