$$y = f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt \to y' = f(u)u' = \sqrt{1+(x^2)^2}\,(x^2)' = \sqrt{1+x^4} \times 2x$$

$f(t) = \sqrt{1+t^2}$

$$y = \int_{\sin x \to u}^{4+x^2 \to v} \sqrt{t+t^2}\,dt \to y' = f(v)v' - f(u)u'$$

$f(t) = \sqrt{t+t^2}$

$$= \left(\sqrt{4+x^2+(4+x^2)^2}\right)(2x) - \left(\sqrt{\sin x + \sin^2 x}\right)(\cos x)$$

فرمولها مهم تا انتگرال

۱) $\int du = u + C$

۲) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

۳) $\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

۴) $\int e^u du = e^u + C$

۵) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

۶) $\int \cos u\,du = \sin u + C$

۷) $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

۸) $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

۹) $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

۱۰) $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

۱۱) $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

۱۲) $\int \sec^2 u\,du = \int (1+\tan^2 u)\,du = \tan u + C$

۱۳) $\int \csc^2 u\,du = \int (1+\cot^2 u)\,du = -\cot u + C$

۱۴) $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

۱۵) $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

۱۶) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{a}{a} + C$

۱۷) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

۱۸) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

۱۹) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2-a^2}) + C$

۲۰) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

۲۱) $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

$$I=\int \frac{dx}{x(9+4(\ln x)^2)}=\int\frac{du}{9+4u^2}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\frac{9}{4}+u^2}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{\frac{3}{2}}+C$$

$$\frac{9}{4}\to\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{1}{6}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2(\ln x)}{3}+C$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2+6x+5}=\int\frac{dx}{(x+3)^2-4}=\int\frac{du}{u^2-2^2}=\frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right|+C$$

$$x+3=u\to du=dx$$

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(\tan^2x+\frac{b^2}{a^2})\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{u^2+(\frac{b}{a})^2}$$

$$u=\tan x\to du=\frac{dx}{\cos^2x}$$

$$=\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{(\frac{b}{a})}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{(\frac{b}{a})}+C=\frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+C$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\,\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$$

$$t^2=e^x+1\to 2t\,dt=e^x\,dx\Rightarrow dx=\frac{2t\,dt}{e^x}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2-1})+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4-1})+C$$

$$x^2=u\to 2x\,dx=du$$

تمرین: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx\ ;\quad I=\int\frac{dx}{2+x-x^2}\ ;\quad I=\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$I=\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}\ ;\quad I=\int\frac{(\mathrm{Arccos}\,x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\qquad I=\int\frac{dx}{x(\ln x+1)}$$

$$I=\int\frac{2x-3}{4x^2-11}\,dx$$

۳۵-۱

$$I=\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx+2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\int \frac{dt/2}{\sqrt{t}}+2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$t=x^2+9 \to dt=2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt+2\ln(x+\sqrt{x^2+9})=\frac{1}{2}\,\frac{t^{1/2}}{1/2}+2\ln(x+\sqrt{x^2+9})+c$$

$$=\sqrt{x^2+9}+2\ln(x+\sqrt{x^2+9})+c$$

$$I=\int \frac{dx}{2+x-x^2}=-\int \frac{dx}{x^2-x-2}=-\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}=-\int \frac{dt}{t^2-(\frac{3}{2})^2}=-\frac{1}{2(\frac{3}{2})}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right|+c$$

$x-\frac{1}{2}=t \to dx=dt$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|+c$$

$$I=\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\text{Arctan}\,x+c$$

$$I=\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln(t+\sqrt{t^2+1})+c=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})+c$$

$e^x=t \to dt=e^x dx$

$$I=\int \frac{(\text{Arccos}\,x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int -t^2 dt=-\frac{t^3}{3}+c=-\frac{1}{3}(\text{Arccos}\,x)^3+c$$

$\text{Arccos}\,x=t \to dt=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$I=\int \frac{2x-3}{4x^2-11}dx=2\int \frac{x\,dx}{4x^2-11}-3\int \frac{dx}{4x^2-11}=2\int \frac{dt/8}{t}-\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2-\frac{11}{4}}$$

$4x^2-11=t \to dt=8x\,dx$

$$=2\left(\frac{1}{8}\right)\int \frac{dt}{t}-\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2-(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}=\frac{1}{4}\ln|t|-\frac{3}{4}\,\frac{1}{2(\frac{\sqrt{11}}{2})}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{11}}{2}}{x+\frac{\sqrt{11}}{2}}\right|+c$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء: فرض کنیم u و v توابعی مشتق پذیر از x باشند پس

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

$$\xrightarrow{\times dx} d(uv)=v\,du+u\,dv$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int d\,uv=\int v\,du+\int u\,dv$$

$$\longrightarrow uv=\int v\,du+\int u\,dv$$

$$\longrightarrow \boxed{\int u\,dv=vu-\int v\,du}$$

این فرمول را فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌نامیم. و معمولاً برای محاسبه انتگرال‌هایی به کار می‌رود که تابع زیر علامت انتگرال به شکل حاصل ضرب باشد.

مثال:

$$uv-\int v\,du$$

$$I=\int xe^{x}dx=xe^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C$$

$$\begin{cases}u=x\rightarrow du=dx\\ dv=e^{x}dx\rightarrow v=\int e^{x}dx=e^{x}\end{cases}$$

$$I=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x-(-\cos x)+C$$

$$\begin{cases}u=x\rightarrow du=dx\\ dv=\cos x\,dx\rightarrow v=\int \cos x\,dx=\sin x\end{cases}$$

$$I=\int x^{n}\ln x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^{n}dx$$

$$\begin{cases}u=\ln x\rightarrow du=\frac{dx}{x}\\ x^{n}dx=dv\rightarrow v=\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\end{cases}$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$I=\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$

$$\begin{cases} u=\ln x \rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx \rightarrow v=\int dx = x \end{cases}$$

$$I=\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$\begin{cases} u=\sin^{-1}x \rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx \rightarrow v=x \end{cases}$$

$$1-x^2=t$$

$$-2x\,dx=dt$$

$$= x\sin^{-1}x+\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\cancel{-\frac{1}{2}+1}}+C = x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$$

$$t^{-\frac{1}{2}+1}=t^{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}$$

$$I=\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$\begin{cases} u=\tan^{-1}x \rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx \rightarrow v=x \end{cases}$$

تمرین: انتگرال‌های زیر را حساب کنید

$$I=\int \ln(a^2+x^2)\,dx$$

$$I=\int e^x\sin x\,dx \qquad I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

$$I=\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

$$\begin{cases} \ln x=u \rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x\,dx \rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int f(x)g(x)dx$ که در آن یکی از توابع f و g چند جمله‌ای و دیگری جزء توابعی باشد که بتوان براحتی پی در پی از آن انتگرال گرفت برای محاسبه انتگرال $\int f(x)g(x)dx$ از جدول زیر بهره می‌بریم:

۴۷-۱۱

$$I=\int \ln(a^2+x^2)\,dx = x\ln(a^2+x^2)-\int x\frac{2x\,dx}{a^2+x^2}$$

$$\begin{cases} u=\ln(a^2+x^2)\to du=\dfrac{2x\,dx}{a^2+x^2} \\ dv=dx \to v=\int dx = x\end{cases}$$

$$= x\ln(a^2+x^2)-2\int \frac{x^2+a^2-a^2}{a^2+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(a^2+x^2)-2\int\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)dx$$

$$= x\ln(a^2+x^2)-2\left(x-a^2\frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{a}\right)+C$$

$$I=\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x-\int e^x(-\cos x)\,dx = -e^x\sin x+\int e^x\cos x\,dx$$

$$\begin{cases} u=e^x\to du=e^x\,dx \\ dv=\sin x\,dx\to v=\int dv=\int \sin x\,dx=-\cos x\end{cases}$$

$$\begin{cases} U=e^x\to dU=e^x\,dx \\ dV=\cos x\,dx\to V=\int dV=\sin x\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=-e^x\cos x+\Big(e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{I}\Big)\Rightarrow I=e^x\sin x-e^x\cos x-I$$

$$\Rightarrow 2I=e^x(\sin x-\cos x)\longrightarrow I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$$

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\int \alpha e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}\sin\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

$$\begin{cases} e^{\alpha x}=u\to du=\alpha e^{\alpha x} \\ dv=\cos\beta x\,dx\to v=\dfrac{1}{\beta}\sin\beta x\end{cases}$$

$$\begin{cases} U=e^{\alpha x}\to dU=\alpha e^{\alpha x}\,dx \\ dV=\sin\beta x\,dx\to V=\dfrac{-1}{\beta}\cos\beta x\end{cases}$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x-\int \alpha e^{\alpha x}\left(-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\underbrace{\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx}_{=I}$$

$$\Rightarrow I+\frac{\alpha^2}{\beta^2}I=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha}\cos\beta x$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}\right)I=\frac{\beta e^{\alpha x}\sin\beta x+\alpha e^{\alpha}\cos\beta x}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\beta e^{\alpha x}\sin\beta x+\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}$$

$f(x)$ و مشتقاتش	$g(x)$ و انتگرال‌هایش
$-f'(x)$	$\int g(x)dx$
$+f''(x)$	$\int(\int g(x)dx)dx$
$-f'''(x)$	$\int(\int(\int g(x)dx)dx)dx$
$\vdots$	$\vdots$

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x) - f'(x)\int(\int g(x)dx)dx + \dots$$

مثال: $I=\int x^3 \sin x\,dx$ را حساب کنید

x^3 و مشتق	$\sin x$ و انتگرال
$-3x^2$	$-\cos x$
$+6x$	$-\sin x$
-6	$\cos x$
$+0$	$\sin x$

$$\Rightarrow I = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$$

مثال: $I=\int(5x^3-x+1)e^{2x}dx$ را بدست آورید

$5x^3-x+1$ مشتق	e^{2x} انتگرال
$-(15x^2-1)$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$+(30x)$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$-(30)$	$\frac{1}{8}e^{2x}$
0	$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$I = \frac{1}{2}(5x^3-x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}(15x^2-1)e^{2x} + \frac{1}{8}(30x)e^{2x} - \frac{1}{16}(30)e^{2x} + C$$

انتگرال‌های شامل توان‌های توابع مثلثاتی

الف) انتگرال‌هایی به فرم $\int \sin^n x\,dx$ و $\int \cos^n x\,dx$

حالت اول) اگر n فرد باشد مطابق روش زیر عمل می‌کنیم

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1}x \sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \sin x\,dx$$

و تغییر میدهیم $u=\cos x$ و لذا $du=-\sin x\,dx$

$$=\int (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}(-du) = \cdots$$

مثال:

$$I=\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$u=\cos x$

$$=\int (1-u^2)^2(-du) = -\int (1-2u^2+u^4)\,du = -\left(u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right)+C$$

$$=-\left(\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x\right)+C$$

$$I=\int \cos^7 x\,dx = \int (\cos^2 x)^3 \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^3 \cos x\,dx = \int (1-u^2)^3\,du$$

$\sin x = u \rightarrow \cos x\,dx = du$

$$=\int (1-3u^2+3u^4-u^6)\,du = u-\frac{3}{3}u^3+\frac{3}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7+C$$

$$=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$

حالت دوم) اگر n زوج باشد از فرمولهای $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده میکنیم

مثال:

$$I=\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

$$I=\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)+C$$

ب) محاسبه $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$

حالت اول) اگر یکی از اعداد m ، n فرد باشد مثلاً n فرد باشد، مطابق روش زیر عمل می کنیم

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \int (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos^m x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos^m x \sin x \, dx$$

و $u = \cos x$

مثال

$$I = \int \sin^5 x \cos^7 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^7 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^7 x \sin x \, dx$$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$

$$= \int (1-u^2)^2 u^7 (-du) = -\int (1-2u^2+u^4) u^7 \, du = -\int (u^7 - 2u^9 + u^{11}) \, du$$

$$= -\left(\frac{u^8}{8} - \frac{2}{10} u^{10} + \frac{1}{12} u^{12}\right) + C = -\left(\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{5}\cos^{10} x + \frac{1}{12}\cos^{12} x\right) + C$$

حالت دوم) اگر m و n هر دو زوج باشند از فرمول $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ، $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می کنیم

مثال

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} \, dx - \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x \, dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \int (1-u^2)\frac{du}{2}$$

$\sin 2x \to du = 2\cos 2x \, dx$

$\frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right)$

$$=\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+\frac{1}{4}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+c$$

حالت سوم) اگر m و n هر دو زوج باشند ولی یکی از آنها منفی باشد، اگر توان $\sin x$ منفی باشد از تغییر متغیر $u=\cot x$ و اگر توان $\cos x$ منفی باشد از تغییر متغیر $u=\tan x$ استفاده می کنیم

مثال:

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\frac{1}{\sin^2 x}\,\frac{dx}{\sin^2 x}=\int u^2(1+u^2)(-du)$$

$$u=\cot x\rightarrow du=-\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$=-\int(u^2+u^4)du=-\left(\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right)+C=-\left(\frac{1}{3}\cot^3 x+\frac{1}{5}\cot^5 x\right)+C$$

ب) برای محاسبه انتگرال‌های به فرم $\int \sin ax \sin bx\,dx$ ، $\int \cos ax \cos bx\,dx$ و $\int \sin ax \cos bx\,dx$ از فرمول زیر استفاده می کنیم

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

مثال:

$$I=\int\cos 2x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin(\overset{7x}{5x+2x})+\sin(\overset{3x}{5x-2x})\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$$

تمرین:

$I=\int\sin x\cos 2x\,dx$ ، $I=\int\cos 2x\cos 4x\,dx$

$I=\int\sin x\sin 3x\sin 5x\,dx$