БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Отчёт по теме

«Решение нелинейных уравнений»

Вариант 9

Выполнили: студенты гр. 853503

Климович А. А.

Галиева Э. Г. Ю.

Ивойлов О. А.

Проверил:

Протько М. И.

Минск 2020

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc35796925)

[Детальное описание 3](#_Toc35796926)

[Решение нелинейных уравнений методом простых итераций 3](#_Toc35796927)

[Решение нелинейных уравнений методом Ньютона 4](#_Toc35796928)

[Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений 6](#_Toc35796929)

[Листинг программы, результаты 8](#_Toc35796930)

[Задание 5 8](#_Toc35796931)

[Листинг программы задания 5 8](#_Toc35796932)

[Задание 6 10](#_Toc35796933)

[Листинг программы задания 6 10](#_Toc35796934)

[Результаты к заданию 5 11](#_Toc35796935)

[Результаты к заданию 6 12](#_Toc35796936)

[Вывод 13](#_Toc35796937)

# **Введение**

Нелинейным называется уравнение вида

, (1)

где — некоторая нелинейная функция. Корнями уравнения (1) называются такие значения , которые при подстановке обращают его в тождество. Только для простейших уравнений удается найти решение в виде формул, т. е. аналитическом виде. Чаще приходится решать уравнения приближенными методами, наибольшее распространение среди которых, в связи с появлением компьютеров, получили численные методы. Алгоритм нахождения корней приближенными методами можно разбить на два этапа. На первом изучается расположение корней и проводится их разделение. Находится область , в которой существует корень уравнения или начальное приближение к корню . Простейшим способом решения этой задачи является исследование графика функции . В общем же случае для её решения необходимо привлекать все средства математического анализа. Существование на заданном отрезке , по крайней мере, одного корня уравнения (1) следует из условия Больцано:

.

При этом подразумевается, что функция непрерывна на данном отрезке. Однако данное условие не отвечает на вопрос о количестве корней уравнения на заданном отрезке . Если же требование непрерывности функции дополнить еще требованием ее монотонности, а это следует из знакопостоянства первой производной , то можно утверждать о существовании единственного корня на заданном отрезке.

# **Детальное описание**

## **Решение нелинейных уравнений методом простых итераций**

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение

заменяется равносильным уравнением

(2)

Пусть известно начальное приближение корня . Подставляя это значение в правую часть уравнения (2), получим новое приближение:

.

Если подставлять каждый раз новое значение корня в выражение (2), то получим последовательность значений:

.

Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости графики функций и *.* Каждый действительный корень уравнения (8) является абсциссой точки пересечения кривой с прямой (рисунок 1 (а))*.*

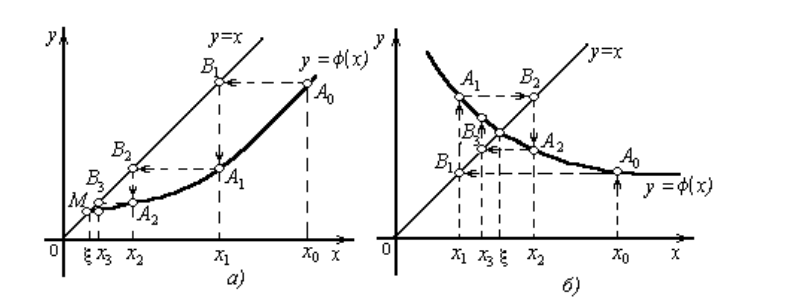


Рисунок 1. Геометрический смысл метода простых итераций.

Отправляясь от некоторой точки [*x*0,(*x*0)]*,* строим ломаную («лестница»), звенья которой попеременно параллельны оси и оси , вершины *, ,* , *...* лежат на кривой, а вершины *, ,* , *...* — на прямой *.* Общие абсциссы точек и , и , ..., очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения *,* , *...* корня .

Возможен также другой вид ломаной— «спираль» (рисунок 1 (б)). Решение в виде «лестницы» получается, если производная положительна, а решение в виде «спирали», если отрицательна.

## **Решение нелинейных уравнений методом Ньютона**

Пусть дано уравнение , где определена и непрерывна в некотором конечном или бесконечном интервале . Всякое значение , обращающее функцию в нуль, то есть такое, что называется корнем уравнения или нулем функции . Число называется корнем -ой кратности, если при вместе с функцией обращаются в нуль ее производные до () порядка включительно:

Однократный корень называется простым. [Приближённое нахождение корней уравнения](https://math.semestr.ru/optim/koren.php) складывается из двух этапов:

1. Отделение корней, то есть установление интервалов , в которых содержится один корень уравнения.
   1. , т. е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки;
   2. сохраняет постоянный знак, т. е. функция монотонна;
   3. сохраняет постоянный знак, т. е. функция выпукла либо вверх, либо вниз.
2. Уточнение приближенных корней, то есть доведение их до заданной точности.

Пусть корень уравнения отделен на отрезке . Предположим, мы нашли ()-ое приближение корня . Тогда -ое приближение мы можем получить следующим образом. Положим,

. (3)

Раскладывая в ряд в точке , получим

.

Отсюда следует

. (3.1)

Подставим (3.1) в формулу (3), получим

, . (3.2)

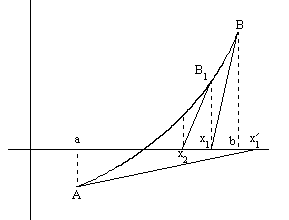


Рисунок 2. Геометрическая интерпретация метода Ньютона.

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой

касательной, проведенной в некоторой точке кривой (см. рисунок 2). В точке имеем . Здесь . Проведем касательную в точке , получим на пересечении касательной осью точку . Далее проводим касательную в точке , получим точку и т. д.

Если положить , то в точке будем иметь . Тогда касательная в точке пересекла бы ось в точке , лежащей вне отрезка , то есть при таком выборе начальной точки, метод Ньютона оказывается расходящимся. Достаточные условия сходимости метода Ньютона определяются следующей теоремой.

*Теорема*: если , причем и отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при , то исходя из начального приближения , удовлетворяющего неравенству

(3.3)

можно вычислить методом Ньютона (3.2) единственный корень уравнения с любой степенью точности.

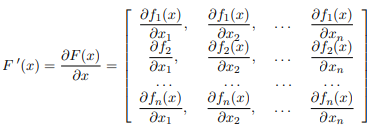
## **Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений**

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

, (4)

и предположим, что существует вектор , являющийся решением системы (4). Будем считать, что , причём .

Разложим в окрестности точки : . Здесь



называется матрицей Якоби, а ее определитель – якобианом системы (4). Исходное уравнение заменим следующим: . Считая матрицу Якоби не особой, разрешим это уравнение относительно : . И вообще, положим

. (5)

При сделанных относительно предположениях имеет место сходимость последовательности к решению системы со скоростью геометрической прогрессии при условии, что начальное приближение выбрано из достаточно малой окрестности решения .

При дополнительном предположении имеет место квадратичная сходимость метода, т. е.

.

Сформулируем теорему.

*Теорема*: пусть в некоторой окрестности решения системы (4) функции и якобиан системы отличен от нуля в этой окрестности. Тогда существует -окрестность точки такая, что при любом выборе начального приближения из этой окрестности последовательность не выходит из неё и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности.

*Замечание 1*. В качестве критерия окончания процесса итераций обычно берут условие:

*.*

*Замечание 2.* Сложность метода Ньютона — в обращении матрицы Якоби. Вводя обозначение

,

получаем для вычисления СЛАУ

,

откуда и находим искомую поправку , а затем и следующее приближение к решению . Очевидно, что это значительно сокращает количество арифметических операций для построения очередного приближения.

*Замечание 3.* Начиная с некоторого шага решают стационарную СЛАУ

.

Данное видоизменение носит название «модифицированный метод Ньютона».

*Замечание 4* (о выборе начального приближения). Пусть вектор-функция такова, что , а система может быть решена. Тогда, разбивая на частей, решают методом Ньютона набор из систем

, ,

принимая для каждой следующей системы в качестве начального приближения решение предыдущей системы.

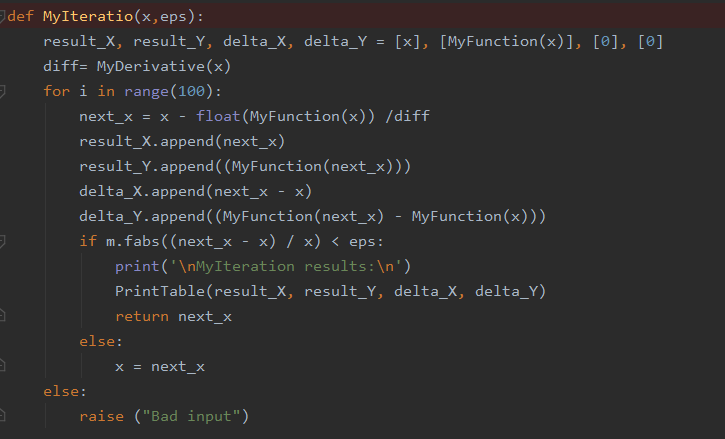
# **Листинг программы, результаты**

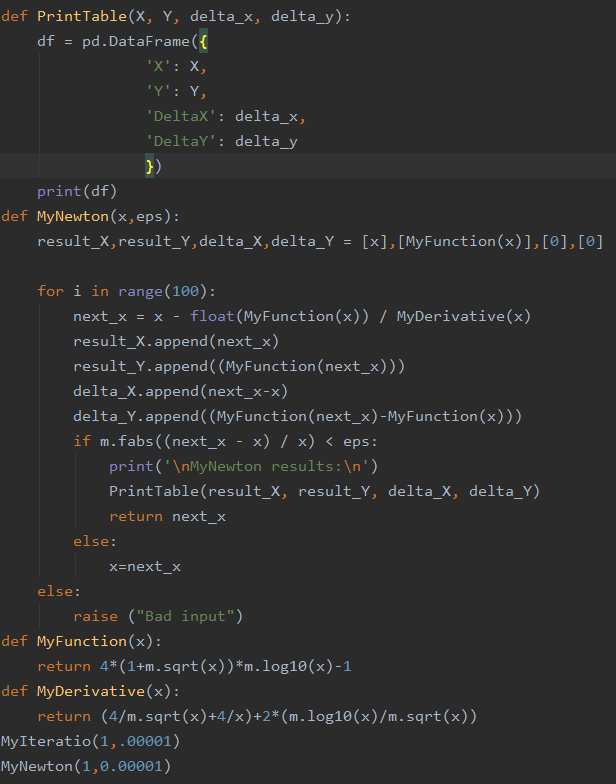
## **Задание 5**

**:** напишите программу в Python для решения нелинейного уравнения. Для решения используйте метод простых итераций (MyIteration) и метод Ньютона (MyNewton). Функции MyIteration и MyNewton должны реализовывать алгоритмы численного приближения решения выбранного уравнения. Для расчета значений функции и ее производной используйте анонимные функции MyFunction и MyDerivative. Выполните вычисления с двойной точностью. Результаты вычислений представьте в виде таблице, записанной в текстовом файле.

## **Листинг программы задания 5**

**:**

****

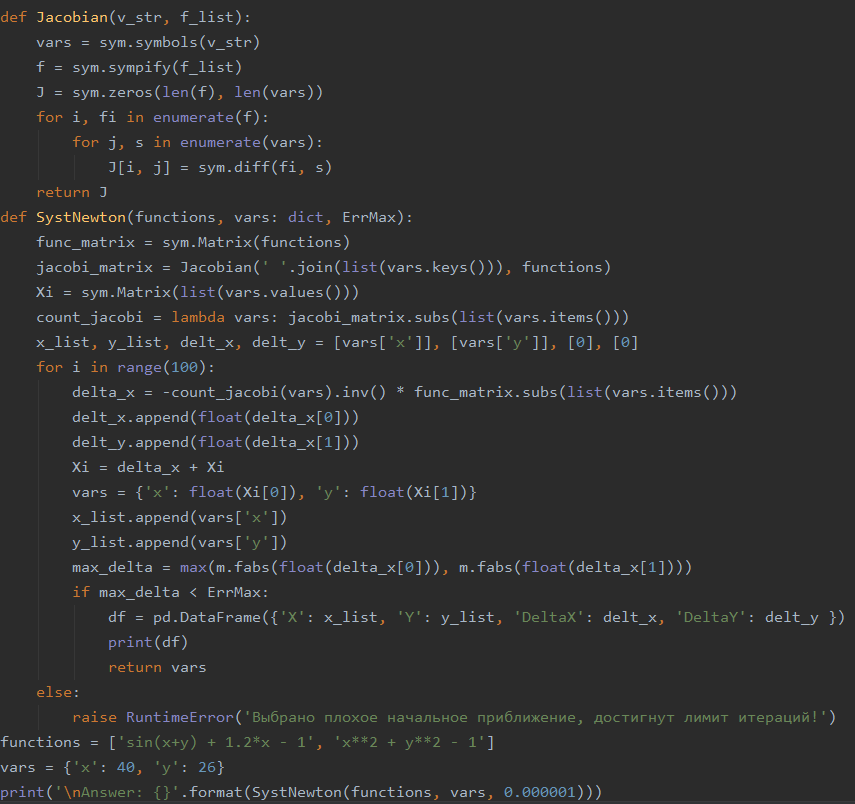
****

## **Задание 6**

**:** напишите программу в Python для решения системы нелинейных уравнений, методом Ньютона. Выполните вычисления с двойной точностью. Результаты вычислений представьте в виде таблицы, записанной в текстовом файле.

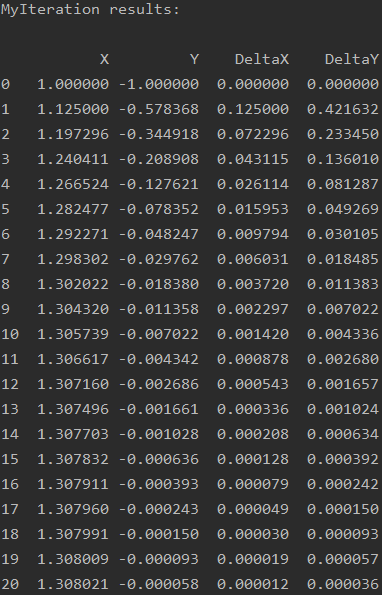
## **Листинг программы задания 6**

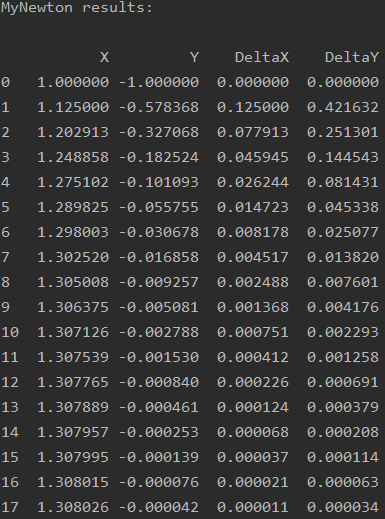
**:**

****

## **Результаты к заданию 5**

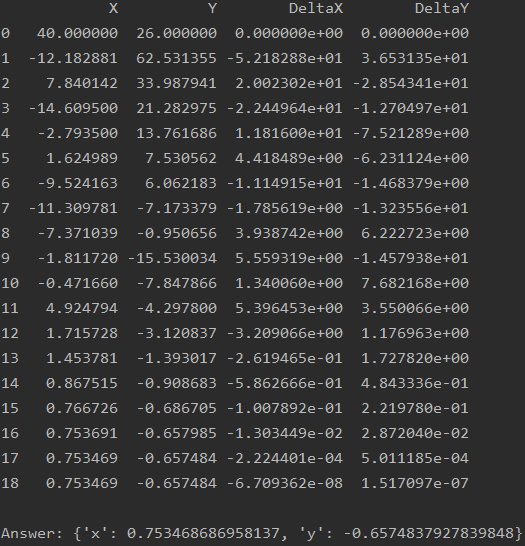
**:**





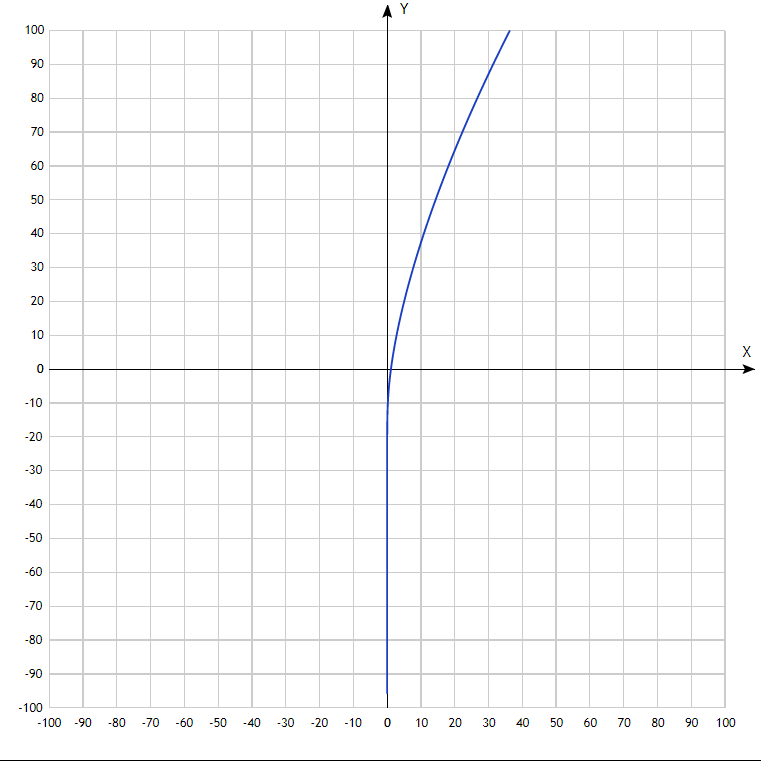
## **Результаты к заданию 6**

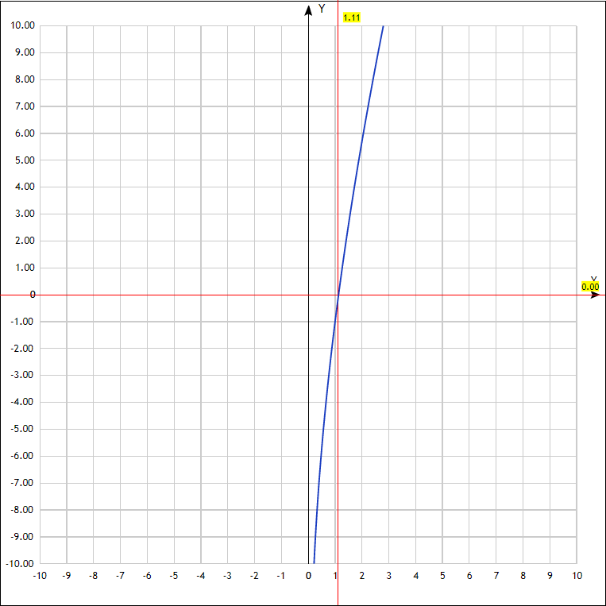
**:**



# **Вывод**

Для выполнения задания 5 были использованы итерационный метод Ньютона, основанный на уравнении касательной и работающий на базе выведенной формулы , и простой итерационный метод, формула для которого была определена в процессе разработки программы. Несмотря на два недостатка метода Ньютона: производная функции может быть не определена в точке и возможность возникновения ошибки в точке из-за того, что производная (параллельна ) — мы смогли беспрепятственно использовать данный метод ввиду того, что функция непрерывна на промежутке и монотонно возрастает на нём, в чём можно убедиться из её графика:





Аналогично, мы можем успешно использовать метод простых итераций, т. к. функция не имеет точек экстремума и необходимо исследовать один интервал (один корень).

Для метода Ньютона характерна высокая скорость сходимости в отличие от метода простой итерации, где скорость сходимости сильно зависит от исходной функции.

В результате отработки программы получили, что заданная точность была достигнута за 17 и 20 итераций соответственно методом Ньютона и методом простых итераций. Начиная с 5-й итерации метод Ньютона показал более высокие скорость сходимости и точность результата последнего приближения.

Аналогично, в задании 6, воспользовались методом Ньютона для вычисления числового решения. Было поставлено ограничение на число итераций, дабы избежать зацикливания. В связи с быстротой сходимости метода конечное число итераций не превысило 18-ти.