الف

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اعداد مختلط

منظور از یک عدد مختلط مانند z، یک جفت مرتب از اعداد حقیقی a و b است. یعنی $z=(a,b)$

اگر $b=0$ بنا بر قرارداد می‌نویسیم $z=(a,0)=a$ و بدین ترتیب مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ زیرمجموعه سره مجموعه اعداد مختلط است که آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.

دو عدد مختلط (a,b) و (c,d) را مساوی گوییم هرگاه $a=c$ و $b=d$.

* مجموع دو عدد مختلط $z_1=(a,b)$ و $z_2=(c,d)$ را با z_1+z_2 نمایش داده و با فرمول زیر بیان می‌شود

$$z_1+z_2=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

عمل جمع بوضوح جابجایی و شرکت‌پذیر است (یعنی برای هر سه عدد مختلط z_1، z_2 و z_3 همواره داریم $z_1+z_2=z_2+z_1$ و $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$). همچنین عنصر $(0,0)$ عنصر خنثی عمل جمع است زیرا بوضوح برای هر عدد مختلط $z=(a,b)$، $z+(0,0)=(0,0)+z=z$.

بعلاوه اگر $z=(a,b)$ عددی مختلط باشد عدد مختلط $(-a,-b)$ قرینه عدد مختلط z تحت عمل جمع است زیرا $(a,b)+(-a,-b)=(-a,-b)+(a,b)=(0,0)$. عدد مختلط $(-a,-b)$ را با $-z=-(a,b)$ نمایش می‌دهیم.

* حاصل ضرب دو عدد مختلط $z_1=(a,b)$ و $z_2=(c,d)$ را با z_1z_2 نمایش داده و عبارت است از

$$z_1z_2=(ac-bd,\ ad+bc)$$

عدد مختلط $(1,0)$ عضو خنثی برای عمل ضرب است زیرا همواره

$$(a,b)(1,0)=(1,0)(a,b)=(a,b)$$

عمل ضرب نیز دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری می‌باشد یعنی $z_1z_2=z_2z_1$ و $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$.

* عدد مختلط $(0,1)$ دارای این خاصیت است که مجذورش -1 است زیرا

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(0\times0-1\times1,\ 0\times1+1\times0)=(-1,0)=-1$$

یعنی عدد مختلط $(0,1)$ یک ریشه معادله $x^2+1=0$ در دستگاه اعداد مختلط است.

عدد مختلط $(0,1)$ را با i نمایش می‌دهیم و لذا $i^2=-1$ که به فرمول $i=\sqrt{-1}$ منتهی می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال عدد مختلط $z=(a,b)$ را میتوان بشکل زیر نوشت

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

در عدد مختلط $z=a+bi$ یا ($z=(a,b)$) a را قسمت حقیقی و b را قسمت موهومی عدد z نامیده و به ترتیب آنها را با $Re\,z$ و $Im\,z$ نمایش میدهیم.

مثال: جوابهای معادله $x^2+2x+3=0$ را بیابید

$$\Delta=(2)^2-4(1)(3)=-8$$

$$\text{ریشه‌ها}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}\sqrt{-1}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}\,i}{2}=-1\pm\sqrt{2}\,i$$

مثال. مقادیر زیر را محاسبه کنید

$$i^3,\quad i^8,\quad i^{10},\quad i^{21}$$

$$i^3=i^2i=(-1)i=-i\quad,\quad i^8=(i^2)^4=(-1)^4=+1$$

$$i^{10}=(i^2)^5=(-1)^5=-1\quad,\quad i^{21}=(i^2)^{10}i=(-1)^{10}i=i$$

مثال دیگر $z=(2,3)$, $w=(-1,2)$ ، $z\pm w$ ، zw ، z^2 ، w^3 را محاسبه کنید.

$$z=2+3i\quad,\quad w=-1+2i$$

$$z+w=(2+3i)+(-1+2i)=1+5i \qquad \boxed{i^2=-1}$$

$$z-w=(2+3i)-(-1+2i)=3+i$$

$$zw=(2+3i)(-1+2i)=2(-1+2i)+3i(-1+2i)=-2+4i-3i+6i^2=-8+i$$

$$z^2=(2+3i)^2=2^2+2(2)(3i)+(3i)^2=4+12i+9i^2=-5+12i$$

$$(w)^3=(-1,2)^3=(-1+2i)^3=(-1)^3+3(-1)^2(2i)+3(-1)(2i)^2+(2i)^3=-1+6i+12-8i$$
$$=11-2i \qquad i^3=i^2i=-i$$

* مزدوج عدد مختلط $z=(a,b)=a+bi$ را با $\bar{z}$ نمایش داده و $\bar{z}=(a,-b)=a-bi$

و لذا $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-\cancel{abi}+\cancel{abi}-abi^2$ و یا $z\bar{z}=a^2+b^2$ ، یعنی همواره برای هر عدد مختلط z ، $z\bar{z}$ عددی حقیقی است.

مثال: معکوس عدد مختلط $z=a+bi$ را بیابید

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

مثال: خارج قسمت $\frac{a+bi}{c+di}$ را به شکل یک عدد مختلط بنویسید.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}$$

$\boxed{i^2=-1}$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

مثال: عبارت زیر را به شکل $x+yi$ بنویسید

الف) $\frac{1}{1-i}$ ب) $\frac{2-i}{-1+2i}$

الف) $\frac{1}{1-i}=\frac{1}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

ب) $\frac{2-i}{-1+2i}=\frac{2-i}{-1+2i}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}=\frac{-2-4i+i+2i^2}{(-1)^2+(2)^2}=\frac{-4-3i}{5}$

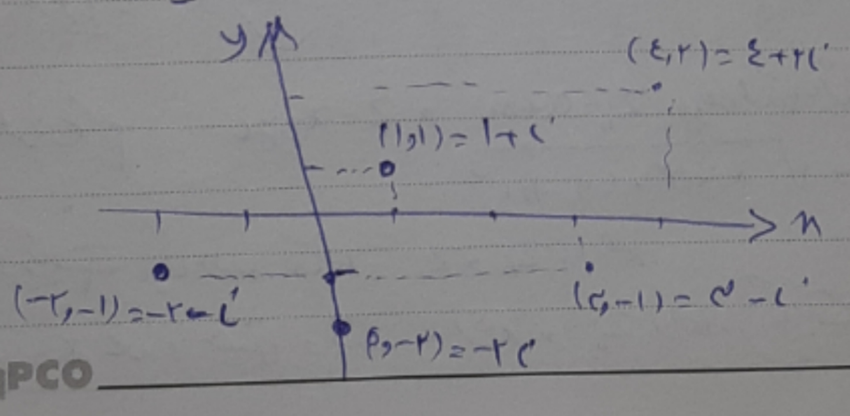
$$=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

خواص زیر از تعریف مزدوج به راحتی بدست می‌آیند

الف) $z=\bar{z}\iff Im\,z=0$ ب) $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$ پ) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$ ت) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

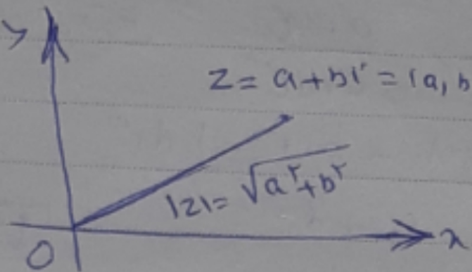
ث) $\overline{z^n}=\bar{z}^n$ ج) $\overline{(\bar{z})}=z$ چ) $z+\bar{z}=2Re\,z$, $z-\bar{z}=2i\,Im\,z$

* صفحه مختلط: عدد مختلط $z=(a,b)=a+bi$ را می‌توان در صفحه P مشخص شده توسط دو محور متعامد $x'ox$ و $y'oy$ به نقطه‌ای به طول a و عرض b نشان داد و بالعکس هر نقطه (a,b) در صفحه P متناظر با عدد مختلط $a+bi$ است، با این انطباق، صفحه را صفحه مختلط می‌گوییم



Subject:
Year. Month. Date. ( )

* فرض کنیم $z=a+bi$ عددی مختلط باشد. قدر مطلق یا طول عدد مختلط z را با $|z|$ نمایش داده



و برابر است با فاصله نقطه (a,b) تا مبدأ

یعنی $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$

پس همواره $z\bar{z}=|z|^2$

این خواص براحتی از تعریف نتیجه می‌شود

$|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ و $|z|=|\bar{z}|=|-z|$ و $|z|\geq 0$

$|zw|=|z||w|$ و $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ و $\operatorname{Re} z\leq|z|,\ \operatorname{Im} z\leq|z|$

$|z+w|\leq|z|+|w|$ (نامساوی مثلثی)

اثبات $|zw|=|z||w|$

$$|zw|^2=(zw)\overline{(zw)}=zw\bar{z}\bar{w}=z\bar{z}w\bar{w}=|z|^2|w|^2 \xRightarrow{\text{با جذر گرفتن}} |zw|=|z||w|$$

اثبات نامساوی مثلثی:

$$|z+w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w$$
$$=|z|^2+|w|^2+z\bar{w}+\overline{(z\bar{w})}$$
$$=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$
$$\leq|z|^2+|w|^2+2|z\bar{w}|$$
$$=|z|^2+|w|^2+2|z||\bar{w}|$$
$$=|z|^2+|w|^2+2|z||w|=(|z|+|w|)^2$$

$\bar{z}w=\overline{(z\bar{w})}$ همواره

$z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$ همواره

$\operatorname{Re} z\leq|z|$

$|z|=|\bar{z}|$

$$\xRightarrow{\text{با جذر گرفتن}} |z+w|\leq|z|+|w|$$

* تمرین: برای هر عدد مختلط z و w همواره داریم $|z-w|\geq\big||z|-|w|\big|$

* فرض کنیم $z=x+yi$ و $z_0=a+bi$ دو عدد مختلط باشند. در این صورت

$$|z-z_0|=|x-a+(y-b)i|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

که برابر است با فاصله نقاط z و z_0 در صفحه

اگر r عددی حقیقی و مثبت باشد و z_0 را عددی ثابت در نظر بگیریم، آنگاه مجموعه تمام نقاط

P4PCO

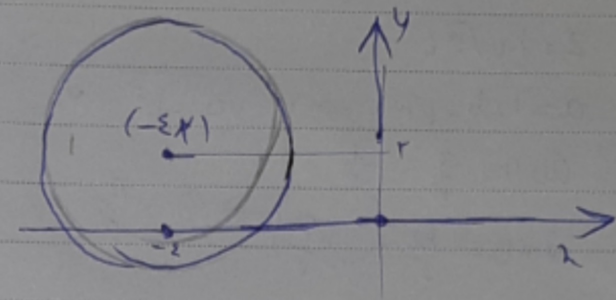
مختلط $z=x+yi$ که $|z-z_0|=2$ (یعنی همه نقاط $z=x+yi$ که $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=2$

و یا $(x-a)^2+(y-b)^2=2^2$) برابر دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز (a,b) در صفحه است.

مثال: نمودار $|z+4-2i|=3$ را رسم کنید

$|z+4-2i|=|z-(-4+2i)|=3$

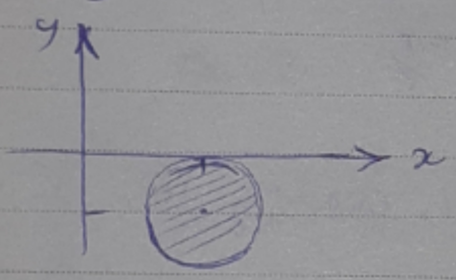
دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز $(-4,2)$



مثال: نمودار $|z-2+i|\le 1$ را رسم کنید

چون $|z-2+i|=|z-(2-i)|=1$ دایره به شعاع ۱ و مرکز $(2,-1)$ است پس نمودار $|z-2+i|\le 1$

درون (و مرز) دایره به شعاع ۱ و مرکز $(2,-1)$ است



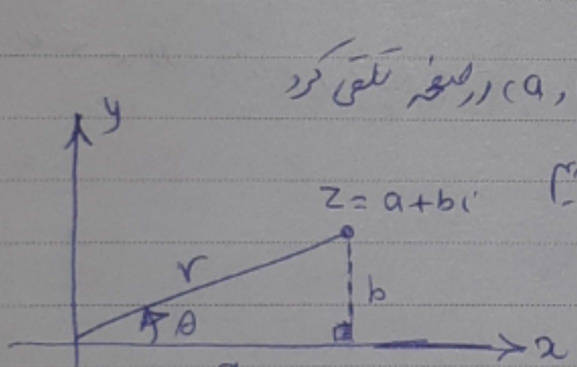
* شکل قطبی اعداد مختلط:

هر عدد مختلط $z=a+bi$ را می‌توان نقطه‌ای مانند (a,b) در صفحه تلقی کرد

قرار می‌دهیم $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ و θ را زاویه‌ای می‌نامیم

که از جهت مثبت محور x به پاره خط واصل بین مبدأ

و نقطه (a,b) سنجیده می‌شود، لذا



$\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$, $\tan\theta=\frac{b}{a}$

و در نتیجه

$z=a+bi=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

که آن را شکل قطبی عدد مختلط z می‌گوییم.

عدد r طول یا اندازه مطلق عدد مختلط است و منحصراً به وسیله z مشخص می‌گردد، اما بی‌نهایت مقدار

ه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای θ وجود دارد که اختلاف هر دوتای آنها مضرب صحیحی از 2π است. این θ ها را شناسه ها یا آرگومانهای عدد مختلط z می گوییم. مقدار یکتای زاویه قطبی θ که $-\pi < \theta \leq \pi$ (و یا $0 \leq \theta \leq 2\pi$) است را شناسه اصلی و یا آرگومان اصلی z می گوییم.

مثال: شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید

$z = 1 + \sqrt{3}\, i$

$a = 1,\ b = \sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{2}\\[2mm] \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$w = -1 + i$

$a = -1,\ b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\[2mm] \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \Rightarrow w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

میتوان ثابت کرد که $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ و لذا $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را با $\operatorname{cis}\theta$ نمایش میدهیم. $\operatorname{cis}\theta$ تابعی از θ است که دارای خواص زیر باشد

الف) $(\operatorname{cis}\theta_1)(\operatorname{cis}\theta_2) = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

ب) $(\operatorname{cis}\theta)^{-1} = \operatorname{cis}(-\theta)$,

ج) $\dfrac{\operatorname{cis}\theta_1}{\operatorname{cis}\theta_2} = \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

اثبات

الف) $(\operatorname{cis}\theta_1)(\operatorname{cis}\theta_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2$

$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$

PAPCO

ح

$$= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$= \text{cis}(\theta_1+\theta_2)$$

ت) $(\text{cis}\,\theta)(\text{cis}(-\theta_1)) = \text{cis}(\theta+(-\theta)) = \text{cis}\,0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

ولذا: $(\cos\theta)^{-1} = \text{cis}(-\theta)$

ث) $\dfrac{\text{cis}\,\theta_1}{\text{cis}\,\theta_2} = (\text{cis}\,\theta_1)(\text{cis}\,\theta_2)^{-1} = (\text{cis}\,\theta_1)(\text{cis}(-\theta_2)) = \text{cis}(\theta_1-\theta_2)$ و

مثال: اگر $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = \sqrt{3}-i$ شکل قطبی $z_1 z_2$ ، $\dfrac{z_1}{z_2}$ را بنویسید

$z_1 = 1+i \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}(\pi/4) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$a=1,\ b=1 \quad r=\sqrt{2}$

$\cos\theta = a/r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = b/r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{3} - i \rightarrow z_2 = 2\,\text{cis}(-\frac{\pi}{6}) = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6}))$

$a=\sqrt{3},\ b=-1 \Rightarrow r=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta = \sqrt{3}/2 = \frac{a}{r}$

$\sin\theta = -\frac{1}{2} = \frac{b}{r}$ $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

$z_1 z_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{\pi}{4})\ 2\,\text{cis}(-\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{\pi}{12})$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\pi/4}{2\,\text{cis}(-\pi/6)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cis}\,(\pi/4 - (-\pi/6)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{12}$

توان‌های اعداد مختلط

قضیه (قضیه دوموآور): اگر $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ آنگاه برای عدد صحیح و مثبت n

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

مثال: اگر $z_1=-1+\sqrt{3}\,i$ و $z_2=1+i$ مقدار $\frac{z_1^6}{z_2^5}$ را بیابید.

حل: ابتدا شکل قطبی z_1 و z_2 را می‌نویسیم

$$z_1=-1+\sqrt{3}\,i$$

$$a=-1,\ b=\sqrt{3}$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2=+1+i$$

$$a=1,\ b=1$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

لذا $z_1=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$ ، $z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ و درنتیجه

$$\frac{z_1^6}{z_2^5}=\frac{2^6\left(\cos 6\frac{2\pi}{3}+i\sin 6\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}^{\,5}\left(\cos 5\frac{\pi}{4}+i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{64(1+0)}{4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\frac{64}{4(-1-i)}\times\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{64(-1+i)}{4\times 2}=8(-1+i)$$

ریشه‌های اعداد مختلط

فرض کنیم $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ عددی مختلط و n عددی صحیح و مثبت باشد.

ریشه nاُم z ، عدد مختلطی باشد مانند $w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ به طوری که $w^n=z$ (و یا $w=z^{\frac{1}{n}}$) لذا