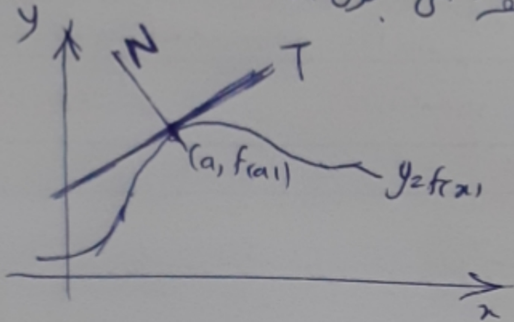
کاربرد مشتق: خط مماس و قائم بر یک منحنی

فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد. میخواهیم از نقطه ی

۳۹

$(a,f(a))$ روی نمودار تابع، خطی مماس و قائم بر نمودار تابع رسم کنیم

ثابت می شود که شیب خط مماس $T$ در نقطه ای به طول $a$




برابر است با $f'(a)=m$ و لذا معادله خط مماس

عبارت است از:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

خطی که از $(a,f(a))$ می گذرد و بر $T$ عمود است خط قائم بر نمودار تابع در نقطه $(a,f(a))$ نامیده می شود. شیب خط قائم $N$ برابر است با $-\frac{1}{f'(a)}$ و لذا معادله اش

عبارت است از $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

مثال: معادلات خطوط مماس و قائم بر نمودار توابع زیر را در نقاط داده شده زیر بنویسید

الف) $y=f(x)=2x^2+x+1 \qquad a=1$

$a=1 \to f(a)=2(1)^2+1+1=4 \to (a,f(a))=(1,4)$ پس میخواهیم از نقطه $(1,4)$

روی نمودار، خطی مماس و قائم بر منحنی رسم کنیم

$f'(x)=4x+1 \to$ شیب خط مماس $=m=f'(1)=4(1)+1=5$

شیب خط قائم $=-\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{5}$

معادله خط مماس: $y-4=5(x-1)$

معادله خط قائم: $y-4=-\frac{1}{5}(x-1)$

ب) $y=f(x)=\sqrt{x^2-1} \quad ; a=-2$

$a=-2 \to f(a)=f(-2)=\sqrt{(-2)^2-1}=\sqrt{3} \to$ از نقطه $(-2,\sqrt{3})$ روی نمودار خطی

مماس و قائم بر نمودار رسم میکنیم

۴۰

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

شیب خط مماس $= m = f'(a) = f'(-2) = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2-1}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

شیب خط قائم $= -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{\frac{-2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

معادله خط مماس: $y - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x-(-2))$

معادله خط قائم: $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-(-2))$

ب) $y = \frac{-2x+3}{x-2}$ $\quad a = 3$

میخواهیم از نقطه $(3,-3)$ خط مماس و قائم بر نمودار تابع رسم کنیم

$a = 3 \to y = f(3) = \frac{-2(3)+3}{3-2} = -3$

$$y' = f'(x) = \frac{-2(x-2)-(1)(-2x+3)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

شیب خط مماس $m = f'(3) = \frac{1}{(3-2)^2} = 1$

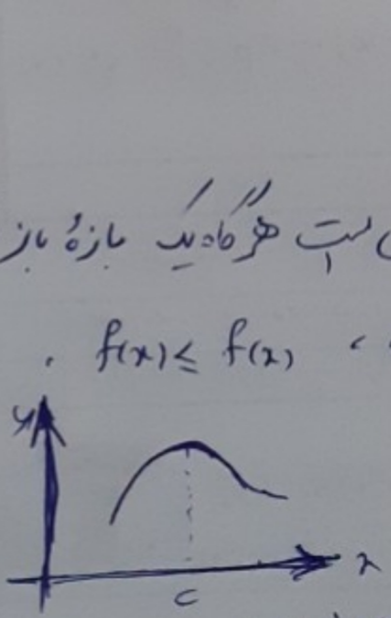
شیب خط قائم $= -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{1} = -1$

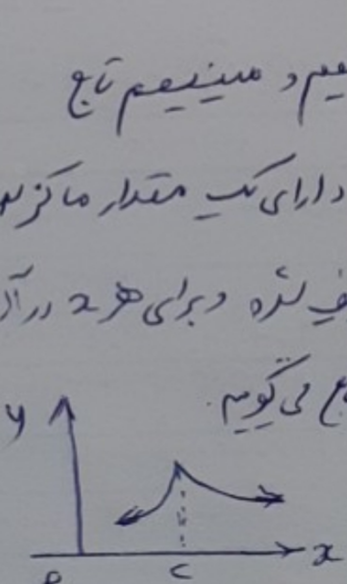
معادله خط مماس: $y-(-3) = 1(x-3)$

معادله خط قائم: $y-(-3) = -1(x-3)$

کاربرد مشتق: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع

تعریف: تابع $f$ در نقطه‌ای چون $c$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی است هرگاه یک بازهٔ باز شامل $c$ موجود باشد که $f$ روی آن تعریف شده و برای هر $x$ در آن بازه، $f(x) \le f(x)$. مقدار $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می‌گوییم.

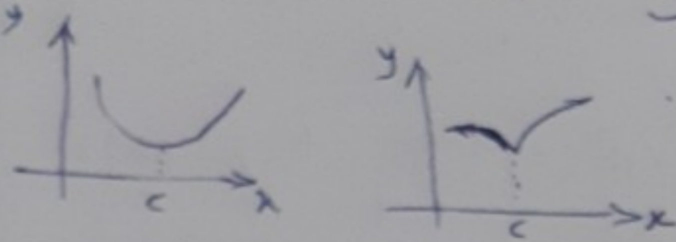



$f$ در $c$ ماکزیمم نسبی دارد

تعریف: می‌گوییم تابع f در c یک مقدار مینیمم نسبی دارد هرگاه بازه‌ی بازی شامل c موجود باشد که f روی آن تعریف شده و برای هر x در آن بازه $f(x) \ge f(c)$.

$f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌گوییم.



f در c مینیمم نسبی دارد

اگر تابع f در c یک مقدار ماکزیمم نسبی یا یک مقدار مینیمم نسبی داشته باشد، می‌گوییم در آن نقطه یک مقدار اکسترمم نسبی دارد.

قضیه: فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای مانند $(a,b)$ تعریف شده و $c \in (a,b)$. اگر f در نقطه c یک مقدار اکسترمم نسبی داشته و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$.

نتیجه: اکسترمم های نسبی تابع f در نقاطی مانند c رخ می‌دهند که یا $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

تعریف: عدد c در $D_f$ را یک نقطه بحرانی تابع f گوییم که یا $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

لذا شرط لازم برای اینکه تابع f در c دارای اکسترمم نسبی باشد این است که c یک نقطه بحرانی باشد.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

الف) $y=f(x)=2x^2-4x+1$

$D_f=\mathbb{R}$ , $f'(x)=4x-4$

$f'(x)$ همه جا موجود است پس نقاط بحرانی، نقاطی هستند که $f'(x)=0$

$f'(x)=4x-4=0 \to \underline{x=1}$ نقطه بحرانی

ب) $f(x)=-x^3+3x^2+2$

$D_f=\mathbb{R}$ , $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)=0 \to \boxed{x=0, 2}$ نقاط بحرانی

$f'(x)$ همه جا موجود است

۴۲ ب) $y = f(x) = 2x^3 + 6x + 10$

$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6x^2 + 6$

ج) $f'(x)$ همواره وجود دارد و $f'(x) > 0$، یعنی $f'(x)$ هیچ‌جا صفر نمی‌شود پس تابع $f$ نقطه بحرانی ندارد

ت) $y = f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

$$f'(x) = (x)'\sqrt{1-x^2} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$$

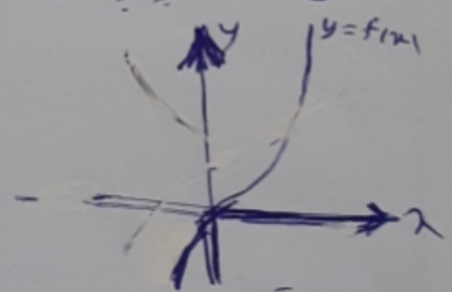
$$= \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} + x(-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f'(x)$ در نقاط $1$ و $-1$ نیز موجود نمی‌باشد

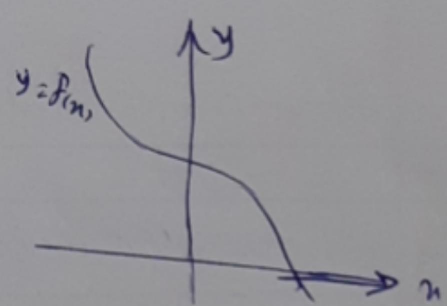
توجه: تابع $f$ را در بازه $I$ صعودی گوییم هرگاه برای هر $x_1$ و $x_2$ در $I$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$




و همچنین تابع $f$ را روی بازه $I$ نزولی گوییم هرگاه برای هر $x_1$ و $x_2$ در $I$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$




قضیه: فرض کنیم تابع $f$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و روی بازه باز $(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد

الف) اگر برای هر $x$ در $(a,b)$، $f'(x) > 0$، آنگاه $f$ روی $[a,b]$ صعودی است

ب) اگر برای هر $x$ در $(a,b)$، $f'(x) < 0$، آنگاه $f$ روی $[a,b]$ نزولی است

بنابراین برای یافتن فواصلی که تابع f روی آنها صعودی و یا روی آنها نزولی است، مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

مثال: فواصل صعودی، نزولی توابع زیر را مشخص کنید

الف) $y=f(x)=x^3+3x^2+3x-4$

$D_f=\mathbb{R}$ ، $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2=0 \to x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ صعودی | | ↗ صعودی | |

$f(x)$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است

ب) $f(x)=-x^3+3x^2+10$

$D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)=0 \to x=0,2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ نزولی | | ↗ صعودی | | ↘ نزولی | |

$f(x)$ روی $[0,2]$ صعودی و روی $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ نزولی است

پ) $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$

$D_f=\mathbb{R}-\{3\}$ $\quad f'(x)=\frac{1(x-3)-1(x+2)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$

$f'(x)$ همه جا منفی است یعنی تابع $f$ روی دامنه‌اش $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ نزولی است

قضیه (آزمون مشتق اول برای اکسترمم های نسبی) فرض کنیم c یک نقطه بحرانی تابع f بوده و تابع f در یک همسایگی محذوف c پیوسته باشد. هرگاه $f'$ در عبور از c تغییر علامت دهد آنگاه f در c یک مقدار اکسترمم نسبی دارد. اگر تغییر علامت $f'$ از مثبت به منفی باشد، آنگاه f در c یک مقدار ماکزیمم نسبی دارد و اگر تغییر علامت $f'$ در عبور از c از منفی به مثبت باشد، آنگاه f در c یک مقدار مینیمم نسبی دارد

مثال: نقاط بحرانی و ماهیت آنها را برای توابع زیر تعیین کنید

الف) $f(x) = 4 + 2x - x^2$

$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1$ نقطه بحرانی

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ صعودی | $5$ max نسبی | $\searrow$ نزولی | |

تابع f مقدار ماکزیمم نسبی ۵ دارد که در نقطه‌ای به طول 1 به دست می‌آید

ب) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 3$

$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

نقاط بحرانی

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |
| | | | max نسبی | | min نسبی | | |

مقدار ماکزیمم نسبی تابع ۷ است که در نقطه ۲- به دست می‌آید و مقدار مینیمم نسبی تابع ۱- است که در نقطه ۲ حاصل می‌شود

ج) $f(x) = x^3 + 2x - 10$

$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

۴۵ $f'(x)$ هیچ جا صفر نمی‌شود و همواره موجود است پس تابع $f$ نقطه‌ی بحرانی ندارد یعنی $f(x)$ اکسترمم نسبی ندارد

ت) $f(x)=3x^4-4x^3$

$D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)=0 \longrightarrow x=0,1$ نقاط بحرانی

$f'(x)$ از دو عبارت $12x^2$ و $x-1$ تشکیل می‌شود و جدول زیر تعیین علامت می‌گردد،

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $12x^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |
| | | | | | min نسبی | | |

مقدار مینیمم نسبی تابع $-1$ است که به ازای نقطه‌ی بحرانی $1$ حاصل می‌شود. توجه کنید که مشتق تابع در عبور از نقطه‌ی بحرانی $0$ تغییر علامت نمی‌دهد پس تابع در این نقطه اکسترمم نسبی ندارد

ث) $y=f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

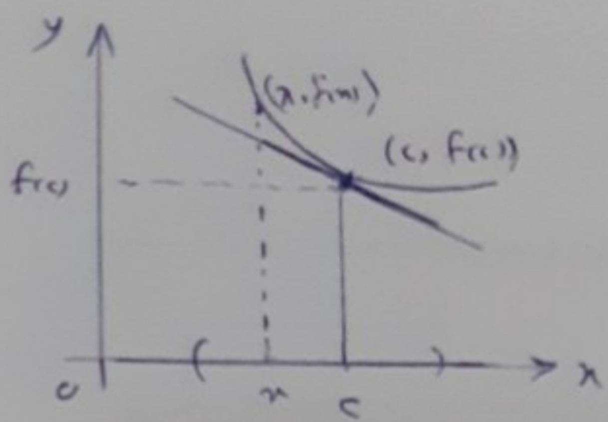
$D_f=[-1,1]$ $\quad f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | |
| | | | min نسبی | | max نسبی | | |

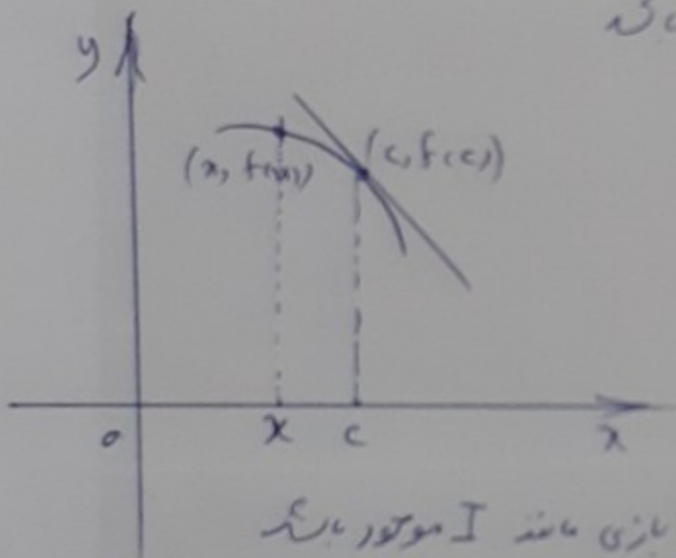
تقعر و نقطه‌ی عطف:

تعریف: تقعر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $(c,f(c))$ رو به بالاست هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و بازه‌ای باز شامل $c$ باشد که برای هر $x\neq c$ در آن بازه،

نقطه $(x, f(x))$ بالای خط مماس بر نمودار $f$ در نقطه $(c, f(c))$ باشد.




توضیح: تقعر نمودار تابع $f$ در نقطه $(c, f(c))$ رو به پایین است اگر $f'(c)$ موجود باشد و بازه‌ی بازی شامل $c$ وجود داشته باشد که برای هر $x \neq c$ در آن بازه، نقطه $(x, f(x))$ پایین خط مماس بر نمودار $f$ در نقطه $(c, f(c))$ باشد.




قضیه: فرض کنیم $f''(x)$ برای هر $x$ در بازه‌ی بازی مانند $I$ موجود باشد.

الف) اگر برای هر $x \in I$، $f''(x) > 0$، آنگاه تقعر نمودار $f$ بر $I$ رو به بالا است.

ب) اگر برای هر $x \in I$، $f''(x) < 0$، آنگاه تقعر نمودار $f$ بر $I$ رو به پایین است.

مثال: فواصلی را بیابید که تقعر نمودار $f$ در آن‌ها رو به بالا و یا رو به پایین باشد.

الف) $f(x) = 4x^2 + 3x - 1$

$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 8x + 3, \quad f''(x) = 8$

چون برای هر $x$ در $\mathbb{R}$، $f''(x) > 0$ پس تقعر نمودار روی $\mathbb{R}$ رو به بالا است.

ب) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 10$

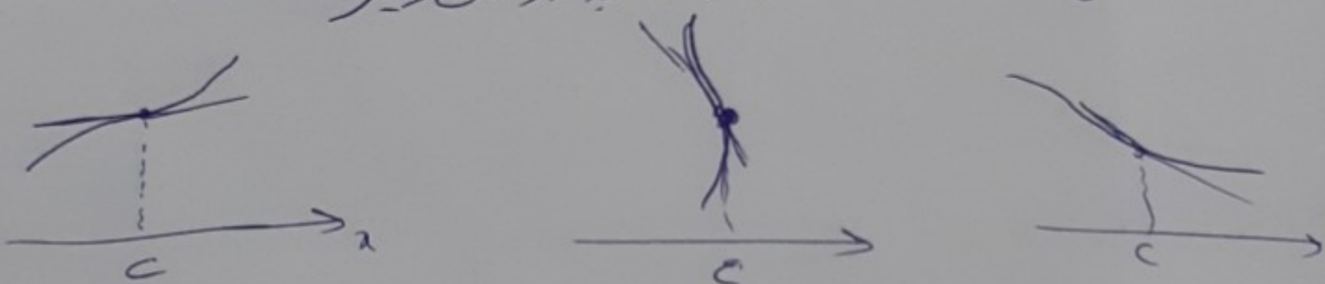
$D_f=\mathbb{R},\quad f'(x)=4x^3-12x+8$

$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)=0 \to x=\pm 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | $\cup$ تقعر رو به بالا | | $\cap$ تقعر رو به پایین | | $\cup$ تقعر رو به بالا | |

اگر $-1<x<1$ ، تقعر نمودار رو به پایین و رو $x<-1$ و $x>1$ تقعر نمودار رو به بالا است

تعریف: نقطه $(c,f(c))$ را نقطه عطف نمودار تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه در این نقطه خط مماس داشته باشد و $f''(x)$ در عبور از آن تغییر علامت دهد




مثال: نقاط عطف نمودار توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=3x^4+4x^3$

$D_f=\mathbb{R},\quad f'(x)=12x^3+12x^2$

$f''(x)=36x^2+24x=0 \Rightarrow 12x(3x+2)=0 \to x=0,\ x=-\frac{2}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\cup$ | $-\frac{16}{27}$ | $\cap$ | $0$ | $\cup$ |

نقاط $(0,0)$ و $(-\frac{2}{3},-\frac{16}{27})$ نقاط عطف نمودار هستند

۴۸

ب) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f''(x) = -6x + 6 = 0 \longrightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | $2$ | $\frown$ |

عطف

(۱,۲) نقطهٔ عطف نمودار

رسم نمودار تابع

برای رسم نمودار تابع $f(x)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

۱) دامنه تابع را تعیین می‌کنیم

۲) نقاط برخورد نمودار را با محورهای مختصات تعیین می‌کنیم

۳) $f'(x)$ را محاسبه نموده و نواحی صعودی و نزولی تابع و همچنین اکسترمم‌های نسبی را بدست می‌آوریم

۴) $f''(x)$ را یافته و نقاط عطف نمودار را بدست می‌آوریم

۵) رفتار تابع را در نقاط انتهایی دامنه بررسی می‌کنیم

۶) اطلاعات بدست آمده در مراحل قبل را در جدولی موسوم به جدول تغییرات تابع تنظیم می‌کنیم

۷) اگر نقاط برای رسم، کافی نباشد چند نقطه به عنوان نقطهٔ کمکی برای رسم بهتر نمودار تابع، اختیار می‌کنیم

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$

$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$x = 0 \longrightarrow y = -3$

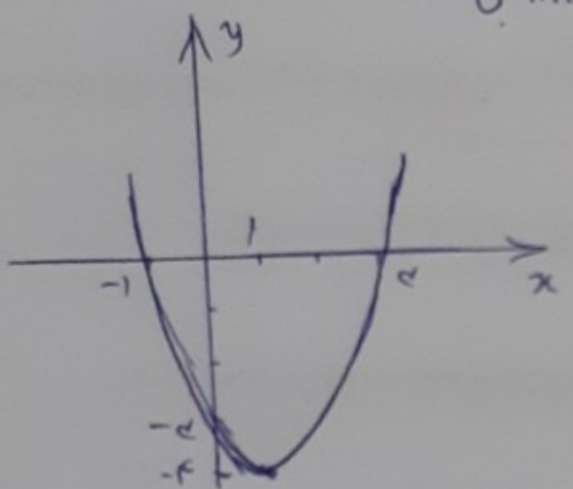
$y = 0 \longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$

۴۹ $f'(x)=2x-2=0 \longrightarrow x=1$ نقطه بحرانی

$f''(x)=2>0 \longrightarrow$ تقعر نمودار همواره رو به بالا است

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | | | | | | min نسبی | | | | |




ب) $y=f(x)=-x^3+3x^2$

$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$x=0 \longrightarrow y=0$

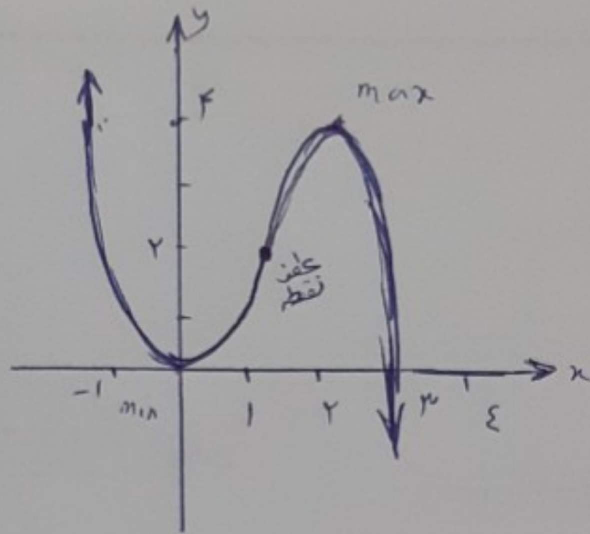
$y=0 \longrightarrow -x^3+3x^2=-x^2(x-3)=0 \rightarrow x=0\,,\,3$

$f'(x)=-3x^2+6x=0 \longrightarrow 3x(-x+2)=0 \longrightarrow x=0,\,2$ نقاط بحرانی

$f''(x)=-6x+6=0 \longrightarrow x=1$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-x^3)=\mp\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| | | | | | min نسبی | | عطف نقطه | | max نسبی | | | | |




دیفرانسیل

فرض کنیم $y=f(x)$ یک تابع باشد. اگر $f'(x)$ موجود باشد آنگاه داریم

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

با به تعریف حد، اگر $|\Delta x|$ به قدر کافی کوچک باشد آنگاه $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)$ نیز به قدر کافی کوچک خواهد بود و

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\approx 0$$ و

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx f'(x)$$ و $$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x .$$

پس اگر $|\Delta x|$ به قدر کافی کوچک باشد: $\boxed{f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x}$

$f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ در نقطه $x$ می‌نامیم و لذا اگر $|\Delta x|$ به قدر کافی کوچک باشد آنگاه $\boxed{\Delta f\approx df}$ و با $df(x)$ نمایش می‌دهیم

تعریف: دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ را با $df$ یا $dy$ و یا $df(x)$ نمایش داده و به صورت $df=f'(x)\Delta x$ تعریف می‌کنیم. که در آن $\Delta x$ نمو (تغییرات) متغیر مستقل $x$ است.
دیفرانسیل متغیر مستقل $x$ را با $dx$ نمایش داده و به صورت $dx=\Delta x$ تعریف می‌کنیم و لذا

۵۱

دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ به صورت $\boxed{df=f'(x)\,dx}$ تعریف می‌شود

مثال: دیفرانسیل توابع زیر را بیابید

الف) $y=x\sin x$

$dy=y'dx=(\sin x+x\cos x)\,dx$

ب) $y=3-x$

$dy=(3-x)'dx=-dx$

ج) $y=(\sqrt{x^2+1}+x)^4$

$(u^4)'=4u^3u'$

$dy=y'dx=4(\sqrt{x^2+1}+x)^3\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right)dx$

د) $u=4t^2-t$

$du=u'dt=(8t-1)\,dt$

اگر $|\Delta x|$ به قدر کافی کوچک باشد $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$ ولذا

$$\boxed{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x}$$

از این فرمول برای محاسبه مقدار تقریبی یک عدد و یا یک عبارت استفاده می‌شود

مثال: مقدار تقریبی اعداد $\sqrt{101}$، $\sqrt{24}$ و $\sqrt{98}$ را بیابید

تعریف می‌کنیم $f(x)=\sqrt{x}$ ولذا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ حال

$\sqrt{101}=f(101)=f(\overset{x}{100}+\overset{\Delta x}{1})\approx f(100)+f'(\overset{x}{100})(\overset{\Delta x}{1})=\sqrt{100}+\frac{1}{2\sqrt{100}}(1)=10+\frac{1}{20}=10{,}05$

$\sqrt{24}=f(24)=f(\overset{x}{25}\overset{\Delta x}{-1})\approx f(25)+f'(25)(-1)=\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}(1)=5+\frac{1}{10}=5{,}1$

$\sqrt{98}=f(98)=f(\overset{x}{100}+\overset{\Delta x}{(-2)})\approx f(100)+f'(100)(-2)=\sqrt{100}+\frac{1}{2\sqrt{100}}(-2)=10-\frac{1}{10}=9{,}9$