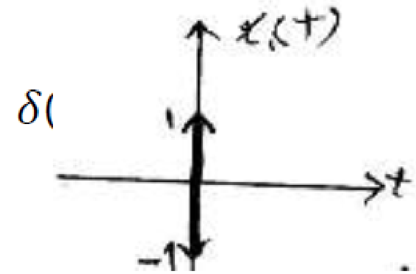
5

تابع دوپلت و سایر توابع ویژه:

تابع دوپلت مشتق تابع ضربه است



$$u_1(t) \triangleq \frac{d\delta(t)}{dt}$$

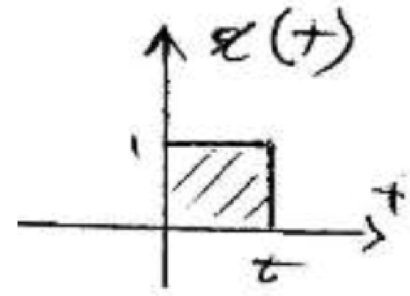
$$x(t) * u_1(t) = x(t) * \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} x(t) * \delta(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$u_k(t) \triangleq \frac{d^k\delta(t)}{dt^k}$$

مثال)

$$x(t) = \cos u(t) \quad , \quad h(t) = u(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = ?$$



$$y(t) = \frac{d}{dt}[-\sin t u(t) + \cos t\, \delta(t)]$$

$$y(t) = -sin\delta(t) - \cos t\, u(t) + u(t)$$

$$u(t) \triangleq u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

$$u_{-2} = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau = t\, u(t)$$

سری فوریه

بنابرین میتوان $x(t)$ را به صورت مجموع یک سری از توابع نمایی بصورت زیر نوشت:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}; \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0$$

برای محاسبه ی ضرایب سری فوریه موقعی که سیگنال به صورت مجموعی از سیگنال ها است از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\cos\theta=\frac{e^{\theta j}+e^{-\theta j}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{e^{\theta j}+e^{-\theta j}}{2j}$$

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$$

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos\theta$$

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=j2\sin\theta$$

مثال) سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{-1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos(5t + 45°)$$

$$T_0 = 2\pi \qquad\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4j}e^{j\omega} - \frac{1}{4j}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-3j\omega} + \frac{1}{16}e^{j45}.e^{j5t} + \frac{1}{16}e^{-j45}.e^{-j5t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jkt}$$

$$\frac{1}{3} = a_k e^{jkt} \rightarrow k = 0\,, a_0 = \frac{1}{3}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{4j} a_3 = a_{-3} = \frac{-1}{8} a_5 = \frac{1}{16}e^{j45} a_{-5} = \frac{1}{16}e^{-j45}$$

مثال) سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{-1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos(5t + 45°)$$

$$T_0 = 2\pi \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\times1\times t} - e^{-j\times1\times t}}{2j}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{j\times3\times t} - e^{-j\times3\times t}}{2}\right) + \frac{1}{8}e^{j45}\left(\frac{e^{j\times5\times t} - e^{-j\times5\times t}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4j}e^{j\omega} - \frac{1}{4j}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-3j\omega} + \frac{1}{16}e^{j45}.e^{j5t} + \frac{1}{16}e^{-j45}.e^{-j5t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jkt}$$

$$\frac{1}{3} = a_k e^{jkt} \rightarrow k = 0\,, a_0 = \frac{1}{3}$$

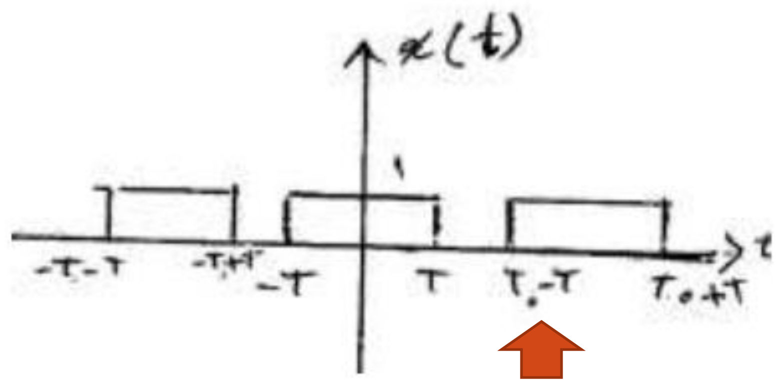
$$a_{-1} = \frac{-1}{4j} a_3 = a_{-3} = \frac{-1}{8} a_5 = \frac{1}{16} e^{j45} a_{-5} = \frac{1}{16} e^{-j45}$$

در حالت کلی ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

مثال) ضرایب سری فوریه قطار پالس زیر را محاسبه کنید .



$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T}^{T} (1)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

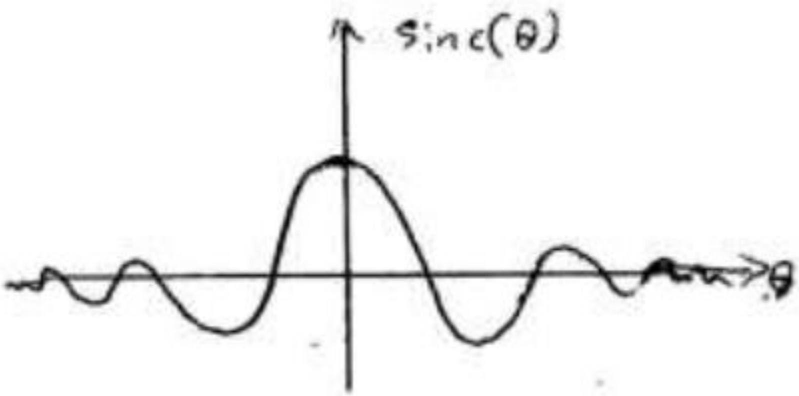
$$a_k = \frac{1}{T_0}.\frac{-1}{jk\omega}.e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T}^{T} = \frac{1}{jk\frac{2\pi}{T_0}\ T}.2j\sin k\omega_0 T$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{-1}{jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0 T} - e^{jk\omega_0 T}\right) = \frac{1}{T_0}\frac{1}{jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 T} - e^{-jk\omega_0 T}\right)$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{2}{j2k\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 T} - e^{-jk\omega_0 T}\right)$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{2}{k\frac{2\pi}{T_0}}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T} - e^{-jk\omega_0 T}}{2j}\right) = \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k\pi}$$

$$\frac{\sin k\frac{2\pi}{T_0}T}{k\pi\frac{2T}{T_0}}\cdot\frac{2T}{T_0}=\frac{2T}{T_0}\ sinc\ (\frac{2Tk}{T_0})$$



خواص سری فوریه

۱) خطی بودن

$$x_1(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k\ , T_0 \qquad x_2(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} b_k\ , T_0$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} \alpha\, a_k + \beta b_k \quad , T_0$$

۲) انتقال زمانی

$$x(t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$x(t-t_0) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{T_0}\int x(t-t_0)\, e^{-jk\omega_0 t} dt \ , t' = t - t_0}$$

$$e^{-jk\omega_0(t'+t_0)} = e^{-jk\omega_0 t'} \times e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t') e^{-jk\omega_0(t'+t_0)} dt' = \frac{1}{T_0} e^{-jk\omega_0 t_0}\int_{T_0} x(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt'$$

مثال

$$x(t) = \cos 3t = \frac{1}{2}e^{3j} + \frac{1}{2}e^{-3j} \quad , \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x(t-2) = \cos 3(t-2) = \cos(3t-6) = \frac{1}{2}e^{3j\omega}.e^{-6j} + \frac{1}{2}e^{-3jt}.e^{6j}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}.e^{-6j} \quad , \qquad b_{-1} = \frac{1}{2}.e^{6j}$$

$$b_1 = a_k e^{-kj6}$$

$$b_1 = a_1 e^{-j6}$$

$$b_{-1} = a_{-1} e^{j6}$$

۳) وارون پذیری زمانی:

$$x(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k$$

$$x(-t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} b_k = a_{-k}$$

اگر x(t) زوج باشد :

$$x(t) = x(-t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k = a_{-k}$$

اگر x(t) فرد باشد :

$$x(t) = -x(-t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k = -a_{-k}$$

۴) تغییر مقیاس در حوزه ی زمان :

$$x(\alpha t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} b_k = a_k \quad , \quad \omega_1 = \alpha\omega_0$$

$$x(\alpha t) = \sum a_k . e^{kj\omega_0 t\alpha} = \sum a_k . e^{kj\omega_1 t}$$

$$x(t) = \cos t \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \ , \omega_0 = 1$$

$$x(5t) = \cos 5t \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \ , \omega_0 = 5$$

۵) مزدوج گیری

$$x^*(t) \overset{F_S}{\leftrightarrow} a^*_{-k}$$

$$a_k = \frac{2T}{T_0} sinc\,(\frac{12kT}{T_0})$$

$$x(t) = x^*(t) = a_k = a^*_{-k} \rightarrow \frac{2T}{T_0}\ \text{sinc}\ \left(\frac{-2kT}{T_0}\right) = \frac{2T}{T_0} sinc\ \frac{2kt}{T_0}$$

۶) قضیه ی توان پارسوال :

$$F_\infty = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

تبدیل فوریه پیوسته

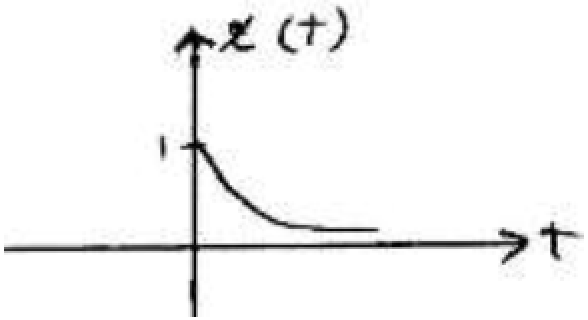
تبدیل فوریه ی یک سیگنال پیوسته و عکس آن چنین تعریف میشود:

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را به دست آورید :

$1) x(t) = e^{-at}u(t) \,, a > 0$



$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{(a+j\omega)}(0-1) = \frac{1}{(a+j\omega)}$$

$$|X(j\omega| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

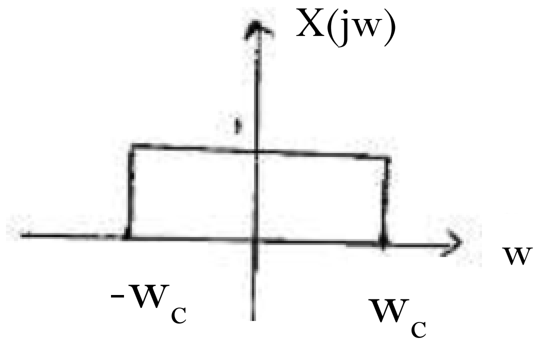
2) $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = 1$$

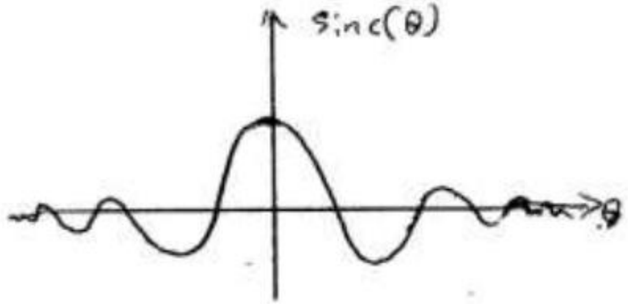
$$\delta(t) e^{-j\omega t} = \delta(t) \times 1$$

مثال) عکس تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

$$X(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_C\\ 0 & |\omega|>\omega_C\end{cases}$$



$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_C}^{\omega_C} e^{j\omega t}\,d\omega=$$



$$\frac{1}{2\pi jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{1}{2\pi jt}\left(e^{j\omega_c t}-e^{-j\omega_c t}\right)=\frac{1}{\pi t}\left(\frac{e^{j\omega_c t}-e^{-j\omega_c t}}{2j}\right)$$

$$=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$

خواص تبدیل فوریه ی پیوسته:

۱) خطی بودن:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

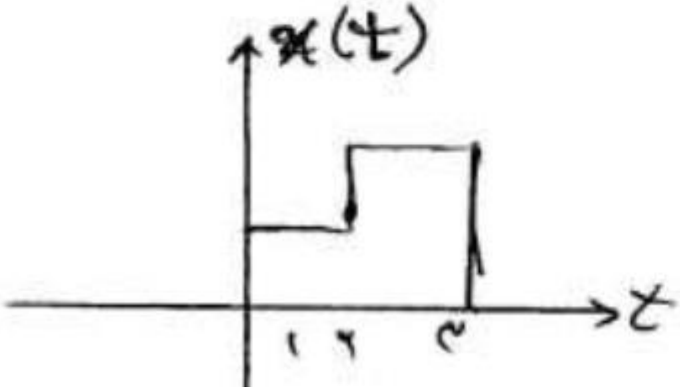
$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

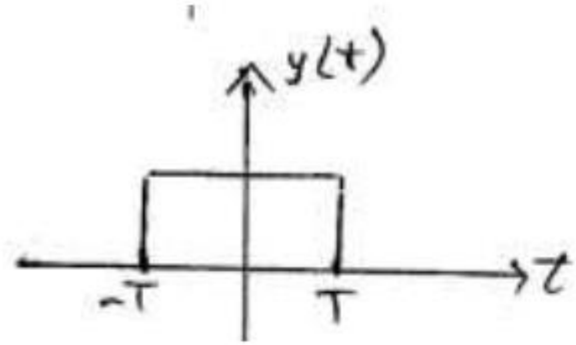
$$ax_1(t) + bx_2(t) \overset{F_S}{\leftrightarrow} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

۲) انتقال زمانی:

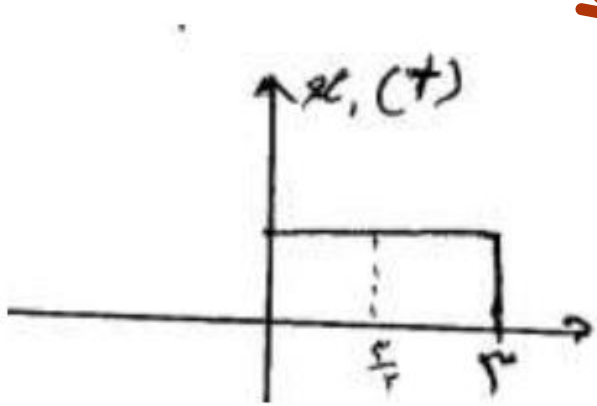
$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال زیر را به دست آورید:

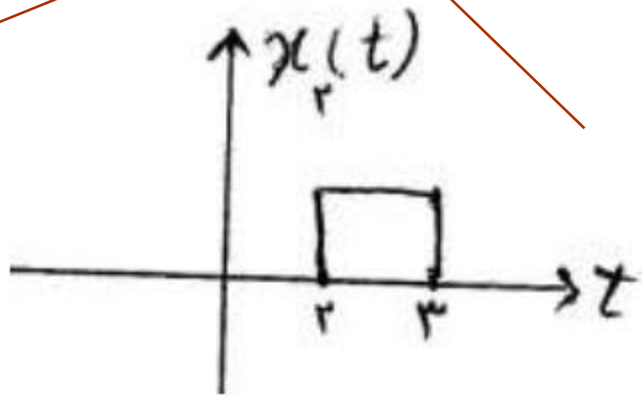




$$y(j\omega)=\frac{2\sin \omega t}{\omega}$$



+



$$x_1(t) = y\left(t - \frac{3}{2}\right), \qquad T = \frac{3}{2}$$

$$X_1(\omega j) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} y(j\omega)$$

$$X_1(\omega j) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} \frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\omega}$$

$$x_2(t) = y(t - 2.5)\ , \quad T = \frac{1}{2}$$

$$X_2(\omega j) = 2e^{-2.5j\omega} \frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\omega}$$

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

۳) وارون سازی زمانی:

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

۴) تغییر مقیاس در حوزه زمان:

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} . X(\alpha j\omega)$$

مثال) $x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 1}$

$$x(6t) = e^{-6t}u(6t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 6}$$

۵) مزدوج گیری :

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد:

$$x(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

اگر سیگنال زوج باشد:

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$

و اگر فرد باشد:

$$\sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega)$$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = X_R(j\omega) + jX_I(j\omega)$$

$$x_e(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_R(j\omega)$$

$$x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} jX_I(j\omega)$$

مثال)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$\boxed{x_e(t) = \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}} \overset{F}{\longleftrightarrow} X_R(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega} \times \frac{a-j\omega}{a-j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \boxed{\frac{a}{a^2+\omega^2}} - j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

۶) مشتق و انتگرال گیری:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} v(j\omega) = j\omega L I(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi . X(0) . \delta(\omega)$$

۷) قضیه ی انرژی پارسوال:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

۸) قضیه ی کانولوشن:

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega).H(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$ پاسخ فرکانس سیستم

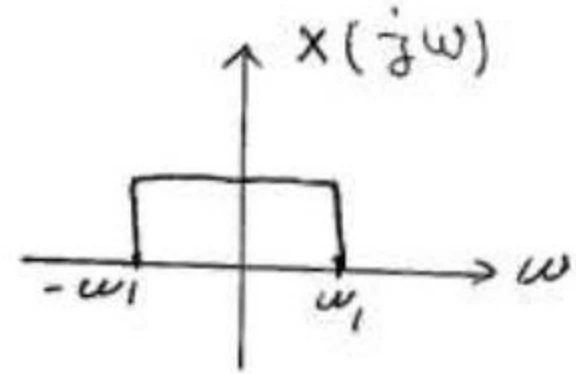
Frequency Response

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$ تابع تبدیل شبکه

Transform Function

مثال) کانولوشن زیر را حساب کنید:

$$x(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{\pi t} \quad , \quad h(t) = \frac{\sin \omega_2 t}{\pi t}$$



$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_1 \\ 0 & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_2 \\ 0 & |\omega| > \omega_2 \end{cases}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega).H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_3 \\ 0 & |\omega| > \omega_3 \end{cases}$$

$$W_3 = \min(W_1 \ , W_2)$$

۹) ضرب دو سیگنال:

$$r(t) = x(t)\,.\,s(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\,X(j\omega) * s(j\omega)$$