تجزیه و تحلیل سیگنالها

هفته اول اسفند

- **سیگنال، نشانه یا علامت هر کمیت فیزیکی قابل اندازه گیری است.**
- **انواع سیگنال:**
  - **سیگنال پوسته در زمان که به صورت x(t) نشان داده می شود و t یک متغیر مستقل و یک عدد حقیقی است.**

مثال) $x(t) = \sin t$

  - **سیگنال گسسته که به صورت x[n] نشان داده می شود و n یک عدد صحیح است:**

$n = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm\ 2\ ,\ \ldots$

  - **سیگنالهای انرژی و توان**

مثال) برای مقاومت داریم $\rightarrow\ P = R.i^2 = \frac{v^2}{R}$

$$E = \int P(t)\,dt = \int R.i^2\,dt = \int \frac{v^2}{R}\,dt$$

انرژی سیگنال پیوسته

- انرژی یک سیگنال در فاصله زمانی [T1,T2] به صورت زیر است:

$$E = \int_{T_2}^{T_1} |\, x(t)|^2 \, dt$$

- اگر سیگنال بصورت مختلط باشد، اندازه آن به شکل زیر محاسبه می شود:

$$x(t) = A+jB = |x(t)|\, e^{j\measuredangle x(t)}$$

$$|x(t)| = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \measuredangle x(t) = \tan^{-1}\frac{A}{B}$$

$$Ae^{j\varphi(t)} = A\cos\varphi(t) + jA\sin\varphi(t)$$

- حاصلضرب سیگنال در مزدوج آن، مجذور اندازه می شود:

مثال) $x(t) = \cos t + j\sin 2t$

$$|x(t)| = \sqrt{cos^2 t + sin^2 2t}$$

$$\measuredangle x(t) = \tan^{-1}\frac{\sin 2t}{\cos t}$$

$$x^*(t) = A - jB = |x(t)|\, e^{-j\measuredangle x(t)}$$

$$x(t)\,.\,x(t)^* = A^2 + B^2 = |\, x(t)|^2$$

مثال

- مثال: انرژی کل سیگنالهای زیر را به دست آورید:

۱) $x(t)= 3\, e^{2jt}$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} 9\, dt = 9\mathrm{t}\, |_{-\infty}^{+\infty} =+\infty$$

۲) $x\,(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t\geq 0 \\ e^{2t} & t<0 \end{cases}$

$$E_\infty= \int_{-\infty}^{0} e^{4t}+\int_{0}^{+\infty} e^{-6t} = \frac{1}{4}e^{4t}|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{6}e^{-6t}\, |_{0}^{+\infty}= \frac{10}{24}$$

انرژی سیگنال گسسته

- انرژی کل یک سیگنال گسسته چنین تعریف می شود:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

مثال)
$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E_\infty = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

برخی فرمولهای مهم (یادآوری)

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \propto^{n} = \frac{1}{1-\propto} \quad , \quad |\propto| < 1$$

$$2)\ \sum_{n=0}^{N} \propto^{n} = \frac{1-\propto^{N+1}}{1-\propto}$$

$$1)\ \sum_{n=N_1}^{N_2} \propto^{n} = \frac{\propto^{N_1}-\propto^{N_2+1}}{1-\propto}$$

سیگنال انرژی

مثال)

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & 5 \leq n \leq 13 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E_\infty = \frac{(\frac{1}{9})^5 - (\frac{1}{9})^{14}}{1 - \frac{1}{9}}$$

- وقتی انرژی یک سیگنال محدود شود، به آن سیگنال انرژی گفته می‌شود.

توان سیگنال

- توان یک سیگنال در بازه زمانی [T1,T2] به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{N_2 - N_2 + 1} + \sum_{n=N}^{N_2} |x[n]|^2$$

- توان متوسط یک سیگنال:

$$P_\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P_\infty = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

مثال

- توان متوسط سیگنال های زیر را به دست آورید:

1) x(t)= t

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}T^{2}\,dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}*\frac{t^{3}}{3}\Big|_{-T}^{T}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}*\frac{2T^{3}}{3}=+\infty$$

2) x(t) = e^{-3t}

$$P_{\infty}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-6t}\,dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{-1}{12T}[e^{-6T}-e^{6T}]=\lim_{T\to+\infty}\frac{e^{6T}}{12T}=+\infty$$

مثال

$$3\,)\;\; x(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$P_{\infty} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} e^{-6t}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{12T} (1 - e^{-6t}) = 0$$

$$P_{\infty} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 4 = \lim_{N\to+\infty} \frac{4(N+1)}{2N+1} = 2$$