۵۲-۷۱

حل تمرینات انتگرال

$I=\int \sin x \tan x\,dx=\int \sin x\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx$

$=\int(\sec x-\cos x)\,dx=\ln|\sec x+\tan x|-\sin x+c$

$I=\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\cos^2 x}=\int \cot x\,\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+c=\ln|\tan x|+c$

$t=\tan x$

$I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=\int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$

$=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\tan x-\cot x+c'$

$I=\int \sin x\cos 2x\,dx=\int \frac{1}{2}\left[\sin(x+2x)+\sin(x-2x)\right]dx=\frac{1}{2}\int(\sin 3x-\sin x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)+C$

$I=\int \cos 2x\cos 6x\,dx=\int \frac{1}{2}\left[\cos(2x+6x)+\cos(2x-6x)\right]dx=\frac{1}{2}\int(\cos 8x+\cos 4x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

$I=\int \sin x\sin 3x\sin 5x\,dx=\int \frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)-\cos(x+3x)\right]\sin 5x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int \cos 2x\sin 5x\,dx-\frac{1}{2}\int \cos 4x\sin 5x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left[\sin(2x+5x)+\sin(5x-2x)\right]dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left[\sin(5x+4x)+\sin(5x-4x)\right]dx$

$=\frac{1}{4}\int(\sin 7x+\sin 3x-\sin 9x-\sin x)\,dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\cos 9x+\cos x\right)+C$

$I=\int \frac{dx}{e^x-1}=\int \frac{dt/t}{t-1}=\int \frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=-\ln|t|+\ln|t-1|+c$

$=-\ln|e^x|+\ln|e^x-1|+C'$

$e^x=t\to e^x dx=dt\to dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

۵۲-۲)

$$\frac{1}{t(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}=\frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}=\frac{(A+B)t-A}{t(t-1)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-A=1\end{cases}$$

$$\rightarrow A=-1,\quad B=1$$

$$I=\int\frac{dx}{e^{2x}-1}=\int\frac{dt/t}{t^2-1}=\int\frac{dt}{t(t^2-1)}$$

$e^x=t\rightarrow e^x dx=dt\rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$$\frac{1}{t(t^2-1)}=\frac{1}{t(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}=\frac{A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t+1)}$$

$$=\frac{At^2-A+Bt^2+Bt+Ct^2-Ct}{t(t-1)(t+1)}=\frac{(A+B+C)t+(B-C)t-A}{t(t-1)(t+1)}$$

$$\rightarrow\begin{cases}A+B+C=0 & \rightarrow -1+2B=0\rightarrow\boxed{B=\frac{1}{2}},\ \boxed{C=\frac{1}{2}}\\ B-C=0 & \rightarrow B=C\\ -A=1 & \rightarrow\boxed{A=-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dt}{t(t^2-1)}=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt=-\ln|t|+\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|+\ln|t+1|\right)+c$$

$$=-\ln|e^x|+\frac{1}{2}\left(\ln|e^x-1|+\ln|e^x+1|\right)+c$$

$$I=\int\frac{dx}{x^3-1}\qquad\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0 \xrightarrow{} -B=A\\ A-B+C=0\\ A-C=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2A+C=0\\ A-C=1\end{cases}\rightarrow A=\frac{1}{3},\ C=-\frac{2}{3},\ B=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx=\cancel{\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{2}\int 2x}$$

۵۲-ج

$$=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\int\frac{\overbrace{2x+1}^{du}}{\underbrace{x^2+x+1}_{u}}dx-\frac{1}{6}\int\frac{3}{x^2+x+1}dx$$

$$x^2+x+1 \to \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \qquad dx=d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{u}{a}+c}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{Arctan}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c$$

تمرین: انتگرال مهم

$$I_1=\int x^2\sqrt[5]{1-x}\,dx \qquad I_2=\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \qquad I_3=\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I_4=\int\cos^5x\sqrt{\sin x}\,dx \qquad I_5=\int\tan\sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}} \qquad I_6=\int\frac{dx}{1+\cos^2x}$$

راهنمایی I_6:

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2x}=\int\frac{dx}{\sin^2x+2\cos^2x}=\int\frac{dx/\cos^2x}{\tan^2x+2}=\cdots$$

$$I_7=\int\frac{\ln 2x}{\ln 4x}\,\frac{dx}{x} \qquad I_8=\int\frac{dx}{\cos^4x}$$

$$I_9=\int\frac{dx}{\sin x\,(2+\cos x-2\sin x)}$$

$$I_{10}=\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$$

راهنمایی:

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}=-1+\frac{2}{1+\sin x-\cos x}$$

پاسخ I_1، I_2، I_3، I_4، I_5 از تغییر متغیر

انتگرال‌های ناسره (نامتعارف یا مجازی)

در تعریف انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ فرض کردیم که تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ معین یا کراندار است. بنابراین اگر a و یا b و یا هر دوی آنها ∞ باشند و یا تابع f در نقطه‌ای از $[a,b]$ ناپیوسته و یا ∞ باشد و یا هر دو حالت رخ دهد، انتگرال را انتگرال مجازی یا ناسره گوییم.

تعریف: اگر تابع f برای هر $a \le x$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(با شرط وجود حد)

تعریف: اگر تابع f برای هر $x \le b$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(با شرط وجود حد)

تعریف: اگر برای $\mathbb{R}$ مقادیر حقیقی تابع f پیوسته و c عدد دلخواه باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

معمولاً عدد c را صفر اختیار می‌کنیم. در تعریف بالا اگر حدود موجود باشند انتگرال را همگرا و در غیر اینصورت انتگرال را واگرا می‌گوییم.

مثال: انتگرال‌های $I=\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ ، $I=\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2}$ را بررسی کنید.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}-(-1)\right) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^2\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{4-x}\right)\Big|_a^2 = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{4-2}-\frac{1}{4-a}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال: انتگرال‌های زیر را بررسی کنید

$$\int\frac{dx}{(4-x)^2} = \int -\frac{dz}{z^2} = -\int z^{-2}dz = \frac{1}{z}+C$$

$4-x=z$

$$= \frac{1}{4-x}+C$$

$$\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (-\cos b + 1)$$

این حد وجود ندارد پس انتگرال واگرایست

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln(\ln x))\Big|_e^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln(\ln b)) = +\infty \Rightarrow$$ واگرایست انتگرال

$$\int_1^{\infty} \ln x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \ln x\,dx = \lim_{b\to+\infty} (x\ln x - x)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (b\ln b - b + 1)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \{b(\ln b - 1) + 1\} = +\infty \rightarrow$$ پس انتگرال واگرایست

Arctan ۰

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{Arctan} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{Arctan} b - 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{Arctan} x)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{Arctan} x)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\cancel{\operatorname{Arctan} 0} - \operatorname{Arctan} a) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{Arctan} b - \cancel{\operatorname{Arctan} 0})$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

مثال: انتگرالهای زیر را بررسی کنید

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

تابع $\frac{1}{\sqrt{x}}$ در ۰ ناپیوسته است

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to0^+} (2\sqrt{x})\Big|_c^1 = \lim_{c\to0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{x})\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{b} - 2) = \infty$$

انتگرال واگرا

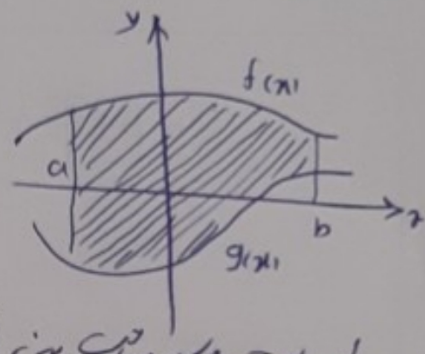
$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ واگرایست

کاربرد انتگرال معین

مساحت: فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته و برای هر x در این بازه، $f(x) \geq g(x)$ باشد. بدین ترتیب روی $[a,b]$، نمودار تابع $f(x)$ در بالای نمودار تابع $g(x)$ قرار می‌گیرد. مساحت سطح محصور به منحنی $f(x)$ از بالا، منحنی $g(x)$ از پایین و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر است با:

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



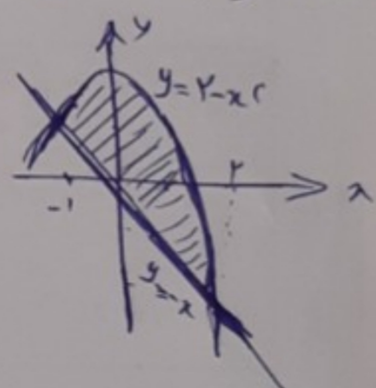
مثال: مطلوبست محاسبه مساحت بین نمودار $y=2-x^2$ و $y=-x$

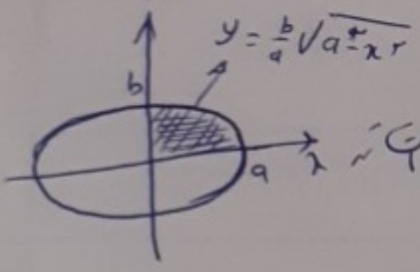
ابتدا نقاط تقاطع دو منحنی را بوسیله یافتن نقاطی که مختصات آن در هر دو منحنی صدق می‌کنند، تعیین می‌کنیم

$$2-x^2=-x \longrightarrow x^2-x-2=0 \longrightarrow x=-1,2$$

روی $[-1,2]$، $2-x^2 \geq -x$ پس:

$$\text{مساحت} = \int_{-1}^{2}(2-x^2+x)\,dx = \left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}$$





مثال: مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ را بیابید.

بدلیل تقارن بیضی نسبت به هر دو محور مختصات، مساحت ۴ برابر قسمتی است که در ربع اول واقع است

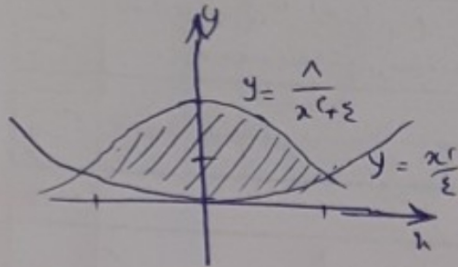
$$\text{مساحت} = 4\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-0\right)dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$x=a\sin\theta$

$$= 4\frac{b}{a}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = 4ab\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

مساحت بین دو منحنی $x^2=4y$ و $y=\frac{8}{x^2+4}$ را بیابید

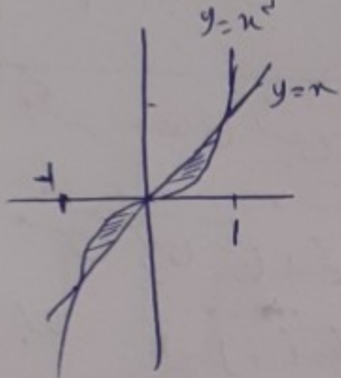
$$\frac{8}{x^2+4}=\frac{x^2}{4} \Rightarrow x^4+4x^2-32=0 \longrightarrow x=2,-2$$



در $[-2,2]$ ، $\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$

$$\text{مساحت}=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=\left(4\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-2}^{2}=2\pi-\frac{4}{3}$$



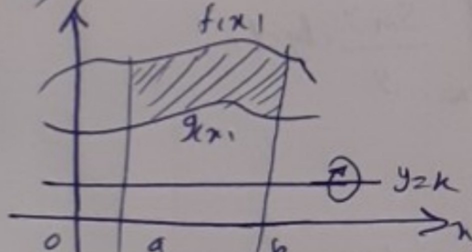
مثال: مساحت بین $y=x^3$ و $y=x$ را بیابید

$$x^3=x \longrightarrow x=0,1,-1$$

$$\text{مساحت}=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{11}{4}$$

حجم: فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته و برای همه x های این بازه $f(x) \geq g(x)$ باشد. حجم حاصل از دوران ناحیه R محصور به $f(x)$ از بالا، $g(x)$ از پایین و خطوط $x=a$ و $x=b$ حول خط $y=k$ عبارت است از

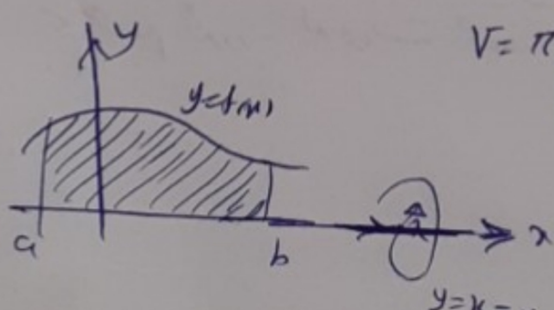


$$V=\pi\int_a^b\left((f(x)-k)^2-(g(x)-k)^2\right)dx$$

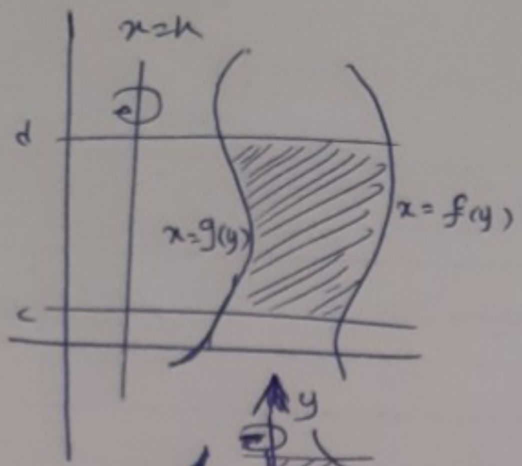
حالت خاص: اگر سطح بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ ، $x=b$ و محور x ها را حول محور x ها

(دوران دهیم) $(y=k=0)$

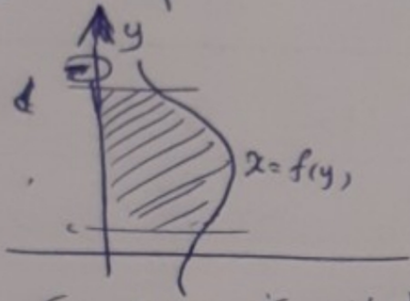
$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$



د) حجم حاصل از دوران ناحیه زیر حول خط $x=k$



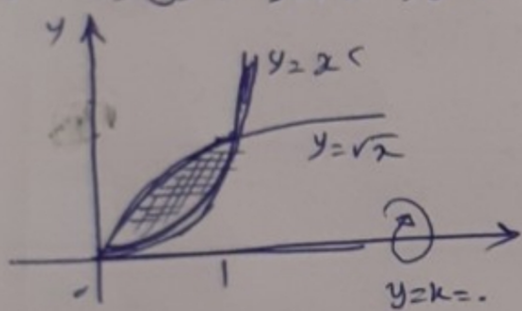
$$V=\pi\int_c^d \left((f(y)-k)^2-(g(y)-k)^2\right)dy$$



$$V=\pi\int_c^d f(y)^2\,dy$$

حجم ناحیه روبرو که حاصل از دوران حول محور yها $(x=k=0)$ است

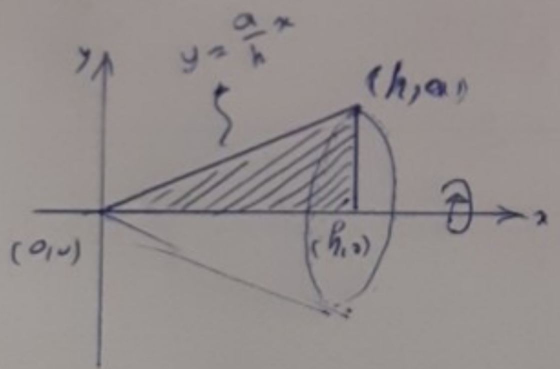
مثال: حجم جسم ایجاد شده توسط دوران سطح بین $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ را حول محور xها بیابید



$$V=\pi\int_0^1\left((\sqrt{x}-0)^2-(x^2-0)^2\right)dx=\pi\int_0^1(x-x^4)\,dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

مثال: حجم مخروط مستدیر قائم با شعاع قاعده a و ارتفاع h را بیابید

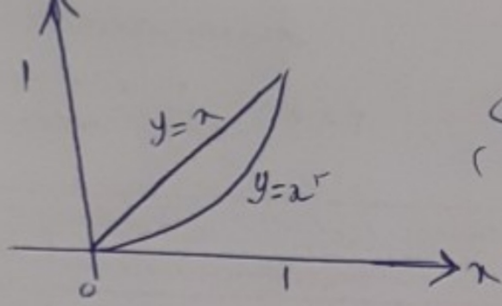
مخروط از دوران مثلث زیر حول محور xها به دست آمده



$$V=\pi\int_0^h y^2\,dx=\pi\int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

$$=\pi\frac{a^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi a^2h$$

مثال: ناحیه بین $y=x^2$ و $y=x$ را یکبار حول محور xها و دیگر بار حول محور yها دوران داده، حجم جسم های حاصل شده را بنویسید



اگر حول محور x ها دوران دهیم داریم $y=k=0$ (محور دوران)

واشر

$$V=\pi\int_0^1\left((y_1-0)^2+(y_2-0)^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{2\pi}{15}$$

اگر حول محور y ها دوران دهیم داریم $x=k=0$ (محور دوران)

$$V=\pi\int_0^1\left((x_1-0)^2-(x_2-0)^2\right)dy=\pi\int_0^1\left((\sqrt{y}-0)^2-(y-0)^2\right)dy$$

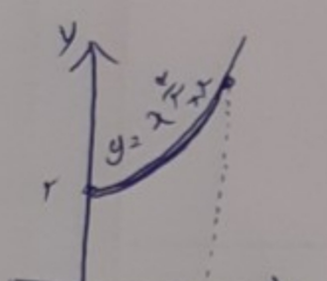
$$=\pi\int_0^1(y-y^2)\,dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

طول منحنی:

اگر تابع $y=f(x)$ روی $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته باشد. طول قوس این منحنی از $(a,f(a))$ تا $(b,f(b))$ عبارت است از:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

مثال: طول منحنی $y=f(x)=x^{3/2}+2$ را از نقطه $x=0$ تا $x=\frac{4}{3}$ بیابید



$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

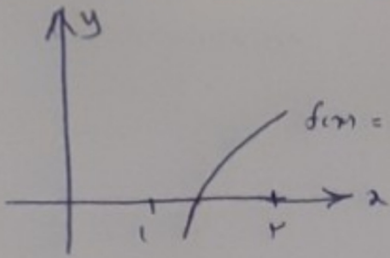
$$l=\int_0^{4/3}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{4/3}=\frac{56}{27}$$

$$1+\frac{9}{4}x=t\rightarrow\frac{9}{4}dx=dt\rightarrow dx=\frac{4}{9}dt$$

$$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{4}{9}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

مثال: طول قوس منحنی $f(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2\ (1\le x\le 2)$ را بیابید

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x$$



$$l=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{16}-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{16}+\frac{1}{2}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}\,dx$$

$$=\left(\ln x+\frac{x^2}{8}\right)\Big|_1^2=\ln 2+\frac{3}{8}$$

مثال: طول قوس منحنی $f(x)=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt$ را از $x=0$ تا $x=\pi$ بیابید

$f'(x)=\sqrt{\sin x}$

$$l=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^\pi\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^\pi\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi=4$$

مثال: اگر $f(x)=\int_0^x\sqrt{t+1}\,dt$، طول منحنی $f(x)$ را از $x=0$ تا $x=2$ بیابید

$f'(x)=\sqrt{x+1}$

$$l=\int_0^2\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{2+x}\,dx=\int_2^4\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4$$

$$2+x=t\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow t=2\\ x=2\rightarrow t=4\end{cases}$$

$dx=dt$

$$=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)$$