جلسه ششم:

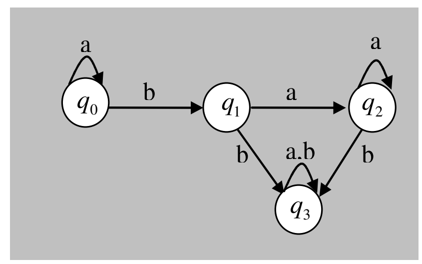
خارج قسمت زبان L_1 بر L_2 : با نماد $\frac{L_1}{L_2}$ نمایش می دهند، زبانی است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\frac{L_1}{L_2} = \{x \mid xy \in L_1 , y \in L_2\}$$

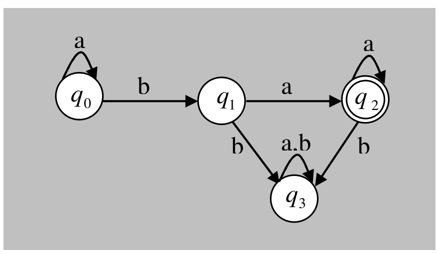
مثال:اگر $L_1 = \{ab, aab, abb, ba\}$ و $L_2 = \{b, ba\}$ باشد $\frac{L_1}{L_2}$ را محاسبه کنید. جواب: $\frac{L_1}{L_2} = \{\lambda, a, aa, ab\}$

مثال: اگر $L_1 = a^*baa^*$ و $L_2 = ab^*$ باشد $\frac{L_1}{L_2}$ را محاسبه کنید.

توضیح: برای پیدا کردن $\frac{L_1}{L_2}$ ، DFA مربوط به L_1 را رسم می کنیم، سپس معادل همان DFA که همه وضعیت های آن غیر پایانی است را رسم می کنیم،در ادامه تک تک وضعیت های موجود را بر رسی می کنیم(در DFA مربوط به L_1)، اگر از هر یک از وضعیت ها ، با با طی کردن یالها به وضعیت نهائی برسیم و در این مسیر طی شده، رشته ای از L_2 را پیمایش کنیم، آن وضعیت به عنوان وضعیت نهائی در DFA معادل علامت گذاری می شود، بعد از تست کردن همه وضعیت ها،DFA معادل همان $\frac{L_1}{L_2}$ می باشد.

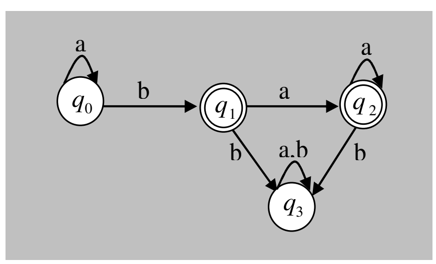


DFA معادل l_1 و بدون وضعیت پایانی



DFA مربوط به l_1

$\frac{l_1}{l_2} =$



$= (a^*b \mid a^*ba^+)$

نکته:مجمو عه زبان های منظم نسبت عمل تقسیم بسته اند.

گرامر های مستقل از متن:

گرامر $G = \{V, T, S, P\}$ را مستقل از متن گویند، اگر همه قوانین P به شکل $A \to x$ باشد که داریم
$A \in V$
$x \in (V \mid T)^*$

نکته: زبان l را مستقل از متن گویند ، اگر بتوان برای آن گرامر مستقل از متنی پیدا کرد.

- ☐ با توجه به تعریف می توان فهمید، هر زبان منظم می تواند یک زبان مستقل از متن(Context Free) باشد.
- ☐ مثلا زبان a^nb^n که با گرامر $S \to aSb \mid \lambda$ توصیف می شود، یک زبان مستقل از متن است .
- ☐ در مورد زبان $l = \{a^nb^m \mid n \neq m\}$ بحث کنید.

گرامر زبان را می نویسیم و با توجه به گرامر معلوم می شود که زبان مستقل از متن است.

$$n \neq m \xrightarrow{n>m} \begin{cases} S \to AB \\ A \to aA \mid a \\ B \to aBb \mid \lambda \end{cases}$$

واضح است که هر دو گرامر مستقل از متن اند و اجتماع آنها زبان را تشکیل می دهد.

$$n \neq m \xrightarrow{n<m} \begin{cases} S \to CD \\ C \to aCb \mid \lambda \\ D \to bD \mid b \end{cases}$$

تعریف اشتقاق راست:

اگر در هر مرحله از اشتقاق سمت راست ترین متغیر جایگزین شود،به اشتقاق حاصل اشتقاق راست گوئیم

تعریف اشتقاق چپ:

اگر در هر مرحله از اشتقاق سمت چپ ترین متغیر را جایگزین کنیم، اشتقاق حاصل را اشتقاق چپ گویند.

مثال: با توجه به گرامر مستقل از متن $\begin{array}{l} 1.S \to aAB \\ 2.A \to bBb \\ 3.B \to A \mid \lambda \end{array}$ برای رشته $abbbb$ که عضو زبان گرامر است یک اشتقاق راست و یک اشتقاق چپ پیدا کنید.

اشتقاق راست $S \xrightarrow{1} aAB \xrightarrow{3} aA \xrightarrow{2} abBb \xrightarrow{3} abAb \xrightarrow{2} abbBbb \xrightarrow{3} abbbb$

اشتقاق چپ $S \xrightarrow{1} aAB \xrightarrow{2} abBbB \xrightarrow{3} abbB \xrightarrow{3} abbA \xrightarrow{2} abbbBb \xrightarrow{3} abbbb$

نکته: اگر رشته ای عضو زبان یک گرامر باشد، حداقل یک اشتقاق راست و حداقل یک اشتقاق چپ برای آن موجود است

نکته: اگر برای رشته ای مثل W عضو زبان گرامر G بتوان بیش از یک اشتقاق راست یا بیش از یک اشتقاق چپ پیدا کرد، گرامر G را گرامر مبهم یا گنگ گویند.

مثال: گنگ بودن را برا ی گرامر $\begin{array}{l} S \to AB \mid aaB \\ A \to a \mid Aa \\ B \to b \end{array}$ نشان دهید.

چپ 1 $S \to AB \to AaB \to aaB \to aab$

چپ 2 $S \to aaB \to aab$

چون برای رشته aab دو اشتقاق چپ وجود دارد، پس گرامر مبهم(گنگ)است .

مثال: گنگ بودن را برا ی گرامر $\begin{array}{l} S \to A, B \to 1C \\ A \to 0, C \to 1A \\ A \to 0B, A \to 011A \end{array}$ نشان دهید.

1. $S \to A \to 0B \to 01C \to 011A \to 0110$
2. $S \to A \to 011A \to 0110$

چون همواره یک متغیر داشته ایم می توان گفت که دو اشتقاق راست یا دو اشتقاق چپ پیدا شده(هیچ فرقی نداره) به هر حال گرامر مبهم است.

نکته: اگر بتوان برای یک زبان یک گرامر غیر گنگ پیدا کرد، آن زبان غیر گنگ است.

نکته: اگر ثابت شود، همه گرامر هائی که زبان را تولید می کنند گنگ هستند، آن زبان را ذاتا گنگ گوئیم .

آتاماتای پشته ای نامعین(NPDA) :

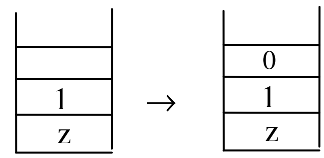
به فرم $M=\{Q,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,Z,F\}$ نمایش می دهند که

Q: مجموعه ای متناهی از State ها — Σ : الفبای زبان — q_0 : وضعیت شروع(عضوی از Q)

Γ : الفبا ی پشته — δ : تابع تغیر حالت — Z : متعلق به Γ است و پایین پشته را نشان می دهد

F : زیر مجمو عه ای از Q است(حالات پایانی)

$$\delta : Q\times(\Sigma\cup\lambda)\times\Gamma \rightarrow Q\times\Sigma^* \quad for\ example\ \delta(q_0,a,1)\rightarrow(q_0,01)\Rightarrow$$



مثال: آتاماتای پشته ای طراحی کنید که زبان $l=\{a^nb^n \mid n>0\}$ را بپزیرد. جواب

$\delta : (q_0, a, z)\rightarrow(q_0,1z)$

$\delta : (q_0, a,1)\rightarrow(q_0,11)$

$\delta : (q_0, b,1)\rightarrow(q_1,\lambda)$

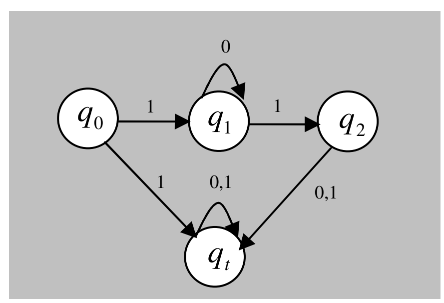
$\delta : (q_1, b,1)\rightarrow(q_1,\lambda)$

$\delta : (q_1,\lambda, z)\rightarrow(q_f,z)$

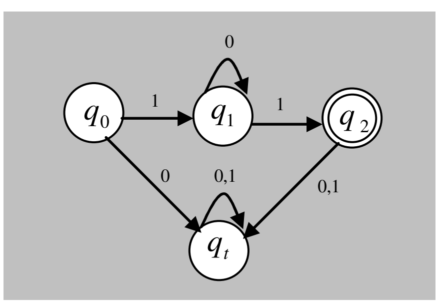
تمرینات اضافی:

1- اگر $l_1=\{10^*1\}, l_2=\{0^*10^*\}$ باشند نسبت $\frac{l_1}{l_2}$ را پیدا کند.

حل: ابتدا DFA مربوط به زبان l_1 را رسم می کنیم.

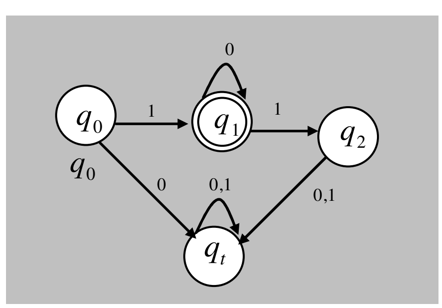


DFA معادل و بدون وضعیت پایانی



DFA مربوط به l_1

$\frac{l_1}{l_2}=$



$=10^*$

2-ابهام گرامر $G:\begin{cases}1.S\to aSb\\2.S\to \lambda\\3.S\to ab\end{cases}$ را نشان دهید.

جواب

$$S\xrightarrow{1}aSb\xrightarrow{2}ab$$
$$S\xrightarrow{3}ab$$

چون برای رشته ab دو اشتقاق چپ(یا راست) وجود دارد پس گرامر مبهم است.

3- ابهام گرامر $G:\begin{cases}1.S\to aSbS\\2.S\to bSaS\\3.S\to \lambda\end{cases}$ را نشان دهید

$$S\xrightarrow{1}aSbS\xrightarrow{2}abSaSbS\xrightarrow{3}abab$$
$$S\xrightarrow{1}aSbS\xrightarrow{3}abS\xrightarrow{1}abaSbS\xrightarrow{3}abab$$

چون برای رشته $abab$ دو اشتقاق چپ وجود دارد پس گرامر مبهم است.

4- ابهام گرامر $G:\begin{cases}1.S\to AaSbB\mid\lambda\\2.A\to Aa\mid a\\3.B\to bB\mid\lambda\end{cases}$ را نشان دهید

$$S\xrightarrow{1}AaSbB\xrightarrow{2}AaaSbB\xrightarrow{2}AaaaSbB\xrightarrow{2}aaaaSbB\xrightarrow{1}aaaabB\xrightarrow{3}aaaabbB\xrightarrow{3}aaaabb$$
$$S\xrightarrow{1}AaSbB\xrightarrow{2}aaSbB\xrightarrow{1}aaAaSbBbB\xrightarrow{2}aaaaSbBbB\xrightarrow{1}aaaabBbB\xrightarrow{3}aaaabb$$

چون برای رشته $aaaab$ دو اشتقاق چپ وجود دارد، پس گرامر مربوطه مبهم است.

5- ثابت کنید گرامر $G:\begin{cases}1.E\to E+E\\2.E\to E*E\\3.E\to (E)\\4.E\to a\mid b\end{cases}$ مبهم است.

$$E\xrightarrow{1}E+E\xrightarrow{2}E*E+E\xrightarrow{4}a*b+b$$
$$E\xrightarrow{2}E*E\xrightarrow{4}a*E\xrightarrow{1}a*E+E\xrightarrow{4}a*b+b$$

چون برای جمله $a*b+b$ دو اشتقاق چپ وجود دارد، پس گرامر مربوطه مبهم است.

6-گرامر زبان $l=\{w\in(0+1)^*\mid N_0(w)=N_1(w)\}$ را بنویسید:

جواب:

$S\to SS$
$S\to 0S1$
$S\to 1S0$
$S\to\lambda$

7-برای عبارت منظم $a^*b^*c^*$ یک گرامر منظم بنویسید.

جواب:

$S\to aS\mid bA\mid cB\mid\lambda$
$A\to bA\mid cB\mid\lambda$
$B\to cB\mid\lambda$

8- گرامر مستقل از متنی بنویسید که تولید کننده زبان $l=\{a^nb^mc^i\mid 0\le n+m\le i\}$ باشد.

جواب:

$S\to aSc\mid A$
$A\to bAc\mid B$
$B\to cB\mid\lambda$