انتگرال نامعین

فرض کنیم $f(x)$ تابعی معین و تعریف شده در بازه‌ی I باشد. $F(x)$ را تابعی دیگر در I در نظر می‌گیریم که $\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)=f(x)$ $(x\in I)$، در این صورت $F(x)$ را پادمشتق (تابع اولیه یا انتگرال) $f(x)$ روی I می‌نامیم.

$$f(x) \xleftarrow{\text{پادمشتق}} F(x) \xrightarrow{\text{عمل مشتق}} f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} F(x)$$

مثال: فرض کنیم $F(x)=x^3-2x$ یک پادمشتق تابع $f(x)=3x^2-2$ روی $\mathbb{R}$ است زیرا برای هر x در $\mathbb{R}$، $F'(x)=f(x)$. همچنین تابع $G(x)=x^3-2x+1$ نیز یک پادمشتق $f(x)$ است زیرا $G'(x)=f(x)$. و نیز تابع $H(x)=x^3-2x-5$ هم یک پادمشتق $f(x)=3x^2-2$ است زیرا $H'(x)=f(x)$.

به طور کلی هر تابع به شکل x^3-2x+c (c ثابت) یک پادمشتق $f(x)=3x^2-2$ است.

نتیجه: ← یک تابع بی‌نهایت پادمشتق دارد

← اختلاف هر دو پادمشتق یک تابع فقط در یک ثابت است.

تعریف: اگر $F(x)$ یکی از پادمشتق‌های تابع $f(x)$ باشد، $F(x)+C$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ نامیده و با $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم پس

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C \qquad (F'(x)=f(x))}$$

پس عمل انتگرال، یعنی یافتن پادمشتق، یعنی یافتن تابعی که مشتق آن داده شده باشد.

قوانین انتگرال:

۱) $\int dx = x+c$ (چون $(x)'=1$)

۲) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ $(n\neq -1)$ زیرا $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$

۳- اگر f و g دو پادمشتق داشته باشند $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ ، $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

$$I=\int a\,dx = a\int dx = a(x+c) = ax + ac = ax + C$$

ac ثابت است و جای آن ثابت دیگری مثل C قرار می‌دهیم

$$I=\int(4x^2+7x)\,dx = \int 4x^2dx + \int 7x\,dx$$

$$=4\int x^2dx + 7\int x\,dx = 4\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+c_1\right) + 7\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}+c_2\right)$$

$$= 4\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + \underbrace{4c_1+7c_2}_{C} = 4\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + C$$

از این به بعد فقط ثابت آخری را می‌نویسیم و یک C در آخر اضافه می‌کنیم

$$I=\int(4x^5-12x^3+17x-8)\,dx = 4\frac{x^6}{6} - 12\frac{x^4}{4} + 17\frac{x^2}{2} - 8x + C$$

$$I=\int\left(5x^3 - \frac{4}{x^2} + 3\sqrt{x} - \frac{2}{5\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{3}\right)dx$$

$$\boxed{\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$$

ساده می‌کنیم

$$=\int\left(5x^3 - 4x^{-2} + 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}\right)dx$$

$$= 5\frac{x^{3+1}}{3+1} - 4\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{2}{5}\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} - \frac{5}{3}x + C$$

$$I=\int\left(4x^3 + 2x - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right)dx$$

$$=\int\left(4x^3 + 2x - 3x^{-4} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 1\right)dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - x + C$$

$$= x^4 + x^2 + \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} - x + C$$

$$I=\int\frac{5x^2-x+1}{x^7}\,dx = \int(5x^2-x+1)x^{-7}\,dx$$

$$=\int(5x^{-5} - x^{-6} + x^{-7})\,dx = 5\frac{x^{-4}}{-4} - \frac{x^{-5}}{-5} + \frac{x^{-6}}{-6} + C$$

۵۴

$$I=\int \frac{3x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx=\int (3x^2+5x-1)\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx \qquad \boxed{x^n x^m = x^{m+n}}$$

$$=\int \left(3x^{\frac{3}{2}}+5x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = 3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C$$

قوانین انتگرال

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx=\tan x+C \qquad \int (1+\cot^2 x)\,dx=-\cot x+C$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C \qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\int x^{-1}\,dx=\ln|x|+C$$

مثال: انتگرال بگیرید

$$I=\int (5\cos x-2\sin x+x^3-2e^x+1)\,dx$$

$$=5\sin x-2(-\cos x)+\frac{x^4}{4}-2e^x+x+C$$

$$I=\int \Big(\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to x^{-3}}+3^x-5x^4-2\Big)dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+\frac{3^x}{\ln 3}-5\frac{x^{4+1}}{4+1}-2x+C$$

$$I=\int \frac{5x^3-2x+7}{x^2}\,dx=\int (5x^3-2x+7)\,x^{-2}\,dx=\int (5x-2x^{-1}+7x^{-2})\,dx$$

$$=5\frac{x^2}{2}-2\ln|x|+7\frac{x^{-1}}{-1}+C$$

$$I=\int (3x^4+\tan^2 x+7x-3)\,dx$$

عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم

$$=\int (3x^4+\underbrace{\tan^2 x+1}-1+7x-4)\,dx$$

$$=3\frac{x^5}{5}+\tan x+7\frac{x^2}{2}-4x+C$$

۵

$$I=\int \cot^2 x\,dx=\int(\underbrace{\cot^2 x+1}-1)\,dx=-\cot x-x+C$$

فرض کنیم بخواهیم انتگرال $I=\int 2x(x^2+1)^{10}dx$ را محاسبه کنیم. قرار میدهیم $u=x^2+1$ و لذا $du=2xdx$ و بنابراین

$$I=\int(\underbrace{x^2+1}_{u})^{10}\underbrace{2x\,dx}_{du}=\frac{(x^2+1)^{11}}{11}+C$$

(یا می‌نویسیم $I=\int(x^2+1)^{10}2x\,dx=\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+C=\frac{(x^2+1)^{11}}{11}+C$)

این روش را انتگرال گیری به روش تغییر متغیر و یا جانشینی می‌گوییم.

فرمولهای متداول انتگرال

$\int du=u+C$ و $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$ و $\int u^{-1}du=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$

$\int \sin u\,du=-\cos u+C$ و $\int \cos u\,du=\sin u+C$ و $\int e^u du=e^u+C$

$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C$ و $\int(1+\tan^2 u)du=\tan u+C$

$\int(1+\cot^2 u)du=-\cot u+C$

مثال:

$$I=\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$u=1+x^2\longrightarrow du=2x\,dx$

$$=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$I=\int\frac{3x^2\,dx}{\sqrt{x^3+5}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=2u^{\frac{1}{2}}+C$$

$u=x^3+5\longrightarrow du=3x^2dx$

$$=2\sqrt{u}+C=2\sqrt{x^3+5}+C$$

$$I=\int\frac{2x\,dx}{(x^2-1)^5}=\int\frac{du}{u^5}=\int u^{-5}du=\frac{u^{-4}}{-4}+C=\frac{(x^2-1)^{-4}}{-4}+C$$

$u=x^2-1\longrightarrow du=2x\,dx$

$$I=\int 2x\sin(x^2+1)\,dx=\int\sin u\,du=-\cos u+C=-\cos(x^2+1)+C$$

$u=x^2+1\longrightarrow 2x\,dx=du$

۵۶ $I=\int 3x^2\cos(x^3-1)\,dx=\int \cos u\,du=\sin u+c=\sin(x^3-1)+c$

$u=x^3-1\rightarrow du=3x^2dx$

$I=\int x(x^2+4)^6dx=\int u^6\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^6du=\frac{1}{2}\,\frac{u^7}{7}+c=\frac{1}{14}(x^2+4)^7+c$

$u=x^2+4\rightarrow du=2x\,dx$

$\rightarrow x\,dx=\frac{du}{2}$

$I=\int\frac{x}{\sqrt[3]{5x^2+1}}dx=\int\frac{du/10}{\sqrt[3]{u}}=\frac{1}{10}\int u^{-1/3}du=\frac{1}{10}\,\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c=\frac{1}{10}\,\frac{(5x^2+1)^{2/3}}{2/3}+c$

$u=5x^2+1\rightarrow du=10x\,dx\rightarrow x\,dx=\frac{du}{10}$

$I=\int x\sin(3x^2+1)dx=\int\sin u\,\frac{du}{6}=\frac{1}{6}(-\cos u)+c=-\frac{1}{6}\cos(3x^2+1)+c$

$u=3x^2+1\rightarrow du=6x\,dx$

$\rightarrow x\,dx=\frac{du}{6}$

$I=\int x e^{2-4x^2}dx=\int e^u\frac{du}{-8}=-\frac{1}{8}e^u+c=-\frac{1}{8}e^{2-4x^2}+c$

$u=2-4x^2\rightarrow -8x\,dx=du$

$\rightarrow x\,dx=\frac{du}{-8}$

$I=\int\sin x\,e^{5\cos x-1}dx=\int e^u\frac{du}{-5}=-\frac{1}{5}e^u+c=-\frac{1}{5}e^{5\cos x-1}+c$

$u=5\cos x-1\Rightarrow du=-5\sin x\,dx$

$\rightarrow \sin x\,dx=-\frac{du}{5}$

$I=\int x^2\cos(3+5x^3)dx=\int\cos u\,\frac{du}{15}=\frac{1}{15}\sin u+c=\frac{1}{15}\sin(3+5x^3)+c$

$u=3+5x^3\rightarrow du=15x^2dx\rightarrow x^2dx=\frac{du}{15}$

$I=\int\sqrt{4-2x}\,dx=\int\underbrace{\sqrt{u}}_{u^{1/2}}\frac{du}{-2}=-\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=-\frac{1}{2}\,\frac{(4-2x)^{3/2}}{3/2}+c$

$u=4-2x\rightarrow du=-2dx$

$\rightarrow dx=\frac{du}{-2}$

$I=\int\frac{2x-5}{x^2-5x+10}dx=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|x^2-5x+10|+c$

$u=x^2-5x+10\rightarrow du=(2x-5)dx$

$$I=\int \frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+10}\,dx=\int \frac{du/3}{u}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\ln|u|+C=\frac{1}{3}\ln|x^3-6x^2+10|+C$$

$u=x^3-6x^2+10 \rightarrow du=(3x^2-12x)dx=3(x^2-4x)dx$

$\rightarrow (x^2-4x)dx=\frac{du}{3}$

$$I=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{du/2}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$u=x^2+1 \rightarrow du=2x\,dx \rightarrow x\,dx=\frac{du}{2}$

$$I=\int\frac{e^x\,dx}{2e^x-1}=\int\frac{du/2}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|2e^x-1|+C$$

$u=2e^x-1 \rightarrow du=2e^x dx \rightarrow e^x dx=\frac{du}{2}$

$$I=\int\frac{\sin x\,dx}{5\cos x+10}=\int\frac{du/-5}{u}=-\frac{1}{5}\ln|u|+C=-\frac{1}{5}\ln|5\cos x+10|+C$$

$u=5\cos x+10 \rightarrow du=-5\sin x\,dx$

$\rightarrow \sin x\,dx=-\frac{du}{5}$

$$I=\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C$$

$u=\ln x \rightarrow du=\frac{dx}{x}$

$$I=\int e^{ax+b}dx=\int e^u\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int e^u du=\frac{1}{a}e^u+C=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$$

$u=ax+b \rightarrow du=a\,dx \rightarrow dx=\frac{du}{a}$

و مشابه آن فرمول زیر را داریم

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C \quad , \quad \int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

$$\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

$$I=\int e^{4x-5}dx=\frac{1}{4}e^{4x-5}+C$$

$$I=\int\frac{dx}{e^{3-2x}}=\int e^{-3+2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$$

۵۸ $$I=\int\frac{e^{2x+7}}{e^{5x-1}}dx=\int e^{2x+7-(5x-1)}dx=\int e^{-3x+8}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x+8}+C$$

$$I=\int\frac{2\,dx}{3-7x}=2\int\frac{dx}{-7x+3}=-\frac{2}{7}\ln|-7x+3|+C$$

$$I=\int(5\cos 3x+6\sin 2x)dx=5\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)+6\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

بسیاری از انتگرال‌ها مستقیماً به کمک تعاریف نمی‌توان محاسبه کرد. ولی گاهی با یک تغییر متغیر می‌توان انتگرال را به کمک قضایایی ساده کرد.

مثال: انتگرال $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ را محاسبه کنید

قرار می‌دهیم $t=1+x^2$، با دیفرانسیل‌گیری از طرفین $dt=2x\,dx$ داریم

$$I=\int\sqrt{1+x^2}\,2x\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

این روش را انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر و جانشینی می‌گوییم.

مثال

$$I=\int x\sin(x^2+2)\,dx=\int\sin t\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos(x^2+2)+C$$

$t=x^2+2\rightarrow dt=2x\,dx\rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$I=\int\frac{x\,dx}{(2x^2+10)^5}=\int\frac{dt/4}{t^5}=\frac{1}{4}\int t^{-5}dt=\frac{1}{4}\,\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{16}t^{-4}+C$$

$2x^2+10=t\rightarrow dt=4x\,dx\rightarrow x\,dx=\frac{dt}{4}$

$$=-\frac{1}{16}(2x^2+10)^{-4}+C$$

$$I=\int\sin(ax+b)\,dx=\int\sin t\,\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C$$

$t=ax+b\rightarrow dt=a\,dx\rightarrow dx=\frac{dt}{a}$

$$=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

به همین ترتیب

$$\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C\;;\;\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$$

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

$$I=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{dt/2}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$t=x^2+1\rightarrow dt=2x\,dx\rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$I=\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int-\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$$

$t=\cos x\rightarrow dt=-\sin x\,dx$

$$=\ln|\sec x|+C$$

دهش رش

$$\int \cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln|\sin x|+c$$

$$I=\int\frac{e^x\,dx}{2e^x-3}=\int\frac{dt/2}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=\frac{1}{2}\ln|2e^x-3|+c$$

$$t=2e^x-3\to dt=2e^x dx\to e^x dx=dt/2$$

$$I=\int\frac{e^{-x+3}}{e^{2x-1}}\,dx=\int e^{-x+3-(2x-1)}\,dx=\int e^{-3x+4}\,dx=-\frac{1}{3}e^{-3x+4}+C$$

$$I=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int\frac{-dt}{t}=-\ln|t|+c=-\ln|\sin x+\cos x|+c$$

$$t=\sin x+\cos x\to dt=(\cos x-\sin x)dx$$

$$I=\int\frac{x^3+2x}{x^4+4x^2-10}\,dx=\int\frac{dt/4}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+c=\frac{1}{4}\ln|x^4+4x^2-10|+C$$

$$t=x^4+4x^2-10\to dt=(4x^3+8x)dx=4(x^3+2x)dx\longrightarrow(x^3+2x)dx=dt/4$$

$$I=\int\frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx=\int e^t\,2dt=2\int e^t dt=2e^t+c=2e^{\sqrt{x}+1}+c$$

$$\sqrt{x}+1=t\to dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\to\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt$$

$$I=\int\frac{dx}{x(\ln x+1)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\ln x+1|+c$$

$$t=\ln x+1\to dt=\frac{1}{x}dx$$

$$I=\int\sqrt{1+x}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$t=1+x\to dt=dx$$

$$I=\int x^2\sqrt{1+x}\,dx=\int(t-1)^2\sqrt{t}\,dt=\int(t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt=\int(t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$$

$$t=1+x\to\begin{cases}dt=dx\\x=t-1\end{cases}\qquad=\frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-2\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$= \frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + c$$

تمرین: انتگرال‌های زیر را بیابید

$$I = \int x^3\sqrt{2+x}\,dx \qquad I = \int x\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{(x^2+4)^{3/2}} \qquad I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

حل (اسمی دوتای):

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \int \frac{2dt}{t} = 2\ln|t| + c = 2\ln|\sqrt{x}+1| + c$$

$$t = \sqrt{x}+1 \rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

$$I = \int \frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}dx = \int \frac{x^2 \cdot x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \int \frac{t-4 \quad \frac{dt}{2}}{t^{3/2}} = \frac{1}{2}\int (t-4)t^{-3/2}dt$$

$$t = x^2+4 \rightarrow dt = 2x\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$x^2 = t-4$$

$$= \frac{1}{2}\int (t^{-1/2} - 4t^{-3/2})dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} - 4\frac{t^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(2(x^2+4)^{1/2} + 8(x^2+4)^{-1/2}\right) + C$$

انتگرال معین

فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. انتگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ را با $\int_a^b f(x)dx$ نمایش داده، اگر $F(x)$ یکی از پادمشتق‌های $f(x)$ در $[a,b]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

لذا انتگرال معین تابع f از روی انتگرال نامعین آن بدست می‌آید. و اگر $\int f(x)dx = F(x)+C$

آنگاه: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

معمولاً $F(b)-F(a)$ را با $F(x)\Big|_a^b$ نمایش می‌دهیم.

مثال: $I=\int_1^2 (x^2+2x)dx$ را بیابید.

$$\int (x^2+2x)dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}+x^2}_{F(x)}+C \Rightarrow \int_1^2 (x^2+2x)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3}+2^2\right) - \left(\frac{1^3}{3}+1^2\right) = \frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}-1 = \frac{7}{3}+3 = \frac{16}{3}$$

مثال: $I=\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2}$ را بیابید.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_{-1}^1 = \ln|1+2| - \ln|-1+2| = \ln 3$$

خواص انتگرال معین

۱- اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و k عدد ثابت باشد آنگاه

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

۲- اگر f و g روی $[a,b]$ پیوسته آنگاه

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

۳- اگر تابع f روی بازهٔ I که شامل سه نقطهٔ a، b و c است پیوسته باشد، آنگاه صرف‌نظر از ترتیب نقاط a، b و c

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

۴- در تعریف انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ فرض شده بود که $a<b$، اگر b و a دلخواه، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$ و لذا $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثال: انتگرال‌های زیر را بیابید

$$I=\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 (\underbrace{-(x-1)}_{1-x})\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2 =$$

$$I=\int_0^3 [x]\,dx = \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \int_2^3 [x]\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx$$

$$= x\Big|_1^2 + 2x\Big|_2^3 = 2-1 + 6-4$$

$$I=\int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 t\sqrt{1+t^3}\,(2t\,dt) = \int_0^2 2t^2\sqrt{1+t^3}\,dt$$

$t=\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=4 \to t=2 \end{cases}$

$dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$u=1+t^3$

$du=3t^2dt \to \begin{cases} t=0 \to u=1 \\ t=2 \to u=9 \end{cases}$

$$=\frac{2}{3}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = 12-\frac{8\sqrt{2}}{9}$$

قضیه: اگر $f(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ یکی از پادمشتق‌های $f(x)$ روی $[a,b]$ است یعنی

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \left(\text{یا } \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)\right)$$

مثال: مشتق بگیرید

$$F(x)=\int_0^x \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt \qquad F'(x)=\left(\int_0^x \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt\right)' = \sqrt{1+\sin^2 x}$$

$$f(t)=\sqrt{1+\sin^2 t}$$

اگر u تابعی مشتق‌پذیر از x باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_a^u f(t)\,dt = f(u)\,u'$$

و اگر u, v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند آنگاه

$$\frac{d}{dx}\left(\int_u^v f(t)\,dt\right) = f(v)\,v' - f(u)\,u'$$

مثال: مشتق بگیرید

$$y=f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt \to y'=f(u)u'=\sqrt{1+(x^2)^2}\,(x^2)'=\sqrt{1+x^4}\,2x$$

$$f(t)=\sqrt{1+t^2}$$

$$y=\int_{\sin x \to u}^{4+x^2 \to w}\sqrt{t+t^2}\,dt \to y'=f(w)w'-f(u)u'$$

$$f(t)=\sqrt{t+t^2}$$

$$=\left(\sqrt{4+x^2+(4+x^2)^2}\right)(2x)-\left(\sqrt{\sin x+\sin^2 x}\right)(\cos$$

فرمولها مقدار ثابت انتگرال

۱) $\int du=u+c$

۲) $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$

۳) $\int u^{-1}du=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c$

۴) $\int e^u du=e^u+c$

۵) $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+c$

۶) $\int\cos u\,du=\sin u+c$

۷) $\int\sin u\,du=-\cos u+c$

۸) $\int\tan u\,du=\ln|\sec u|+c$

۹) $\int\cot u\,du=\ln|\sin u|+c$

۱۰) $\int\sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+c$

۱۱) $\int\csc u\,du=-\ln|\csc u+\cot u|+c$

۱۲) $\int\sec^2 u\,du=\int(1+\tan^2 u)du=\tan u+c$

۱۳) $\int\csc^2 u\,du=\int(1+\cot^2 u)du=-\cot u+c$

۱۴) $\int\sec u\tan u\,du=\sec u+c$

۱۵) $\int\csc u\cot u\,du=-\cot u+c$

۱۶) $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+c$

۱۷) $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$

۱۸) $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\operatorname{Arcsin}\frac{u}{a}+c$

۱۹) $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+c$

۲۰) $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+c$

۲۱) $\int\frac{du}{|u|\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+c$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

$$I=\int \frac{dx}{x(9+4(\ln x)^2)}=\int\frac{du}{9+4u^2}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\frac{9}{4}+u^2}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{9}{4}\to\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{1}{6}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2(\ln x)}{3}+c$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2+6x+5}=\int\frac{dx}{(x+3)^2-4}=\int\frac{du}{u^2-2^2}=\frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right|+c$$

$$x+3=u\to du=dx$$

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\tan^2x+\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$u=\tan x\to du=\frac{dx}{\cos^2x}$$

$$=\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{\left(\frac{b}{a}\right)}+C=\frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+C$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\,\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c$$

$$t^2=e^x+1\to 2t\,dt=e^x\,dx\Rightarrow dx=\frac{2t\,dt}{e^x}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)+c=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)+c$$

$$x^2=u\to 2x\,dx=du$$

تمرین: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx\ ;\quad I=\int\frac{dx}{2+x-x^2}\ ;\quad I=\int\frac{x-2}{1+x^2}\,dx$$

$$I=\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}\ ;\quad I=\int\frac{(\mathrm{Arccos}\,x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\qquad I=\int\frac{dx}{x(\ln x+1)}$$

$$I=\int\frac{2x-3}{4x^2-11}\,dx$$