بسم الله الرحمن الرحیم

حساب دیفرانسیل توابع یک متغیره

معادلات دیفرانسیل

(بخش ۱ : معادلات مرتبهٔ اول)

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۶ فروردین ۱۴۰۰

عنوان مطالب:

۱. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول شامل معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر، همگن، کامل، غیرکامل با عامل انتگرال ساز،خطی مرتبهٔ اول، بِرنولی،کلرو، لاگرانژ، ریکاتی؛ خانوادهٔ خم ها و مسیرهای قائم؛

۲. معادلات دیفرانسیل خطی و مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر(معادلهٔ خطی همگن با ضرایب ثابت، معادلهٔ کُوشی_اویلر، معادلات غیر همگن، روش ضرایب نامعّین و ضرایب ثابت، روش تغییر پارامتر)؛

۳. تبدیلات لاپلاس و کاربردهای آن (تبدیل انتگرالی، تبدیل لاپلاس، حل معادلهٔ دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس، معکوس تبدیل لاپلاس، مشتق و انتگرال لاپلاس، معادلهٔ انتگرالی)؛

۴. مسایل نمونه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱ بخش اول

معرفی و حل انواع معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

تعریف

معادلهٔ دیفرانسیل

تساوی شامل یک تابع و مشتقات مراتب مختلف آن و متغیر مستقل آن تابع را یک **معادلهٔ دیفرانسیل** می نامیم. تابعی که در این تساوی صدق کند، **جواب معادلهٔ دیفرانسیل** نامیده می شود. بزرگترین مرتبهٔ مشتق تابع مجهول در معادلهٔ دیفرانسیل را **مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل** می نامیم. شکل کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی از مرتبهٔ n اُم به صورت زیر است:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = ۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

لازم به ذکر است، تساوی‌یی که برای تابع مجهول مانند y (y متغیر وابسته است) بر حسب متغیر مسقل مانند x و مقادیر ثابت مانند c_1 ، c_2 و ...به دست می آید و در معادلهٔ دیفراسیل صدق می کند، **جواب عمومی** معادله نامیده می شود و با معلوم بودن مقادیر ثابت با در نظر گرفتن شرایط اولیّه معادله، جواب عمومی به یک جواب خصوصی معادله تبدیل می شود. هدف اصلی این فصل بیان دستورات یا روش هایی برای یافتن جواب های عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول می باشد.

چند مثال : معادلات زیر، معادلات دیفراسیل معمولی هستند:

$$(1)\ y' + x^2 y = \cos 3x \qquad (2)\ y'' - 2xy' + \sqrt{x}y = 0 \qquad (3)\ \frac{dy}{dx} = -m^2\, y$$

$$(4)\ (x^2 + 2xy)\, dy - (2x - 3y)\, dx = 0 \qquad (5)\ x^2 y^{(4)} - xy^{(3)} + 4y'' - y = e^x$$

معادلات (۱) ، (۳) و (۴) از مرتبهٔ اول و معادلهٔ (۲) از مرتبهٔ دوم و معادلهٔ (۵) از مرتبهٔ چهارم می باشند.

تعریف

معادلهٔ دیفراسیل خطی

شکل کلی این معادله به صورت زیر است:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

که درآن $f(x)$، $a_n(x)$ ، ...و $a_0(x)$ توابعی بر حسب x می باشند. هرگاه $a_i(x)$ ها توابعی ثابت باشند، معادلهٔ دیفرانسیل را معادله خطی با **ضرایب ثابت** می گوییم. در حالتی که $f(x) = 0$ باشد، معادلهٔ دیفرانسیل را **همگن** خطی می نامیم.

چندمثال: معادلات دیفرانسیل زیر خطی هستند:

$$(1)\ x^2\, y'' - 4e^x\, y' + (\sin x)\, y = \sqrt{x} \qquad (2)\ 5y''' - 4y'' + 3y' - y = \cos x \qquad (3)\ y^{(4)} + 3y'' - 2y' = 0$$

معادلهٔ (۲) خطی با ضرایب ثابت و معادلهٔ (۳) ، همگن با ضرایب ثابت می باشند.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

چندمثال: معادلات دیفرانسیل زیر همگی غیر خطی هستند:

$$(1)\ 3xyy' - 4y'' + x^2\, y = 0 \qquad\qquad (2)\ (\cos x)\, y^2 + y'' - y' = \sqrt[3]{x}$$

مثال

نشان دهید که تابع $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y = 0$ می باشد.

حل: ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه نموده سپس در معادله قرار می دهیم. به عبارت دیگر

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad \rightsquigarrow \quad y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x \quad \rightsquigarrow \quad y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$$

بنابراین

$$y'' + 4y = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$$

$$= -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x + 4c_1 \sin 2x + 4c_2 \cos 2x = 0$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

شکل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به صورت $F(x,y,y')=۰$ می باشد. در حالت کلی حل این نوع معادله یه آسانی امکان پذیر نمی باشد. در ادامه به روش های مختلف حل کلاسیک معادلهٔ $y'=f(x,y)$ می پردازیم. که به معادلات زیر تقسیم بندی می شوند:

معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر، همگن، کامل، غیر کامل با عامل انتگرال ساز، خطی، برنولی، کلرو، ریکاتی؛

ملاحظه

معادلات تفکیک پذیر

ساده ترین نوع معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، معادله ای است که متغیرهای آن جدایی پذیر می باشد. با به کاربردن عملیات جبری ساده می توانیم آن را به صورت $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$ یا $y'=g(x)h(y)$ نوشت. برای حل معادله، کافی است آن را به صورت $h(y)dy=g(x)dx$ بنویسیم، با انتگرال گیری از طرفین تساوی، تابع y به دست می آید.

مثال

معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر زیر را حل کنید.

$$(1)\ y' = \frac{2x+1}{y^2+1} \qquad (2)\ y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \qquad (3)\ (2x+1)dy - (3y+2)dx = 0$$

حل: (۱) چون $y' = \frac{dy}{dx}$ است، می نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2+1} \quad \rightsquigarrow \quad (y^2+1)dy = (2x+1)dx$$

$$\rightsquigarrow \int (y^2+1)dy = \int (2x+1)dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{y^3}{3} + y = 2\frac{x^2}{2} + x + c$$

(۲) با در نظر گرفتن $y' = \frac{dy}{dx}$ و جدا کردن عبارت ها، داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad \rightsquigarrow \quad (1+x^2)dy = (1+y^2)dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \arctan y = \arctan x + c$$

برای یافتن مقدار y ، فرض کنیم $c = \arctan c_۱$ ، بنابراین $\arctan y = \arctan x + \arctan c_۱$ ؛ حال اگر $\arctan x = a$ و $\arctan c_۱ = b$ فرض شود، آنگاه

$$\arctan y = a + b \quad \rightsquigarrow \quad y = \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{۱ - \tan a \tan b}$$

لذا جواب عمومی معادله برابر است با

$$y = \frac{\tan a + \tan b}{۱ - \tan a \tan b} = \frac{x + c_۱}{۱ - c_۱ x}$$

(۳) با تفکیک عبارت ها، داریم:

$$(۲x+۱)dy - (۳y+۲)dx = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad \frac{۱}{۳y+۲}\, dy = \frac{۱}{۲x+۱}\, dx$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{۱}{۳y+۲}\, dy = \int \frac{۱}{۲x+۱}\, dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{۱}{۳}\int \frac{۳}{۳y+۲}\, dy = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲}{۲x+۱}\, dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{۱}{۳}\ln|۳y+۲| = \frac{۱}{۲}\ln|۲x+۱| + c \quad \rightsquigarrow \quad \ln|۳y+۲| = \frac{۳}{۲}\ln|۲x+۱| + \ln c_۱$$

$$\rightsquigarrow \quad \ln|۳y+۲| = \ln|(۲x+۱)^{\frac{۳}{۲}}| + \ln c_۱ = \ln|(c_۱(۲x+۱)^{\frac{۳}{۲}}|$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$3y+2=c_1(2x+1)^{\frac{3}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad y=\frac{1}{3}c_1(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$

تعریف

تابع همگن

تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن از درجهٔ n می نامیم، هرگاه برای هر متغیر x ، y و t تساوی زیر برقرار باشد.

$$f(tx,ty)=t^n\ f(x,y)$$

هرگاه $f(tx,ty)=f(x,y)$ باشد، تابع را همگن ازدرجهٔ صفر می گوییم.

چندمثال: تابع x^2-3xy همگن از درجهٔ ۲ و تابع x^3+x^2y همگن از درجهٔ ۳ و تابع $\frac{x+y}{x-y}$ همگن از درجهٔ صفر می باشند. زیرا

$$f(tx,ty)=(tx)^2-3(tx)(ty)=t^2(x^2-3xy)=t^2\ f(x,y)$$

$$f(tx,ty)=(tx)^3+(tx)^2(ty)=t^3(x^3+x^2y)=t^3\ f(x,y)$$

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{tx - ty} = \frac{x + y}{x - y} = f(x, y)$$

ملاحظه

معادلهٔ دیفرانسیل همگن

یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن به صورت $y' = f(x, y)$ است که در ان تابع f همگن از درجهٔ صفراست. برای حل این گونه معادلات ابتدا تغییر متغیر $y = tx$ را در نظر می گیریم. از طرفین برحسب x مشتق می گیریم. داریم:

$$y' = t + x\,\frac{dt}{dx}$$

با جایگزینی در معادلهٔ دیفرانسیل و ساده نمودن آن ، یک معادلهٔ دیفرانسیل تفکیک پذیر برحسب متغیر های t و x به دست می آید، پس از حل آن، بجای متغیر t مقدار $\frac{y}{x}$ را قرار داده جواب عمومی مغادله تعیین می گردد.

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

معادلات دیفرانسیل همگن زیر را حل کنید.

$$(۱)\ y' = \frac{x^۲ + xy}{y^۲ + xy} \qquad (۲)\ (x^۲ - ۲y^۲)\ dx + xy\ dy = ۰$$

حل: (۱) تابع $f(x,y) = \frac{x^۲ + xy}{y^۲ + xy}$ همگن از درجهٔ صفر است، زیرا:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^۲ + (tx)(ty)}{(ty)^۲ + (tx)(ty)} = \frac{t^۲(x^۲ + xy)}{t^۲(y^۲ + xy)} = \frac{x^۲ + xy}{y^۲ + xy} = f(x,y)$$

اکنون قرار می دهیم : $y = tx$ و $y' = t + x\frac{dt}{dx}$ ، لذا

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{x^۲ + x(tx)}{(tx)^۲ + x(tx)} = \frac{x^۲(۱+t)}{x^۲(t^۲+t)} = \frac{۱+t}{t^۲+t} = \frac{۱+t}{t(t+۱)} = \frac{۱}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad t + x\frac{dt}{dx} = \frac{۱}{t} \quad \rightsquigarrow \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{۱}{t} - t = \frac{۱-t^۲}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad x\ dt = \frac{۱-t^۲}{t}\ dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{t}{۱-t^۲}\ dt = \frac{۱}{x}\ dx \rightsquigarrow \quad \int \frac{t}{۱-t^۲}\ dt = \int \frac{۱}{x}\ dx$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

$$\rightsquigarrow \frac{-۱}{۲}\int \frac{-۲t}{۱-t^۲}\,dt = \int \frac{۱}{x}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{-۱}{۲}\ln|۱-t^۲| = \ln|x| + \underbrace{\ln c}_{c_۱}$$

$$\rightsquigarrow \quad \ln|۱-t^۲|^{-\frac{۱}{۲}} = \ln|cx| \quad \rightsquigarrow \quad |۱-t^۲|^{-\frac{۱}{۲}} = |cx| \quad ,t=\frac{y}{x}, \quad \rightsquigarrow \quad (۱-(\frac{y}{x})^۲)^{-\frac{۱}{۲}} = cx$$

$$\rightsquigarrow \quad ۱-\frac{y^۲}{x^۲} = (cx)^{-۲} = \frac{۱}{c^۲x^۲} \quad \rightsquigarrow \quad x^۲ - y^۲ = \frac{۱}{c^۲}$$

(۲) معادلهٔ دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می شود:

$$(x^۲-۲y^۲)\,dx = -xy\,dy \quad \rightsquigarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^۲-۲y^۲}{xy} = \frac{۲y^۲-x^۲}{xy}$$

تابع $f(x,y) = \frac{۲y^۲-x^۲}{xy}$ همگن از درجهٔ صفر است، زیرا:

$$f(tx,ty) = \frac{۲(ty)^۲-(tx)^۲}{tx(ty)} = \frac{t^۲(۲y^۲-x^۲)}{t^۲xy} = \frac{۲y^۲-x^۲}{xy} = f(x,y)$$

اکنون قرار می دهیم : $y=tx$ و $y' = t + x\frac{dt}{dx}$ ، لذا

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{۲(tx)^۲-x^۲}{x(tx)} = \frac{x^۲(۲t^۲-۱)}{x^۲t} = ۲t - \frac{۱}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad t + x\frac{dt}{dx} = ۲t - \frac{۱}{t} \quad \rightsquigarrow \quad x\frac{dt}{dx} = t - \frac{۱}{t} = \frac{t^۲-۱}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad x\,dt = \frac{t^{۲} - ۱}{t}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{t}{t^{۲} - ۱}\,dt = \frac{۱}{x}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{t}{t^{۲} - ۱}\,dt = \int \frac{۱}{x}\,dx$$

$$\frac{۱}{۲} \int \frac{۲t}{t^{۲} - ۱}\,dt = \int \frac{۱}{x}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{۱}{۲} \ln|t^{۲} - ۱| = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$$

$$\rightsquigarrow \quad \ln|t^{۲} - ۱|^{\frac{۱}{۲}} = \ln|cx| \quad \rightsquigarrow \quad (t^{۲} - ۱)^{\frac{۱}{۲}} = cx \quad \rightsquigarrow \quad t^{۲} - ۱ = c^{۲}\,x^{۲}$$

$$,t = \frac{y}{x}, \qquad (\frac{y}{x})^{۲} - ۱ = c^{۲}x^{۲} \quad \rightsquigarrow \quad y^{۲} - x^{۲} = c^{۲}x^{۴}$$

ملاحظه

معادلهٔ دیفرانسیل کامل

معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = ۰$ را **کامل** می نامیم هرگاه مشتق جزئی تابع M برحسب y برابر با مشتق جزئی تابع N بر حسب x باشد به عبارت دیگر

$$M_y = N_x$$

در این صورت ابتدا تابع g را از دستور زیر به دست می آوریم.

$$g(y) = \int (N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\ dx)\ dy$$

سپس جواب عمومی یعنی تابع f از تساوی زیر به دست می آید.

$$f(x,y) = g(y) + \int M\ dx = c$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

کامل بودن معادلهٔ زیر را بررسی نموده سپس جواب عمومی آن را بیابید.

$$y\ dx + (x + \frac{۲}{y})\ dy = ۰$$

حل: چون $M(x,y) = y$ و $N(x,y) = x + \frac{۲}{y}$ ، بنابراین

$$M_y = ۱ \qquad , \qquad N_x = ۱ + ۰ = ۱ \quad \rightsquigarrow \quad M_y = N_x$$

لذا معادله کامل می باشد. تابع g از دستور زیر به دست می آید.

$$g(y) = \int (N - \frac{\partial}{\partial y} \textstyle\int M\ dx)\ dy = \int (x + \frac{۲}{y} - \frac{\partial}{\partial y} \textstyle\int y\ dx)\ dy = \int \left(x + \frac{۲}{y} - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)\ dy$$

$$g(y) = \int (x + \frac{۲}{y} - x)\ dy = \int \frac{۲}{y}\ dy = ۲ \ln|y|$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

سپس جواب عمومی از تساوی زیر به دست می آید.

$$f(x,y) = g(y) + \int M \ dx = ۲ \ln|y| + \int y \ dx = ۲ \ln|y| + xy = c$$

ملاحظه

معادلات غیر کامل

هرگاه معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = ۰$ کامل نباشد یعنی $M_y \neq N_x$ ، برای این که معادله کامل شود توابعی مناسب (عامل انتگرال ساز) برحسب متغیر های x یا y و یا هردو متغیر را به دست می آوریم به طوری که اگر طرفین معادلهٔ دیفرانسیل غیر کامل درآن ضرب شود، معادله کامل شود سپس مطابق دستور معادلهٔ کامل جواب عمومی محاسبه می گردد.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

تذکر

عامل های انتگرال ساز

الف ـ عامل انتگرال ساز μ **(تابع برحسب** x **) :** ابتدا تابع $g(x)$ از دستور زیر به دست می آید.

$$g(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

سپس عامل انتگرال ساز که تابعی بر حسب x است، از تساوی زیر محاسبه می شود.

$$\mu = e^{\int g(x)\, dx}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

تذکر

عامل های انتگرال ساز

ب ـ عامل انتگرال ساز μ **(تابع برحسب** y **) :** ابتدا تابع $h(y)$ از دستور زیر به دست می آید.

$$h(y) = \frac{M_y - N_x}{-M}$$

سپس عامل انتگرال ساز که تابعی بر حسب y است، از تساوی زیر محاسبه می شود.

$$\mu = e^{\int h(y)\ dy}$$

ج ـ عامل انتگرال ساز μ **(تابع برحسب** $z = xy$ **) :** ابتدا تابع $k(z)$ از دستور زیر به دست می آید.

$$k(z) = \frac{M_y - N_x}{y\,N - x\,M}$$

سپس عامل انتگرال ساز که تابعی بر حسب z است، از تساوی زیر محاسبه می شود.

$$\mu = e^{\int k(z)\ dz}$$

مثال

معادلات دیفرانسیل زیر را با به دست آوردن یک عامل انتگرال ساز مناسب حل کنید.

$$(۱)\ (۳x^۲ - y^۲)\, dy - ۲xy\, dx = ۰ \qquad (۲)\ (xy - ۱)\, dx + (x^۲ - xy)\, dy = ۰$$

حل :(۱) با توجه به معادله، داریم:

$$M = -۲xy \quad , \quad N = ۳x^۲ - y^۲ \quad \rightsquigarrow \quad M_y = -۲x \quad , \quad N_x = ۶x$$

چون $M_y \neq N_x$، معادله کامل نیست. حال یک عامل انتگرال ساز مناسب (در این جا برحسب y) می یابیم. می نویسیم:

$$h(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-۲x - ۶x}{۲xy} = \frac{-۸x}{۲xy} = \frac{-۴}{y}$$

$$\mu = e^{\int h(y)\, dy} = e^{\int \frac{-۴}{y}\, dy} = e^{-۴ \ln|y|} = e^{\ln|y|^{-۴}} = y^{-۴}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

لازم به یادآوری است که در تساوی آخر، از فرمول $e^{\ln A} = A$ استفاده شده است. اکنون طرفین معادله دیفرانسیل را در عامل انتگرال ساز $\mu = y^{-4}$ ضرب می کنیم. بنابراین توابع M و N جدید به صورت زیر به دست می آید.

$$M = -2xy(y^{-4}) = -2xy^{-3} \quad , \quad N = (3x^2 - y^2)y^{-4} = 3x^2y^{-4} - y^{-2}$$

$$\rightsquigarrow \quad M_y = 6xy^{-4} \quad , \quad N_x = 6xy^{-4} \quad \rightsquigarrow \quad M_y = N_x$$

لذا معادله کامل می شود، حال از دستور معادلهٔ کامل (به صورت زیر)، جواب عمومی را می یابیم.

$$g(y) = \int (N - \frac{\partial}{\partial y} \int M \ dx) \ dy = \int (3x^2y^{-4} - y^{-2} - \frac{\partial}{\partial y} \int -2xy^{-3} \ dx) \ dy$$

$$\rightsquigarrow \quad = \int \left(3x^2y^{-4} - y^{-2} - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{-2}{2}x^2y^{-3})\right) \ dy = \int \left(3x^2y^{-4} - y^{-2} - 3x^2y^{-4}\right) \ dy$$

$$\rightsquigarrow = \int -y^{-2} \ dy = -\frac{1}{-2+1} \ y^{-2+1} = y^{-1}$$

$$f(x,y) = g(y) + \int M \ dx = c \quad \rightsquigarrow \quad f(x,y) = y^{-1} + \int -2xy^{-3} \ dx = \frac{1}{y} + \frac{-2}{2}x^2y^{-3} = c$$

(۲) با توجه به معادله، داریم:

$$M = xy - 1 \quad , \quad N = x^2 - xy \quad \rightsquigarrow \quad M_y = x \quad , \quad N_x = 2x - y$$

چون $M_y \neq N_x$، معادله کامل نیست. حال یک عامل انتگرال ساز مناسب (در این جا برحسب x) می یابیم. می نویسیم:

$$g(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - (2x - y)}{x^2 - xy} = \frac{-(x-y)}{x(x-y)} = \frac{-1}{x}$$

$$\mu = e^{\int g(x)\, dx} = e^{\int \frac{-1}{x}\, dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}$$

اکنون طرفین معادله دیفرانسیل را در عامل انتگرال ساز $\mu = x^{-1}$ ضرب می کنیم. بنابراین توابع M و N جدید به صورت زیر به دست می آید.

$$M = x^{-1}(xy - 1) = y - x^{-1} \quad , \quad N = x^{-1}(x^2 - xy) = x - y$$

$$\rightsquigarrow \quad M_y = 1 \quad , \quad N_x = 1 \quad \rightsquigarrow \quad M_y = N_x$$

لذا معادله کامل می شود، حال از دستور معادلهٔ کامل (به صورت زیر)، جواب عمومی را می یابیم.

$$g(y)=\int\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right)dy=\int\left(x-y-\frac{\partial}{\partial y}\int\left(y-x^{-1}\right)dx\right)dy$$

$$\rightsquigarrow\quad =\int\left(x-y-\frac{\partial}{\partial y}(yx-\ln x)\right)dy=\int(x-y-x)\ dy=\int -y\ dy=-\frac{1}{2}y^{2}$$

$$f(x,y)=g(y)+\int M\ dx=c\quad\rightsquigarrow\quad f(x,y)=-\frac{1}{2}y^{2}+\int\left(y-x^{-1}\right)dx=-\frac{1}{2}y^{2}+yx-\ln|x|=c$$

ملاحظه

معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

شکل کلی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول به صورت زیر است:

$$a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x) \qquad , \qquad a_1(x) \neq 0$$

با تقسیم طرفین این معادله بر تابع $a_1(x)$ ، معادله به شکل زیر تبدیل می شود:

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

جواب عمومی این معادله مطابق دستور زیر محاسبه می شود.

$$\mu = e^{\int P(x)\, dx} \qquad , \qquad \mu\, y = \int \mu\, Q(x)\, dx + c$$

مثال

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول زیر را بیابید.

$$(۱)\ y' - \frac{۱}{x}\,y = x^{۲} \qquad\qquad (۲)\ xy' - y = x^{۲}\sin x$$

حل: (۱) با انتخاب $P(x) = -\frac{۱}{x}$ و $Q(x) = x^{۲}$ داریم:

$$\mu = e^{\int\ P(x)\ dx} = e^{\int\ -\frac{۱}{x}\ dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-۱}} = x^{-۱}$$

$$\mu\ y = \int\ \mu\ Q(x)\ dx + c \quad \rightsquigarrow \quad x^{-۱}\ y = \int x^{-۱}\ x^{۲}\ dx + c = \int x\ dx + c = \frac{۱}{۲}x^{۲} + c$$

بنابراین جواب عمومی برابر است با:

$$\frac{y}{x} = \frac{۱}{۲}x^{۲} + c$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

(۲) ابتدا طرفین معادله را بر ضریب y' تقسیم می کنیم. داریم:

$$y' - \frac{۱}{x}\, y = x \sin x \qquad P(x) = -\frac{۱}{x} \quad , \quad Q(x) = x \sin x$$

بنابراین

$$\mu = e^{\int\, P(x)\, dx} = e^{\int\, -\frac{۱}{x}\, dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-۱}} = x^{-۱}$$

$$\mu\, y = \int\, \mu\, Q(x)\, dx + c \quad \rightsquigarrow \quad x^{-۱}\, y = \int x^{-۱}\, x \sin x\, dx + c = \int \sin x\, dx + c = -\cos x + c$$

بنابراین جواب عمومی برابر است با:

$$\frac{y}{x} = -\cos x + c$$

ملاحظه

معادلهٔ بِرنولی

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به شکل زیر را معادلهٔ برنولی می نامیم.

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n \qquad n \neq ۰, ۱$$

برای حل این معادله، ابتدا طرفین بر y^n تقسیم می کنیم، سپس تغییر متغیر $t = y^{۱-n}$ را در نظر می گیریم. از طرفین، مشتق بر حسب x گرفته در معادلهٔ دیفرانسیل قرار داده و آن را ساده می کنیم تا یک معادلهٔ دیفراسیل خطی مرتبهٔ اول بر حسب متغیر های x و t به دست آید. جواب عمومی این معادله به راحتی محاسبه می شود.

مثال

معادلات برنولی زیر را حل کنید.

$$(۱)\ xy' + y + x^{۲}e^{x}y^{۲} = ۰ \qquad\qquad (۲)\ y' - y(y^{۳}\ \cos x + \tan x) = ۰$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

حل :(۱) با توجه به شکل معادله برنولی می نویسیم:

$$xy' + y = -x^{2} e^{x}\, y^{2} \quad \rightsquigarrow \quad y' + \frac{1}{x}\, y = -xe^{x}\, y^{2} \qquad n = 2$$

حال طرفین معادله را بر y^{2} تقسیم شده و تغییر متغیر $t = y^{1-2} = y^{-1}$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$t = y^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad t' = \frac{dt}{dx} = -y'y^{-2} \qquad y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -xe^{x}$$

$$\rightsquigarrow \quad -t' + \frac{1}{x}\, t = -xe^{x} \quad \rightsquigarrow \quad t' - \frac{1}{x}\, t = xe^{x}$$

معادلهٔ به دست آمده برحسب t، خطی مرتبهٔ اول است که $P(x) = -\frac{1}{x}$ و $Q(x) = xe^{x}$ ؛ لذا

$$\mu = e^{\int P(x)\, dx} = e^{\int -\frac{1}{x}\, dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}$$

$$\mu\, t = \int \mu\, Q(x)\, dx + c \quad \rightsquigarrow \quad x^{-1}\, t = \int x^{-1}\, xe^{x}\, dx + c = \int e^{x}\, dx + c = e^{x} + c$$

بنابراین جواب عمومی برابر است با:

$$\frac{t}{x} = e^{x} + c \qquad t = y^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{y^{-1}}{x} = e^{x} + c$$

(۲) با توجه به شکل معادله برنولی می نویسیم:

$$y' - y^{۴} \cos x - y \tan x = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad y' - y \tan x = \cos x \; y^{۴} \qquad n = ۴$$

ابتدا طرفین معادله را بر $y^{۴}$ تقسیم می کنیم. داریم:

$$y^{-۴} y' - y^{-۳} \; \tan x = \cos x$$

اکنون تغییر متغیر $t = y^{۱-۴} = y^{-۳}$ را در نظر می گیریم. پس

$$t = y^{-۳} \quad \rightsquigarrow \quad t' = -۳ y' y^{-۴} \quad \rightsquigarrow \quad y' y^{-۴} = -\frac{t'}{۳}$$

بنابراین

$$-\frac{t'}{۳} - t \; \tan x = \cos x \quad \rightsquigarrow \quad t' + ۳ \tan x \; t = -۳ \cos x$$

در معادلهٔ خطی مر تبهٔ اول $P(x) = ۳ \tan x$ و $Q(x) = -۳ \cos x$ است، لذا

$$\mu = e^{\int \; P(x) \; dx} = e^{\int \; ۳ \tan x \; dx} = e^{۳ \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx} = e^{-۳ \ln|\cos x|} = (\cos x)^{-۳}$$

$$\mu \; t = \int \; \mu \; Q(x) \; dx + c \quad \rightsquigarrow \quad (\cos x)^{-۳} \; t = \int (\cos x)^{-۳} (-۳ \cos x) \; dx + c$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

$$\rightsquigarrow \qquad = -۳ \int \frac{۱}{\cos^{۲} x}\, dx + c = -۳ \tan x + c$$

بنابراین جواب عمومی برابر است با:

$$\frac{t}{\cos^{۳} x} = -۳ \tan x + c \qquad t = y^{-۳} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{y^{-۳}}{\cos^{۳} x} = -۳ \tan x + c$$

ملاحظه

معادلهٔ کلرو

شکل کلی این معادله به صورت زیر است :

$$y = x\,y' + f(y')$$

برای حل این معادله از طرفین بر حسب x مشتق می گیریم. داریم:

$$y' = y' + xy'' + y''\ f'(y') \quad \rightsquigarrow \quad y''(x + f'(y')) = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad y'' = ۰ \quad , \quad x + f'(y') = ۰$$

$$\rightsquigarrow \quad y'' = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad y' = m$$

$$\rightsquigarrow \quad x + f'(y') = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad x = -f'(y')$$

اگر $y' = m$ باشد، آنگاه $y = mx + f(m)$ یک جواب عمومی معادلهٔ کلرو است.

اگر $x = -f'(y')$ ، با فرض $y' = t$ ؛ شکل پارامتری جواب خصوصی معادلهٔ کلرو به صورت زیر است :

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = xy' + f(y') = xt + f(t) \end{cases}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

مثال

معادلهٔ کلرو $y = xy' + e^{y'}$ را حل کنید.

حل: از طرفین معادله مشتق می گیریم و آن را ساده می کنیم.

$$y' = y' + xy'' + y''\, e^{y'} \quad \rightsquigarrow \quad y''(x + e^{y'}) = ۰$$

اگر $y'' = ۰$ باشد، آنگاه $y' = m$ (m عدد ثابت حقیقی است.) و جواب عمومی معادلهٔ کلرو به صورت زیر است:

$$y = mx + e^m$$

اگر $x + e^{y'} = ۰$ باشد، آنگاه $x = -e^{y'}$ و با فرض $y' = t$ ، جواب خصوصی معادلهٔ کلرو به شکل پارامتری زیر است:

$$\begin{cases} x = -e^t \\ y = xy' + f(y') = tx + e^t = -e^t\, t + e^t \end{cases}$$

ملاحظه

معادلهٔ لاگرانژ

این معادله به شکل زیر است:

$$y = x\ g(y') + f(y')$$

برای حل این معادله ابتدا از طرفین معادله مشتق می گیریم:

$$y' = x\ y''\ g'(y') + g(y') + y''\ f'(y')$$

قرار می دهیم : $y' = t$ و $y'' = t' = \dfrac{dt}{dx}$ ؛ پس

$$t = x\ \frac{dt}{dx}\ g'(t) + g(t) + \frac{dt}{dx}\ f'(t)$$

حال معادله را ساده می کنیم و آن را به صورت یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول بر حسب متغیر وابسته x و متغیر مستقل t به صورت زیر نوشته که جواب عمومی این معادله به راحتی به دست می آید.

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\ x = Q(t)$$

واحد رودهن
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

جواب عمومی معادلهٔ لاگرانژ $y = ۲xy' + y'^۲$ را بیابید.

حل: از طرفین معادله مشتق می گیریم:

$$y = ۲xy' + y'^۲ \quad \rightsquigarrow \quad y' = ۲x\, y'' + ۲y' + ۲y'\, y'' \quad \rightsquigarrow \quad -y' = (۲x + ۲y')\, y''$$

حال قرار می دهیم : $y' = t$ و $y'' = \frac{dt}{dx}$ داریم:

$$-t = (۲x + ۲t)\, \frac{dt}{dx} \quad \rightsquigarrow \quad -t\, \frac{dx}{dt} = ۲x + ۲t \quad \rightsquigarrow \quad -t\, \frac{dx}{dt} - ۲x = ۲t$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{dx}{dt} + ۲\frac{x}{t} = -۲ \quad P(t) = \frac{۲}{t} \;\; , \;\; Q(t) = -۲$$

$$\mu = e^{\int P(t)\; dt} = e^{\int \frac{۲}{t}\; dt} = e^{۲\ln|t|} = t^۲$$

$$\mu\, x = \int \mu\, Q(t)\; dt + c \quad \rightsquigarrow \quad t^۲\; x = \int t^۲\; (-۲)\; dt + c = -۲\frac{t^۳}{۳} + c$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بنابراین $x=-2\frac{t^3}{3}+c\,t^2$ یا $x=-\frac{2}{3}\,t+c\,t^{-2}$. اکنون در معادلهٔ دیفرانسیل $y=2xy'+y'^2$ به جای x مقدار فوق و به جای y' مقدار t را قرار می دهیم. شکل پارامتری جواب عمومی به صورت زیر نوسته می شود.

$$y=2xy'+y'^2=2(-\frac{2}{3}\,t+c\,t^{-2})\,t+t^2$$

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{3}\,t+c\,t^{-2} \\ y=-\frac{4}{3}t^2+2ct^{-1}+t^2 \end{cases}$$

ملاحظه

معادلهٔ ریکاتی

معادله به شکل زیر به معادلهٔ ریکاتی معروف است:

$$y'=p(x)\,y^2+q(x)\,y+r(x)$$

یافتن جواب عمومی معادلهٔ ریکاتی :

فرض کنیم y_1 یک جواب معادلهٔ ریکاتی باشد، ابتدا تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ را در نظر می گیریم. با مشتق گیری از این عبارت، تساوی $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ حاصل می شود. با قرار دادن در معادله ریکاتی، داریم:

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = p(x)(y_1 + \frac{1}{u})^2 + q(x)(y_1 + \frac{1}{u}) + r(x)$$

پس از ساده نمودن، معادله به صورت یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول برحسب u و x به شکل زیر در می آید که جواب عمومی این معادله قابل محاسبه است.

$$u' + P(x)\, u = Q(x)$$

مثال

جواب عمومی معادلهٔ ریکاتی زیر را در صورتی که $y_1 = x^2$ یک جواب آن باشد، به دست آورید.

$$y' = -\frac{1}{x}\, y^2 + \frac{2}{x}\, y + x^3$$

حل: تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u} = x^2 + \frac{1}{u}$ را در نظر می گیریم. پس $y' = 2x - \frac{u'}{u^2}$ ، در معادله قرار داده ، می نویسیم:

$$2x - \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{x}(x^2 + \frac{1}{u})^2 + \frac{2}{x}(x^2 + \frac{1}{u}) + x^3$$

$$\rightsquigarrow \quad 2x - \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{x}(x^4 + 2x^2\,\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}) + 2x + \frac{2}{xu} + x^3$$

$$\rightsquigarrow \quad 2x - \frac{u'}{u^2} = -x^3 - \frac{2x}{u} - \frac{1}{xu^2} + 2x + \frac{2}{xu} + x^3$$

$$\rightsquigarrow \quad -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2x}{u} - \frac{1}{xu^2} + 2x + \frac{2}{xu}$$

اکنون طرفین معادله را در y^2 ضرب می کنیم. داریم:

$$-u' = -2xu - \frac{1}{xu^2} + \frac{2}{xu} \quad \rightsquigarrow \quad -u' + (\frac{2}{x} - 2x)\,u = -\frac{1}{x}$$

بنابراین معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول به صورت زیر حاصل می شود.

$$u' + (2x - \frac{2}{x})\,u = \frac{1}{x} \qquad P(x) = 2x - \frac{2}{x} \quad , \quad Q(x) = \frac{1}{x}$$

لذا

$$\mu = e^{\int P\ dx} = e^{\int (\frac{2}{x} - 2x)\ dx} = e^{\ln|x|^2 - x^2} = e^{\ln|x|^2}\ e^{-x^2} = x^2\ e^{-x^2}$$

$$\mu\, u = \int \mu\, Q(x)\, dx + c \quad \rightsquigarrow \quad x^{2}\, e^{-x^{2}}\, u = \int x^{2}\, e^{-x^{2}}\, \frac{1}{x}\, dx + c$$

$$\rightsquigarrow \quad = \int x\, e^{-x^{2}}\, dx + c = \frac{-1}{2} \int -2x\, e^{-x^{2}}\, dx + c$$

$$\rightsquigarrow \quad x^{2}\, e^{-x^{2}}\, u = -\frac{1}{2}\, e^{-x^{2}} + c$$

از طرفی چون $y = x^2 + \frac{1}{u}$ ، لذا $y - x^2 = \frac{1}{u}$ ، بنابراین $u = \frac{1}{y - x^2}$ ؛ در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر به دست می آید.

$$x^{2}\, e^{-x^{2}}\, u = -\frac{1}{2}\, e^{-x^{2}} + c \quad \rightsquigarrow \quad x^{2}\, e^{-x^{2}}\, \frac{1}{y - x^{2}} = -\frac{1}{2}\, e^{-x^{2}} + c$$

معادلات مرتبهٔ دوم قابل تبدیل به معادلات مرتبهٔ اول

در این بخش به معادلات مرتبهٔ دومی می پردازیم که تحت شرایط خاص، به معادلات مرتبهٔ اول تبدیل می شوند. این معادله به شکل $F(x, y, y', y'') = 0$ است که برای آن حالت های زیر را در نظر می گیریم.

الف : معادله به شکل $F(x, y', y'') = 0$: هرگاه در معادله y نباشد، در این صورت قرار می دهیم:

$$y' = t \quad , \quad y'' = \frac{dt}{dx}$$

مثال : معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$2x\,y'\,y'' = y'^2 + 1$$

حل: چون در معادله y وجود ندارد، قرار می دهیم: $y' = t$ و $y'' = \frac{dt}{dx}$؛ پس

$$2x\,t\,\frac{dt}{dx} = t^2 + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2t}{t^2+1}dt = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \int \frac{2t}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \ln|t^2+1| = \ln|x| + c = \ln|x| + \ln|c_1|$$

$$\rightsquigarrow \quad \ln|t^2+1| = \ln|c_1 x| \quad \rightsquigarrow \quad t^2 + 1 = c_1 x \quad \rightsquigarrow \quad t^2 = c_1 x - 1$$

$$\rightsquigarrow \quad t = \pm\sqrt{c_1 x - 1} \quad , \quad t = y' \quad \rightsquigarrow \quad y' = \pm\sqrt{c_1 x - 1}$$

$$\rightsquigarrow \quad dy = \pm\sqrt{c_1 x - 1}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \int dy = \pm\int\sqrt{c_1 x - 1}\,dx$$

$$\rightsquigarrow \quad y = \pm\frac{1}{c_1}\int c_1\,(c_1 x - 1)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad y = \pm\frac{(c_1 x - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_2$$

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

ب: معادله به شکل $F(y,y',y'')=۰$: هرگاه در معادله x وجود نداشته باشد، در این صورت قرار می دهیم: $y'=t$ ؛ پس

$$\boldsymbol{y''=\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y=t'}=t\cdot\frac{dt}{dy}}$$

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{y''+y'\,e^{-y}=۰}$$

حل: در این معادله x وجود ندارد، قرار می دهیم: $y'=t$ ؛ پس

$$\boldsymbol{y''=t\,\frac{dt}{dy}\quad\rightsquigarrow\quad t\,\frac{dt}{dy}+t\,e^{-y}=۰}$$

$$\boldsymbol{\rightsquigarrow\quad t(\frac{dt}{dy}+\ e^{-y})=۰}$$

هرگاه $t=۰$ باشد، آنگاه $y'=۰$ ، لذا $y=m$ یک جواب معادله می باشدو هرگاه $\frac{dt}{dy}+e^{-y}=۰$ باشد، آنگاه t از حل معادلهٔ جدایی پذیر زیر به دست می آید.

$$\boldsymbol{\frac{dt}{dy}+\ e^{-y}=۰\quad\rightsquigarrow\quad\frac{dt}{dy}=-e^{-y}\quad\rightsquigarrow\quad dt=-e^{-y}\ dy}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

$$\rightsquigarrow \quad t = \int -e^{-y}\, dy = e^{-y} + c$$

از طرفی چون $t = y'$ ، پس

$$y' = e^{-y} + c \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y} + c \quad \rightsquigarrow \quad \frac{۱}{e^{-y} + c}\, dy = dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \int \frac{۱}{\frac{۱}{e^y} + c}\, dy = \int dx \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{e^y}{۱ + ce^y}\, dy = \int dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{۱}{c} \int \frac{c\, e^y}{۱ + ce^y}\, dy = \int dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{۱}{c} \ln|۱ + ce^y| = x + c'$$

نمونه سوالات معادلات دیفرانسیل

(۱) کدامیک از معادلات دبفرانسیل زیر خطی نیست؟

(۱) $y'' - \sin x\, y' + e^{x}\, y = \cos 3x$　(۲) $xyy'' - y' + y = 0$

(۳) $y''' - 5y'' + \sqrt{x}\, y = 2x^{4}$　(۴) $\frac{d^{4}y}{dx^{4}} - x\frac{d^{2}y}{dx^{2}} - y = 1$

(۲) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \sin 3x + \cos 2x$ کدام است؟

(۱) $y = \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$　(۲) $y = -\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(۳) $y = -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$　(۴) $y = \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(۳) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $xy' = y$ کدام است؟

(۱) $y = \frac{C}{x}$　(۲) $y = Cx$　(۳) $y = \ln|x| + C$　(۴) $y = C\ln|x|$

(۴) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = \frac{1+y^{2}}{1+x}$ کدام است؟

(۱) $\arctan(1+y^{2}) = \ln(C(1+x))$　(۲) $\arctan(1+y^{2}) = \ln|x| + C$

(۳) $\arctan y = \ln(C(1+x))$　(۴) $\arctan y = \ln|x| + C$

(۵) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ کدام است؟

(۱) $e^{y} = -e^{x} + C$　(۲) $e^{y} = e^{x} + C$　(۳) $e^{-y} = e^{x} + C$　(۴) $e^{-y} = -e^{x} + C$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

(۶) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y^2\,dx + \tan x\,dy = 0$ کدام است؟

(۱) $y^{-1} = \ln|\,tanx\,| + C$ (۲) $y^{-1} = \ln|\,C\sin x\,|$ (۳) $y^{-1} = \ln|\,\cot x\,| + C$ (۴) $y^{-1} = \ln|\,C\cos x\,|$

(۷) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = x\,e^x$ کدام است؟

(۱) $y = x\,e^x - x + C$ (۲) $y = x\,e^x + e^x + C$ (۳) $y = x\,e_e^{xx} + C$ (۴) $y = x\,e^x + x$

(۸) کدامیک از توابع زیر همگن از درجهٔ صفراست؟

(۱) $f(x,y) = \frac{x^3 - x^2y}{x^2 + xy}$ (۲) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ (۳) $f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{x^2 + xy}$ (۴) $f(x,y) = x^3 + y^3$

(۹) برای حل معادلهٔ دبفرانسیل $y' = f(x,y)$ که درآن f تابع همگن از درجهٔ صفر است، کدام تغییر متغیّر مناسب است؟

(۱) $y = \frac{x}{t}$ (۲) $y = tx$ (۳) $y = x + t$ (۴) $y = \frac{t}{x}$

(۱۰) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ کدام است؟

(۱) $2\arctan(\frac{y}{x}) - \ln(x^2 + y^2) = C$ (۲) $2\arctan(\frac{x}{y}) - \ln(x^2 + y^2) = C$

(۳) $2\arctan(\frac{y^2 + x^2}{x}) - \ln(x^2 + y^2) = C$ (۴) $2\arctan(\frac{x}{x^2 + y^2}) - \ln(x^2 + y^2) = C$

(۱۱) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن $y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy}$ کدام است؟

(۱) $y^2 + x^2 = Cx^2$ (۲) $y^2 + x^2 = Cy^2$ (۳) $y^2 - x^2 = Cx^2$ (۴) $y^2 - x^2 = Cy^2$

(۱۲) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = (x+y)^2$ با انتخاب $t = x + y$ ؛ کدام است؟

(۱) $x + y = \tan(x + C)$ (۲) $x + y = (x + C)$ (۳) $x^2 - y^2 = \tan(x + C)$ (۴) $x^2 + y^2 = \tan(x + C)$

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

(۱۳) معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = ۰$ ، را کامل می نامیم هرگاه حاصل $M_y - N_x$ کدام مقدار شود؟

(۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -۱ (۴) ۲

(۱۴) کدامیک از معادلات زیر کامل است؟

(۱) $-۲xy\ dx + (۳x^۲ - y^۲) = ۰$ (۲) $(xy - ۱)\ dx + (x^۲ - xy)\ dy = ۰$

(۳) $y\ dx + (x + \frac{۲}{y})\ dy = ۰$ (۴) $xy^۲\ dx + ۲x^۲y\ dy = ۰$

(۱۵) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل کامل $e^y\ dx + (x\ e^y + ۲y)\ dy = ۰$ کدام است؟

(۱) $y\ e^x + y^۲ = C$ (۲) $x\ e^y + x^۲ = C$ (۳) $y\ e^x + x^۲ = C$ (۴) $x\ e^y + y^۲ = C$

بخش اول

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۲ بخش دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم و بالاتر

این بخش، در اسلاید دوم مبحث معادلات دیفرانسیل ارائه می گردد.

تعریف

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۳ بخش سوم

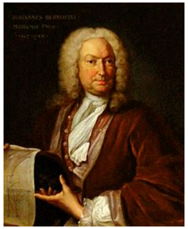
تبدیل لاپلاس و چند کاربرد آن

این بخش، در اسلاید سوم مبحث معادلات دیفرانسیل ارائه می گردد.

تعریف

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی



شکل ۱ : یوهان **برنولی** ریاضی دان برجسته سویسی متولد: ۱۶۶۷ میلادی درگذشت: ۱۷۴۸ میلادی

شکل ۲ : ژوزف لویی **لاگرانژ** ریاضی دان برجسته ایتالیایی- فرانسوی متولد: ۱۷۶۳ میلادی در ایتالیا در گذشت: ۱۸۱۳ در پاریس

با سپاس فراوان از توجه شما

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی