بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمات حساب دیفرانسیل چند متغیره

مقدمات انتگرال دوگانه و سه گانه

محمد حسین مسلمی کوپایی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن

۶ فروردین ۱۴۰۰

عنوان مطالب:

۱. مفهوم انتگرال دو گانه، انتگرال دو گانه روی ناحیهٔ مستطیلی و ناحیهٔ قائم و افقی ساده، تغییر ترتیب انتگرال گیری، انتگرال دو گانه در مختصات قطبی، روش تغییر متغیر در انتگرال دوگانه؛

۲. مفهوم انتگرال سه گانه، کاربرد انتگرال سه گانه در تعیین حجم، مختصات کُروی، انتگرال سه گانه در مختصات کُروی، روش تغییر متغیر در انتگرال سه گانه؛

۳. مسایل نمونه

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

۱ بخش اول

مفهوم انتگرال دو گانه، کاربرد و روش های محاسبهٔ آن

ناحیهٔ بستهٔ D را در صفحهٔ xoy در نظر می گیریم. فرض کنیم تابع دو متغیره $f(x,y)$ در ناحیهٔ D پیوسته باشد. حال ناحیهٔ D را به n سطح جزئی مجزا تقسیم می کنیم و مساحت آنها و این سطوح تقسیم شده را ΔS_1 ، ΔS_2 ،...و ΔS_n می نامیم. یک نقطه مانند $M_i(x_i,y_i)$ درون یا روی سطح جزئیِ ΔS_i انتخاب می کنیم. اکنون مفدار $f(x_i,y_i)$ را محاسبه نموده در مقدار مساحت جزئی مربوطه یعنی ΔS_i ضرب می کنیم و حاصل جمع تمامی آنها را به دست می آوریم و آن را $\sum_n$ می نامیم. به عبارت دیگر

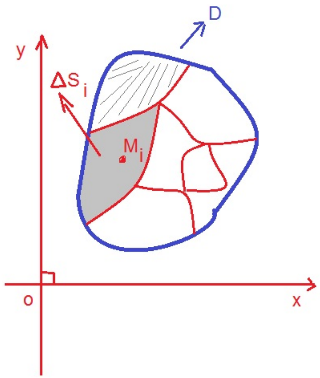
$$\sum_n = f(x_1,y_1)\,\Delta S_1 + f(x_2,y_2)\,\Delta S_2 + \cdots + f(x_n,y_n)\,\Delta S_n$$

اکنون تقسیم های دیگری را برای ناحیهٔ D در نظر می گیریم. به عبارت دیگر در تقسیم جدید، ΔS_i را کوچکتر و تعداد ناحیه ها تقسیم شده یعنی n را بزرگتر می کنیم و برای تابع $f(x,y)$ همانند بالا عمل می کنیم. در این صورت دنباله ای از مجموع حاصل جمع های به شرح زیر به دست می آید:

$$\sum_{n_1}, \sum_{n_2}, \cdots, \sum_{n_k}, \cdots$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱: نمایش ناحیهٔ بستهٔ D

هرگاه $n_k \to \infty$ ؛ ثابت می شود که دنبالهٔ $\{\sum_{n_i}\}$ به عدد حقیقی مانند s همگرا می باشد. مقدار s را انتگرالِ دو گانهٔ تابع $f(x,y)$ در ناحیهٔ D می نامیم و می نویسیم:

$$\int\int_D f(x,y)\, ds = \lim_{n_i \to \infty} \sum_{n_i} = s$$

ملاحظه

دو تابع پیوستهٔ دو متغیرهٔ f و g را روی ناحیهٔ بستهٔ D در نظر می گیریم. در این صورت

$$\iint_D \left(f(x,y)+g(x,y)\right)\, ds = \iint_D f(x,y)\, ds + \iint_D g(x,y)\, ds$$

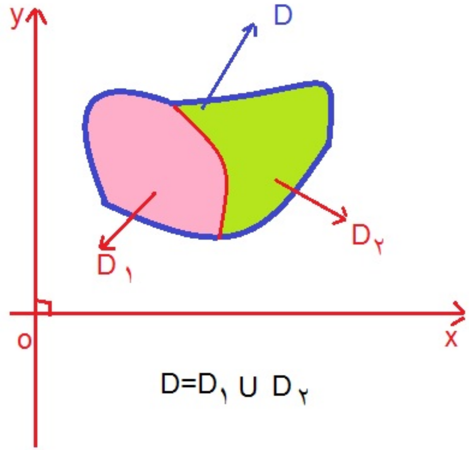
و اگر k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\iint_D k\, f(x,y)\, ds = k \iint_D f(x,y)\, ds$$

هرگاه ناحیهٔ D قابل بیان به صورت اجتماع دو ناحیهٔ D_1 و D_2 باشد به طوری که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند در این صورت

$$\iint_D f(x,y)\, ds = \iint_{D_1} f(x,y)\, ds + \iint_{D_2} f(x,y)\, ds$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۲: نمایش ناحیهٔ D که به صورت اجتماع دو ناحیه است.

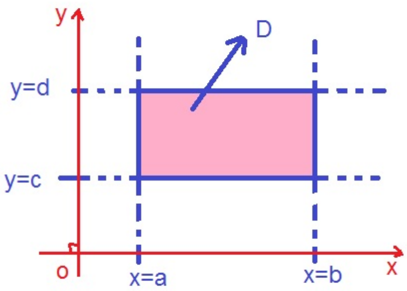
اکنون به محاسبهٔ انتگرال دو گانه روی سه ناحیه مختلف می پردازیم.

(۱) محاسبهٔ انتگرال دو گانه روی ناحیهٔ مستطیلی :

فرض کنیم ناحیهٔ D به صورت یک مستطیل به صورت زیر باشد.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۳: نمایش ناحیه مستطیلی

ناحیهٔ مستطیلی فوق به صورت $D : a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d$ می باشد. اگرتابع $f(x,y)$ روی ناحیهٔ D پیوسته باشد، در این صورت ثابت می شود که $ds = dx\,dy$ یا $ds = dy\,dx$ ؛ که در این دو حالت داریم:

$$(۱) \quad \iint_D f(x,y)\,ds = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

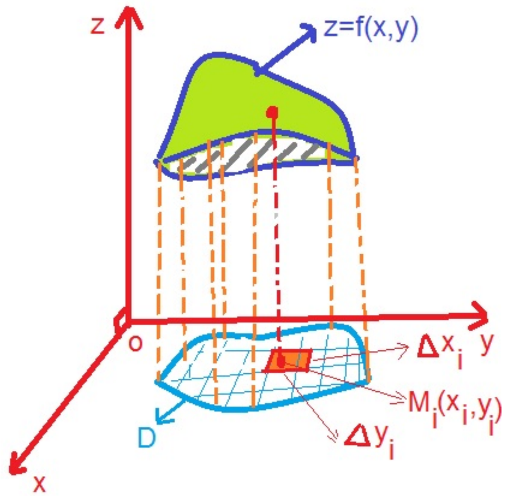
برای مخاسبهٔ انتگرال دو گانه در حالت (۱) ، ابتدا انتگرال $\int_a^b f(x,y)\,dx$ را محاسبه می کنیم. سپس از حاصل آن که تابعی بر حسب y می باشد، بر حسب y انتگرال می گیریم و مقدار معیّن آن از c تا d محاسبه می گردد.

$$(۲)\quad \int\int_D f(x,y)\,ds = \int\int_D f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

برای مخاسبهٔ انتگرال دو گانه در حالت (۲) ، ابتدا انتگرال $\int_c^d f(x,y)\,dy$ را محاسبه می کنیم. سپس از حاصل آن که تابعی بر حسب x می باشد، بر حسب x انتگرال می گیریم و مقدار معیّن آن از a تا b محاسبه می گردد.

تذکر

در واقع حاصل انتگرال دو گانه $\int\int_D f(x,y)\,ds$ ، حجم ناحیهٔ توپُر بین نمودار تابع f و ناحیهٔ D روی صفحهٔ xoy را به دست می دهد. ناحیهٔ D تصویر نمودار f در صفحهٔ xoy است.



شکل ۴: نمایش حجم ما بین نمودار تابع و ناحیهٔ D

لازم به یاد آوری است که برای محاسبهٔ انتگرال دو گانه، علاوه بر دانستن فرمول های مقدماتی انتگرال توابع یک متغیره ، از دو دستور زیر نیز استفاده می کنیم.

$$(۱)\quad ax^n \pm by^m \begin{cases} \overset{\text{انتگرال بر حسب } x}{=\!=} & a\dfrac{x^{n+۱}}{n+۱} \pm by^m\, x \\ \overset{\text{انتگرال بر حسب } y}{=\!=} & ax^n\, y \pm b\dfrac{y^{m+۱}}{m+۱} \end{cases}$$

$$(۲)\quad ax^n \cdot y^m \begin{cases} \overset{\text{انتگرال بر حسب } x}{=\!=} & a\dfrac{x^{n+۱}}{n+۱} \cdot y^m \\ \overset{\text{انتگرال بر حسب } y}{=\!=} & ax^n\, \dfrac{y^{m+۱}}{m+۱} \end{cases}$$

تذکر: چند فرمول مقدماتی انتگرال نامعّین زیر ، در محاسبهٔ انتگرال دو گانه استفاده بیشتری می شود.

$$(۱)\quad \int k\, dx = kx + c \qquad\qquad (۲)\quad \int ax^n\, dx = a\frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c \quad , \quad (n \neq -۱)$$

$$(۳)\quad \int \frac{۱}{x}\, dx = \int x^{-۱}\, dx = \ln|x| + c \qquad\qquad (۴)\quad \int u'\, u^m\, dx = \frac{u^{m+۱}}{m+۱} + c \quad , \quad (m \neq -۱)$$

$$(۵)\quad \int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + c \qquad\qquad (۶)\quad \int u'\, e^u\, dx = e^u + c$$

$$(۷)\quad \int e^{ax+b}\, dx = \frac{۱}{a}\, e^{ax+b} + c \qquad\qquad (۸)\quad \int \sin(ax)\, dx = -\frac{۱}{a}\cos(ax) + c$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

$$(۹)\quad \int \cos(ax)\, dx = \frac{۱}{a}\sin(ax) + c \qquad (۱۰)\quad \int \sin^{۲} ax\, dx = \int \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲ax\right) dx = \cdots$$

$$(۱۱)\quad \int \cos^{۲} ax\, dx = \int \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲ax\right) dx = \cdots$$

علاوه براین انتگرال معیّن طبق دستور زیر محاسبه می شود.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

که در آن $F(x)$ تابع اولیّه $f(x)$ می باشد که بر طبق فرمول های مقدماتی انتگرال محاسبه می شود.
اکنون با شرح چند مثال، به **محاسبهٔ انتگرال دو گانه روی نواحی مستطیلی** می پردازیم.

مثال: حاصل $\iint_D (x-y)\, ds$ که در آن $D: \ ۰ \leq x \leq ۱ \ , \ ۰ \leq y \leq ۲$ می باشد را بیابید.

حل: ناحیهٔ D ناحیه مستطیلی محدود به خطوط قائم $x=۰$ تا $x=۱$ و خطوط افقی $y=۰$ تا $y=۲$ می باشد. بنابراین هرگاه $ds = dx\, dy$ ، باشد؛ در این صورت برای محاسبهٔ انتگرال دو گانه می نویسیم:

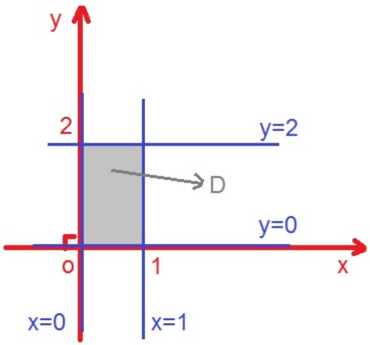
$$\iint_D (x-y)\, ds = \iint_D (x-y)\, dx\, dy = \int_۰^۲ dy \int_۰^۱ (x-y)\, dx$$

$$\int_۰^۲ dy \left[\frac{x^۲}{۲} - yx\right]_۰^۱ = \int_۰^۲ dy \left[\left(\frac{۱^۲}{۲} - y\right) - (۰-۰)\right] = \int_۰^۲ \left(\frac{۱}{۲} - y\right) dy$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}y - \frac{y^۲}{۲}\right]_۰^۲ = \left[\left(\frac{۱}{۲}(۲) - \frac{۲^۲}{۲}\right) - (۰-۰)\right] = [۱-۲] = -۱$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
مسایل نمونه



شکل ۵: نمایش ناحیهٔ مستطیلی

تذکر: اگر در مثال فوق، قرار دهیم: $ds = dy\ dx$ ؛ در این صورت حاصل انتگرال دو گانه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\int\int_D (x-y)\ ds = \int\int_D (x-y)\ dy\ dx = \int_۰^۱ dx \int_۰^۲ (x-y)\ dy$$

$$= \int_۰^۱ dx \left[xy - \frac{y^۲}{۲}\right]_۰^۲ = \int_۰^۱ dx \left[(۲x - \frac{۲^۲}{۲}) - (۰ - ۰)\right] = \int_۰^۱ (۲x - ۲)\ dx$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
مسایل نمونه

$$=\left[۲\frac{x^۲}{۲}-۲x\right]_۰^۱=\left[(۱^۲-۲)-(۰-۰)\right]=[۱-۲]=-۱$$

تذکر

با توجه به مثال قبل، هرگاه ds به صورت $ds = dx\ dy$ یا $ds = dy\ dx$ باشد، در این صورت با تغییر مناسب حدود انتگرال گیری، حاصل انتگرال دو گانه یکسان به دست می آید. به عبارت دیگر در ناحیهٔ مستطیلی $D\ :\ a \le x \le b\ ,\ \ c \le y \le d$ ، هرگاه تابع f روی D پیوسته باشد، در این صورت

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx$$

مثال : حاصل انتگرال دوگانه $\int_{-۱}^{۲}\int_{۰}^{۲} xy\ dx\ dy$ را بیابید.

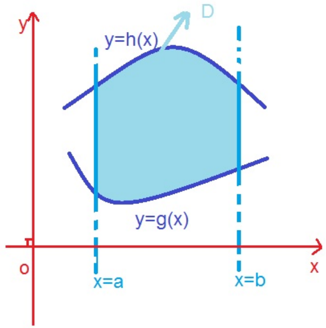
حل: در این مثال ترتیب انتگرال گیری مشخص شده است، لذا بنابه آنچه بیان شد می نویسیم:

$$\int_{-۱}^{۲}\int_{۰}^{۲} xy\ dx\ dy = \int_{-۱}^{۲} dy \int_{۰}^{۲} xy\ dx = \int_{-۱}^{۲} dy\ \left[\frac{x^۲}{۲}\ y\right]_۰^۲$$

$$=\int_{-۱}^{۲} dy\ \left[\frac{۲^۲}{۲}\ y-\frac{۰^۲}{۲}\ y\right]=\int_{-۱}^{۲} ۲y\ dy=[y^۲]_{-۱}^{۲}=[۲^۲-(-۱)^۲]=۳$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

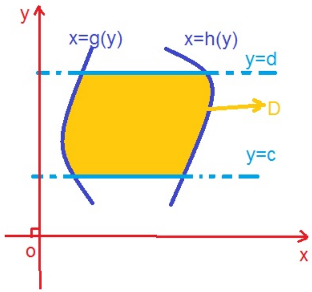


شکل ۶: نمایش ناحیهٔ قائم ساده

(۲) محاسبهٔ انتگرال دوگانه روی ناحیهٔ قائم ساده :

فرض کنیم ناحیهٔ D (قائم ساده) محدود به خطوط قائم $x=a$ تا $x=b$ و منحنی های $y=g(x)$ تا $y=h(x)$ بطوری که تابع $f(x,y)$ در ناحیهٔ D پیوسته باشد. در این صورت انتگرال دو گانهٔ f روی ناحیهٔ D که حجم سطح محدود به ناحیهٔ D از پایین تا نمودار تابع f از بالا می باشد، مطابق دستور زیر به دست می آید.

$$v=\int\int_D f(x,y)\,ds=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

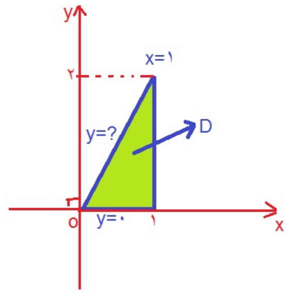


شکل ۷: ناحیهٔ افقی ساده

(۳) محاسبهٔ انتگرال دو گانه روی ناحیهٔ افقی ساده:

فرض کنیم ناحیهٔ D (افقی ساده) محدود به خطوط افقی $y = c$ تا $y = d$ و منحنی های $x = g(y)$ تا $x = h(y)$ بطوری که تابع $f(x, y)$ در ناحیهٔ D پیوسته باشد. در این صورت انتگرال دو گانهٔ f روی ناحیهٔ D که حجم سطح محدود به ناحیهٔ D از پایین تا نمودار تابع f از بالا می باشد، مطابق دستور زیر به دست می آید.

$$v = \int\int_D f(x, y)\, ds = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx$$



شکل ۸: نمایش ناحیهٔ مثلثی

مثال

حاصل انتگرال دوگانهٔ $\int\int_D (x^2+y^2)\, ds$ را روی ناحیهٔ مثلثی شکل فوق بیابید.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

حل: مطابق شکل فوق ناحیهٔ D محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 1$ و منحنی های $y = 0$ از پایین و $y = ?$ از بالا می باشد. در واقع منحنی بالایی پاره خطی است که از دو نقطهٔ $(0, 0)$ و $(1, 2)$ می گذرد. لذا معادلهٔ خطی است که از دستور زیر به دست می آید.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad , \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2 \quad \rightsquigarrow \quad y - 0 = 2(x - 0) \quad \rightsquigarrow \quad y = 2x$$

اکنون بنابر دستور (۲)، در محاسبهٔ انتگرال دوگانه در ناحیهٔ قائم ساده، می نویسیم:

$$\int\int_D (x^2 + y^2)\, ds = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=2x} (x^2 + y^2)\, dy = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2x}$$

$$= \int_0^1 dx \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - (0 + 0)\right] = \int_0^1 (2x^3 + \frac{8}{3}x^3)\, dx = \int_0^1 \frac{14}{3}x^3\, dx = \frac{14}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{14}{12}$$

مثال

حاصل انتگرال دوگانهٔ $\int\int_D 2xy\, ds$ روی ناحیهٔ D مطابق شکل زیررا بیابید.

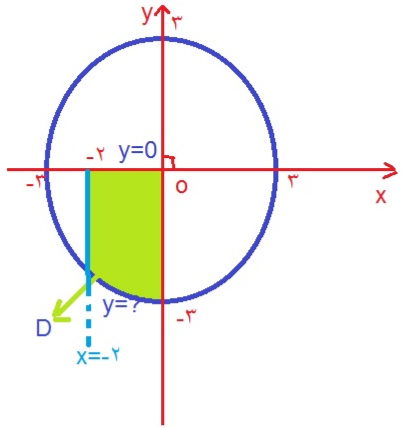
ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

مسایل نمونه



شکل ۹: نمایش ناحیهٔ D بخشی ازدایره

واحد رودهن
ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

حل: مطابق شکل فوق ناحیهٔ D محدود به خطوط $x = -۲$ و $x = ۰$ و منحنی های $y = g(x) =?$ از پایین و $y = ۰$ از بالا می باشد. برای یافتن g که قسمتی از نیم دایرهٔ پایینی دایره به مرکز مبدأ و شعاع معلوم $r = ۳$ ، یعنی $x^۲ + y^۲ = ۹$ می باشد، می نویسیم:

$$y^۲ = ۹ - x^۲ \quad \rightsquigarrow \quad y = \pm\sqrt{۹ - x^۲} \quad \rightsquigarrow \quad y = -\sqrt{۹ - x^۲}$$

بنابراین منحنی $g(x)$ همان معادلهٔ دکارتی نیم دایرهٔ پایینی است. پس حاصل انتگرال دو گانه به صورت زیر به دست می آید.

$$\iint_D 2xy\, ds = \int_{-2}^{0} dx \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{y=0} 2xy\, dy = \int_{-2}^{0} dx \left[2x\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}$$

$$= \int_{-2}^{0} dx \left[x(0) - x(-\sqrt{9-x^2})^2\right] = \int_{-2}^{0} (-9x + x^3)\, dx$$

$$= \left[-9\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = \left[0 - (-9\frac{4}{2} + \frac{(-2)^4}{4})\right] = 18 - 4 = 14$$

ملاحظه

تغییر ترتیب انتگرال گیری دوگانه

برای محاسبهٔ انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\, ds$ که در آن D ناحیهٔ قائم یا افقی ساده باشد و $ds =$ $dx\, dy$ یا $ds = dy\, dx$ را در نظر بگیریم، ممکن است در محاسبهٔ انتگرال داخلی مثلاً ، یکی از انتگرال های $\int f(x,y)\, dx$ یا $\int f(x,y)\, dy$ بر طبق فرمو ل های مقدماتی انتگرال نامعّین قابل محاسبه نباشد. در این صورت با تغییر ترتیب انتگرال گیری و در نتیجه تغییر حدود انتگرال ها، انتگرال f بر حسب x یا y قابل محاسبه می شود و از آنجا انتگرال دوگانه محاسبه می گردد.

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

حاصل انتگرال دوگانهٔ $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}dxdy$ را با تغییر ترتیب انتگرال گیری حل کنید.

حل: ابتدا مطابق با روش های بیان شده در محاسبهٔ انتگرال دوگانه، می نوان بنویسیم:

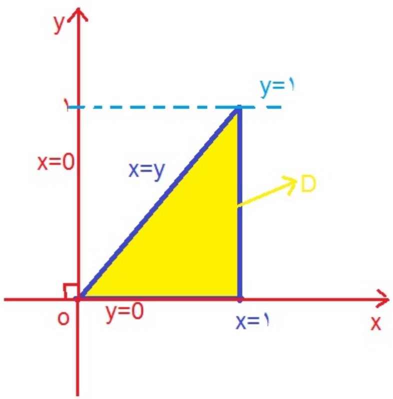
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$$

اما انتگرال داخلی $\int_y^1 e^{x^2} dx$ ، بر طبق فرمول ها قابل محاسبه نیست. بنابراین ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم. داریم:

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx = \int_?^? dx \int_?^? e^{x^2} dy$$

اکنون باید حدود انتگرال دو گانهٔ فوق را تعیین کنیم. برای این منظور شکل ناحیهٔ D را رسم می کنیم.

$$D: \ 0 \leq y \leq 1 \quad , \quad y \leq x \leq 1$$



شکل ۱۰: نمایش ناحیهٔ مثلثی D

بنابراین با توجه شکل فوق، می توان حدود زیر را برای ناحیهٔ D در نظر گرفت.

$$D : x = ۰ \quad \text{تا} \quad x = ۱ \quad , \quad y = ۰ \quad \text{تا} \quad y = x$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
مسایل نمونه

لذا با قرار دادن حدود در انتگرال دوگانه، داریم:

$$\int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=0}^{y=x} e^{x^2} dy = \int_0^1 dx \left[e^{x^2} y\right]_0^x = \int_0^1 \left[x e^{x^2} - 0\, e^{x^2}\right] dx$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'}\, e^{\overbrace{x^2}^{u}}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

مثال

حاصل انتگرال دوگانهٔ $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$ را با تغییر ترتیب انتگرال گیری حل کنید.

حل: ابتدا مطابق با روش های بیان شده در محاسبهٔ انتگرال دوگانه، می توان بنویسیم:

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

اما انتگرال داخلی $\int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ، بر طبق فرمول ها قابل محاسبه نیست. بنابراین ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم. داریم:

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_?^? dx \int_?^? \frac{\sin x}{x} dy$$

اکنون باید حدود انتگرال دو گانهٔ فوق را تعیین کنیم. برای این منظور شکل ناحیهٔ D را رسم می کنیم. این ناحیه همان ناحیهٔ مثال قبل است، لذا با تعویض ترتیب انتگرال گیری می توان چنین نوشت:

$$\int_{۰}^{۱} dx \int_{۰}^{x} \frac{\sin x}{x} dy = \int_{۰}^{۱} dx \left[\frac{\sin x}{x} y\right]_{۰}^{x}$$

$$= \int_{۰}^{۱} \left[\frac{\sin x}{x} x - \frac{\sin x}{x} ۰\right] = \int_{۰}^{۱} \sin x \, dx$$

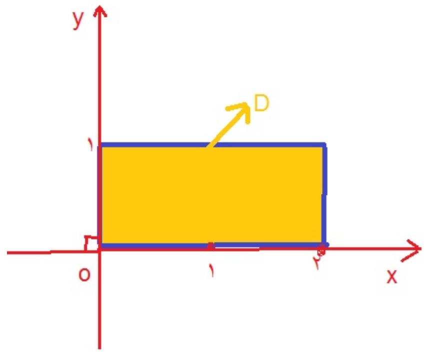
$$= \left[-\cos x\right]_{۰}^{۱} = -\cos ۱ + ۱$$

مثال

حجم جسم محدود به صفحات $z = x + y + ۱$ ، $x = ۲$ و $y = ۱$ و صفحات مختصات رابیابید.

حل: ناحیهٔ D که روی صفحهٔ xoy تشکیل می شود، مستطیلی است بین خطوط $x = ۰$ تا $x = ۲$ و $y = ۰$ تا $y = ۱$ ؛ حجم خواسته شده در واقع حجم ناحیهٔ توپُر مابین ناحیهٔ مستطیلی D از پایین و صفحهٔ $z = x + y + ۱$ از بالاست. لذا حجم، طبق تعریف انتگرال دوگانه برابر است:

$$V = \iint_D z \, ds = \int_{۰}^{۲} dx \int_{۰}^{۱} (x + y + ۱) dy = \int_{۰}^{۲} dx \left[xy + \frac{y^۲}{۲} + y\right]_{۰}^{۱}$$

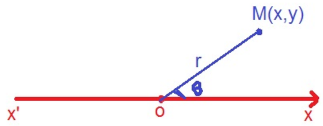


شکل ۱۱: نمایش ناحیهٔ مستطیلی D

$$= \int_{۰}^{۲} dx \left[x + \frac{۱}{۲} + ۱ - ۰\right] = \int_{۰}^{۲} (x + \frac{۳}{۲})dx = \left[\frac{x^{۲}}{۲} + \frac{۳}{۲}x\right]_{۰}^{۲} = \left[\frac{۲^{۲}}{۲} + \frac{۳}{۲}(۲) - ۰\right] = ۲ + ۳ = ۵$$

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی



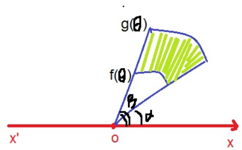
شکل ۱۲: نمایش محور قطبی

ملاحظه

مختصات قطبی

لازم به یادآوری است که محور افقی $x'ox$ را محور قطبی می نامیم. هرگاه $M(x,y)$ یک نقطه در صفحه ، که فاصلهٔ آن از مبدأ o ، r و زاویهٔ oM با محور ox را θ باشد، در این صورت

$$x = r\ \cos\theta \quad , \quad y = r\ \sin\theta \quad , \quad x^۲ + y^۲ = r^۲ \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



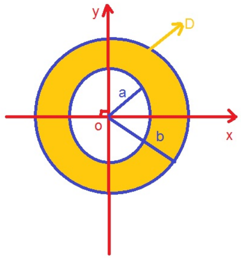
شکل ۱۳: ناحیهٔ قطبی بین دو تابع

ملاحظه

انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

در محاسبهٔ $\int\int_D f(x,y)\ ds$ هنگامی که ناحیهٔ D تمام دایره یا بین دو دایره یا بخشی از دایره باشد و تابع f دارای عبارت x^2+y^2 یا توانی ازآن باشد. در این صورت برای حل انتگرال دو گانه از تغییر مختصات قطبی استفاده می کنیم. به عبارت دیگر فرض کنیم دو تابع قطبی $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ ناحیهٔ محدود D را مطابق شکل زیر مشخص کرده باشد. هرگاه تابع f بر ناحیهٔ D پیوسته باشد، آنگاه

$$\int\int_D f(x,y)\ ds=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{f(\theta)}^{g(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ r dr$$



شکل ۱۴: نمایش بین دو دایره

لازم به ذکر است، هرگاه ناحیهٔ D محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ باشد، در این صورت مطابق دستور زیر حاصل انتگرال دوگانه $\int\int_D f(x,y)\,ds$ به دست می آید.

$$\int\int_D f(x,y)\,ds=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$$

و هرگاه ناحیهٔ D محدود به دو دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=b^2$ باشد،به طوری که $a<b$. در این صورت انتگرال دو گانهٔ تابع f روی ناحیهٔ بین دو دایره، در مختصات قطبی به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\int\int_{D\,:a^2\leq x^2+y^2\leq b^2} f(x,y)\,ds=\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$$

ارائه دهنده:

محمد حسین
مسلمی کوپایی

مثال

حاصل انتگرال های دوگانهٔ زیر را به کمک مختصات قطبی به دست آورید.

$$(۱)\quad \iint_{D:\ x^۲+y^۲\leq ۱} \sqrt{x^۲+y^۲}\, ds$$

حل : ناحیهٔ D درون و روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع $a=۱$ می باشد. طبق دستور تغییر مختصات قطبی می نویسیم:

$$\iint_{D:\ x^۲+y^۲\leq ۱} \sqrt{x^۲+y^۲}\, ds = \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^۱ \underbrace{\sqrt{x^۲+y^۲}}_{r}\, r\, dr = \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^۱ r^۲\, dr$$

$$= \int_۰^{۲\pi} d\theta \Big[\frac{r^۳}{۳}\Big]_۰^۱ = \int_۰^{۲\pi} \frac{۱}{۳}\, d\theta = \frac{۱}{۳}\Big[\theta\Big]_۰^{۲\pi} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$(۲)\quad \iint_{D:\ ۴\leq x^۲+y^۲\leq ۹} e^{x^۲+y^۲}\, ds$$

حل: ناحیهٔ D محدود به دوایر، به ترتیب به مرکز مبدأ و شعاع های $a=۲$ و $a=۳$ می باشد، بنابراین

$$\iint_{D:\ ۴\leq x^۲+y^۲\leq ۹} e^{x^۲+y^۲}\, ds = \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۲^۳ e^{r^۲} r\, dr = \int_۰^{۲\pi} d\theta\, \frac{۱}{۲} \int_۲^۳ \underbrace{۲r}_{u'} e^{\overbrace{r^۲}^{u}}\, dr$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{2}^{3} = \int_{0}^{2\pi} (\frac{1}{2}e^{9} - \frac{1}{2}e^{4})\ d\theta = \frac{e^{9}-e^{4}}{2}\ \left[\theta\right]_{0}^{2\pi} = (e^{9}-e^{4})\pi$$

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dydx \qquad (3)$$

حل: با توجه به حدود انتگرال دوگانه ، ناحیهٔ D در صفحهٔ xoy بین خطوط $x = 0$ تا $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و منحنی های $y = x$ تا $y = \sqrt{1-x^2}$ می باشد. با رسم ناحیهٔ D در صفحه و تغییر مختصات قطبی و قرار دادن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ خواهیم داشت:

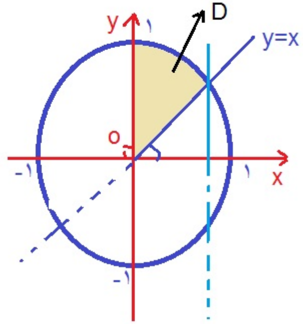
$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dydx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{1} (r\cos\theta)(r\sin\theta)\ r\ dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_{0}^{1} r^{3}\ dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{16}[\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{16}$$

ارائه دهنده:

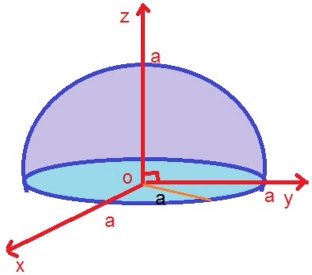
محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۱۵: نمایش ناحیه D

مثال

حجم کُره به مرکز مبدأ وشعاع a را با استفاده از انتگرال دوگانه به دست آورید.



شکل ۱۶: نمایش نیم کُره بالایی

حل: بر طبق تعریف انتگرال دو گانه، حجم نیم کُره بالایی به معادلهٔ دکارتی $z=\sqrt{a^{۲}-(x^{۲}+y^{۲})}$ و ناحیهٔ D در صفحهٔ xoy به معادلهٔ دکارتی $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ ، طبق فرمول زیر محاسبه می شود.

$$V_{\text{حجم نیم کُره بالایی}}=\iint_{D:\ x^{۲}+y^{۲}\leq a^{۲}} z\,ds=\iint_{D:\ x^{۲}+y^{۲}\leq a^{۲}} \sqrt{a^{۲}-(x^{۲}+y^{۲})}\,ds$$

حال بنا به مختصات قطبی می نویسیم:

$$V=\int_{۰}^{۲\pi} d\theta \int_{۰}^{a} \sqrt{a^{۲}-\underbrace{(x^{۲}+y^{۲})}_{r^{۲}}}\; r\,dr=\int_{۰}^{۲\pi} d\theta \int_{۰}^{a} r\sqrt{a^{۲}-r^{۲}}\,dr$$

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی
بخش اول
بخش دوم
مسایل نمونه

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \, (-\frac{1}{2}) \int_0^a (\underbrace{-2r}_{u'}) \, (\underbrace{a^2 - r^2}_{u})^{\frac{1}{2}} \, dr = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left[0 - \frac{(a^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3} a^3 d\theta = \frac{1}{3} a^3 \, [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \pi a^3$$

اکنون با دو برابر کردن حجم نیم کُره بالایی، حجم کل کُره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به دست می آید. به عبارت دیگر

$$\text{حجم کل کُره } V = 2 \, (\text{حجم نیم کُره}) = 2 \, (\frac{2}{3} \pi a^3) = \frac{4}{3} \pi \, a^3$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

ملاحظه

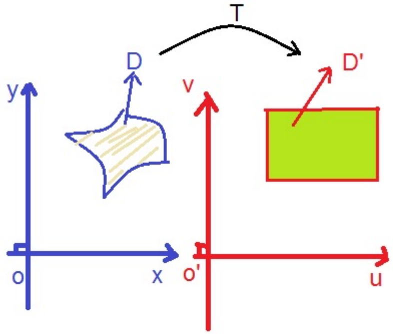
روش تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

ناحیه های D و D' را به ترتیب در صفحات مختصاتی xoy و $uo'v$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم تابع T از D به D' به صورت $\begin{cases} x = h(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$ باشد که در آن توابع h و g دارای مشتقات جزئی پیوسته بوده، در این صورت با این تغییر متغیر انتگرال دوگانه $\int\int_D f(x,y)\ ds$ در ناحیهٔ D' به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int\int_D f(x,y)\ ds = \int\int_{D'} f\big(h(u,v), g(u,v)\big)\ |J|\ ds'$$

که در آن J را ژاکوبین تغییر متغیر می نامیم و مطابق دستور زیر محاسبه می شود.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$



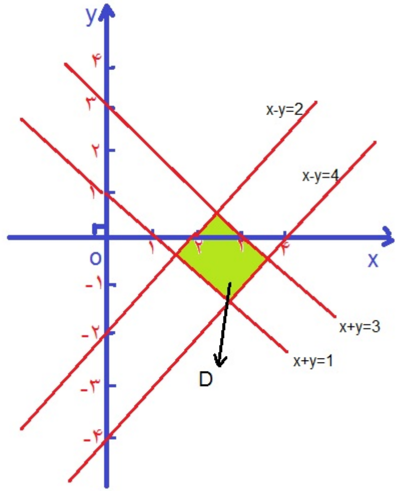
شکل ۱۷ : نمایش ناحیهٔ D که با تبدیل T به ناحیهٔ D' تبدیل می شود.

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول
بخش دوم
مسایل نمونه

مثال

حاصل انتگرال دو گانهٔ $\int\int_D xy\ ds$ را بیابید به طوری که ناحیهٔ D محصور به خطوط $x+y=۱$ ، $x+y=۳$ ، $x-y=۲$ و $x-y=۴$ می باشد.



شکل ۱۸: نمایش ناحیهٔ محدود به چهار خط در صفحه

حل: ابتدا ناحیهٔ D را در صفحهٔ xoy (مطابق شکل فوق) رسم می کنیم. در واقع خطوط زیر با انتخاب $x = 0$ یا $y = 0$ در آن ها و تعیین دو نقطه از خط، رسم می شوند.

$$x+y=1 \rightsquigarrow \begin{array}{|l} 0 \\ 1 \end{array} \ , \ \begin{array}{|l} 1 \\ 0 \end{array} \qquad\qquad x+y=3 \rightsquigarrow \begin{array}{|l} 3 \\ 0 \end{array} \ , \ \begin{array}{|l} 0 \\ 3 \end{array}$$

$$x-y=2 \rightsquigarrow \begin{array}{|l} 2 \\ 0 \end{array} \ , \ \begin{array}{|l} 0 \\ -2 \end{array} \qquad\qquad x-y=4 \rightsquigarrow \begin{array}{|l} 4 \\ 0 \end{array} \ , \ \begin{array}{|l} 0 \\ -4 \end{array}$$

اکنون تغییر متغیر $x+y=u$ و $x-y=v$ را در نظر می گیریم. می نویسیم:

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \rightsquigarrow \quad 2x=u+v \quad \rightsquigarrow \quad x=\frac{1}{2}(u+v)$$

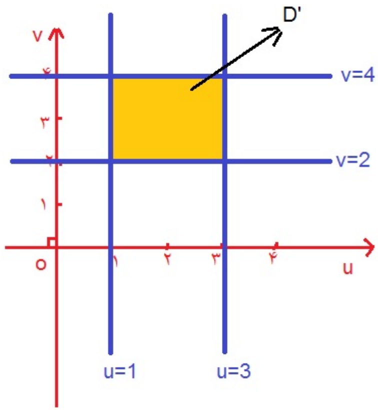
از طرفی $x+y=u$ ، لذا $\frac{1}{2}(u+v)+y=u$. بنابراین $y=u-\frac{1}{2}(u+v)$ ، پس $y=\frac{1}{2}(u-v)$. ژاکوبین این تغییر مختصات برابر است با:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

اکنون ناحیهٔ جدید D' را می یابیم.

$$\underbrace{x+y}_{u}=1 \quad \rightsquigarrow \quad u=1 \qquad\qquad \underbrace{x+y}_{u}=3 \quad \rightsquigarrow \quad u=3$$

$$\underbrace{x-y}_{v}=2 \quad \rightsquigarrow \quad v=2 \qquad\qquad \underbrace{x-y}_{v}=4 \quad \rightsquigarrow \quad v=4$$



شکل ۱۹: نمایش ناحیهٔ مستطیلی D'

با توجه به شکل ناحیهٔ D' ، انتگرال گیری روی ناحیهٔ متوازی الاضلاع D ، با تغییر متغیر فوق، تبدیل به انتگرال گیری روی ناحیهٔ مستطیلی D' شده؛ بنابراین حاصل انتگرال دوگانه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\int\int_D xy\, ds = \int_{u=1}^{u=3} du \int_{v=2}^{v=4} xy\,|J|\,dv = \int_1^3 du \int_2^4 \frac{1}{2}(u+v)\,\frac{1}{2}(u-v)\,\left|-\frac{1}{2}\right|\,dv$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^3 du\int_2^4 (u^2-v^2)\,dv = \frac{1}{8}\int_1^3 du\left[u^2 v - \frac{v^3}{3}\right]_2^4$$

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی

$$= \frac{1}{8}\int_{1}^{3} du\left[(4u^2-\frac{4^3}{3})-(2u^2-\frac{2^3}{3})\right]=\frac{1}{8}\int_{1}^{3}(2u^2-\frac{56}{3})\,du$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\frac{u^3}{3}-\frac{56}{3}u\right]_{1}^{3}=\frac{1}{8}(18-56+\frac{54}{3})=\frac{1}{8}(\frac{-114+54}{3}\cdot=\frac{1}{8}(-\frac{60}{3})=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2}$$

مثال

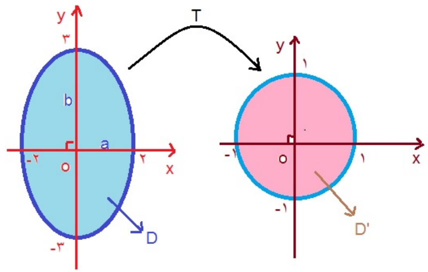
حاصل انتگرال دوگانهٔ $\int\int_D x\,ds$ را که ناحیهٔ D محدود به بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ است، را بیابید.

حل : ناحیهٔ D ، بیضی قائم $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ می باشد که $a=2$ و $b=3$. برای محاسبه انتگرال دوگانه ، تغییر متغیر $u=\frac{x}{2}$ و $v=\frac{y}{3}$ را در نظر می گیریم. با این تغییر متغیر، ناحیل جدید D' به صورت زیر به دست می آید.

$$(\underbrace{\frac{x}{2}}_{u})^2+(\underbrace{\frac{y}{3}}_{v})^2=1 \quad \rightsquigarrow \quad u^2+v^2=1$$

ناحیهٔ D' دایره به مرکز مبدأ وشعاع1 $r=$ می باشد. اکنون ژاکوبین این تبدیل را می یابیم. چون $x=2u$ و $y=3v$ ؛ لذا

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$$



شکل ۲۰: نمایش ناحیهٔ بیضی که به ناحیهٔ دایره ای تبدیل می شود.

بنابراین

$$\iint_D x\,ds = \iint_{D'\,:\,u^۲+v^۲=۱} x\,|J|\,ds' = \iint_{D'} (۲u)\,(۶)\,ds'$$

برای محاسبهٔ انتگرال دوگانه روی ناحیهٔ D' ، مختصات قطبی را بکار می بریم. می نویسیم:

$$\iint_{D'\,:\,u^۲+v^۲\leq ۱} ۱۲u\,ds' = \int_۰^{۲\pi}\int_{r=۰}^{r=۱} ۱۲(\underbrace{r\cos\theta}_{u})\,r\,dr = ۱۲\int_۰^{۲\pi}\cos\theta\,d\theta\int_۰^۱ r^۲\,dr$$

$$= ۱۲\int_۰^{۲\pi}\cos\theta\,d\theta\left[\frac{r^۳}{۳}\right]_۰^۱ = \frac{۱۲}{۳}\int_۰^{۲\pi}\cos\theta\,d\theta = ۴\,[\sin\theta]_۰^{۲\pi} = ۴(\sin ۲\pi - \sin ۰) = ۰$$

ارائه دهنده:
محمد حسین
مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

مسایل نمونه

تذکر

فرض کنیم D یک ناحیهٔ قائم یا افقی ساده باشد، در این صورت مساحت ناحیهٔ D از دستور زیر محاسبه می گردد.

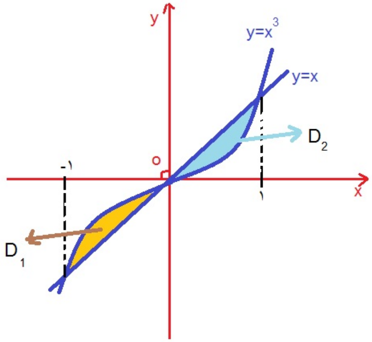
$$S_D = \int\int_D ۱\ ds$$

هم چنین برای دو تابع پیوستهٔ $f(x,y)$ و $g(x,y)$ روی ناحیهٔ D که $f(x,y) \leq g(x,y)$ می باشد، نامساوی زیر برقرار است.

$$\int\int_D f(x,y)\ ds \leq \int\int_D g(x,y)\ ds$$

و برای تابع پیوستهٔ $f(x,y)$ روی ناحیهٔ D ، نامساوی زیر برقرار می باشد.

$$\left|\int\int_D f(x,y)\ ds\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|\ ds$$



شکل ۲۱: نمایش ناحیهٔ بین دو تابع $y = x$ و $y = x^۳$

مثال

حاصل انتگرال دو گانهٔ $\int\int_D (x - y)\, ds$ روی ناحیهٔ D بین منحنی های $y = x$ و $y = x^۳$ در صفحهٔ xoy را بیابید و سپس مساحت ناحیهٔ D را به دست آورید.

حل:

ناحیهٔ D مطابق شکل فوق به دو ناحیهٔ مجزای $D_۱$ و $D_۲$ تقسیم شده است که ناحیهٔ قائم سادهٔ $D_۱$ بین خطوط $x = -۱$ تا $x = ۰$ و منحنی های $y = x$ تا $y = x^۳$ می باشد و ناحیهٔ قائم سادهٔ $D_۲$ بین خطوط

$x = ۰$ تا $x = ۱$ و منحنی های $y = x^۳$ تا $y = x$ قرار دارد. بنابر خاصیت انتگرال دوگانه می نویسیم:

$$\iint_{D=D_۱\cup D_۲} (x-y)\,ds = \iint_{D_۱} (x-y)\,ds + \iint_{D_۲} (x-y)\,ds$$

اکنون انتگرال های دو گانه روی نواحی $D_۱$ و $D_۲$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\iint_{D_۱} (x-y)\,ds = \int_{-۱}^{۰} dx \int_{x}^{x^۳} (x-y)\,dy = \int_{-۱}^{۰} dx \left[xy - \frac{y^۲}{۲}\right]_{y=x}^{y=x^۳}$$

$$= \int_{-۱}^{۰} \left(x^۴ - \frac{x^۶}{۲} - x^۲ + \frac{x^۲}{۲}\right) dx = \int_{-۱}^{۰} \left(x^۴ - \frac{x^۶}{۲} - \frac{x^۲}{۲}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^۵}{۵} - \frac{۱}{۲}\frac{x^۷}{۷} - \frac{۱}{۲}\frac{x^۳}{۳}\right]_{-۱}^{۰} = \left[۰ - \left(-\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۶}\right)\right] = -\frac{۴}{۱۰۵}$$

$$\iint_{D_۲} (x-y)\,ds = \int_{۰}^{۱} dx \int_{x^۳}^{x} (x-y)\,dy = \int_{۰}^{۱} dx \left[xy - \frac{y^۲}{۲}\right]_{y=x^۳}^{y=x}$$

$$= \int_{۰}^{۱} \left[\left(x^۲ - \frac{x^۲}{۲}\right) - \left(x^۴ - \frac{x^۶}{۲}\right)\right] dx = \int_{۰}^{۱} \left(\frac{x^۲}{۲} - x^۴ + \frac{x^۶}{۲}\right) dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}\frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۵}{۴} + \frac{۱}{۲}\frac{x^۷}{۷}\right]_{۰}^{۱} = \left[\frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۱۴}\right] = \frac{۴}{۱۰۵}$$

اکنون مساحت دو ناحیهٔ را می یابیم.

$$S_{D_1} = \iint_{D_1} 1 \, ds = \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{x^3} 1 \, dy = \int_{-1}^{0} dx \, \Big[y\Big]_{x}^{x^3}$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x) \, dx = \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$S_{D_2} = \iint_{D_2} 1 \, ds = \int_{0}^{1} dx \int_{x^3}^{x} 1 \, dy = \int_{0}^{1} dx \, \Big[y\Big]_{x^3}^{x}$$

$$= \int_{0}^{1} (x - x^3) \, dx = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big]_{0}^{1} = \Big|(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) - 0\Big| = \Big| - \frac{1}{2}\Big| = \frac{1}{2}$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ D برابر است:

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ارائه دهنده:
محمد حسین مسلمی کوپایی

۲ بخش دوم

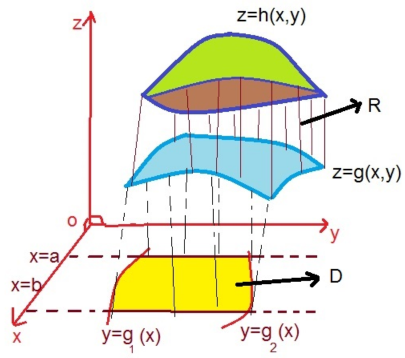
مفهوم انتگرال سه گانه، کاربرد و رو ش های محاسبهٔ آن

تعریف

انتگرال سه گانه

فرض کنیم R ناحیه بین دو نمودار تابع پیوسته $z = g(x,y)$ و $z = h(x,y)$ باشد به طوری که تصویر این ناحیه، سطح D در صفحهٔ xoy شود و تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)$ در R پیوسته باشد. در این صورت انتگرال سه گانهٔ تابع f روی R به صورت زیر به دست می آید.

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\ dv = \int\int_D \Big(\int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x,y,z)\ dz\Big)\ ds$$



شکل ۲۲: نمایش انتگرال سه گانهٔ تابع f روی ناحیهٔ R

هرگاه ناحیهٔ D ناحیه ای قائم ساده بین خطوط $x=a$ و $x=b$ و منحنی های $y=g_۱(x)$ و $y=g_۲(x)$ باشد، انتگرال دو گانه روی ناحیهٔ D محاسبه می شود. در این صورت انتگرال سه گانه روی R به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\,dv=\int_a^b\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)}\int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_a^b dx\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} dy\int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

لازم به ذکر است برای محاسبهٔ انتگرال سه گانهٔ فوق ، ابتدا حاصل $\int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ را محاسبه می کنیم. به عبارت دیگر از تابع f برحسب z انتگرال می گیریم. سپس از حاصل آن بر حسب y انتگرال گرفته و مقدار معّین آن را از $g_1(x)$ تا $g_2(x)$ به دست می آوریم و از مقدار به دست آمده که تابعی برحسب x می باشد، انتگرال معّین از a تا b می گیریم.

تذکر

هرگاه R ناحیهٔ ما بین نمودار های $g(x,y)$ و $h(x,y)$ باشد، **حجم ناحیهٔ** R از دستور زیر به دست می آید.

$$V = \iiint_R 1\,dv = \iint_D \left(\int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} 1\,dz \right) ds$$

مثال: حاصل انتگرال سه گانهٔ $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_1^2 (x+yz)\,dz\,dy\,dx$ را به دست آورید.

حل: با توجه به این که ترتیب انتگرال گیری مشخص شده ، لذا می نویسیم:

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_1^2 (x+yz)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_1^2 (x+yz)\,dz$$

اکنون برای حل انتگرال ، ابتدا حاصل $\int_{1}^{2} (x+yz)\, dz$ را به دست می آوریم. در ادامه داریم:

$$= \int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \left[xz + y\frac{z^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= \int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \left[(x2 + y\frac{2^2}{2}) - (x + y\frac{1^2}{2})\right] = \int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{1} (x + \frac{3}{2}y)\, dy$$

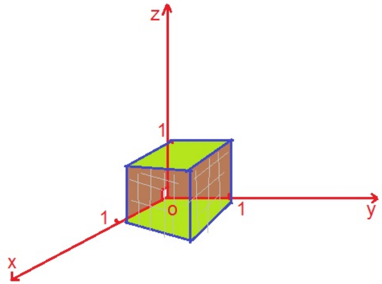
$$= \int_{0}^{1} dx \left[xy + \frac{3}{2}\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \int_{0}^{1} dx \left[(x + \frac{3}{2}\frac{1^2}{2}) - (-x + \frac{3}{2}\frac{(-1)^2}{2})\right]$$

$$= \int_{0}^{1} 2x\, dx = \left[x^2\right]_{0}^{1} = 1^2 - 0 = 1$$

مثال

حاصل انتگرال سه گانهٔ $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\, dv$ که R جعبه واحد محدود به صفحات $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، $y=1$ ، $z=0$ و $z=1$ می باشد را محاسبه کنید.

حل : با توجه به این که ناحیهٔ R به صورت $0 \le z \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le 1$ می باشد. حاصل انتگرال سه گانه با انتگرال گیری به ترتیب برحسب z ، y و x به صورت زیر محاسبه می شود.

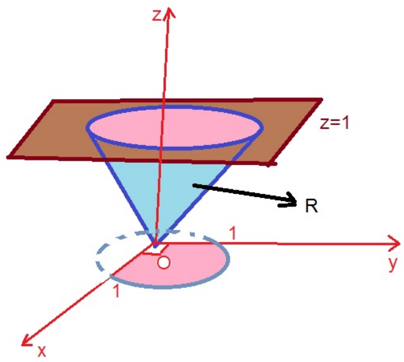


شکل ۲۳: نمایش جعبهٔ واحد در فضای سه بعدی

$$\iiint_R (x^۲+y^۲+z^۲)\,dv=\int_۰^۱ dx\int_۰^۱ dy\int_۰^۱ (x^۲+y^۲+z^۲)\,dz$$

$$=\int_۰^۱ dx\int_۰^۱ dy\left[x^۲z+y^۲z+\frac{z^۳}{۳}\right]_۰^۱=\int_۰^۱ dx\int_۰^۱ (x^۲+y^۲+\frac{۱}{۳})dy$$

$$=\int_۰^۱ dx\left[x^۲y+\frac{y^۳}{۳}+\frac{۱}{۳}y\right]_۰^۱=\int_۰^۱ (x^۲+\frac{۲}{۳})dx=\left[\frac{x^۳}{۳}+\frac{۲}{۳}x\right]_۰^۱=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}=۱$$



شکل ۲۴: نمایش ناحیهٔ R

مثال

حاصل انتگرال سه گانهٔ $\iiint_R zy\ dv$ که در آن ناحیهٔ R از بالا محدود به صفحهٔ $z=1$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در یک هشتم اول می باشد را محاسبه کنید.

حل: محل تقاطع صفحهٔ $z=1$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ دارای معادلهٔ دکارتی $\sqrt{x^2+y^2}=1$ است و تصویر آن روی صفحهٔ xoy دارای معادلهٔ $x^2+y^2=1$ می باشد. (مطابق شکل فوق ناحیهٔ R مشخص شده است.)

اکنون انتگرال سه گانه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\iiint_R zy\,dv = \int_0^1 dx \iint_R zy\,dv = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}} zy\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy \Big[\frac{z^2}{2}y\Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \Big[\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2})^2 y\Big]$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \Big[\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}y^3\Big]\,dy = \int_0^1 dx \Big[\frac{1}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}x^2\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{y^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}$$

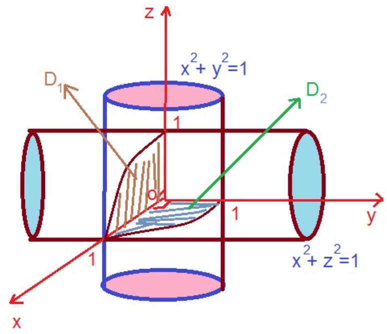
$$= \int_0^1 \Big[\frac{1}{4}(\sqrt{1-x^2})^2 - \frac{1}{4}x^2(\sqrt{1-x^2})^2 - \frac{1}{8}(\sqrt{1-x^2})^4 - 0\Big]\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \frac{1}{8}\Big[x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{15}$$

مثال

حجم ناحیهٔ R محدود به استوانه های $x^2+z^2=1$ و $x^2+y^2=1$ را محاسبه کنید.

حل : استوانهٔ $x^2+z^2=1$ در فضای $\mathbb{R}^3$ دارای محور تقارن y و استوانهٔ $x^2+y^2=1$ دارای محور تقارن z می باشد. ابتدا حجم این ناحیهٔ را در یک هشتم اول با صفحات xoz و xoy می یابیم.



شکل ۲۵: نمایش ناحیهٔ محدود به دو استوانه

ناحیهٔ $D_۱$ در صفحهٔ xoz در ربع اول آن از بالا محدود به نیم دایرهٔ به معادلهٔ دکارتی $z=\sqrt{۱-x^۲}$ می باشد و ناحیهٔ $D_۲$ محدود به ربع دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ است که محدود به خطوط $x=۰$ تا $x=۱$ و منحنی های $y=۰$ تا $y=\sqrt{۱-x^۲}$ می باشد. بنابراین حجم در یک هشتم اول برابر است:

$$V=\iiint_R ۱\,dv=\int_۰^۱ dx\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} dy\int_۰^{z=\sqrt{۱-x^۲}} ۱\,dz$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

مسایل نمونه

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, [z]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[\sqrt{1-x^2}\, y\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - 0\right) dx$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

بنابراین حجم کل برابر است با:

$$\mathbf{V} = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

تعریف

مختصات کُروی

فرض کنیم نقطهٔ $M(x, y, z)$ در فضای سه بُعدی حقیقی باشد. مطابق شکل ، ϕ زاویهٔ بردار مکان $\overrightarrow{OM}$ با جهت مثبت محور z ها و (r, θ) مختصات قطبی نقطهٔ (x, y) در صفحهٔ xoy باشد. در این صورت سه تایی (ρ, ϕ, θ) را مختصات کُروی نقطهٔ M می نامیم و روابط زیر بین مختصات کُروی و دکارتی نقطهٔ M برقرار می باشد.

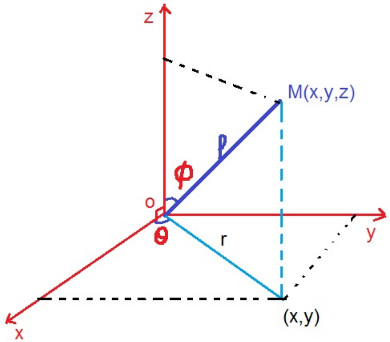
ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

مسایل نمونه



شکل ۲۶: نمایش مختصات فضایی

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho \ \sin\phi \ \cos\theta} \\ \boldsymbol{y = \rho \ \sin\phi \ \sin\theta} \\ \boldsymbol{z = \rho \ \cos\phi} \end{cases} \quad , \quad \rho^{۲} = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \quad , \quad \cos\phi = \frac{z}{\rho} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

مثال : مختصات دکارتی نقطهٔ کُروی $(۴, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۶})$ را بیابید.

حل : چون $\theta=\frac{\pi}{۶}$, $\phi=\frac{\pi}{۴}$, $\rho=۴$ ، بنابراین

$$\begin{cases} x=\rho\ \sin\phi\ \cos\theta=۴\ \sin\frac{\pi}{۴}\ \cos\frac{\pi}{۶}=۴\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۶} \\ y=\rho\ \sin\phi\ \sin\theta=۴\ \sin\frac{\pi}{۴}\ \sin\frac{\pi}{۶}=۴\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\ \frac{۱}{۲}=\sqrt{۲} \\ z=\rho\ \cos\phi=۴\ \cos\frac{\pi}{۴}=۴\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\ \sqrt{۲} \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ $(\sqrt{۶},\sqrt{۲},۲\ \sqrt{۲})$ شکل دکارتی نقطهٔ کُروی $(۴,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۶})$ می باشد.

ملاحظه

تغییر مختصات کُروی در انتگرال سه گانه

هرگاه در محاسبهٔ انتگرال سه گانهٔ $\iiint_R f\ dv$ ، ناحیهٔ R تمام یا بخشی از یک کُره بوده و یا در تابع f عبارت $x^۲+y^۲+z^۲$ (یا توانی از آن) وجود داشته باشد، از تغییر مختصات کُروی به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dv=\iiint_{R'} f(\underbrace{\rho\ \sin\phi\ \cos\theta}_{x},\underbrace{\rho\ \sin\phi\ \sin\theta}_{y},\underbrace{\rho\ \cos\phi}_{z})\ \rho^۲\ \sin\phi\ dv'$$

که در آن ناحیهٔ R' در فضای $\rho\phi\theta$ به روابط زیر محدود باشد، یعنی

$$\alpha \leq \theta \leq \beta \quad , \quad h_1(\theta) \leq \phi \leq h_2(\theta) \quad , \quad F_1(\phi,\theta) \leq \rho \leq F_2(\phi,\theta)$$

و علاوه براین توابع h_1 ، h_2 ، F_1 و F_2 پیوسته اند و داریم:

$$0 \leq F_1 \leq F_2 \quad , \quad 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$$

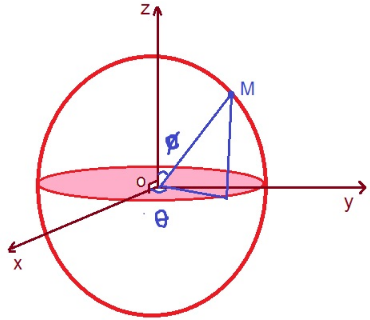
در این صورت انتگرال سه گانهٔ فوق به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\;dv = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} d\phi \int_{F_1(\phi,\theta)}^{F_2(\phi,\theta)} f(\rho\;\sin\phi\;\cos\theta, \rho\;\sin\phi\;\sin\theta, \rho\;\cos\phi)\;\rho^2\;\sin\phi\;d\rho$$

تذکر

برای محاسبهٔ انتگرال سه گانهٔ $\int\int\int_R f(x,y,z)\;dv$ که ناحیهٔ R محدود به درون و روی کُره $x^2+y^2+z^2=a^2$باشد، انتگرال سه گانه به صورت زیر حل می شود.

$$\int\int\int_{R\,:\,x^2+y^2+z^2\leq a^2} f(x,y,z)\;dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{a} f\;\rho^2\;\sin\phi\;d\rho$$



شکل ۲۷: نمایش ناحیهٔ R در مختصات کُروی

مثال

حجم کُره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ را با استفاده از انتگرال سه گانه محاسبه کنید.

حل : بنابر خواص انتگرال سه گانه ، حجم کُره از دستور زیر به دست می آید.

$$V = \iiint_{R:\ x^2+y^2+z^2 \le a^2} 1\, dv$$

اکنون تغییر مختصات کُروی را بکار می بریم.

$$V = \iiint_{R:\ x^2+y^2+z^2 \le a^2} 1\, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{a} 1\ \rho^2 \ \sin\phi\ d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \left[\sin\phi\ \frac{\rho^3}{3}\right]_0^a = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{a^3}{3}\ \sin\phi\ d\phi$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta\ \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta\ \left[-\cos\pi + \cos 0\right] = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}a^3\left[2\pi - 0\right] = \frac{4}{3}\pi\ a^3$$

بنابراین حجم کُره به شعاع a برابر است با : $\frac{4}{3}\pi\ a^3$.

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

انتگرال سه گانهٔ $\iiint_R e^{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dv$ که R ناحیهٔ درون و روی کُره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ می باشد را محاسبه کنید.

حل: با توجه به این که در انتگرال عبارت $(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}$ وجود دارد و هم چنین ناحیهٔ R کُره می باشد، از روش تغییر مختصات کُروی استفاده می کنیم. ناحیهٔ R محدود به $۰\le \phi \le \pi$ ، $۰\le \rho \le ۱$ ، $۰\le \theta \le ۲\pi$ ، $\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$ می باشد. در این صورت

$$\iiint_R e^{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dv=\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\pi} d\phi \int_۰^۱ e^{(\rho^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,\rho^۲\,\sin\phi\,d\rho$$

$$=\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\pi} d\phi \int_۰^۱ e^{\rho^۳}\,\rho^۲\,\sin\phi\,d\rho=\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\pi} \sin\phi\,d\phi\,\frac{۱}{۳}\int_۰^۱ ۳\,\rho^۲\,e^{\rho^۳}\,d\rho$$

$$=\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\pi} \sin\phi\,d\phi\,\left[\frac{۱}{۳}\,e^{\rho^۳}\right]_۰^۱=\frac{۱}{۳}(e-۱)\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\pi}\sin\phi\,d\phi$$

$$=\frac{۱}{۳}(e-۱)\int_۰^{۲\pi} d\theta\,\left[-\cos\phi\right]_۰^{\pi}=\frac{۱}{۳}(e-۱)\int_۰^{۲\pi} d\theta\,\left[\underbrace{-\cos\pi+\cos۰}_{۲}\right]$$

$$=\frac{۲}{۳}(e-۱)\int_۰^{۲\pi} d\theta=\frac{۲}{۳}(e-۱)\,\left[\theta\right]_۰^{۲\pi}=\frac{۲}{۳}(e-۱)[۲\pi-۰]=\frac{۴\pi}{۳}(e-۱)$$

تذکر

روش تغییر مختصات در محاسبهٔ انتگرال سه گانه

ناحیه های R و R' را به ترتیب در فضاهای مختصاتی $oxyz$ و $o'uvw$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم تابع T از R به R' به صورت
$$\begin{cases} x = h(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = k(u,v,w) \end{cases}$$
باشد که در آن توابع h، k و g دارای مشتقات جزئی پیوسته بوده، در این صورت با این تغییر متغیر انتگرال سه گانهٔ $\int\int\int_R f(x,y,z)\,dv$ در ناحیهٔ R' به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\,dv = \int\int\int_{R'} f\big(h(u,v,w), g(u,v,w), k(u,v,w)\big)\,|J|\,dv'$$

که در آن J را ژاکوبین تغییر متغیر می نامیم و مطابق دستور زیر محاسبه می شود.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

واحد رودهن

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

مثال

حجم بیضی وار $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ را به دست آورید.

حل: بنابر خاصیت انتگرال سه گانه ، حجم ناحیهٔ R برابر است با:

$$V=\iiint_{R\,:\,\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\leq ۱} ۱\,dv$$

اکنون با تغییر متغیر مناسب ناحیهٔ R را به ناحیهٔ دیگر مانند R' تبدیل می کنیم که انتگرال سه گانه روی آن به آسانی قابل محاسبه باشد. برای این منظور واضح است که شکل دکارتی معادلهٔ بیضی وار(ناحیهٔ R) به صورت $\left(\frac{x}{a}\right)^۲+\left(\frac{y}{b}\right)^۲+\left(\frac{z}{c}\right)^۲=۱$ می باشد. قرار می دهیم:

$$u=\frac{x}{a}\quad,\quad v=\frac{y}{b}\quad,\quad w=\frac{z}{c}$$

با جایگزینی در معادلهٔ دکارتی بیضی وار در فضای $oxyz$ به کُره $u^۲+v^۲+w^۲=۱$ در فضای $o'uvw$ تبدیل می شود. حال ژاکوبین تغییر مختصات را به دست می آوریم.

$$x=au\quad,\quad y=bv\quad,\quad z=cw$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc$$

بنابراین انتگرال سه گانه فوق ، با این تغییر مختصات به صورت زیر نوشته می شود.

$$V = \iiint_{R\,:\,\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\le ۱} ۱\ dv = \iiint_{R\,:\,u^۲+v^۲+w^۲\le ۱} ۱\ |J|\ dv'$$

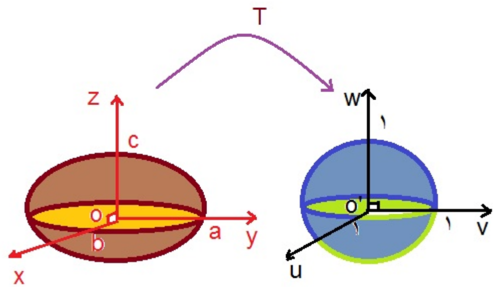
$$= \iiint_{R\,:\,u^۲+v^۲+w^۲\le ۱} abc\ dv' = abc \iiint_{R\,:\,u^۲+v^۲+w^۲\le ۱} dv' = abc\ (\text{حجم کُره به شعاع یک})$$

از طرفی چون حجم کُره به شعاع a برابر با $\frac{۴}{۳}\pi a^۳$ می باشد، لذا حجم کُره به شعاع $a = ۱$ برابر است با : $\frac{۴}{۳}\pi (۱)^۳$ ؛ بنابراین

$$\text{حجم بیضی وار}\ V = abc\ (\text{حجم کُره به شعاع یک}) = \frac{۴}{۳}\pi (abc)$$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی



شکل ۲۸: نمایش تبدیلی که بیضی وار به کُره واحد تبدیل می شود.

۳ مسایل نمونه

در این بخش چند مسئله در مورد انتگرال دوگانه و سه گانه بیان می شود.

۱ـ حاصل انتگرال دوگانه $\int_{\cdot}^{\backslash}\int_{\cdot}^{\backslash} e^{x-y}\,dxdy$ کدام مقدار است؟

(۱) $۲-e+\frac{۱}{e}$ **(۲)** $-۲+e+\frac{۱}{e}$ **(۳)** $e+\frac{۱}{e}$ **(۴)** $۲+e+\frac{۱}{e}$

۲ـ حاصل انتگرال دوگانه $\int_{\cdot}^{\backslash}\int_{\cdot}^{\backslash} xe^{xy}\,dydx$ کدام مقدار است؟

(۱) $۲-e$ **(۲)** $e+۲$ **(۳)** e **(۴)** $e-۲$

۳ـ حاصل انتگرال دوگانه $\int_{\cdot}^{\pi}\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \sin(x+y)\,dxdy$ کدام مقدار است؟

(۱) ۰ **(۲)** ۲ **(۳)** -۲ **(۴)** ۱

۴ـ حاصل انتگرال دوگانهٔ $\iint_D e^{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,ds$ که در آن $D:\ ۱\le x^۲+y^۲\le ۹$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) $۲\,\pi e^۳$ **(۲)** $\pi r^۳$ **(۳)** $۴\,\pi e^۳$ **(۴)** $۶\,\pi e^۳$

۵ـ حاصل انتگرال دوگانهٔ $\iint_D \frac{\ln(x^۲+y^۲)}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,ds$ که در آن $D:\ ۱\le x^۲+y^۲\le e^۲$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) $۴\,\pi$ **(۲)** $۲\,\pi$ **(۳)** $۲e\,\pi$ **(۴)** $۴e\,\pi$

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی

بخش اول

بخش دوم

مسایل نمونه

۶ــ حاصل $\int\int_D ds$ که در آن $D : \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} \leq ۱$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}\, ab\, \pi$ **(۲)** $ab\, \pi$ **(۳)** $۲\, ab\, \pi$ **(۴)** $۴\, ab\, \pi$

۷ــ حاصل انتگرال سه گانهٔ $\int\int\int_R (x^۲ + y^۲ + z^۲) dv$ که در آن R مکعب واحد یعنی $۰ \leq x \leq ۱\ ,\ ۰ \leq y \leq ۱\ ,\ ۰ \leq z \leq ۱$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) ۴ **(۲)** ۲ **(۳)** ۰ **(۴)** ۱

۸ــ حجم ناحیهٔ محدود به دو استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ کدام مقدار است؟

(۱) $\frac{۲}{۳}$ **(۲)** $\frac{۱۶}{۳}$ **(۳)** $\frac{۸}{۳}$ **(۴)** $\frac{۳۲}{۳}$

۹ــ مختصات دکارتی نقطهٔ کُروی $(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$ چه نقطه ای است؟

(۱) $(۰, \sqrt{۲}, ۱)$ **(۲)** $(۱, ۰, ۱)$ **(۳)** $(۰, ۱, ۱)$ **(۴)** $(۱, ۱, ۱)$

۱۰ــ حاصل انتگرال سه گانهٔ $\int\int\int_R \frac{dv}{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ که در آن R کُره واحد یعنی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ می باشد، کدام مقدار است؟

(۱) $۶\, \pi$ **(۲)** $۲\, \pi$ **(۳)** π **(۴)** $۴\, \pi$

شکل ۲۹: **برنهارت ریمان** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۸۲۶ میلادی ، درگذشت: ۱۸۶۶ میلادی

شکل ۳۰: **بلز پاسکال** ریاضی دان برجسته فرانسوی متولد: ۱۶۲۳ میلادی ، درگذشت: ۱۶۶۲ میلادی

شکل ۳۱:   **گوتفرید لایبنیتس** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۶۴۶ میلادی ، درگذشت: ۱۷۱۶ میلادی

شکل ۳۲:   **فریدریش گاوس** ریاضی دان برجسته آلمانی ، متولد: ۱۷۷۷ میلادی ، درگذشت: ۱۸۵۵ میلادی

با سپاس فراوان از توجه شما

ارائه دهنده:

محمد حسین مسلمی کوپایی