

به نام خدا

# ساختمان های گسسته کاربرد در علوم کامپیوتر

مدرس : لیلا جوکار

بهار ۱۳۹۹

## گزاره

### ۱-۲. گزاره (proposition)

تعریف. گزاره یک جمله‌ی خبری است که درست است یا نادرست، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. ارزش راستی یک گزاره را در حالت درست بودن با  $T$  یا  $1$  و در صورت نادرست بودن با  $F$  یا  $0$  علامت‌گذاری می‌کنند.

### مثال ۱.

کدام یک از عبارات زیر یک گزاره است.

الف. ۴ عدد اول است

ب.  $1+101=110$

پ. درب را ببند

ت. ایکاش من یک پزشک بودم

## گزاره

### ۱-۳. گزاره نما (propositional function)

در عبارت " $x = y + 3$ " ،  $x$  و  $y$  اسامی اعداد معینی نیستند بلکه اسامی مبهمی برای هر یک از اعداد مورد بحث هستند. در این عبارت هرکدام از  $x$  و  $y$  را یک متغیرگوئیم. عبارت " $x = y + 3$ " به سبب نامشخص بودن  $x$  و  $y$  نه درست است و نه نادرست، و مادامی که مقداری به متغیرها نسبت داده نشده است تعیین ارزش درستی آن ممکن نیست. چنین عبارتی را یک گزاره نما گویند. معمولاً گزاره نماها را برحسب متغیرهای فردی آنها با نمادهای  $P(x)$  ،  $P(x,y)$  و نظایر آن نشان می‌دهند. در گزاره‌نمای  $P(x,y)$  اگر متغیرهای  $x$  و  $y$  را به اسامی اعداد معین مانند  $a$  و  $b$  تبدیل کنیم گزاره‌ی  $P(a,b)$  حاصل می‌شود. چنین گزاره‌ای را یک نمونه‌ی آن گزاره‌نما گویند. همچنین اگر  $P(a,b)$  راست باشد گوئیم  $a$  و  $b$  در  $P(x,y)$  صدق می‌کنند.

### مثال ۲.

اگر گزاره‌نمای " $x+y=z$ " را با  $P(x,y,z)$  نشان دهیم آنگاه  $P(1,2,3)$  یعنی " $1+2=3$ " یک گزاره‌ی درست است پس 1 و 2 و 3 در  $P(x,y,z)$  صدق می‌کنند، ولی  $P(0,0,1)$  یعنی " $0+0=1$ " یک گزاره‌ی نادرست است یعنی 0 و 0 و 1 در  $P(x, y, z)$  صدق نمی‌کنند.

## ساختمان گسسته

### ۴-۱. گزاره‌ی ساده و گزاره‌ی مرکب

گزاره‌ی ساده گزاره‌ای است که به ساده‌ترین صورت ممکن بیان شده و قابل تجزیه به گزاره‌های ساده‌تر نیست. به گزاره‌های ساده گزاره‌های اولیه (primitive statements) یا گزاره‌های تجزیه ناپذیر (atomic statements) نیز گفته می‌شود. در واقع گزاره‌های ساده هستند که با حروف  $P, Q, R, \dots$  یا  $P_1, P_2, P_3, \dots$  و نظایر آن نام‌گذاری می‌شوند. گزاره‌ی مرکب (compound statemen) از ترکیب گزاره‌های ساده بوسیله‌ی لفظ‌های خاصی که آن‌ها را رابط‌های گزاره‌ای یا لفظ‌های پیوند دهنده (connectives) یا عملگرهای منطقی (logical operators) گویند بدست می‌آیند.



## ساختمان گسسته

### ۱-۶. رابط‌های گزاره‌ای (Connectives)

همان‌طوری که گفته شد گزاره‌های مرکب گزاره‌های ساخته شده از گزاره‌های ساده بوسیله لفظ‌هایی تحت عنوان رابط‌های گزاره‌ای یا لفظ‌های پیوند دهنده یا عملگرهای منطقی به شرح زیر است.

- ◀ لفظ “چنین نیست که” موسوم به ناقض که آن را با نماد “ $\neg$ ” نشان می‌دهند.
- ◀ لفظ “و” (AND) موسوم به عاطف که آن را با نماد “ $\wedge$ ” نشان می‌دهند.
- ◀ لفظ “یا” (inclusive OR) موسوم به فاصل که آن را با نماد “ $\vee$ ” نشان می‌دهند.

## ساختمان گسسته

### ۱-۷. نقیض (negation)

اگر  $P$  گزاره‌ی مشخصی باشد گزاره‌ی "چنین نیست که  $P$ " را که با علامت  $\neg P$  نشان می‌دهند نقیض  $P$  گویند. واضح است که اگر  $P$  درست باشد  $\neg P$  نادرست و اگر  $P$  نادرست باشد  $\neg P$  درست خواهد بود. جدول ارزش برای نقیض به صورت زیر است.

$P$	$\neg P$
T	F
F	T

### ۱-۸. ترکیب عطفی (conjunction)

اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره باشند، گزاره‌ی " $P$  و  $Q$ " را که با علامت  $P \wedge Q$  نشان می‌دهند ترکیب عطفی دو گزاره  $P$  و  $Q$  گویند. ترکیب عطفی دو گزاره فقط و فقط وقتی درست است که هر دو مؤلفه‌اش درست باشد.

## ساختمان گسسته

### ۹-۱. ترکیب فصلی (disjunction)

اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب " $P$  یا  $Q$ " را که با علامت  $P \vee Q$  نشان می‌دهند ترکیب فصلی  $P$  با  $Q$  گویند. ترکیب فصلی دو گزاره فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو مؤلفه‌اش نادرست باشد.

## ساختمان گسسته

۱۱-۱. ترکیب شرطی (Conditional)

اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب "اگر  $P$  آنگاه  $Q$ " را ترکیب شرطی  $P$  با  $Q$  گویند و بصورت  $P \rightarrow Q$  نشان می‌دهند. در گزاره‌ی شرطی  $P \rightarrow Q$ ،  $P$  را مقدم (antecedent) و  $Q$  را تالی (consequence) یا نتیجه (conclusion) گزاره شرطی گویند. یک گزاره‌ی شرطی فقط و فقط وقتی نادرست است که مقدمش درست و تالی‌اش نادرست باشد. ترکیب شرطی  $P \rightarrow Q$  را به مهمای مختلفی به شرح زیر بیان می‌کنند:



## ساختمان گسسته

۱۲-۱. ترکیب دوشروطی (biconditional)

ترکیب عطفی گزاره‌ی  $P \rightarrow Q$  را با عکس آن یعنی  $Q \rightarrow P$  ترکیب دوشروطی  $P$  با  $Q$  گویند و با نماد  $P \leftrightarrow Q$  نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ . به صورتهای مختلف مانند "اگر  $P$  آنگاه  $Q$  و بالعکس"، "شرط لازم و کافی برای آن که  $P$  آن است که  $Q$ "، " $P$  iff  $Q$ " ( $P$  iff  $Q$ ) را بخوانید "P if and only if Q" یا "P فقط و فقط اگر Q" خوانند.

$P \leftrightarrow Q$  فقط و فقط وقتی درست است که  $P$  و  $Q$  هم ارزش باشند یعنی هردو درست یا هردو نادرست باشند.

مثال ۶.

## ساختمان گسسته

ارزش درستی کلیه عملگرهای منطقی ذکر شده در بالا در یک جدول درستی (truth table) به شرح زیر ارائه شده است.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightleftharpoons Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

## ساختمان گسسته

### ۵-۱. هم ارزی (Equivalence)

دو گزاره  $P$  و  $Q$  را هم ارز یا معادل گویند و با نماد  $P \Leftrightarrow Q$  نشان می‌دهند اگر موقعی که  $P$  درست باشد  $Q$  هم درست باشد و موقعی که  $P$  نادرست باشد  $Q$  هم نادرست باشد و بالعکس. مثلاً اگر گزاره‌ی "علی متولد سال ۱۳۲۴ است" را با  $P$  و گزاره‌ی "علی در سال ۱۳۸۴ شصت ساله خواهد بود" را با  $Q$  نشان دهیم بدیهی است که  $P \Leftrightarrow Q$ . (توضیح کاملتر هم ارزی در صفحات بعد)

## ساختمان گسسته

### ۱۵-۱. فرمولهای خوش ساخت (well - formed formula)

- یک فرمول گزاره‌ای رشته‌ای است از متغیرها، پرانتزها و رابطهای گزاره‌ای. منظور از یک فرمول، یک فرمول خوش ساخت است که با استفاده‌ی محدود از قوانین زیر بدست آمده باشد:
۱. یک متغیر گزاره‌ای مانند  $P$  و هریک از نمادهای ویژه  $T$  و  $F$  بتنهایی یک فرمول خوش ساخت است.
  ۲. اگر  $P$  یک فرمول خوش ساخت باشد، آنگاه  $\neg P$  هم یک فرمول خوش ساخت است.
  ۳. اگر  $P$  و  $Q$  فرمولهای خوش ساخت باشند آنگاه  $(P \vee Q)$ ,  $(P \wedge Q)$ ,  $(P \rightarrow Q)$  و  $(P \leftrightarrow Q)$  نیز خوش ساخت هستند.

## ساختمان گسسته

مثال ۷.

فرمولهای  $(P \rightarrow (P \vee Q))$  و  $\neg(P \vee Q)$ ،  $((\neg P) \wedge Q)$ ،  $((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge T))$  خوش ساخت هستند.

ولی فرمول  $\neg P \vee Q \rightarrow R$  خوش ساخت نیست زیرا دامنه‌های اعمال  $\neg$  و  $\vee$  و  $\rightarrow$  مشخص نیست. اما عبارت  $(\neg P) \vee (Q \rightarrow R)$  خوش ساخت است. دامنه‌های اعمال را در یک فرمول در صورت لزوم باید با پرانتز مشخص کرد تا از ورود عبارات بی معنی در بحث جلوگیری شود. هم چنین فرمول  $(P \rightarrow Q) \rightarrow \vee Q$  خوش ساخت نیست (چرا؟).



## ساختمان گسسته

توجه: طبق قرار داد اگر فرمولی فاقد پرانتز باشد در صورت وجود عملگر  $\neg$  در آن فرمول عملگر  $\neg$  به متغیر بلافاصله بعد از آن مربوط می شود. مثلاً منظور از  $\neg P \wedge Q$  یعنی  $(\neg P) \wedge Q$  در غیر این صورت آن را به صورت  $(\neg(P \wedge Q))$  نشان می دهیم.

## ساختمان گسسته

۱۶-۱. فرمولهای گزاره‌ای همیشه درست (tautologies) و همیشه نادرست (contradictions)

فرمولهای گزاره‌ای  $(P \vee \neg P)$  و همچنین  $(P \wedge \neg P)$  را در نظر بگیرید. واضح است که فرمول اولی مستقل از گزاره‌ای که جانشین  $p$  میشود همیشه درست و فرمول دومی هم همیشه نادرست است.

تعریف: فرمول گزاره‌ای  $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$  را همیشه درست (همیشه نادرست) گویند اگر ارزش درستی آن بازنه  $2^n$  حالت ارزش دهی متغیرهای سازای آن همواره درست (همواره نادرست) باشد.

## ساختمان گسسته

مثال ۸.

ثابت کنید فرمول  $(P \rightarrow (P \vee Q))$  همیشه درست و فرمول  $(P \wedge (\neg P \wedge Q))$  همیشه نادرست است

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge (\neg P \wedge Q))$	$(P \rightarrow (P \vee Q))$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T

همیشه نادرست

همیشه درست

## ساختمان گسسته

با استفاده از جدول ارزش نشان دهید که ارزش درستی کدام یک از فرمول‌های مستقل از ارزش درستی مؤلفه‌های آنها است.

$$A(P, Q) = (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \quad \text{الف.}$$

$$B(P, Q) = (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \quad \text{ب.}$$

## ساختمان گسسته

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$A(P, Q)$
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	F	F

چون  $A(P, Q)$  همیشه درست یا همیشه نادرست نیست پس ارزش درستی آن مستقل از ارزش درستی مؤلفه‌ها نیست.

حل ب. فرمول گزاره‌ای  $B(P, Q) = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]$  همیشه درست است پس ارزش درستی آن ربطی به ارزش درستی  $P$  و  $Q$  ندارد. (تشکیل جدول بعهدہ دانشجو)



## ساختمان گسسته

### ۱۲-۱. فرمولهای هم ارز

تعریف: دو فرمول گزاره‌ای  $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$  و  $B(P_1, P_2, \dots, P_n)$  را هم ارز یا معادل گویند و با نماد  $A \Leftrightarrow B$  نشان می‌دهند اگر ارزش درستی آنها در کلیه  $2^n$  حالت ارزش دهی متغیرهای  $P_1, P_2, \dots, P_n$  باهم برابر باشند.

## ساختمان گسسته

توجه: می‌دانیم که گزاره‌ی مرکب  $A \Rightarrow B$  وقتی درست است که مؤلفه‌های آن هم‌ارزش باشند یعنی  $A$  و  $B$  هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. بنابراین از هم‌ارزی  $A \Leftrightarrow B$  نتیجه می‌گیریم که  $A \Rightarrow B$  یک گزاره‌ی همیشه درست است و بالعکس. توجه داشته باشید که علامت  $\Leftrightarrow$  رابط گزاره‌ای نیست بلکه علامتی است در زبان مافوق و لذا  $A \Leftrightarrow B$  متعلق به زبان طبیعی بوده و به زبان صوری مربوط نیست.

## ساختمان گسسته

### ۱۸-۱. طرز تشخیص معادل بودن دو فرمول

با توجه به موارد گفته شده در بالا می توان معادل بودن دو فرمول را به دو صورت زیر تشخیص داد.

الف. تشکیل جدول ارزش درستی آن ها و مقایسه ارزش درستی در هر سطر.

ب. اثبات اینکه ترکیب دوشروطی آنها همیشه درست است.

## ساختمان گسسته

اگر  $A = \neg P \wedge \neg Q$  و  $B = \neg[P \vee (\neg P \wedge Q)]$  معادل بودن  $A$  و  $B$  را با دو روش متفاوت بررسی کنید.

حل.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee (\neg P \wedge Q)$	A	B	$B \Rightarrow A$
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T

↑ ارزش درستی  $A$  و  $B$  در کلیه سطرها برابر است پس  $A \Leftrightarrow B$  است.

چون  $B \Rightarrow A$  همیشه درست است پس  $A \Leftrightarrow B$

## ساختمان گسسته

چون  $A \leftrightarrow B$  همیشه درست است پس  $A \leftrightarrow B$

مثال ۱۱.

اگر  $P \rightarrow Q$  دارای ارزش درستی  $F$  باشد، ارزش درستی فرمول گزاره‌ای  $(\neg P) \vee (P \leftrightarrow Q)$  را بدست آورید.

حل.  $P \rightarrow Q = F \Rightarrow \begin{cases} P = T \Rightarrow \neg P = F \\ Q = F \end{cases}$

در نتیجه  $(\neg P) \vee (P \leftrightarrow Q) = F \vee F = F$



## ساختمان گسسته

### مثال ۱۲.

بدون استفاده از جدول ارزش نشان دهید که گزاره‌های  $P \leftrightarrow Q$ ،  $Q \rightarrow R$ ،  $\neg R \vee S$  و  $P \wedge \neg S$  نمی‌توانند همگی و بطور هم زمان دارای ارزش T باشند.

حل. از  $P \wedge \neg S = T$  نتیجه می‌گیریم  $P = T$  و  $\neg S = T \Rightarrow S = F$

از  $\neg R \vee S = T$  و  $S = F$  نتیجه می‌گیریم  $\neg R = T \Rightarrow R = F$

از  $Q \rightarrow R = T$  و  $R = F$  نتیجه می‌گیریم  $Q = F$ . در صورت درست بودن هم‌زمان سه فرمول اولی، P و Q دارای ارزش یکسان نیستند پس فرمول  $P \leftrightarrow Q$  نمی‌تواند دارای ارزش T باشد.

## ساختمان گسسته