انتگرال نامعین:

فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازه I تعریف شده باشد. $F(x)$ را تابعی دیگر روی I در نظر می‌گیریم که برای هر x در I:

$$F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

در این صورت $F(x)$ را یک پادمشتق (انتگرال یا تابع اولیه) $f(x)$ روی I می‌گوییم.

به عنوان نمونه تابع $F(x)=x^3+4x^2-x$ یک تابع اولیه (یا پادمشتق) $f(x)=3x^2+8x-1$ است چون $F'(x)=f(x)$. به همین ترتیب هر یک از توابع x^3+4x^2-x+1 ، $x^3+4x^2-x-\sqrt{2}$ ، ... و به طور کلی هر تابع به فرم x^3+4x^2-x+C که در آن C عددی ثابت باشد، یک تابع اولیه تابع $f(x)=3x^2+8x-1$ است.

بنابراین یک تابع مانند $f(x)$ بی‌شمار تابع اولیه دارد و اختلاف هر دو تابع اولیه برای آن، یک عدد ثابت است.

اگر $F(x)$ یکی از پادمشتق‌های تابع $f(x)$ باشد، آنگاه $F(x)+C$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ می‌نامیم و آن را با $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad (F'(x)=f(x))$$

یعنی عمل انتگرال عکس عمل مشتق‌گیری است. در یافتن پادمشتق‌ها باید یعنی یافتن تابعی که مشتق آن داده شده باشد.

لذا بوضوح $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ (یعنی $\left(\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)\right)$)

و بنابراین

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

و چون $f(x)$ یکی از پادمشتق‌های $f'(x)$ است

$$\int f'(x)dx = f(x)+C$$

قضایای انتگرال:

الف) $\int dx = x+C$ چون $x'=1$

ب) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$ زیرا $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$

پ) اگر توابع $f(x)$, $g(x)$ پاد مشتق داشته باشند آنگاه:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

مثال:

$$I = \int (4x^2 + 7x)\, dx = \int 4x^2 dx + \int 7x\, dx$$

$$= 4\int x^2 dx + 7\int x\, dx$$

$$= 4\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + c_1\right) + 7\left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_2\right)$$

$$= 4\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + \underbrace{4c_1 + 7c_2}_{\text{ثابت}}$$

$$= 4\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + C$$

از این به بعد از نوشتن c_1 تا c_n خودداری می‌کنیم و بعد از به کار بردن قوانین، یک ثابت C در آخر می‌نویسیم، مثلا

$$I = \int (5x^4 + 6x^2 - 7x + 2)\, dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1} + 6\frac{x^{2+1}}{2+1} - 7\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2x + C$$

$$\int a\, dx = ax + C \qquad = x^5 + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + C$$

مثال. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{7}{x^4} + \sqrt{2x} - \frac{5}{2\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{3}\right) dx$$

جواب: $I = \int \left(-\frac{2}{3}x^4 + 7x^{-4} + \sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\right) dx$

$$= -\frac{2}{3}\frac{x^{4+1}}{4+1} + 7\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \sqrt{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{5}{2}\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{3}x + C$$

 $= -\frac{2}{15}x^5 - \frac{7}{\ldots} + 2\sqrt{2}\, x^{\frac{3}{2}} \ldots$

$$I=\int \frac{7x^3-2x+5}{\sqrt{x}}\,dx=\int (7x^3-2x+5)\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\int (7x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$

$$=7\,\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-2\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+5\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=2x^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+10x^{\frac{1}{2}}+C$$

قوانین دیگر انتگرال

$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$ ، $\int \cos x\,dx=\sin x+c$

$\int \sec^2 x\,dx=\int (1+\tan^2 x)\,dx=\tan x+c$ ، $\int (1+\cot^2 x)\,dx=\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+c$

$\int e^x\,dx=e^x+c$ ، $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$

$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c$

مثال:

$$I=\int \frac{4x^5-11x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\int (4x^5-11x+x^{\frac{1}{2}})\,x^{-2}\,dx$$

$$=\int (4x^3-11x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}})\,dx$$

$$=\cancel{4}\,\frac{x^4}{\cancel{4}}-11\ln|x|-\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+c$$

$$I=\int (5x^{+3}+3^x+\tan^2 x+4x-7)\,dx$$

عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم

$$=\int (5x^{+3}+3^x+\tan^2 x+1-1+4x-7)\,dx$$

$$=\int (5x^{+3}+3^x+\tan^2 x+1+4x-8)\,dx=5\frac{x^4}{4}+\frac{3^x}{\ln 3}+\tan x+4\frac{x^2}{2}-8x+c$$

$$I=\int \cot^2 x=\int (\cot^2 x+1-1)\,dx=-\cot x-x+c$$

بسیاری از انتگرال‌ها را مستقیماً به کمک قضایا نمی‌توان محاسبه کرد. ولی گاهی با یک تغییر متغیر می‌توان انتگرال را به کمک قضایایی حساب کرد.

مثال: انتگرال $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ را محاسبه کنید

قرار می‌دهیم $t=1+x^2$، با دیفرانسیل گیری از طرفین $dt=2x\,dx$ و لذا

$$I=\int\sqrt{1+x^2}\,2x\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

این روش را انتگرال گیری به روش تغییر متغیر یا جانشینی می‌گوییم.

مثال

$$I=\int x\sin(x^2+2)\,dx=\int\sin t\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos(x^2+2)+C$$

$t=x^2+2\to dt=2x\,dx\to x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$I=\int\frac{x\,dx}{(2x^2+10)^5}=\int\frac{dt/4}{t^5}=\frac{1}{4}\int t^{-5}dt=\frac{1}{4}\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{16}t^{-4}+C$$

$2x^2+10=t\to dt=4x\,dx\to x\,dx=dt/4$

$$=-\frac{1}{16}(2x^2+10)^{-4}+C$$

$$I=\int\sin(ax+b)\,dx=\int\sin t\,\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C$$

$t=ax+b\to dt=a\,dx\to dx=\frac{dt}{a}$

$$=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

به همین ترتیب

$$\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C\ ;\ \int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$$

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

$$I=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{dt/2}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$t=x^2+1\to dt=2x\,dx\to x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$I=\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int-\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$$

$t=\cos x\to dt=-\sin x\,dx$

$$=\ln|\sec x|+C$$

$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$

$I = \int \frac{e^x\,dx}{2e^x-3} = \int \frac{dt/2}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln|2e^x-3| + c$

$t = 2e^x - 3 \to dt = 2e^x dx \to e^x dx = dt/2$

$I = \int \frac{e^{-x+4}}{e^{2x-1}}\,dx = \int e^{-x+4-(2x-1)}\,dx = \int e^{-3x+5}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+5} + C$

$I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\sin x + \cos x| + c$

$t = \sin x + \cos x \to dt = (\cos x - \sin x)dx$

$I = \int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2-10}\,dx = \int \frac{dt/4}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + c = \frac{1}{4}\ln|x^4+4x^2-10| + C$

$t = x^4+4x^2-10 \to dt = (4x^3+8x)dx = 4(x^3+2x)dx \to (x^3+2x)dx = dt/4$

$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\, 2dt = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}+1} + c$

$\sqrt{x}+1 = t \to dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \to \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$

$I = \int \frac{dx}{x(\ln x+1)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x + 1| + c$

$t = \ln x + 1 \to dt = \frac{1}{x}dx$

$I = \int \sqrt{1+x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + c$

$t = 1+x \to dt = dx$

$I = \int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \int (t-1)^2\sqrt{t}\,dt = \int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt = \int \left(t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

$t = 1+x \to \begin{cases} dt = dx \\ x = t-1 \end{cases} \qquad = \frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 2\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$$= \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

تمرین : انتگرال های زیر را بیابید

$$I = \int x^3 \sqrt{2+x}\, dx \qquad I = \int x\sqrt{1-x}\, dx$$

$$I = \int \frac{x^3\, dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} \qquad I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

حل (سوال دوم و چهارم) :

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \int \frac{2dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$$

$$t = \sqrt{x}+1 \rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

$$I = \int \frac{x^3}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{x^2 \cdot x\, dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(t-4)\frac{dt}{2}}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int (t-4)\, t^{-\frac{3}{2}} dt$$

$$t = x^2+4 \rightarrow dt = 2x\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$x^2 = t-4$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{-\frac{3}{2}}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 4\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(2(x^2+4)^{\frac{1}{2}} + 8(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right) + C$$

انتگرال معین

فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. انتگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ را با $\int_a^b f(x)dx$ نشان می دهیم. اگر $F(x)$ تابع اولیه (پادمشتق) $f(x)$ در $[a,b]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

لذا انتگرال معین تابع f از روی انتگرال نامعین آن بدست می‌آید و اگر $\int f(x)dx = F(x)+c$

آنگاه:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

معمولاً $F(b)-F(a)$ را با $F(x)\Big|_a^b$ نمایش می‌دهیم.

مثال: $I=\int_1^2 (x^2+2x)dx$ را بیابید

$$\int (x^2+2x)dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}+x^2}_{F(x)}+c \Rightarrow \int_1^2 (x^2+2x)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}+2^2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1^2\right)=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}-1=\frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}$$

مثال: $I=\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2}$ را بیابید

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_{-1}^1 = \ln|1+2|-\ln|-1+2| = \ln 3$$

خواص انتگرال معین

۱- اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و k عددی ثابت باشد آنگاه

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

۲- اگر f و g روی $[a,b]$ پیوسته آنگاه

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

۳- اگر تابع f روی بازهٔ I که شامل سه نقطهٔ a، b و c است پیوسته باشد، آنگاه صرف نظر از ترتیب نقاط a، b و c

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

۴- در تعریف انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ فرض شده بود که $a<b$، اگر $b<a$، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$\int_a^a f(x)dx=0$$ و لذا $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثال: انتگرال زیر را بیابید

$$I=\int_0^2 |x-1|\,dx=\int_0^1|x-1|\,dx+\int_1^2|x-1|\,dx=\int_0^1(\underbrace{-(x-1)}_{1-x})\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=$$

$$I=\int_0^3[x]\,dx=\int_0^1[x]\,dx+\int_1^2[x]\,dx+\int_2^3[x]\,dx=\int_0^1 0\,dx+\int_1^2 1\,dx+\int_2^3 2\,dx$$

$$=x\Big|_1^2+2x\Big|_2^3=2-1+6-4$$

$$I=\int_0^4\sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx=\int_0^2 t\sqrt{1+t^3}\,(2t\,dt)=\int_0^2 2t^2\sqrt{1+t^3}\,dt$$

$t=\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x=0\to t=0 \\ x=4\to t=2\end{cases}$ $\qquad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$u=1+t^3$, $du=3t^2\,dt \to \begin{cases} t=0\to u=1 \\ t=2\to u=9\end{cases}$

$$=\frac{2}{3}\int_1^9\sqrt{u}\,du=12-\frac{8\sqrt{2}}{9}$$

قضیه: اگر $f(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ یکی از پادمشتق‌های $f(x)$ روی $[a,b]$ است یعنی

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(t) \quad \left(\text{یا } \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)\right)$$

مثال: مشتق بگیرید

$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ $\qquad F'(x)=\left(\int_0^x\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt\right)'=\sqrt{1+\sin^2 x}$

$f(t)=\sqrt{1+\sin^2 t}$

اگر u تابع مشتق‌پذیر از x باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_a^u f(t)\,dt=f(u)\,u'$$

و اگر u و v توابع مشتق‌پذیر از x باشند آنگاه

$$\frac{d}{dx}\left(\int_u^v f(t)\,dt\right)=f(v)\,v'-f(u)\,u'$$

مثال: مشتق بگیرید

$$y = f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt \to y' = f(u)u' = \sqrt{1+(x^2)^2}\,(x^2)' = \sqrt{1+x^4} \times 2x$$

$$f(t) = \sqrt{1+t^2}$$

$$y = \int_{\sin x \to u}^{4+x^2 \to w} \sqrt{t+t^2}\,dt \to y' = f(w)w' - f(u)u'$$

$$f(t) = \sqrt{t+t^2} \qquad = \left(\sqrt{4+x^2+(4+x^2)^2}\right)(2x) - \left(\sqrt{\sin x + \sin^2 x}\right)(\cos x)$$

فرمولهای مقدماتی انتگرال

1) $\int du = u + C$

2) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3) $\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4) $\int e^u du = e^u + C$

5) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6) $\int \cos u\,du = \sin u + C$

7) $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

8) $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

9) $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

10) $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

11) $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

12) $\int \sec^2 u\,du = \int (1+\tan^2 u)du = \tan u + C$

13) $\int \csc^2 u\,du = \int (1+\cot^2 u)du = -\cot u + C$

14) $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

15) $\int \csc u \cot u\,du = -\cot u + C$

16) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

17) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{Arcsin}\frac{u}{a} + C$

19) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2-a^2}) + C$

20) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

21) $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

$$I=\int\frac{dx}{x(9+4(\ln x)^2)}=\int\frac{du}{9+4u^2}=\frac14\int\frac{du}{\frac94+u^2}=\frac14\,\frac{1}{\frac32}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{\frac32}+c$$

$\frac94 \to (\frac32)^2$

$u=\ln x \to du=\frac{dx}{x}$

$$=\frac16\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2(\ln x)}{3}+c$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2+6x+5}=\int\frac{dx}{(x+3)^2-4}=\int\frac{du}{u^2-2^2}=\frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+c=\frac14\ln\left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right|+c$$

$x+3=u \to du=dx$

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(\tan^2x+\frac{b^2}{a^2})\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{u^2+(\frac ba)^2}$$

$u=\tan x \to du=\frac{dx}{\cos^2x}$

$$=\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{(\frac ba)}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{(\frac ba)}+C=\frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+C$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\,\frac12\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c$$

$t^2=e^x+1 \to 2t\,dt=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{2t\,dt}{e^x}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}=\frac12\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac12\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)+c=\frac12\ln\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)+c$$

$x^2=u \to 2x\,dx=du$

تمرین: انتگرال‌های زیر را حساب کنید

$I=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx$; $I=\int\frac{dx}{2+x-x^2}$; $I=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$I=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; $I=\int\frac{(\mathrm{Arc}\cos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $I=\int\frac{dx}{x(\ln x+1)}$

$I=\int\frac{2x-3}{4x^2-11}dx$