جلسه پنجم:

گرامری بنویسید که زبان $L=\{a^n b^m c^n \mid n,m \ge 0\}$ را تولید کند.

حل:

$$S \to aSc \mid A$$
$$A \to bA \mid \lambda$$

گرامری بنویسید که زبان $L=\{a^n b^m c^k \mid k=n+m\}$ را تولید کند

حل:

$$k=n+m \Rightarrow L=a^n b^m c^m c^n$$
$$S \to aSc \mid A$$
$$A \to bAc \mid \lambda$$

گرامری بنویسید که زبان $L=\{a^n b^m c^k \mid k=\mid n-m\mid\}$ را تولید کند.

$$n>m \to k=n-m \to n=k+m \to L_1=a^k a^m b^m c^k$$
$$n<m \to k=-(n-m) \to m=k+n \to L_2=a^n b^n b^k c^k$$
$$\Rightarrow L=L_1 \cup L_2$$

حل:

$$S \to A \mid B$$
$$A \to aAc \mid T$$
$$T \to aTb \mid \lambda$$

$$B \to XY$$
$$X \to aXb \mid \lambda$$
$$Y \to bYc \mid \lambda$$

گرامر های خطی:

گرامر هائی هستند که در همه قواعد آن، در طرف چپ یک متغیر وجود دارد و در طرف راست قوانین می توانیم چندین ترمینال (صفر و یا بیشتر) و یک یا صفر متغیر داشته باشیم. دقت شود محدودیتی برای مکان متغیر در طرف راست وجود ندارد.

مثلا گرامر

$$S \to aaBca$$
$$B \to Abbb$$
$$A \to ccabA \mid \lambda$$

خطی می باشد.

گرامر خطی راست:

اگر در تعریف گرامر خطی، قانون ها را به نوعی محدود کنیم که تنها متغیر استفاده شده در سمت راست، همواره در انتها پدیدار شود، گرامر حاصل گرامر خطی راست خواهد بود، که به صورت نمادین به شکل زیر تعریف می شود.

$A \to xB$ یا $A \to x$ که $A,B \in V$ و $x \in T^*$ مثلا گرامر

$$A \to aaabB$$
$$B \to a$$
$$B \to bB \mid A$$

خطی راست است

گرامر خطی چپ:

گرامر G یک گرامر خطی چپ است، اگر همه قوانین آن به صورت $A \to Bx$ ، $A \to x$ باشد که داریم $A,B \in V$ ، $x \in T^*$

گرامر های منظم:

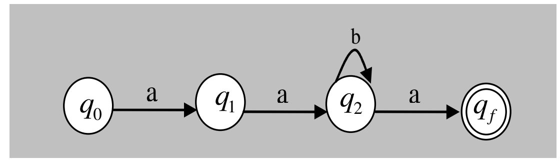
گرامری منظم است که همه قواعد آن خطی چپ و یا همه قواعد آن خطی راست باشد.

نکته: گرامری که تعدادی قانون خطی راست و تعدادی دیگر قانون خطی چپ داشته باشد، نمی تواند گرامر منظم باشد ولی مطمئنا این گرامر یک گرامر خطی است.

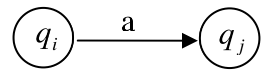
نکته: گرامر های منظم تولید کننده زبان های منظم اند، و به ازای هر زبان منظم می توان گرامر منظمی نوشت که آن را تولید کند.

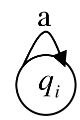
مثال: برای زبان aab^*a یک گرامر منظم بیابید.

حل: ابتدا یک DFA یا NDFA رسم می کنیم و با توجه به آن گرامر را می نویسیم



با توجه به سه نکته زیر می توانیم از روی DFA گرامر معادل را بنویسیم.

1-  معادل $q_i \to aq_j$ می باشد.

2-  معادل $q_i \to aq_i$ می باشد.

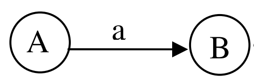
3- هر وضیعت نهائی مثل q_f با قاعده $q_f \to \lambda$ معادل می شود.

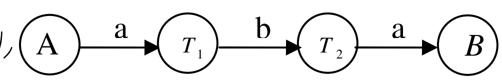
حل با توجه به این سه نکته و DFA معادل زبان می توانیم گرامر را به این شکل بنویسیم

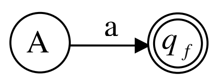
$$q_0 \to aq_1$$
$$q_1 \to aq_2$$
$$q_2 \to bq_2$$
$$q_2 \to bq_f$$
$$q_f \to \lambda$$

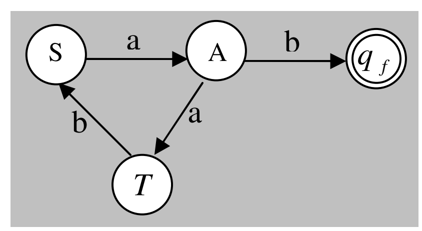
برای گرامر منظم $\begin{array}{l} S \to aA \\ A \to abS \mid b \end{array}$ یک DFA رسم کنید.

با توجه به سه نکته زیر می توانیم DFA معادل را رسم کنیم.

1- به جای قاعده $A \to aB$ گراف  را می کشیم

2- به جای قاعده $A \to abaB$ گراف  را رسم میکنیم

3- به جای $A \to a$ گراف  را رسم می کنیم



تعریف دیگر برای زبان منظم: زبانی منظم است که بتوان برای آن یک گرامر منظم پیدا کرد.

خواص زبان های منظم:

1- اگر زبان l_1 و l_2 منظم باشند آنگاه $l_1^*, \overline{l_1}, l_1.l_2, l_1 \cap l_2, l_1 \cup l_2$ همگی منظم اند

2- خانواده زبان های منظم نسبت به تفاضل و معکوس بسته اند.

3- خانواده زبان های منظم نسبت به عملیات همو مورفیسم(هم ریختی) بسته اند. یعنی اگر زبانی منظم باشد، و یک هم ریختی به آن اثر کند، زبان حاصل باز هم منظم خواهد ماند.

هم ریختی:

فرض کنید Σ_1 و Σ_2 دو الفبای مختلف باشند تابع $h(\Sigma_1) \to \Sigma_2^*$ را یک تابع هم ریختی می نامند. یعنی h تابعی است که هر حرف در Σ_1 را به یک رشته در Σ_2^* می برد. مثلا به این شکل. $\Sigma_1 = \{a,b\}, \Sigma_2 = \{p,q,r\}, h(a) = pqqqrq \ \ , h(b) = p$

□ دامنه تابع h را می توان به Σ_1^* نیز تعمیم داد منظور به این شکل $h(a_1a_2 \cdots a_n) = h(a_1)h(a_2)\dots h(a_n), a_i \in \Sigma_1$

□ وقتی تابع h به رشته های یک زبان مانند l_1 تاثیر گذارد، هر رشته از l_1 را به رشته جدیدی (با الفبای Σ_2) تبدیل می کند.به مجموعه رشته های جدید تولید شده، هم ریختی l_1 تحت تابع h گویند.

مثال:

$$\Sigma_1 = \{a,b\}, \Sigma_2 = \{p,q\}, l_1 = \{aab \ , ab \ , b\}, h(a) = pq \ , h(b) = qq \ \Rightarrow$$
$$h(aab) = pqpqqq \ \ , h(ab) = pqqq \ \ , h(b) = qq \ \Rightarrow$$
$$l_2 = \{pqpqqq \ \ , pqqq \ \ , qq\}$$

در این مثال l_2 تصویر هم ریختی l_1 تحت h می باشد.

مثال: ثابت کنید $l = \{a^n b^k c^{n+k}\}, \Sigma = \{a,b,c\}$ نامنظم است.

برهان خلف: فرض می کنیم l یک زبان منظم باشد، پس تحت هر نوع هم ریختی باید منظم باشد،هم ریختی h را به صورت مقابل تعریف می کنیم $h(a) = a, h(b) = a, h(c) = c \Rightarrow l = \{a^n a^k c^{n+k}\} = \{a^m c^m\}$

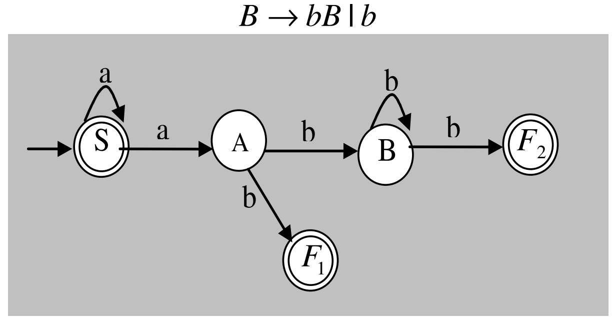
قبلا طبق قضیه Pumping ثابت شده است که نا منظم است، پس فرض غلط بوده است (در امتحان اثبات Pumping نیز لازم است)

مثال: ثابت کنید زبان $l = \{a^n b^l \mid n \neq l\}$ یک زبان نامنظم است.

برهان خلف: فرض می کنیم l یک زبان منظم است، پس بنا به خواص زبان های منظم $\bar{l} = \Sigma^* - l$ هم منظم است، از طرفی a^*b^* هم منظم است، پس زبان $l = (a^*b^*) \cap \bar{l} = a^n b^n$ هم بایستی بنا به خواص زبان های منظم، منظم باشد.که این طور نیست(طبق قضیه Pumping) پس خلاف فرض ثابت می شود.

تمرینات اضافی:

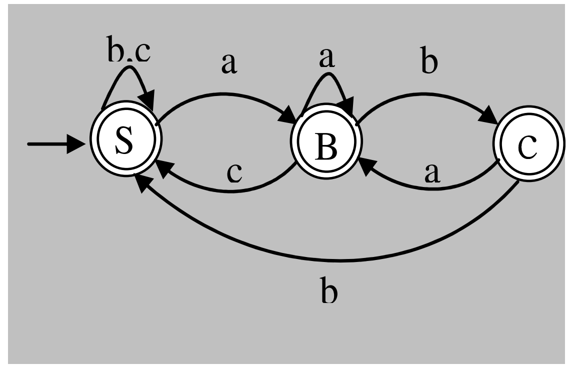
1- برای گرامر
$$S \to aS \mid aA \mid \lambda$$
$$A \to bB \mid b$$
$$B \to bB \mid b$$
یک ماشین متناهی طراحی کنید.



2- ماشین NFA مربوط به گرامر

$$S \to bS \mid cS \mid aB \mid \lambda$$
$$B \to aB \mid cS \mid bC \mid \lambda$$
$$C \to aB \mid bS \mid \lambda$$

چیست.



3- گرامر های خطی راست و خطی چپ برای زبان $l = \{a^n b^m : n \geq 2, m \geq 3\}$ بنویسید.

خطی راست:

$$S \to aaA$$
$$A \to aA \mid bbbB$$
$$B \to bB \mid \lambda$$

خطی چپ:

$$S \to Abbb$$
$$A \to Ab \mid Baa$$
$$B \to Ba \mid \lambda$$

4- یک گرامر منظم برای زبان $l = \{a^n b^m \mid n + m = 2k, k \geq 0\}$ بنویسید.

جواب:

$$S \to Ab \mid D$$
$$A \to Abb \mid Ba$$
$$B \to Baa \mid \lambda$$
$$D \to Dbb \mid E \mid \lambda$$
$$E \to Eaa \mid \lambda$$

5- گرا مری بنویسید که زبان تولیدی آن $l = \{a^n b^m c^{2n+m} \mid n, m \geq 0\}$ باشد.

جواب:

$$S \to aScc \mid aAcc$$
$$A \to bAc \mid bc$$

6- گرامر مربوط به زبان $l = \{a^n b^n c^n d^n \mid n > 0\}$ رابنویسید.

جواب:

$$S \to aSBCD \mid abcd$$
$$dB \to Bd$$
$$dC \to Cd$$
$$cB \to Bc$$
$$bB \to bb$$
$$cC \to cc$$
$$dD \to dd$$

پایان جلسه پنجم