بسم الله الرحمن الرحیم

حساب دیفرانسیل توابع یک متغیره

معادلات دیفرانسیل

(بخش ۳: تبدیل لاپلاس و چندکاربرد آن)

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۳

عنوان مطالب:

۱. تبدیل انتگرالی، تبدیل لاپلاس، فرمول های تبدیل لاپلاس و معکوس آن، تبدیل لاپلاس توابع مرکب(دستور انتقالی،مشتق تبدیل لاپلاس، انتگرال تبدیل لاپلاس)، کاربردتبدیل لاپلاس در حل مسائل مقدار اولیه،پیچش، حل معادلات انتگرالی؛

۲. مسایل نمونه

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱ بخش اول

تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها و چند کاربرد آن

تعریف

تبدیل انتگرالی

تابع f با ضابطهٔ $f(t)$ را در نظر می گیریم. تبدیل انتگرالی تابع f در نقطهٔ s را با نماد $\mathcal{L}[f(t)](s)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{۰}^{\infty} k(s,t)\ f(t)\ dt$$

در تساوی فوق $k(s,t)$ را هستهٔ این تبدیل می نامیم. دامنهٔ این تبدیل ، مجموعه s هایی است که انتگرال ناسره فوق همگرا باشد.

تعریف

تبدیل لاپلاس

هرگاه در تبدیل انتگرالی فوق، هستهٔ تبدیل به صورت

$$k(s,t) = e^{-st}$$

باشد، در این صورت تبدیل را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در s می گوییم و با نماد $F(s)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$$

$F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ نامیده می شود و علاوه بر آن تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می نامیم و می نویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

لازم به ذکر است که برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ ، باید انتگرال ناسره فوق محاسبه گردد.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

برای آشنایی با این روش محاسبه، چند مثال مقدماتی بیان می شوند.

مثال :تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

(۱) $f(t) = k$ (۲) $f(t) = e^{at}$

حل:

(۱) با توجه به فرمول لاپلاس ، داریم:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[k](s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, k\, dt$$

$$= k \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = k \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} e^{-st}\, dt = k \lim_{x\to\infty} [-\frac{1}{s}\, e^{-st}]_{0}^{x}$$

$$= k \lim_{x\to\infty} [-\frac{1}{s}\, e^{-sx} + \frac{1}{s}\, e^{0}] = k\, [-\frac{1}{s}e^{-s(+\infty)} + \frac{1}{s}]$$

$$= k\, [-\frac{1}{s}\underbrace{e^{-\infty}}_{0} + \frac{1}{s}] = \frac{k}{s}$$

بنابراین

$$F(s) = \frac{k}{s} \quad , \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{k}{s}] = k$$

(۲) با توجه به فرمول لاپلاس ، داریم:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st+at}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{a-s}\, e^{(a-s)t}\right]_0^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{a-s}\, e^{(a-s)x} - \frac{1}{a-s}\, \underbrace{e^{(a-s)0}}_{1}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{a-s}\, e^{(a-s)x} - \frac{1}{a-s}\right]$$

هرگاه $a - s < 0$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} e^{(a-s)x} = 0$ ؛ لذا انتگرال ناسره فوق همگرا به مقدار $\frac{1}{s-a}$ می باشد، زیرا

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{a-s}\, e^{\overbrace{(a-s)}^{<0}x} - \frac{1}{a-s}\right]$$

$$= \frac{1}{a-s}\, e^{-\infty} - \frac{1}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \qquad , \qquad s > a$$

بنابراین

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > a \qquad\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

همانند روش فوق، **تبدیل لاپلاس برخی از توابع مهم به دست آمده اند که در جدول زیر خلاصه می شود.**

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

جدول ۱: **جدول تبدیل لاپلاس توابع**

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$		$\mathcal{L}^{-۱}[F(s)]$
k	$\frac{k}{s}$	$s > ۰$	$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{k}{s}] = k$
t	$\frac{۱}{s^۲}$	$s > ۰$	$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲}] = t$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+۱}}$	$s > ۰$	$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{n!}{s^{n+۱}}] = t^n$
e^{at}	$\frac{۱}{s-a}$	$s > a$	$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s-a}] = e^{at}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^۲+a^۲}$	$s > ۰$	$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{a}{s^۲+a^۲}] = \sin at$
$\cos at$	$\frac{s}{s^۲+a^۲}$	$s > ۰$	$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{s}{s^۲+a^۲}] = \cos at$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

جدول ۲: **جدول تبدیل لاپلاس توابع**

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$		$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s>\vert a\vert$	$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{a}{s^2-a^2}]=\sinh at$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s>\vert a\vert$	$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{s^2-a^2}]=\cosh at$
y'	$s\,\mathcal{L}[y]-y(0)$		
y''	$s^2\,\mathcal{L}[y]-s\,y(0)-y'(0)$		

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

تذکر

خطی بودن تبدیل لاپلاس

برای توابع f و g با قانون های $f(t)$ و $g(t)$ و اعداد حقیقی a و b ، تساوی زیر برقرار است.

$$\mathcal{L}[a\ f(t) \pm b\ g(t)] = a\ \mathcal{L}[f(t)] \pm b\ \mathcal{L}[g(t)]$$

به عبارت دیگر، تبدیل لاپلاس یک **تبدیل خطی** است.

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$(۱)\ f(t) = e^{۵t}$

حل: (۱)

با توجه به جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{۱}{s-a} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[e^{۵t}] = \frac{۱}{s-۵}$$

$(۲)\ f(t) = ۴\ \sin ۲t + \cos ۳t$

حل: (۲)

با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس و جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}[۴\ \sin ۲t + \cos ۳t] = ۴\ \mathcal{L}[\sin ۲t] + \mathcal{L}[\cos ۳t]$$

$$= \frac{۲}{s^۲ + ۲^۲} + \frac{s}{s^۲ + ۳^۲}$$

$(۳)\ f(t) = ۳t^۲ - ۵t + ۴$

حل: (۳)

با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس و جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}[۳t^۲ - ۵t + ۴] = ۳\ \mathcal{L}[t^۲] - ۵\ \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[۴]$$

$$= ۳\ \frac{۲!}{s^{۲+۱}} - ۵\ \frac{۱}{s^۲} + \frac{۴}{s}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

(۴) $f(t) = \sin^{۲} at$

حل: (۴)

با توجه به روابط مثلثاتی،خطی بودن تبدیل لاپلاس و جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}[\sin^{۲} at] = \mathcal{L}[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲at]$$

$$= \mathcal{L}[\frac{۱}{۲}] - \frac{۱}{۲}\mathcal{L}[\cos ۲at] = \frac{\frac{۱}{۲}}{s} - \frac{۱}{۲}\frac{s}{s^{۲} + (۲a)^{۲}}$$

(۵) $f(t) = \sin ۳t \ \cos ۲t$

حل: (۵)

با توجه به روابط مثلثاتی (تبدیل حاصل ضرب عبارات مثلثاتی به جمع آنها)،خطی بودن تبدیل لاپلاس و جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}[\sin ۳t \ \cos ۲t] = \mathcal{L}[\frac{۱}{۲}(\sin(۳t + ۲t) + \sin(۳t - ۲t))]$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\mathcal{L}[\sin ۵t] + \frac{۱}{۲}\,\mathcal{L}[\sin t] = \frac{۱}{۲}\,\frac{۵}{s^۲ + ۵^۲} + \frac{۱}{۲}\,\frac{۱}{s^۲ + ۱^۲}$$

$(۶)\ f(t) = \sinh ۲t + \cosh ۳t$

حل: (۶)

با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس و جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}[\sinh ۲t + \cosh ۳t] = \mathcal{L}[\sinh ۲t] + \mathcal{L}[\cosh ۳t]$$

$$= \frac{۲}{s^۲ - ۲^۲} + \frac{s}{s^۲ - ۳^۲}$$

مثال : تبدیل معکوس لاپلاس توابعِ $F(s)$ زیر را به دست آورید.

$(۱)\ F(s) = \frac{۷}{s^۴}$

حل: (۱)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۷}{s^۴}] = ۷\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۴}] = \frac{۷}{۳!}\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۳!}{s^۴}] = \frac{۷}{۳!}\ t^۳$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

لازم به ذکر است که معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\frac{۱}{s^n}$ از دستور زیر به دست می آید.

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^n}]=\frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

$$(۲)\ F(s)=\frac{۵}{s+۴}$$

حل: (۲)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۵}{s+۴}]=۵\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s+۴}]=۵\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s-(-۴)}]=۵\ e^{-۴t}$$

$$(۳)\ F(s)=\frac{۳}{s^۵}+\frac{۸}{s^۲+۹}$$

حل: (۳)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{۳}{s^۵}+\frac{۸}{s^۲+۹}]=۳\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s^۵}]+۸\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s^۲+۹}]$$

$$=\frac{۳}{۴!}\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{۴!}{s^۵}]+\frac{۸}{۳}\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{۳}{s^۲+۳^۲}]$$

$$=\frac{۳}{۴!}\ t^۴+\frac{۸}{۳}\ \sin ۳t$$

$(۴)\ F(s)=\frac{۱}{s^۲+s}$

حل: (۴)

بنا به دستور تفکیک کسرها، $\frac{۱}{s^۲+s}=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+۱}$ و جدول تبدیل لاپلاس، داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s^۲+s}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s(s+۱)}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+۱}]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s}]-\mathcal{L}^{-1}[\frac{۱}{s-(-۱)}]=۱-e^{-t}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

دستوراتی برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع مرکب

در ادامه چند دستور برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابعی بیان می شوند که در جدول تبدیل لاپلاس موجود نیستند.

ملاحظه

دستور انتقالی

فرض کنیم $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ، در این صورت ثابت می شود که

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t)$$

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$(۱)\ f(t) = e^{at}\ \sin bt$

حل: (۱)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس $F(s) = \mathcal{L}[\sin bt] = \frac{b}{s^۲ + b^۲}$ ؛ حال بنا به دستور انتقالی می نویسیم:

$$\mathcal{L}[e^{at}\ \sin bt] = F[s-a]$$

$$\rightsquigarrow\ \mathcal{L}[e^{at}\ \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^۲ + b^۲}$$

علاوه براین

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{b}{(s-a)^۲ + b^۲}] = e^{at}\ \sin bt$$

$(۲)\ f(t) = e^{at}\ \cos bt$

حل: (۲)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس $F(s) = \mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^۲ + b^۲}$ ؛ حال بنا به دستور انتقالی می نویسیم:

$$\mathcal{L}[e^{at}\ \cos bt] = F[s-a]$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[e^{at} \cos bt] = \frac{s}{(s-a)^۲ + b^۲}$$

علاوه براین

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{s}{(s-a)^۲ + b^۲}] = e^{at} \cos bt$$

$(۳)\ f(t) = t^۵\ e^{-۲t}$

حل: (۳)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس $F(s) = \mathcal{L}[t^۵] = \frac{۵!}{s^۶}$ ؛ حال بنا به دستور انتقالی می نویسیم:

$$\mathcal{L}[t^۵\ e^{-۲t}] = F[s-(-۲)] = F(s+۲)$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[t^۵\ e^{-۲t}] = \frac{۵!}{(s+۲)^۶}$$

علاوه براین

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s+۲)^۶}] = \frac{۱}{۵!}\ t^۵\ e^{-۲t}$$

$(۴)\ f(t) = e^{۳t}\ \cosh ۴t$

حل: (۴)

بنا به جدول تبدیل لاپلاس $F(s) = \mathcal{L}[\cosh ۴t] = \frac{s}{s^۲ - ۴^۲}$ ؛ حال بنا به دستور انتقالی می نویسیم:

$$\mathcal{L}[e^{۳t}\ \cosh ۴t] = F[s-۳]$$

$$\rightsquigarrow\quad \mathcal{L}[e^{۳t}\ \cosh ۴t] = \frac{s-۳}{(s-۳)^۲ - ۴^۲}$$

علاوه براین

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{s-۳}{(s-۳)^۲ - ۴^۲}] = e^{۳t}\ \cosh ۴t$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس برای تابع $F(s) = \frac{۶}{(s+۲)^۲ + ۹}$ را بیابید.

حل:

چون $\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۳}{s^۲ + ۳^۲}] = \sin ۳t$ ، بنا به دستور انتقالی می نویسیم:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۶}{(s+۲)^۲ + ۹}] = ۶\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s-(-۲))^۲ + ۹}]$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
بخش سوم
مسایل نمونه

$$= \frac{۶}{۳}\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{۳}{(s-(-۲))^۲+۳^۲}\right] = ۲\, e^{-۲t}\, \sin ۳t$$

ملاحظه

مشتق تبدیل لاپلاس

فرض کنیم $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ، در این صورت ثابت می شود که

$$\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-۱)^n\, F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}[t\, f(t)] = -۱\, F'(s) \qquad , \qquad \mathcal{L}[t^۲\, f(t)] = F''(s)$$

و علاوه براین

$$\mathcal{L}^{-۱}\left[(-۱)^n F(s)\right] = t^n\, f(t)$$

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را با استفاده از دستور مشتق لاپلاس به دست آورید.

(۱) $f(t) = t\, \cos t$

حل: (۱)

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

می دانیم $\frac{s}{s^{۲}+۱} = \mathcal{L}[\cos t] = F(s)$ ، لذا

$$\mathcal{L}[t\ f(t)] = -۱\ F'(s) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[t\ \cos t] = -\left(\frac{s}{s^{۲}+۱}\right)'$$

$$\rightsquigarrow \quad = -\frac{۱(s^{۲}+۱) - ۲s(s)}{(s^{۲}+۱)^{۲}} = \frac{s^{۲}-۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$$

$(۲)\ f(t) = t^{۳}\ e^{۵t}$

حل: (۲)

می دانیم $\frac{۱}{s-۵} = \mathcal{L}[e^{۵t}] = F(s)$ ، لذا

$$\mathcal{L}[t^{۳}\ f(t)] = (-۱)^{۳}\ F^{(۳)}(s) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[t^{۳}\ e^{۵t}] = (-۱)^{۳}\ F^{(۳)}(s) = -\underbrace{F'''(s)}_{?}$$

اکنون مشتق مرتبهٔ سومِ $F(s)$ را می یابیم.

$$F(s) = \frac{۱}{s-۵} = (s-۵)^{-۱} \quad \rightsquigarrow \quad F'(s) = -(s-۵)^{-۲}$$

$$\rightsquigarrow \quad F''(s) = ۲(s-۵)^{-۳} \quad \rightsquigarrow \quad F'''(s) = -۶(s-۵)^{-۴}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[t^{3}\ e^{5t}] = (-1)^{3}\ F^{(3)}(s) = -(-6(s-5)^{-4}) = 6(s-5)^{-4}$$

$(3)\ f(t) = t\ \cosh 3t$

حل: (۳)

می دانیم $F(s) = \mathcal{L}[\cosh 3t] = \frac{s}{s^{2}-3^{2}}$ ، لذا

$$\mathcal{L}[t\ f(t)] = -1\ F'(s) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[t\ \cosh 3t] = -(\frac{s}{s^{2}-9})'$$

$$\rightsquigarrow \quad = -\frac{1(s^{2}-9)-2s(s)}{(s^{2}-9)^{2}} = \frac{s^{2}+9}{(s^{2}-9)^{2}}$$

تذکر

فرض کنیم $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ، در این صورت ثابت می شود که

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -\frac{\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]}{t}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال: در هریک از توابع زیر $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ را محاسبه کنید.

(۱) $F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right)$

حل: (۱)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\ln(s+1) - \ln s\right] = -\frac{\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\ln(s+1) - \ln s\right)'\right]}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad = -\frac{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\right]}{t} = -\frac{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad = -\frac{e^{-t} - 1}{t}$$

(۲) $F(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$

حل: (۲)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\arctan\frac{1}{s}\right] = -\frac{\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\arctan\frac{1}{s}\right)'\right]}{t} = -\frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\arctan\frac{1}{s}\right)'\right]$$

$$\rightsquigarrow \quad = -\frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{-1}{s^2}}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1}\right] = \frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{\sin t}{t}$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس

فرض کنیم $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ و هم چنین $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ موجود و متناهی باشد، در این صورت ثابت می شود که

$$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^{+\infty} F(x)\, dx = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)]\, ds$$

و هم چنین

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} F(s)\, ds = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} F(s)\, ds \quad , \quad \mathcal{L}^{-1}(\int_s^{+\infty} F(x)\, dx) = \frac{f(t)}{t}$$

مثال: فرض کنیم $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ ، حاصل $\mathcal{L}[f(t)]$ را به دست آورید.

حل:

چون $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ، لذا بنا به دستور انتگرال گیری لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}[\frac{\sin t}{t}] = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[\sin t]\, ds = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[\frac{1}{s^2+1}]\, ds$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

$$\rightsquigarrow \quad = \lim_{t\to\infty}\int_s^t \frac{1}{s^2+1}\,ds = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan s\right]_s^t$$

$$\rightsquigarrow \quad = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan t - \arctan s\right] = \arctan\infty - \arctan s = \frac{\pi}{2} - \arctan s = s$$

مثال: حاصل انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس دست آورید.

حل:

چون $\lim_{t\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ، لذا بنا به دستور انتگرال گیری لاپلاس داریم:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty F(s)\,ds \quad , \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \mathcal{L}[\sin x]\,ds = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

$$\rightsquigarrow \quad = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{s^2+1}\,ds = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan s\right]_0^t$$

$$\rightsquigarrow \quad = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan t - \arctan 0\right] = \arctan\infty - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

مثال: حاصل انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\,dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس دست آورید.

حل:

چون $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x} = \frac{0}{0}$ ، برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می کنیم. می نویسیم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-2x}-e^{-3x})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{-2x}+3e^{-3x}}{1} = -2e^{0}+3e^{0} = 1$$

پس حد فوق موجود و متناهی است، لذا بنا به فرمول $\int_{0}^{\infty} \mathcal{L}[f(x)]\,ds = \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ داریم:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\,dx = \int_{0}^{\infty} \mathcal{L}[e^{-2x}-e^{-3x}]\,ds$$

از طرفی

$$\mathcal{L}[e^{-2x}-e^{-3x}] = \mathcal{L}[e^{-2x}] - \mathcal{L}[e^{-3x}] = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

بنابراین

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\,ds$$

$$\rightsquigarrow \quad = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right) ds = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|s+2| - \ln|s+3|\right]_{0}^{t}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

$$\rightarrow \quad = \lim_{t\to\infty} \left[\ln\left(\frac{s+۲}{s+۳}\right)\right]_۰^t = \lim_{t\to\infty} \left[\ln\left|\frac{t+۲}{t+۳}\right| - \ln\left|\frac{۲}{۳}\right|\right] = \ln ۱ - \ln\left(\frac{۲}{۳}\right) = -\ln\left(\frac{۲}{۳}\right)$$

ملاحظه

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل مسائل مقدار اولیه

در حل مسائل مقدار اولیه با معادلات دیفرانسیل خطی به کمک تبدیل لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم. سپس با توجه به شرایط اولیه $y(۰) = y_۰$ و $y'(۰) = y'_۰$ و استفاده از فرمول های زیر، معادلهٔ جبری که در آن $\mathcal{L}[f(t)]$ یا $\mathcal{L}[y]$ می باشد، به دست می آید. از آنجا y را می یابیم.

$$\mathcal{L}[y'] = s\,\mathcal{L}[y] - y(۰)$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^۲\,\mathcal{L}[y] - s\,y(۰) - y'(۰)$$

مثال

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به کمک **تبدیل لاپلاس** به دست آورید.

$$y'' + ۴y = ۴x \qquad y(۰) = ۱ \quad , \quad y'(۰) = ۵$$

حل:

$$\mathcal{L}[y''+4y]=\mathcal{L}[4x] \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y'']+4\,\mathcal{L}[y]=4\,\mathcal{L}[x]$$

چون $\mathcal{L}[x]=\frac{1}{s^2}$ و $\mathcal{L}[y'']=s^2\,\mathcal{L}[y]-s\,y(0)-y'(0)$

$$\mathcal{L}[y'']=s^2\,\mathcal{L}[y]-s\,(1)-5$$

اکنون در معادلهٔ فوق قرار می دهیم، داریم:

$$\mathcal{L}[y'']+4\,\mathcal{L}[y]=4\,\mathcal{L}[x] \quad \rightsquigarrow \quad s^2\,\mathcal{L}[y]-s\,(1)-5+4\,\mathcal{L}[y]=\frac{4}{s^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad (s^2+4)\,\mathcal{L}[y]=\frac{4}{s^2}+5+s$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y]=\frac{4}{s^2(s^2+4)}+\frac{5}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+4}$$

حال با استفاده از دستور تفکیک کسرها، خواهیم داشت:

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y]=\frac{۱}{s^{۲}}-\frac{۱}{s^{۲}+۴}+\frac{۵}{s^{۲}+۴}+\frac{s}{s^{۲}+۴}$$

$$\mathcal{L}[y]=\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۴}{s^{۲}+۴}+\frac{s}{s^{۲}+۴} \quad \rightsquigarrow \quad y=\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۴}{s^{۲}+۴}+\frac{s}{s^{۲}+۴}]$$

$$y=\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{۲}}]+۲\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۲}{s^{۲}+۲^{۲}}]+\mathcal{L}^{-۱}[\frac{s}{s^{۲}+۲^{۲}}]$$

از طرفی بنا به جدول تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{۲}}]=x \quad , \quad \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۲}{s^{۲}+۲^{۲}}]=\sin ۲x \quad , \quad \mathcal{L}^{-۱}[\frac{s}{s^{۲}+۲^{۲}}]=\cos ۲x$$

در نتیجه جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل برابر است با:

$$y=x+۲\ \sin ۲x+\cos ۲x$$

مثال

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به کمک **تبدیل لاپلاس** به دست آورید.

$$y'' - ۲y' - ۳y = ۰ \qquad y(۰) = ۱ \quad , \quad y'(۰) = ۷$$

حل:

$$\mathcal{L}[y'' - ۲y' - ۳y] = \mathcal{L}[۰] \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y''] - ۲\ \mathcal{L}[y'] - ۳\mathcal{L}[y] = ۰$$

چون $\mathcal{L}[y'] = s\ \mathcal{L}[y] - y(۰) = s\ \mathcal{L}[y] - ۱$ و $\mathcal{L}[y''] = s^۲\ \mathcal{L}[y] - s\ y(۰) - y'(۰)$

$$\mathcal{L}[y''] = s^۲\ \mathcal{L}[y] - s\ (۱) - ۷$$

اکنون در معادلهٔ فوق قرار می دهیم، داریم:

$$\mathcal{L}[y''] - ۲\ \mathcal{L}[y'] - ۳\mathcal{L}[y] = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad s^۲\ \mathcal{L}[y] - s\ (۱) - ۷ - ۲(s\ \mathcal{L}[y] - ۱) - ۳\mathcal{L}[y] = ۰$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

$$\rightsquigarrow \quad s^۲\, \mathcal{L}[y] - s\,(۱) - ۷ - ۲s\, \mathcal{L}[y] + ۲ - ۳\mathcal{L}[y] = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad (s^۲ - ۲s - ۳)\, \mathcal{L}[y] = s + ۵$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{s+۵}{s^۲ - ۲s - ۳}$$

حال کسرِ $\frac{s+۵}{s^۲-۲s-۳}$ را تفکیک می کنیم. می نویسیم:

$$\frac{s+۵}{s^۲-۲s-۳} = \frac{A}{s-۳} + \frac{B}{s+۱} = \frac{A(s+۱)+B(s-۳)}{(s-۳)(s+۱)}$$

بنابراین $s+۵ \equiv A(s+۱)+B(s-۳)$ ؛ که هم ارزی فوق برای تمام s ها برقرار است. با انتخاب $s=-۱$ و $s=۳$ (ریشه های مخرج کسر) داریم:

$$s=-۱ \quad \rightsquigarrow \quad -۱+۵ = A(-۱+۱)+B(-۱-۳)$$

$$\rightsquigarrow \quad ۴ = ۰ - ۴B \quad \rightsquigarrow \quad B = -۱$$

$$s=۳ \quad \rightsquigarrow \quad ۳+۵ = A(۳+۱)+B(۳-۳)$$

$$\rightsquigarrow \quad ۸ = ۴A \quad \rightsquigarrow \quad A = ۲$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+۵}{s^۲-۲s-۳} = \frac{۲}{s-۳} + \frac{-۱}{s+۱}$$

لذا

$$y=\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۲}{s-۳}+\frac{-۱}{s+۱}]=\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۲}{s-۳}]-\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s+۱}]$$

به عبارت دیگر جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل برابر است با:

$$y=۲\ \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s-۳}]-\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s-(-۱)}]=۲\ e^{۳t}-e^{-t}$$

تذکر

فرض کنیم دو تابع f و g که در فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ تعریف شده باشد، وقتی بین fg ضرب معمولی توابع تعریف شده است؛ تساوی $\mathcal{L}[f\cdot g]=\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$ همواره بر قرار نیست. به عبارت دیگر

$$\mathcal{L}[f\cdot g]\neq\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

تساوی فوق برای ضرب خاصی از توابع به نام **پیچش** دو تابع برقرار است.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

تعریف

پیچش

فرض کنیم دو تابع f و g که در فاصلهٔ $[۰, +\infty)$ تعریف شده باشد، به ازای هر $t > ۰$ پیچش دو تابع را با نماد $f{*}g$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$(f{*}g)(t) = \int_{۰}^{t} f(t-x)\cdot g(x)\, dx = \int_{۰}^{t} f(x)\cdot g(t-x)\, dx$$

حال فرض کنیم $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ و $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ ، در این صورت

$$\mathcal{L}[(f{*}g)(t)] = \mathcal{L}[\int_{۰}^{t} f(t-x)\cdot g(x)\, dx] = F(s)\cdot G(s)$$

مثال

تبدیل لاپلاس توابع انتگرالی زیر را محاسبه کنید.

$$(۱)\ \int_{۰}^{t} e^{t-x}\cdot \sin x\, dx \qquad (۲)\ \int_{۰}^{t} \cos(t-x)\cdot \sin x\, dx$$

حل:

(۱) فرض کنیم $f(t)=e^t$ و $g(t)=\sin t$ ؛ در این صورت بنا به تعریف پیچش، می نویسیم:

$$e^t * \sin t = \int_{۰}^{t} f(t-x)\cdot g(x)\, dx = \int_{۰}^{t} e^{t-x}\cdot \sin x\, dx$$

$$\mathcal{L}[e^t * \sin t] = \mathcal{L}[\int_{۰}^{t} e^{t-x}\cdot \sin x\, dx] = \mathcal{L}[f(t)]\cdot\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[e^t]\cdot\mathcal{L}[\sin t]$$

$$\rightsquigarrow\ \mathcal{L}[\int_{۰}^{t} e^{t-x}\cdot \sin x\, dx] = \mathcal{L}[e^t]\cdot\mathcal{L}[\sin t] = \frac{۱}{s-۱}\cdot\frac{۱}{s^{۲}+۱} = \frac{۱}{(s-۱)(s^{۲}+۱)}$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

(۲) فرض کنیم $f(t)=\cos t$ و $g(t)=\sin t$ ؛ در این صورت بنا به تعریف پیچش، می نویسیم:

$$\cos t * \sin t = \int_{۰}^{t} f(t-x)\cdot g(x)\ dx = \int_{۰}^{t} \cos(t-x)\cdot \sin x\ dx$$

$$\mathcal{L}[\cos(t-x) * \sin t] = \mathcal{L}[\int_{۰}^{t} \cos(t-x)\cdot \sin x\ dx] = \mathcal{L}[f(t)]\cdot \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\cos t]\cdot \mathcal{L}[\sin t]$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[\int_{۰}^{t} \cos(t-x)\cdot \sin x\ dx] = \mathcal{L}[\cos t]\cdot \mathcal{L}[\sin t] = \frac{s}{s^{۲}+۱}\cdot\frac{۱}{s^{۲}+۱} = \frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$$

ملاحظه

حل معادلات انتگرالی با استفاده از تبدیل لاپلاس

معادلات انتگرالی به صورت های زیر نوشته می شوند:

$$y(t) + \int_{۰}^{t} k(t-x)\ y(x)\ dx = f(t) \quad , \quad y(t) + \int_{۰}^{t} k(x)\ y(t-x)\ dx = f(t)$$

که در آن $f(t)$ و $k(t)$ توابع معلوم می باشند. برای حل این گونه معادلات که مجهول آن $y(t)$ است، ابتدا از دو طرف معادله، تبدیل لاپلاس می گیریم، سپس با استفاده از دستور **پیچش**، معادله را حل می کنیم.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

مثال : معادلات انتگرالی زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$(\text{۱})\ y(t)+\int_{\cdot}^{t}(t-x)\,y(x)\,dx=\sin \text{۲}t \qquad (\text{۲})\ y(x)=t^{\text{۳}}+\int_{\cdot}^{t}\sin(t-x)\,y(x)\,dx$$

حل:

(۱) از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم، می نویسیم:

$$y(t)+\int_{\cdot}^{t}(t-x)\,y(x)\,dx=\sin \text{۲}t \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(t)]+\mathcal{L}\Big[\int_{\cdot}^{t}(t-x)\,y(x)\,dx\Big]=\mathcal{L}[\sin \text{۲}t]$$

قرار می دهیم $\mathcal{L}[y(t)]=F(s)$ و برای محاسبهٔ $\mathcal{L}[\int_{\cdot}^{t}(t-x)\,y(x)\,dx]$ ، فرض می کنیم $f(t)=t$ ، $g(x)=y(x)$ ، پس

$$\mathcal{L}\Big[\int_{\cdot}^{t}(t-x)\,y(x)\,dx\Big]=\mathcal{L}[f(t)]\cdot\mathcal{L}[g(x)]$$

$$\rightsquigarrow \quad =\mathcal{L}[t]\cdot\underbrace{\mathcal{L}[y(x)]}_{F(s)}=\frac{\text{۱}}{s^{\text{۲}}}\cdot F(s)$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

از طرفی $\mathcal{L}[\sin ۲t] = \frac{۲}{s^۲ + ۲^۲}$ ، لذا معادله به صورت زیر نوشته می شود.

$$F(s) + \frac{۱}{s^۲} F(s) = \frac{۲}{s^۲ + ۴} \quad \rightsquigarrow \quad (۱ + \frac{۱}{s^۲}) F(s) = \frac{۲}{s^۲ + ۴}$$

$$\rightsquigarrow \quad (\frac{s^۲ + ۱}{s^۲}) F(s) = \frac{۲}{s^۲ + ۴} \quad \rightsquigarrow \quad F(s) = \frac{۲s^۲}{(s^۲ + ۴)(s^۲ + ۱)}$$

اکنون کسرِ $\frac{۲s^۲}{(s^۲ + ۴)(s^۲ + ۱)}$ را تفکیک می کنیم. می نویسیم:

$$\frac{۲s^۲}{(s^۲ + ۴)(s^۲ + ۱)} = \frac{A}{s^۲ + ۱} + \frac{B}{s^۲ + ۴} = \frac{A(s^۲ + ۴) + B(s^۲ + ۱)}{(s^۲ + ۱)(s^۲ + ۴)}$$

پس $۲s^۲ \equiv A(s^۲ + ۴) + B(s^۲ + ۱)$ ؛ لذا با انتخاب $s = ۰$ و $s = ۱$ خواهیم داشت:

$$s = ۰ \quad \rightsquigarrow \quad ۲(۰)^۲ = A(۰^۲ + ۴) + B(۰^۲ + ۱)$$

$$\rightsquigarrow \quad ۴A + B = ۰$$

$$s = ۱ \quad \rightsquigarrow \quad ۲(۱)^۲ = A(۱^۲ + ۴) + B(۱^۲ + ۱)$$

$$\rightsquigarrow \quad ۵A + ۲B = ۲$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

$$B = -۴A \quad , \quad ۵A + ۲B = ۲ \quad \rightsquigarrow \quad ۵A + ۲(-۴A) = ۲ \quad \rightsquigarrow \quad -۳A = ۲$$

$$\rightsquigarrow \quad A = \frac{-۲}{۳} \quad , \quad B = \frac{۸}{۳}$$

در نتیجه

$$F(s) = \frac{۲s^۲}{(s^۲+۴)(s^۲+۱)} = \frac{\frac{-۲}{۳}}{s^۲+۱} + \frac{\frac{۸}{۳}}{s^۲+۴}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y(x)] = \frac{-۲}{۳}\frac{۱}{s^۲+۱} + \frac{۸}{۳}\frac{۱}{s^۲+۴}$$

$$y(x) = \frac{-۲}{۳}\,\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲+۱}] + \frac{۸}{۳}\frac{۱}{۲}\,\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۲}{s^۲+۲^۲}]$$

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = \frac{-۲}{۳}\sin t + \frac{۴}{۳}\sin ۲t$$

(۲) از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم، می نویسیم:

$$y(x) = t^۳ + \int_۰^t \sin(t-x)\, y(x)\, dx \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(x)] = \mathcal{L}[t^۳] + \mathcal{L}[\int_۰^t \sin(t-x)\, y(x)\, dx]$$

فرض کنیم $f(t) = \sin t$ و $g(t) = y(x)$ ، با توجه به خاصیت پیچش، می نویسیم:

$$\mathcal{L}[\int_۰^t \sin(t-x)\, y(x)\, dx] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[y(x)]$$

$$\rightsquigarrow \quad = \mathcal{L}[\sin t] \cdot \mathcal{L}[y(x)] = \frac{1}{s^2+1} \cdot \mathcal{L}[y(x)]$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}[y(x)] = \mathcal{L}[t^3] + \mathcal{L}[\int_0^t \sin(t-x)\, y(x)\, dx] \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(x)] = \mathcal{L}[t^3] + \frac{1}{s^2+1} \cdot \mathcal{L}[y(x)]$$

از طرفی $\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4}$ ، بنابراین

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(x)] = \frac{3!}{s^4} + \frac{1}{s^2+1} \cdot \mathcal{L}[y(x)] \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(x)] - \frac{1}{s^2+1} \cdot \mathcal{L}[y(x)] = \frac{3!}{s^4}$$

$$\rightsquigarrow \quad (1 - \frac{1}{s^2+1})\, \mathcal{L}[y(x)] = \frac{3!}{s^4}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{s^2+1-1}{s^2+1}\, \mathcal{L}[y(x)] = \frac{3!}{s^4} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(x)] = \frac{3!}{s^4}\, \frac{(s^2+1)}{s^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y(x)] = \frac{3!\, s^2}{s^6} + \frac{3!}{s^6} = \frac{3!}{s^4} + \frac{3!}{s^6}$$

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3!}{s^4} + \frac{3!}{s^6}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3!}{s^4}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{3!}{s^6}] = x^3 + \frac{3!}{5!}\, \mathcal{L}^{-1}[\frac{5!}{s^6}] = x^3 + \frac{3!}{5!}\, x^5$$

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = x^3 + \frac{1}{20}\, x^5$$

۲ مسائل نمونه

در این بخش چند مساله نمونه در مورد تبدیل لاپلاس بیان می شود.

۱ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 3t^2 - 4t + 2$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}$ (۲) $\frac{6}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}$ (۳) $\frac{12}{s^3} - \frac{6}{s^2} + \frac{2}{s}$ (۴) $\frac{6}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s}$

۲ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{3t} - e^{-t}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1}$ (۲) $\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+1}$ (۳) $\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-1}$ (۴) $\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+1}$

۳ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sin 4t + \cos 5t$ کدام است؟

(۱) $\frac{s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+25}$ (۲) $\frac{4}{s^2-16} + \frac{s}{s^2-25}$

(۳) $\frac{4}{s^2+16} + \frac{s}{s^2+25}$ (۴) $\frac{s}{s^2-16} + \frac{5}{s^2-25}$

۴ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \cos^2 3t$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s^2+72}$ (۲) $\frac{2}{s} + \frac{s}{2s^2+72}$ (۳) $\frac{2}{s} + \frac{s}{2s^2+36}$ (۴) $\frac{1}{2s} + \frac{s}{2s^2+72}$

۵ ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sin t \ \cos 2t$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2s^2+18} - \frac{1}{2s^2+2}$ (۲) $\frac{1}{2s^2+18} - \frac{s}{2s^2+2}$

(۳) $\frac{s}{2s^2+18} - \frac{1}{2s^2+2}$ (۴) $\frac{3}{2s^2-18} + \frac{1}{2s^2+2}$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

۶ــ تبدیل معکوس لاپلاس برای تابع $F(s)=\frac{۵}{s^۲}+\frac{۷}{s^۲+۴}$ کدام است؟

(۱) $۵t^۲+\frac{۷}{۲}\cos ۲t$ (۲) $۵t+\frac{۷}{۲}\sin ۲t$ (۳) $۵t^۲+\frac{۷}{۲}\sin ۲t$ (۴) $۵t+\frac{۷}{۲}\cos ۲t$

۷ــ تبدیل معکوس لاپلاس برای تابع $F(s)=\frac{۱}{s^۲-۱}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}(e^t+e^{-t})$ (۲) $\frac{۱}{۲}(e^t-e^{-t})$ (۳) e^t-e^{-t} (۴) e^t+e^{-t}

۸ــ تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)=e^{۲t}\cos ۳t$ کدام است؟

(۱) $\frac{s-۲}{(s-۲)^۲+۹}$ (۲) $\frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۹}$ (۳) $\frac{۳}{(s-۲)^۲+۹}$ (۴) $\frac{۳}{(s+۲)^۲+۹}$

۹ــ تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)=t^۳e^{-۴t}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۳}{(s+۴)^۴}$ (۲) $\frac{۶}{(s+۴)^۴}$ (۳) $\frac{۳}{(s-۴)^۴}$ (۴) $\frac{۶}{(s-۴)^۴}$

۱۰ــ تبدیل معکوس لاپلاس برای تابع $F(s)=\frac{۲}{(s-۱)^۲+۴}$ کدام است؟

(۱) $e^{-t}\cos ۲t$ (۲) $e^{-t}\sin ۲t$ (۳) $e^{t}\cos ۲t$ (۴) $e^{t}\sin ۲t$

۱۱ــ حاصل $\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^n}]$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{(n-۱)!}t^{n-۱}$ (۲) $\frac{۱}{n!}t^{n-۱}$ (۳) $\frac{۱}{(n-۱)!}t^{n+۱}$ (۴) $\frac{۱}{(n-۱)!}t^{n}$

۱۲ــ تبدیل معکوس لاپلاس برای تابع $F(s)=\frac{۳s}{(s+۲)^۲+۲۵}$ کدام است؟

(۱) $۳e^{۲t}\sin ۵t$ (۲) $۳e^{۲t}\cos ۵t$ (۳) $۳e^{-۲t}\cos ۵t$ (۴) $۳e^{-۲t}\sin ۵t$

۱۳ــ تبدیل معکوس لاپلاس برای تابع $F(s)=\frac{۳}{(s-۳)^۵}$ کدام است؟

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

(۱) $\frac{۱}{۲۴}t^{۵}e^{۳t}$ (۲) $\frac{۱}{۲۴}t^{۴}e^{-۳t}$ (۳) $\frac{۱}{۲۴}t^{-۴}e^{۳t}$ (۴) $\frac{۱}{۲۴}t^{۴}e^{۳t}$

۱۴ـ حاصل $\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۳}+\frac{۱}{s^۴}]$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}t^۲+\frac{۱}{۶}t^۳$ (۲) $\frac{۱}{۲}t^۳+\frac{۱}{۶}t^۴$ (۳) $\frac{۱}{۲}t^۲+\frac{۱}{۳}t^۳$ (۴) $\frac{۱}{۶}t^۲+\frac{۱}{۲۴}t^۳$

۱۵ـ اگر $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ باشد، آنگاه حاصل $\mathcal{L}[t^۳\ f(t)]$ کدام است؟

(۱) $-F'''(s)$ (۲) $F'''(s)$ (۳) $\frac{۱}{۳!}F'''(s)$ (۴) $-\frac{۱}{۳!}F'''(s)$

۱۶ـ تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)=t\sin t$ کدام است؟

(۱) $۲s(s^۲+۱)^{-۱}$ (۲) $۲s(s^۲+۱)^{-۲}$ (۳) $s(s^۲+۱)^{-۲}$ (۴) $s(s^۲+۱)^{-۱}$

۱۷ـ تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)=t\cosh t$ کدام است؟

(۱) $\frac{s^۲+۱}{(s^۲-۱)^۲}$ (۲) $\frac{-s^۲+۱}{(s^۲-۱)^۲}$ (۳) $\frac{۱}{s^۲+۱}$ (۴) $\frac{۱}{(s^۲-۱)^۲}$

۱۸ـ حاصل $\mathcal{L}^{-۱}[\ln(\frac{s+۲}{s-۱})]$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{t}(e^{-۲t}-e^{t})$ (۲) $\frac{-۱}{t}(e^{-۲t}-e^{t})$ (۳) $\frac{-۱}{t}(e^{۲t}-e^{t})$ (۴) $\frac{-۱}{t}(e^{۲t}-e^{-t})$

۱۹ـ حاصل $\mathcal{L}^{-۱}[\arctan s]$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sin t}{t}$ (۲) $\frac{\sin t}{t}$ (۳) $\frac{\cos t}{t}$ (۴) $-\frac{\cos t}{t}$

۲۰ـ تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)=\frac{\sin ۲t}{t}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{۲}+\arctan\frac{s}{۲}$ (۲) $\frac{\pi}{۲}-\arctan s$ (۳) $\frac{\pi}{۲}-\arctan\frac{s}{۲}$ (۴) $\pi-\arctan s$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

۲۱ ـ حاصل انتگرال ناسره $\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-۵x}-e^{-۴x}}{x}\,dx$ کدام است؟

(۱) $\ln(\frac{۵}{۴})$ (۲) $-\ln(\frac{۵}{۴})$ (۳) $\ln ۵$ (۴) $-\ln ۴$

۲۲ ـ تبدیل لاپلاس تابع انتگرالی $\int_{۰}^{t} e^{t-x}\cos x\,dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{s}{(s+۱)(s^{۲}+۱)}$ (۲) $\frac{s}{(s-۱)(s^{۲}+۱)}$ (۳) $\frac{s}{(s-۱)(s^{۲}-۱)}$ (۴) $\frac{۱}{(s-۱)(s^{۲}+۱)}$

۲۳ ـ در معادلهٔ انتگرالی $y(x)=t+\int_{۰}^{t}\cos(t-x)y(x)\,dx$ ، حاصل $\mathcal{L}[y(x)]$ کدام است؟

(۱) $\frac{s^{۲}+۱}{s^{۴}+s^{۲}+s^{۳}}$ (۲) $\frac{s^{۲}+۱}{s^{۴}-s^{۲}-s^{۳}}$ (۳) $\frac{s^{۲}+۱}{s^{۴}+s^{۲}-s^{۳}}$ (۴) $\frac{s^{۲}-۱}{s^{۴}+s^{۲}-s^{۳}}$

۲۴ ـ جواب معادلهٔ انتگرالی $y(x)=۱+\int_{۰}^{t} e^{t-x}y(x)\,dx$ کدام است؟

(۱) $y=\frac{۱}{۲}(۱+e^{۲x})$ (۲) $y=\frac{۱}{۲}(۱+e^{-۲x})$ (۳) $y=۱+e^{۲x}$ (۴) $y=۱+e^{-۲x}$

★ ★ ★

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

مسایل نمونه

شکل ۱ :   **پیِر لاپلاس** ریاضی دان برجسته فرانسوی ، متولد: ۱۷۴۹ میلادی ، درگذشت: ۱۸۲۷ میلادی

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

با سپاس فراوان از توجه شما

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی