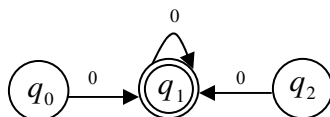


بهرینه سازی DFA: الگوریتم غربال برای پیدا کردن وضعیت های ادغام پذیر.

1- تمامی وضعیت هایی که در DFA از وضعیت شروع مسیری برای رسیدن به آنها نیست، را شناسائی کرده و حذف می کنیم. مثل وضعیت

q_2 در این ماشین



2- به ازای هر q_i و q_j که در DFA هست زوج مرتب های (q_i, q_j) را لیست می کنیم تعداد این زوج ها C_2^n می باشد.

3- از این وضعیت های لیست شده آنهایی را که یکی از زوج ها متعلق به وضعیت نهائی و دیگری غیر نهائی است، را به عنوان زوج

ادغام ناپذیر خط می زنیم. (البته اگر هر دو وضعیت نهائی باشند خط نمی زنیم)

4- به ازای هر (q_i, q_j) (که در مراحل قبل حذف نشده) و به ازای تمامی حروف الفباء، خروجی های q_i و q_j را بررسی می کنیم، اگر

وضعیت q_i و q_j با یک حرف الفباء مثلا به وضعیت های q_a و q'_a بروند و ما قبلا تشخیص داده ایم که وضعیت های q_a و q'_a ادغام

ناپذیرند، نتیجه می گیریم که q_i و q_j نیز ادغام ناپذیرند.

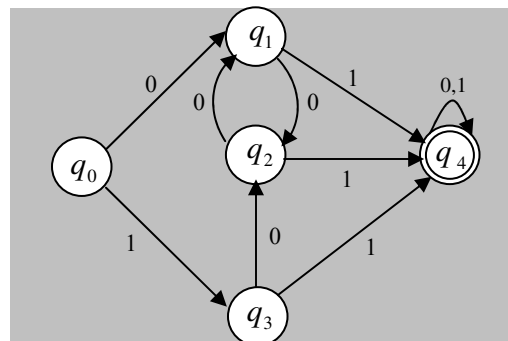
5- مرحله 4 را آنقدر تکرار می کنیم تا هیچ زوجی برای تست کردن باقی نماند، و در نهایت زوج هایی که به عنوان ادغام ناپذیر بودن خط

نخورده اند، ادغام پذیرند (با توجه به خاصیت تعدی ادغام می شوند).

☐ توجه شود رابطه ادغام پذیر بودن دارای خاصیت ترانزیتی یا تعدی است، ولی ادغام ناپذیر بودن دارای چنین خاصیتی نیست.

☐ بعد از اتمام الگوریتم غربال، زوج های ادغام پذیر را ادغام کرده و تعداد وضعیت ها را کاهش می دهیم.

مثال. DFA زیر را بهینه کنید



1- در این مرحله وضعیت حذف شدنی نداریم (زیرا که به تمامی وضعیت ها از حالت شروع مسیری وجود دارد).

2- به تعداد $10 = \binom{5}{2}$ زوج مرتب داریم که در زیر لیست شده اند

(q_0, q_1)	(q_0, q_2)	(q_0, q_3)	(q_0, q_4) <input type="checkbox"/>
(q_1, q_2)	(q_1, q_3)	(q_1, q_4) <input type="checkbox"/>	
(q_2, q_3)	(q_2, q_4) <input type="checkbox"/>		
(q_3, q_4) <input type="checkbox"/>			

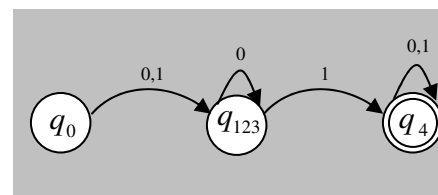
3- در این مرحله بایستی زوج مرتب هائی که یکی از وضعیت های آنها نهائی است، به عنوان زوج ادغام نا پذیر خط بزنیم، که این کار در مرحله 2 انجام شده است (آنهائی که علامت تیک فورده اند)

4- در این مرحله زوج های باقی مانده را به ازای تمامی حروف الفباء تست می کنیم. (آنهائی که علامت تیک فورده اند ادغام می شوند)

$$\begin{array}{ll} \left\langle \begin{array}{l} (q_0, 0) \rightarrow q_1 \\ (q_1, 0) \rightarrow q_2 \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{l} (q_0, 1) \rightarrow q_3 \\ (q_1, 1) \rightarrow q_4 \end{array} \right\rangle \rightarrow (q_0, q_1) \square & \left\langle \begin{array}{l} (q_1, 0) \rightarrow q_2 \\ (q_2, 0) \rightarrow q_1 \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{l} (q_1, 1) \rightarrow q_4 \\ (q_2, 1) \rightarrow q_4 \end{array} \right\rangle \rightarrow (q_1, q_2) \\ \left\langle \begin{array}{l} (q_0, 0) \rightarrow q_1 \\ (q_2, 0) \rightarrow q_1 \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{l} (q_0, 1) \rightarrow q_3 \\ (q_2, 1) \rightarrow q_4 \end{array} \right\rangle \rightarrow (q_0, q_2) \square & \left\langle \begin{array}{l} (q_1, 0) \rightarrow q_2 \\ (q_3, 0) \rightarrow q_2 \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{l} (q_1, 1) \rightarrow q_4 \\ (q_3, 1) \rightarrow q_4 \end{array} \right\rangle \rightarrow (q_1, q_3) \\ \left\langle \begin{array}{l} (q_0, 0) \rightarrow q_1 \\ (q_3, 0) \rightarrow q_2 \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{l} (q_0, 1) \rightarrow q_3 \\ (q_3, 1) \rightarrow q_4 \end{array} \right\rangle \rightarrow (q_0, q_3) \square & \left\langle \begin{array}{l} (q_2, 0) \rightarrow q_1 \\ (q_3, 0) \rightarrow q_2 \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{l} (q_2, 1) \rightarrow q_4 \\ (q_3, 1) \rightarrow q_4 \end{array} \right\rangle \rightarrow (q_2, q_3) \end{array}$$

5- در این مرحله با توجه به اینکه در مرحله 4 وضعیت های ادغام پذیر مشخص شده اند (آنهائی که علامت تیک فورده اند) و بنا به خاصیت تعری، واضح است که وضعیت های q_1, q_2, q_3 ادغام پذیرند و تبدیل به یک وضعیت (کمره) می شوند. حال DFA بهینه را رسم می کنیم.

با توجه به شکل مشخص است که زبان عبارت منظم $(0+1)0^*1(0+1)^*$ را تولید می کند.



گرامر ها:

گرامر G را به صورت $G(V, T, S, P)$ تعریف می کنیم که در آن

V : مجموعه ای متناهی از متغیر ها می باشد

S : متغیری از V که نشانه شروع می باشد.

T : ترمینال ها (مجموعه ای متناهی از الفبای زبان)

P : تعدادی متناهی از قواعد.

نکته: قوانینی که بدنه اصلی گرامر را تشکیل می دهند به صورت $x \rightarrow y$ نشان داده می شوند. که x, y را تولید می کند. و داریم

$$x \in (T \cup V)^+, y \in (T \cup V)^*$$

مثال: اگر $S \rightarrow Ab$ یعنی این که در هر مرحله ای که لازم باشد، می توانیم به جای S از Ab استفاده کنیم.

□ معمولا متغیرها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهند. و به هنگام تولید رشته ای از زبان گرامر، از بین می روند. یعنی رشته نهائی ما باید دنباله ای از ترمینال ها باشد که همان الفبای زبان هستند، و با حروف کوچک لاتین نمایش داده می شوند.

مثال: گرامر $G = \{(S, A), \{a, b\}, S, P\}$

چه زبانی را تولید می کند.

$$\begin{array}{l} P: S \rightarrow Ab \\ A \rightarrow aA \mid a \end{array}$$

مثال: گرامر

حل: زبان تولیدی a^+b می باشد



به مسیر طی شده برای تولید یک رشته در زبان را یک اشتقاق برای آن رشته می‌گوئیم. در حالت کلی اگر $w \in L(G)$ عبارت زیر را

$$S \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \dots \rightarrow w_n \rightarrow w$$

یک اشتقاق برای w می‌گوئیم.



به دنباله میانی w_1 تا w_n شبه جمله گویند که دنباله ای از متغیرها و ترمینال‌ها هستند.

مثال:

گرامری بنویسد که زبان $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ را تولید کند. حل: $S \leftarrow aSb \mid \lambda$

گرامر $S \rightarrow abS \mid \lambda$ چه زبانی را تولید می‌کند. حل: $(ab)^n \mid n \geq 0$

گرامری بنویسد که زبان $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ را تولید کند. حل: $S \leftarrow aSbb \mid \lambda$

گرامری بنویسد که زبان $L = \{a^n b^{n+1} \mid n \geq 0\}$ را تولید کند. حل: $S \leftarrow aSb \mid b$

$$S \rightarrow Ab$$

$$A \rightarrow aAb \mid \lambda$$

روش دوم

مثال: اگر گرامری یک زبان را توصیف کند باید

1- باید به ازای هر $w, w \in L$ بتواند توسط گرامر تولید شود.

2- هر رشته ای که توسط گرامر تولید شود، باید عضو زبان باشد.

$$S \rightarrow SS$$

$$S \rightarrow \lambda$$

چیست؟

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow bSa$$

حل: هر ترکیبی از a و b که تعداد a ها با b ها برابر است، این گرامر تضمین می‌کند، به ازای تولید هر a یک b تولید شود و بالعکس

منتهی تضمینی برای اینکه a ها قبل از b ها باشد نیست.

مثال: گرامری بنویسد که زبان $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}, \Sigma = \{a, b\}$ را تولید کند.

$$S \rightarrow aSa$$

$$S \rightarrow bSb \mid \lambda$$

$$s \rightarrow \lambda$$

تمرینات اضافی:

$$S \rightarrow AB$$

1- برای زبان $l = \{a^n bc^m \mid 0 \leq n \leq m\}$ یک گرامر بنویسد. حل: $A \rightarrow aAc \mid b$

$$B \rightarrow cB \mid c$$

$$S \rightarrow AcdB$$

2- برای زبان $l = \{(ab)^* cd(aa)^+\}$ یک گرامر بنویسد. حل: $A \rightarrow abA \mid \lambda$

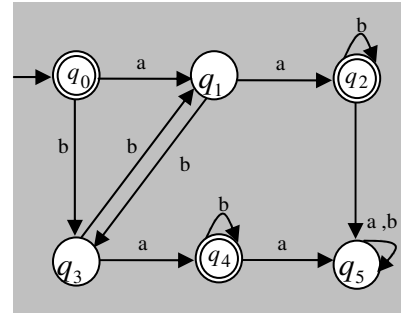
$$B \rightarrow aaB \mid aa$$

$$S \rightarrow AS \mid \lambda$$

3- برای زبان $l = \{(1^* 01^* 01^*)^*\}$ یک گرامر بنویسد. حل: $A \rightarrow B0B0B$

$$B \rightarrow 1B \mid \lambda$$

4- DFA زیر را بویینه کنید.



1- در این مرحله چون از وضعیت شروع به تمامی وضعیت ها دسترسی داریم، هیچ وضعیتی حذف نمی شود.

2- به تعداد $15 = \binom{6}{2}$ زوج مرتب داریم که در زیر لیست شده اند

- | | | | | |
|---------------------------------------|--------------|---------------------------------------|--------------|---------------------------------------|
| (q_0, q_1) <input type="checkbox"/> | (q_0, q_2) | (q_0, q_3) <input type="checkbox"/> | (q_0, q_4) | (q_0, q_5) <input type="checkbox"/> |
| (q_1, q_2) <input type="checkbox"/> | (q_1, q_3) | (q_1, q_4) <input type="checkbox"/> | (q_1, q_5) | |
| (q_2, q_3) <input type="checkbox"/> | (q_2, q_4) | (q_2, q_5) <input type="checkbox"/> | | |
| (q_3, q_4) <input type="checkbox"/> | (q_3, q_5) | | | |
| (q_4, q_5) <input type="checkbox"/> | | | | |

3- در این مرحله بایستی زوج مرتب هائی که یکی از وضعیت های آنها نهائی است، به عنوان زوج ادغام نا پذیر خط بزنیم، که این کار در مرحله 2 انجام شده است (آنهائی که علامت تیک خورده اند) (دقت شود که زوج (q_2, q_4) حذف نشده چون هر دو حالت نهائی هستند)

4- در این مرحله زوج های باقی مانده را به ازای تمامی حروف الفباء تست می کنیم. (آنهائی که علامت تیک خورده اند ادغام می شوند) البته با توجه به خاصیت تعری.

$$\left| \begin{matrix} (q_0, a) \rightarrow q_1 \\ (q_4, a) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (q_0, b) \rightarrow q_3 \\ (q_4, b) \rightarrow q_4 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow (q_0, q_4) \quad \square$$

$$\left| \begin{matrix} (q_0, a) \rightarrow q_1 \\ (q_2, a) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (q_0, b) \rightarrow q_3 \\ (q_2, b) \rightarrow q_2 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow (q_0, q_2) \quad \square$$

$$\left| \begin{matrix} (q_1, a) \rightarrow q_2 \\ (q_3, a) \rightarrow q_4 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (q_1, b) \rightarrow q_3 \\ (q_3, b) \rightarrow q_1 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow (q_1, q_3)$$

$$\left| \begin{matrix} (q_1, a) \rightarrow q_2 \\ (q_5, a) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (q_1, b) \rightarrow q_3 \\ (q_5, b) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow (q_1, q_5) \quad \square$$

$$\left| \begin{matrix} (q_2, a) \rightarrow q_5 \\ (q_4, a) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (q_2, b) \rightarrow q_2 \\ (q_4, b) \rightarrow q_4 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow (q_2, q_4)$$

$$\left| \begin{matrix} (q_3, a) \rightarrow q_4 \\ (q_5, a) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (q_3, b) \rightarrow q_1 \\ (q_5, b) \rightarrow q_5 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow (q_3, q_5) \quad \square$$

وضعیت های ادغام پذیر مشخص شده اند (آنهائی که علامت تیک خورده اند) واضح است که وضعیت q_1 وضعیت (کره) می شوند. حال DFA بویینه را رسم می کنیم

