بسم الله الرحمن الرحیم

حساب دیفرانسیل توابع یک متغیره

معادلات دیفرانسیل

(بخش ۲: معادلات مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر)

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۶ فروردین ۱۴۰۰

عنوان مطالب:

۱. معادلات دیفرانسیل خطی و مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر(معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت، معادلهٔ کُوشی_اویلر، معادلات غیر همگن، روش ضرایب نامعّین و ضرایب ثابت، روش تغییر پارامتر)؛

۲. مسایل نمونه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱ بخش اول

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به صورت زیر است:

$$F(x, y, y', y'') = ۰$$

جواب عمومی این معادلات به شکل $g(x, y, , c_۱, c_۲) = ۰$ است. ساده ترین نوع این معادلات به شکل $y'' = f(x)$ است که با دو بار انتگرال گیری از آن، جواب عمومی به دست می آید.

مثال : جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = x + \cos x$ را بیابید.

حل:

$$y'' = x + \cos x \quad \rightsquigarrow \quad \int y'\ dx' = \int (x + \cos x)\ dx \quad \rightsquigarrow \quad y' = \frac{x^۲}{۲} + \sin x + c_۱$$

$$\rightsquigarrow \quad \int y'\ dx = \int (\frac{x^۲}{۲} + \sin x + c_۱)\ dx \quad \rightsquigarrow \quad y = \frac{۱}{۲}\ \frac{x^۳}{۳} - \cos x + c_۱\ x + c_۲$$

روش کلی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیر خطی وجود ندارد. چند حالت خاص برای حل آنها وجود دارد که بعضی از موارد آن در انتهای بخش اول شرح داده شد. اما در این بخش به حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی و مراتب بالاتر خطی می پردازیم.

تعریف

معادلات دیفرانسیل خطی

شکل کلی معادلات خطی مرتبهٔ دوم و بالاتر به صورت زیر است:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$$

$$a_n(x)\, y^{(n)} + \cdots + a_0(x)\, y = f(x)$$

هرگاه در معادلات فوق $r(x) = 0$ و $f(x) = 0$ باشند، معادلات فوق را **همگن** می نامیم.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

تعریف

عملگر خطی

یک تابع مانند L از مجموعهٔ F به F را یک عملگر خطی روی F می نامیم هرگاه

$$L\ :\ F \longrightarrow F$$

$$(۱)\ L(a+b)=L(a)+L(b) \quad , \quad (۲)\ L(m\ a)=m\ L(a) \qquad a,b\in F \quad , \quad m\in \mathbf{R}$$

مهم ترین عملگرها، عملگر مشتق گیری (D) و عملگر انتگرال گیری (I) روی مجموعهٔ توابع است.

$$D\ : F \longrightarrow F \qquad D(f)=\frac{df}{dx}=f'(x)$$

$$I\ : F \longrightarrow F \qquad I(f)=\int f\ dx$$

عملگر دیفرانسیل گیری n اُم (D^n)

عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ n اُم به صورت زیر تعریف می شود:

$$D^n(f)=f^{(n)}(x)$$

اکنون معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n اُم را در نظر می گیریم.

$$a_n(x)\ y^{(n)} + \cdots + a_0(x)\ y = f(x)$$

بنابر تعریف D^n ، $D^n(y) = y^{(n)}$ ؛ با جایگزینی در معادلهٔ خطی مرتبهٔ n ، داریم:

$$a_n(x)\ D^{(n)}(y) + \cdots + a_0(x)\ D^0(y) = f(x)$$

بنا به قرار داد $D^0 y = y$ می باشد، پس

$$(a_n(x)\ D^n + \cdots + a_0(x)\ D^0)(y) = f(x)$$

اکنون عملگر L را ب صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L = a_n(x)\ D^n + \cdots + a_0(x)\ D^0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل به صورت $L\ y = f(x)$ در می آید.

مثال : عمگلر L برای معادلهٔ یفرانسیل $x^2\ y'' - 5x\ y' + \sin x\ y = e^x$ برابر است با:

$$L = x^2\ D^2 - 5x\ D + \sin x\ D^0$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

لذا

$$L\,y = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad L\,y = (x^{2}\,D^{2} - 5x\,D + \sin x\,D^{0})(y) = e^{x}$$

تعریف

ترکیب خطی

یک ترکیب خطی از توابع f_1 ، f_2 ،...و f_n و تعداد حقیقی c_1 ، c_2 ،...و c_n را به صورت زیر نوسته می شود.

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

استقلال خطی

توابع f_1 ، f_2 ،..و f_n استقلال خطی دارند یا مستقل خطی هستند هرگاه برای هر c_1 ، c_2 ،..و c_n از اعداد حقیقی که در تساوی زیر صدق می کند یعنی

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0$$

نتیجه بگیریم تمام ضرایب ترکیب خطی صفرند به عبارت دیگر

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

آزمونی برای استقلال خطی

توابع f_1 ، f_2 ، ...و f_n را که در نقطه x ، $n-1$ بار مشتق پذیر می باشند را در نظر می گیریم.
عبارت $W(x, f_1, f_2, .., f_n)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$W(x, f_1, f_2, .., f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ثابت می شود هرگاه مقدار دترمینان فوق مخالف صفر شود یعنی $W(x, f_1, f_2, .., f_n) \neq 0$ ؛ آنگاه توابع f_1 تا f_n مستقل خطی هستند.

مثال: هرگاه $a \neq b$ ثابت کنید توابع $f_1(x) = e^{ax}$ و $f_2(x) = e^{bx}$ مستقل خطی هستند.

حل:

ابتدا مقدار $W(x, f_۱, f_۲)$ را محاسبه می کنیم.

$$W(x, f_۱, f_۲) = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ \underbrace{ae^{ax}}_{f_۱'} & \underbrace{be^{bx}}_{f_۲'} \end{vmatrix} = e^{ax}\ (be^{bx}) - e^{bx}\ (ae^{ax}) = b\ e^{ax+bx} - a\ e^{ax+bx} = (b-a)\ e^{(a+b)x}$$

چون $a \neq b$ ، پس $b - a \neq ۰$، لذا

$$(b-a)\ e^{(a+b)x} \neq ۰ \quad \rightsquigarrow \quad W(x, f_۱, f_۲) \neq ۰$$

در نتیجه توابع e^{ax} و e^{bx} مستقل خطی هستند.

تذکر

اگر اعداد حقیقی $r_۱$ ، $r_۲$ ، ...و r_n دو بدو متمایز باشند، آنگاه توابع $e^{r_۱x}$، $e^{r_۲x}$، ...و e^{r_nx} مستقل خطی هستند.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

ملاحظه

قضیهٔ اساسی ۱

اگر f_1 ، f_2 ، ...و f_n جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن زیر باشد،

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = 0$$

آنگاه جواب عمومی معادلهٔ فوق به صورت زیر است:

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

قضیهٔ اساسی ۲

معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم زیر را در نظر می گیریم.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ فوق به صورت $y = y_h + y_p$ می باشد، که در آن y_p جواب خصوصی معادلهٔ فوق و y_h جواب معادلهٔ همگن زیر است:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$$

تذکر

هرگاه f_1 و f_2 دو جواب مستقل خطی معادلهٔ همگن زیر باشد

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

آنگاه بنا به قضیهٔ اساسی ۱ جواب عمومی معادلهٔ همگن به صورت زیر است:

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

یافتن جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن با معلوم یک جواب آن:

فرض کنیم $f_1(x)$ یک جواب غیر صفر معادله همگن زیر باشد

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

در این صورت تابع $g(x)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$g(x) = \int \frac{1}{f_1^2(x)} e^{-\int p(x)\, dx}\, dx$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ثابت می شود که جواب دیگر معادله همگن برابر است:

$$f_2(x) = g(x) \cdot f_1(x)$$

از طرفی چون $W(x, f_1, f_2) \neq 0$ ، پس دو جواب f_1, f_2 مستقل خطی هستند. بنابراین بنا به قضیه اساسی ۱ ، جواب عمومی معادلهٔ همگن فوق برابر است با:

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

مثال

جواب عمومی معادلهٔ همگن $y'' + y = 0$ را وقتی $f_1(x) = \sin x$ یک جواب آن است، بیابید.

حل:

ابتدا $g(x)$ را می یابیم.

$$g(x) = \int \frac{1}{f_1^2(x)} e^{-\int p(x)\ dx} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} e^{-\int \underbrace{0}_{p(x)} dx} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

مثال

جواب دیگر یعنی $f_2(x)$ برابر است با:

$$f_2(x) = g(x) \cdot f_1(x) = -\cot x \cdot \sin x = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x = -\cos x$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ همگن به صورت زیر نوشته می شود.

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

مثال : جواب عمومی معادلهٔ همگن $y'' - y = 0$ را وقتی $f_1(x) = e^x$ یک جواب آن است، بیابید.

حل:

ابتدا $g(x)$ را می یابیم.

$$g(x) = \int \frac{1}{f_1^2(x)} e^{-\int p(x)\ dx}\, dx = \int \frac{1}{e^{2x}}\, e^{-\int \underbrace{0}_{p(x)} dx}\, dx = \int \frac{1}{e^{2x}}\, dx = \int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

جواب دیگر یعنی $f_2(x)$ برابر است با:

$$f_2(x) = g(x) \cdot f_1(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot e^{x} = -\frac{1}{2}e^{-2x+x} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ همگن به صورت زیر نوشته می شود.

$$y = c_1 e^{x} - \frac{1}{2}c_2 e^{-2x}$$

معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت :

این معادله به شکل زیر است:

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0\, y = 0$$

که در آن $a_۰, a_۱, ..., a_n$ اعداد حقیقی هستند. مانند:

$$(۱)\ ۴y'' - ۶y' + ۲y = ۰ \qquad (۲)\ ۳y^{(۴)} - ۲y^{(۳)} + ۷y'' - y = ۰$$

برای حل این گونه معادلات چنین عمل می کنیم.
عملگر دیفرانسیل D ، این معادلات دارای چند جمله ای عملگر دیفرانسیل گیری به شکل $P(D)$ است که به صورت زیر نوشته می شود.

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \cdots + a_۱ D + a_۰ D^۰ = ۰$$

لازم به ذکر است که معادلهٔ $P(D)y = ۰$ همان معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت است.
چند جمله ای کمکی وابسته به $P(D) = ۰$ را با $P(r)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر به تعریف می گردد.

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-۱} r^{n-۱} + \cdots + a_۱ r + a_۰$$

مثال : چند جمله ای کمکی وابسته به $P(D)$ برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر را بنویسید.

$$۲y'' - ۵y' + ۲y = ۰$$

حل:

$$P(D) = ۲D^{۲} - ۵D + ۲D^{۰} \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = ۲r^{۲} - ۵r + ۲$$

ملاحظه

روش حل معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت :

برای حل معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت، ابتدا معادلهٔ $P(r)$ را می یابیم، سپس معادلهٔ $P(r) = ۰$ را حل می کنیم. برای ریشه های این معادله سه حالت زیر رُخ می دهد:

(۱) اگر معادلهٔ $P(r) = ۰$ دارای n ریشهٔ حقیقی متمایز مانند $r_۱, r_۲, \cdots, r_n$ باشد، آنگاه ثابت می شود معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت ، دارای جواب های مستقل خطی زیر است:

$$f_۱(x) = e^{r_۱ x} \quad , \quad f_۲(x) = e^{r_۲ x} \quad , \quad \cdots \quad f_n(x) = e^{r_n x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_۱ e^{r_۱ x} + c_۲ e^{r_۲ x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را به دست آورید.

$$(۱)\ y'' - ۳y' + ۲y = ۰ \qquad (۲)\ (D-۱)(D+۱)(D+۲)\,y = ۰$$

حل :

(۱) چندجمله ای $P(r)$ وابسته به عملگر دیفرانسیل ای معادله به صورت زیر است:

$$P(r) = r^۲ - ۳r + ۲$$

اکنون قرار می دهیم $P(r) = ۰$ ، پس

$$r^۲ - ۳r + ۲ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad (r-۱)(r-۲) = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r_۱ = ۱ \quad , \quad r_۲ = ۲$$

لذا جواب های مستقل خطی معادله برابر است با:

$$f_1(x) = e^{1\,x} \quad , \quad f_2(x) = e^{2\,x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\, e^{1\,x} + c_2\, e^{2\,x}$$

(۲) چند جمله ای $P(D)$ به صورت زیر است.

$$P(D) = (D-1)(D+1)(D+2)$$

چندجمله ای $P(r)$ وابسته به عملگر دیفرانسیل ای معادله به صورت زیر است:

$$P(r) = (r-1)(r+1)(r+2)$$

اکنون قرار می دهیم $P(r) = 0$ ، پس

$$(r-1)(r+1)(r+2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = -1 \quad , \quad r_3 = -2$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

لذا جواب های مستقل خطی معادله برابر است با:

$$f_1(x) = e^{1\,x} \quad , \quad f_2(x) = e^{-1\,x} \quad , \quad f_3(x) = e^{-2\,x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\, e^{1\,x} + c_2\, e^{-1\,x} + c_3\, e^{-2\,x}$$

ملاحظه

روش حل معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت :

(۲) اگر معادلهٔ $P(r) = 0$ دارای جواب مختلطی به صورت $z = a + b\,i$ باشد، آنگاه ثابت می شود معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت ، دارای دو جواب مستقل خطی زیر است:

$$f_1(x) = e^{a\,x}\ \cos bx \quad , \quad f_2(x) = e^{a\,x}\ \sin bx$$

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\ e^{a\,x}\ \cos bx + c_2\ e^{a\,x}\ \sin bx$$

مثال

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را بیابید.

$$(1)\ y'' + y = 0 \qquad\qquad (2)\ y'' - 2y' + 4y = 0$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

حل:

(۱) چندجمله ای $P(r)$ وابسته به عملگر دیفرانسیل ای معادله به صورت زیر است:

$$P(r) = r^{۲} + ۱$$

اکنون قرار می دهیم $P(r) = ۰$ ، پس

$$r^{۲} + ۱ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r^{۲} = -۱ \quad \rightsquigarrow \quad r = \pm \underbrace{\sqrt{-۱}}_{i} = \pm i$$

پس

$$r = ۰ \pm ۱\, i \quad \rightsquigarrow \quad a = ۰ \quad , \quad b = ۱$$

لذا جواب های مستقل خطی معادله برابر است با:

$$f_{۱}(x) = e^{۰\ x} \cos ۱x = \cos ۱x \quad , \quad f_{۲}(x) = e^{۰\ x} \sin ۱x = \sin ۱x$$

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1 \cos 1x + c_2 \sin 1x$$

(۲) چندجمله ای $P(r)$ وابسته به عملگر دیفرانسیل ای معادله به صورت زیر است:

$$P(r) = r^2 - 2r + 4$$

اکنون قرار می دهیم $P(r) = 0$ ، پس

$$r^2 - 2r + 4 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 16}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

لذا جواب های مستقل خطی معادله برابر است با:

$$f_1(x) = e^{1x} \cos \sqrt{3}x \quad , \quad f_2(x) = e^{1x} \sin \sqrt{3}x$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\, e^{1\,x}\, \cos\sqrt{3}x + c_2\, e^{1\,x}\, \sin\sqrt{3}x$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

روش حل معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت :

(۳) اگر در حل معادلهٔ $P(r)=0$ ریشه های تکراری به دست آید، حالت های زیر را در نظر می گیریم:

(الف) فرض کنیم ریشهٔ حقیقی مانند c ، m مرتبه تکرار شده باشد، در این صورت برای این ریشهٔ تکراری جواب های مستقل خطی عبارتند از:

$$f_1(x)=e^{c\,x} \quad , \quad f_2(x)=x\,e^{c\,x}\,, \quad \cdots, \quad f_{m-1}(x)=x^{m-1}e^{c\,x}$$

(ب) فرض کنیم ریشهٔ مختلط $r=a+bi$ که از حل معادلهٔ $P(r)=0$ به دست آمده، m مرتبه تکرار شده باشد، آنگاه نظیر این ریشهٔ مختلط $2m$ جوابِ مستقل خطی به صورت زیر به دست می آید.

$$f_1(x)=e^{a\,x}\cos bx \quad , \quad f_2(x)=x\,e^{a\,x}\cos bx \;,\cdots, \quad f_{m-1}(x)=x^{m-1}\,e^{a\,x}\cos bx$$

$$f_m(x)=e^{a\,x}\sin bx \quad , \quad f_{m+1}(x)=x\,e^{a\,x}\sin bx \;,\cdots, \quad f_{2m}(x)=x^{m-1}\,e^{a\,x}\sin bx$$

مثال

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را بیابید.

$$(۱)\ (D^{۲}-۱)(D+۱)y=۰ \qquad (۲)\ y^{(۴)}+۲y''+y=۰ \qquad (۳)\ y^{(۵)}+۴y'''=۰$$

حل:

(۱) چندجمله ایهای $P(D)$ و $P(r)$ به صورت زیر می باشد.

$$P(D)=(D^{۲}-۱)(D+۱) \quad \rightsquigarrow \quad P(r)=(r^{۲}-۱)(r+۱)$$

از حل معادلهٔ $P(r)=۰$ ، داریم:

$$P(r)=۰ \quad \rightsquigarrow \quad (r^{۲}-۱)(r+۱)=۰ \quad \rightsquigarrow \quad r^{۲}=۱ \quad \rightsquigarrow \quad r=\pm۱\ ,\ \ r=-۱$$

بنابراین ریشهٔ حقیقی $r=-۱$ دو بار تکرار و ریشهٔ $r=۱$ یک بار تکرار شده است، پس جواب های

مستقل خطی معادله برابر است با:

$$f_۱(x) = e^{۱x} \quad , \quad f_۲(x) = e^{-۱x} \quad , \quad f_۳(x) = x\ e^{-۱x}$$

لذا جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y = c_۱\ e^{x} + c_۲\ e^{-x} + c_۳\ x\ e^{-x}$$

(۲) چندجمله ای $P(r)$ به صورت زیر می باشد.

$$P(r) = r^۴ + ۲r^۲ + ۱$$

از حل معادلهٔ $P(r) = ۰$ ، داریم:

$$P(r) = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r^۴ + ۲r^۲ + ۱ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad (r^۲ + ۱)^۲ = ۰$$

$$\rightsquigarrow \quad r^۲ + ۱ = ۰ \quad , \quad r^۲ + ۱ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r = \pm\sqrt{-۱} = \pm i \quad , r = \pm\sqrt{-۱} = \pm i$$

لذا ریشهٔ $r = ۰ \pm ۱i$ دو با ر تکرار شده است که در آن $a = ۰$ و $b = ۱$ می باشد، در نتیجه جواب های

مستقل خطی برابر است با :

$$f_1(x) = e^{0x} \cos 1x = \cos x \quad , \quad f_2(x) = x\, e^{0x} \cos 1x = x \cos x$$

$$f_3(x) = e^{0x} \sin 1x = \sin x \quad , \quad f_4(x) = x\, e^{0x} \sin 1x = x \sin x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1 \cos x + c_2\, x \cos x + c_3 \sin x + c_4\, x \sin x$$

(۳) چندجمله ای $P(r)$ به صورت زیر می باشد.

$$P(r) = r^5 + 4r^3$$

از حل معادلهٔ $P(r) = 0$ ، داریم:

$$P(r) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r^5 + 4r^3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r^3(r^2 + 4) = 0$$

لذا $r^۳ = ۰$ ، در نتیجه $r = ۰$ (سه بار تکرار شده است)؛ از حل معادلهٔ $r^۲ + ۴ = ۰$ داریم:

$$r^۲ = -۴ \quad \rightsquigarrow \quad r = \pm\sqrt{-۴} = \pm\sqrt{۴}\underbrace{\sqrt{-۱}}_{i} = \pm ۲i$$

بنابراین ریشهٔ حقیقی $r = ۰$ سه بار تکرار شده است، جواب های مستقل خطی وابسته به آن به صورت زیر است:

$$f_۱(x) = e^{۰x} = ۱ \ , \ f_۲(x) = x\ e^{۰x} = x \ , \ f_۳(x) = x^۲\ e^{۰x} = x^۲$$

از طرفی برای ریشهٔ مختلط $r = ۰ \pm ۲i$ که در آن $a = ۰$ و $b = ۲$ می باشد، جواب های مستقل خطی وابسته به آن برابر است با:

$$f_۴(x) = e^{۰x}\ \cos ۲x = \cos ۲x \ , \ f_۵(x) = e^{۰x}\ \sin ۲x = \sin ۲x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_۱ ۱ + c_۲\ x + c_۳\ x^۲ + c_۴\ \cos ۲x + c_۵\ \sin ۲x$$

ملاحظه

معادلهٔ کوشی_ اویلر :

شکل این معادله در حالت مرتبهٔ دوم به صورت زیر است:

$$ax^{۲}\, y'' + bx\, y' + c\, y = ۰$$

با فرض $x > ۰$، تغییر متغیر $x = e^t$ یا $t = \ln x$ را در نظر می گیریم. بااین تغییر متغیر معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت به دست می آید. در این صورت چند جمله ای $P(D)$ به صورت زیر تعیین می گردد.

$$P(D) = a\, D(D - ۱) + b\, D + c$$

اکنون برای حل معادله کافی است معادلهٔ $P(r)$ را که به صورت زیر است، حل شود.

$$P(r) = a\, r(r - ۱) + b\, r + c = ۰$$

مثال

معادلات کوشی ـ اویلر زیر را حل کنید.

$$(۱)\ x^{۲}\, y'' - ۲y = ۰ \qquad (۲)\ x^{۲}\, y'' - ۵x\, y' + ۱۳y = ۰$$

حل:

(۱) با انتخاب $x = e^t$ یا $t = \ln x$ داریم:

$$P(D) = D(D-۱) - ۲ \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r(r-۱) - ۲ = ۰$$

$$\rightsquigarrow \quad r^{۲} - r - ۲ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad (r+۱)(r-۲) = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r_۱ = -۱ \ ,\ r_۲ = ۲$$

بنابراین جواب های مستقل خطی برابر است با:

$$f_(t) = e^{r_۱\, t} = e^{-۱\, t} \quad , \quad f_۲(t) = e^{r_۲\, t} = e^{۲\, t}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} = c_1\, (\underbrace{e^t}_{x})^{-1} + c_2\, (\underbrace{e^t}_{x})^{2} = c_1\, x^{-1} + c_2\, x^2$$

(۲) با انتخاب $x = e^t$ یا $t = \ln x$ داریم:

$$P(D) = D(D-1) - 5\, D + 13 \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r(r-1) - 5\, r + 13 = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad r^2 - r - 5r + 13 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r^2 - 6r + 13 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4(13)}}{2(1)}$$

$$\rightsquigarrow \quad = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2i \quad \rightsquigarrow \quad a = 3 \quad , \quad b = 2$$

لذا جواب های مستقل خطی معادله برابر است با:

$$f_1(t) = e^{3\,t}\ \cos 2t \quad , \quad f_2(t) = e^{3\,t}\ \sin 2t$$

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1 e^{3t} \cos 2t + c_2 e^{3t} \sin 2t = c_1 (\underbrace{e^t}_{x})^3 \cos 2(\underbrace{t}_{\ln x}) + c_2 (\underbrace{e^t}_{x})^3 \sin 2(\underbrace{t}_{\ln x})$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ فوق برحسب x به صورت زیر به دست می آید.

$$= c_{۱} x^{۳} \cos(۲ \ln x) + c_{۲} x^{۳} \sin(۲ \ln x)$$

معادلات دیفرانسیل غیر همگن

می دانیم یک معادلهٔ خطی غیر همگن به صورت زیر است:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-۱}(x)\, y^{(n-۱)} + \cdots + a_{.}(x)\, y = f(x)$$

برای حل آن دو روش **ضرایب نامعّین** و **تغییر پارامتر** ارائه می شود.

تذکر

اگر $f_1, f_2, \ldots, f_n$ جواب های مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن زیر باشد،

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = 0$$

و علاوه براین y_p یک جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگنِ

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = f(x)$$

باشد، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ غیر همگن فوق به صورت زیر است.

$$y = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n + y_p$$

مثال: اگر $y_p = 2e^{-x}$ یک جواب خصوصی معادلهٔ زیر باشد، جواب عمومی معادله را به دست آورید.

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{-x}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

حل:

ابتدا جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن زیر را می یابیم.

$$y'' - ۳y' + ۲y = ۰$$

ار حل معادلهٔ $P(r) = ۰$ داریم:

$$P(r) = r^۲ - ۳r + ۲ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad (r-۱)(r-۲) = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r_۱ = ۱ \ , \ \ r_۲ = ۲$$

بنابراین $f_۱(x) = e^x$ ، $f_۲(x) = e^{۲x}$ ؛ جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن هستند. چون $y_p = ۲e^{-x}$ جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن است، لذا بنا به تذکر قبل ، جواب عمومی معادلهٔ غیر همگن برابر است با:

$$y = c_۱e^x + c_۲e^{۲x} + \underbrace{۲e^{-x}}_{y_p}$$

روش حل ضرایب نامعّین برای معادلات خطی با ضرایب ثابت

در این قسمت به حل معادلات خطی غیر همگن با ضرایب ثابت به شکل زیر می پردازیم.

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-۱}\, y^{(n-۱)} + \cdots + a_۰\, y = f(x)$$

فرض کنیم $P(D)$ عملگر دیفرانسیل گیری و $P(r)$ چند جمله ای کمکی وابسته به $P(D)$ باشد؛ به عبارت دیگر

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \cdots + a_۰ D^۰ \quad , \quad P(r) = a_n r^n + a_{n-۱} r^{n-۱} + \cdots + a_۰$$

هرگاه تابع $f(x)$ به شکل $Ax^j\, e^{c\,x}$ (c یک عدد حقیقی یا مختلط) باشد، در این صورت برای یافتن جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن فوق (y_p) دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

الف : c ریشهٔ معادلهٔ $P(r) = ۰$ نباشد.

در این شرایط جواب خصوصی معادله یه شکل زیر است:

$$y_p = (A_۰ + A_۱ x + \cdots + A_j x^j)\, e^{c\,x}$$

که در آن $A_0, A_1, ..., A_j$ مجهول هستند. برای یافتن آنها، y_p را در معادلهٔ دیفرانسیل قرار داده و سمت چپ و راست متحد هم قرار می دهیم؛ از آنجا ضرایب A_j ها به دست می آیند.

ب : c ریشهٔ معادلهٔ $P(r) = 0$ با m با تکرار باشد.

در این شرایط جواب خصوصی معادله یه شکل زیر است:

$$y_p = x^m(A_0 + A_1x + \cdots + A_jx^j)\ e^{c\ x}$$

و همانند قسمت الف، ضرایب مجهول را می یابیم.

مثال

جواب عمومی معادلات خطی غیر همگن با ضرایب ثابت زیر را به دست آورید.

$(1)\ y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$ $\qquad (2)\ y'' + 3y' + 2y = 6xe^{x}$ $\qquad (3)\ y''' + y'' = e^{-x}$

حل:

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

(۱) ابتدا جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن آن را می یابیم. به عبارت دیگر

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r^2 + 2r - 3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (r-1)(r+3) = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = -3 \quad \rightsquigarrow \quad f_1(x) = e^x \quad , \quad f_2(x) = e^{-3x}$$

اکنون جواب خصوصی y_p معادلهٔ غیر همگن را تعیین می کنیم. چون $f(x) = 5e^{2x} = 5\, x^0\, e^{2\, x}$ ، لذا $j = 0$ و $c = 2$ می باشد. $c = 2$ ریشهٔ $P(r) = 0$ نیست. بنا به حالت (الف) ، داریم:

$$y_p = A_0\, e^{2x} \qquad , \qquad A_0 = ?$$

حال مشتق اول و دوم y_p را محاسبه نموده در معادلهٔ غیر همگن قرار می دهیم و از آنجا A_0 را به دست می آوریم.

$$y_p' = 2A_0 e^{2x} \quad \rightsquigarrow \quad y_p'' = 4A_0 e^{2x} \quad \rightsquigarrow \quad y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 5e^{2x}$$

$$\rightsquigarrow \quad 4(A_0\, e^{2x}) + 2(2A_0\, e^{2x}) - 3(A_0\, e^{2x}) = 5e^{2x}$$

$$\rightsquigarrow \quad (4A_0 + 4A_0 - 3A_0)\, e^{2x} = 5\, e^{2x}$$

$$\rightsquigarrow \quad 5\, A_0 = 5 \quad \rightsquigarrow \quad A_0 = 1$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

در نتیجه $y_p = ۱\ e^{۲x}$ ؛ بنابراین جواب عمومی معادلهٔ غیر همگن برابر است با:

$$y = c_۱\ e^{x} + c_۲\ e^{-۳x} + \underbrace{e^{۲x}}_{y_p}$$

(۲) ابتدا جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن آن را می یابیم. به عبارت دیگر

$$y'' + ۳y' + ۲y = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r^۲ + ۳r + ۲ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad (r+۱)(r+۲) = ۰$$

$$\rightsquigarrow \quad r_۱ = -۱ \quad , \quad r_۲ = -۲ \quad \rightsquigarrow \quad f_۱(x) = e^{-x} \quad , \quad f_۲(x) = e^{-۲x}$$

اکنون جواب خصوصی y_p معادلهٔ غیر همگن را تعیین می کنیم. چون $f(x) = ۶xe^{x} = ۶\ x^۱\ e^{۱\ x}$ ، لذا $j = ۱$ و $c = ۱$ می باشد. $c = ۱$ ریشهٔ $P(r) = ۰$ نیست. بنا به حالت (الف) ، داریم:

$$y_p = (A_۰ + A_۱ x)\ e^{x} \quad , \quad A_۰ = ? \quad , \quad A_۰ = ?$$

حال مشتق اول و دوم y_p را محاسبه نموده در معادلهٔ غیر همگن قرار می دهیم و از آنجا $A_۰$ و $A_۱$ را به دست می آوریم.

$$y_p = A_۰\ e^{x} + A_۱ x\ e^{x} \quad \rightsquigarrow \quad y'_p = A_۰\ e^{x} + A_۱\ e^{x} + A_۱ x\ e^{x}$$

$$\rightsquigarrow \quad y_p'' = A_0\ e^x + A_1\ e^x + A_1\ e^x + A_1 x\ e^x \quad , \quad y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 6xe^x$$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{A_0\ e^x + A_1\ e^x + A_1\ e^x + A_1 x\ e^x}_{y_p''} + 3(\underbrace{A_0\ e^x + A_1\ e^x + A_1 x\ e^x}_{y_p'}) + 2(\underbrace{A_0\ e^x + A_1 x\ e^x}_{y_p}) = 6x\ e^x$$

$$\rightsquigarrow \quad (A_0 + A_1 + A_1 + A_1 x + 3A_0 + 3A_1 + 3A_1 x + 2A_0 + 2A_1 x)\ e^x = 6x\ e^x$$

$$\rightsquigarrow \quad (6A_0 + 5A_1) + 6A_1 x = 6x = 0 + 6x$$

$$\rightsquigarrow \quad 6A_0 + 5A_1 = 0 \quad , \quad 6A_1 = 6 \quad \rightsquigarrow \quad A_1 = 1 \quad , \quad 6A_0 + 5(1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A_0 = -\frac{5}{6}$$

در نتیجه $y_p = (-\frac{5}{6} + x)\ e^x$ ؛ لذا جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن برابر است با:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + (-\frac{5}{6} + x)\ e^x$$

(۳) ابتدا جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن آن را می یابیم. به عبارت دیگر

$$y''' + y'' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r^3 + r^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r^2(r+1) = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad r_1 = 0 \ \ (\text{دوبار تکرار شده است}) \quad , \quad r_2 = -1$$

$$\rightsquigarrow \quad f_1(x) = e^{0x} = 1 \quad , \quad f_2(x) = x^1 e^{0x} = x \quad , \quad f_3(x) = e^{-1x}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

اکنون جواب خصوصی y_p معادلهٔ غیر همگن را تعیین می کنیم. چون $f(x) = e^{-x} = x^{۰}\ e^{-۱\ x}$ ، لذا $j = ۰$ و $c = -۱$ می باشد. $c = -۱$ ریشهٔ $P(r) = ۰$ می باشد. بنا به حالت (ب) ، داریم:

$$y_p = A_۰ x\, e^{-x} \quad , \quad A_۰ = ?$$

$$\rightsquigarrow \quad y'_p = A_۰\, e^{-x} + (-A_۰ x\, e^{-x}) \quad \rightsquigarrow \quad y''_p = -A_۰\, e^{-x} - A_۰ x\, e^{-x} + A_۰ x\, e^{-x} = -۲A_۰\, e^{-x} + A_۰ x\, e^{-x}$$

$$\rightsquigarrow \quad y'''_p = ۲A_۰\, e^{-x} + A_۰\, e^{-x} - A_۰ x\, e^{-x} = ۳A_۰\, e^{-x} - A_۰ x\, e^{-x}$$

مقادیر y''_p و y'''_p در معادلهٔ دیفرانسیل قرار داده و از آنجا $A_۰$ را می یابیم.

$$y'''_p + y''_p = e^{-x} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{۳A_۰\, e^{-x} - A_۰ x\, e^{-x}}_{y'''_p} + \underbrace{(-۲A_۰\, e^{-x} + A_۰ x\, e^{-x})}_{y''_p} = e^{-x}$$

$$\rightsquigarrow \quad A_۰\, e^{-x} = e^{-x} \quad \rightsquigarrow \quad A_۰ = ۱$$

بنابراین $y_p = x\, e^{-x}$ ؛ لذا جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن برابر است با:

$$y = c_۱(۱) + c_۲ x + c_۳\, e^{-x} + x\, e^{-x}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تذکر

اگر در معادلهٔ دیفرانسیل غیر همگن با ضرایب ثابت، تابع $f(x)$ به صورت $a \ \sin bx$ یا $a \ \cos bx$ باشد، آنگاه جواب خصوصی رابه صورت $y_p = A_۱ \ \cos bx + A_۲ \ \sin bx$ قرار می دهیم و مشتقات آن را محاسبه نموده در معادلهٔ دیفرانسیل غیر همگن قرار داده، از آنجا مجهول های $A_۱$ و $A_۲$ را می یابیم.

مثال

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ۴y = ۳ \ \cos ۵x$ را بیابید.

حل:

(۱) ابتدا جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن آن را می یابیم. به عبارت دیگر

$$y'' + ۴y = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r^۲ + ۴ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r^۲ = -۴$$

$$\rightsquigarrow \quad r = \pm\sqrt{-۴} = \pm ۲i = ۰ \pm ۲ \ i \quad \rightsquigarrow \quad a = ۰ \ , \ b = ۲$$

لذا جواب های مستقل خطی برابر است با:

$$f_۱(x) = e^{ax} \cos bx = e^{۰x} \cos ۲x = \cos ۲x \quad , \quad f_۲(x) = e^{ax} \sin bx = e^{۰x} \sin ۲x = \sin ۲x$$

چون $f(x) = ۳ \cos ۵x$ ، لذا $b = ۵$ می باشد و جواب خصوصی معادله به صورت $y_p = A_۱ \cos ۵x + A_۲ \sin ۵x$ است.

$$y_p' = -۵A_۱ \sin ۵x + ۵A_۲ \cos ۵x \quad \rightsquigarrow \quad y_p'' = -۲۵A_۱ \cos ۵x - ۲۵A_۲ \sin ۵x$$

باقرار دادن y_p'' و y_p در معادلهٔ دیفرانسیل غیر همگن، داریم:

$$y'' + ۴y = ۳ \cos ۵x$$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{-۲۵A_۱ \cos ۵x - ۲۵A_۲ \sin ۵x}_{y_p''} + ۴(\underbrace{A_۱ \cos ۵x + A_۲ \sin ۵x}_{y_p}) = ۳ \cos ۵x$$

$$-۲۱A_۱ \cos ۵x - ۲۱A_۲ \sin ۵x = ۳ \cos ۵x = ۳ \cos ۵x + ۰ \sin ۵x \quad \rightsquigarrow \quad -۲۱A_۱ = ۳ \quad , \quad -۲۱A_۲ = ۰$$

بنابراین $A_۱ = \frac{-۱}{۷}$ و $A_۲ = ۰$ ؛ در نتیجه

$$y_p = A_۱ \cos bx + A_۲ \sin bx = -\frac{۱}{۷} \cos ۵x + ۰ \sin ۵x = -\frac{۱}{۷} \cos ۵x$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ غیر همگن برابر است با:

$$y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x \underbrace{- \frac{1}{7} \cos 5x}_{y_p}$$

ملاحظه

روش تغییر پارامتر برای حل معادلات خطی مرتبهٔ دوم

اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ جواب های مستقل خطی برای معادلهٔ همگن خطی زیر باشد،

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

آنگاه معادلهٔ $a_2(x)\; y'' + a_1(x)\; y' + a_0(x)\; y = f(x)$ دارای جواب خصوصی به صورت $y_p = c_1(x)\; f_1(x) + c_2(x)\; f_2(x)$ می باشد که مجهول های $c_1(x)$ و $c_2(x)$ از حل دستگاه زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} c_1'(x)\; f_1(x) + c_2'(x)\; f_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\; f_1'(x) + c_2'(x)\; f_2'(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

مثال

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به **روش تغییر پارامتر** به دست آورید.

$$y'' + y = \frac{۱}{\sin x}$$

حل:

ابتدا جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن آن را می یابیم. به عبارت دیگر

$$y'' + y = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad P(r) = r^{۲} + ۱ = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad r^{۲} = -۱$$

$$\rightsquigarrow \quad r = \pm\sqrt{-۱} = \pm i = ۰ \pm i \quad \rightsquigarrow \quad a = ۰ \ , \ b = ۱$$

لذا جواب های مستقل خطی برابر است با:

$$f_{۱}(x) = e^{ax} \ \cos bx = e^{۰x} \ \cos ۱x = \cos x \ , \ f_{۲}(x) = e^{ax} \ \sin bx = e^{۰x} \ \sin ۱x = \sin x$$

بنابراین جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن به صورت زیر به دست می آید.

$$y_p = c_{۱}(x) \ f_{۱}(x) + c_{۲}(x) \ f_{۲}(x) = c_{۱}(x) \ \cos x + c_{۲}(x) \ \sin x$$

اکنون دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} c_1'(x)\ \cos x + c_2'(x)\ \sin x = 0 & (1) \\ c_1'(x)\ (-\sin x) + c_2'(x)\ \cos x = \frac{\frac{1}{\sin x}}{1} & (2) \end{cases}$$

برای دستگاه فوق، معادلهٔ (1) را در $\cos x$ و معادلهٔ (2) را در $-\sin x$ ضرب کرده، با هم جمع می کنیم.
داریم:

$$\begin{cases} c_1'(x)\ \cos^2 x + c_2'(x)\ \cos x\ \sin x = 0 \\ c_1'(x)\ \sin^2 x - c_2'(x)\ \sin x\ \cos x = (-\sin x)\ \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow\ \ c_1'(x)\ (\cos^2 x + \sin^2 x) + c_2'(x)\ (\cos x\ \sin x - \sin x\ \cos x) = 0 - 1$$

$$c_1'(x)\ (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}) + 0 = -1 \quad \rightsquigarrow \quad c_1'(x) = -1 \quad \rightsquigarrow \quad c_1(x) = x$$

اکنون در معادلهٔ (1) ، بجای $c_1'(x)$ ، مقدار -1 را قرار می دهیم.

$$\underbrace{c_1'(x)}_{-1}\ \cos x + c_2'(x)\ \sin x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\cos x + c_2'(x)\ \sin x = 0$$

$$\rightsquigarrow\ \ c_2'(x)\ \sin x = \cos x \quad \rightsquigarrow \quad c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \rightsquigarrow \quad \int c_2'(x)\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

$$\rightsquigarrow \quad c_2(x) = \ln|\sin x|$$

در نتیجه جواب خصوصی معادله به صورت زیر به دست آمد.

$$y_p = c_1(x)\ \cos x + c_2(x)\ \sin x = -x\ \cos x + \ln|\sin x|\ \sin x$$

بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\ \cos x + c_2\ \sin x \underbrace{-x\ \cos x + \ln|\sin x|\ \sin x}_{y_p}$$

★ ★ ★

۲ مسائل نمونه

در این بخش چند مسأله نمونه از **معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم** بیان می شود.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

شکل ۱: **برنهارت ریمان** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۸۲۶ میلادی ، درگذشت: ۱۸۶۶ میلادی

شکل ۲: **بلز پاسکال** ریاضی دان برجسته فرانسوی متولد: ۱۶۲۳ میلادی ، درگذشت: ۱۶۶۲ میلادی

شکل ۳: **گوتفرید لایبنیتس** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۶۴۶ میلادی ، درگذشت: ۱۷۱۶ میلادی

شکل ۴: **فریدریش گاوس** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۷۷۷ میلادی ، درگذشت: ۱۸۵۵ میلادی

با سپاس فراوان از توجه شما

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی