۱-۱) مقدمه:

اعداد در تاریخ زندگی بشریت همواره یکی از اجزای اصلی محاوره، ارتباطات و از همه مهمتر اقتصاد بوده اند. اعدادی که از ابتدا تاکنون بکار می رفته اند از ده رقم ۰و۱...و۹ تشکیل شده اند چرا که از زمانهای قدیم بدلیل اینکه مقدار انگشتان دو دست انسان ده عدد بوده است مبنای محاسبات از همان موقع عدد ده بود. بنابراین پایه محاسبات روزمره عدد ۱۰ است. چنین سیستمی را سیستم دهدهی یا دسیمال نامند. اگر چه تعداد ارقام این سیستم ۱۰ رقم است اما با بکارگیری رقم ها در کنار هم می توان اعداد بیشتری ساخت.

۱-۱-۱) اعداد در مبناهای مختلف:

برای اعداد و محاسبات با آنها با توجه به تعداد رقم ها، سیستم های (مبناهای) مختلفی وجود دارد مثلا سیستم های دسیمال[1]، اکتال[2]، باینری[3]، هگزا دسیمال[4] و ... . در تمامی این مبناها، مفهوم مبنا یا پایه[5] وجود دارد که اساس کار و محاسبات درآن مبنا است. مثلاً

در مبنای ۱۰ یا دسیمال پایه عدد ۱۰ است. مقدار ارقام پایه هم برابر ۱۰ تا رقم است (۰ تا ۹).

در پایه دو، مبنا عدد دو است. و تعداد ارقام نیز دوتاست (0,1).

در پایه هشت نیز تعداد ارقام هشتاست (7 ... 0) و عدد پایه نیز خود هشت می باشد.

در ۱۶پایه نیز تعداد ارقام شانزده تاست. در این پایه ۱۶ رقم عبارتند از:

0,1,2,...,9,10,11,12,13,14,15

در این سیستم بجای اعداد 10 تا 15 از حروف B,A,... F استفاده می شود:

0,1,2,...,9,A,B,C,D,E,F

دلیل استفاده از آنها این است که اولاً هر رقم باید از نظر ظاهری بصورت ساده (تک رقمی) باشد و ثانیاً اگر نکته فوق رعایت نشود و فرضاً عددی نظیر 112 داشته باشیم هم می تواند بصورت عدد سه رقمی 112 باشد، هم می تواند بصورت عدد دو رقمی 2 11 باشد و هم می تواند بصورت عدد دو رقمی 12 1 باشد ولی با در نظر گرفتن نکته فوق عدد 112 همان 112 است و برای نشان دادن 2 11 از B2 و برای نشان دادن عدد 12 1 از 1C استفاده می شود.

۱-۱-۲)وزن اعداد:

از ریاضیات دبستان بخاطر داریم که فرضاً عدد سه رقمی ۳٤۹ را می توان بصورت زیر نمایش داد:

یکان	دهگان	صدگان
۹	٤	۳

[1] Decimal:مبنای ده

[2] Octal: مبنای هشت

[3] Binary: مبنای دو

[4] Hexa decimal:مبنای شانزده

[5] Radix

یعنی جایگاه عدد۳، در مرتبه صدها، جایگاه عدد ٤ در مرتبه دهها و جایگاه عدد ۹در مرتبه یکهاست. این در حقیقت همان وزن اعداد است. یعنی عدد ۳٤۹ را می توان بصورت زیر نمایش داد:

$$349 = 3\times100 + 4\times10 + 9\times1$$

و یا

$$349 = 3\times10^2 + 4\times10^1 + 9\times10^0$$

برای اعداد اعشاری هم می توان این تفکیک را در نظر گرفت:

$$352.17 = 3\times10^2 + 5\times10^1 + 2\times10^0 + 1\times10^{-1} + 7\times10^{-2}$$

در مثال فوق وزن عدد 3، برابر 10^2 و وزن عدد 7 برابر 10^{-2} می باشد.

حال چرا هر عدد را بصورت ضریبی از ۱۰ در نظر گرفتیم. چون مبنای محاسبات ما عدد ۱۰ است (سیستم دسیمال) هر وزن را ضریبی از ۱۰ قرار دادیم. بنابراین اگر عدد ما عددی غیر از مبنای ۱۰ باشد نیز می توان آنرا بصورت تفکیک پذیر و عمومی از وزن های آن در نظر گرفت فرضاً:

$$(1F5.2A6)_{16} = 1\times16^2 + F\times16^1 + 5\times16^0 + 2\times16^{-1} + A\times16^{-2} + 6\times16^{-3}$$

بطور کلی هر عدد y در پایه R بصورت زیر است را می توان تفکیک نمود:

$$y_R = (d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_. . d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-m})_R$$

$$y_R = d_n\times R^n + d_{n-1}\times R^{n-1} + \ldots d_1\times R^1 + d_0\times R^0 + d_{-1}\times R^{-1} + \ldots + d_{-m}\times R^{-m}$$

که به نحوه نمایش فوق، نحوه نمایش با ارزش مکانی گویند.

۱-۲)تبدیل اعداد مبناهای مختلف به یکدیگر:

۱-۲-۱) تبدیل اعداد مبنای ۱۰ به هر مبنای R:

برای اعداد صحیح روش کار تقسیمات متوالی است. آنقدر عدد مبنای ۱۰ را بر R تقسیم می کنیم تا خارج قسمت کوچکتر از R شود. سپس آخرین خارج قسمت را به همراه تمام باقیمانده ها از انتها به ابتدا می نویسیم:

مثال) $(39)_{10} = (100111)_2$

39 ⌊2	19 ⌊2	9 ⌊2	4 ⌊2	2 ⌊2
38 19	18 9	8 4	4 2	2 1
1	1	1	0	0

$$(39)_{10} = (100111)_2$$

مثال) $(43)_{10} = (?)_{16}$

$$(43)_{10} = (2B)_{16}$$

$$\begin{array}{l|l} 43 & 16 \\ \underline{32} & 2 \\ 11 & \end{array}$$

برای تبدیل اعداد حقیقی (ممیز دار) بدین صورت عمل می کنیم:

- عدد را بدو قسمت صحیح و اعشاری تفکیک می کنیم.
- قسمت صحیح را با استفاده از تقسیمات متوالی به مبنای خواسته شده می بریم.
- قسمت اعشاری را نیز با استفاده از ضربهای متوالی به مبنای خواسته شده می بریم.
- در نهایت تبدیل شده قسمت های صحیح و اعشاری را به هم می چسبانیم.

اما روش ضربهای متوالی بصورت زیر می باشد:

قسمت اعشاری عدد را در R ضرب کرده و قسمت صحیح حاصل ضرب را جدا کرده و نگه میداریم. قسمت اعشار حاصل ضرب را مجدداً در R ضرب می کنیم و دوباره قسمت صحیح آن را جدا کرده و نگه می داریم. آنقدر این عمل را تکرار می کنیم تا اینکه یکی از سه حالت زیر پیش بیاید:

۱) تعداد اعشار خاصی مد نظر باشد (به تعداد اعشار، عمل ضرب انجام می دهیم)

۲)قسمت اعشار حاصل ضرب صفر شود.

۳)حاصل ضرب در حلقه تکرار بیفتد.

آنگاه قسمت های صحیح حاصل ضربها که از قبل نگه داشته ایم را در کنار هم قرار داده و حاصل بدست می آید.

$$(39.625)_{10} = (?)_2$$

$$39.625 = 39 + 0.625$$

$$(39)_{10} \xrightarrow{\text{طبق تقسیمات متوالی}} (?)_2$$

$$(0.625)_{10} \longrightarrow (?)_2$$

$$0.625 \times 2 = \underline{1}.25$$

$$0.25 \times 2 = \underline{0}.5$$

$$0.5 \times 2 = \underline{1}.0$$

قسمت اعشار به صفر رسید

توقف محاسبات

101

حالا از بالا به پایین حاصل های بدست آمده را می نویسیم:

$$(39.625_{10}) = (\underbrace{100111}_{39}/\underbrace{101}_{0.625})_2$$ یعنی

اگر فرضاً در مثال قبل تا دو رقم اعشار مورد نظر بود دو تا ضرب انجام می دادیم و حاصل عبارت بصورت مقابل بود:

$$(100111.10)$$

مثال)

$(39.3)_{10} = (?)_2$

$39.3 = 39 + 0.3$ $\qquad$ $(39)_{10} = (100111)_2$

$$\begin{aligned}
&0.3\times 2 = 0.6\\
&0.6\times 2 = 1.2\\
&0.2\times 2 = 0.4\\
&0.4\times 2 = 0.8\\
&0.8\times 2 = 1.6\\
&0.6\times 2 =
\end{aligned}$$

$(0.3)_{10} = (0.01001)_2$

ضرب تکراری نشان دهنده دوره تناوب است و در نتیجه محاسبات متوقف می شود.

بنابراین $(39.3)_{10} = (100111.01001)_2$

مثال) معادل عدد $(45.4)_{10}$ کدام عدد در مبنای هشت است؟

حل: عدد بدو قسمت 45 و 0.4 تفکیک می شود:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 8 \\ \hline 40 & 5 \\ \hline 5 & \end{array} \Longrightarrow (55)_8$$

$0.4 \times 8 = \underline{3}.2$
$0.2 \times 8 = \underline{1}.6$
$0.6 \times 8 = \underline{4}.8$
$0.8 \times 8 = \underline{6}.4$
$0.4 \times 8 =$

$\Longrightarrow (3146)_8$

در نتیجه جواب $(55.3146)_8$ خواهد بود.گ

مثال) معادل $(29.5)_{10}$ کدام عدد در پایه ۱۶ است؟

29.5=29+0.5

$$\begin{array}{r|l} 29 & 16 \\ \hline 16 & 1 \\ \hline 13 & \end{array} \qquad (1D)_{16}$$

$0.5\times 16 = 8.0 \Rightarrow$ قسمت اعشار صفر شد

نتیجه : $(1D.8)_{16}$

۱-۲-۲) تبدیل اعداد مبنای R به مبنای ۱۰:

برای چنین تبدیلی از فرمول ارزش مکانی که در قسمت (۲-۱-۱) توضیح داده شد استفاده میکنیم بدین ترتیب که هر عدد y در پایه R بصورت زیر می باشد:

$$y_R = \left(d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{1-} d_{-2} \ldots d_{-m}\right)$$

اگر بخواهیم عدد y را به پایه ۱۰ ببریم کافی است فرمول ارزش مکانی را برای آن نوشته و حاصل ضرب و جمع ها را بدست آوریم:

$$y_{10} = d_n \times R^n + d_{n-1} \times R^{n-1} + \ldots + d_1 \times R^1 + d_0 \times R_0 + d_{-1} \times R^{-1} + \ldots + d_{-m} \times R^{-m}$$

مثال)

$$\left(\overset{3\,2\,1\,0\;\;-1-2-3}{1100.0\,1\,1}\right)_2 = (?)_{10}$$

$$1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} = 8+4+0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = (12.375)10$$

مثال) معادل عدد $(1A.D)_{16}$ در مبنای 10 کدامست؟

$$1A.D = 1\times 16^1 + A\times 16^0 + D\times 16^{-1} = 16+10+\left(13\times\frac{1}{16}\right) = 26.8125$$

نکته: روش سریع تبدیل اعداد دسیمال به باینری:

برای اینکه بتوانیم اعداد دسیمال صحیح را به سرعت به باینری و برعکس تبدیل کنیم کافی است توانهای عدد ۲ را به ترتیب بنویسیم. سپس جایگاه عدد مورد نظر را در بین توانهای 2۲ پیدا کنیم و ببینیم که عدد از کدامیک از این توانهای ۲ تشکیل شده است:

		...256	128	64	32	16	8	4	2	1
مثلاً عدد:	39				1	0	0	1	1	1
	70			1	0	0	0	1	1	0
	140		1	0	0	0	1	1	0	0
	300	1	0	0	1	0	1	1	0	0

برای تبدیل اعداد باینری به دسیمال نیز چنین می توان عمل کرد که بالای هر کدام از ارقام باینری توانهای 2۲ را قرار داد و توان ۲هر کدام از ارقام یک عدد را با هم جمع نمود . مثلا

$$\overset{64\,32\,16\,8\,4\,2\,1}{1\,1\,0\,0\,1\,0\,0} = 64+32+4 = 100$$

$$\overset{256\,128\,64\,32\,16\,8\,4\,2\,1}{1\;0\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;0} = 256+32+8+4 = 300$$

۱-۲-۳) تبدیل اعداد غیر از مبنای ۱۰:

در این قسمت دو حالت تبدیل اعداد مبنای ۸ و۱۶ به مبنای ۲ و برعکس را درنظر می گیریم در هر دو حالت می توان ابتدا عدد را به مبنای ۱۰ برد و سپس به مبنای مورد نظر تبدیل کرد. یعنی مثلا اگر بخواهیم یک عدد مبنای ۱۶ را به مبنای ۲ ببریم ابتدا آنرا با فرمول ارزش مکانی به مبنای ۱۰ برده سپس آنرا با تقسیمات متوالی به مبنای ۲ می بریم.

اما روش ساده تر بدین ترتیب است که:

* هر عدد مبنای ۸ معادل سه رقم باینری است طبق جدول زیر:

رقم اکتال	باینری 4	2	1
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

مثال: $(73.14)_8 = (?)_2$

کافی است معادل تک تک ارقام عدد 73.14 را از جدول بیابیم:

$\underset{7}{111}\ \underset{3}{011}/\ \underset{1}{001}\ \underset{4}{100}$

مثال: $(1101.11011)_2 = (?)_8$

از ممیز به راست و چپ سه تا سه تا جدا میکنیم.اگر رقم کم آوردیم از صفر استفاده میکنیم

$\underline{001}\ \underline{101}.\underline{110}\ \underline{110}$

حال معادل اکتال هر سه رقم باینری را در جدول میابیم:

$(15.66)_8$

* هر رقم مبنای ۱۶ معادل ٤ رقم باینری است طبق جدول زیر:

هگزا دسیمال	رقم باینری			
	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

مثال) $(AE2.1B)_{16}=(\ ?\ )_2$

معادل تک تک ارقام عدد AE2.1B را از جدول می یابیم و جایگزین می کنیم.

$$(\underset{A}{1010}\ \underset{E}{1110}\ \underset{2}{0010}\ .\ \underset{1}{0001}\ \underset{B}{1011})_2$$

مثال: $(100101.11)_2=(?)_{16}$

از ممیز به سمت راست و به سمت چپ چهار چهار تا چهار تا جدا می کنیم و اگر رقم کم آوردیم از صفر در سمت راست و سمت چپ عدد استفاده می کنیم.آنگاه معادل هر دسته چهار تایی را از جدول می نویسیم:

$$\underset{2}{0010}\ \underset{5}{0101}\ .\underset{C}{1100}=(25.C)_{16}$$

* برای تبدیل اعداد هگز به اکتال و برعکس کافی است مبنای ۲ را واسطه قرار دهیم:

مثال) معادل عدد $(17.25)_8$ کدام عدد در پایه ۱۶ است.

$$17.25=\underset{1}{001}\ \underset{7}{111}\ .\underset{2}{010}\ \underset{5}{101}$$

حال به دسته های ٤ تایی تقسیم می کنیم

$$\underset{F}{1111}\ \ \underset{0}{0000}\ .\underset{4}{0100}\ \ \underset{5}{0101}$$

مثال)معادل عدد $(FF.FF)_{16}$ کدام عدد در مبنای ۸ است؟

$$FF.FF = \underset{3}{011}\ \underset{7}{111}\ \underset{7}{111}\ .\underset{7}{111}\ \underset{7}{111}\ \underset{6}{110}$$

۱-۲-٤) محاسبات در مبناهای مختلف:

الف) جمع و تفریق باینری:

جمع باینری بیت به بیت طبق الگوهای زیر انجام می شود:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1+ \\ \underline{\ \ 1\ \ } \\ 1\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{1+} \\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ \underline{0+} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{0+} \\ 1 \end{array}$$

مثال:

$(0111)_2 + (1011)_2 = (\quad ? \quad)_2$

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1}\ + \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

تفریق باینری نیز بیت به بیت طبق الگوی زیر انجام می گیرد:

$$\begin{array}{r} \boxed{10} \\ \cancel{0}\ - \\ \underline{1} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{1-} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{0-} \\ 1 \end{array}$$

در مورد آخر به شرط وجود یک رقم قرضی حاصل 1 میشود.

مثال:

$(1101)_2 - (0011)_2 = (\quad ? \quad)_2$

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{0} & \boxed{10} & \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1}\ - \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ب) جمع و تفریق اکتال:

در جمع مبنای ۱۰ هرگاه حاصل جمع دو رقم متناظر از ۱۰ بیشتر شود، ۱۰ تا از حاصل کم شده و به رقم کناری ۱ واحد اضافه می شود: مثلا ۳۶+۸۹ در مبنای ۱۰:

$$\begin{array}{r} \boxed{1}\boxed{1} \\ 36 \\ + \quad 89 \\ \hline 125 \end{array}$$

حال در مبنای ۸ ، یک دسته ۸ تایی از حاصل جمع کم شده و به دسته کناری ۱ واحد اضافه می شود:

مثال:

$(56)_8 + (67)_8 = (\ \ ?\ \ )_8$

$$\begin{array}{r} \boxed{1}\boxed{1} \\ 67 \\ + \quad 56 \\ \hline 145 \end{array}$$

تفریق هم به همین ترتیب در جاییکه نیاز به رقم قرضی است، از رقم سمت راستی یک واحد کم شده و به رقم فعلی ۸ واحد اضافه می شود: مثلا،

$(174)_8 - (56)_8 = (\ \ ?\ \ )_8$

$$\begin{array}{rrr} & 6 & (12) \\ 1 & \cancel{7} & \cancel{4} \\ - & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 6 \end{array}$$

ج) جمع و تفریق هگزا دسیمال:

در این جا هم واحد بسته های نقلی و قرضی ۱۶ تایی می باشند:

مثال:

$(A9E)_{16} + (5CD)_{16} = (\ \ ?\ \ )_{16}$

$(45A)_{16} - (2FC)_{16} = (\ \ ?\ \ )_{16}$

$$\begin{array}{rrrr} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \\ & A & 9 & E \\ + & 5 & C & D \\ \hline 1 & 0 & 6 & B \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & (20) & \\ \boxed{3} & \cancel{\boxed{4}} & (26) \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{A} \\ 2 & F & C \\ \hline 1 & 5 & E \end{array}$$

مثال:

در عبارت $(A42)_{16}+(BC1)_{16}=(\ \ ?\ \ )_8$ بجای علامت سؤال چه عددی باید قرار گیرد؟

$$\begin{array}{r} \boxed{1}\ \boxed{1}\ \ \\ A\ 4\ 2 \\ +\ \ B\ C\ 1 \\ \hline 1\ 6\ 0\ 3 \end{array}$$

حال باید $(1603)_{16}$ را به مبنای ۸ ببریم:

$(1603)_{16} = (0001\ 0110\ 0000\ 0011)_2$

$(0\ \underline{001}\ \underline{011}\ \underline{000}\ \underline{000}\ \underline{011})_2 = (13003)_8$

مثال:)حاصل عبارت $(AC2)_{16}-(11011)_2=(?)_8$ چیست؟

$(11011)_2 = (1B)_{16}$

$$\begin{array}{rrr} & \cancel{\boxed{B}} & (18) \\ A & \cancel{C} & \cancel{2} \\ - & 1 & B \\ \hline A & A & 7 \end{array}$$

حال باید حاصل به مبنای ۸ برده شود:

$(AA7)_{16}= (1010\ 1010\ 0111)_2$

$(\underline{101}\ \underline{010}\ \underline{100}\ \underline{111})_2 = (5247)_8$

تمرینات سری اول:

۱)اعداد دسیمال زیر را به باینری تبدیل نمائید

۶٤/۳　　　　۰/٤۷۵　　　　۵۱۲/۵

۲)اعداد دسیمال زیر را به اکتال و سپس به هگزا دسیمال تبدیل کنید.

۱۷　　　　۰/۶۲۵　　　　۹۳۲

۳)اعداد دودوئی زیر را به دسیمال و اکتال و هگزا دسیمال تبدیل کنید.

۱۱/۰۰۱　　　　۱۰۱۱/۱۰۱۱۱　　　　۰/۱۱۱۰۱

٤)اعداد هگزادسیمال زیر را به باینری تبدیل کنید.

12.BC　　　　0.A1　　　　B4.C8D

۵)حاصل عبارت $(3260)_8+(742)_8=(?)_{16}$ چیست ؟

۶)حاصل عبارت $(AB4)_{16}+(C1A)_{16}$ کدام عدد در مبنای 16 است؟

۷)حاصل عبارت $(1011110111)_2-(111111)_2=?$ کدام عدد باینری است؟