7

تبدیل Z

تبدیل z یک سیگنال گسسته چنین تعریف میشود .

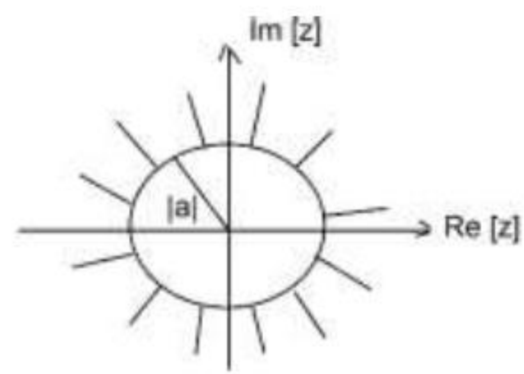
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad , \qquad z = re^{j\omega}$$

مثال) تبدیل z سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

$$1) x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$



$$2)\, x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{+\infty} (a^{-1} z)^m = 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} (a^{-1} z)^m$$

$$= 1 - \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a^{-1} z} \qquad \left|a^{-1} z\right| < 1$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل z

۱) Roc به صورت دیسک هایی به مرکز مبدا مختصات است.

۲) Roc شامل هیچ قطبی از $X(z)$ نیست.

۳) اگر $x[n]$ دارای طول محدود باشد ، Roc کل صفحه ی z ، احتمالا $z=0$ یا $z=\infty$ است.

۴) اگر $x[n]$ سمت راستی و $X(z)$گویا باشد ، Rocناحیه ی بیرونی خارجی ترین قطب است . اگر $x[n]$ علی باشد $z=\infty$ را شامل میشود .

۵) اگر $x[n]$ سمت چپی و$X(z)$ گویا باشد ، Roc ناحیه ی داخلیِ داخلی ترین قطب است و اگر $x[n]$ ضد علی باشد $z=0$ را نیز شامل میشود.

۶) اگر $x[n]$ دو طرفه باشد Rocیا محدود به قطب ها شده یا اصلا وجود ندارد.

مثال)

$$x[n] = a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$|z| > |a| \qquad |z| < \frac{1}{|a|} \qquad \Rightarrow |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

مثال) کلیه ی سیگنال هایی را مشخص کنید که تبدیل z آنها به صورت زیر است.

$$X(z) = \frac{k_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_2}{1+3z^{-1}}$$

$$k_1 = (1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$k_2 = (1+3z^{-1})X(z)\Big|_{z=-3} = \frac{6}{7}$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\times 2\right) = 0$$

$$\frac{k_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow \begin{cases} k_1(\frac{1}{2})^n u[n] \ , \ |z| > \frac{1}{2} \\ -k_1(\frac{1}{2})^n u[-n-1] \ , \ |z| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{k_2}{1+3z^{-1}} \rightarrow \begin{cases} k_2(-3)^n u[n] \ , \ |z| > 3 \\ -k_2(-3)^n u[-n-1] \ , \ |z| < 3 \end{cases}$$

$$x[n] = k_1(\frac{1}{2})^n u[n] + k_2(-3)^n u[n], \quad |z| > 3$$

$$x[n] = k_1(\frac{1}{2})^n u[n] - k_2(-3)^n u[-n-1] \quad , \quad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$x[n] = -k_1(\frac{1}{2})^n u[-n-1] - k_2(-3)^n u[-n-1] \quad , \quad |z| < \frac{1}{2}$$

مثال) عکس تبدیل z سیگنالهای زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ X(z) = 5z^3 - 2z - 3 + z^{-2} + 4z^{-5}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X[z] = \sum_{n=-3}^{n=5} x[n]z^{-n} = x[-3]z^{+3} + x[-2]z^{2} + x[-1]z + x[0]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[5]z^{-5}$$

x[5]=?=4

$x[-3] = 5$ $\quad x[-1] = -2$ $\quad x[0] = -3$

$x[2] = 1$ $\quad x[5] = 4$

2) $X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad , \quad |z| < |a|$

$$\ln(1 + V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}$$

$$X(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u[n-1]$$

خواص تبدیل z

۱) خطی بودن:

$$a x_1[n] + b x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} a X_1(z) + b X_2(z)$$

$Roc:\ R_1 \cap R_2$ حداقل

۲) انتقال زمانی:

$$x[n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

۳) تغییر مقیاس در حوزه ی z

$$z_0^n\, x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

۴) وارون سازی زمانی:

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X(z^{-1})$$

۵) کانولوشن :

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{z} y(z).H(z)$$

مثال) کانولوشن زیر را حساب کنید .

$$x[n] = (\frac{1}{3})^{n-1}u[n-1] \qquad h[n] = u[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{3} \, |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3}{2}$$

$$y[n] = \frac{3}{2}\, u[n] - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

۶) مشتق گیری :

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} \frac{-z\, dX(z)}{\mathbf{dz}}$$

مثال) عکس تبدیل z سیگنال زیر را به دست آورید

$$1)X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \, . \, \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

۷) قضیه ی مقدار اولیه :

$$x[0] = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$