

به نام خدا

ساختمان های گسسته کاربرد در علوم کامپیوتر

مدرس : لیلا جوکار

بهار ۱۳۹۹

ساختمان گسسته

تمرین

۱. جدول ارزش فرمول‌های گزاره‌ای زیر را تشکیل دهید. مشخص کنید کدام یک از فرمولها همیشه درست، کدام یک همیشه نادرست و کدام یک نه همیشه درست است و نه همیشه نادرست.

الف. $\neg(P \vee \neg Q) \vee P$ ✓

ب. $[P \rightarrow (P \wedge Q)] \rightarrow \neg Q$ ✓

پ. $[\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)] \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$

ت. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

ث. $[P \wedge (Q \wedge R)] \vee \neg[(P \vee Q) \wedge (R \vee S)]$

ج. $(P \wedge Q) \rightleftharpoons (\neg P \vee \neg Q)$ ✓

ح. $[(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)] \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$ ✓

خ. $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

د. $[\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow \neg P$ ✓

ذ. $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(R \vee P) \rightarrow (R \vee Q)]$

ساختمان گسسته

با استفاده از جدول ارزش مشخص کنید کدام یک از فرمول‌های گزاره‌ای زیر با فرمول $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

هم‌ارز است؟

الف. $(P \vee Q) \rightarrow R$

ب. $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

ج. $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$

د. $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$

ساختمان گسسته

۴. با فرض اینکه $P \rightarrow Q$ دارای ارزش درستی F است، ارزش درستی فرمول‌های گزاره‌ای زیر را

مشخص کنید.

الف. $\neg(P \wedge Q) \rightarrow Q$

ب. $[\neg(P \wedge Q) \vee \neg R] \vee [((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S]$

ساختمان گسسته

۷. اگر P و Q دارای ارزش درستی T و R و S دارای ارزش درستی F باشند ارزش درستی فرمول‌های گزاره‌ای زیر چیست؟

الف. $[P \wedge (Q \wedge R)] \vee \neg[(P \vee Q) \wedge (R \vee S)]$

ب. $[\neg(P \wedge Q) \vee \neg R] \vee [((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S]$

پ. $P \rightarrow (R \rightarrow Q)$

ت. $(\neg Q) \rightarrow [R \rightarrow (R \rightarrow (P \vee S))]$

ث. $(P \leftrightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

ج. $[S \rightarrow (P \wedge \neg R)] \wedge [(P \rightarrow (R \vee Q)) \wedge S]$

ساختمان گسسته

۸. با استفاده از جدول ارزش مشخص کنید کدام یک از عبارات زیر در رابطه با گزاره‌ی $\neg(P \rightarrow \neg P)$ صادق است؟

الف. همیشه نادرست است.

ب. همیشه درست است.

ج. هم ارزش است با P

د. ب و ج هر دو

ساختمان گسسته

۱. بدون استفاده از جدول ارزش نشان دهید که گزاره‌های زیر نمی‌توانند هم‌زمان ارزش T داشته باشند.

الف. $(P \leftrightarrow Q)$, $Q \rightarrow R$, $\neg R \vee S$, $\neg P \rightarrow S$, $\neg S$

ب. $R \vee M$, $\neg R \vee S$, $\neg M$, $\neg S$

ساختمان گسسته

۱-۱۹. قوانین اساسی منطق

بعضی از قوانین هم‌ارزی که در بازنویسی یک فرمول گزاره‌ای و تبدیل آن به گزاره ساده‌تر مهم هستند به شرح زیر ارائه شده است. در این فرمولها حروف F و T به ترتیب جهت نشان دادن فرمول‌های همیشه درست و همیشه نادرست بکار رفته‌اند. در قوانین هم‌ارزی درج شده در جدول زیر برای هر قانون دو فرمول هم‌ارزی ارائه شده است. اگر در یکی از فرمولهای هم‌ارزی هر قانون، عملگرها را به صورت: \vee به \wedge ، \wedge به \vee ، T به F و F به T تبدیل کنیم فرمول دیگری از آن قانون بدست می‌آید. اگر در فرمولی تبدیل‌های گفته شده را انجام دهیم اصطلاحاً "همزاد (duality) آن فرمول را بدست آورده‌ایم، و به استناد قضیه "اگر دو فرمول هم‌ارز باشند همزادشان نیز هم‌ارز است" برای هر قانون دو تا فرمول ارائه شده است. (به استثنای قانون متمم‌گیری مضاعف)

ساختمان گسسته

| | |
|--|--|
| $\begin{cases} (P \vee P) \Leftrightarrow P \\ (P \wedge P) \Leftrightarrow P \end{cases}$ | ۱. قوانین خودتوانی (idempotent laws): |
| $\begin{cases} (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P) \\ (P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P) \end{cases}$ | ۲. قوانین جابجائی (commutative laws): |
| $\begin{cases} (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \\ (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \end{cases}$ | ۳. قوانین شرکت پذیری (associative laws): |

ساختمان گسسته

۴. قوانین توزیع پذیری (distributive laws):
$$\begin{cases} P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{cases}$$

۵. قوانین همانی (identity laws):
$$\begin{cases} (P \vee F) \Leftrightarrow P \\ (P \wedge T) \Leftrightarrow P \end{cases}$$

۶. قوانین صفر (zero laws):
$$\begin{cases} (P \vee T) \Leftrightarrow T \\ (P \wedge F) \Leftrightarrow F \end{cases}$$

ساختمان گسسته

| | |
|--|---------------------------------------|
| $\begin{cases} (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T \\ (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F \end{cases}$ | ۷. قوانین متمم (complement laws) |
| $\begin{cases} P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \\ P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \end{cases}$ | ۸. قوانین جذبی (absorption laws) |
| $\begin{cases} \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \\ \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \end{cases}$ | ۹. قوانین دمورگان (demorgan laws) |
| $\neg(\neg P) = P$ | ۱۰. متمم گیری مضاعف (double negation) |

ساختمان گسسته

توجه: علاوه از قوانین هم ارزی ارائه شده در جدول بالا هم ارزیهای زیر نیز مهم هستند.

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \quad 1$$

$$(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad 2$$

$$P \nabla Q \Leftrightarrow \neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \quad 3$$

ساختمان گسسته

۲۰-۱. اصل جایگزینی

در یک هم‌ارزی هر متغیری را می‌توان با یک گزاره جایگزین نمود مشروط بر اینکه عمل جایگزینی در هر کجا که متغیر مورد نظر ظاهر شده باشد انجام گیرد. هم چنین هر گزاره‌ای را می‌توان با یک گزاره‌ی هم‌ارز آن جایگزین کرد.

ساختمان گسسته

با استفاده از قوانین هم‌ارزی عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل کنید.

$$\text{الف } [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P$$

$$\text{ب. } P \vee \neg(\neg P \rightarrow Q)$$

ساختمان گسسته

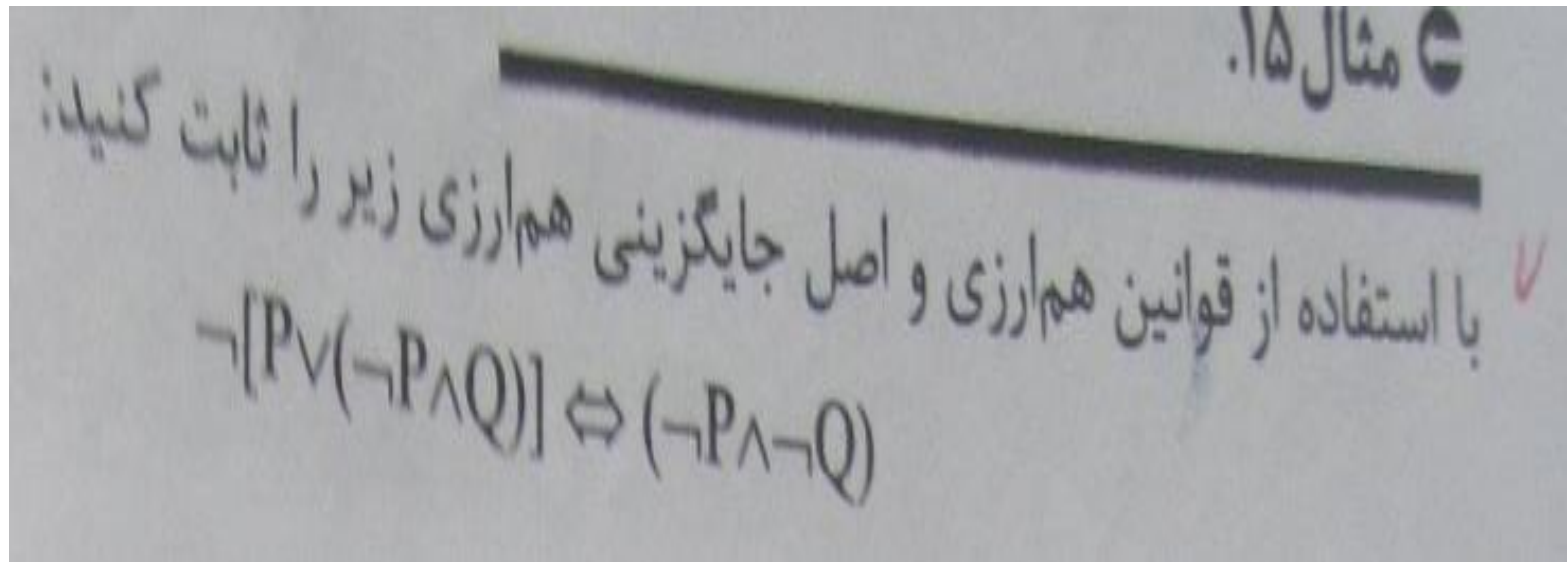
الف.

$$\begin{aligned} [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P &\Leftrightarrow \neg[(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg[\neg Q \wedge (\neg P \vee Q)] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg[(\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q)] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg[(\neg Q \wedge \neg P) \vee F] \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg P) \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow (Q \vee P) \vee \neg P \Leftrightarrow Q \vee (P \vee \neg P) \\ &\Leftrightarrow Q \vee T \Leftrightarrow T \quad (tauto \log y) \end{aligned}$$

ساختمان گسسته

ب. جواب: $(P \vee \neg Q)$. حل کامل مسئله به عهده دانشجو .

ساختمان گسسته



ساختمان گسسته

حل:

$$\neg[P \vee (\neg P \wedge Q)] \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg(\neg P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge (P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow F \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

ساختمان گسسته

مثال ۱۶.

ثابت کنید $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

ساختمان گسسته

$$\begin{aligned} P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \end{aligned}$$

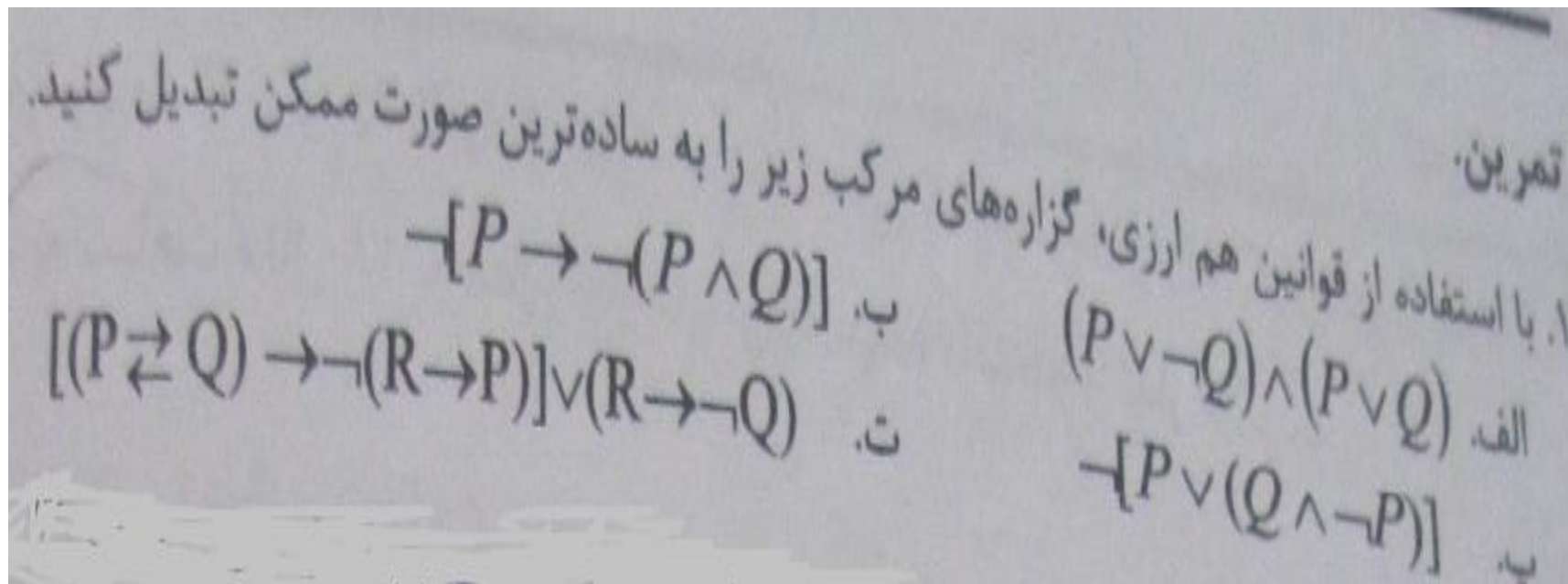
ساختمان گسسته

هم ارز فرمول $(P \Rightarrow Q)$ را تشکیل دهید به قسمی که
الف. فقط شامل عملگرهای \vee و \neg باشد. ب. فقط شامل عملگرهای \wedge و \neg باشد

ساختمان گسسته

$$\begin{aligned} (P \leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) && \text{حل الف.} \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\ &\Leftrightarrow \neg[\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)] \\ &&& \text{حل ب به عهده‌ی دانشجو.} \end{aligned}$$

ساختمان گسسته



ساختمان گسسته

۳. هم ارز فرمول های زیر را بدست آورید به صورتیکه فقط شامل رابطهای گزاره ای \neg و \wedge باشد.

الف. $\neg(P \leftrightarrow (Q \rightarrow (R \vee P)))$ ب. $((P \vee Q) \wedge R) \rightarrow (P \vee R)$ پ. $(P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (P \vee R)$

ساختمان گسسته

۸. با استفاده از قوانین هم‌ارزی ثابت کنید ارزش درستی فرمولهای گزاره‌ای زیر مستقل از ارزش درستی مؤلفه‌های آن است. (راهنمایی: همیشه درست یا همیشه نادرست بودن فرمول‌ها را بررسی کنید.)

$$\text{ب. } [P \rightarrow (Q \rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \wedge \neg P)$$

$$\text{الف. } (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)$$

$$\text{پ. } [P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$$

ساختمان گسسته

۲۲-۱. منطق گزاره‌ای در برنامه‌های کامپیوتری

اکثر زبانهای برنامه سازی سطح بالا از امکاناتی جهت معرفی و ارزیابی گزاره‌های منطقی برخوردار هستند. مثلاً" در زبان برنامه سازی پاسکال عملگرهای AND ، OR و NOT و در زبان برنامه سازی C و C++ عملگرهای || و && و ! به ترتیب جهت نشان دادن \vee و \wedge و \neg استفاده میشوند. گزاره‌ها و رابطهای گزاره‌ای همیشه در برنامه‌های کامپیوتری ظاهر می‌شوند. مثلاً" با توجه به دستور زیر در زبانهای C و C++ و JAVA

```
if ( x > 0 || (x <= 0 && y > 100 ))  
statements
```


ساختمان گسسته

عملگرهای \parallel یعنی OR و $\&\&$ یعنی AND و دستوالعملها یعنی statements وقت اجرا می شوند که گزاره‌ی مرکب بعد از دستور if یعنی $(x > 0 \parallel (x \leq 0 \&\& y > 100))$ درست باشد. اگر گزاره‌ی $x > 0$ را با P و $y > 100$ را با Q نشان دهیم، شرط مورد نظر در دستور شرطی if یعنی $(x > 0 \parallel (x \leq 0 \&\& y > 100))$ به صورت $(P \vee (\neg P \wedge Q))$ تبدیل می شود. می توانیم فرمول گزاره‌ای بدست آمده را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}(P \vee (\neg P \wedge Q)) &\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow T \wedge (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q)\end{aligned}$$

ساختمان گسسته

اکنون دستور شرطی داده شده را بدون اینکه تغییری در رفتار برنامه ایجاد شده باشد به صورت ساده زیر تبدیل می کنیم

```
if ( x > 0 || y > 100 )  
    (statements)
```

ساختمان گسسته

(statements)

تبدیل یک عبارت منطقی که از تعداد زیادی از متغیرها تشکیل شده باشد به ساده ترین صورت ممکن مشکل ولی مهم است. ساده کردن عبارات در نرم افزار، ممکن است در افزایش سرعت اجرای برنامه مؤثر باشد ولی طراحان تراشه ها نیز بطور فزاینده ای با تلاشهای مشابهی مواجه هستند. به این ترتیب که بجای به حداقل رساندن عملگرهای && و || در یک برنامه تلاش می کنند که تعداد اجزای فیزیکی مشابه بر روی یک تراشه را به حد اقل برسانند. زیرا یک تراشه با اجزای فیزیکی کمتر ضمن کوچکتر بودن، انرژی کمتری مصرف می کند، نقص کمتری دارد و تولید آن ارزان تر خواهد بود.