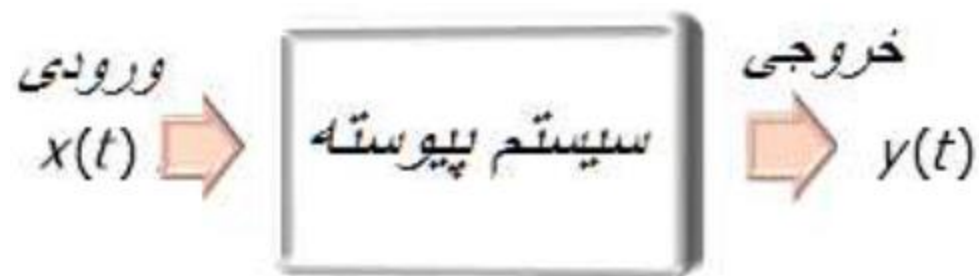


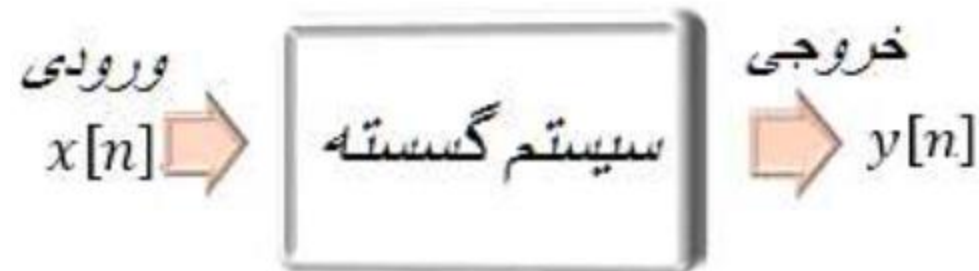
تجزیه و تحلیل سیگنالها

سیستم و خواص آن

- یک سیستم فرآیندی است که یک یا چند ورودی را به یک یا چند خروجی تبدیل میکند.



$$y(t) = T\{x(t)\}$$



خواص سیستم‌ها

- **حافظه دار بودن:** سیستم حافظه دار سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به مقدار خروجی و نیز به مقادیر گذشته وابسته باشد؛ در غیر اینصورت سیستم بدون حافظه است.
- سلف و خازن جزء سیستم‌های حافظه‌دار هستند ولی مقاومت یک سیستم بدون حافظه است.

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases} \quad \text{مقاومت}$$

$$\begin{cases} v(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i(t') dt' \\ y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(t') dt' \end{cases} \quad \text{خازن}$$

$$\begin{cases} v(t) = l \frac{di(t)}{dt} \\ y(t) = l \frac{du(t)}{dt} = l \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta)}{\Delta} \end{cases} \quad \text{سلف}$$

- مثال سیستم حافظه دار گسسته

$$y[n] = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m [n-k] = \frac{1}{m+1} (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-m])$$

سیستم و خواص آن

- **علی بودن:** سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط وابسته به مقادیر حال و گذشته ورودی باشد و به آینده وابسته نباشد (البته در واقعیت هیچ سیستمی به آینده وابسته نیست)
- کلیه سیستم های بدون حافظه علی هستند.
- مثال برای سیستم غیرعلی:

$$y[n] = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^m x[n-k] = \frac{1}{2m+1} (x[n+m] + \dots)$$

سیستم و خواص آن

- وارون پذیر بودن: سیستمی که بتوان از خروجی آن، ورودی را به طور یکتا تعیین کرد.



سیستم و خواص آن

• مثال:

$$1) y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(t') d' \xRightarrow{\text{وارون}} x(t') = c \frac{dy(t)}{dt}$$

$$2) y(t) = l \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t y(t') dt' \quad \text{وارون پذیر}$$

$$x(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t y(t') dt' + C \quad \text{وارون پذیر نیست}$$

$$3) y[n] = x^2[n] \rightarrow x[n] = \pm \sqrt{y[n]}$$

: مثال نقض

$$x_1[n] = 1 \rightarrow y_1[n] = 1$$

$$x_2[n] = -1 \rightarrow y_2[n] = 1$$

$$4) y(t) = \sin x(t)$$

$$x(t) = \sin^{-1} y(t) + 2k\pi$$

$$y(t) = 0 \rightarrow x(t) = 0 \pm \pi, \pm 2\pi$$

سیستم و خواص آن

- پایدار بودن: سیستمی پایدار است که از ورودی‌ها با دامنه محدود، خروجی با دامنه محدود تولید کند.

$$|x(t)| < B_x \rightarrow |y(t)| < B_y$$

B_y و B_x دو عدد محدود

- مثال:

$$1) y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(t') dt'$$

$$\text{مثال نقض } x(t) = 1 \rightarrow y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t dt' \rightarrow +\infty$$

$$2) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ مثال نقض } x(t) = u(t) \rightarrow y(t) = \delta(t)$$

- تغییرپذیری با زمان: سیستمی است که به ازای ورودی‌های یکسان در زمان‌های مختلف، خروجی‌های یکسان در زمان‌های مختلف تولید کند.

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = y(t - t_0)$$

- مثال: تغییرپذیری یا ناپذیری سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

$$1) y(t) = \int_{-\infty}^t x(t') dt'$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^t x_2(t') dt' = \int_{-\infty}^t x_2(t' - t_0) dt'$$

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t') dt' = \int_{-\infty}^t x(t'' - t_0) dt'' = y_2(t)$$

$$t'' = t' + t_0$$

$$2) y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = x(t - t_0)y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx(t - t_0)}{dt}$$

$$y(t - t_0) = \frac{dx(t - t_0)}{dt} = y_2(t)$$

• تمرین:

$$y(t) = x(2t)$$

- خطی بودن: یک سیستم خطی است اگر سیستم همگن و جمع‌پذیر باشد:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

• مثال:

$$1) y[n] = n^2 x[n]$$

$$x_1[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_2[n]$$

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow y_3 = n^2 x_3[n]$$

خطی است

$$2) y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) = 1 \rightarrow y_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = 3x_1(t) \rightarrow y_2(t) = 9$$

همگن نیست

$$3) y(t) = \text{Re}\{x(t)\}$$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$$x_2(t) = j \cdot x(t) \rightarrow y_2(t) = 0$$

همگن نیست

• تمرین: خطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید

$$1) y(t) = x(t) + 1$$

$$2) y(t) = \log_{10} x(t)$$