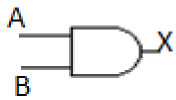
۱-۲)جبر بولین[1]:

منطق باینری: یک منطق باینری منطقی است که بر اعدادباینری وعملیات منطقی اعمال می شود.

گیتهای منطقی: مدارات الکترونیکی هستند که سبب انجام عملیات منطقی برروی اعدادباینری میشوند.

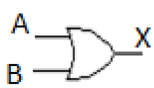
۲-۱)انواع گیتهای منطقی:

۱-گیت AND: دارای حداقل دو ورودی وفقط یک خروجی است.



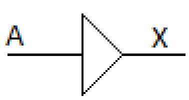
X=AB　یا　X=A.B

۲-گیت OR:دارای حداقل دو ورودی و فقط یک خروجی است.



X=A+B

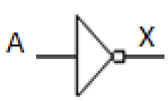
۳-گیتBUFFER: دارای یک ورودی ویک خروجی یکسان است.



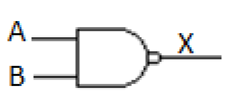
X=A

٤-گیتNOT: دارای یک ورودی ویک خروجی معکوس ورودی است.

X=A'　یا　X= $\overline{A}$



۵- گیت NAND :دارای حداقل دو ورودی ویک خروجی است که معکوس گیت AND می باشد.

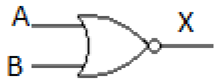


X=(AB)'　یا　X= $\overline{(AB)}$

نکته مهم : (A.B)′ با A′.B′ متفاوت است.

۶- NOR:دارای حد اقل دو ورودی وفقط یک خروجی است.که معکوس گیت ORاست

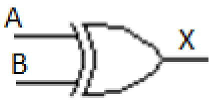
[1] Boolean Algebra



X=(A+B)'　یا　$x = \overline{(A+B)}$

نکته مهم : ’(A+B) با ’A’+B متفاوت است.

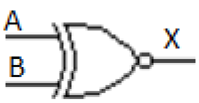
۷-گیتExclusive OR(XOR): دارای حداقل دو ورودی وفقط یک خروجی است.



$X = A \oplus B$

نکته: ثابت می شود　$A\oplus B=A'B+AB'$

۸-گیتExclusive NOR(XNOR): دارای حداق دوورودی وفقط یک خروجی است.



$X = A \odot B$

نکته:ثابت می شود:　$A\odot B=AB+A'B'$

نکته:توابع XOR وXNOR متمم هم هستندیعنی:　$(A\oplus B)' = (A \odot B)$　.

جبربولین:

جبری است که با مقادیرباینری سروکارداردوعملیات انجام شونده درآن منطقی هستند.

تابع بولین:

همان تابع در ریاضیات است با این تفاوت که مقادیر،باینری(صفرویک)وعملیات، منطقی هستند.به این معنی که دامنه وبرد تابع بولین مجموعه صفر ویک است.

سه عملگرپایه درتابع بولین وجوددارد: NOT,OR,AND

یک تابع بولین از این عملگرها، دو علامت = و ( ) و متغیرهای باینری تشکیل شده است.

مثلا:

$F(A,B,C) = (A \,.\, B)' + (A \oplus C')$

۲-۱-۲)جدول درستی:

جدولی است که ارتباط بین تابع بولین با مجموعه حالات متغیر های ورودی اش را نشان میدهد.اگر تابعی دارای n متغیرورودی باشدمجموع حالات مختلف ورودی هایش 2^n حالت است.درجدول زیرمجموعه حالات توابع ساده ای که بحث شد(توابع ساده یک عملگره)نشان داده شده است:

کلیه توابع دو متغیر دارند یعنی ٤ حالت:

ورودیها		AND	OR	NAND	NOR	XOR	XNOR
A	B	AB	A+B	(A.B)'	(A+B)'	$B \oplus A$	$B \odot A$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

همانطوریکه مشخص است.:

- ✓ خروجی گیت AND زمانی یک است که ***همه ورودیهای آن تواما*** یک باشند.
- ✓ خروجی گیت OR زمانی یک است که **حداقل یکی از ورودیهای آن** یک باشند.
- ✓ خروجی گیتNAND عکس گیت AND است.
- ✓ خروجی گیت NOR عکس گیت OR است.
- ✓ خروجی گیتXOR زمانی یک است که **فقط یکی از ورودیها** یک باشد. یا **ورودیهای آن مختلف** باشند.
- ✓ خروجی گیت XNOR زمانی یک است که **ورودیها یکسان** باشند(یا عکس XOR است).
- ✓ برای گیت XOR **چند ورودی** زمانی خروجی آن ۱ است که **تعداد یکهای ورودیهای آن عددی فرد باشد .**
- ✓ برای گیت XNOR **چندورودی** زمانی خروجی آن ۱ است که **تعداد یکهای ورودیهای آن عددی زوج باشد .**

جدول درستی دوتابعBUFFER,NOT نیزبصورت زیر است:

چون دو تابع فوق دارای یک ورودی هستندپس ۲به توان ۱=۲حالت وجود دارد:

A ورودی	A (Buffer)	A' (NOT)
0	0	1
1	1	0

۲-۱-۲) دیاگرام منطقی[۲] :

ازلحاظ مفهومی همان تابع بولین است با این تفاوت که یک فرم دیاگرامی دارد.

نکته مهم : اولویت ساختن یک تابع در جدول درستی بصورت زیر است:

۱)عبارت داخل پرانتز ۲)گیت ۳ NOT)گیت AND ٤)گیت OR ۵) گیت XOR

مثال : تابع F(x,y,z)=x+y'z مفروض است جدول درستی ودیاگرام منطقی آن بصورت زیر است:

جدول درستی:

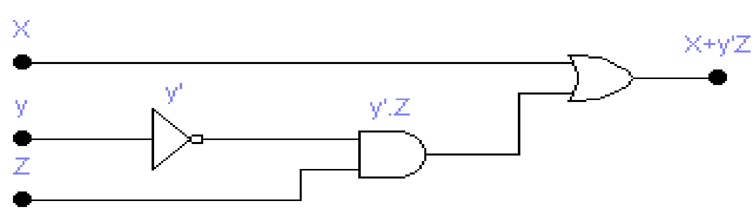
تابع F دارای سه متغیراست بنابراین تعداد حالات ورودیهای آن 2^3 حالت می شود.طبق جدول زیرتابع F را پله پله می سازیم:

	x	y	z	y'	y'z	F=x+y'z
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1

این جدول به ما میگوید که تابع F بازای مقادیر فرضا xyz=001 دارای مقدار خروجی 1 و بازای فرضا xyz=010 دارای مقدار خروجی 0 است.

رسم دیاگرام منطقی:

برای رسم دیاگرام منطقی به همان ترتیبی که در جدول درستی تابع را ساختیم به صورت دیاگرامی وبا استفاده ازشکل گیتهای منطقی آن را می سازیم در مثال قبل در جدول ابتدا y' سپس z.'y ودر نهایت x+y'.z را ساختیم به همین ترتیب دیاگرام رارسم میکنیم:



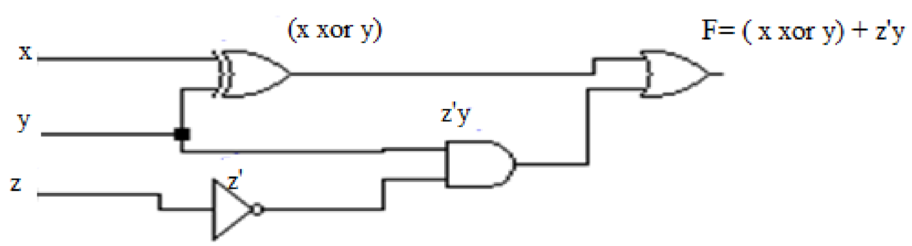
۲ Logic Diagram

مثال: تابع $F(x,y,z)=(x\oplus y)+z'.y$ مفروض است.جدول درستی ودیاگرام منطقی آن را رسم کنید.

تابع دارای ۳متغیراست تعداد حالات در جدول درستی ۸ حالت میشود

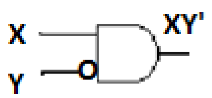
x	y	z	$x\oplus y$	z'	z'.y	$(x\oplus y)+z'y$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

رسم دیاگرام منطقی:

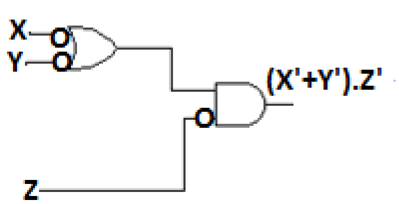


نکته : دربرخی از مسائل علامت o ، قبل از ورودیهای گیت ها استفاده می شودکه نشان دهندهNOT است.

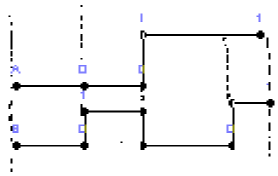
مثلا: X.Y’

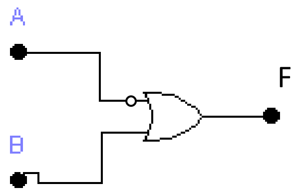


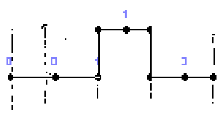
یا مثلا: (x’+y’). z’

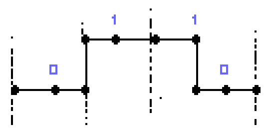


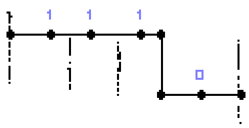
مثال) اگر A,B مقادیر زیر را داشته باشند و تابع F نیز بصورت زیر باشد، خروجی تابع F کدام است؟

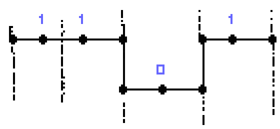




۱) 

۲) 

۳) 

٤) 

طبق شکل$A'+B$:

در زمان اول A=0,B=0 در نتیجه F=1 در زمان دوم A=0,B=1 در نتیجه F=1

در زمان سوم A=1,B=0 در نتیجه F=0 در زمان چهارم A=1,B=1 در نتیجه F=1 (شکل٤)

۲-۲)ساده کردن تابع:

دوروش برای ساده سازی توابع بولین وجود دارد:

۱-استفاده از قوانین جبر بولین ۲- استفاده ازجدول کارنو.

۲-۲-۱)استفاده از قوانین جبربولین در ساده سازی

قوانین جبر بولین عبارتند از:

۱- قانون جابجایی: $x+y=y+x$ $x.y=y.x$

(فراموش نشودکه علامت" + "یعنی OR منطقی وعلامت" . " به معنی AND منطقی است)

۲-قانون شرکتپذیری: $(x+y)+z=x+(y+z)$

$(x.y).z=x.(y.z)$

۳- قانون توزیع پذیری : $x.(y+z)=(x.y)+(x.z)$

$x+(y.z)=(x+y).(x+z)$

نکته: عکس توزیع پذیری فاکتورگیری است.

٤- قانون خود توانی: $x+x=x$ $x=x.x$

۵-قوانین یکها و صفرها : $x.0=0$ $x+0=x$

$x.1=x$ $x+1=1$

۶- قانون مکمل (متمم) گیری: $x.x'=0$ $x+x'=1$

۷-قانون دمرگان: $(x.y)'=x'+y'$ $(x+y)'=x'.y'$

۸-قانون مکمل مکمل:(یا نقیض نقیض) $(x')'=x$

۹-قانون جذب: $x.(x+y)=x$ $x+(x.y)=x$

۱۰-قانون شبه جذب: $x+(x'.y)=x+y$ $x.(x'+y)=x.y$

۱۱- تعریف xor, xnor:

$x \oplus y = xy' + x'y$ $x \odot y = xy + x'y'$ $x \oplus y = (x \odot y)'$

۱۲- خواص xor :

$x \oplus 1= x'$, $x \oplus 0= x$

چند مثال:

مثال۱: ساده شده تابع $F(x,y)=((x'+y).y')'$ کدام است:

۱) $x+y$ ۲) $x'y'$ ۳) $x'+y'$ ٤) $xy+x'y'$

تابع F رابا استفاده ازقوانین ساده کنیم

$$((x'+y).y')' \overset{1}{=} (x'+y)'+(y')' \overset{2}{=} ((x')'.y')+y \overset{3}{=} (x.y')+y \overset{4}{=} x+y$$

۲,۱:قانون دمرگان ۳-نقیض نقیض ٤-قانون شبه جذب

گزینه ۱ صحیح است

مثال۲: قوانین شبه جذب را بااستفاده ازقوانین جبر بولین اثبات نمایید:

$x.(x'+y)=x.y \quad x+(x'y)=x+y$

برای اثبات یک تساوی کافیست ازیک سمت حرکت کنیم وبااستفاده ازقوانین ساده سازی نماییم وبه طرف دوم تساوی برسیم.

سمت چپ: $x.(x'+y)=(x.x')+(x.y)=0+(x.y)=x.y$ سمت راست

۱ ۲ ۳

قانون یکها : ۳ متمم گیری : ۲ توزیع پذیری : ۱

مثال۳: ساده شده عبارت $f=(xyz+x'z+y'z)z'$ را بیابید

ازعبارت داخل پرانتز،z و علامت and را فاکتور می گیریم:

$((xy+x'+y').z).z'=(xy+x'+y')z.z'=(xy+x'+y').0=0$

مثال٤: ساده شدن عبارت $(x+y)[x+y'(x+y)]$ را بیابید:

$(x+y)[x+y'(x+y)]=(x+y)[x+y'.x]=(x+y)[x]=x$

مثال۵: متمم تابع $f=xz+x'y$ کدام است:

۱) $xz+xz'+x'y$ ۲) $(x'+z')(x+y')$ ۳) $xz+(x'+y')$ ٤) $(x'+z')(x'+y')$

$(xz+x'y)'=(xz)'.(x'y)'=(x'+z').(x+y')$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۶: ساده شده عبارت $(yx+(y\oplus x))xy$ را بیابید:

حل:قانون جذب بصورت زیر بود: $A(A+B)=A$

درمساله فوق A مقدار xy را داردکه طبق این قانون حاصل xy می شود

$(yx+(y\oplus x))xy=xy$

مثال۷: ساده شده عبارت $(x+y)(x'y'+x)$ چیست؟

قانون شبه جذب $A(A'+B)=A.B$

درعبارت بالاx+y و x'y' متمم یکدیگرهستندوحکم A رادارندبنابراین طبق شبه جذب

$(x+y)((x'.y')+x)=(x+y).x$

طبق قانون جذب $(x+y).x=x$

مثال۸: معادل $x\oplus x'$ کدام است:

۱) x' ۲) x ۳) 0 ٤) ۱

حل:تابع xor زمانی خروجی ان ۱ است که دو ورودی آن مقدار مختلف را داشته باشند بنابراین چون x,x' همیشه متضادیکدیگرهستند . $x\oplus x'=1$

گزینه ٤ صحیح است .

مثال۹ : با استفاده از قوانین جبر بولین قوانین جذب را اثبات کنید.

x+(x.y)=x

x+(x.y)= (x.1) +(x.y) = x(1+ y) = x.1 =x

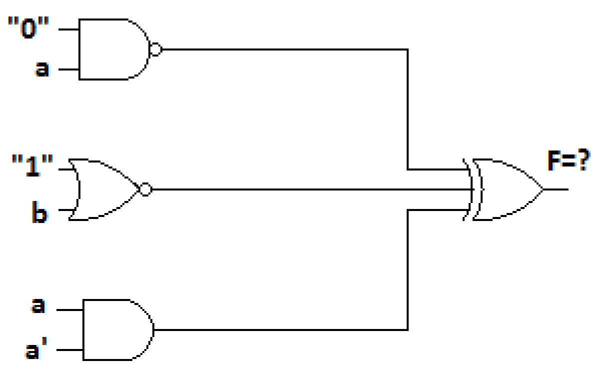
برای اینکه هر دو جمله شبیه هم بشوند که بتوان از x آنها فاکتور گرفت، بجای x عبارت x.1 قرار می دهیم.

مثال ۱۰: با استفاده از قوانین جبر بولین رابطه زیر را اثبات کنید:

AB + BC +AC'= BC + AC'

$AB + BC + AC' = AB.1 +BC +AC' = AB(C+C') + BC + AC' = \underline{ABC} + \underline{\underline{ABC'}} + \underline{BC} + \underline{\underline{AC'}} = BC(A+1) + AC'(B+1) = BC +AC'$

مثال ۱۱: تابع F را بدست آورید.



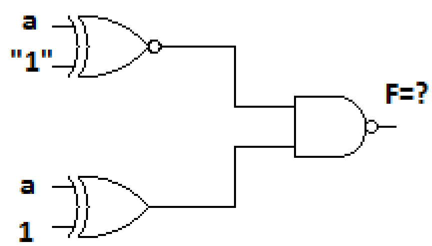
خروجی گیت NAND : (a NAND 0)=1

خروجی گیت NOR : (b NOR 1)=0

خروجی گیت AND : (a AND a')=0

خروجی گیت XOR : (1 XOR 0 XOR 0)=1 در نتیجه F=1

مثال ۱۲: تابع F را بدست آورید.



خروجی گیت XNOR : (a XNOR 1)= a

خروجی گیت XOR : (a XOR 1)= a’

خروجی گیت NAND : (a NAND a’)= 1 در نتیجه F=1

تمرینات سری سوم:

۱- با استفاده از قوانین جبر بولین صورت دوم قانون شبه جذب را اثبات کنید. یعنی:

x+(x’.y) = x+y

۲- با استفاده از قوانین جبر بولین صورت دوم قانون جذب را اثبات کنید. یعنی:

x.(x+y) = x

۳- ثابت کنید.(از راست ساده کنید و به چپ برسید)

A) $X \oplus Y = (X'+Y').(X+Y)$
B) $X \odot Y = (X'+Y).(X+Y')$

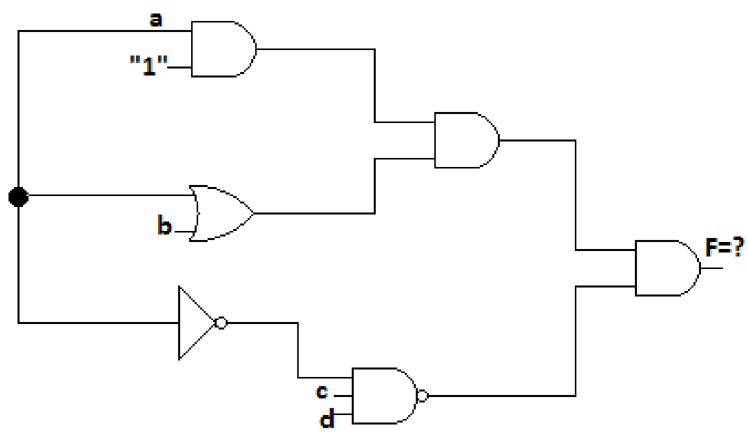
۴- ثابت کنید:(کاربرد جذب و شبه جذب)

A+A’B+ABC+A’BC’+AB= A+B

۵- ثابت کنید:

AC+AB’+BC=AB’+BC

۶- تابع F در شکل زیر چیست؟



۲-۲-۲) نمایش تابع بولین با فرم های استاندارد:

۲-۲-۲-۱)فرم استاندارد SOP[3] :

درصورتیکه هرتابع رابتوان باOR کردن عبارت های جبری که ازحاصل ضرب (and) متغییرها بوجود آمده ، نوشت آنگاه می توان گفت این تابع بصورت مجموعه ای ازحاصل ضرب ها نوشته شده است مثلا تابع F یک تابع چهار متغییره است اگرتابع F بصورت F(A,B,C,D)=ABCD+A'BC+ABD+A’B’CD+A’B باشد این تابع مجموعه ای ازحاصل ضرب هاست.یعنی پنج جمله فوق که هرکدام حاصل ضرب هستند باهم دیگرجمع شده اند.(همانطورکه میدانیم منظورازضرب and ومنظورازجمع OR می باشد).

تعریف مینترم[4]**:**

برای هرتابعn متغییره اگرعبارت های ضرب شامل تمام n متغییر باشند وهرمتغییر به صورت مکمل یاغیرمکمل فقط یک باردرعبارت ظاهرشودهرکدام ازحاصل ضربها را مینترم گویند.مثلادرتابع سه متغییر.F(A,B,C) هریک ازحالات ABC,...A'B'C,A'B'C' یک مینترم هستند.هرتابع n متغییردارای 2^n مینترم می باشد.

F(A,B,C) یک تابع سه متغییراست بنابراین تعداد مینترم های آن ۸ تا میباشد.

[3] Sum Of Product
[4] Minterm

	A	B	C	Minterms
0	0	0	0	m_0=A'B'C'
1	0	0	1	m_1=A'B'C
2	0	1	0	m_2=A'B C'
3	0	1	1	m_3=A'B C
4	1	0	0	m_4=A B'C'
5	1	0	1	m_5=A B'C
6	1	1	0	m_6=A B C'
7	1	1	1	m_7=A B C

همانطوریکه

ذکرشددرهرتابعn متغییره 2^n مینترم وجود دارد وهمانطوریکه میدانیم درهرتابعnمتغیر 2^nحالت درجدول درستی وجود دارد بنابراین می توان هرحالت در جدول رابه یک مینترم نسبت داد به صورتی که اگردرجدول متغییرمقدار صفرداشته باشدNOT آن درمینترم واگرمقدار یک داشته باشدخود آن درمینترم منظورگردد

مثلادرحالت   010   m2=A'BC'

حال اگرهرتابع رابتوان بصورت مجموعه ای ازمینترم های آن نوشت اصطلاحا" به صورت *فرم استاندارد* *SOP* نمایش داده شده است.

برای یافتن فرم استاندارد SOP بدین صورت عمل می کنیم که:

ابتداجدول درستی تابع رارسم کرده وآن رابازای جمیع مقادیرمتغییرها تشکیل می دهیم .سپس حالاتی که تابع درآن حالت یک شده است رادرنظرگرفته ومینترم مربوط به آن حالت را می یابیم. درنهایت تابع برابراست بامجموع مینترم های بدست آمده .

با یک مثال بیشترتوضیح می دهیم : تابعF(x,y,z)=x+y'z مفروض است.فرم استاندارد.sop رابرای آن می خواهیم بدست آوریم:

	x	y	z	y'	z.'y	x+y'z
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1

ابتدا جدول درستی آن راتشکیل می دهیم و حالاتی که تابع دارای مقدار "1 " است را مشخص میکنیم. تابع برابر است با مجموع مینترم هایی که تابع در آن حالت مینترم مقدار" 1 " را اختیار کرده است:

$F(x,y,z)=x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

به عبارت دیگر $m=(z,y,x)F_1+m_4+m_5+m_6+m_7$

برای سهولت درنوشتنن $F(x,y,z)=1+4+5+6+7$

یا بازهم ساده تر $F(x,y,z) = \sum(1,4,5,6,7)$

به این فرم تابع فرم استاندارد SOP گویند.

مثال: تابع $F=(x \oplus y)+xz'$ در فرم SOP چیست؟

حل:

$F=\sum(۲,۳,٤,۵,۶)$

	x y z			$x\oplus y$	z'	$z.x'$	$F=(x\oplus y)+xz'$
0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	1	0	1
3	0	1	1	1	0	0	1
4	1	0	0	1	1	1	1
5	1	0	1	1	0	0	1
6	1	1	0	0	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0

۲-۲-۲-۲) فرم استاندارد POS[5]:

درصورتیکه هرتابع رابتوان با AND کردن عبارت های جبری که ازحاصل جمع (OR) متغییرها بوجود آمده نوشت آنگاه می توان گفت این تابع به صورت ضربی ازحاصل جمع ها نوشته شده است .

مثلاتابع F یک تابع چهارمتغییره است اگرفرضا تابع F بصورت$(A+B+C'+D')$ $F(A,B,C,D)=(A+B'+C)(A+C')(B+D')$ باشد این تابع ضربی ازحاصل جمع هاست. یعنی سه جمله فوق هرکدام حاصل جمع هستند که در هم ضرب شده اند.

[5] Product Of Sums

تعریف ماکسترم[6]:

برای هرتابع n متغییره اگرعبارت های حاصل جمع شامل تمام n متغییرباشند وهرمتغییر بصورت مکمل یا غیرمکمل فقط یکباردرعبارت ظاهرشده باشدهرکدام ازحاصل جمع هارا ماکسترم گویند. مثلادرتابع سه متغییره F(A,B,C) هریک ازحالات A+B+C , A+B+C' ,..., A'+B'+C' یک ماکسترم هستند.هرتابع n متغییره دارای 2^n ماکسترم می باشد. مثلادرتابع سه متغییره F(A,B,C) . تعداد ماکسترم ها ۸ عدد می باشد بنابراین می توان تعداد حالات جدول درستی ،تعدادمینترم ها و تعداد ماکسترم ها رایکی دانست وهرحالت درجدول را به یک مینترم ویک ماکسترم نسبت داد.

	A	B	C	مینترم ها	ماکسترم
0	0	0	0	m_0=A'B'C'	M_0=A+B+C
1	0	0	1	m_1=A'B'C	M_1=A+B+C'
2	0	1	0	m_2=A'BC'	M_2=A+B'+C
3	0	1	1	m_3=A'BC	M_3=A+B'+C'
4	1	0	0	m_4=AB'C'	M_4=A'+B+C
5	1	0	1	m_5=AB'C	M_5=A'+B+C'
6	1	1	0	m_6=ABC'	M_6=A'+B'+C
7	1	1	1	m_7=ABC	M_7=A'+B'+C'

همانطورکه درجدول مشخص است هرحالت درجدول رامی توان به یک ماکسترم نسبت داد. بصورتیکه از جدول بازای مقدار"صفر" خود متغییرو بازای مقدار "یک" NOT متغییردر ماکسترم منظورشده است(دقیقابرعکس مینترم ها)

نکته: $m_i = M_i'$ یعنی مینترم های هرحالت باماکسترم های همان حالت مکمل هستند.

حال اگربتوان هر تابع رابصورت ضربی ازماکسترم های آن نوشت اصطلاحا به فرم استاندارد POS یا "ضرب حاصل جمع ها" نمایش داده شده است.

برای یافتن فرم استاندارد POS بدین صورت عمل می کنیم که ابتدا جدول درستی تابع راتشکیل می دهیم سپس حالاتی که تابع درآنها صفرشده است رادرنظرگرفته و ماکسترم های مربوط به آن حالات رامی یابیم. درنهایت تابع برابرضرب ماکسترم های بدست آمده می باشد .

مثال: F(x,y,z)=x+y'z رادرنظر میگیریم.می خواهیم فرم استاندارد POS آن را بیابیم:

[6] Maxterm

	x	y	z	y'	y'z	F=x+y'z
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1

ابتدا جدول درستی تابع رابدست می آوریم. حالاتی که تابع درآن صفراست را درنظرمی گیریم ماکسترم هرحالت رامی نویسیم. تابع F برابرضرب این ماکسترم ها:

$F(x,y,z)=(x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')$

به عبارت دیگر $F(x,y,z)=M_0.M_2.M_3$

برای سهولت درنوشتن: $F(x,y,z)=0.2.3$

وبازهم ساده تر: $F(x,y,z) = \prod(0,2,3)$

به این فرم ، فرم استاندارد POS گوییم.

مثال:معادل تابع $F(x,y,z)=(xy\oplus)+xz'$ کدام است:

۱)$F=\prod$ (۲و۳)　　　۲)$F=\prod$ (۷و۱و۰)

۳)$F=\prod$ (۷و۶و٤و۲)　　　٤) $F=\prod$ (۶و۵و٤و۳و۲)

در مثال های قبلی (در مبحث SOP) جدول این تابع رسم شده است. این تابع در شماره های ۰و۱و۷ مقدار صفر را اختیار کرده است.

نکته : همانطوریکه مشخص است در مثال قبل که مربوط به یک تابع می باشد نتیجه زیر به دست آمده است .

$$F(x,y,z) = \sum(2,3,4,5,6) = \prod(0,1,7)$$

یعنی شماره حالت هایی که در فرم SOP وجود دارد در فرم استاندارد POS وجود ندارد و مجموع شمار های هر دو فرم POS , SOP کل حالت ها را شامل می شود . یعنی این دو حالت دوگان هم هستند . بنابراین اگر یکی را داشته باشیم به سادگی دیگری به دست می آید .

مثلاً :

اگر

$$F(x,y,z) = \sum(2,3,4,5) \rightarrow F(x,y,z)= \prod(0,1,6,7)$$

شماره هایی که در SOP وجود ندارد در POS می نویسیم .

بنابراین در حالت کلی اگر تابعی دارای n متغیر باشد 2^n حالت دارد برای تبدیل فرم SOP به POS و برعکس شماره های موجودرا ازشماره های بین صفرتا (2^n -1) حذف کرده و فرم دیگری به دست می آید .

مثال : فرم POS تابع $f(x,y,z,t) = \Sigma\ (0,1,4,5,6)$ کدامست ؟

۱) $\prod\ (2,3,7)$ ۲) $\prod\ (0,1,4,5,6)$

۳) $\prod\ (0,2,3,7,8,9,10,11,12)$ ٤) $\prod\ (2,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$

تابع ٤ متغیره → $2^4 = 16$ حالت → از صفر تا ۱۵

هر عددی که بین صفر تا ۱۵ است و زیر مجموعه (0,1,4,5,6) نیست .

گزینه ٤ صحیح است .

مثال : تابع $F(x,y,z) = x'y+y'z$ با کدام یک از موارد زیر برابر است ؟

۱) $F=\Sigma(1,2,6)$ 2) $F=\Sigma\ (1,2,4,6)$

3) $F= \prod\ (0,4,6,7)$ 4) $F= \prod\ (1,2,4,5)$

حل : راه حل عمومی استفاده از جدول درستی و مثل مسائل قبل میباشد. ولی عبارت $x'y+y'z$ را میتوان با استفاده از قوانین جبر بولین و خیلی سریعتر به فرم جمع حاصل ضرب ها تبدیل نمود . چراکه شکل این تابع همانند جمع حاصل ضربها میباشد ولی ناقص است یعنی جمله اول z و جمله دوم x را کم دارند :

مثلا در جمله اول به جای $x'y$ عبارت $x'y.1$ را مینوسیم . میدانیم که حاصل $z+z'=1$ است بنابراین

$$x'y+y'z = x'y.1 + y'z.1 = x'y(z+z') + y'z(x+x')$$

همین کار را برای عبارت دوم نیز انجام دادیم.

درنتیجه:

$$F = x'yz+x'yz'+xy'z+x'y'z \rightarrow F = (m_3+m_2+m_5+m_1)$$

گزینه ۱ و ۲ رد میشود → $F=\Sigma(1,2,3,5)$

گزینه ۳ صحیح است . → $F = \prod\ (0,4,6,7)$

بنابراین :

در صورت خواستن فرم های SOP و POS همیشه لازم نیست جدول درستی را تشکیل داد بلکه میتوان با استفاده از قوانین جبر بولین خیلی سریعتر فرم مورد نظر را یافت .

مثال) تابع F معادل کدام مقدار زیر است ؟ $F(x,y,z) = xy+xz+yz$

۱) $F=\sum(3,5,6,7)$ (2 $F=\sum(0,1,3,4,5,6,7)$

(3 $F=\sum(0,1,4,6,7)$ (4 $F=\prod(0,1,3,4,5,6,7)$

حل :

$F= xy + xz + yz = xy(z+z') + xz(y+y') + yz(x+x')$

$F = xyz + xyz' +\cancel{xyz} + xy'z +\cancel{xyz} + x'yz = m7,m6,m5,m3$

گزینه ۱ صحیح است . $\rightarrow F = \sum (3,5,6,7)$

مثال) فرم استاندارد POS برای تابع $F = (x'+y)(y'+z)$ کدامست ؟

۱) $F=\prod (2,3,4,5)$ ۲) $F=\prod (2,4,5,6)$

۳) $F=\prod (2,3)$ ٤) $F=\prod (1,2,7)$

حل : جمله اول z و جمله دوم x را کم دارد . میدانیم که حاصل فرضاً $zz' = 0$ و اگر zz' با جمله ای جمع شود نتیجه تغییر نمیکند ، بنابراین جمله اول را با zz' و جمله دوم را با xx' جمع میکنیم و از قانون توزیع پذیری جمع دو ضرب استفاده کرده و تابع را به صورت ضرب حاصل جمع ها مینویسیم .

$F = (x'+y)(y'+z) \rightarrow F = ((x'+y) +zz') ((y'+z) + xx')$
$= (x'+y+z)(x'+y+z')(x+y'+z)(x'+y'+z) = M4.M5.M2.M6$
$= \prod (2,4,5,6)$

گزینه ۲ صحیح است.

۲-۲-۳) ساده سازی توابع با استفاده از جدول کارنو :

۲-۲-۳-۱) جدول کارنو با استفاده از فرم استاندارد SOP:

گام اول: تبدیل تابع به فرم استاندارد SOP

گام دوم: تشکیل جدول کارنو و پرکردن آن

گام سوم: گروه بندی ویافتن جواب

برای اینکه تابعی را با استفاده از جدول کارنو ساده کنیم ابتدا باید آنرا به فرم استاندارد SOP تبدیل کنیم (گام اول). جدول کارنو ، دیاگرامی متشکل از تعدادی مربع است که هر مربع یک مینترم را نشان میدهد . در

نتیجه تعداد خانه های جدول کارنو نیز همانند تعداد حالات جدول درستی، تعداد مینترم ها و تعداد ماکسترم ها برابر 2^n میباشد.

بنابر این با توجه به تعداد متغیر های ورودی ، شکل جدول متفاوت میشود . که در هر حالت جداگانه بررسی میکنیم :

الف) جدول کارنو برای توابع دو متغیره :

تابع F(x,y) مفروض است . تعداد متغیر های آن دوتاست ، بنابراین تعداد مینترم ها ٤ تا میشود ، تعداد خانه های جدول کارنو نیز ٤ تا میشود .

x \ Y	0	1
0	x'y'	x'y
1	xy'	xy

هر خانه از تلاقی x یا x' با y یا y' بدست می آید .

یعنی

	y'	y
x'	m_0	m_1
x	m_2	m_3

حالا فرضاً تابع $F(x,y) = \Sigma(0,1)$ باشد این بدان معنا است که در جدول کارنو در مینترم های m_0 و m_1 باید مقدار "1" قرار داد.

	y'	y
x'	1 (0)	1 (1)
x	(2)	(3)

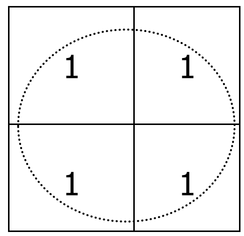
یا فرضاً $F(x,y) = \sum(0,1,3)$ که جدول کارنوی آن به صورت زیر میشود :

	y'	y
x'	1 (0)	1 (1)
x	(2)	1 (3)

بنابراین <u>گام بعدی ،تشکیل جدول کارنو و قرار دادن مقدار "1" در شماره های مربوطه</u> است. (گام دوم)

<u>گام سوم گروه بندی</u> است. برای گروه بندی یک سری قانون در نظر میگیریم:

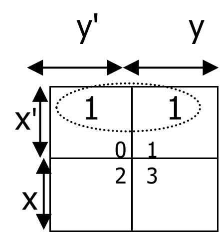
۱- اگر در جدول ٤ تا ۱ داشته باشیم یک گروه ٤ تایی داریم که حاصل آن همیشه درست یا $F=1$ میباشد .



۲- اگر جدول خالی باشد نشان دهنده $F = 0$ یا تابع همیشه غلط است .

۳- اگر در جدول دو تا یک در کنار هم و یا روی هم داشته باشیم تشکیل یک <u>گروه دوتایی</u> را میدهند که این **گروه دوتایی با یک متغیر** بیان میشود :

مثلاً :

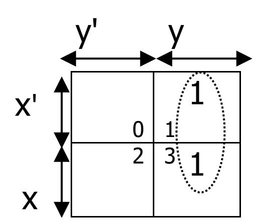


$F(x,y) = \sum (0,1) \rightarrow$

گروه دوتایی فوق را متغیر x' به طور کامل پوشش داده است بنابراین :

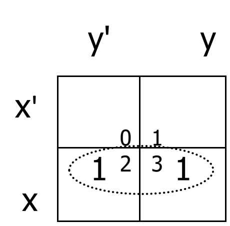
$F(x,y) = x'$

مثال دیگر:



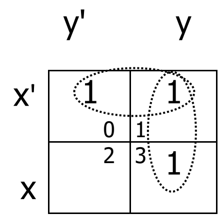
$F(x,y) = \sum (1,3) \rightarrow F(x,y) = y$

یا مثلاً :



$F(x,y) = \sum (2,3) \rightarrow F(x,y) = x$

نکته : اگر در جدول دو تا گروه دوتایی هم بتوانیم تشکیل دهیم حتی اگر از یک" 1" دوبار استفاده کنیم ،این کار مجاز بوده و سبب سادگی جواب است.



$F(x,y) = \sum (0,1,3) \rightarrow$

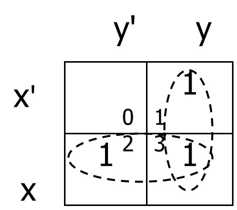
(گروه اول (افقی $\rightarrow F = x'$

(گروه دوم (عمودی $\rightarrow F = y$

در نهایت $\rightarrow F = x' + y$

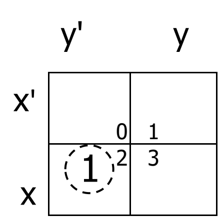
یا اگر $F(x,y) = \sum (1,2,3) \rightarrow$

$F(x,y) = x+y$



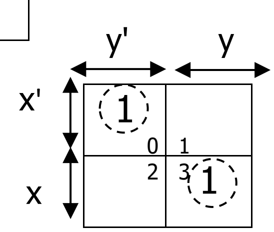
بنابراین همیشه ترجیح با گروه دوتایی است .

۴-اگر در جدول یکها به صورت اریب یا فقط یک" ۱" وجود داشته باشد ، گروه تکی تشکیل میشود که **هر گروه تکی با دو متغیر** نشان داده میشود که آن دو متغیر در حقیقت مینترم آن حالت هستند .



$F(x,y) = \sum (2) \rightarrow$

$F = xy' \rightarrow (m_2)$



اگر مثلاً : $F = \sum (0,3) \rightarrow$

گروه تگی اول : $x'y'$ یا m_0

$\rightarrow F = x'y'+xy$

گروه تکی دوم : xy یا m_3

مثال: تابع زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

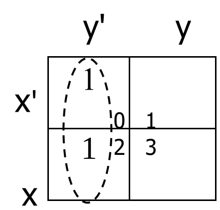
$F(x,y)=(x+y)' + (y' (x\oplus y))$

ابتدا تابع را به فرم استاندارد SOP تبدیل میکنیم:

	x	y	(x+y)'	$x\oplus y$	y'	$y'(x\oplus y)$	$(x+y)' + (y'(x\oplus y))$
0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	0	0	0

$F = \sum (0,2) \rightarrow$

$F = y'$



ب)جدول کارنو برای توابع سه متغیره :

تابع $F(x,y,z)$ مفروض است تعداد خانه های جدول $2^3 = 8$ میشود که بصورت زیر تشکیل میشود .

همانطوریکه مشاهده میشود شماره هر خانه جدول با خانه مجاورش در بیت تفاوت دارند.

x \ yz	00	01	11	10
0	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
1	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'

به عبارت دیگر:

	y'		y	
	z'	z	z	z'
x'	m_0	m_1	m_3	m_2
x	m_4	m_5	m_7	m_6

پیشنهاد میگردد برای اینکه مینترم های تابع را در جدول قرار دهیم ترتیب آن ها که عبارت 01326754 است (ترتیب کدGray) به خاطر سپرده شود و شماره مینترم های مورد نظر را در جدول بصورت زیر قرار داد .

	y'		y	
	z'	z	z	z'
x'	0	1	3	2
x	4	5	7	6

اگر فرضاً→ $F(x,y,z) = \sum (0,3,4,6)$

1 　0	1	1 　3	2
1 　4	5	7	1 　6

بعد از تشکیل جدول کارنو به قوانین گروه بندی میپردازیم :

۱- اگر ۸ تا "۱ " در جدول داشته باشیم یک گروه ۸ تایی داریم که تابع همیشه درست یا $F = 1$ میشود .

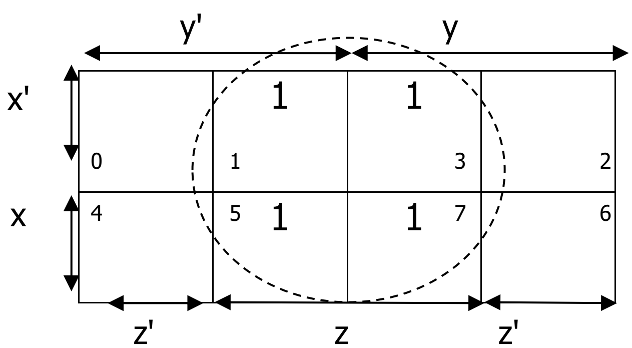
1	1	1	1
1	1	1	1

$F = (x,y,z) = 1$

۲- اگر تمام خانه های جدول خالی باشند یک تابع همیشه غلط داریم یا $F = 0$.

۳-اگر بتوانیم ٤ تا " 1 " در کنار هم یا روی هم (به صورت دو به دو) و یا دو تا خانه کناری جدول بیابیم میتوانیم تشکیل گروه چهارتایی بدهیم که این **گروه چهارتایی با یک متغیر** بیان میشود .

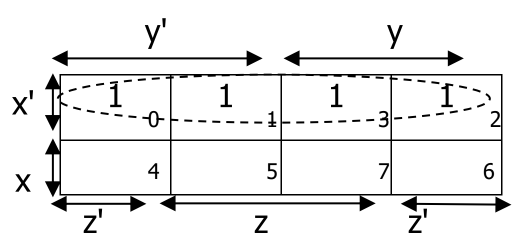
$F(x,y,z) = \sum (1,3,5,7)$



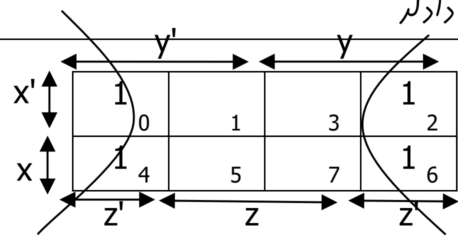
تنها متغیر z است که با توجه به محدوده مشخص شده اش تمام گروه چهارتایی را در بر دارد یعنی $F(x,y,z)=z$

$F = \sum (0,1,2,3) \rightarrow$

$F(x,y,z) = x'$



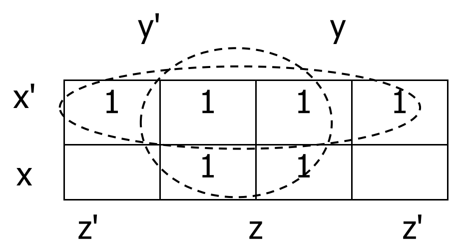
اگر مثلاً $\rightarrow F = \sum (0,2,4,6) \rightarrow$



این چهار تا "1" نیز تشکیل گروه چهارتایی میدهند که تنها متغیر z' با توجه به محدوده اش همه گروه را در بر دارد .

$F(x,y,z) = z'$

اگر $\rightarrow F = \sum (0,1,2,3,5,7)$



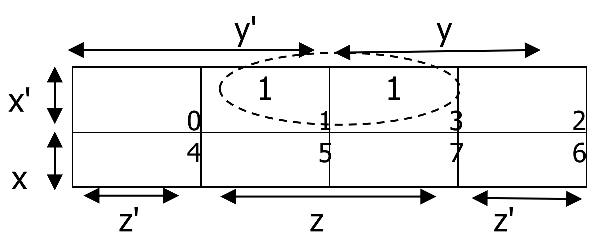
دو گروه ٤ تایی میتوان تشکیل داد .

$F(x,y,z)= x' + z$

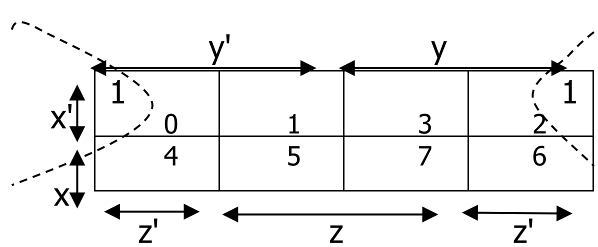
٤-اگر دو خانه مجاور هم داشته باشیم تشکیل گروه دوتایی میدهیم که **گروه دوتایی با دو متغیر** نمایش داده میشود .

مثلاً : $F(x,y,z) = \sum (1,3)$

$F(x,y,z) = x'z$



x' و z هستند که بطور کامل گروه را پوشش میدهند .

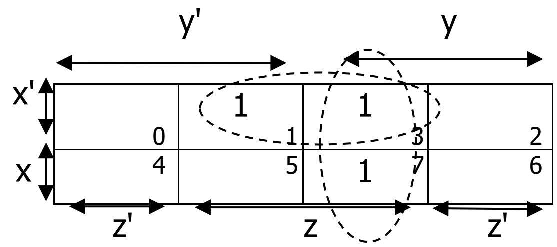


$F = \sum (0,2) \rightarrow$

$F = x'z'$

مثلاً : $F = \sum (1,3,7) \rightarrow$

تشکیل دو تا گره دوتایی میدهیم .



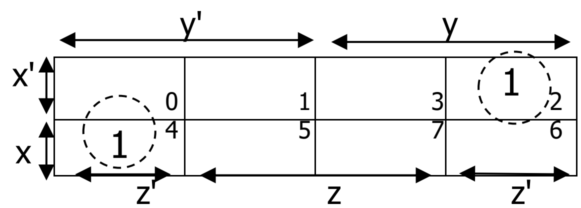
گروه افقی : x'z

$\rightarrow \quad F(x,y,z) = x'z+yz$

گروه عمودی : yz

۵-اگر های جدول به گونه باشند که نتوان آن ها را در گروه های چهارتایی یا دوتایی جای داد به ناچار از گروه تکی استفاده میکنیم که **گروه تکی با سه متغیر** بیان میشود که در حقیقت مینترم آن حالت است .

$F(x,y,z) = \sum (2,4) \rightarrow$



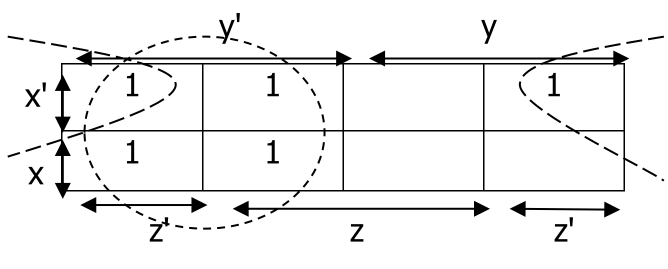
گروه اول : x'yz'= m2

گروه دوم : xy'z' = m4

$\rightarrow F(x,y,z) = x'yz'+xy'z'$

مثال) تابع $F = \Sigma(0,1,2,4,5)$

حل :



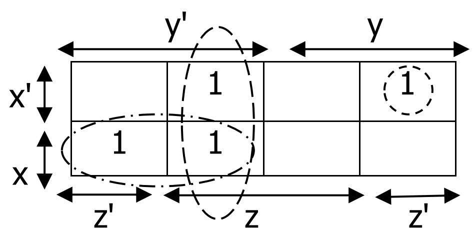
تشکیل یک گروه ٤ تایی و یک گروه دوتایی میدهد .

گروه چهارتایی : y'

$\rightarrow \quad F(x,y,z) = y'+x'z'$

گروه دو تایی : x'z'

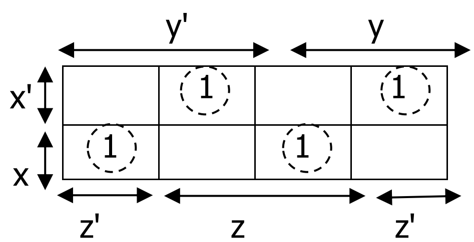
مثال) تابع $F = \sum (1,2,4,5)$



دو تا گروه دوتایی و یک گروه تکی

F(x,y,z) = xy'+y'z+x'yz'

مثال) F(x,y,z)=∑(1,2,4,7)



همانطوریکه مشخص است چاره ای جز ٤ تا گروه تکی نداریم:

F=x′y′z + x′yz′ + xy′z′ + xyz

نکته بسیار مهم:

ثابت می شود وقتی چینش یکها درجدول ، به شکل یک N درآمد(همانند مثال فوق)، علاوه بر ٤ گروه تکی حاصل با XOR ورودیها نیز برابر است :

F= (X xor Y xor Z)

به همین روال اگر بصورت N برعکس درآمد حاصل با xnor ورودیها برابر است:

F= (X xnor Y xnor Z)

ج) جدول کارنو برای توابع ٤ متغیره :

F(a,b,c,d) مفروض است . بنابر این جدول ما یک جدول ۱۶ خانه میشود

ab \ cd	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$m_8 = ab'c'd'$
$m_{11} = ab'cd$

به منظور به خاطر سپردن جدول فوق نوشته زیر پیشنهاد میگردد :

همان عبارت 01326754 که در حالت قبل به خاطر سپردیم را در خانه های بالای جدول قرار میدهیم ، بدین وسیله ترتیب دو سطر اول مشابه قبل هستند ، سطر سوم از جمع سطر دوم با عدد ۸ و سطر چهارم از جمع سطر اول با عدد ۸ بدست می آید . یعنی جدول را با فرمت زیر بخاطر بسپارید .

	c'	c'	c	c	
a'	0	1	3	2	b'
a'	4	5	7	6	b
a	12	13	15	14	b
a	8	9	11	10	b'
	d'	d	d	d'	

بعد از تشکیل جدول نوبت به گروه بندی است

۱- اگر ۱۶ تا یک داشته باشیم تابع همیشه درست یا F=1 بدست می آید .

۲- اگر ۱۶ تا خانه خالی داشته باشیم تابع همیشه غلط یا F=0 است

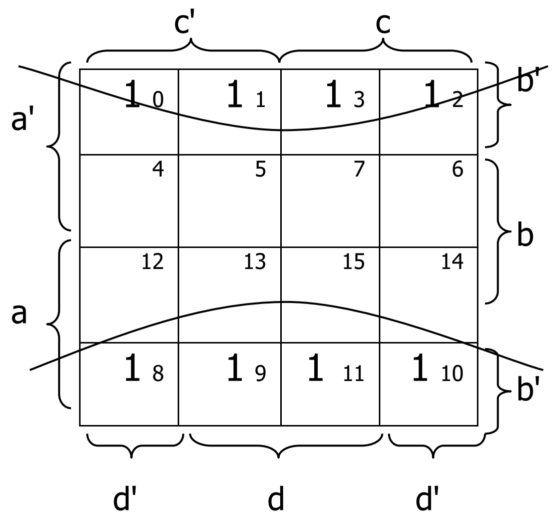
۳-اگر گروه های ۸ تایی بتوان تشکیل داد **هر گروه ۸ تایی با یک متغیر** بیان میشود .

نکته : در این جدول ۱۶ خانه ، نه تنها دو ردیف کناری جدول تشکیل گروه میدهند بلکه ردیفهای پایین و بالا نیز تشکیل گروه میتوانند بدهند .

مثال۱:

$$F = \sum (0,1,2,3,8,9,10,11)$$

$$F = b'$$

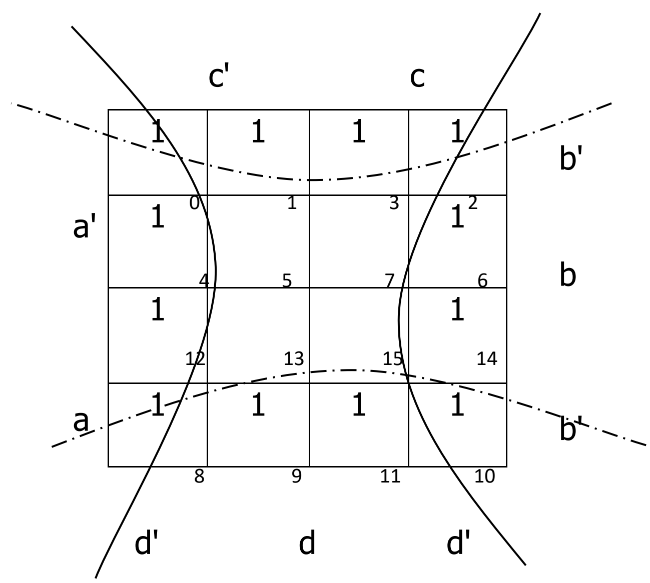


مثال۲:

$$F(a,b,c,d) = \sum (0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$$

دو تا گروه ۸ تایی

$$F = b'+d'$$

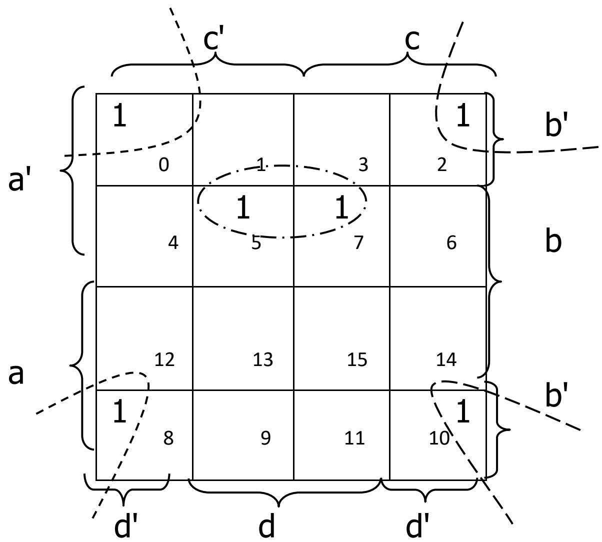


۴-گروه ٤ تایی با دو متغیر

۵- گروه دوتایی با سه متغیر

۶- گروه تکی با چهار متغیر یا مینترم همان حالت بیان میشود (یا همان مینترم شماره مربوطه)

$F(a,b,c,d) = \sum (0,2,5,7,8,10)$



نکته : اگر چهار تا " 1 " در چهار کنج داشته باشیم تشکیل یک گروه ٤ تایی را میدهند .

مساله فوق یک گروه چهار تایی و یک گروه دوتایی را نشان میدهد .

$F(a,b,c,d) = b'd'+a'bd$

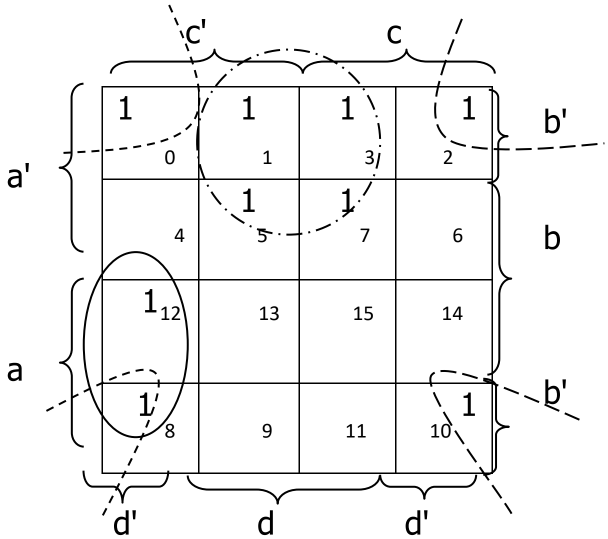
نکته بسیار مهم: در گروه بندی جدول کارنو همیشه باید دنبال بهترین حالت ممکن بود. اما بهترین حالت چگونه است؟

بهترین حالت، حالتی است که

اولا تعداد گروهها حداقل تعداد ممکن باشد.

ثانیا ابعاد گروهها حداکثر مقدار ممکن باشد.

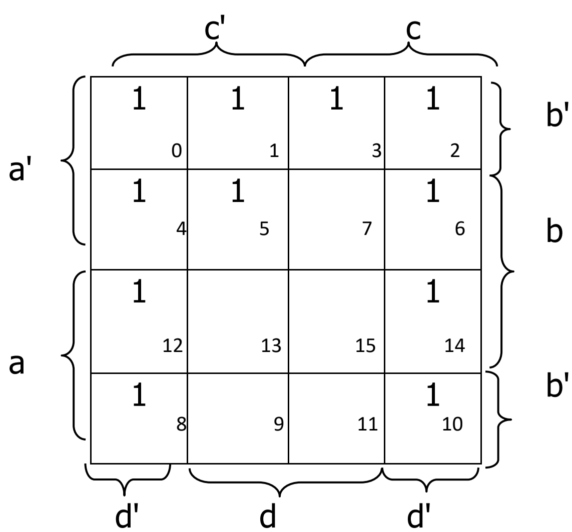
مثال۳: $F(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,2,3,5,7,8,10,12)$



$F=b'd'+a'd+ac'd'$

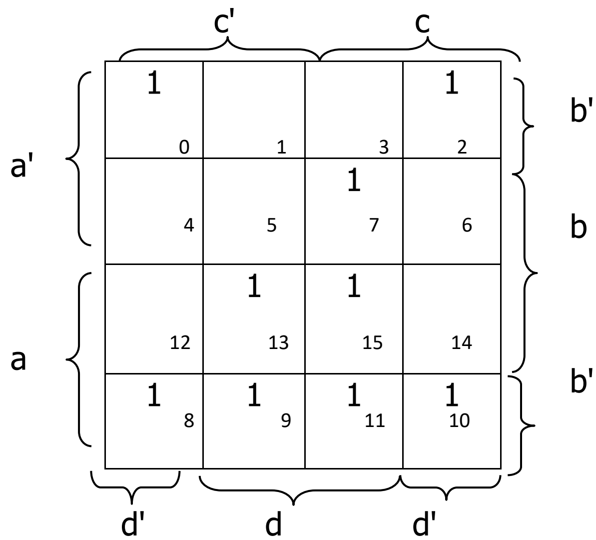
بهترین حالت در جدول فوق ۲ تا گروه چهارتایی و یک گروه دوتایی است. ممکن است در نگاه اول یک گروه ٤ تایی از شماره های 3,2,1,0 به چشم بیاید که با نگاه دقیق تر مشخص است که احتیاجی به وجود این گروه نیست و یکهای آن بدلیل هم گروه بودن با یک های دیگر اجبارا صاحب گروه هستند.

مثال٤: $F(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,2,3,4,5,6,8,10,12,14)$



گروه بندی جدول فوق چگونه است؟

مثال۵:　$F(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,7,8,9,10,11,13,15\ )$



گروه بندی چگونه است؟

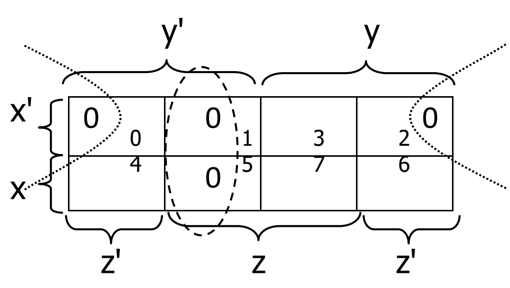
۲-۲-۳-۲) جدول کارنو با استفاده از فرم استاندارد POS :

در این حالت نیز همانند قبل عمل میکنیم با این تفاوت که صفرها را در خانه های مورد نظر قرار میدهیم . (جاهایی که تابع در آن صفر شده است مد نظر فرم استاندارد POS میباشد) گروه بندی هم به همان ترتیب انجام میدهیم ، برای اینکه اشتباه نکنیم نیز با همان طریق قبل ساده سازی میکنیم (با مینترم ها) ولی حاصل بدست آمده را در نهایت یکبار معکوس (**NOT**) میکنیم .

مثال:

$$F(x,y,z) = \prod (0,1,2,5)$$

در شماره های مورد نظر صفر قرار می دهیم .



از دو گروه دوتایی تشکیل شده است .

مشابه قبل ← گروه اول : x'z'　　مجموع x'z'+y'z

← گروه دوم : y'z

F(x,y,z) ، با NOT عبارت فوق یکسان است :

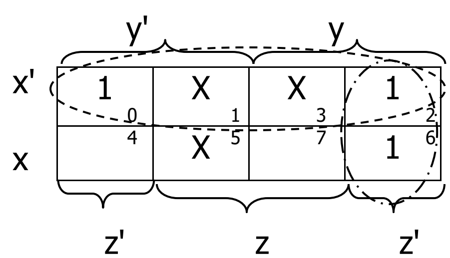
$F(x,y,z) = (x'z' + y'z)' = (x+z).(y+z')$

همانطور مشخص است نتیجه به فرم ماکسترمی در آمده است .

۲-۲-۲-۳) شرایط بی اهمیت[۷]:

در برخی از مسائل ممکن است بعضی از حالات (مینترم ها یا ماکسترم ها) دارای ارزش خنثی برای مدار باشند یعنی چه صفر و چه یک در نظر گرفته شوند برای مساله تفاوتی ندارد و این برعهده طراح است که با توجه به اهمیت ساده بودن حاصل ، تعیین میکند که صفر باشند یا یک (و یا حتی برخی از حالات بی اهمیت صفر و برخی دیگر یک باشند)

مثال : $F(x,y,z) = \Sigma(0,2,6)$ و مجموعه بی اهمیت آن به صورت $d=(1,3,5)$ میباشند . (یعنی ارزش مینترم های 5,3,1 ، مهم نیست)



در مثال فوق اگر مینترم های ۱و۳ دارای ارزش یک باشند میتوانیم یک گروه چهارتایی تشکیل دهیم که جواب ساده تر میشود اما احتیاجی به یک بودن مینترم شماره ۵ نیست ، بنابراین در مثال فوق یک گروه چهارتایی و یک گروه دوتایی داریم .

$$F(x,y,z)= x' + yz'$$

تمرینات سری چهارم:

با جدول کارنو هر یک از توابع زیر را ساده کنید.

1) $F(x,y,z)=\sum (0,5) , d=(2,3,7)$
2) $F(a,b,c,d)= \sum(0,1,2,3,5,7,8,10,15)$
3) $F(a,b,c,d)= \sum(0,1,7,8,9,10) , d=(2,3,6,12,13)$
4) $F(a,b,c,d)= \sum(0,1,7,8,10,12) , d=(2,3,13,14,15)$
5) $F(a,b,c,d)=\prod(0,1,4,8,10,12) , d=(3,13,14,15)$

[۷] Don’t Care