БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Отчёт по теме

«Собственные значения и собственные векторы»

Вариант 9

Выполнили: студенты гр. 853503

Климович А. А.

Галиева Э. Г. Ю.

Ивойлов О. А.

Проверил:

Протько М. И.

Минск 2020

Содержание

[Введение 3](#_Toc40182363)

[Степенной метод 3](#_Toc40182364)

[Алгоритм 3](#_Toc40182365)

[Метод обратных итераций 4](#_Toc40182366)

[Алгоритм 4](#_Toc40182367)

[QR-разложение 5](#_Toc40182368)

[Алгоритм 5](#_Toc40182369)

[Метод вращения (Метод Якоби) 6](#_Toc40182370)

[Общая информация 6](#_Toc40182371)

[Алгоритм 6](#_Toc40182372)

[Сингулярное разложение 8](#_Toc40182373)

[Сингулярные числа и сингулярные векторы 8](#_Toc40182374)

[Разложение матрицы 8](#_Toc40182375)

[Метод наименьших квадратов 8](#_Toc40182376)

[Описание алгоритма применительно к случаю регрессионного анализа 9](#_Toc40182377)

[Листинги программ и результаты 11](#_Toc40182378)

[Задание 1 11](#_Toc40182379)

[Код программы и результаты к заданию 1 11](#_Toc40182380)

[Задание 2 19](#_Toc40182381)

[Код программы и результаты к заданию 2 19](#_Toc40182382)

[Задание 3 20](#_Toc40182383)

[Вводная информация 20](#_Toc40182384)

[Теорема 21](#_Toc40182385)

[Формулировка задачи 21](#_Toc40182386)

[Решение задачи 21](#_Toc40182387)

[Код программы и результаты к заданию 3 21](#_Toc40182388)

[Задание 4 22](#_Toc40182389)

[Код программы и результаты к заданию 4 22](#_Toc40182390)

[Реализация метода главных компонент 25](#_Toc40182391)

[Вывод 29](#_Toc40182392)

# Введение

## Степенной метод

Степенной метод или метод степенных итераций — итерационный алгоритм поиска собственного значения с максимальной абсолютной величиной и одного из соответствующих собственных векторов для произвольной матрицы.

Алгоритм прост и сходится со скоростью геометрической прогрессии если все максимальные по модулю собственные значения совпадают, в противном случае сходимости нет. При близких по модулю собственных значениях сходимость может оказаться медленной.

### Алгоритм

В начале алгоритма генерируется случайный вектор .

Далее проводятся последовательные вычисления по итеративной формуле: .

Если исходный вектор не ортогонален собственному подпространству с наибольшим по модулю собственным значением, то расстояние от элементов данной последовательности до такого подпространства стремится к нулю. Последовательность векторов не всегда сходится, поскольку вектор на каждом шаге может менять знак или в комплексном случае вращаться, но это не мешает выбрать один из векторов в качестве собственного, когда получено достаточно точное собственное значение.

Последовательность

при указанном выше условии сходится к максимальному по модулю собственному значению. Но следует помнить, что не у всех действительных матриц есть действительные собственные значения.

## Метод обратных итераций

Обратный степенной метод или метод обратных итераций — итеративный алгоритм вычисления собственных векторов и значений. Позволяет искать собственные вектора и собственные значения произвольной матрицы. Обычно используется для вычисления собственных векторов, если для собственных значений известны достаточно хорошие приближения.

### Алгоритм

Пусть имеется квадратная матрица и её приближённое собственное значение Начальный вектор может быть случайным или известным приближением собственного вектора. Метод сводится к последовательному вычислению векторов по формуле

где нормирующие константы. Обычно на каждом шаге просто нормируют вектор к единичной длине. Последовательность векторов не обязательно сходится, но начиная с некоторого шага любой вектор последовательности является собственным с точностью до ошибок округления при умножении на матрицу. Ему соответствует ближайшее к собственное значение. После того как найден собственный вектор можно точно вычислить это собственное значение по формуле:

Чем ближе к собственному значению тем быстрее сходимость. Когда известны хорошие приближения собственных значений, может потребоваться всего 2-3 итерации.

## QR-разложение

QR-алгоритм — это численный метод в линейной алгебре, предназначенный для решения полной проблемы собственных значений, то есть отыскания всех собственных чисел и собственных векторов матрицы. Был разработан в конце 1950-х годов независимо В. Н. Кублановской и Дж. Фрэнсисом.

### Алгоритм

Пусть — вещественная матрица, для которой мы хотим найти собственные числа и векторы. Положим На -м шаге (начиная с

) вычислим QR-разложение , где — ортогональная матрица (то есть ), а - верхняя треугольная матрица. Затем мы определяем . Заметим, что:

то есть все матрицы являются подобными, то есть их собственные значения равны.

Пусть все диагональные миноры матрицы не вырождены. Тогда последовательность матриц при k ,сходится по форме к клеточному правому треугольному виду, соответствующему клеткам с одинаковыми по модулю собственными значениями.

Для того, чтобы получить собственные векторы матрицы, нужно перемножить все матрицы .

Алгоритм считается вычислительно устойчивым, т. к. производится ортогональными преобразованиями подобия.

## Метод вращения (Метод Якоби)

### Общая информация

Метод последовательных вращений Якоби — итерационный алгоритм для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы. Назван в честь Карла Густава Якоба Якоби, предложившего этот метод в 1846 году.

### Алгоритм

Пусть – симметричная матрица, а — матрица вращения. Тогда

симметрична и подобна матрице . Более того, содержит следующие компоненты:

Где и .

Поскольку — ортогональная матрица, у матриц и равны [фробениусовы нормы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%83%D1%81%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%BD%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0) (корни из сумм квадратов всех компонент), причём мы можем выбрать так, чтобы , и в этом случае будет иметь бо́льшую сумму квадратов диагональных элементов:

.

Приравнивая это нулю, получим:

Если , то .

Чтобы достичь оптимального эффекта, необходимо потребовать, чтобы был наибольшим по модулю внедиагональным элементом, т. н. опорным элементом.

Метод Якоби для собственных значений производит вращения до тех пор, пока матрица не станет почти диагональной. Тогда элементы на диагонали аппроксимируют собственные значения матрицы .

## Сингулярное разложение

Сингулярное разложение — определённого типа разложение прямоугольной матрицы. Имеет широкое применение, в силу своей наглядной геометрической интерпретации, при решении многих прикладных задач. Переформулировка сингулярного разложения, так называемое [разложение Шмидта](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%A8%D0%BC%D0%B8%D0%B4%D1%82%D0%B0) имеет приложения в [квантовой теории информации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F), например в [запутанности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%B7%D0%B0%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C).

Сингулярное разложение матрицы позволяет вычислять сингулярные числа данной матрицы, а также левые и правые сингулярные векторы матрицы :

* левые сингулярные векторы матрицы M — это собственные векторы матрицы ;
* правые сингулярные векторы матрицы M — это собственные векторы матрицы .

Пусть матрица порядка состоит из элементов из поля , где — либо поле [вещественных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE), либо поле [комплексных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE).

### Сингулярные числа и сингулярные векторы

Неотрицательное вещественное число называется сингулярным числом матрицы [тогда и только тогда](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D0%BB%D0%B8_%D0%B8_%D1%82%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE_%D0%B5%D1%81%D0%BB%D0%B8), когда существуют два вектора единичной длины и такие, что:

и

Такие векторы и называются, соответственно, левым сингулярным вектором и правым сингулярным вектором, соответствующим сингулярному числу .

### Разложение матрицы

**Сингулярным разложением** матрицы порядка является разложение следующего вида где матрица размера с неотрицательными элементами, у которой элементы, лежащие на главной диагонали — это сингулярные числа (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми), а матрицы и — это две [унитарные](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BD%D0%B8%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0) матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно.

### Метод наименьших квадратов

**Метод наименьших квадратов** (МНК) — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Он может использоваться для «решения» переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции. МНК является одним из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным.

### Описание алгоритма применительно к случаю регрессионного анализа

Пусть имеется n значений некоторой переменной y (это могут быть результаты наблюдений, экспериментов и т. д.) и соответствующих переменных x. Задача заключается в том, чтобы взаимосвязь между y и x аппроксимировать некоторой функцией , известной с точностью до некоторых неизвестных параметров , то есть фактически найти наилучшие значения параметров , максимально приближающие значения к фактическим значениям . Фактически это сводится к случаю «решения» переопределенной системы уравнений относительно :

В регрессионном анализе и, в частности, в эконометрике используются вероятностные модели зависимости между переменными

где — так называемые случайные ошибки модели.

Соответственно, отклонения наблюдаемых значений y от модельных предполагается уже в самой модели. Сущность МНК (обычного, классического) заключается в том, чтобы найти такие параметры , при которых сумма квадратов отклонений (ошибок, для регрессионных моделей их часто называют остатками регрессии) будет минимальной:

где RSS — англ. Residual Sum of Squares — определяется как:

В общем случае решение этой задачи может осуществляться численными методами оптимизации (минимизации). В этом случае говорят о нелинейном МНК (NLS или NLLS — англ. Non-Linear Least Squares). Во многих случаях можно получить аналитическое решение. Для решения задачи минимизации необходимо найти стационарные точки функции

RSS(), продифференцировав её по неизвестным параметрам , приравняв производные к нулю и решив полученную систему уравнений:

# Листинги программ и результаты

### Задание 1

. Пусть матрица (где является множеством всех квадратных матриц, определенных на ) является персимметрической матрицей, т.е.

для всех , .

1. задайте матрицу и, используя теорему Гершгорина, определите расположение собственных чисел матрицы (графически);
2. напишите функцию, позволяющую определить минимальное и максимальное собственное значение персимметрической матрицы, и исследуйте сходимость предложенного решения;
3. пусть матрица имеет вид

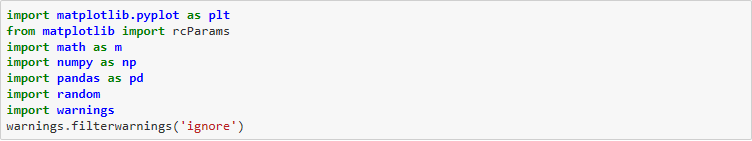
покажите, что если является минимальным собственным значением матрицы , то спектральный радиус матрицы можно выразить как .

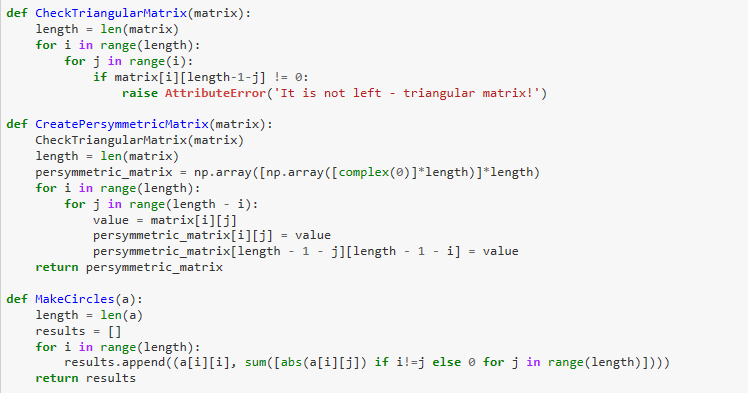
### **Код программы и результаты к заданию 1**

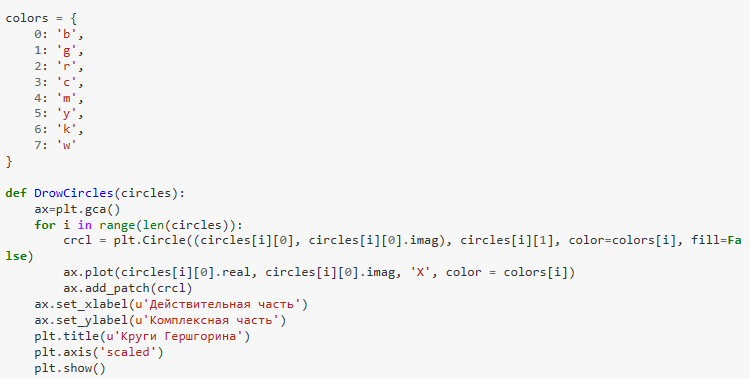
:

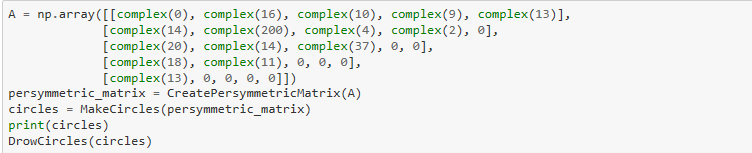
#### Часть 1

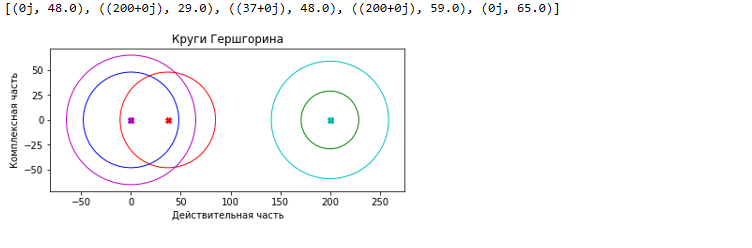
:



****

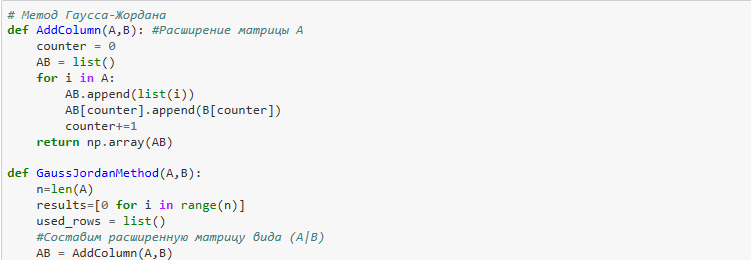
****

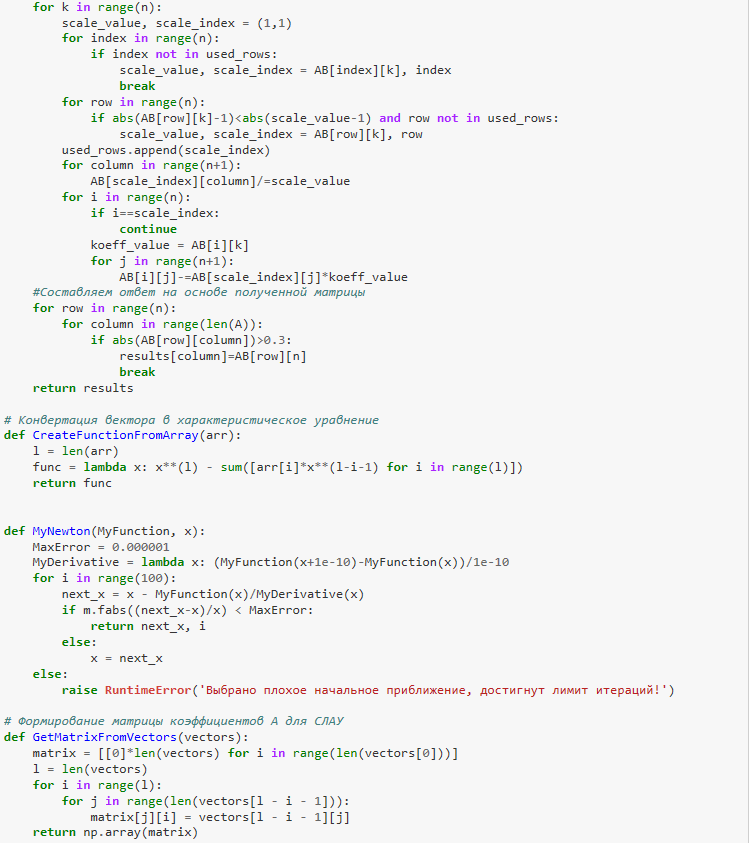
****

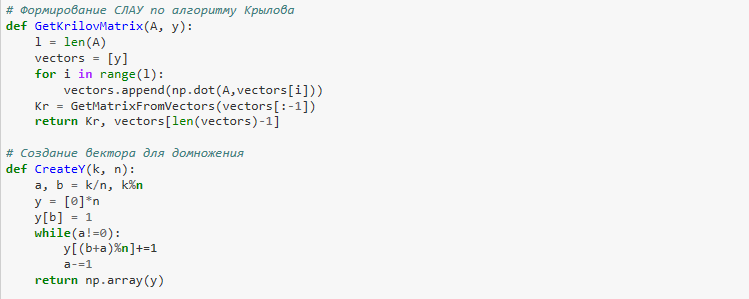
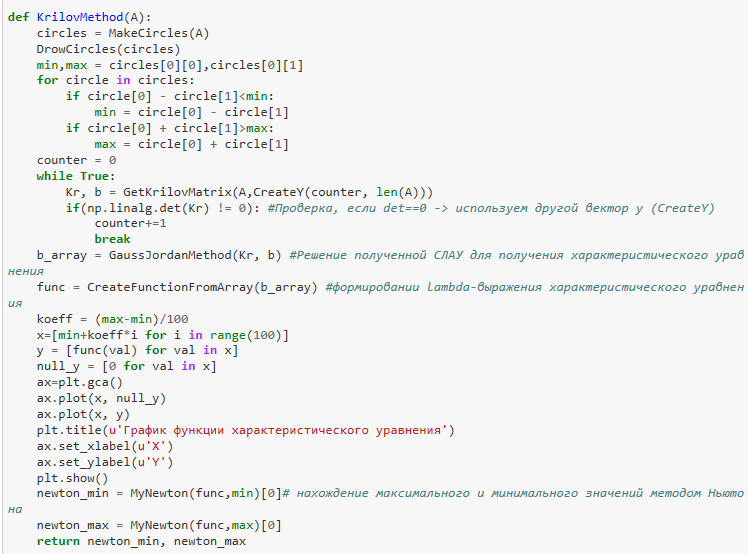
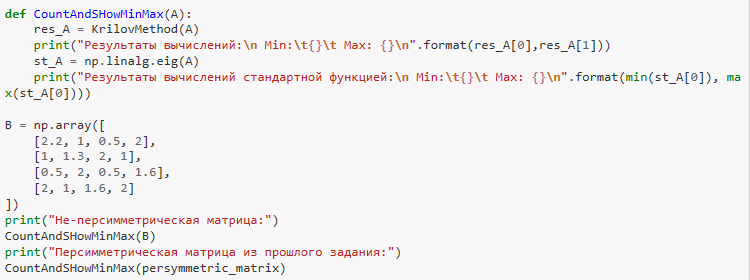
****

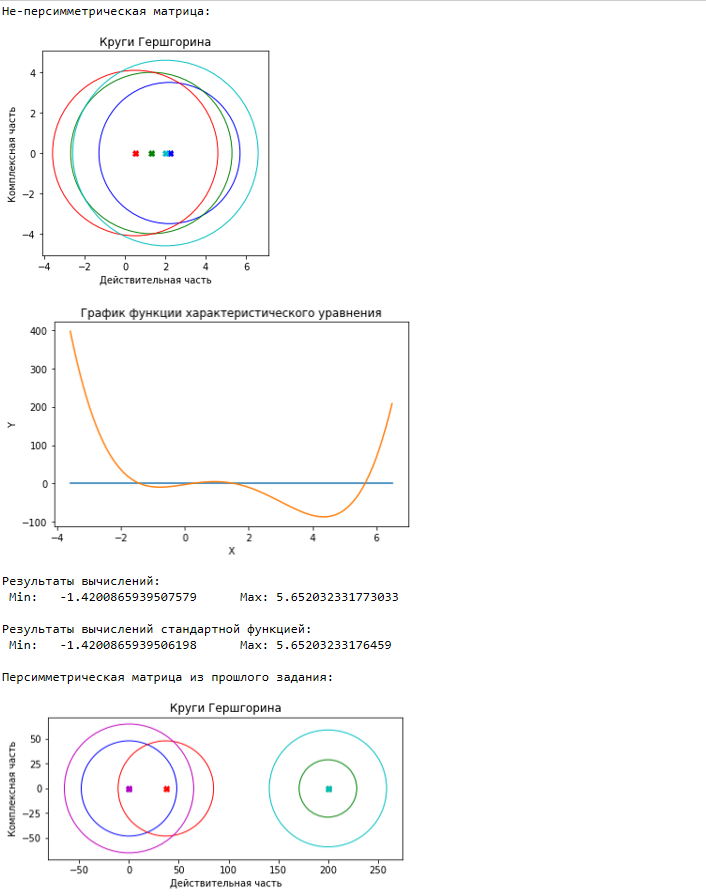
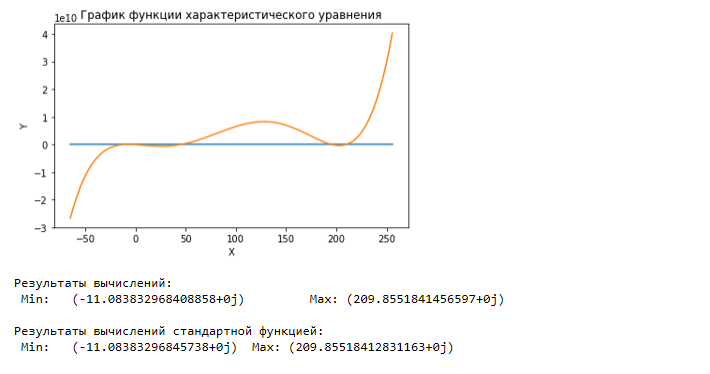
#### Часть 2

:

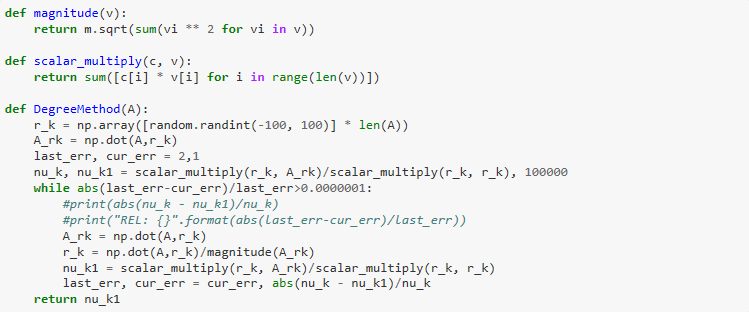
****

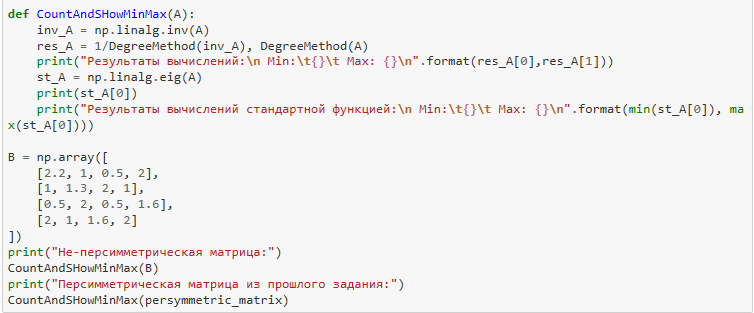
****

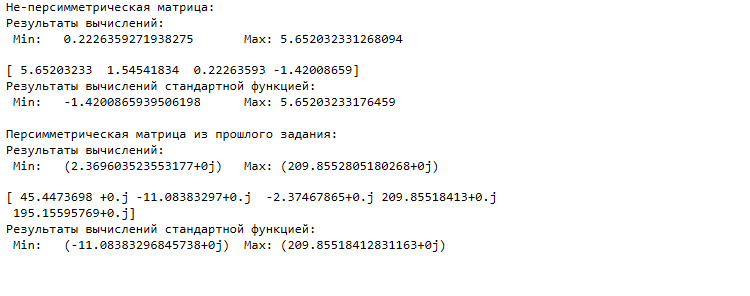
**** **** 

**** ****

2-й способ — использование степенного метода. Для нахождения максимального значения достаточно воспользоваться степенным методом для исходной матрицы . Для нахождения минимального нужной найти обратную матрицу и воспользоваться степенным методом, после чего разделить 1 на данное значение. Метод будет работать только в случае, если минимальное собственное значение будет положительным числом, так как степенной метод находит максимальное по модулю значение.

****

****

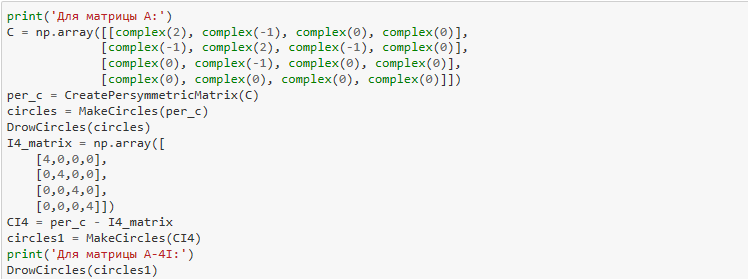
****

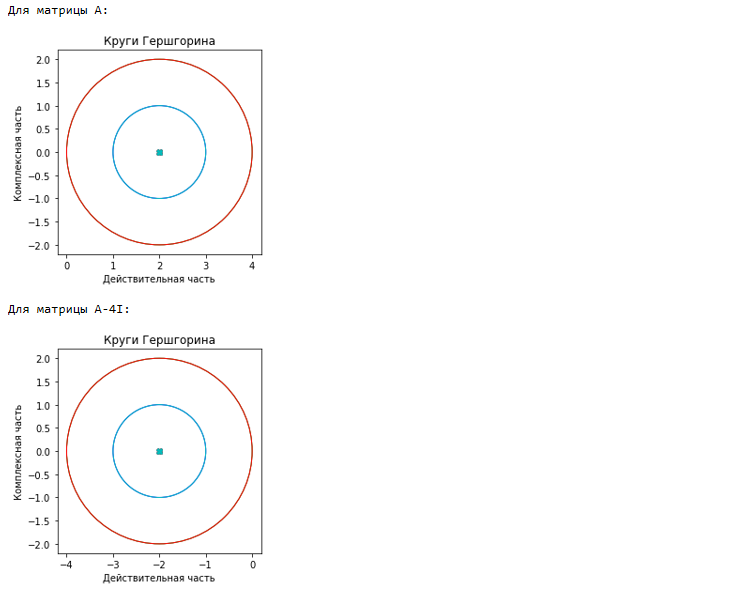
#### Часть 3

:

Если собственные значения исходной матрицы : , тогда собственные значения матрицы , где — единичная матрица соответствующей размерности, равны соответственно , , …, .

Воспользуемся теоремой Гершгорина и построим круги Гершгорина для матриц и :





#### Вывод

:

Из графиков видно, что собственные значения матрицы и могут находиться в промежутках (0; 4) и (-4; 0) соответственно.

Из этого следует, что после вычитания матриц множество собственных значений сдвинулось на 4 единицы влево и полностью перешло в отрицательную область.

Исходя из того, что спектральный радиус — это максимальное по абсолютному значению собственное число, а множество возможных значений собственных чисел после преобразования полностью перенеслось в отрицательную область, тогда именно по абсолютному значению наибольшим будет сдвинутое на 4 единицы влево минимальное собственное число, т.е. число . Тогда спектральный радиус будет равен модулю данного сдвинутого собственного числа, то есть , что и требовалось доказать.

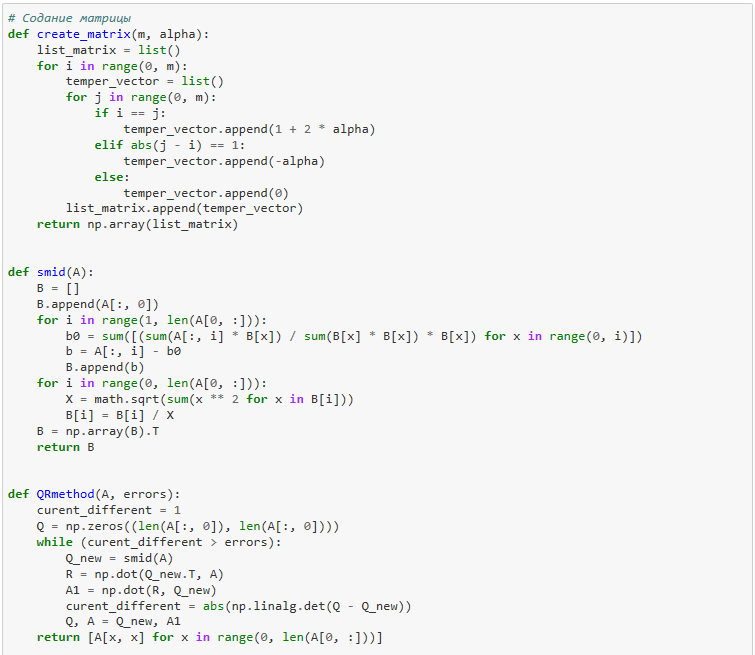
### Задание 2

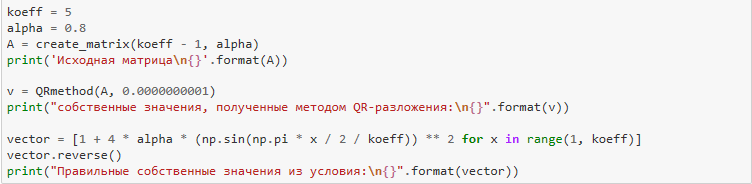
. Решение теплового уравнения методом обратной подстановки связано с построением тридиагональной матрицы вида

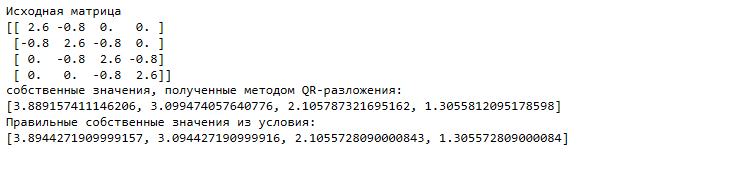
1. определите собственные числа матрицы , используя QR-разложение; оцените точность вычисления, принимая во внимание, что точные значения собственных чисел
2. численное решение теплового уравнения будет устойчивым, если . Определите область устойчивости для произвольного .

### **Код программы и результаты к заданию 2**

:







1. Для того, чтобы все собственные значения обратной матрицы были меньше единицы, необходимо, чтобы все собственные значения основной матрицы были больше единицы, так как их собственные значения зависят как . Из условия известно, что собственные значения исходной матрицы всегда больше единицы (так как по условию они равны 1 + всегда положительное число), следовательно, область устойчивости матрицы этого типа не ограничена.

### Задание 3

. Пусть матрица (где является множеством всех квадратных матриц, определенных на ). Предложите собственную задачу, в которой необходимо использовать нахождение собственных чисел матрицы и покажите ее решение.

### Вводная информация

:

При исследовании динамических свойств различных объектов важное значение придается анализу их устойчивости. Если объект, выведенный из состояния равновесия малым возмущением, возвращается в это состояние, то он называется устойчивым. Для объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

которые в матричной форме записываются как

Оказывается, что неоднородная линейная система будет устойчивой при любом свободном члене , если устойчиво нулевое решение соответствующей однородной системы.

Поэтому при изучении устойчивости в классе линейных систем достаточно ограничиться анализом однородных дифференциальных систем. В наиболее простом случае, когда матрица коэффициентов A является постоянной, условия устойчивости формулируются в терминах собственных значений матрицы A.

### Теорема

. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами устойчива в смысле Ляпунова тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы удовлетворяют соотношению:

### Формулировка задачи

: определить, будет ли нулевое решение системы

при , устойчивым?

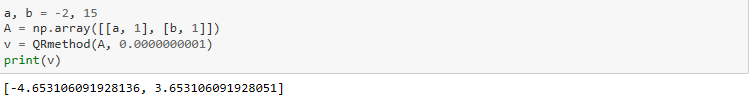
### Решение задачи

.

Воспользуемся методом на основе QR-разложения, реализованным в задании 2 для решения текущей задачи.

### **Код программы и результаты к заданию 3**

:

****

Из результатов видно, что не все полученные собственные значения меньше нуля, следовательно, данная система неустойчива.

### Задание 4

.

Данные психологического эксперимента, проведенного с участием человек, представлены в таблице (forPCAanalysis.xls). В этой таблице приняты следующие обозначения:

— результаты семи различных тестов;

— порядковый номер участника;

— национальная принадлежность участника;

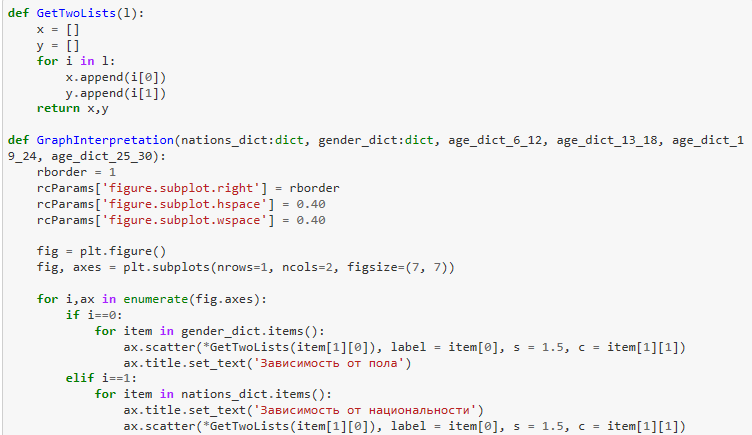
— пол участника;

— возраст участника.

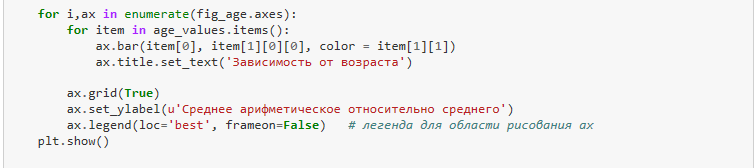
Выполните анализ результатов, используя метод главных компонент – PCA. Отличаются ли между собой результаты в зависимости от национальной принадлежности, пола или возраста? Объяснить почему.

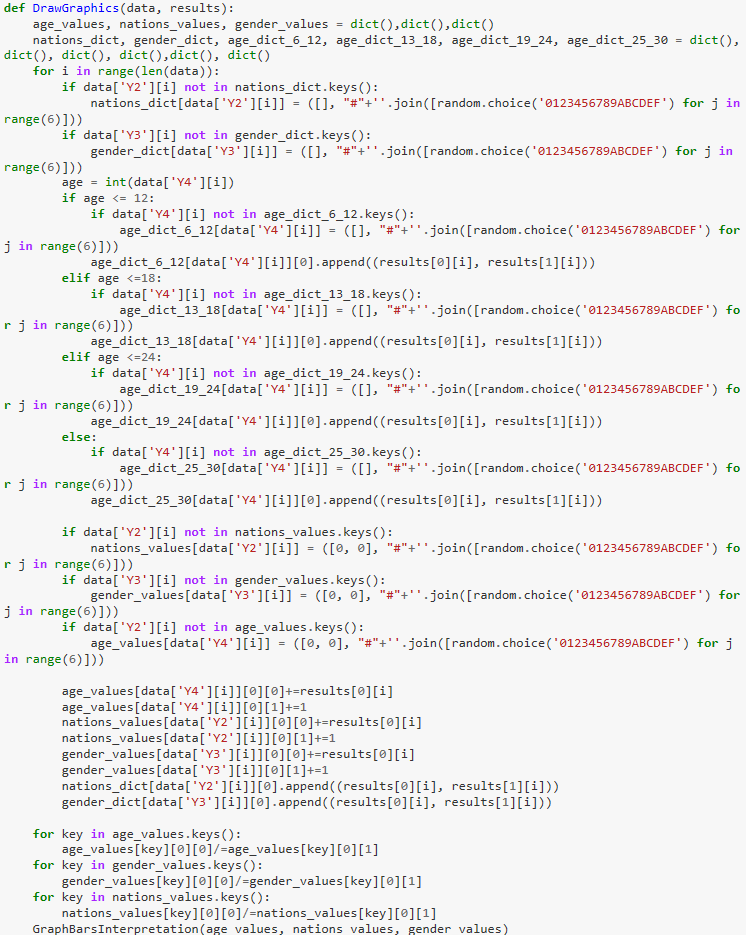
### **Код программы и результаты к заданию 4**

:





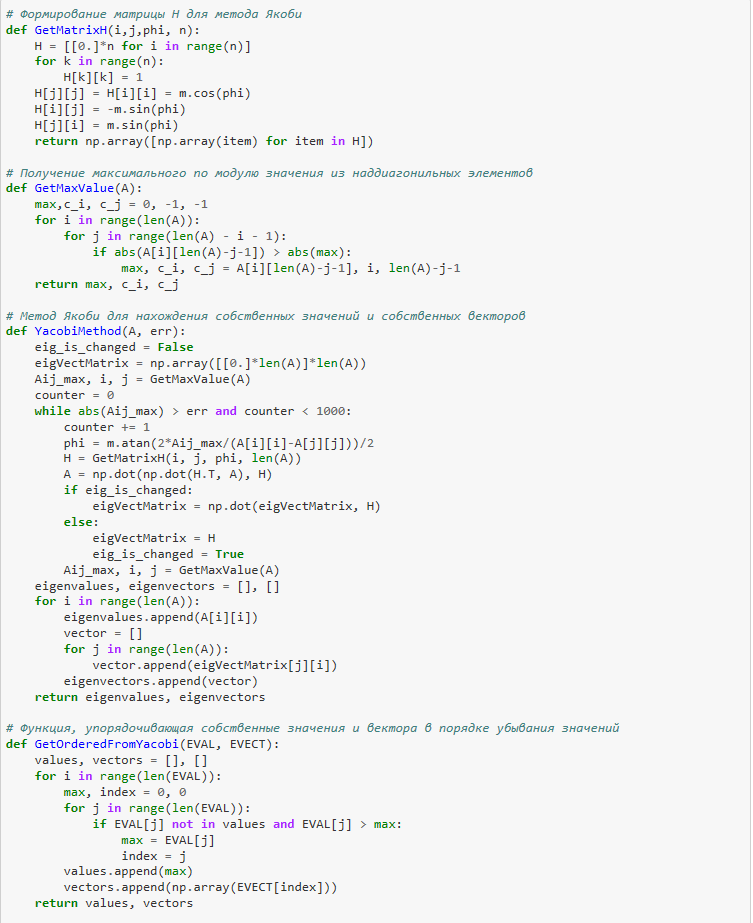






### Реализация метода главных компонент

:





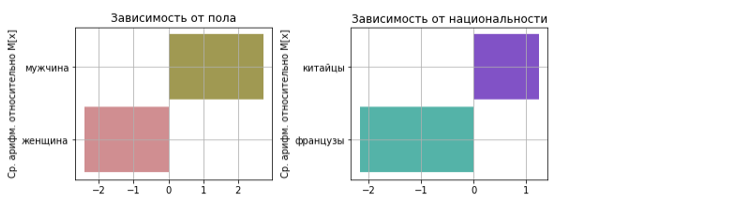
#### Запуск

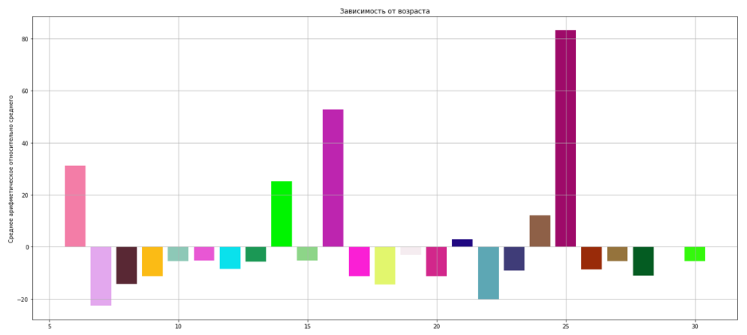
:

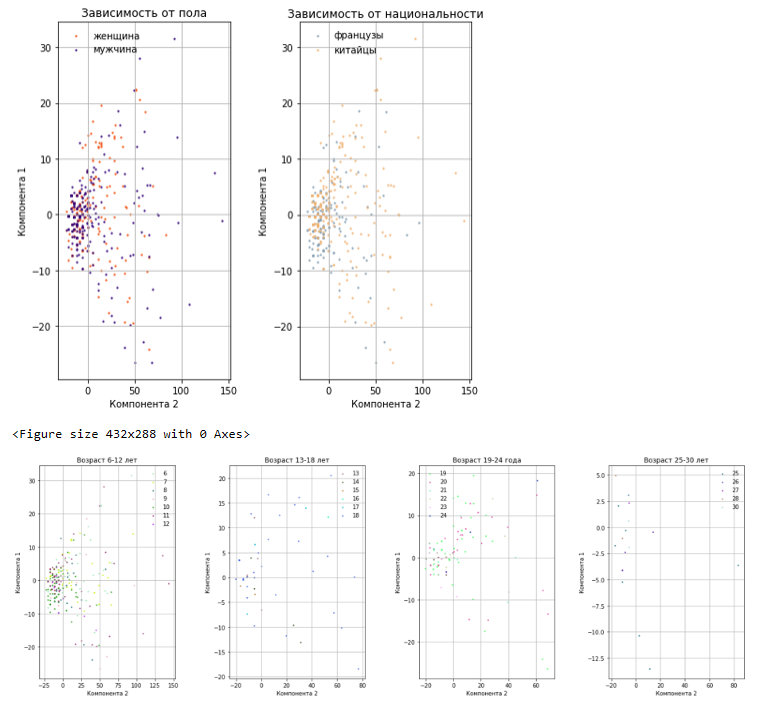


#### Результат

:







# Вывод

В данной лабораторной работе были изучены степенной метод, метод обратных итераций, QR–разложение, метод вращения (метод Якоби), сингулярное разложение.

В первом задании собственные значения были найдены двумя методами: методом степенных итераций и методом Крылова. Результаты вычислений практически совпали друг с другом и с результатами встроенных функций, что подтвердило правильность решения. Также полученные значения удовлетворили теореме Гершгорина, что позволило нам убедиться в выполнимости теоремы для используемых нами матриц.

Во втором и третьем заданиях было использовано QR-разложение.   QR-разложение — это просто разложение матрицы, а метод нахождения собственных значений просто одно из применений QR. Плюсом является то, что алгоритм считается вычислительно устойчивым, т. к. производится ортогональными преобразованиями подобия. Также плюсом является то, что алгоритм нахождения ортогональной матрицы может быть представлен нескольким видами.

В качестве задачи о нахождении собственных чисел можно рассмотреть задачу об устойчивости системы дифференциальных уравнений. В свою очередь устойчивость нужна при решении физических, экономических и пр. задач.