**۱–۳) نمایش اعداد علامتدار:**

تاکنون برای نمایش اعداد روی علامت عدد صحبت نکردیم و هر عددی را به هر مبنایی که تبدیل کردیم حرفی از علامت مثبت یا منفی نزدیم. اما اگر بخواهیم بحث علامت را در سیستم اعداد و نحوه نمایش علامت را مطرح نمائیم، سه روش برای نمایش عددی که دارای علامت مثبت یا منفی است وجود دارد:

۱)روش علامت مقدار ۲)روش مکمل R ۳)روش مکمل R-1

که R مبنای عدد مورد نظر است.

در تمامی این روشها یک استاندارد را رعایت می کنیم:

سمت چپ ترین رقم هر عدد را رقم نشان دهنده علامت می نامیم.

مثلا در مبنای ۲ سمت چپ ترین بیت بیت (که MSB[1] نیزنام دارد) را به عنوان بیت علامت[۲] نامگذاری می کنیم. این بیت برای اعداد باینری بصورت زیر نشان دهنده علامت عدد است:

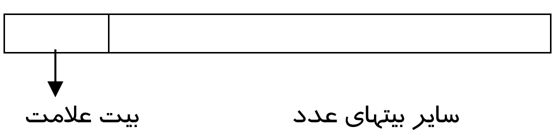
عدد مثبت $MSB = 0 \rightarrow$ اگر

عدد منفی $MSB = 1 \rightarrow$ اگر

فراموش نشود که قاعده فوق برای هر سه روش وجود دارد:

**۱–۳–۱) روش علامت مقدار**:

در این روش برای بیت MSB به غیر از این که نشان دهنده علامت با قاعده فوق باشد هیچ ارزش مکانی دیگری در نظر گرفته نمی شود. یعنی هر عدد که با صفر شروع شود مثبت و هر عدد که با یک شروع شود منفی است:




عدد با یک شروع شده منفی است $\underset{\text{منفی}}{1} \; \underset{11}{1011} \rightarrow -11$ : فرضاً

عدد با صفر شروع شده مثبت است $\underset{\text{مثبت}}{0} \; \underset{12}{1100} \rightarrow +12$ : یا مثلا

همانطوریکه مشخص است بیت علامت در تعیین مقدار عددی ، عدد مورد نظر نقشی ندارد و به عبارت دیگر دارای ارزش مکانی نمی باشد.

مثال: در یک سیستم کامپیوتری ۵ بیتی معادل هر کدام از اعداد زیر بصورت باینری را بدست آورید.

-14 , +7 , -18

-14 : 1 1110 $\Rightarrow$ مجموعاً ۵ بیت

باید حاصل مجموعاً ۵ بیت گردد ٤بیت خود عدد و یک بیت علامت.

[1] Most Significant Bit

[۲] Sign Bit

بنابراین خود عدد ۷ بجای 111، عدد0111 میگردد:

+7 : 0 0111

-18 : 1 10010

مجموعاً ۶ بیت شد پس در این سیستم چنین عددی را نمی توان نمایش داد.

نکته: بنابراین مهم است که بدانیم محاسبات در چند بیت انجام می شود.

نکته: یکی از ایراداتی که این روش دارد اینست که برای نمایش باینری عدد صفر دو مقدار معتبر است:

0 0000
1 0000

**خطای سرزیر**[3]: به خطایی که به علت اضافه شدن بیتهای موجود در یک عدد از حد معمول بدست می آید و موجب حذف یک سری بیتهای عدد و در نتیجه عدم نمایش صحیح عدد می شود خطای سرزیر گویند.

نکته: طبق اشکالی که در مسئله قبل بوجود آمد می توان محدود، مجاز نمایش اعداد علامت دار را بصورت زیر تعیین کرد:

فرضا در یک سیستم ۵ بیتی:

بزرگترین عدد مجاز $\underset{\text{مثبت}}{0}\ \underset{\text{عدد}}{1111} \rightarrow +15 = 2^4 - 1$

کوچکترین عدد مجاز $\underset{\text{منفی}}{1}\ \underset{15}{1111} \rightarrow -15 = -(2^4 - 1)$

بنابراین در یک سیستم n بیتی:

$-(2^{n-1} - 1) \leq$ محدوده اعداد مجاز $\leq 2^{n-1} - 1$

مثال: معادل عدد ۱۳۹- در یک سیستم ۸ بیتی کدامیک از اعداد زیر است؟ (روش علامت مقدار)

الف)۱۱۰۰۰۱۰۱۱۱ ب)۱۰۰۱۰۱۱۱

ج)خطای سرزیر در نمایش آن وجود دارد د)۱۱۰۱۰۱۱۱

حل: در یک سیستم ۸ بیتی محدوده مجاز اعداد عبارتست از:

$$-(2^{8-1} - 1) \leq x \leq 2^{8-1} - 1 \Rightarrow -127 \leq x \leq +127$$

بنابراین عدد ۱۳۹- در رنج مجاز نمی باشد. گزینه ج صحیح است.

قابل توجه است که در روش علامت مقدار محدوده به این صورت است.

### ۱-۳-۲) روش مکمل R:

R مبنای عدد مورد نظر می باشد و مکمل R هر عدد N را با $[N]_R$ نمایش می دهیم.

هر عدد $N_R$ را به صورت زیر مکمل R می نمایند:

$[N]_R = R^n - N_R$

[3] Over flow

همانطوریکه ذکر شد Rمبنای عدد N و n تعداد ارقام صحیح عدد N می باشد.

مثال

$[4]_{10}=10^1-4=6$

$[45]_{10}=10^2-45=55$

$[562.5]_{10}=10^3-562.5=437.5$

$[0101/110]_2=2^4-(0101/110)=16 - 5.75=10.2$

**بنابراین:**

اگر هر عدد را بامکمل R آن عدد جمع کنیم نتیجه زیر بدست می آید:( مثلا در موارد فوق)

4 + 6 =10
45 + 55 = 100
562.5 + 437.5 = 1000

یعنی :

می توان این استدلال را نمود که هر عدد با n رقم صحیح را اگر با مکمل R آن جمع کنیم نتیجه n تا صفر و یک ۱ است مثلاً

6+4=10
45+55=100

یعنی حاصل جمع صفر است به علاوه یک رقم نقلی　　　رقم نقلی

$$[N]_r+(N)_r=0+1$$

اگر از آن رقم نقلی صرفنظر کنیم می توان ادعا کرد که حاصل جمع هر عدد با مکمل R آن عدد صفر است.

6+4=0

پس اگر از آن رقم نقلی صرفنظر نمائیم می توان در نهایت به این نتیجه رسید که ***هر عدد با مکمل R خود، قرینه است*** که حاصل جمعشان صفر شده است.

در این روش اعداد منفی را بصورت مکمل R نشان می دهند.

**نکته: روش سریع بدست آوردن مکمل ۲ یک عدد**

اگر محاسبات ما در مبنای ۲ انجام پذیرد بدست آوردن مکمل ۲ عدد با فرمول قبل کار سختی است بدین منظور از روش زیر استفاده می کنیم:

**از سمت راست عدد (چه اعشاری چه غیر اعشاری) حرکت می کنیم از تمامی صفرها عبور کرده و به اولین یک که رسیدیم از آن هم عبور می کنیم (منظور از عبور کردن این است که آنها را بدون تغییر می نویسیم) از آن بعد تمام صفرها را یک و تمام یکها را صفر می کنیم.**

مثلا:

$(010100)_2 \rightarrow \underbrace{\underline{101}}_{\text{معکوس}}\ \underbrace{\underline{100}}_{\text{بدون تغییر}}$

مثال: معادل باینری اعداد زیر را در سیستم مکمل ۲ بیابید:

+14      -14

+14 :

بیت اول بیت علامت است عدد مثبت است با صفر شروع می شود بقیه بیتها مقدار عددی 14 میباشند.(طبق وزن 8421)

$+14 \rightarrow \quad 01110$

همانطوریکه مشخص است *<u>برای نمایش اعداد مثبت کاملاً همانند روش علامت مقدار</u>* رفتار میکنیم.

-14 :

برای یافتن 14- دیگر نمی توانیم مانند علامت مقدار عمل کنیم بنابراین باید 14+ را با روش ذکر شده تبدیل به 14- نماییم:

+14 : 01110 ⟶ <u>100</u> <u>10</u>

عدد 10010 نشانه ای از 14- ندارد ولی این عدد 14- است. بنابراین به این نکته مهم میتوان رسید که ***<u>شکل ظاهری هر عدد منفی در روش مکمل ۲ عوض می شود</u>***.

مثال: معادل اعداد 10110 و 01101 را بصورت دسیمال و در دو سیستم علامت مقدار و مکمل ۲ بیابید.

01101 → علامت مقدار $\Rightarrow$ عدد مثبت است : <u>0</u> <u>1101</u> = +13

01101۲ → سیستم مکمل $\Rightarrow$ چون عدد مثبت است : <u>0</u> <u>1101</u> = +13 همانند علامت مقدار

*در نتیجه: پس برای اعداد مثبت (بیت علامت آنها صفر است) تفاوتی نمی کند که در روش علامت مقدار و یا مکمل ۲ بررسی شوند. تفاوت سر اعداد منفی است.*

10110 → علامت مقدار ⇒ عدد منفی است :<u>1</u> <u>0110</u> = -6

10110 → سیستم مکمل۲ ⇒ عدد منفی است → -?

اما مشخص نیست که چند است چرا که:

همانطوریکه گفته شد، شکل ظاهری عدد منفی در سیستم مکمل۲ عوض میشود و از روی ظاهر آن نمیتوان تشخیص داد عدد چند بوده است.

**راه حل** :

بدین منظور عدد منفی را یکبار دیگر منفی می کنیم (مکمل ۲ می گیریم) تا مثبت شود. از روی ظاهر مثبت همانند مثال قبل می توان فهمید که مقدار آن چند است. سپس حاصل اصلی ما میشود،منفی آن عدد بدست آمده: از 10110 مکمل۲ میگیریم که میشود 01010 که این عدد برابر 10+ است بنابراین نتیجه میگیریم که عدد باینری مورد نظر( 10110) نشان دهنده 10- در سیستم مکمل۲ است.

مثال: در یک سیستم مکمل ۲، معادل دسیمال عدد 10001 چیست؟

جواب: چون عدد با 1 شروع شده است منفی است. اما منفی چند؟ مشخص نیست ابتدا باید یکبار عدد را منفی کنیم تا مثبت آن بدست آید سپس از روی مثبت آن می توان فهمید که منفی چند؟ بوده است:

مکمل ۲ عدد 10001 برابر 01111 میباشد که معادل 15+ است. پس عدد ما 15- بوده است.

### ۱-۳-۲-۱) دامنه مجاز اعداد علامتدار در مکمل ۲:

اگر فرضاً در یک سیستم 5 بیتی محاسبات انجام گردد (5 بیت برای هر عدد حداکثر در نظر گرفته شود):

کوچکترین عدد <u>1</u> <u>0000</u> = 16 = $2^4$

کمترین مقدار

علامت منفی

عدد 10000 برابر ۱۶- است چراکه این عدد با یک شروع شده است و منفی است . منفی چند است؟ باید یکبار از آن مکمل بگیریم (منفی کنیم ) ببینیم مثبت آن چی بوده که اگر 10000 را مکمل ۲ کنیم حاصل دوباره 10000 است (که عددی مثبت انتظار است باشد ) یعنی ۱۶ بنابراین عدد اولمان (10000) ۱۶- بوده است. یعنی بیت علامت ارزش پیدا کرد.

بزرگترین عدد :<u>0</u> <u>1111</u> = $2^4$-1 =15

بیشترین مقدار

علامت مثبت

بنابراین می توان این نتیجه را گرفت که در یک سیستم n بیتی داریم:

$-2^{n-1} \le$ دامنه مجاز اعداد n بیتی $\le +2^{n-1}-1$

فرضاً اگر یک سیستم ٤ بیتی را در نظر بگیریم اعداد بین [۷+, ۸-] می توانند قرار داشته باشند.

نکته: از بحث های فوق این نتیجه حاصل می شود که در روش مکمل ۲ بیت علامت دارای ارزش مکانی است. همچنین برای صفر دو مقدار بوجود نمی آید و 10000 نشان دهنده ۱۶- است نه صفر.

مثال: در یک سیستم ۵ بیتی، عدد ۱۸- کدام است؟

الف)11001 ب) در دامنه مجاز نیست

ج)11111 د)11010

$$-16 \leq \text{محدوده مجاز} \leq +15$$

بنابراین در دامنه مجاز نیست.

## ۱-۳-۲-۲)محاسبات بین اعداد علامتدار در سیستم مکمل۲:

برای جمع اعداد علامتدار تنها نکته ای که باید در نظر داشت اینست که باید حاصل جمع در محدوده مجاز سیستم باشد تا خطای سرریز اتفاق نیفتد. فرضاً حاصل جمع 5+9 را اگر بخواهیم در یک سیستم 5 بیتی انجام دهیم:

$$-16 \leq \text{محدوده مجاز} \leq +15$$

صحیح است و در محدوده مجاز قرار دارد:

```
( +9): 01001
( +5): 00101   +
       01110 ───► (+14)
```

فرضاً 19+=12+7 در رنج وجود ندارد و سبب خطای سرریز می شود. ببینیم چه مشکلی پیش می آید:

```
(+12): 01100
( +7): 00111   +
       10011 ───► عدد با یک شروع شده پس حاصل منفی است ───► -?
```

+13 =01101 : یکبار آن را منفی می کنیم

پس جواب 13− میشود.

یعنی: 13-=12+7 بدست آمده که صحیح نیست و به این حالت خطای سرریز گفته می شود.

اما در **تفریق اعداد علامتدار** به روش مکمل ۲ باید ابتدا تفریق را به جمع تبدیل کنیم : مثلاً برای بدست آوردن حاصل 6-9 آن را بصورت (6-) + (9) در می آوریم سپس 6- را بدست آورده با 9+ جمع می کنیم: (فرضاً سیستم 5 بیتی است)

```
9-6=(+9)+(-6)          +9:01001    +
+6=00110    ───►       -6 :11010
                        1  00011
                        رقم نقلی خروجی
```

یک رقم نقلی خروجی بدست آمد.

**نکته مهم**: رقم نقلی خروجی حاصل از محاسبات در روش مکمل ۲، حذف می شود بنابراین حاصل جمع فوق 00011 یعنی 3+ می شود.

مثال: حاصل 6-9- را در یک سیستم 5 بیتی بیابید.

به جمع تبدیل می کنیم: $-9-6=(-9)+(-6)$

$$\begin{array}{llll} +9:01001 & \longrightarrow & -9: & 10111 \\ +6:00110 & \longrightarrow & -6: & \underline{11010} \quad + \\ & & & 10001 \end{array}$$

رقم نقلی خروجی حذف می شود.

حاصل 10001 است. چون عدد با ۱ شروع شده است منفی است. اما منفی چند؟ کافیست یکبار از حاصل مکمل ۲ بگیریم تا مثبت شود و از روی آن به مقدار منفی آن پی ببریم:

$10001 \xrightarrow[\text{مکمل ۲}]{} 01111$

جواب 15+ است پس حاصل عملیات 15-=6-9- است که صحیح است.

### ۱–۳–۳) روش مکمل R-1:

مکمل R-1 را با $[\ ]_{R-1}$ نشان می دهندکه از رابطه زیر برای اعداد صحیح بدست می آید:

$[N]_{R-1} = R^n - (N)_R - 1$

که در آن R پایه عدد N و n تعداد ارقام صحیح آن می باشد.

مثال:

$[45]_9=10^2- 45-1 =54$ $\qquad$ $[45]_9 = 10^2 - 45 - 1 = 54$

روش سریع یافتن مکمل ۱ برای اعدا باینری اینست که تمام بیتها را معکوس نمائیم.مثلا:

$01101 \longrightarrow 10010$

مکمل ۱ گرفتن نیز روش سوم منفی کردن هر عدد باینری است مثلاً

-13=?

$+13 : 01101 \longrightarrow -13: 10010$

-8=?

$+8 :01000 \longrightarrow -8: 10111$

همانطوریکه مشخص است در مکمل۱ گرفتن همانند مکمل۲، ظاهر عدد منفی کاملاً عوض میشود یعنی عدد 10010 را که در بالا 13- معرفی کردیم اگر بخواهیم بدانیم در سیستم مکمل ۱چگونه 13- را نشان میدهد، بدین صورت عمل میکنیم:

چون با 1 شروع شده است عددی منفی است اما منفی چند؟ مشخص نیست باید یکبار آن را منفی کنیم تا مثبت آن بدست آید تا مقدار عدد را بیابیم.

مکمل ۱ از آن میگیریم تا ببینیم مثبت آن چند بوده است؟ $10010 \rightarrow -?$

01101 → +13

جواب نهایی 13− است.

مثال: معادل عددهای 14+ , 14- در هر یک از سیستم های علامت مقدار، مکمل ۲ و مکمل ۱ بیابید. (محاسبات ۵ بیتی)

+14: 01110 : نمایش اعداد مثبت درهر سه سیستم یکسان است

-14:

علامت مقدار: 11110

مکمل ۲: 10010

مکمل ۱: 10001

سه مقدار مختلف بدست آمده است.

مثال: معادل دسیمال عدد 100101 در یک سیستم مکمل ۱ و مکمل ۲ چیست؟

حل: چون عدد با ۱ شروع شده است عدد منفی است بنابراین از روی ظاهر آن نمیتوان فهمید که چه عددی است. در هر دو سیستم یکبار آن را منفی می کنیم که ببینیم مثبت آن چند بوده است:

مکمل 1: $100101 \xrightarrow{\text{منفیٔ}} 011010 = +26 \rightarrow -26$ جواب نهایی

مکمل 2 $100101 \xrightarrow{\text{منفیٔ}} 011011 = +27 \rightarrow -27$ جواب نهایی

.

### ۱-۳-۳-۱) دامنه مجاز اعداد علامتدار در مکمل۱:

در روش مکمل ۱ برای نمایش اعداد علامتدار نیز محدوده زیر را داریم :

$$-\left(2^{n-1}-1\right) \leq \text{محدوده اعداد مجاز} \leq 2^{n-1}-1$$

یعنی همانند علامت مقدار میباشد.

### ۱-۳-۳-۲) محاسبات بین اعداد علامتدار در سیستم مکمل۱:

در اینجا نیز برای جمع باید به محدوده مجاز اعداد توجه داشت تا خطای سرریز رخ ندهد. برای تفریق نیز باید آن را ابتدا به جمع تبدیل کرده و عمل جمع انجام داد:

فرضاً در یک سیستم بصورت ۵ بیتی بخواهیم حاصل 6-9- را بیابیم:

ابتدا تفریق را به جمع تبدیل می کنیم

-9-6=(-9)+(-6)

حال دو عدد منفی داریم که می خواهیم آنها را با هم جمع کنیم: محدوده مجاز این جمع بین 15- تا 15+ است. که برای این جمع مجاز است. ابتدا از هر دو عدد مکمل ۱ می گیریم. سپس با هم جمع می کنیم:

$$+9:01001 \rightarrow -9:10110$$
$$+6:00110 \rightarrow -6:\underline{11001}$$

1 01111

نکته مهم: رقم نقلی خروجی حاصل از محاسبات در روش مکمل ۱(بر خلاف مکمل ۲) دوباره با حاصلجمع می شود یعنی

$$\begin{array}{r} 01111 \\ \underline{1} \; + \\ \underline{1}0000 \end{array}$$

نتیجه 10000 بدست آمد که عددی منفی است.

برای اینکه ببینیم چه عددی است آن را یکبار دیگر منفی می کنیم تا مثبت آن بدست آید جواب نهایی 15- است که

$10000 \xrightarrow{\text{منفی}} 01111 = +15 \rightarrow$ صحیح است

به عنوان یک مثال دیگر فرضاً بخواهیم در همین سیستم 9-6 را بیابیم:

9-6=(+9)+(-6)　+6:00110

+9:01001

<u>-6:11001</u>

1 00010　　رقم نقلی خروجی دوباره جمع می شود

<u>- 1</u> +

00011

00011 = +3

نکته: مکمل R-1 یکی کمتر از مکمل R هر عدد است. یعنی

$[N]_R=[N]_{R-1}+1$

یعنی برای اعداد باینری داریم:

مکمل ۲　$[B]_2=B' +1$

بنابراین می توان روش دوم یافتن مکمل ۲ یک عدد باینری را بدین صورت مطرح کرد که کافی است بیتهای عدد را ابتدا معکوس کنیم (مکمل ۱ بگیریم) سپس با یک جمع باینری نمائیم.

مثال: $[100100]_2 =$

روش اول:از سمت راست حرکت می کنیم تمام صفرها را رد می کنیم به اولین یک که رسیدیم آن را هم رد می کنیم از آن به بعد همه را معکوس می کنیم:

011100

روش دوم ابتدا همه بیتها را معکوس کرده سپس با یک جمع می کنیم

$$
\begin{array}{r}
011011 \\
+ \quad 1 \\
\hline
011100
\end{array}
$$

که از هر دو روش جواب یکسان بدست آمد.