



درس تجزیہ و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

دکتر منصور زینلی

فصل اول

سیگنال: نشانه یا علامت هر کمیت فیزیکی (قابل اندازه گیری) است.

انواع سیگنال :

۱- سیگنال پیوسته در زمان که به صورت $x(t)$ نشان داده میشود و t یک متغیر مستقل و یک عدد طبیعی است .

مثال $x(t) = \sin t$

۲- سیگنال گسسته به صورت $x[n]$ نشان داده می شود و n یک عدد صحیح است .

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

سیگنال های انرژی و توان

برای مقاومت داریم (مثال) $P = R.i^2 = \frac{v^2}{R}$

$$E = \int P(t) dt = \int R.i^2 dt = \int \frac{v^2}{R} dt$$

انرژی یک سیگنال در فاصله ی زمانی $[T_1, T_2]$ به صورت زیر است:

$$E = \int_{T_2}^{T_1} |x(t)|^2 dt$$

$$x(t) = A + jB = |x(t)| e^{j\angle x(t)}$$

$$|x(t)| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \angle x(t) = \tan^{-1} \frac{A}{B}$$

$$Ae^{j\varphi(t)} = A \cos \varphi(t) + jA \sin \varphi(t)$$

مثال) $x(t) = \cos t + j \sin 2t$

$$|x(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 2t}$$

$$\angle x(t) = \tan^{-1} \frac{\sin 2t}{\cos t}$$

$$x^*(t) = A - jB = |x(t)| e^{-j\angle x(t)}$$

$$x(t) \cdot x^*(t) = A^2 + B^2 = |x(t)|^2$$

مثال : انرژی کل سیگنال های زیر را به دست آورید

۱) $x(t) = 3 e^{2jt}$

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} 9 dt = 9t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

۲) $x(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \geq 0 \\ e^{2t} & t < 0 \end{cases}$

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^0 e^{4t} + \int_0^{+\infty} e^{-6t} = \frac{1}{4} e^{4t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{6} e^{-6t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{10}{24}$$

انرژی کل یک سیگنال گسسته چنین تعریف می شود

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

$$\text{مثال)} \quad x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$E_{\infty} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

فرمول های مهم :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

$$2) \sum_{n=0}^N \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$$

$$1) \sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}$$

مثال)

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & 5 \leq n \leq 13 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$E_{\infty} = \frac{(\frac{1}{9})^5 - (\frac{1}{9})^{14}}{1 - \frac{1}{9}}$$

اگر انرژی یک سیگنال محدود شود به آن سیگنال انرژی میگویند

توان یک سیگنال در بازه ی زمانی $[T_1, T_2]$ چنین است :

$$P = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \frac{1}{N_2 - N_2 + 1} + \sum_{n=N}^{N_2} |x[n]|^2$$

توان متوسط یک سیگنال به صورت زیر است :

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

مثال (توان متوسط سیگنال های زیر را به دست آورید:

1) $x(t) = t$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T T^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} * \frac{t^3}{3} \Big|_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} * \frac{2T^3}{3} = +\infty$$

2) $x(t) = e^{-3t}$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-6t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{-1}{12T} [e^{-6T} - e^{6T}] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{e^{6T}}{12T} = +\infty$$

$$3) \quad x(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T e^{-6t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{12T} (1 - e^{-6T}) = 0$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 4 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{4(N+1)}{2N+1} = 2$$

سیگنال های متناوب

اگر $x(t)$ یک سیگنال پیوسته ی متناوب با دوره تناوب T_0 است اگر :

$$x(t) = x(t + T_0) \quad , \text{ for All } t$$

اگر T_0 کوچکترین عددی باشد که رابطه ی فوق برای آن برقرار است T_0 را دوره ی تناوب اصلی می نامند

$$\text{مثال} \quad x(t) = \cos t \quad , \quad T_0 = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

$$\text{مثال} \quad x(t) = \cos \omega_0 t \quad , \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\text{مثال} \quad x(t) = \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t) \quad T_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$\text{مثال} \quad x(t) = \cos t + \cos \frac{2t}{3} + \sin \frac{t}{5}$$

$$T_2 = 3\pi, T_3 = 10\pi, T_1 = 2\pi,$$

$$T_0 = 30\pi$$

که T کل از ک.م.م T ها به دست می آید

$$\text{مثال} \quad x(t) = \cos t \cdot \cos 2t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos 3t + \frac{1}{2} \cos t$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}, T_2 = 2\pi$$

$$T_0 = 2\pi$$

$x[n]$ یک سیگنال متناوب است اگر

$$x[n] = x[n+N_0] \quad \text{for All } n$$

$$\text{مثال) } x[n] = \cos \frac{n}{3}$$

$$N_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

$$x[n] = \cos [\pi n^2]$$

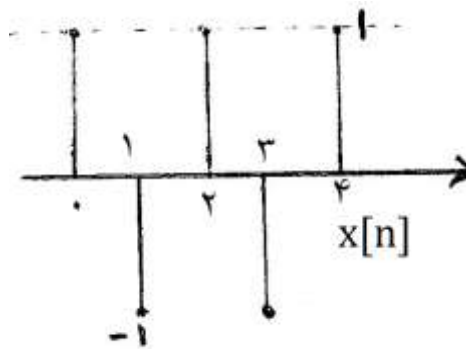
$$x[n] = x[n+N_0] \rightarrow \cos \pi(n+N_0)^2$$

$$\rightarrow \cos \pi n^2 = \cos (\pi n^2 + 2nN_0\pi + \pi N_0^2) = \cos (\pi n^2 + \pi N_0^2)$$

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi)$$

$$\pi N_0^2 = 2k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$N_0 = 2$$

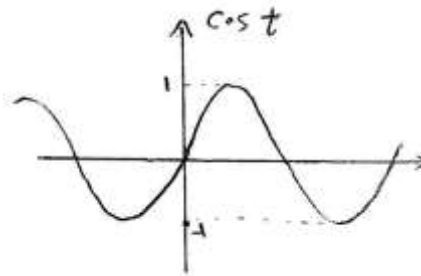


سیگنال های زوج (even) و فرد (odd)

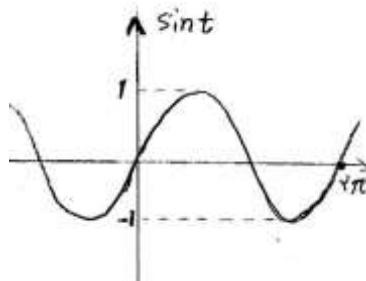
یک سیگنال زوج است اگر :

$$x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = x[-n]$$



و فرد است اگر:



$$x(t) = -x(-t)$$

$$x(-t) = -x(t)$$

$$x[n] = -x[-n]$$

قسمت های زوج و فرد یک سیگنال چنین تعریف میشود :

$$x_e(t) = Ev\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_o = Odd\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

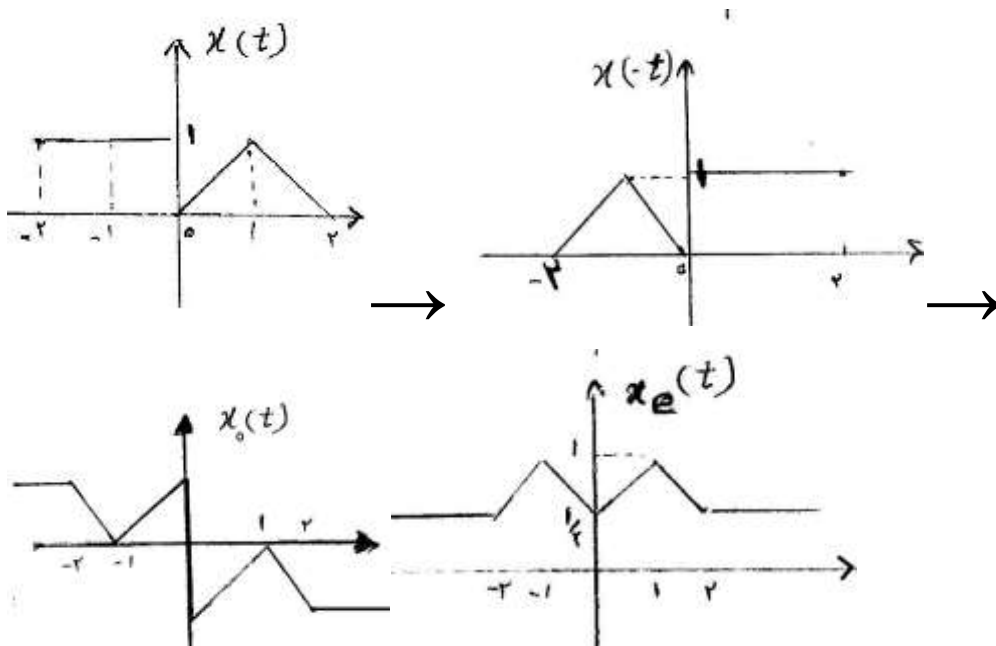
مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

$$1) x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$x_e(t) = \frac{e^{jt\omega_0} + e^{-jt\omega_0}}{2} = \cos t\omega_0$$

$$x_o(t) = \frac{e^{jt\omega_0} - e^{-jt\omega_0}}{2} = j \sin t\omega_0$$

2)

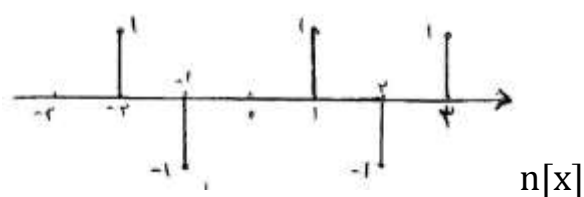


$$3) x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ t & -1 < t < 0 \\ -t + 2 & 2 < t < -1 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

$$x(-t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ -t & -1 < t < 0 \\ -t + 2 & 0 < t < 1 \\ 0 & t < -2 \end{cases}$$

$$x_e(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t < -2 \\ \frac{t+3}{2} & -2 < t < -1 \\ \frac{1-t}{2} & -1 < t < 0 \end{cases}$$

مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

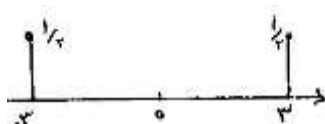


$$x_e[-3] = \frac{x[-3] + x[3]}{2} = \frac{1}{2} = x_e[3]$$

$$x_e[-2] = 0 = x_e[2]$$

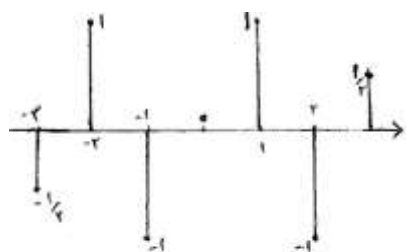
$$x_e[-1] = 0 = x_e[1]$$

$$x_e[0] = 0 \quad x_e[n]$$



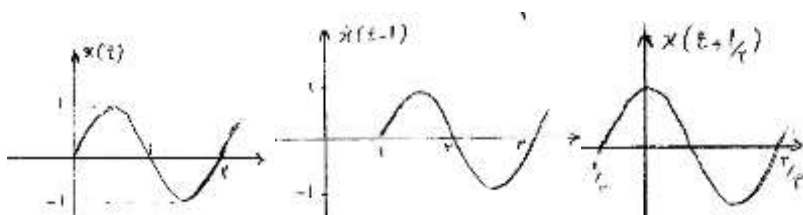
$$x_o[-3] = \frac{1}{2} x_o[-2] = 1$$

$$x_o[-1] = -1 x_o[0] = 0 x_o[n]$$



تبدیل های متخیر مستقل:

سیگنال $x(t-t_0)$ از انتقال سیگنال $x(t)$ در موضه ی زمان به اندازه ی $t_0 > 0$ ایجاد میشود اگر $t_0 > 0$ شیفت به راست و اگر $t_0 < 0$ به چپ شیفت پیدا می کند که داریم:

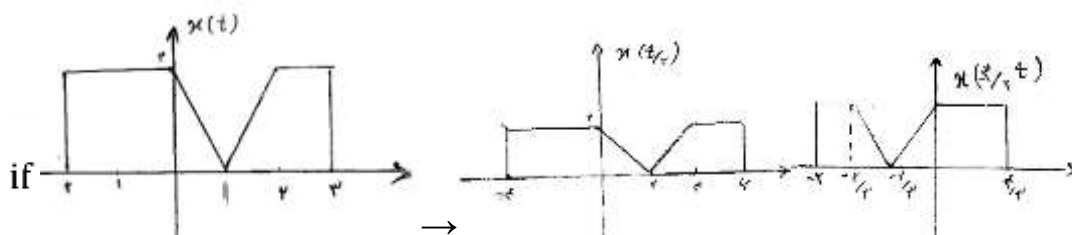


سیگنال $x(\alpha t)$ از تغییر مقیاس $x(t)$ در موضه ی زمان به اندازه ی $\frac{1}{\alpha}$ ایجاد میشود.

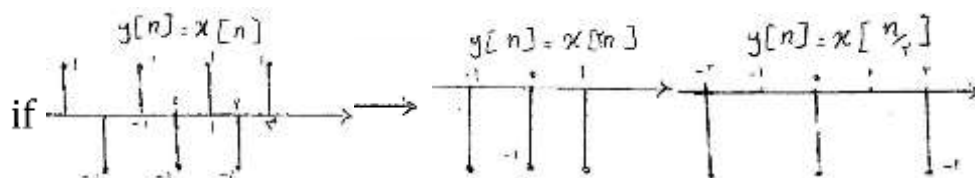
اگر $|\alpha| > 1$ باشد سیگنال فشرده و در غیر این صورت باز می شود

(مثال)

۱)

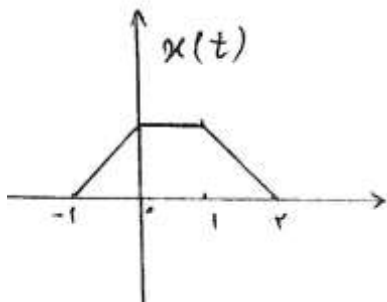


۲)

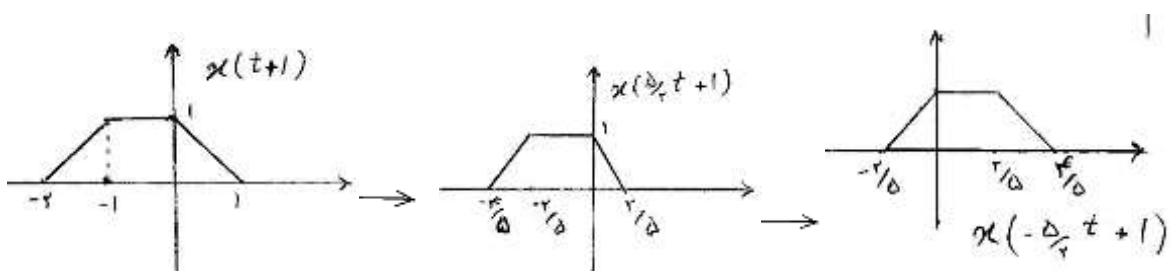


-سیگنال $x(\alpha t + \beta)$ از انتقال سیگنال $x(t)$ به اندازه ی $-\beta$ و تغییر مقیاس عرضی β و تغییر افقی مقیاس سیگنال به اندازه ی $\frac{1}{\alpha}$ حاصل میشود.

(مثال) اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد مطلوب است: $x(-\frac{5}{2}t + 1)$



مل)

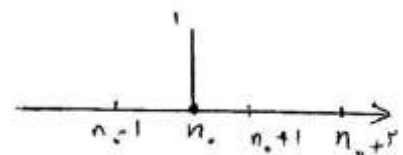


سیگنال های پله ی واحد و ضربه و پله گسسته

یک سیگنال ضربه ی واحد گسسته این چنین تعریف می شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

مثال $\delta[n - n_0]$

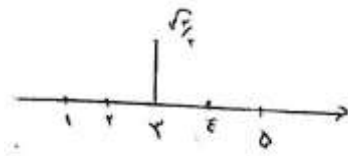


فاصلیت غربالی سیگنال ضربیه:

$$x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0] = \begin{cases} x[n_0] & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases}$$

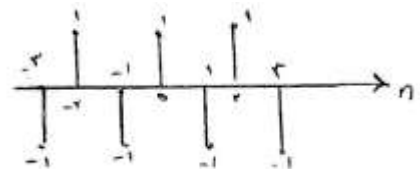
(مثال)

$$\cos \frac{n^2 \pi}{4} \delta[n - 3] = \cos \frac{9\pi}{4} \delta[n - 3] = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta[n - 3]$$



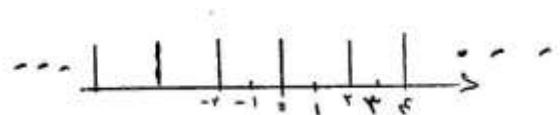
(مثال)

$$x[n] = \sum_{k=-3}^3 (-1)^k \delta[n - k] = (-1)\delta[n + 3] + \delta[n + 2] + (-1)\delta[n + 1] + \delta[n] + (-1)\delta[n - 1] + \delta[n - 2] + (-1)\delta[n - 3]$$

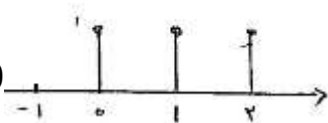


(مثال)

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 2k] = \dots + \delta[n + 4] + \delta[n + 2] + \delta[n] + \dots$$

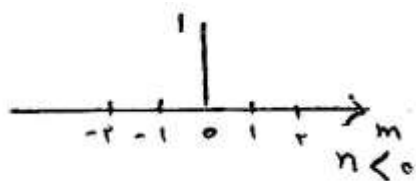


سیگنال پله ی واحد گسسته چنین تعریف می شود:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$


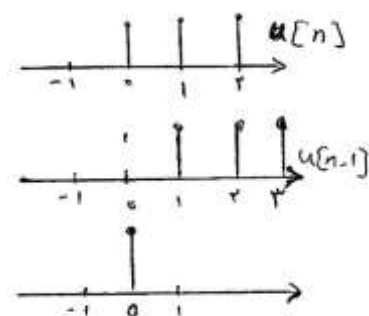
بر حسب ضرب:

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=-\infty} \delta[m] \quad (m = n - k)$$



تابع ضربی پله:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



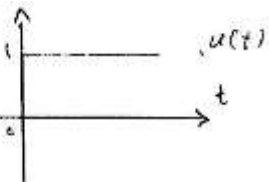
تمرین: سیگنال‌های زیر را رسم کنید.

- 1) $x[n] = u[n+3] - u[n-3]$
- 2) $x[n] = u[3-n] - u[n+4]$
- 3) $x[n] = \cos \pi n^2 \sum_{k=-6}^4 \delta[n-k]$
- 4) $x[n] = u[n+10] u[10-n]$

$$5) x[n] = \sum_{k=-3}^3 (-1)^k u[n-k]$$

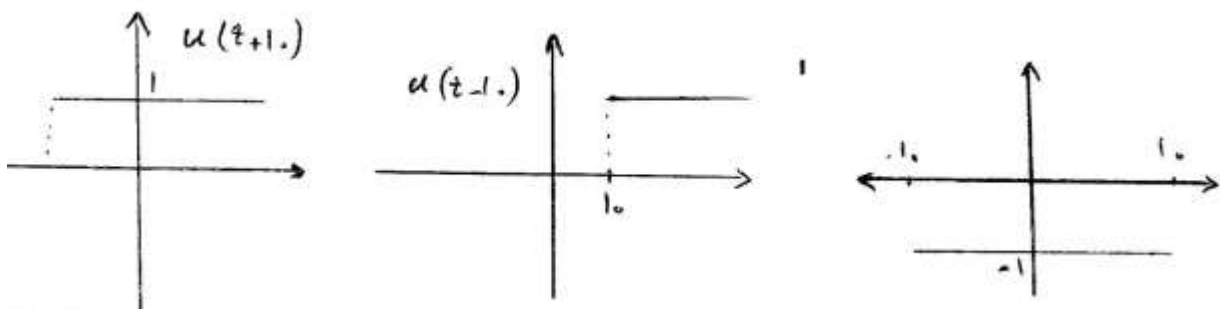
سیگنال های پله و ضربه ی واحد

سیگنال واحد پله و ضربه ی واحد چنین تعریف میشود:

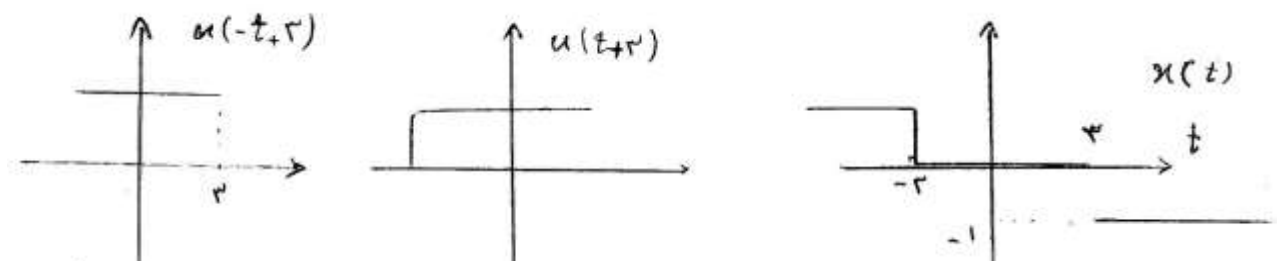
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$


مثال (سیگنال های زیر را رسم کنید :

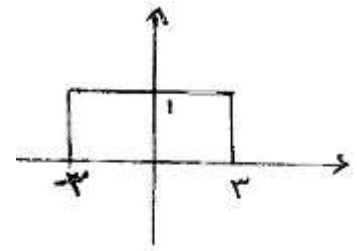
$$1) x(t) = u(t-10) - u(t+10)$$



$$2) x(t) = u(-t+3) - u(t+3)$$

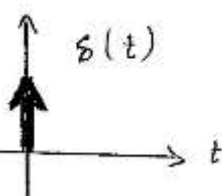


$$3) x(t) = u(t-3) \cdot u(t+3)$$



سیگنال ضربه‌ی واحد پیوسته

این سیگنال چنین تعریف می‌شود:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

روابط بین تابع ضربه و تابع پله به این شکل است:

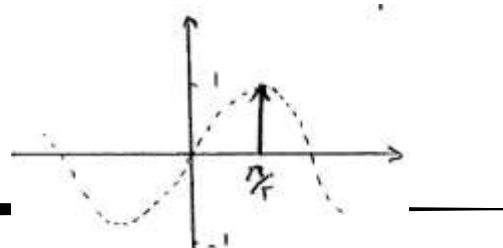
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') dt' \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

خاصیت غربالی سیگنال ضربه

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0) \times \delta(t - t_0)$$

(مثال)

$$1) \sin t \cdot \delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$



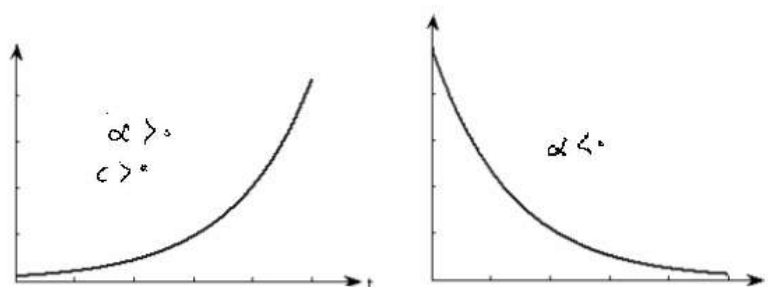
$$2) \sin t \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

سیگنال های نمایی پیوسته

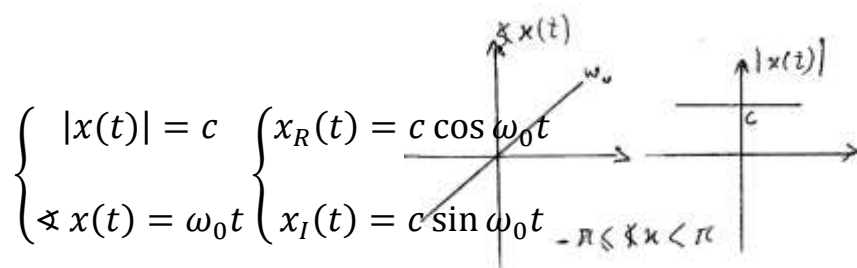
یک سیگنال نمایی پیوسته به یکی از سه حالت زیر می باشد:

$$1) x(t) = c e^{\alpha t}$$

c, α دو عدد حقیقی اند

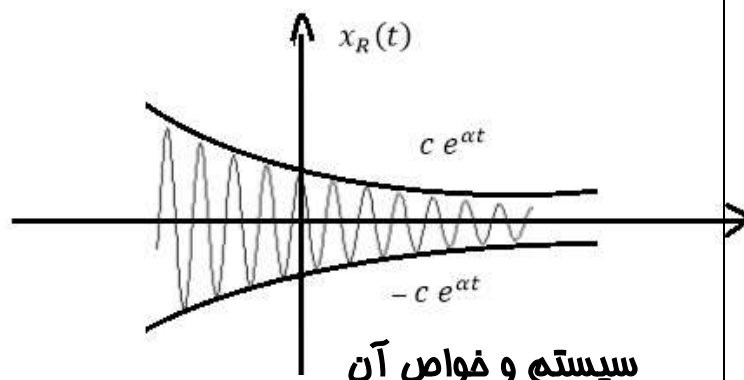


$$2) x(t) = c e^{j\omega_0 t}$$



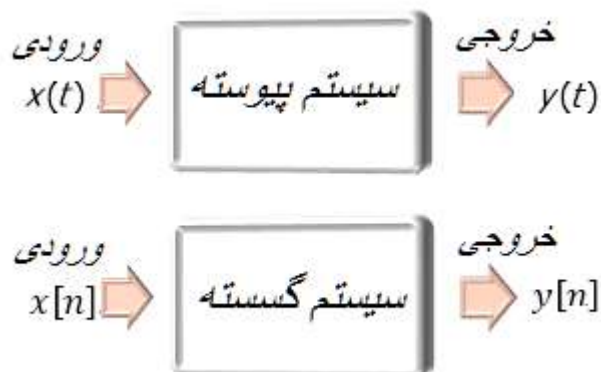
$$3) x(t) = c e^{\alpha t} e^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{cases} |x(t)| = c \\ \angle x(t) = \omega_0 t \end{cases} \begin{cases} x_R(t) = c e^{\alpha t} \cos \omega_0 t \\ x_I(t) = c e^{\alpha t} \sin \omega_0 t \end{cases}$$



سیستم و خواص آن

یک سیستم فرآیندی است که یک یا چند ورودی را به یک یا چند خروجی تبدیل میکند



$$y(t) = T\{x(t)\}$$

خواص سیستم ها:

(۱) حافظه دار بودن: سیستم بودن حافظه سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به مقدار خروجی وابسته باشد (به گذشته وابسته نباشد)

سلف و فازن جزء سیستم های حافظه دارند ولی مقاوت یک سیستم بدون حافظه است

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases} \quad \text{مقاومت}$$

$$\begin{cases} v(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i(t') dt' \\ y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(t') dt' \end{cases} \quad \text{فازن}$$

$$\begin{cases} v(t) = l \frac{di(t)}{dt} \\ y(t) = l \frac{du(t)}{dt} = l \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta)}{\Delta} \end{cases} \quad \text{سلف}$$

مثال یک سیستم حافظه دار:

$$y[n] = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m [n-k] = \frac{1}{m+1} (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-m])$$

*اگر داخل پرانتز ها و یا گروه ها عملیات ریاضی انجام شده باشد سیستم حافظه دار است .

۲) علی بودن: سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط وابسته به مقادیر حال و گذشته ی ورودی باشد و به آینده وابسته نباشد (در واقعیت هیچ سیستمی به آینده وابسته نیست)

کلیه ی سیستم های بدون حافظه علی اند

مثال برای سیستم غیر علی:

$$y[n] = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^m x[n-k] = \frac{1}{2m+1} (x[n+m] + \dots)$$

۳) وارون پذیری : سیستمی که بتوان از خروجی آن ورودی را به طور یکتا تعیین کرد.



مثال

$$1) y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(t') d' \xRightarrow{\text{وارون}} x(t') = c \frac{dy(t)}{dt}$$

$$2) y(t) = l \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t y(t') dt' \quad \text{وارون پذیر}$$

$$x(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t y(t') dt' + C \quad \text{وارون پذیر نیست}$$

$$3) y[n] = x^2[n] \rightarrow x[n] = \pm \sqrt{y[n]}$$

مثال نقض :

$$x_1[n] = 1 \rightarrow y_1[n] = 1$$

$$x_2[n] = -1 \rightarrow y_2[n] = 1$$

$$4) y(t) = \sin x(t)$$

$$x(t) = \sin^{-1} y(t) + 2k\pi \quad y(t) = 0 \rightarrow x(t) = 0 \pm \pi, \pm 2\pi$$

۱۴) پایدار بودن: سیستمی پایدار است که از ورودی ها با دامنه ی محدود ، خروجی با دامنه ی محدود تولید کند .

$$|x(t)| < B_x \rightarrow |y(t)| < B_y$$

B_x و B_y دو عدد محدود

مثال)

$$1) y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(t') dt'$$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t dt' \rightarrow +\infty \quad \text{مثال نقض}$$

$$2) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{مثال نقض} \quad x(t) = u(t) \rightarrow y(t) = \delta(t)$$

۵) تغییر پذیری با زمان: سیستمی است که به ازای ورودی های یکسان در زمان های مختلف خروجی های یکسان در زمان های مختلف تولید کند.

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = y(t - t_0)$$

مثال) تغییر پذیری یا نا پذیری سیستم های زیر را بررسی کنید .

$$1) y(t) = \int_{-\infty}^t x(t') dt'$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^t x_2(t') dt' = \int_{-\infty}^t x_2(t' - t_0) dt'$$

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t') dt' = \int_{-\infty}^t x(t'' - t_0) dt'' = y_2(t)$$

$$t'' = t' + t_0$$

$$2) y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx(t - t_0)}{dt}$$

$$y(t - t_0) = \frac{dx(t - t_0)}{dt} = y_2(t)$$

تمرین) تغییر پذیری یا ناپذیری سیستم زیر را بررسی کنید .

$$y(t) = x(2t)$$

۶) فطی بودن : یک سیستم فطی است اگر سیستم همگن و جمع پذیر باشد:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

مثال) فطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید:

$$1) y[n] = n^2 x[n]$$

$$x_1[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_2[n]$$

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow y_3 = n^2 x_3[n]$$

فطی است

$$2) y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) = 1 \rightarrow y_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = 3x_1(t) \rightarrow y_2(t) = 9$$

همگن نیست

$$3) y(t) = \text{Re}\{x(t)\} \quad x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$$x_2(t) = j \cdot x(t) \rightarrow y_2(t) = 0$$

همگن نیست

تمرین) فطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید:

$$1)y(t) = x(t) + 1$$

$$2)y(t) = \log_{10} x(t)$$

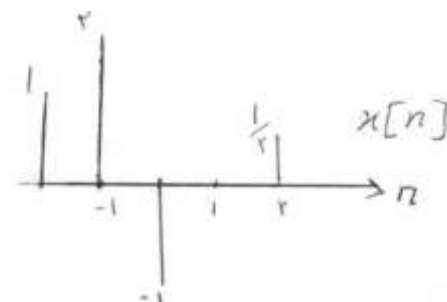
فصل دوم

سیستم های LTI

قضیه ی کانولوشن:

هر سیگنال گسسته را می توان بر مبنای مجموع توابع ضربه نوشت.

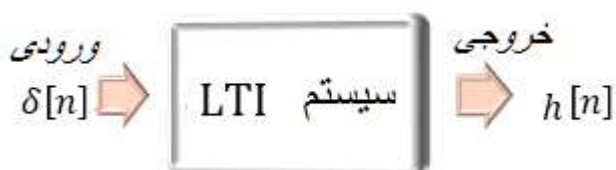
برای مثال سیگنال زیر را در نظر بگیرید:



$$x[n] = \dots + \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \dots =$$

$$\dots x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \dots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$



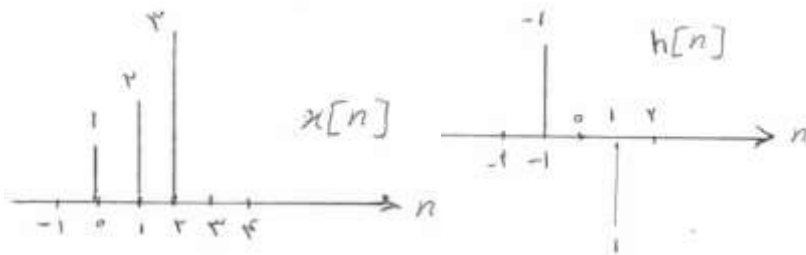
$$\delta[n-k] \xrightarrow{\text{فروبی}} h[n-k]$$

$$x[k] \delta[n-k] \xrightarrow{\text{فروبی}} x[k] h[n-k]$$

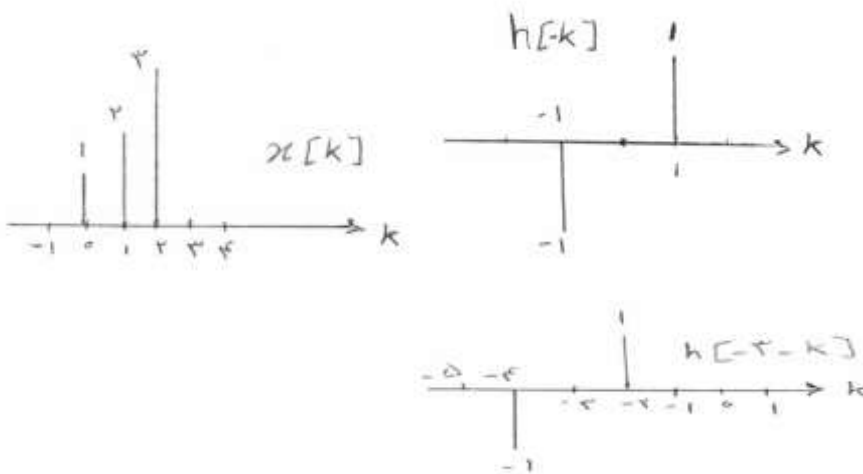
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = y[n]$$

جمع کانولوشن $y[n] * h[n]$

مثال) کانولوشن زیر را مساب کنید:



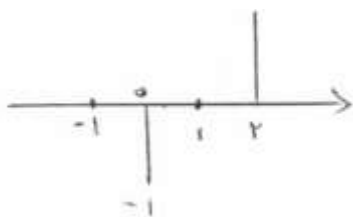
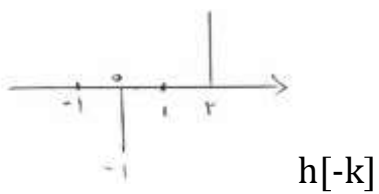
حل)



$$y[-3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-3-k] = 0$$

$$h[-2-k]$$

$$y[-2] = 0 \quad h[-1] = 1 \quad y[0] = 1$$



$$y[1-k]$$

$$y[1]=2$$

برای محاسبه ی کانولوشن میتوان مراحل زیر را طی نمود:

۱- $x[k]$ و $h[k]$ را رسم می کنیم.

۲- $h[-k]$ را رسم نموده و به اندازه ی د شیفیت می‌دهیم تا $h[n-k]$ به دست آید.

۳- $x[k]$ و $h[n-k]$ را در هم ضرب کرده و مجموع حاصلضرب را به دست می آوریم تا $y[n]$ به دست آید

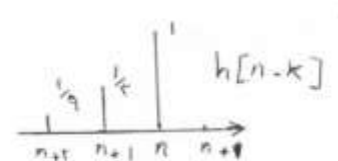
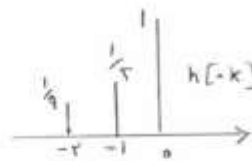
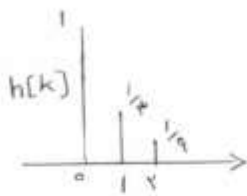
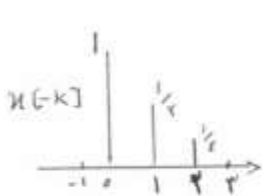
مثال) کانولوشن های زیر را محاسبه کنید:

$$1) y[n] = x[n] * \delta[n - 2]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-2] h[n-k] \\ &= x[n-2] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] = x[n-2] \end{aligned}$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

$$2) x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$



$$y[n] = 0 \quad n \leq -1$$

$$y[0] = 1$$

$$y[1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

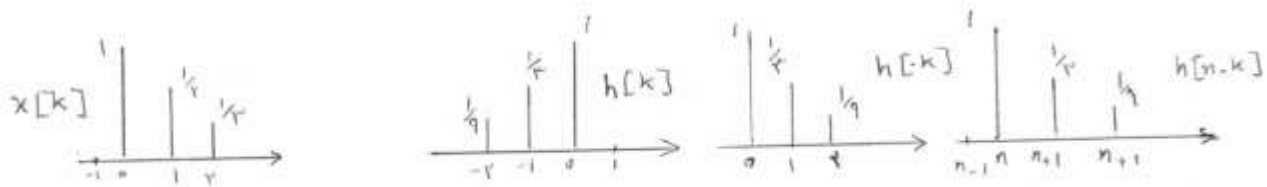
$$y[2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u[n-k]$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k u[k] \quad , \quad n \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$3) x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad h[n] = 3^n u[-n]$$



$$n < 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] 3^{n-k} u[-n+k]$$

$$= 3^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = 3^n \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}}$$

$$n \geq 0 \rightarrow 3^n \times \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k$$

تمرین / کانولوشن های زیر را محاسبه کنید:

$$1) x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad h[n] = u[n+10] - u[n-10]$$

$$2) x[n] = u[n] - u[n-40] \quad h[n] = u[n+10] + u[n-10]$$

قضیه ی کانولوشن برای سیگنال های پیوسته:

هر سیگنال پیوسته برمسب تابع ضربه بصورت زیر قابل نمایش است .

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$x(t) \rightarrow \text{سیستم LTI} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) \times h(t)$$

کانولوشن های زیر را محاسبه کنید:

$$1) x(t) = e^{-2t} u(t)$$

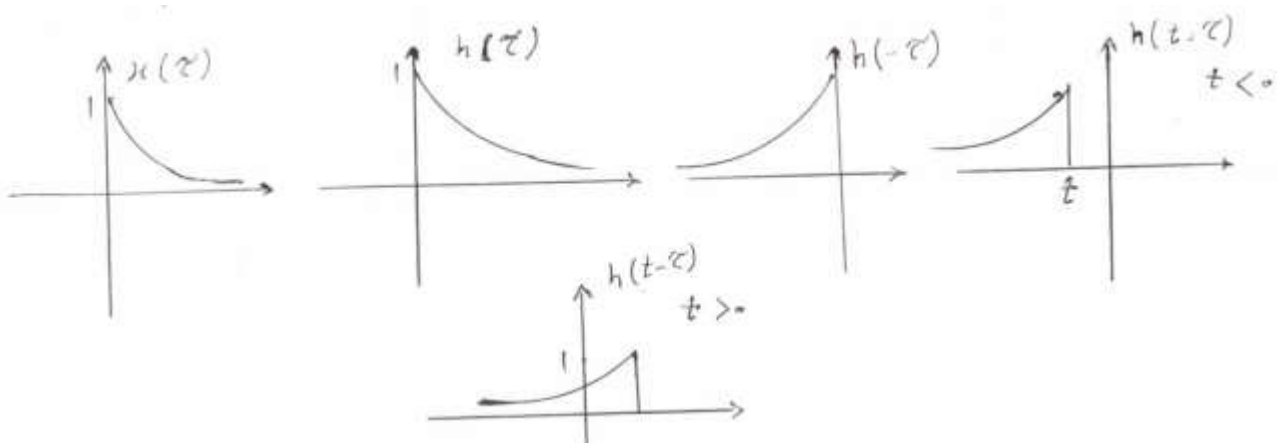
$$h(t) = e^{-3t} u(t)$$

حل

۱- $h(\tau)$ و $x(\tau)$ را رسم می کنیم

۲- $h(\tau)$ را نسبت به محور عمودی قرینه کرده و به ازای t شیفیت می دهیم تا $h(t - \tau)$ به دست آید.

۳- $x(\tau)$ و $h(t - \tau)$ را در هم ضرب کرده و از حاصلضرب انتگرال بگیرید تا $y(t)$ به دست آید



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

تمرین (

$$x(t) = 2[u(t) - u(t - 2)] \quad h(t) = e^t u(-t)$$

فواص كانولوشن:

(۱) جابجایی:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

(۲) شرکت پذیری:

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

(۳) توزیع پذیری:

$$x[n] * h_i\{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

فواص سیستم های LTI

(۱) حافظه دار بودن

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] h[k] =$$

$$= \dots + x[n-2] h[2] + x[n-1] h[1] + x[n] h[0] + x[n+1] h[-1]$$

$$+ x[n+2] h[-2] + \dots$$

: سیستم بدون حافظه

$$y[n] = Ax[n] \rightarrow h[n] \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ A & n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h[n] = A\delta[n] \\ h(t) = a\delta(t) \end{cases}$$

(۲) علی بودن: سیستمی که خروجی آن به ورودی وابسته نباشد (ضریب مولفه ها آینده ی آن صفر باشد).

$$\begin{cases} h[n] = 0 & n < 0 \\ h(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

(مثال)

$$h[n] = \frac{u[n-1]}{n}$$

(۳) پایداری: سیستمی پایدار است که در آن

$$|x[n]| < B_x \rightarrow |y[n]| < B_y$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k] h[k]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]| |h[k]|$$

$$1 \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| B_y \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \frac{B_y}{B_x}$$

شرط لازم و کافی یک سیستم LTI آن است که پاسخ ضربه ی آن مطلقاً جمع پذیر (انتگرال پذیر) باشد.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < m \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < m$$

(مثال)

$$h[n] = \frac{u[n-1]}{n}$$

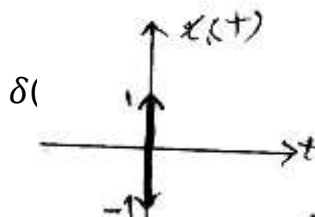
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \rightarrow +\infty \quad \text{ناپایدار}$$

$$h(t) = t(u(t+2))$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t u(t+2)| dt = -\int_{-2}^0 t dt + \int_0^{+\infty} t dt \rightarrow +\infty$$

تابع دوپلت و سایر توابع ویژه:

تابع دوپلت مشتق تابع ضربه است



$$u_1(t) \triangleq \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$x(t) * u_1(t) = x(t) * \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} x(t) * \delta(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$u_k(t) \triangleq \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$$

مثال

$$x(t) = \cos u(t) \quad , \quad h(t) = u(t)$$

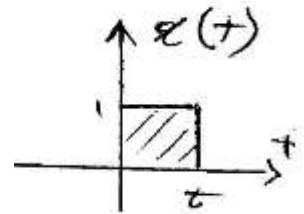
$$y(t) = u(t) * h(t) = ?$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} [-\sin t u(t) + \cos t \delta(t)]$$

$$y(t) = -\sin \delta(t) - \cos t u(t) + u(t)$$

$$u(t) \triangleq u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$u_{-2} = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = t u(t)$$



فصل سوم

سری فوریه سیگنال های LTI بیان ورودی برمسب یک سری از توابع پایه با ویژگی های زیر می تواند سودمند باشد .

- دسته ی بزرگی از سیگنال ها را می توان برمسب این توابع نوشت .
- فروجی این سیستم به سادگی به دست می آید.

یک دسته از این توابع پایه سیگنال های نمایی هستند . برای مثال سیگنال های زیر را در نظر بگیرید .

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \tau} h(\tau) d\tau \\ &= x(t) H(j\omega_0) \end{aligned}$$

$$H(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \tau} h(\tau) d\tau \quad \text{تبدیل فوریه پیوسته}$$

$$x[n] = z_0^n \quad \text{یک عدد مختلط دلخواه } z_0$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_0^{n-k} h[k] = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z_0^{-k} = x[n] H[z_0]$$

$$H[z] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \quad \text{تبدیل } z$$

بنابراین میتوان $x(t)$ را به صورت مجموع یک سری از توابع نمایی بصورت زیر نوشت:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 t} \quad \text{سری فوریه پیوسته}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega) e^{jkt\omega_0}$$

برای مناسبه ی ضرایب سری فوریه موقعی که سیگنال به صورت مجموعی از سیگنال ها است از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta j} + e^{-\theta j}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{\theta j} - e^{-\theta j}}{2j}$$

مثال (سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{-1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{1}{8} \cos(5t + 45^\circ)$$

$$T_0 = 2\pi \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4j} e^{j\omega} - \frac{1}{4j} e^{-j\omega} - \frac{1}{8} e^{-3j\omega} + \frac{1}{16} e^{j45^\circ} \cdot e^{j5t} + \frac{1}{16} e^{-j45^\circ} \cdot e^{-j5t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkt}$$

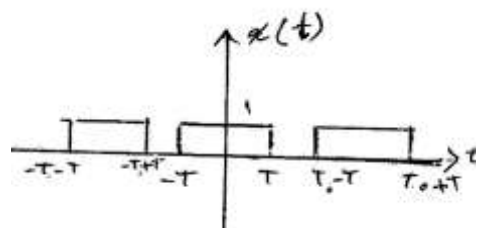
$$\frac{1}{3} = a_k e^{jkt} \rightarrow k = 0, a_0 = \frac{1}{3}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{4j} a_3 = a_{-3} = \frac{-1}{8} a_5 = \frac{1}{16} e^{j45^\circ} a_{-5} = \frac{1}{16} e^{-j45^\circ}$$

در حالت کلی ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

مثال) ضرایب سری فوریه قطار پالس زیر را مناسبه کنید .

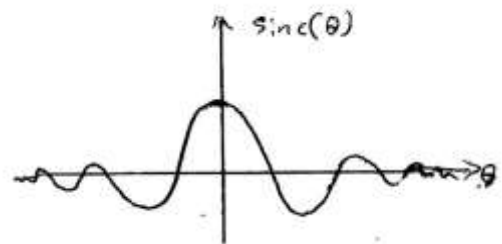


$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T (1) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{-1}{jk\omega} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{jk \frac{2\pi}{T_0} T} \cdot 2j \sin k\omega_0 T$$

$$\frac{\sin k \frac{2\pi}{T_0} T}{k\pi \frac{2\pi}{T_0}} \cdot \frac{2T}{T_0} = \frac{2T}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{2Tk}{T_0} \right)$$



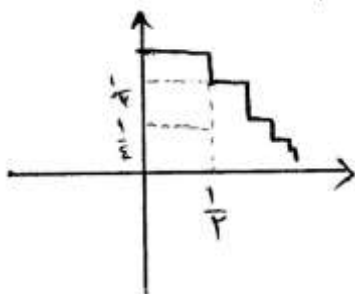
$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

شرایط همگرایی سری فوریه (شرایط دریکله):

۱- $x(t)$ در یک دوره ی متناوب مطلقا انتگرال پذیر باشد.

۲- مقدار min, max در یک دوره ی تناوب محدود باشد.

۳- تعداد ناپیوستگی $x(t)$ در یک دوره ی تناوب محدود باشد.



خواص سری فوریه

(۱) خطی بودن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F_s} a_k, T_0 x_2(t) \xleftrightarrow{F_s} b_k, T_0$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{F_s} \alpha a_k + \beta b_k, T_0$$

(۲) انتقال زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{F_s} a_k$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F_s} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt, t' = t - t_0$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt' = e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt'$$

مثال

$$x(t) = \cos 3t = \frac{1}{2} e^{3j\omega} + \frac{1}{2} e^{-3j} \quad , \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x(t - 2) = \cos 3(t - 2) = \cos(3t - 6) = \frac{1}{2} e^{3j\omega} \cdot e^{-6j} + \frac{1}{2} e^{-3jt} \cdot e^{6j}$$

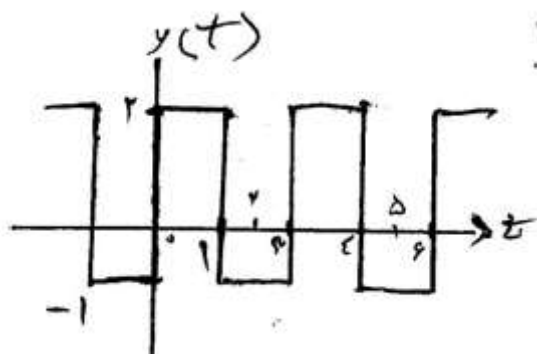
$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{-6j} \quad , \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \cdot e^{6j}$$

$$b_1 = a_k e^{-kj6}$$

$$b_1 = a_1 e^{-j6}$$

$$b_{-1} = a_{-1} e^{j6}$$

تمرین (ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را حساب کنید.



۳) وارون پذیری زمانی:

$$x(t) \xleftrightarrow{F_s} a_k$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{F_s} b_k = a_{-k}$$

اگر $x(t)$ زوج باشد :

$$x(t) = x(-t) \xleftrightarrow{F_s} a_k = a_{-k}$$

اگر $x(t)$ فرد باشد :

$$x(t) = -x(-t) \xleftrightarrow{F_s} a_k = -a_{-k}$$

۴) تغییر مقیاس در موزه ی زمان :

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F_s} b_k = a_k, \quad \omega_1 = \alpha \omega_0$$

$$x(\alpha t) = \sum a_k \cdot e^{kj\omega_0 t \alpha} = \sum a_k \cdot e^{kj\omega_1 t}$$

$$x(t) = \cos t \xleftrightarrow{F_s} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \omega_0 = 1$$

$$x(5t) = \cos 5t \xleftrightarrow{F_s} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \omega_0 = 5$$

۵) مزدوج گیری

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F_s} a_{-k}^* a_k = \frac{2T}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{12kT}{T_0} \right)$$

$$x(t) = x^*(t) = a_k = a_{-k}^* \rightarrow \frac{2T}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{-2kT}{T_0} \right) = \frac{2T}{T_0} \text{sinc} \frac{2kt}{T_0}$$

اگر $x(t)$ زوج باشد :

$$a_k = a_{-k}^*$$

$$a_k = a_{-k}$$

$$a_k = a_k^*$$

در این صورت ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج میشوند

اگر $x(t)$ فرد باشد:

$$a_k = a_{-k}^*$$

$$a_{-k} = -a_k^*$$

$$a_k = -a_k^*$$

در این صورت ضرایب سری فوریه موهومی خالص و فرد هستند.

$$x(t) = A \sin \omega_0 t \quad a_1 = a_{-1} = \frac{-A}{2j}$$

۶ قضیه ی توان پارسوال :

$$F_{\infty} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

فصل چهارم

تبدیل فوریه پیوسته

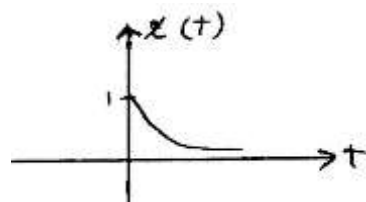
تبدیل فوریه ی یک سیگنال پیوسته و عکس آن چنین تعریف میشود:

$$X(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} dt$$

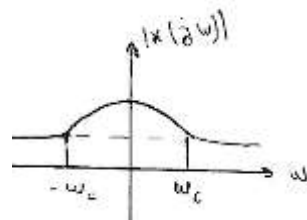
مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را به دست آورید :

1) $x(t) = e^{-at} u(t), a > 0$

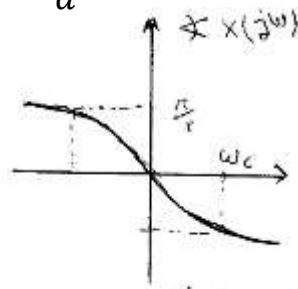


$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

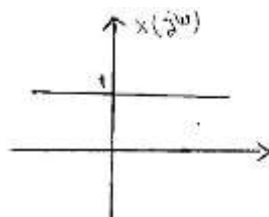


$$|X(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2} |X(j\omega)|_{max} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2a} \rightarrow \angle X(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$



2) $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



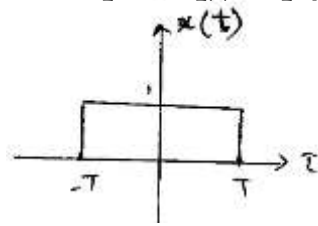
تمرین (تبدیل فوریه سیگنال های زیر را به دست آورید:

$$x(t) = e^{-a|t|} , \quad a > 0$$

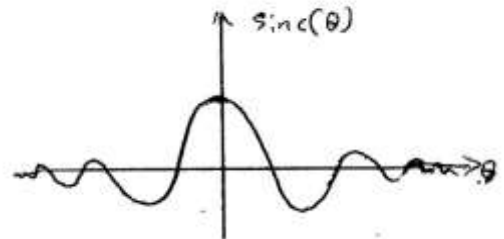
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

مثال (عکس تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$



تبدیل فوریه ی سیگنال های متناوب:

فرض کنید $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

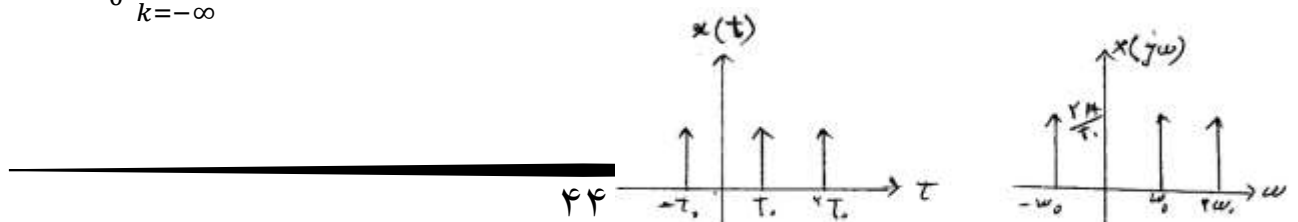
$$a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow 2a_k\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال زیر مساب کنید:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kt_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



خواص تبدیل فوریه ی پیوسته:

(۱) خطی بودن:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

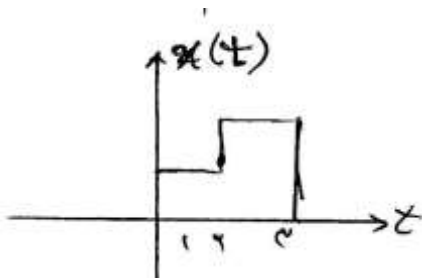
$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{F_s} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

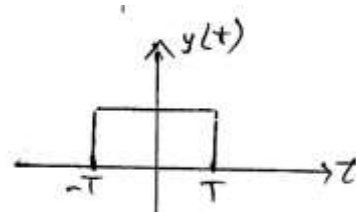
(۲) انتقال زمانی:

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

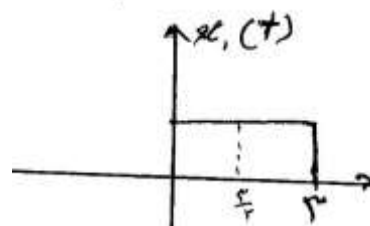
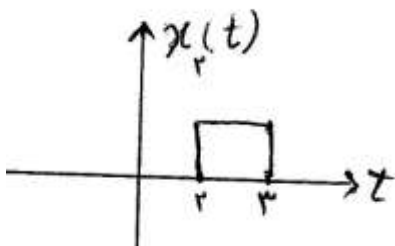
مثال (تبدیل فوریه ی سیگنال زیر را به دست آورید:



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



$$y(j\omega) = \frac{2 \sin \omega t}{\omega}$$



$$x_1(t) = y\left(t - \frac{3}{2}\right), \quad T = \frac{3}{2}$$

$$X_1(j\omega) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} y(j\omega)$$

$$X_1(j\omega) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} \frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\omega}$$

$$x_2(t) = y(t - 2.5) , \quad T = \frac{1}{2}$$

$$X_2(j\omega) = 2e^{-2.5j\omega} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\omega}$$

۳) وارون سازی زمانی:

$$x(-t) \xrightarrow{F} X(-j\omega)$$

۱۴) تغییر مقیاس در موزه زمان:

$$x(\alpha t) \xrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} X(j\omega)$$

$$\text{مثال } x(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$x(6t) = e^{-6t}u(6t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 6}$$

۵) مزدوج گیری :

$$x^*(t) \xrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد:

$$x(t) = x^*(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

اگر سیگنال زوج باشد:

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$

و اگر فرد باشد:

$$\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_e(t) + x_o(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = X_R(j\omega) + jX_I(j\omega)$$

$$x_e(t) \xrightarrow{F} X_R(j\omega)$$

$$x_o(t) \xleftrightarrow{F} jX_I(j\omega)$$

(مثال)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$x_e(t) = \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \xleftrightarrow{F} X_R(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

(۶) مشتق و انتگرال گیری:

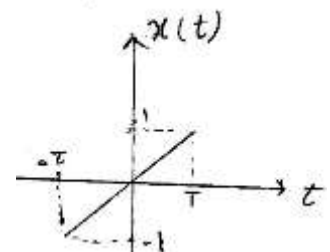
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} v(j\omega) = j\omega LI(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega)$$

تمرین) تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را حساب کنید:

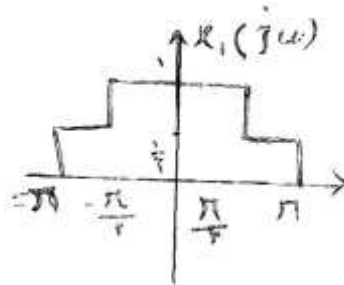
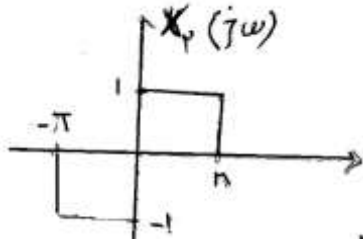
$$x(t) = \frac{t}{T} [u(t+T) - u(t-T)]$$



۷) قضیه ی انرژی پا(سوال):

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

مثال (برای سیگنال های زیر مطلوب است:



$$E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad , \quad D_i = \left. \frac{dx_i(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5}{8}$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega \cdot X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega d\omega = j \frac{\pi}{2}$$

۸) قضیه ی کانولوشن:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \text{ پاسخ فرکانس سیستم}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \text{ تابع تبدیل شبکه}$$

مثال) کانولوشن زیر را حساب کنید:

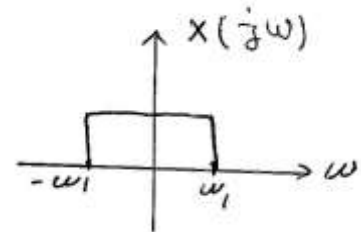
$$x(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{\pi t}, \quad h(t) = \frac{\sin \omega_2 t}{\pi t}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_1 \\ 0 & |\omega| > W_1 \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_2 \\ 0 & |\omega| > W_2 \end{cases}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_3 \\ 0 & |\omega| > W_3 \end{cases}$$

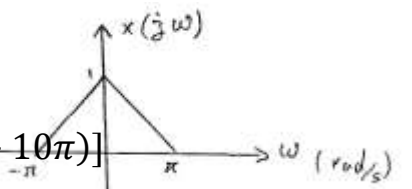
$$W_3 = \min(W_1, W_2)$$



(۹) ضرب دو سیگنال:

$$r(t) = x(t) \cdot s(t) \xrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * s(j\omega)$$

مثال (با توجه به سیگنال $R(j\omega) \cdot X(j\omega)$ را رسم کنید.

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * [\pi \delta(\omega - 10\pi) + \pi \delta(\omega + 10\pi)]$$


$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j(\omega - 10\pi)) + \frac{1}{2} X(j(\omega + 10\pi))$$

فصل ۹

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک سیگنال چنین تعریف میشود:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

(مثال)

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$\frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}[s+a] < 0$$

(مثال)

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1-3j}, \quad \text{Re}[s+1-3j] > 0, \quad \text{Re}[s] > -1$$

(مثال)

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \rightarrow \text{for all } s$$

فواص نامیه ی همگرایی:

(۱) Roc به صورت نوار هایی موازی محور ω باشد که شامل هیچ قطبی نیست

(۲) اگر $x(t)$ دارای طول محدود و انتگرال پذیر باشد ، Roc کل صفحه ی s است.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad X(0) = T$$

۳) اگر $x(t)$ سمت راستی و $X(s)$ گویا باشد Roc سمت راست است (است ترین قطب قرار میگیرد).

$$X(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}$$

۱۴) اگر $x(t)$ سمت چپی و $X(s)$ گویا باشد Roc سمت چپ (پترین قطب قرار میگیرد).

۵) اگر $x(t)$ دو طرفه باشد، Roc یا محدود به قطب ها شده یا اصلا وجود ندارد.

(مثال)

$$x(t) = e^{-at} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$Re[s] > -a, \quad Re[s] < a \quad \rightarrow \quad -a < Re[s] < a$$

* اگر محور ω داخل Roc باشد میتوان تبدیل لاپلاس را به فوریه تبدیل کرد.

(مثال) کلیه ی سیگنال هایی را مشخص کنید که تبدیل لاپلاس آنها به صورت زیر است:

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2(s - 3)}$$

$$= \frac{k_{11}}{s+j} + \frac{k_{12}}{(s+j)^2} + \frac{k_{21}}{s-j} + \frac{k_{22}}{(s-j)^2} + \frac{k_3}{s-3}$$

$$k_{11} = k_{21}^*$$

$$k_{22} = k_{12}^*$$

$$k_{12} = (s+j)^2 \cdot s \Big|_{s=-j} \qquad k_{11} = \frac{d}{ds} (s+j)^2 \cdot s \Big|_{s=-j}$$

خواص تبدیل لاپلاس:

(۱) خطی بودن:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \quad , \quad \text{Roc: } R_1$$

$$y(t) \xrightarrow{L} Y(s) \quad , \quad \text{Roc: } R_2$$

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{L} aX(s) + bY(s) \quad , \quad \text{Roc: } R_1 \cap R_2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} \quad , \quad \text{Re}[s] > -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad , \quad \text{Re}[s] > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad , \quad \text{Re}[s] > -2$$

(۲) انتقال زمانی:

$$x(t - t_0) \cdot e^{-st} X(s) \quad , \quad \text{Roc: } R_1$$

(۳) وارون سازی زمانی:

$$x(-t) \xrightarrow{L} X(-s)$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+2} \quad , \quad \text{Re}[s] > -2$$

$$e^{-2t}u(-t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s-2} \quad , \quad \text{Re}[s] < 2$$

(۴) تغییر مقیاس در موزه ی زمان:

$$x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X(s/a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st}dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\frac{s}{a}t}dt$$

مثال)

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$$

$$\frac{1}{5} \delta(t) = \delta(5t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{5}$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

(۵) مزدوج گیری:

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s)$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(-j\omega)$$

(۶) مشتق گیری:

$$x'(t) \xleftrightarrow{L} sX(s), \quad \text{Roc: } R_1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}, \quad \text{Roc: } R_1 \cap \text{Re}[s] > 0$$

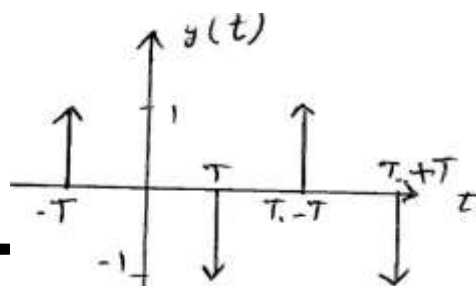
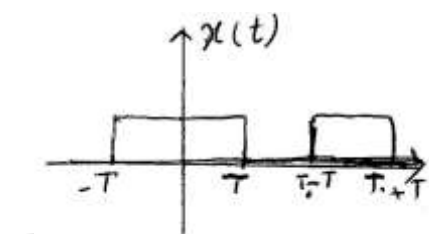
(۷) انتگرال گیری :

$$x(t) \xleftrightarrow{F_s} a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F_s} (jk\omega_0)a_k$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F_s} \frac{a_k}{jk\omega_0}, \quad a_0 = 0$$

مثال (ضرایب سری فوریه ی سیگنال های زیر را مناسبه کنید:



$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F_s} b_k = (jk\omega_0) \frac{2T}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{2kT}{T_0} \right)$$

$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_A^{A+T_0} [\delta(t+T) - \delta(t-T)] e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\frac{1}{T} \int \delta(t+T) e^{jk\omega_0 t} dt - \delta(t-T)] e^{-jk\omega_0 t} dt$$

۸) مشتق گیری در حوزه ی s (لاپلاس)

$$tx(t) \xleftrightarrow{l} \frac{-dX(s)}{ds} \text{ و } Roc: R_1$$

(مثال)

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{l} \frac{1}{s-a} \text{ و } Re[s] > a$$

$$te^{at}u(t) \xleftrightarrow{l} \frac{1}{(s-a)^2} \text{ و } Re[s] > a$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{at}u(t) \xleftrightarrow{l} \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \text{ و } Re[s] > a$$

۹) کانولوشن

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X(s)H(s) \quad , \quad Roc: R_1 \cap R_2$$

تمرین : فرض کنید ورودی یک سیستم LTI به صورت $x(t)=e^{-t}u(t)$ و خروجی آن به صورت $y(t)=e^{-2t}u(t)$ باشد مطلوب است: پاسخ ضربه ی سیستم ، پاسخ ضربه ی سیستم وارون و معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ی ورودی و خروجی.

۱۰. قضایای مقادیر اولیه و نهایی

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$$

$$x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sX(s)$$

مثال) فرض کنید:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)} \quad , \quad \text{Re}[s] > -1$$

مطلوب است $x(0^+)$ و $x(+\infty)$:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)} = 2$$

$$x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)} = 0$$

فواص سیستم های LTI

۱) علی بودن: شرط علی بودن آن است که $h(t) = 0$, $t < 0$. بنابراین اگر $H(s)$ گویا و $h(t)$ علی باشد Roc آن سمت راستی است.

۲) پایداری: شرط پایداری آن است که پاسخ ضربه ی آن مطلقا انتگرال پذیر باشد . بنابراین پایداری تبدیل فوریه است . پس شرط پایداری آن است که محور $j\omega$ داخل Roc باشد.

اگر $H(s)$ گویا و $h(t)$ علی باشد شرط پایداری آن است که کلیه ی قطب های $H(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند.

مثال

$$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} e^{2t} dt \rightarrow +\infty$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t) \quad , \quad -1 < \operatorname{Re}[s] < 2 \quad \text{غیر علی و پایدار}$$

مثال (فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI مشخص شده اند . تابع تبدیل آن را رسم کنید.

(۱) سیستم علی است

(۲) تابع تبدیل آن گویا بوده و فقط دو قطب در $s = -2$, $s = 1$ دارد

(۳) اگر $x(t) = 1$ باشد ، $y(t) = 0$ میشود

$$h(0^+) = 4 \quad (۴)$$

$$H(s) = \frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{p(s)}{(s-1)(s+2)}$$

$$e^{at} \xrightarrow{\text{فروجهی}} H(a)e^{at}$$

$$1 = e^{0t} \rightarrow H(0)e^{0t} = 0 \Rightarrow H(0) = 0$$

$$p(s) = (s - z_1)(s - z_2) \dots$$

$$= \frac{s(s - z_2)(s - z_3) \dots}{r(s)}$$

$$H(s) = \frac{s r(s)}{(s-1)(s+2)}$$

تمرین

یک سیستم علی و پایدار با پاسخ ضربه ی $h(t)$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید $H(s)$ گویا بوده و قطبی در $s=-2$ داشته و در مبدا صفر ندارد. صمت یا عدم صمت روابط زیر را تعیین کنید.

الف) $\{h(t)e^{3t}\}$ همگرا است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0 \text{ (ب)}$$

(ج) $h(t)$ پاسخ ضربه ی یک سیستم علی و پایدار است

(د) $h(t)$ دارای طول محدود است

$$\frac{dh(t)}{dt} \text{ (ه)}$$

$$H(s) = H(-s) \text{ (و)}$$

فصل ۱۰

تبدیل Z

تبدیل z یک سیگنال گسسته چنین تعریف میشود .

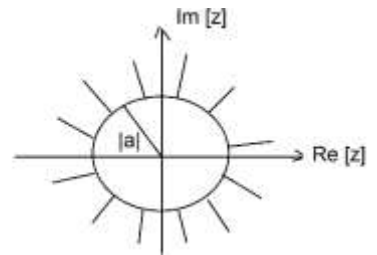
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad , \quad z = re^{j\omega}$$

اگر $r=1$ باشد تبدیل z گسسته است.

مثال (تبدیل z سیگنال های زیر را مناسبه کنید:

$$1) x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \quad |az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$



$$2) x[n] = -a^n u[-n - 1]$$

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{m=1}^{+\infty} (a^{-1} z)^m = 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} (a^{-1} z)^m \\ &= 1 - \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \end{aligned}$$

تمرین (

تبدیل z سیگنال های زیر را مناسبه کنید:

$$1) x[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 4(-2)^n u[n]$$

$$2) x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4} u[n]$$

فواص نامیه همگرایی تبدیل z

(۱) Roc به صورت دیسک هایی به مرکز مبدا مفتصات است.

(۲) Roc شامل هیچ قطبی از $X(z)$ نیست.

(۳) اگر $x[n]$ دارای طول محدود باشد ، Roc کل صفحه ی z ، احتمالا $z=0$ یا $z=\infty$ است.

(۴) اگر $x[n]$ سمت راستی و $X(z)$ گویا باشد ، Roc نامیه ی بیرونی خارجی ترین قطب است . اگر

$x[n]$ علی باشد $z=\infty$ را شامل میشود .

(۵) اگر $x[n]$ سمت چپی و $X(z)$ گویا باشد ، Roc نامیه ی داخلی داخلی ترین قطب است و اگر

$x[n]$ ضد علی باشد $z=0$ را نیز شامل میشود.

$$x[n] = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad \text{ضد علی}$$

(۶) اگر $x[n]$ دو طرفه باشد Roc یا محدود به قطب ها شده یا اصلا وجود ندارد.

(مثال)

$$x[n] = a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$$|z| > |a| \quad , \quad |z| < \frac{1}{|a|} \Rightarrow |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

(مثال) کلیه ی سیگنال هایی را مشخص کنید که تبدیل z آنها به صورت زیر است.

$$X(z) = \frac{k_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + 3z^{-1}}$$

$$k_1 = \left. (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \right|_{z = \frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$k_2 = (1 + 3z^{-1})X(z) \Big|_{z=-3} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{k_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow \begin{cases} k_1(\frac{1}{2})^n u[n] , & |z| > \frac{1}{2} \\ -k_1(\frac{1}{2})^n u[-n-1] , & |z| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{k_2}{1 + 3z^{-1}} \rightarrow \begin{cases} k_2(-3)^n u[n] , & |z| > 3 \\ -k_2(-3)^n u[-n-1] , & |z| < 3 \end{cases}$$

$$x[n] = k_1(\frac{1}{2})^n u[n] + k_2(-3)^n u[n], \quad |z| > 3$$

$$x[n] = k_1(\frac{1}{2})^n u[n] - k_2(-3)^n u[-n-1] , \quad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$x[n] = -k_1(\frac{1}{2})^n u[-n-1] - k_2(-3)^n u[-n-1] , \quad |z| < \frac{1}{2}$$

مثال (عكس تبدیل z سیگنالهای زیر را مناسبه کنید:

$$1) X(z) = 5z^3 - 2z - 3 + z^{-2} + 4z^{-5}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[-3] = 5 \qquad x[-1] = -2 \qquad x[0] = -3$$

$$x[2] = 1 \qquad x[5] = 4$$

$$2) X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad , \quad |z| < |a|$$

$$\ln(1 + V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}$$

$$X(z) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-1}}{n}$$

$$x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u[n-1]$$

فواص تبدیل z

(۱) فطی بودن:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

مداخل $Roc : R_1 \cap R_2$

(۲) انتقال زمانی:

$$x[n - n_0] \xrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$$

(۳) تغییر مقیاس در موزه z

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

(۴) وارون سازی زمانی:

$$x[-n] \xrightarrow{z} X(z^{-1})$$

(۵) کانولوشن :

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{z} y(z).H(z)$$

مثال) کانولوشن زیر را مساب کنید .

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \quad h[n] = u[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{3} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad k_1, k_2 = \frac{3}{2}$$

$$y[n] = \frac{3}{2} u[n] - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(۶) مشتق گیری :

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} \frac{-z \, dX(z)}{dt}$$

مثال (عکس تبدیل z سیگنال زیر را به دست آورید

$$1) X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \cdot \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

(۷) قضیه ی مقدار اولیه :

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) \quad , \quad x[n] = 0 \quad , \quad n < 0$$

* شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI گسسته آن است که Roc شامل دایره ی واحد شود
یا اگر $h[n]$ علی و $H(z)$ گویا باشد شرط پایداری آن است که کلیه قطب های $H(z)$ در دایره ی واحد
قرار گیرند.