Лекция 2
Алгебра логики. Системы счисления.

Разминка

Начало в 14:00
Форму можно отправить только один раз
Время: 5 минут

Алгебра логики

Множество значений переменных – 0 (ложь) или 1 (правда)

Три базовых операции:
1) отрицание (¬, ¯)
2) конъюнкция (“И”, *, ∧, &)
3) дизъюнкция (“ИЛИ”, +, ∨, |)

Аксиомы: свойства констант 0 и 1: идемпотентность:	 1+A=1 0*A=0 0+A=A 1*A=A A+A=A A*A=A
Закон исключения третьего: **Закон непротиворечивости:** **Закон отрицания:**	A+ ¬A=1 A* ¬A=0 ¬ (¬A)=A
Законы коммутативности:	A+B=B+A A*B=B*A
Законы ассоциативности:	A+B+C=A+(B+C) A*B*C=A*(B*C)
Законы дистрибутивности:	A*(B+C)=A*B+A*C A+(B*C)=(A+B)*(A+C)
Законы де Моргана:	¬ (A+B)= ¬A* ¬B ¬ (A*B)= ¬A+ ¬B
Законы поглощения:	A+A*B=A A*(A+B)=A

* *На самом деле* раздел, который мы рассматриваем, это лишь двоичная логика. Существуют также многозначные логики (троичная, бесконечнозначная, нечеткая), а также отдельная интуиционистская логика, в которой отсутствует закон исключенного третьего

Таблицы истинности. Прочие операции

Какие еще бывают операции?

1) Импликация, =>, “если А, то В”
2) Эквивалентность, ⇔, “А тогда и только тогда, когда В”
3) Исключающее “ИЛИ”, XOR, ⊕
4) Стрелка Пирса, “ИЛИ-НЕ”, NOR, ↓
5) Штрих Шеффера, “И-НЕ”, NAND, ↑ или |

Таблица истинности показывает результат логической функции в зависимости от значения аргументов

A	**B**	**A∨B**	**A∧B**	**A => B**	**A <=> B**	**A XOR B**	**A NOR B**	**A NAND B**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**

Утверждение: используя только NAND (или NOR), можно построить любые логические операции

$$X \downarrow X \equiv \neg X$$

$$(X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y) \equiv X \land Y$$

$$(X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y) \equiv X \lor Y$$

$$X \mid X = \neg X$$

$$(X \mid X) \mid (Y \mid Y) = X \lor Y$$

$$(X \mid Y) \mid (X \mid Y) = X \land Y$$

ДНФ и КНФ

Дизъюнктивная нормальная форма: логическое выражение сводится к дизъюнкции конъюнкций (пересечению объединений, sum of products)

Конъюнктивная нормальная форма: логическое выражение сводится к конъюнкции дизъюнкций (объединению пересечений, product of sums)

Приведем к ДНФ формулу $F = \neg((X \to Y) \vee \neg(Y \to Z))$

Выразим логическую операцию $\to$ через $\vee \wedge \neg$

$$F = \neg((\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee Z))$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$F = (\neg\neg X \wedge \neg Y) \wedge (\neg Y \vee Z) = (X \wedge \neg Y) \wedge (\neg Y \vee Z)$$

Используя закон дистрибутивности, получаем:

$$F = (X \wedge \neg Y \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

Используя идемпотентность конъюкции, получаем ДНФ:

$$F = (X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

Системы счисления

Позиционные (шумерская, арабская) и непозиционные (римская)

Позиционная система счисления определяется числом b – основанием. Тогда любое число X является линейной комбинацией степеней b:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

a_k – цифра, k – номер разряда цифры

Бывают нега-позиционные системы счисления – СЧ с отрицательным основанием

Переход между системами счисления

Перевод в десятичную:

$$101100_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\ = 32 + 8 + 4 = 44.$$

Аналогичные действия имеют место также для **дробной** части: $0{,}011_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0 + 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375.$

Перевод из десятичной:

44_{10} переведём в двоичную систему:

```
44 делим на 2. частное 22, остаток 0
22 делим на 2. частное 11, остаток 0
11 делим на 2. частное  5, остаток 1
 5 делим на 2. частное  2, остаток 1
 2 делим на 2. частное  1, остаток 0
 1 делим на 2. частное  0, остаток 1
```

Частное равно нулю — деление закончено. Теперь, записав все остатки снизу вверх, получим число 101100_2.

Для дробной части алгоритм выглядит так:

```
0,625 умножаем на 2. Дробная часть 0,250. Целая часть 1.
0,250 умножаем на 2. Дробная часть 0,500. Целая часть 0.
0,500 умножаем на 2. Дробная часть 0,000. Целая часть 1.
```

Таким образом, $0{,}625 = 0{,}101_2$.