

به نام خدا

ساختمان های گستته

کاربرد در علوم کامپیووتر

مدرس : لیلا جوکار

۱۳۹۹ بهار

تمرین

۱. جدول ارزش فرمول‌های گزاره‌ای زیر را تشکیل دهید. مشخص کنید کدام یک از فرمولها همیشه درست، کدام یک همیشه نادرست و کدام یک نه همیشه درست است و نه همیشه نادرست.

الف. $\neg(P \vee \neg Q) \vee P$

ب. $[P \rightarrow (P \wedge Q)] \rightarrow \neg Q$

پ. $[\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)] \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$

ت. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

ث. $[P \wedge (Q \wedge R)] \vee \neg[(P \vee Q) \wedge (R \vee S)]$

ج. $(P \wedge Q) \not\rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

ح. $[(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)] \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

خ. $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

د. $[\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow \neg P$

ذ. $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)]$

$P_1 \vee (Q_1 \wedge P_2)$

ساختمان گستته

با استفاده از جدول ارزش مشخص کنید کدام یک از فرمول‌های گزاره‌ای زیر با فرمول $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ هم‌ارز است؟

الف. $(P \vee Q) \rightarrow R$

ب. $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

ج. $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$

د. $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$

ساختمان گستته

۴. با فرض اینکه $P \rightarrow Q$ دارای ارزش درستی F است، ارزش درستی فرمول‌های گزاره‌ای زیر را مشخص کنید.

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow Q \quad \text{الف.}$$

$$[\neg(P \wedge Q) \vee \neg R] \vee [((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S] \quad \text{ب.}$$

ساختمان گستته

۷. اگر P و Q دارای ارزش درستی T و S دارای ارزش درستی F باشند ارزش درستی فرمول‌های گزاره‌ای زیر چیست؟

الف. $[P \wedge (Q \wedge R)] \vee \neg[(P \vee Q) \wedge (R \vee S)]$

ب. $[\neg(P \wedge Q) \vee \neg R] \vee [((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S]$

پ. $P \rightarrow (R \rightarrow Q)$

ت. $(\neg Q) \rightarrow [R \rightarrow (R \rightarrow (P \vee S))]$

ث. $(P \not\rightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

ج. $[S \rightarrow (P \wedge \neg R)] \wedge [(P \rightarrow (R \vee Q)) \wedge S]$

ساختمان گستته

۸ با استفاده از جدول ارزش مشخص کنید کدام یک از عبارات زیر در رابطه با گزاره‌ی $(P \rightarrow \neg P)$ صادق است؟

الف. همیشه نادرست است.

ب. همیشه درست است.

ج. هم ارزاست با P

د. ب و ج هردو

ساختمان گستته

۱. بدون استفاده از جدول ارزش نشان دهید که گزاره‌های زیر نمی‌توانند هم‌زمان ارزش T داشته باشند.

الف. $(P \rightarrow Q) , Q \rightarrow R , \neg R \vee S , \neg P \rightarrow S , \neg S$

ب. $R \vee M , \neg R \vee S , \neg M , \neg S$

ساختمان گستته

۱-۱۹. قوانین اساسی منطق

بعضی از قوانین همارزی که در بازنویسی یک فرمول گزاره‌ای و تبدیل آن به گزاره ساده‌تر مهمنه استند به شرح زیر ارائه شده است. در این فرمولها حروف T و F به ترتیب جهت نشان دادن فرمول‌های همیشه درست و همیشه نادرست بکار رفته‌اند. در قوانین همارزی درج شده در جدول زیر برای هر قانون دو فرمول همارزی ارائه شده است. اگر در یکی از فرمولهای همارزی هر قانون، عمل گرها را به صورت: \neg به \neg ، \wedge به \wedge ، \vee به \vee و $\neg\neg$ به $\neg\neg$ تبدیل کنیم فرمول دیگری از آن قانون بدست می‌آید. اگر در فرمولی تبدیل‌های گفته شده را انجام دهیم اصطلاحاً "همزاد (duality)" آن فرمول را بدست آورهایم، و به استناد قضیه "اگر دو فرمول همارز باشند همزادشان نیز همارز است" برای هر قانون دو تا فرمول ارائه شده است. (به استثنای قانون متمم گیری مضاعف)

ساختمان گستته

$$\begin{cases} (P \vee P) \Leftrightarrow P \\ (P \wedge P) \Leftrightarrow P \end{cases}$$

۱. قوانین خودتوانی (idempotent laws)

$$\begin{cases} (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P) \\ (P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P) \end{cases}$$

۲. قوانین جابجایی (commutative laws)

$$\begin{cases} (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \\ (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \end{cases}$$

۳. قوانین شرکت پذیری (associative laws)

ساختمان گستته

۴. قوانین توزیع پذیری (distributive laws)

$$\begin{cases} P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{cases}$$

۵. قوانین همانی (identity laws)

$$\begin{cases} (P \vee F) \Leftrightarrow P \\ (P \wedge T) \Leftrightarrow P \end{cases}$$

۶. قوانین صفر (zero laws)

$$\begin{cases} (P \vee T) \Leftrightarrow T \\ (P \wedge F) \Leftrightarrow F \end{cases}$$

ساختمان گستته

$$\begin{cases} (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T \\ (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F \end{cases}$$

۷. قوانین متمم (complement laws)

$$\begin{cases} P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \\ P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \end{cases}$$

۸. قوانین جذبی (absorption laws)

$$\begin{cases} \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \\ \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \end{cases}$$

۹. قوانین دمورگان (demorgan laws)

$$\neg(\neg P) = P$$

۱۰. متمم گیری مضاعف (double negation)

ساختمان گستته

توجه: علاوه از قوایین همارزی ارائه شده در جدول بالا هم ارزیهای زیر نیز مهم هستند.

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \quad ۱$$

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad ۲$$

$$P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \quad ۳$$

ساختمان گستته

۱-۲۰. اصل جایگزینی

در یک هم‌ارزی هر متغیری را می‌توان با یک گزاره جایگزین نمود مشروط براینکه عمل جایگزینی در هر کجا که متغیر مورد نظر ظاهر شده باشد انجام گیرد. هم چنین هر گزاره‌ای را می‌توان با یک گزاره‌ی هم‌ارز آن جایگزین کرد.

ساختمان گستته

با استفاده از قوانین همارزی عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل کنید.

$$\text{الف} [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P$$

$$\text{ب.} P \vee \neg(\neg P \rightarrow Q)$$

ساختمان گستته

الف.

$$\begin{aligned} [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P &\Leftrightarrow \neg[(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg[\neg Q \wedge (\neg P \vee Q)] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg[(\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q)] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg[(\neg Q \wedge \neg P) \vee F] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg P) \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow (Q \vee P) \vee \neg P \Leftrightarrow Q \vee (P \vee \neg P) \\ &\Leftrightarrow Q \vee T \Leftrightarrow T \quad (\text{tauto logy}) \end{aligned}$$

ساختمان گستته

ب. جواب: $(P \vee \neg Q)$. حل کامل مسئله به عهده دانشجو .

ساختمان گستته

مثال ۱۵.

با استفاده از قوانین همارزی و اصل جایگزینی همارزی زیر را ثابت کنید:

$$\neg[P \vee (\neg P \wedge Q)] \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

ساختمان گستته

$$\begin{aligned}\neg[P \vee (\neg P \wedge Q)] &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg(\neg P \wedge Q) \\&\Leftrightarrow \neg P \wedge (P \vee \neg Q) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\&\Leftrightarrow F \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)\end{aligned}$$

حل.

ساختمان گستته

مثال ۱۶.

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$$

ساختمان گستته

$$\begin{aligned} P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \end{aligned}$$

ساختمان گستته

هم ارز فرمول $(P \rightarrow Q)$ را تشکیل دهد به قسمی که

الف. فقط شامل عملگرهای \neg و \wedge باشد. ب. فقط شامل عملگرهای \wedge و \neg باشد

ساختمان گستته

$$\begin{aligned}(P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\&\Leftrightarrow \neg [\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)]\end{aligned}$$

حل الف.

حل ب به عهده‌ی دانشجو.

ساختمان گستته

تمرین. ساختمان گستته ممکن تبدیل کنید.

۱. با استفاده از قوانین هم ارزی، گزاره‌های مرکب زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل کنید.

الف. $(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

ب. $\neg [P \vee (Q \wedge \neg P)]$

ث. $[[(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \rightarrow P)] \vee (R \rightarrow \neg Q)]$

ج. $\neg [P \rightarrow \neg(P \wedge Q)]$

ساختمان گستته

۳. هم ارز فرمول‌های زیر را بدست آورید به صورتیکه فقط شامل رابطه‌ای گزاره‌ای \wedge و \neg باشد.

الف. $(P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (P \vee R)$. پ. $((P \vee Q) \wedge R) \rightarrow (P \vee R)$. ب. $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee P)))$.

ساختمان گستته

۸. با استفاده از قوانین همارزی ثابت کنید ارزش درستی فرمولهای گزاره‌ای زیر مستقل از ارزش درستی مؤلفه‌های آن است. (راهنمائی: همیشه درست یا همیشه نادرست بودن فرمول‌هارا بررسی کنید.)

الف. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)$

ب. $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$

پ. $[P \wedge (Q \rightarrow P)] \rightarrow (P \wedge \neg P)$

ساختمان گستته

۲۲-۱. منطق گزاره‌ای در برنامه‌های کامپیوتروی

اکثر زبانهای برنامه سازی سطح بالا از امکاناتی جهت معرفی و ارزیابی گزاره‌های منطقی برخوردار هستند. مثلاً "در زبان برنامه سازی پاسکال عملگرهای OR ، AND و NOT و در زبان برنامه سازی C و C++ عملگرهای || و && و ! به ترتیب جهت نشان دادن ۷ و ۸ و → استفاده می‌شوند. گزاره‌ها و رابطه‌ای گزاره‌ای همیشه در برنامه‌های کامپیوتروی ظاهر می‌شوند. مثلاً" با توجه به دستور زیر در زبانهای C و C++ و JAVA

```
if( x > 0 || (x <= 0 && y > 100 ))  
    statements
```

ساختمان گستته

عملگرهای || یعنی OR و && یعنی AND و دستوالعملها یعنی statements وقت اجرا می‌شوند که گزاره‌ی مرکب بعد از دستور if یعنی $(x \leq 0 \&\& y > 100) \|| (x > 0 \&\& y > 100)$ درست باشد. اگر گزاره‌ی $x > 0$ را با P و $y > 100$ را با Q نشان دهیم، شرط مورد نظر ذر دستور شرطی if یعنی $(P \vee (\neg P \wedge Q))$ به صورت $(x > 0 \|| (x \leq 0 \&\& y > 100))$ تبدیل می‌شود. می‌توانیم فرمول گزاره‌ای بدست آمده را به صورت زیرساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(P \vee (\neg P \wedge Q)) &\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow T \wedge (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q)\end{aligned}$$

ساختمان گستته

اکنون دستور شرطی داده شده را بدون اینکه تغییری در رفتار برنامه ایجاد شده باشد به صورت
ساده زیر تبدیل می کنیم

```
if( x > 0 || y > 100 )  
(statements)
```

ساختمان گستته

(Structural)

تبدیل یک عبارت منطقی که از تعداد زیادی از متغیرها تشکیل شده باشد به ساده ترین صورت ممکن مشکل ولی مهم است. ساده کردن عبارات در نرم افزار، ممکن است در افزایش سرعت اجرای برنامه مؤثر باشد ولی طراحان تراشه‌ها نیز بطور فزاینده‌ای با تلاش‌های مشابهی مواجه هستند. به این ترتیب که بجای به حداقل رساندن عملگرهای `&&` و `||` در یک برنامه تلاش می‌کنند که تعداد اجزای فیزیکی مشابه بر روی یک تراشه را به حد اقل برسانند. زیرا یک تراشه با اجزای فیزیکی کمتر ضمن کوچکتر بودن، انرژی کمتری مصرف می‌کند، نقص کمتری دارد و تولید آن ارزان‌تر خواهد بود.