رياضي عمومي

استاد مرضيه توكليان

Sama.Tavakolian@gmail.com

آموزشکده سما واحد اسلامشهر

مهرماه 1399

رياضي عمومي رشته كامپيوتر

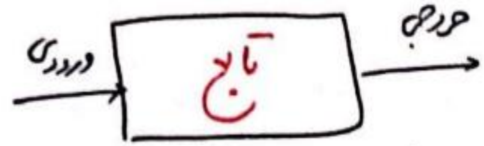
- فصل اول : تابع
- فصل دوم : حد و پيوستگي
- فصل سوم : مشتق و كاربردهاي آن
- فصل چهارم : انتگرال و كاربردهاي آن
- فصل پنجم : اعداد مختلط

- حضور فعال در كلاس، حل تمرين و امتحانات كلاسي <u>10 نمره</u>

- امتحان پايان ترم
<u>10 نمره</u>

فصل اول: تابع

تعریف تابع: به هر وسیله، ابزار و یا ماشینی که به ازای هر ورودی یک و فقط یک خروجی از آن دریافت کنیم تابع گفته می‌شود.



در ریاضیات تابع را با نماد $y=f(x)$ نشان می‌دهیم، که x متغیر ورودی، y متغیر خروجی و f نماد تابع می‌باشد.

فصل اول: تابع

مثال ۱. مقدار تابع زیر را در نقاط داده شده محاسبه نمایید.

$$f(x) = -x^2 + 5$$

به جای تمام متغیرهای x ، عدد ۳ را قرار می‌دهیم

$$x = 3 \longrightarrow f(3) = -(3)^2 + 5 = -9 + 5 = -4 \longleftarrow$$

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = -(0)^2 + 5 = 0 + 5 = 5$$

$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = -\underbrace{(-2)^2}_{4} + 5 = -4 + 5 = 1$$

مثال ۲.

$$f(x)=\frac{1-x^3}{2x+8}$$

$$x=0 \longrightarrow f(0)=\frac{1-(0)^3}{2(0)+8}=\frac{1-0}{0+8}=\frac{1}{8}$$

$$x=1 \longrightarrow f(1)=\frac{1-(1)^3}{2(1)+8}=\frac{1-1}{2+8}=\frac{0}{10}=0$$

← هرگاه صورت کسر صفر و مخرج عددی غیر صفر باشد حاصل کسر صفر می باشد.

$$x=-4 \longrightarrow f(-4)=\frac{1-(-4)^3}{2(-4)+8}=\frac{1-(-64)}{-8+8}=\frac{1+64}{0}=\frac{65}{0}=$$ تعریف نشده

هرگاه صورت کسر عددی غیر صفر و مخرج آن صفر باشد حاصل کسر، تعریف نشده (ت.ن) می باشد.

فصل اول: تابع

مثال ۳.

$$f(x)=\sqrt{x+7}$$

$$x=2 \longrightarrow f(2)=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$$

$$x=0 \longrightarrow f(0)=\sqrt{0+7}=\sqrt{7}$$

$$x=-11 \longrightarrow f(-11)=\sqrt{-11+7}=\sqrt{-4}=\text{ت.ن}$$

← هرگاه فرجه رادیکال عددی زوج (۲، ۴، ۶، ...) باشد زیر رادیکال عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

فصل اول: تابع

آن‌جا که بعضی از توابع در بعضی نقاط تعریف نشده می‌باشند مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف دامنه تابع: مجموعه تمام مقادیری که تابع $y=f(x)$ در آن‌ها کاملاً مشخص و تعریف شده می‌باشد را دامنه تابع نامیده و آن را با نماد D_f نشان می‌دهیم. سه دسته زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) توابع چندجمله‌ای

ب) توابع کسری

ج) توابع رادیکالی
- ۱) رادیکال با فرجه زوج
- ۲) رادیکال با فرجه فرد

فصل اول: تابع

الف) دامنه توابع چندجمله‌ای: توابعی که در آن‌ها متغیر x، زیر رادیکال و در مخرج و یا داخل تابع خاصی قرار ندارد، چندجمله‌ای هستند مانند موارد زیر

$$f(x) = -x^2 + 3x - 1$$

$$f(x) = \sqrt{2}\,x - 8 + x^3$$

$$f(x) = x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{7}$$

از آنجایی که این توابع در تمام نقاط اعداد حقیقی تعریف شده می‌شوند بنابراین دامنه این توابع برابر کل اعداد حقیقی می‌باشد. و می‌نویسیم

$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

فصل اول: تابع

ب) دامنه توابع کسری : دامنه یک تابع کسری به صورت زیر تعیین می‌شود

$$D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

دامنه صورت   اشتراک   دامنه مخرج

فصل اول: تابع

مثال ۴: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{3+x^2}{2x-5}$$

از آنجایی که صورت کسر یعنی عبارت $3+x^2$ یک چندجمله‌ای می‌باشد $\leftarrow \quad D_{\text{صورت}}=\mathbb{R}$

از آنجایی که مخرج کسر یعنی عبارت $2x-5$ یک چندجمله‌ای می‌باشد $\leftarrow \quad D_{\text{مخرج}}=\mathbb{R}$

ریشه‌های مخرج : $2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \rightarrow x=\frac{5}{2}$

$$\Longrightarrow D_f=D_{\text{صورت}}\cap D_{\text{مخرج}}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

یعنی تابع $f(x)$ در همه مقادیر از اعداد حقیقی تعریف شده می‌باشد به جز عدد $\frac{5}{2}$. (در $\frac{5}{2}$ مخرج کسر صفر و تابع تعریف نمی‌شود)

فصل اول: تابع

$$f(x)=\frac{-4x+7}{x^2-9}$$

$D_{\text{صورت}}=\mathbb{R}$, $D_{\text{مخرج}}=\mathbb{R}$

ریشه‌های مخرج: $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{9} \Rightarrow x=\pm 3$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{\pm 3\}$$

* توجه: معادله درجه ۲، $x^2-9=0$ را به وسیله روش دلتا و یا تجزیه به اتحاد مزدوج نیز می‌توان حل کرد.

روش دلتا:

$x^2-9=0\ (ax^2+bx+c=0)$ $a=1,\ b=0,\ c=-9$

$$D=b^2-4ac=(0)^2-4(1)(-9)=36>0\ ,\ x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(0)\pm\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{\pm 6}{2}\begin{cases}\frac{6}{2}=3\\ \frac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

فصل اول: تابع

$$f(x)=\frac{-7}{x^2+5}$$

$D_{\text{صورت}}=\mathbb{R}\ ,\ D_{\text{مخرج}}=\mathbb{R}$

$x^2+5=0 \Rightarrow x^2=-5 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{-5}=$ ق.ن $\Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد.

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{\ \ \}=\mathbb{R}$

تمرین: معادله $x^2+5=0$ را با روش رسم حل کنید.

فصل اول: تابع

تمرین . دامنه توابع زیر را تعیین کنید .

① $f(x) = -3x^2 + 5x - 10$

② $f(x) = \frac{4}{3} x^3 - 8x + 1$

③ $f(x) = \dfrac{18 - x}{x^2 - 5x + 6}$

④ $f(x) = \dfrac{-5}{3 - x}$

⑤ $f(x) = \dfrac{\sqrt{4}\,x + 1}{10 + x^2}$

⑥ $f(x) = \dfrac{12x - x^4 + 7}{x^2 - 25}$

فصل اول: تابع

ج) دامنه توابع رادیکالی: $\boxed{\text{رادیکال با فرجه زوج}}$

هرگاه فرجه رادیکال یک عدد زوج باشد ($\sqrt[2]{\ }$ ، ۴ ، ۶ ، ...) عبارت زیر رادیکال باید همیشه نامنفی باشد. بنابراین برای تعیین دامنه آن عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار داده و سپس آن را در جدول تعیین علامت گذاشته و قسمت مثبت جدول را در نظر بگیریم.

فصل اول: تابع

مثال ۵: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

$f(x)=\sqrt{x+7}$

ابتدا قرار می‌دهیم: $\boxed{x+7 \geq 0}$ برای حل این نامعادله، تعیین علامت می‌کنیم

$x+7=0 \longrightarrow x=-7$

	$-\infty$		-7		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	

$a=1$

$D_f=[-7,+\infty)$

یادآوری: تعیین علامت عبارت درجه یک: $ax+b$

	$-\infty$		ریشه آن		$+\infty$
$ax+b$		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

فصل اول: تابع

مثال ۶: چون فرجه رادیکال زوج است قرار می‌دهیم $5-2x \geq 0$.

$$f(x)=\sqrt[4]{5-2x}$$

	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$5-2x$	$+$		$-$

$$5-2x=0 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow x=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

$a=-2$

$$D_f=(-\infty, -\frac{5}{2}]$$

فصل اول: تابع

یادآوری: تعیین علامت عبارت درجه دو ax^2+bx+c

۱) اگر $\Delta = b^2-4ac > 0$ باشد معادله دو ریشه دارد

x	$-\infty$		ریشه بزرگتر		ریشه کوچکتر		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

۲) اگر $\Delta = 0$ معادله یک ریشه دارد.

x	$-\infty$		ریشه		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	موافق علامت a	

۳) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه ندارد.

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	

فصل اول: تابع

مثال ۷.

$f(x)=\sqrt[8]{x^2-9}$

از آنجا که فرجه رادیکال زوج است قرار می‌دهیم $x^2-9\geq 0$.

$x^2-9\geq 0 \Longrightarrow x^2-9=0 \Longrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{9} \Longrightarrow x=\pm 3$

		-3		$+3$	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

$D_f=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

اجتماع

مثال ۸.

$f(x)=\sqrt[4]{x^2+5}$

$\boxed{x^2+5\geq 0} \Longrightarrow x^2+5=0 \longrightarrow x^2=-5 \Longrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{-5}$

این عبارت ریشه ندارد.

	$-\infty$	$+\infty$
x^2+5	$+$	

$x=1$

$\Longrightarrow D_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

فصل اول: تابع

مثال ۹.

$$f(x)=\sqrt[8]{5-x^2}$$

$$\boxed{5-x^2\geq 0}\Rightarrow 5-x^2=0\Rightarrow -x^2=-5\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$+\sqrt{5}$		$+\infty$
$5-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a=-1$

$$\Rightarrow D_f=[-\sqrt{5},+\sqrt{5}]$$

فصل اول: تابع

مثال ۱۰. دامنه تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{5-3x}}$$

حل. چون زیر رادیکال زوج است قرار می‌دهیم

$$\boxed{\frac{x-1}{5-3x}\geq 0}$$

برای حل این نامعادله کسری به صورت زیر عمل می‌نماییم.

ریشه صورت: $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

ریشه مخرج: $5-3x=0 \Rightarrow -3x=-5 \Rightarrow x=\frac{-5}{-3}=\boxed{\frac{5}{3}}$

در جدول تعیین علامت مشترک قرار می‌دهیم.

	$-\infty$	1		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$a=1$, $x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$a=-3$, $5-3x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x-1}{5-3x}$	$-$	0	$+$		$-$

ق.ق

$$D_f=[1, \frac{5}{3})$$

* **توجه:** همیشه زیر ریشه صورت و زیر ریشه مخرج توخالی نشان می‌دهیم. توخالی شده در نهایت همیشه باز هستند یعنی براکت آنها را باز نوشته می‌شود.

فصل اول: تابع

تمرین: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

① $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x-4}$

② $f(x)=\sqrt[8]{\dfrac{x^2-9}{4-2x}}$

③ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

④ $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{8-4x}{x+1}}$

⑤ $f(x)=\sqrt[4]{-5-x^2}$

⑥ $f(x)=\sqrt{\dfrac{7-x}{1+x^2}}$

فصل اول: تابع

رادیکال با فرجه فرد

هرگاه فرجه رادیکال فرد باشد از آنجا که علامت عبارت زیر رادیکال اهمیتی ندارد، برای تعیین دامنه آن علامت رادیکال را در نظر نگرفته و تنها دامنه عبارت زیر رادیکال را بدست می‌آوریم.

مثال ۹۱. دامنه تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$$

حل. چون فرجه رادیکال یک عدد فرد است برای تعیین دامنه عبارت زیر رادیکال

یعنی $x^2 - 5x + 6$ را در نظر می‌گیریم. این عبارت یک چندجمله‌ای بوده و ما برای آن داریم

$$D_f = \mathbb{R}$$

فصل اول: تابع

مثال ۱۲.

$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{x^2-4}{1-3x}}$$

حل: فقط عبارت $\frac{x^2-4}{1-3x}$ را در نظر بگیریم. این عبارت یک کسر است، دامنه آن از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

ریشه مخرج: $1-3x=0 \Rightarrow -3x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

$D_{\text{صورت}}=\mathbb{R},\ D_{\text{مخرج}}=\mathbb{R}$,

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{1/3\}$$

فصل اول: تابع

مثال ۱۴.

$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{x^2-16}}$

حل. عبارت داخل زیر رادیکال یعنی کسر $\dfrac{7+x}{x^2-16}$ را تعیین دامنه می‌کنیم.

$D_{\text{صورت}}=\mathbb{R}\ ,\ D_{\text{مخرج}}=\mathbb{R}\ ,$

ریشه‌های مخرج: $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{\pm 4\}$

تمرین. دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

① $f(x)=\sqrt[5]{4/5\,x^2-8x+10}$

② $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{4x+5}{4-x^2}}$

③ $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{7-x}{x^2+4}}$

اینجا حل کنید

معرفي توابع خاص

۱) تابع قدرمطلق . این تابع را با نماد $f(x)=|x|$ نشان میدهیم. هر عدد که در داخل قدرمطلق قرار بگیرد با علامت مثبت خارج میشود. یعنی اعداد منفی مثبت میشوند

$$|-2| = 2$$

$$|-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$$

$$|1{,}05| = 1{,}05$$

۲) تابع ثابت . این تابع به ازای تمام مقادیر متغیر x، مقدار ثابت دارد. به عنوان مثال تابع $f(x) = -5$ در تمام نقاط زیر عدد -5 را میگیرد.

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = -5$$

$$x = 1/3 \longrightarrow f(1/3) = -5$$

$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = -5$$

معرفي توابع خاص

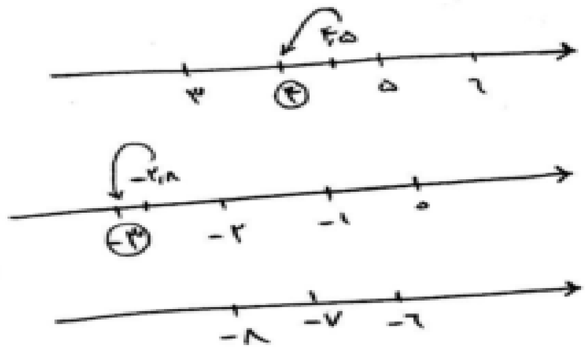
۳) تابع جزء صحیح (براکت). این تابع را با نماد $f(x)=[x]$ نشان می‌دهیم. حاصل این تابع همواره یک عدد صحیح می‌باشد. جزء صحیح هر عدد غیرصحیح برابر با بزرگترین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد می‌باشد.

مثال ۱۴.

$[4{,}5]=4$

$[-2{,}8]=-3$

$[-7]=-7$



۴) تابع چند ضابطه‌ای. در این تابع به ازای مقادیر مختلف متغیر x، چند ضابطه متفاوت داریم. مانند

$$f(x)=\begin{cases} 5x & x>\frac{1}{2} \\ x^2+10 & x\leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

یک تابع دو ضابطه‌ای

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & x>-2 \\ \sqrt[5]{x^3} & x=-2 \\ 1-\frac{x}{2} & x<-2 \end{cases}$$

یک تابع سه ضابطه‌ای

فصل اول: تابع

مثال ۱۵: مقدار تابع زیر را در نقاط داده شده بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}1-x^3 & x<-1\\ 4 & x=-1\\ 7x^2+1 & x>-1\end{cases} \qquad x=-2\ ,\quad x=-1\ ,\quad x=5$$

$$x=-2 \xrightarrow[\text{ضابطه اول}]{-2<-1} f(-2)=1-(-2)^3=1-(-8)=1+8=9$$

$$x=-1 \xrightarrow[\text{ضابطه دوم}]{} f(-1)=4$$

$$x=5 \xrightarrow[\text{ضابطه سوم}]{5>-1} f(5)=7(5)^2+1=7(25)+1=175+1=176$$

فصل اول: تابع

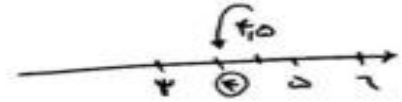
حل ۱۲.

$$f(x)=\begin{cases}[x]+8 & x>-2\\ 3-2x & x\leq -2\end{cases}\qquad x=-3\ ,\ x=-2\ ,\ x=4.5$$

$$x=-3\ \xrightarrow[\text{ضابطه دوم}]{-3<-2}\ f(-3)=3-2(-3)=3+6=9$$

$$x=-2\ \xrightarrow[\text{ضابطه دوم}]{}\ f(-2)=3-2(-2)=3+4=7$$

$$x=4.5\ \xrightarrow[\text{ضابطه اول}]{4.5>-2}\ f(4.5)=[4.5]+8=4+8=12$$



تمرین ۱) حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$[-9]\ ,\ [-10.1]\ ,\ [-5.8]\ ,\ \left[\frac{2}{3}\right]\ ,\ [3.4]\ ,\ [8]$$

۲) مقدار تابع زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ 5-x^2 & x\geq 1\end{cases}\qquad x=1,\ x=3,\ x=-\frac{1}{2}$$

فصل دوم

حد و پيوستگي

فصل دوم: حد و پيوستگي

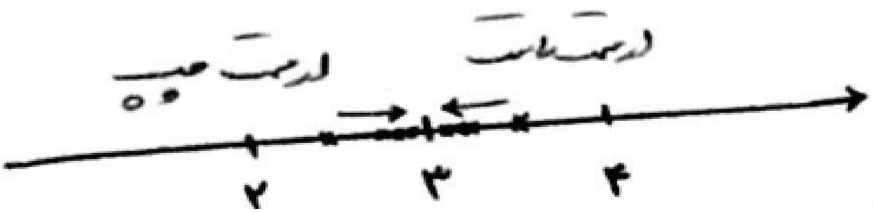
تعریف حد. به عنوان مثال تابع $f(x)=x+5$ را در نظر بگیرید.

از سمت راست

x	۳,۴	۳,۲	۳,۱	۳,۰۱	$\rightarrow$	نزدیک به عدد ۳
$f(x)$	۸,۴	۸,۲	۸,۱	۸,۰۱		نزدیک به ۸

از سمت چپ

x	۲,۵	۲,۸	۲,۹	۲,۹۹	$\rightarrow$	نزدیک به عدد ۳
$f(x)$	۷,۵	۷,۸	۷,۹	۷,۹۹	$\rightarrow$	نزدیک به ۸



فصل دوم: حد و پیوستگي

در این مثال وقتی x به سمت عدد ۲ نزدیک می‌شود مقدار تابع به عدد ۸ نزدیک می‌گردد. در این حالت گفته می‌شود که حد تابع $f(x)$ وقتی که x به سمت عدد ۲ میل می‌کند (نزدیک می‌شود) برابر عدد ۸ است و با نماد ریاضی می‌نویسیم:

$$\lim f(x) = \lim x+5 = 2+5 = 8$$

توجه: برای محاسبه حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ کافی است به جای x، عدد a را جایگزین نماییم. به عنوان مثال در مثال قبل برای محاسبه حد تابع در نقطه $a=2$، به جای x، عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

توجه: در این مثال منظور از میل کردن آن است که تغییر x به میزان بسیار زیادی به عدد ۲ نزدیک می‌شود اما هیچ گاه دقیقاً مساوی ۲ نمی‌گردد. به این ترتیب مقدار تابع $f(x)$ نیز به عدد ۸ نزدیک شده ولی مساوی آن نمی‌شود.

فصل دوم: حد و پیوستگي

مثال ۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to -1} 1-2x^3 = 1-2(-1)^3 = 1-2(-1) = 1+2 = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

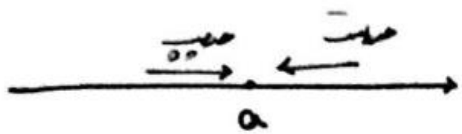
$$\lim_{x \to -5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$$

فصل دوم: حد و پيوستگي

تعریف حد چپ و حد راست. هرگاه x از سمت راست (چپ) به عدد a نزدیک بشود (از سمت اعداد بزرگتر یا کوچکتر از a) و مقدار تابع به عدد L نزدیک بشود گوییم حد راست (چپ) تابع در نقطه $x=a$ برابر L است و می‌نویسیم

حد چپ تابع $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

حد راست تابع $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$



فصل دوم: حد و پيوستگي

در مثال اول داریم

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 8 \quad , \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 8$$

حد چپ تابع　　حد راست تابع

نکته. شرط وجود حد کلی تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ آن است که حد چپ و راست تابع با هم برابر باشند. بنابراین در مثال اول داریم:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 8 = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 8$$

نکته. اگر حد چپ و راست با هم برابر نباشند گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ حد ندارد.

فصل دوم: حد و پیوستگی

نکته: هنگامی که به یکی از توابع جزء صحیح، قدر مطلق و یا چند ضابطه ای برخورد می کنیم حد چپ و راست آن را جداگانه می سنجیم.

مثال ۲: حد تابع زیر را در نقطه $x=-3$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>-3 \\ 10x & x=-3 \\ \frac{1}{3}x-2 & x<-3 \end{cases} \qquad \lim_{x\to -3} f(x) = ?$$

حل:

حد راست تابع: $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} x^2+1 = (-3)^2+1 = 9+1 = 10$

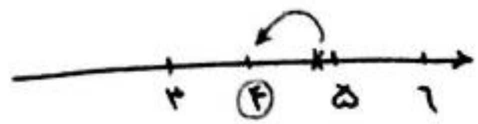
حد چپ تابع: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{3}x-2 = \frac{1}{3}(-3)-2 = -1-2 = -3$

حد راست $\neq$ حد چپ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to -3} f(x)$ وجود ندارد.

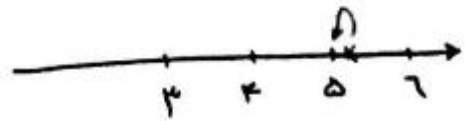
فصل دوم: حد و پیوستگي

مثال ۳. حد تابع $f(x)=[x]$ را در نقطه $x=5$ بدست آورید.

حل.



حد چپ تابع: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-}[x] = [5^-] = 4$



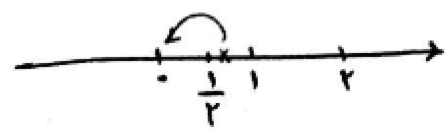
حد راست تابع: $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+}[x] = [5^+] = 5$

حد چپ $\neq$ حد راست $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} f(x)$ وجود ندارد.

فصل دوم: حد و پیوستگي

مثال ۴. حد تابع $f(x)=[x]$ را در نقطه $x=\frac{1}{2}$ بدست آورید.

حد چپ تابع: $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = [\frac{1}{2}^-] = 0$



حد راست تابع: $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = [\frac{1}{2}^+] = 0$

حد چپ $\neq$ حد راست $\Longrightarrow \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 0$

تمرین: ۱) حد تابع زیر را در نقاط $x=-2$ و $x=1$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x^2+1 & x<-2 \\ 4 & x=-2 \\ 1-5x & x>-2 \end{cases}$$

۲) حد تابع $f(x)=[x]$ را در نقاط $x=-4$ و $x=-\frac{2}{3}$ بدست آورید.

<u>حد بینهایت</u>: هرگاه در یک حد کسری صورت عددی مخالف صفر و مخرج برابر صفر شود حاصل حد مساوی ∞ (بینهایت) می‌شود.

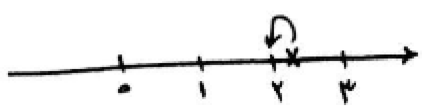
تذکر. $\infty = \frac{\text{عدد}}{0}$

<u>مثال</u> ۵.

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2x}{x-4} = \frac{2(4)}{4-4} = \frac{8}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{-3x}{5-x} = \frac{-3(5)}{5-5} = \frac{-15}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{[x]}{2-x} = \frac{[2^+]}{2-2} = \frac{2}{0} = \infty$$



فصل دوم: حد و پيوستگي

حد در بی‌نهایت: هرگاه x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند ($x \to \pm\infty$) برای بدست آوردن حد کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند تنها جملات با بزرگترین توان را در نظر می‌گیریم و از سایر جملات صرف‌نظر می‌کنیم، در این حالت سه مورد اتفاق می‌افتد

۱) اگر توان صورت از مخرج بزرگتر باشد حاصل حد $\pm\infty$ می‌باشد.

۲) اگر توان صورت از مخرج کوچکتر باشد حاصل حد 0 می‌باشد.

۳) اگر توان صورت با مخرج مساوی باشد حاصل حد برابر یک عدد مخالف صفر می‌باشد.

توجه: $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ و $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$.

فصل دوم: حد و پيوستگي

مثال ۶.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+2}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{1}=5(-\infty)^2=5(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2+5}{\frac{1}{8}+3x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^4+x+10}{-4+2x^4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^4}{2x^4}=\lim\frac{-3}{2}=\frac{-3}{2}.$$

فصل دوم: حد و پیوستگي

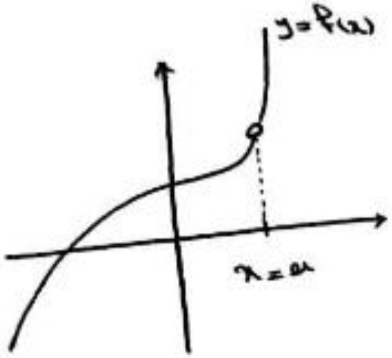
تمرین: حدود زیر را محاسبه کنید.

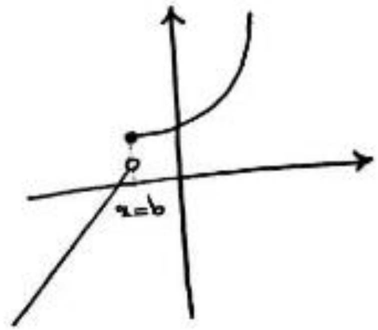
$$\lim_{x\to 6^-}\frac{15x}{6-x}\ ,\quad \lim_{x\to -3^-}\frac{[x]}{x+3}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{5x^4-1}{2-3x^4}\ ,\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{6x-4x^2}{1-x^3}\ ,\quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{x+7x^3}{1+9x}$$

فصل دوم: حد و پيوستگي

پیوستگی تابع: تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه نمودار آن در این نقطه هیچ بریدگی یا انفصالی نداشته باشد.





این توابع در نقاط $x=a$ و $x=b$ ناپیوسته می‌باشند.

شرط پیوستگی تابع: مقدار تابع در نقطه $x=a$ = حد راست تابع در نقطه $x=a$ = حد چپ تابع در نقطه $x=a$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

فصل دوم: حد و پیوستگي

مثال ۷. پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=-1$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+1 & x<-1 \\ 3 & x=-1 \\ 10-7x & x>-1 \end{cases}$$

حد راست تابع: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \overset{\text{ضابطه سوم}}{=} \lim\limits_{x\to -1^+} 10-7x = 10-7(-1) = 10+7 = 17$

حد چپ تابع: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \overset{\text{ضابطه اول}}{=} \lim\limits_{x\to -1^-} 2x^2+1 = 2(-1)^2+1 = 2+1 = 3$

مقدار تابع: $f(-1) = 3$ ضابطه دوم

حد چپ $\neq$ حد راست $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد

حد چپ $=$ مقدار تابع $\Longrightarrow$ تابع در نقطه $x=-1$ پیوستگی چپ دارد.

فصل دوم: حد و پیوستگي

مثال ۸. پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=5$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{5}x+2 & x\geq 5 \\ 1-3x & x<5 \end{cases}$$

حد راست تابع: $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -\frac{1}{5}(5)+2=-1+2=1$

حد چپ تابع: $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 1-3(5)=1-15=-14$

مقدار تابع: $f(5)=-\frac{1}{5}\ \ +2=-1+2=1$
$x=5$

حد راست $\neq$ حد چپ $\Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)$ حد ندارد

حد راست $=$ مقدار تابع $\Rightarrow$ تابع در نقطه $x=5$ پیوستگی راست دارد.

مثال ۹. مقادیر مجهول a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+b & x<1 \\ -3 & x=1 \\ 2ax+7 & x>1 \end{cases}$$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2a(1)+1 = 2a+7$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -(1)^2+b = -1+b \implies 2a+7=-3=-1+b$

مقدار تابع: $f(1)=-3$

$2a+7=-3 \implies 2a=-3-7=-10 \longrightarrow 2a=-10 \longrightarrow a=\frac{-10}{2}=\boxed{-5}$

$-1+b=-3 \implies b=-3+1=\boxed{-2}$

فصل دوم: حد و پيوستگي

تمرین. پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در نقطه $x=-3$ بررسی کنید.

تمرین ۱. پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=-3$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} |x|+5 & x>-3 \\ 8 & x=-3 \\ 2-x^3 & x<-3 \end{cases}$$

۲) مقدار مجهول a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} [x]+b & x>2 \\ 5 & x=2 \\ ax^2-1 & x<2 \end{cases}$$

فصل سوم

مشتق و کاربردهاي آن

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

<u>تعریف مشتق</u>. مشتق تابع $y=f(x)$ را با $y'=f'(x)$ نشان می‌دهیم. هرگونه تغییرات تابع اعم از افزایش و یا کاهش یافتن (صعودی و نزولی بودن) آن به وسیله مشتق سنجیده می‌شود.

مشتق توابع مختلف را به صورت زیر بیان می‌نماییم.

۱. مشتق عدد برابر صفر می‌باشد.

$$\boxed{1)\ f(x)=\underbrace{C}_{\text{یک عدد}} \Longrightarrow f'(x)=0}$$

$$f(x)=-10 \Longrightarrow f'(x)=0$$

$$f(x)=\sqrt{4} \Longrightarrow f'(x)=0$$

$$f(x)=-\tfrac{2}{5} \Longrightarrow f'(x)=0$$

$$f(x)=\pi \Longrightarrow f'(x)=0$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

$$\boxed{۲)\quad f(x)=x \implies f'(x)=1}$$

$$\boxed{۳)\quad f(x)=kx \implies f'(x)=k\times 1=k}$$

[illegible]

مثال۲.

$$f(x)=5x \implies f'(x)=5\times 1=5$$

$$f(x)=\sqrt{7}\,x \implies f'(x)=\sqrt{7}\times 1=\sqrt{7}$$

$$f(x)=-\frac{3}{10}x \implies f'(x)=-\frac{3}{10}\times 1=-\frac{3}{10}$$

$$f(x)=2/8\,x \implies f'(x)=2/8\times 1=2/8$$

$$f(x)=0/001\,x \implies f'(x)=0/001\times 1=0/001$$

فصل سوم: مشتق و كاربردهاي آن

$$4)\quad \boxed{f(x)=x^{n} \Rightarrow f'(x)=n x^{n-1}} \quad \text{(n یک عدد است)}$$

مثال ۳.

$$f(x)=x^{4} \Rightarrow f'(x)=4x^{3}$$

$$f(x)=x^{-4} \Rightarrow f'(x)=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}$$

$$f(x)=10x^{8} \Rightarrow f'(x)=10\times 8x^{7}$$

$$f(x)=\frac{7}{5}x^{-6} \Rightarrow f'(x)=\frac{7}{5}\times(-6)x^{-6-1}=\frac{7}{5}\times(-6)x^{-7}$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

نکته: تبدیل رادیکال به توان کسری

$$\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

فرجه — توان — توان — فرجه

مثال ۴.

$$\sqrt{x^{3}} = x^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[5]{x^{4}} = x^{\frac{4}{5}}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

مثال ۵. مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt[5]{x^{2}} = x^{\frac{2}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}}$$

$$\frac{2}{5} - 1 = \frac{2}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{3}{5}$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

مثال:

$$\boxed{5)\quad y = f(x) \pm g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

$$y = 2x^{5} - 7x + \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad y' = 2\times 5x^{4} - 7\times 1 + 0$$

$$y = 10x^{-2} + \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}} + 1 \quad \Longrightarrow \quad y' = 10\times(-2)\,x^{-3} + \frac{1}{2}\,x^{\overbrace{\frac{1}{2}-1}^{-\frac{1}{2}}} + 0$$

$$\frac{1}{7} - \frac{7}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$y = x^{3} - 5\underbrace{\sqrt[7]{x}}_{x^{\frac{1}{7}}} + \frac{2}{9}x \quad \Longrightarrow \quad y' = 3x^{2} - 5\times\frac{1}{7}\,x^{\frac{1}{7}-1} + \frac{2}{9}\times 1$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

$$7)\quad y = f(x) \times g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

$$y = (5x^{3})(1 - x^{-7}) \Rightarrow y' = (5 \times 3x^{2})(1 - x^{-7}) + (0 - (-7)x^{-8})(5x^{3})$$

$$y = (4 - x^{2})(\sqrt{x} + x) \Rightarrow y' = (0 - 2x)(\sqrt{x} + x) + \left(\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 1\right)(4 - x^{2})$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad -\tfrac{1}{2}$$

$$7)\ y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{\overset{\text{مشتق صورت}}{f'(x)}\times \overset{\text{خود مخرج}}{g(x)} - \overset{\text{مشتق مخرج}}{g'(x)}\times \overset{\text{خود صورت}}{f(x)}}{[g(x)]^2}$$

مثال ۸۰.

$$y=\frac{3x}{x^2-1} \Rightarrow y'=\frac{(3\times1)(x^2-1)-(2x-0)(3x)}{[x^2-1]^2}$$

$$y=\frac{\sqrt[4]{x} \rightarrow x^{\frac{1}{4}}}{x-x^4} \Rightarrow y'=\frac{(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}})(x-x^4)-(1-4x^3)(\sqrt[4]{x})}{(x-x^4)^2}$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^{3}}+2x-1$

۲) $f(x)=\frac{1}{4}x^{-4}-\frac{1}{2}x^{2}+4$

۳) $f(x)=(5x+\sqrt{x})(7-x^{-4})$

۴) $f(x)=(x^{3}+2)(1-2x^{-5})$

۵) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$

۶) $f(x)=\frac{x+\frac{1}{4}x^{4}}{4x^{2}+5}$

۷) $y=\frac{1}{x}$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

$$8)\quad y = u^{n} \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}\,u'$$

مشتق عبارت درون پرانتز

n, k: یک عدد

u: عبارتی برحسب x

مثال ۹

$$y = 5(x^2-1)^7 \Rightarrow y' = 5\times 7\,(x^2-1)^6 \times (2x-0)$$

$$y = (8-x^3)^{-10} \Rightarrow y' = -10\,(8-x^3)^{-11} \times (0-3x^2)$$

$$y = 9(\sqrt{x}+1)^3 \Rightarrow y' = 9\times 3\,(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0\right)$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{3}-1 = \frac{1}{3}-\frac{3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$y = \sqrt[3]{x^4+7} = (x^4+7)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(x^4+7)^{\frac{1}{3}-1}(4x^4+0)$$

$$y = 5x\sqrt{x+1} = \underbrace{5x}_{①}\underbrace{(x+1)^{\frac{1}{2}}}_{②} \Rightarrow y' = (5\times 1)(x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(5x)$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید:

۱) $f(x)=\sqrt[5]{x^{2}+3-2x^{-5}}$

۲) $f(x)=(3x-2)(4x^{2}+1)^{7}$

۳) $f(x)=\frac{1}{2}(5x^{-3}+2)^{-8}$

۴) $f(x)=10x^{2}\sqrt[3]{5-x}$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

فرمول مثلثات :

u : عبارتی برحسب x

$$\boxed{\begin{array}{ll} ① \; y=\sin u \Longrightarrow y'=\cos u\times u' \\ ② \; y=\cos u \Longrightarrow y'=-\sin u\times u' \end{array}}$$

[illegible] — مشتق داخل

مثال ها :

$$y=\sin(3x) \Longrightarrow y'=\cos(3x)\times(3\times1)$$

$$y=\sin x \Longrightarrow y'=\cos x\times1$$

$$y=\cos(x^2+1) \Longrightarrow y'=-\sin(x^2+1)\times(2x+0)$$

$$y=\cos x \Longrightarrow y'=-\sin x\times1$$

$$y=4\sin(7x)+\cos(5x) \Longrightarrow y'=4\times\cos(7x)\times(7\times1)-\cos(5x)\times(5\times1)$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

③ $y=\tan u \Rightarrow y'=(1+\tan^2 u)\times u'$

زاویه

④ $y=\cot u \Rightarrow y'=-(1+\cot^2 u)\times u'$

مشتق زاویه

مثال ۱۱.

$y=\tan(7x) \Rightarrow y'=(1+\tan^2(7x))\times(7\times 1)$

$y=\tan x \Rightarrow y'=(1+\tan^2 x)\times 1$

$y=\cot(1-x^3) \Rightarrow y'=-[1+\cot^2(1-x^3)](0-3x^2)$

$y=\tan(\sqrt{x})+2\cot x \Rightarrow y'=[1+\tan^2(\sqrt{x})]\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-2(1+\cot^2 x)\times 1$

$y=\sin^4(2x)=[\sin(2x)]^4 \Rightarrow y'=4[\sin(2x)]^3\times\cos(2x)\times(2\times 1)$

$y=\cot^3 x=[\cot x]^3 \Rightarrow y'=3[\cot x]^2[-(1+\cot^2 x)(1)]$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

تمرین:

۱) $y = \cos^2 x + 5\tan(3x)$

۲) $y = \sqrt{\sin x}$

۳) $y = \sin\sqrt{x}$

۴) $y = \sin(8x) - 4\cot x$

۵) $y = 9\cos(4x) + 10\tan^2 x$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

مروری بر مشتق توابع نمایی و لگاریتمی :

یادآوری لگاریتم :

$$\overset{\text{پایه}}{2}^{\overset{\text{توان}}{3}} = 8 \longleftrightarrow \log_{\underset{\text{پایه}}{2}} 8 = 3$$

$$7^2 = 49 \longleftrightarrow \log_7 49 = 2$$

$\log_e 5 = \ln 5$, $\log_e x = \ln x$, $e \simeq 2{,}71$ نپیر

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

$$\boxed{① \quad y = a^{u} \;\Longrightarrow\; y' = \underbrace{u'}_{\text{مشتق توان}} \times \underbrace{a^{u}}_{\text{خود عبارت}} \times \ln \underbrace{a}_{\text{پایه}}}$$

توان: u — پایه: a

u: عبارتی برحسب x

a: یک عدد

مثال ۱۲.

$$y = 2^{(x-1)} \Longrightarrow y' = (1-0) \times 2^{(x-1)} \times \ln 2$$

$$y = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{x} \Longrightarrow y' = 1 \times \left(\tfrac{1}{5}\right)^{x} \times \ln\left(\tfrac{1}{5}\right)$$

$$y = 4^{\sin x} \Longrightarrow y' = (\cos x \times 1) \times 4^{\sin x} \times \ln 4 \qquad (\sin u = \cos u \times u')$$

$$\text{②}\quad y = e^{\overset{\text{توان}}{u}} \;(e:\text{پایه}) \Longrightarrow y' = \underbrace{u'}_{\text{مشتق توان}} \times \underbrace{e^{u}}_{\text{خود عبارت}}$$

u: عبارتی برحسب x ، $e \simeq 2{,}71$ عدد نپر

مثال ۳.

$$y = e^{2x} \Longrightarrow y' = (2 \times 1)\, e^{2x}$$

$$y = e^{\cos x} \Longrightarrow y' = -\sin x \times 1 \times e^{\cos x}$$

$$(\cos u = -\sin u \times u')$$

$$y = e^{x} \Longrightarrow y' = 1 \times e^{x}$$

$$y = e^{(x^4+5)} \Longrightarrow y' = (4x^3 + 0)\, e^{(x^4+5)}$$

$$y = e^{\sqrt{x}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \times e^{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{③ \quad y=\log_a u \longrightarrow y'=\frac{u'}{u\times \ln a}}$$

پایه

مثال ۱۴.

$$y=\log_5 (x^2-1) \Longrightarrow y'=\frac{2x-0}{(x^2-1)\times \ln 5}$$

$$y=\log_7 \sin x \Longrightarrow y'=\frac{\cos x\times 1}{\sin x\times \ln 7}$$

$$y=\log_{\frac{1}{4}} x \Longrightarrow y'=\frac{1}{x\times \ln 1/4}$$

$$\boxed{④\quad y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$$

U: تابعی از x

مثال ها:

$$y=\ln(x^2-1) \Rightarrow y'=\frac{2x-0}{x^2-1}$$

$$y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$$

$$y=\ln(\cos x) \Rightarrow y'=\frac{-\sin x \times 1}{\cos x}$$

مثال ۱۲.

$$y=\log_{\frac{1}{7}}(x^3-10)+e^{-8x} \Rightarrow y'=\frac{3x^2-0}{(x^3-10)\times \ln\frac{1}{7}}+(-8\times 1)e^{-8x}$$

$$y=5^{\sqrt{x}}+\ln(x^3+1) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\times 5^{\sqrt{x}}\times \ln 5+\frac{3x^2+0}{x^3+1}$$

$$\left(\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\right)$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y=\log_{10}\tan x$, ۲) $y=e^{-x}+4^{(x^2-3)}$

۳) $y=\log_{8}(x-x^3)$, ۴) $y=\ln(\sin x)$

۵) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{\cot x}$, ۶) $y=\ln(x^{-2}+1)$

۷) $y=\sin^3 x+e^{7x}$, ۸) $y=\tan^4 x-\ln(\sqrt{x}-1)$

۹) $y=4\cot x-2^x$, ۱۰) $y=\log_{\frac{1}{11}}(2x^3+5)$

مشتق مراتب بالاتر :

مشتق مرتبه اول تابع $y=f(x)$ را با $y'=f'(x)$ نشان میدهیم. اگر از تابع $y'=f'(x)$ مشتق گرفته شود، آن را با $y''=f''(x)$ نشان میدهیم و مشتق مرتبه دوم تابع نامیده میشود. به این ترتیب با مشتق گیری پی در پی مشتق مراتب بالاتر تابع بدست میآید.

مثال ۱۷ مشتق مرتبه سوم تابع زیر را بدست آورید.

$$y=\sin(2x)$$

$$y'=\cos(2x)\times(2\times1)=2\cos(2x)$$

$$y''=2\times\left[-\sin(2x)\times(2\times1)\right]=-4\sin(2x)$$

$$y'''=-4\left[\cos(2x)\times(2\times1)\right]=-8\cos(2x)$$

مثال ۱۸: مشتق مرتبه پنجم تابع زیر را بدست آورید.

$$y = 3x^4 - 5x + 10$$

$$y' = 3 \times 4x^3 - 5 \times 1 + 0 = 12x^3 - 5$$

$$y'' = 12 \times 3x^2 - 0 = 72x^2$$

$$y''' = 72 \times 2x = 144x$$

$$y^{(4)} = 144 \times 1 = 144$$

$$y^{(5)} = 0$$

تمرین: مشتق مرتبه دوم تابع زیر را بدست آورید.

$$y = \ln(x^2 + 5)$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

کاربرد مشتق :

نقطه بحرانی تابع : نقطه‌ای که مشتق مرتبه اول تابع یعنی $y' = f'(x)$ مساوی صفر است و یا تعریف نشده باشد، نقطه بحرانی تابع نامیده می‌شود.

مثال ۱۹. نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{2} = 2}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

نواحی صعودی و نزولی تابع :

برای تعیین نواحی صعودی و نزولی تابع $y=f(x)$ ، نقاط بحرانی آن را با حل $y'=f'(x)=0$ بدست آورده و سپس این نقاط را همراه $f'(x)$ در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم. هرجا علامت $f'(x)$ مثبت باشد تابع $f(x)$ صعودی $(\nearrow)$ و هرجا علامت $f'(x)$ منفی باشد تابع $f(x)$ نزولی $(\searrow)$ است.

مثال ۲۰. نواحی صعودی و نزولی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^2-3x$$

$$f'(x)=2x-3=0 \rightarrow 2x=3 \rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$$ نقطه بحرانی تابع

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)=2x-3$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$ نزولی	min	$\nearrow$ صعودی	

فصل سوم: مشتق و كاربردهاي آن

نقاط min و max تابع:

هرگاه در جدول تعیین علامت $f'(x)$ ، تابع $f(x)$ ابتدا نزولی و سپس صعودی ($\searrow \nearrow$) باشد نقطه min دارد.

ابتدا صعودی و سپس نزولی ($\nearrow \searrow$) باشد نقطه max می باشد.

رسم تابع:

برای رسم تابع مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

الف) تعیین نقاط بحرانی تابع $y=f(x)$. ($y'=f'(x)=0$).

ب) نقاط بحرانی و $f'(x)$ را در جدول تعیین علامت قرار داده، و نواحی صعودی و نزولی و نقاط max و min تابع را تعیین می کنیم.

ج) مقدار تابع $y=f(x)$ را در نقاط max و min محاسبه می کنیم.

د) نقاط min و max را در صفحه مختصات تعیین و نمودار تابع $y=f(x)$ را از روی جدول تعیین علامت رسم می کنیم.

فصل سوم: مشتق و كاربردهاي آن

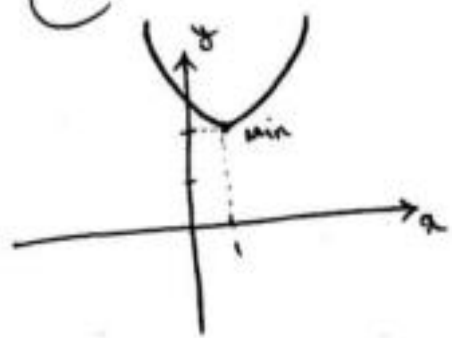
مثال ۲۲. تابع زیر را رسم کنید (نقاط بحرانی، نواحی صعودی و نزولی و نقاط max و min تابع را تعیین و آن را رسم نمایید.)

$$f(x)=x^2-2x+3$$

$$f'(x)=2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{2}=1}$$

نقطه بحرانی تابع

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)=2x-2$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘ نزولی	min	↗ صعودی



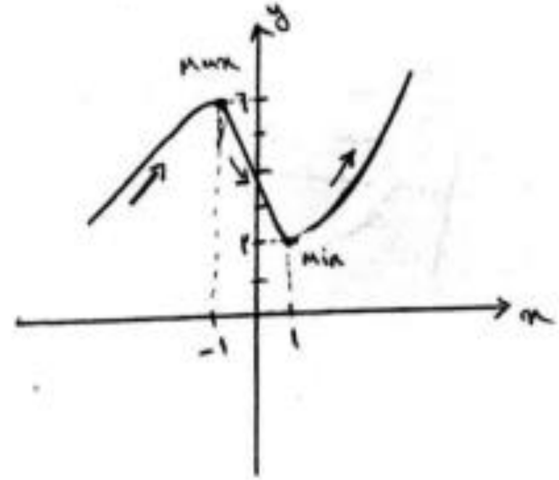
min نقطه: $x=1 \rightarrow f(1)=(1)^2-2(1)+3=1-2+3=2 \Rightarrow (1,2)$ نقطه min

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

$f(x) = x^3 - 3x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow 3x^2 = 3 \longrightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \Longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$ نقاط بحرانی

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	



min نقطه: $x = 1 \longrightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2 \longrightarrow (1, 2)$: min نقطه

max نقطه: $x = -1 \longrightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6 \longrightarrow (-1, 6)$: max نقطه

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

تمرین: توابع زیر را رسم کنید:

۱) $f(x) = -3x^2 - 6x + 5$

۲) $f(x) = x^2 - 8x + 1$

۳) $f(x) = x^3 - 3x + 7$

۴) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

قاعده هوپیتال.

هرگاه حاصل حد یک کسر برابر $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ شود گوئیم جواب مبهم است و باید رفع ابهام شود. یکی از روشهای رفع ابهام قاعده هوپیتال است که در آن مشتق صورت را در صورت و مشتق مخرج را در مخرج کسر قرار می‌دهیم و سپس حاصل حد را مجدداً محاسبه کنیم.

مثال ۲۴.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{1-x^2} = \frac{3(1)-3}{1-(1)^2} = \frac{3-3}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad \text{رفع ابهام}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{1-x^2} \xlongequal{\text{قاعده هوپیتال}} \lim_{x\to 1} \frac{3\times 1-0}{0-2x} = \frac{3\times 1}{-2(1)} = \frac{3}{-2}$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+5x+6} = \frac{-3+3}{(-3)^2+5(-3)+6} = \frac{0}{0}$$ مبهم

رفع ابهام

$$\lim_{x\to -3} \frac{1}{2x+5} = \frac{1}{2(-3)+5} = \frac{1}{-6+5} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$ مبهم $\xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{رفع ابهام}}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \times 1}{1} = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x + 1}{e^x - 5} = \frac{3e^{\infty} + 1}{e^{\infty} - 5} = \frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

رفع ابهام

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 \times 1 \times e^x + 0}{1 \times e^x - 0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \times 1 \times \cancel{e^x}}{1 \times \cancel{e^x}} = \frac{3}{1} = 3$$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

تمرین: حاصل حدود زیر را بدست آورید:

۱) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+x}{x^3+1}$

۲) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{2 - 5e^x}$

۳) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$

۴) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

۵) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x + 7}{x^2 - 49}$

۶) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 2x}{4 - e^x}$

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

مشتق‌گیری ضمنی:

هرگاه در عبارتی متغیرهای x و y به طور جدا نشدنی نسبت به یکدیگر باشند عبارت را ضمنی می‌نویسیم. مانند عبارت $x^2y - y^3 + \sin x = 0$

در این حالت مشتق y نسبت به x، یعنی y'_x به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

F'_x ← مشتق نسبت به x

F'_y ← مشتق نسبت به y

y'_x ← مشتق y نسبت به x

توصیه: برای تعیین مشتق تابع نسبت به x، متغیر y را عدد ثابت در نظر بگیریم و همینطور

برای تعیین مشتق تابع نسبت به y، متغیر x را عدد ثابت فرض می‌نمائیم.

فصل سوم: مشتق و کاربردهاي آن

مثال ۲۴. مشتق تابع ضمنی زیر را بدست آورید:

۱) $x^2 - 2xy + y^3 + 1 = 0$

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$F'_x \overset{\text{ثابت } y}{=\!=} 2x - 2\times 1\times y + 0 + 0$$

$$F'_y \overset{\text{ثابت } x}{=\!=} 0 - 2x\times 1 + 3y^2 + 0$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{2x - 2\times 1\times y}{-2x + 3y^2}$$

۲) $x^2y^3 + x^3 - y\cos x = 0$

$$F'_x \overset{\text{ثابت } y}{=\!=} 2xy^3 + 0 - y(-\sin x\times 1)$$

$$F'_y \overset{\text{ثابت } x}{=\!=} x^2(3y^2) + 0 - 1\times\cos x$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{2xy^3 + y\sin x\times 1}{x^2(3y^2) - 1\times\cos x}$$

۶) $-4xy^2 + ye^x + x^2 - 7 = 0$

$F'_x = -4\times1\times y^2 + y\times1\times e^x + 2x - 0$

$F'_y = -4x\times2y + 1\times e^x + 0 - 0$

$\Longrightarrow y'_x = -\dfrac{-4\times1\times y^2 + y\times1\times e^x + 2x}{-4x\times2y + 1\times e^x}$

تمرین: مشتق توابع ضمنی زیر را بدست آورید.

$x^3y^2 - y\ln x + 5\sin x = 0$

$x - y^3 + 15\cos y = 0$

$\tan x - 14y^2x^7 - 1 = 0$

$x^{-3} + y - 7xy^2 = 10$