تجزیه و تحلیل سیگنالها

سیستم و خواص آن

- یک سیستم فرآیندی است که یک یا چند ورودی را به یک یا چند خروجی تبدیل میکند.

$$y(t)=T\{x(t)\}$$

خواص سیستم ها

- حافظه دار بودن: سیستم حافظه دار سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به مقدار ورودی و نیز به مقادیر گذشته وابسته باشد؛ در غیر اینصورت سیستم بدون حافظه است.
  - سلف و خازن جزء سیستم‌های حافظه‌دار هستند ولی مقاومت یک سیستم بدون حافظه است.

مقاومت

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases}$$

خازن

$$\begin{cases} v(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \\ y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \end{cases}$$

سلف

$$\begin{cases} v(t) = l\frac{di(t)}{dt} \\ y(t) = l\frac{du(t)}{dt} = l\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta} \end{cases}$$

  - مثال سیستم حافظه دار گسسته

$$y[n] = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \mathrm{x[n\text{-}k]} = \frac{1}{m+1}(x[n]+x[n-1]+\cdots+x[n-m])$$

سیستم و خواص آن

- **علی بودن**: **سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط وابسته به مقادیر حال و گذشته ورودی باشد و به آینده وابسته نباشد (البته در واقعیت هیچ سیستمی به آینده وابسته نیست)**
  - **کلیه سیستم های بدون حافظه علی هستند.**
  - **مثال برای سیستم غیرعلی:**

$$y[n] = \frac{1}{2m+1}\sum_{-m}^{m} x[n-k] = \frac{1}{2m+1}\left(x[n+m] + \cdots\right)$$

سیستم و خواص آن

- وارون پذیر بودن: سیستمی که بتوان از خروجی آن، ورودی را به طور یکتا تعیین کرد.

سیستم و خواص آن

- مثال:

$$1)\ y(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}x(t')d' \overset{\text{وارون}}{\Longrightarrow} x(t')=c\frac{dy(t)}{dt}$$

$$V_c=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}i(t')dt' \Rightarrow i(t)=c\frac{dV_c}{dt}$$

$$2)\ y(t)=l\frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}y(t')dt'$$ وارون پذیر

$$i_l=\frac{1}{l}\int_{-\infty}^{t}v_l(t')dt' \Rightarrow V_l(t)=l\frac{di_l}{dt}$$

$$x(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}y(t')dt'+C$$ وارون پذیر نیست

$$3) y[n]=x^2[n] \to x[n]=\pm\sqrt{y[n]}$$

مثال نقض :

$$x_1[n]=1\ \to\ y_1[n]=1$$

$$x_2[n]=-1\ \to\ y_2[n]=1$$

$$4)\ y(t)=\sin x(t)$$

$$x(t)=sin^{-1}y(t)+2k\pi \qquad y(t)=0\to x(t)=0\pm\pi\,,\pm2\pi$$

سیستم و خواص آن

- پایدار بودن: سیستمی پایدار است که از ورودی‌ها با دامنه محدود، خروجی با دامنه محدود تولید کند.

$$|x(t)| < B_x \rightarrow |y(t)| < B_y$$

B_x و B_y دو عدد محدود

- مثال:

$$1) y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} x(t') dt'$$

مثال نقض $x(t) = 1 \rightarrow y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} dt' \rightarrow +\infty$

$2)\ y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ مثال نقض $x(t) = u(t) \rightarrow y(t) = \delta(t)$

- تغییرپذیری با زمان: سیستمی است که به ازای ورودی‌های یکسان در زمان‌های مختلف، خروجی‌های یکسان در زمان‌های مختلف تولید کند.

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x_2(t) = x(t - t_0 \rightarrow y_2(t) = y(t - t_0)$$

- مثال: تغییرپذیری یا ناپذیری سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} x_2(t' - t_0)dt'$$

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} x(t" - t_0)dt" = y_2(t)$$

$$t" = t' + t_0$$

$$2)\ y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \Rightarrow y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx(t - t_0)}{dt} \quad \boxed{1}$$

$$y(t - t_0) = \frac{dx(t - t_0)}{dt} = y_2(t) \quad \boxed{2}$$

- تمرین:

$$y(t) = x(2t)$$

- خطی بودن: یک سیستم خطی است اگر سیستم همگن و جمع‌پذیر باشد:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

$$\Rightarrow \quad ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

- مثال:

$$1)\ y[n] = n^2 x[n]$$

$$x_1[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_2[n]$$

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow y_3[n] = n^2\left(ax_1[n] + bx_2[n]\right)$$

$$y_3[n] = n^2 ax_1[n] + n^2 bx_2[n]$$

$$y_3[n] = n^2 ax_1[n] + n^2 bx_2[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

خطی است

$$2)\ y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) = 1 \rightarrow y_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = 3x_1(t) \rightarrow y_2(t) = 9$$

همگن نیست

$$3)\ y(t) = Re\{x(t)\} \qquad x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$$x_2(t) = j.x(t) \rightarrow y_2(t) = 0$$

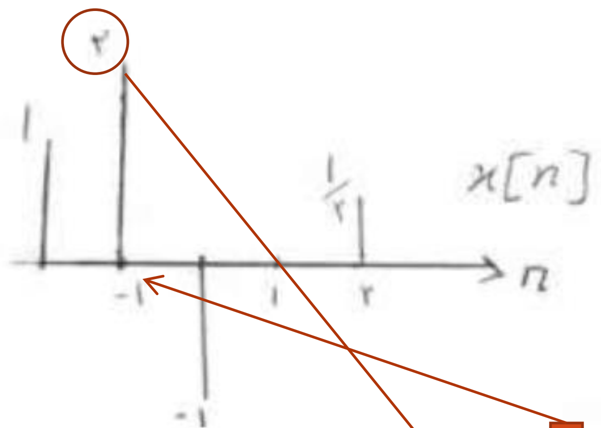
همگن نیست

- تمرین: خطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید

$$1)y(t) = x(t) + 1$$

$$2)y(t) = \log_{10} x(t)$$

- قضیه کانولوشن برای سیگنالهای گسسته:
  - هر سیگنال گسسته را می‌توان بر حسب مجموع سیگنالهای ضربه نوشت.
    - مثال:



$$x[n] = \cdots + \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \cdots =$$

$$\ldots x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- **پاسخ ضربه یک سیستم**

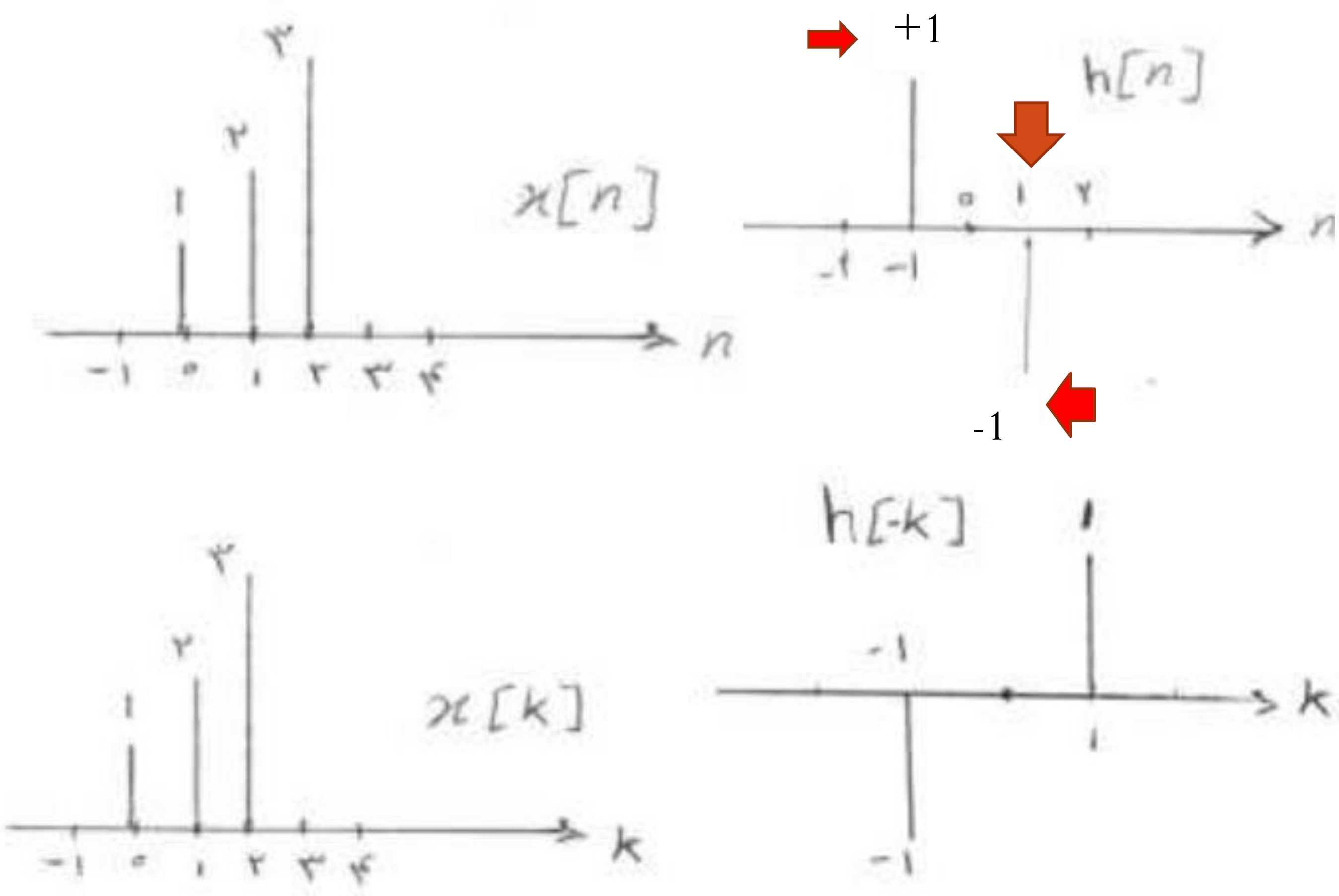
$$\delta[n-k] \xrightarrow{\text{خروجی}} h[n-k]$$

$$x[k]\,\delta[n-k] \xrightarrow{\text{خروجی}} x[k]\,h[n-k]$$

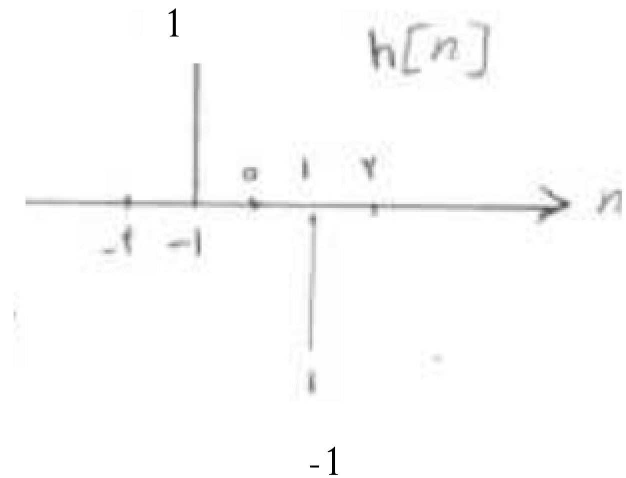
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \rightarrow$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}$$

- **مثال: کانولوشن زیر را حساب کنید:**



$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k](\delta[n+1-k] - \delta[n-1-k])$$

$$x[k](\delta[n+1-k]) = x[n+1]$$

$$x[k](\delta[n-1-k]) = x[n-1]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x[n+1] - x[n-1])$$

$$h[n] = \delta[n-2]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-2-k]$$

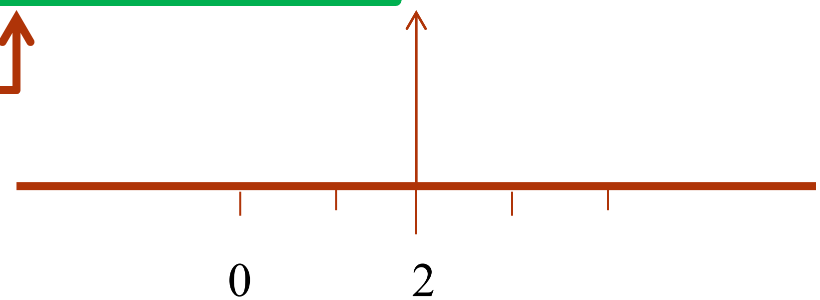
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-2]\delta[n-2-k] = x[n-2]\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2-k]$$

$$= x[n-2]$$

$$x[n]\delta[n] = x[0]$$

$$x[n]\delta[n-1] = x[1]$$

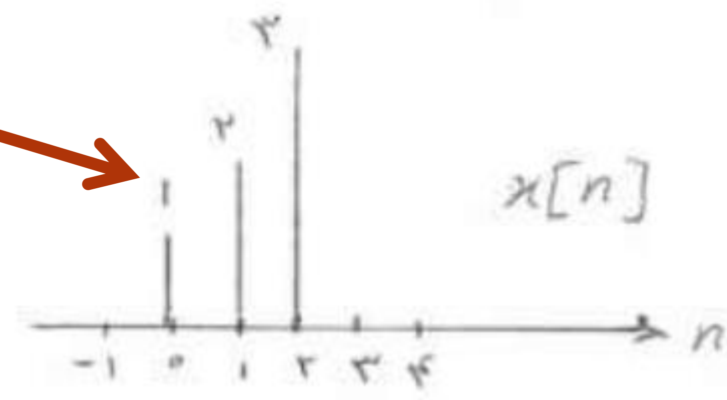
$$x[k]\delta[n-2-k] = x[n-2]$$

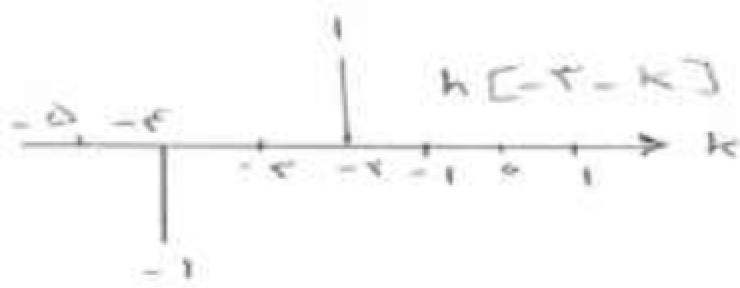


Y[2]=x[2-2]=1

Y[n]=x[n-2]

Y[3]=?=2





$$y[-3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-3-k] = 0$$

$$h[-2-k]$$

$$y[-2] = 0 \qquad h[-1] = 1 \qquad y[0] = 1$$

برای محاسبه ی کانولوشن میتوان مراحل زیر را طی نمود:

۱- $x[k]$ و $h[k]$ رارسم می کنیم.

۲- $h[-k]$ را رسم نموده وبه اندازه ی n شیفت میدهیم تا $h[n-k]$ به دست آید.

۳- $x[k]$ و $h[n-k]$ را در هم ضرب کرده و مجموع حاصلضرب را به دست می آوریم تا $y[n]$ به دست آید

- **مثال:**

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-2-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-2]\delta[n-2-k]=x[n-2]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2-k]$$

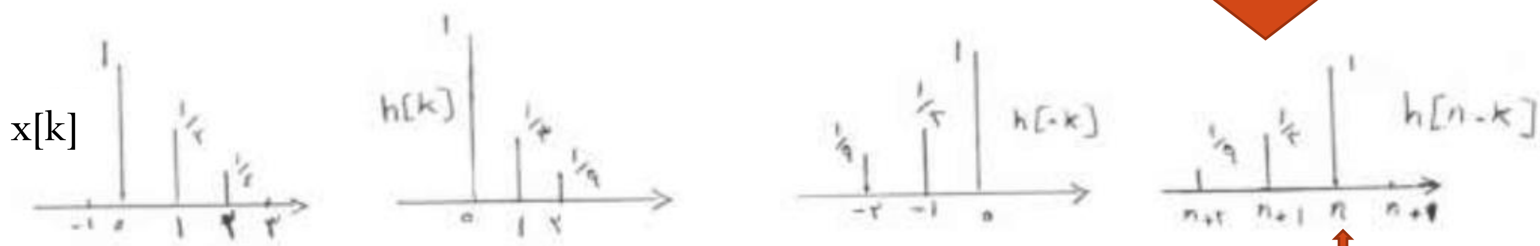
$$=x[n-2]$$

$$1)\ y[n]=x[n]*\delta[n-2]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,h[n-k-2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-2]\,h[n-k]$$

$$=x[n-2]\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[n-k]=x[n-2]$$

2) $x[n] = (\frac{1}{2})^n \, u[n]$ $\quad$ $h[n] = (\frac{1}{3})^n \, u[n]$



$$\boxed{y[n] = 0 \qquad n \leq -1}$$

$$y[0] = 1$$

$$y[1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$y[2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k u[k] \, (\frac{1}{3})^{n-k} u[n-k]$$

$$(\frac{1}{3})^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{3}{2})^k u[k] \quad , \quad n \geq 0$$

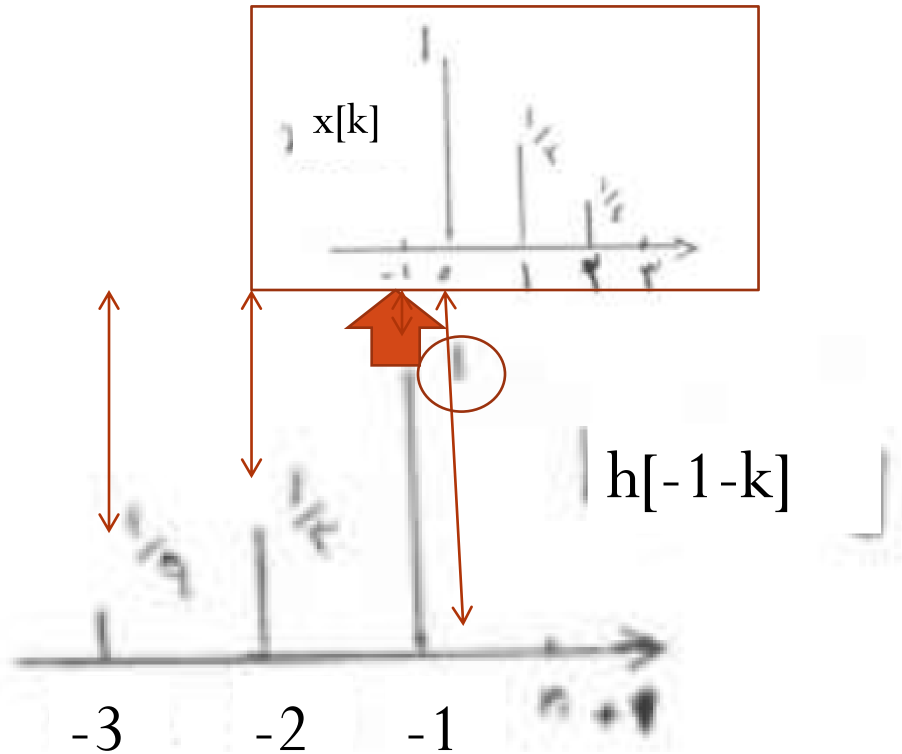
$$(\frac{1}{3})^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{2})^k$$

n=-1

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-1-k]$$

$$k=-1 \Rightarrow \begin{cases} x[k]=x[-1]=0 \\ h[-1-k]=1 \end{cases}$$

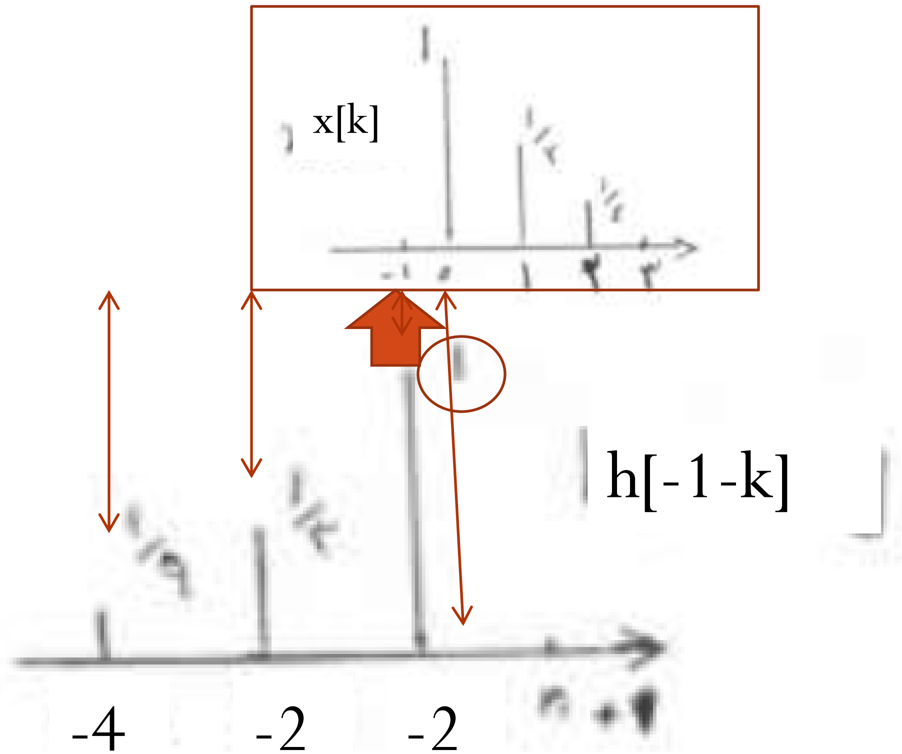


n=-2

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y[-2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-2-k]$$

$$k=-1\Rightarrow\begin{cases}x[k]=x[-1]=0\\ h[-2-k]=0\end{cases}$$

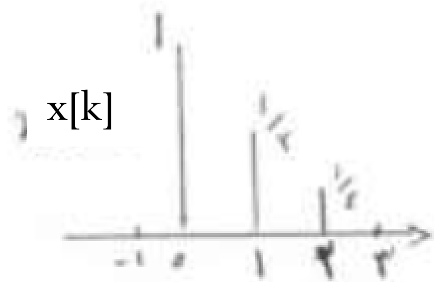


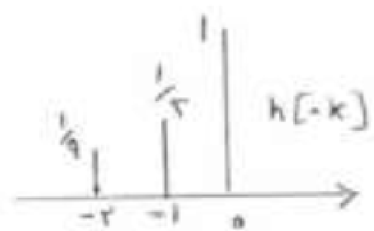
n=0

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-k]$$

$$k=-1\Rightarrow\begin{cases}x[k]=x[-1]=0\\ h[-k]=0\end{cases}$$



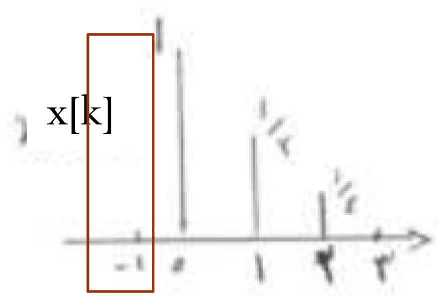


n=1

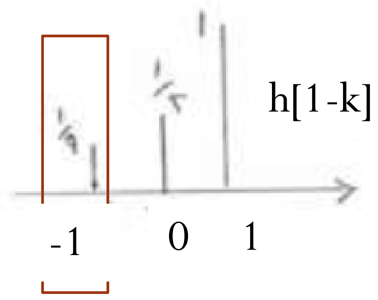
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-k]$$

$$k=-1\Rightarrow\begin{cases}x[k]=x[-1]=0\\h[-k]=1/9\end{cases}$$



$$k=0\Rightarrow\begin{cases}x[k]=x[0]=1\\h[-k]=1/3\end{cases}$$



$$k=1\Rightarrow\begin{cases}x[k]=x[1]=1/2\\h[-k]=1\end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k u[k] \, (\frac{1}{3})^{n-k} u[n-k]$$

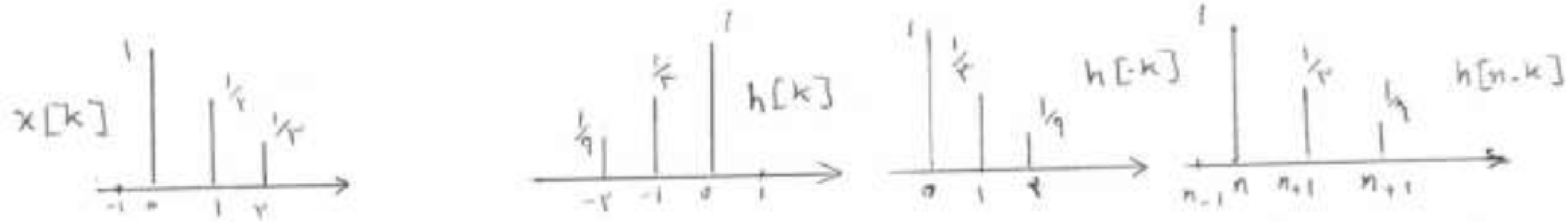
$$(\frac{1}{3})^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{3}{2})^k u[k] \quad , \quad n \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3^k$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum \left(\frac{3}{2}\right)^k u[k]u[n-k]$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k u[k] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k u[k] \qquad n \geq 0$$

3) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ $\qquad$ $h[n] = 3^n u[-n]$



$$n < 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k u[k] 3^{n-k} \boxed{u[-n+k]}$$

$$= 3^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{6})^k = 3^n \times \frac{1}{1-\frac{1}{6}}$$

$$n \geq 0 \rightarrow 3^n \times \sum_{k=n}^{+\infty} (\frac{1}{6})^k$$

- تمرین: کانولوشن های زیر را حساب کنید.

$$1)\ x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad h[n] = u[n+10] - u[n-10]$$

$$2)\ x[n] = u[n] - u[n-40] \qquad h[n] = u[n+10] + u[n-10]$$

کانولوشن برای سیگنالهای پیوسته

هر سیگنال پیوسته برحسب تابع ضربه بصورت زیر قابل نمایش است .

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$$

$x(t) \rightarrow$ سیستم LTI $\rightarrow y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

- **مثال:**

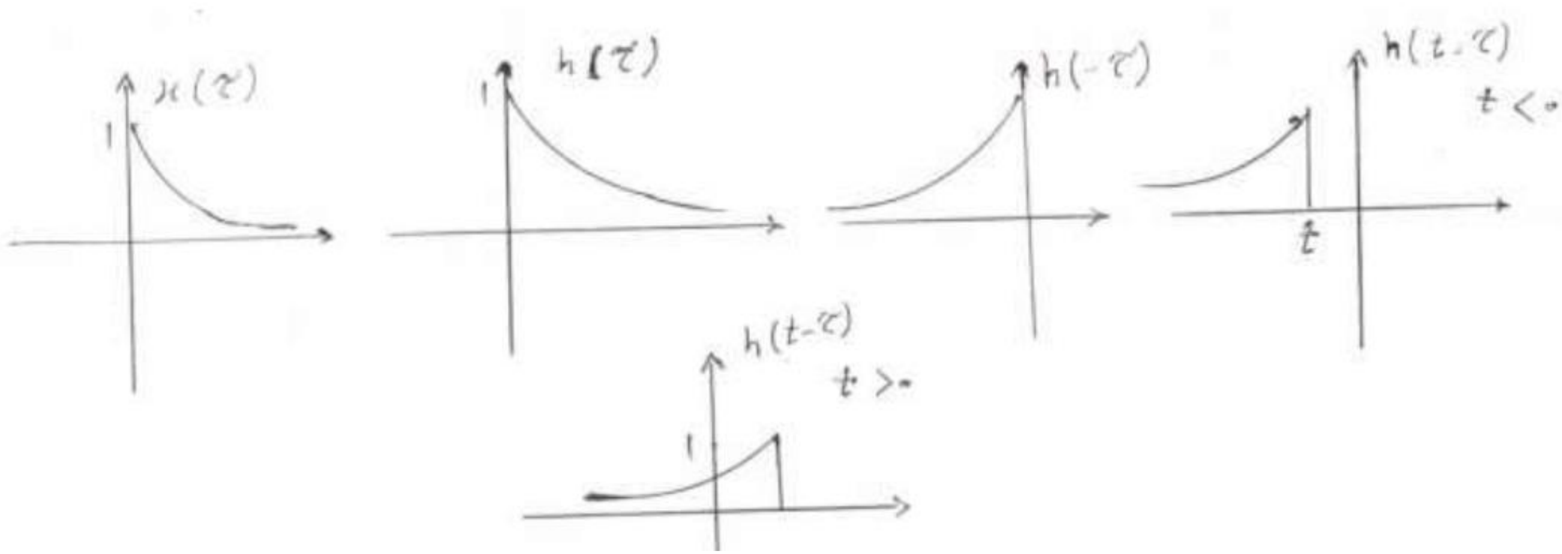
$$1)\ x(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

۱- $h(\tau)$ و $x(\tau)$ را رسم می کنیم

۲- $h(\tau)$را نسبت به محور عمودی قرینه کرده و به ازای t شیفت می دهیم تا $h(t-\tau)$ به دست آید.

۳- $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$را در هم ضرب کرده و از حاصلضرب انتگرال بگیرید تا $y(t)$ به دست آید



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) e^{-3t} e^{3\tau} u(t-\tau) d\tau$$

$$= e^{-3t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) e^{3\tau} u(t-\tau) d\tau$$

$$= e^{-3t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = e^{-3t} \int_{0}^{+\infty} e^{\tau} u(t-\tau) d\tau$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t-\tau \geq 0 \rightarrow t \geq \tau \\ 0 & t-\tau < 0 \rightarrow t < \tau \end{cases}$$

$$y(t) = e^{-3t} \int_{0}^{t} e^{\tau} d\tau = e^{-3t} \times e^{\tau} \Big|_{0}^{t} = e^{-3t} \left(e^{t} - 1 \right)$$

تمرین)

$$x(t) = 2[u(t) - u(t-2)] \qquad h(t) = e^{t}u(-t)$$

خواص کانولوشن:

۱) جابجایی:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau) d\tau$$

۲) شرکت پذیری:

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

۳) توزیع پذیری:

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$