

# Estimación de la Velocidad del Sonido en el Aire Mediante Resonancias de Helmholtz en una Ocarina

Por: ALAN BARUCH FLORES MORALES, EDGAR IVÁN HINOJOSA SALDAÑA, ELIDA MARIANA GONZÁLEZ CORONADO y ANTONIO DE JESÚS SOSA AGUIRRE\*, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, Av. Universidad s/n. Ciudad Universitaria San Nicolás de los Garza, C.P. 66451, Nuevo León, México

(Manuscrito recibido el 5 de marzo del 2025; en forma final el 5 de marzo del 2025)

## RESUMEN

Un resonador de Helmholtz es un dispositivo que consiste en dos cavidades de tamaños considerablemente diferentes, de las cuales la más pequeña corresponde a un cuello a través del cual el aire puede ser forzado a moverse dentro y fuera de la cavidad más grande en un movimiento oscilatorio armónico, con una frecuencia que depende de las dimensiones espaciales de las cavidades y de la velocidad del sonido. A fin de comprobar la validez de la teoría del resonador de Helmholtz, se miden las frecuencias de los sonidos producidos por una ocarina, un instrumento musical que funciona bajo tal principio, al soplar aire en su boquilla bajo diferentes combinaciones de orificios cubiertos y orificios abiertos. Posteriormente, se buscan relaciones lineales entre los datos medidos para la raíz cuadrada del área total de los orificios abiertos (escalada por otros factores geométricos) y la frecuencia resonante, de forma que la pendiente corresponda a la velocidad del sonido. La primera relación obtenida considera una intercepción nula y arroja un valor para la velocidad del sonido de 352 m/s, mientras que la segunda, que considera una intercepción diferente de cero, sugiere una velocidad de 140 m/s. Los resultados obtenidos logran demostrar que la relación de Helmholtz se satisface de manera aproximada para la ocarina, y que estos predicen, bajo cierto análisis, un valor de velocidad de sonido similar al teórico.

*Palabras clave:* Resonador de Helmholtz, ocarina, frecuencia resonante, velocidad del sonido

## 1. Introducción

Según el diccionario Merriam-Webster (*resonance* 2025), en materia de física se le conoce como *resonancia* a una vibración de gran amplitud en un sistema mecánico o eléctrico causado por un estímulo periódico relativamente pequeño de periodo igual o casi igual al periodo de vibración natural del sistema.

El sistema físico donde se presenta ubicuamente el fenómeno de resonancia es el *oscilador armónico forzado* (Feynman, Leighton y Sands, 2015). El ejemplo usual es el de una partícula de masa  $m$  y posición  $x(t) \equiv x$ , sujetada a un resorte de constante  $k$ , con amplitud máxima de oscilación  $x_0$  y sujetada a una fuerza senoidal dependiente del tiempo,  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , donde  $F_0$  es la amplitud máxima de la fuerza y  $\omega$  es la frecuencia angular de esta. Bajo estas condiciones, la ecuación del movimiento del sistema es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

Solucionar la ecuación (1) por distintos métodos es sencillo,

pues es una ecuación diferencial ordinaria lineal. Sin importar qué método se utilice, la solución a la ecuación (1) implica la condición (ibíd.):

$$x_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0 - \omega)^2} \quad (2)$$

donde  $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$  es la *frecuencia natural* del oscilador. Observamos que, si  $\omega$  es un valor muy cercano o igual a  $\omega_0$ , la amplitud de oscilación  $x_0$  se dispara a valores enormes, técnicamente tendiendo a infinito. *Este* es el fenómeno de resonancia.

El infinito en nuestros cálculos se debe a que estamos considerando un oscilador sin amortiguamiento, por fuerzas de fricción, por ejemplo. En un oscilador sin amortiguamiento, la energía suministrada a este mediante la fuerza externa continúa acumulándose, resultando, por ejemplo, en la rotura del resorte (Feynman, Leighton y Sands, 2015; Resnick, Halliday y Krane, 2002).

También, cabe aclarar que la frecuencia de resonancia puede no ser única en sistemas más complejos, como en osciladores acoplados, por ejemplo (Thomson y Dahleh, 2013).

Por supuesto, la resonancia no es un fenómeno exclusivo a los osciladores armónicos: Un puente puede oscilar y eventual-

\* Autor correspondiente.

e-mail: antonio.sosaa@uanl.edu.mx

mente colapsar si un grupo de personas pasa a través de él mar-chando al ritmo apropiado o si ráfagas de aire chocan con él a una frecuencia cercana a su frecuencia natural, lo que puede tener consecuencias desastrosas (como sucedió con el puente Tacoma Narrows en Puget Sound, Washington, EE. UU. en 1940). Entre otros ejemplos de resonancias están el destruir una copa de vino con sonido de cierta frecuencia, empujar a alguien en un columpio de tal forma que suba más o incluso derramar café de una taza cuando se camina con ella justamente al paso equivocado (Fishbane, Gasiorowicz y Thornton, 2005; Resnick, Halliday y Krane, 2002). Los fenómenos de resonancia están presentes, incluso, en escalas atmosféricas, cristalinas, atómicas e incluso nucleares (Feynman, Leighton y Sands, 2015; Sakurai y Napolitano, 2020).

El fenómeno específico de resonancia que nos interesa en este momento es aquel denominado *resonancia de Helmholtz*, que es cuando el aire es forzado dentro y fuera de una cavidad grande a través de una perforación pequeña, un “cuello”, causando que el aire vibre a una frecuencia natural específica (Strutt, 2009). Se nombra este fenómeno en honor a Hermann von Helmholtz, quien describió en su libro (von Helmholtz, 1895) un aparato capaz de “escoger” frecuencias específicas de un sonido complejo.

Se puede mostrar (Crowell, 2013) que la frecuencia angular resonante  $\omega_H$  está dada por:

$$\omega_H = \sqrt{\gamma \frac{A^2 P}{m V}} \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático del aire,  $A$  es el área transversal del cuello,  $m$  es la masa de aire en el cuello,  $P$  es la presión en la cavidad y  $V$  es el volumen de la cavidad. En el caso especial de un cuello cilíndrico o rectangular tenemos que  $A$  está dada por:

$$A = \frac{v}{l} \quad (4)$$

donde  $v$  es el volumen del cuello y  $l$  es su longitud. De este modo, podemos reescribir la ecuación (3):

$$\omega_H = \sqrt{\gamma \frac{A v P}{m l V}} \quad (5)$$

Usando la definición de densidad de masa con la masa de aire en el cuello  $\rho = m/v$ , la definición de la rapidez del sonido en el aire  $v_0 = \sqrt{\gamma P/\rho}$  y la relación de la frecuencia con la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$ , llegamos a la expresión para la frecuencia resonante de Helmholtz  $f_H$ :

$$f_H = \frac{v_0}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vl}} \quad (6)$$

Obsérvese que la ecuación anterior puede ser vista como una ecuación lineal, con  $f_H$  como la variable dependiente,  $\sqrt{A/(Vl)}$  la variable independiente y pendiente  $v_0/(2\pi)$ . La longitud del cuello aparece en el denominador porque la inercia del aire en el cuello es proporcional a su longitud, mientras que el volumen de la cavidad aparece porque la “constante de

resorte” del aire dentro de esta es inversamente proporcional al volumen (Greene, Argo y Wilson, 2009).

Las ecuaciones (3) y (6) son aproximaciones y tienen sus limitaciones. Otras fórmulas pueden obtenerse analíticamente o usando métodos aproximados (Mechel, 2008; Strutt, 2009).

La resonancia de Helmholtz es conocida en la vida diaria en el contexto de soplar por el borde de una botella, resultando en un tono resonante. De este modo, la resonancia de Helmholtz puede tener aplicaciones musicales (WilliWiper, 2011). Un instrumento musical basado en este principio es la *ocarina*, cuya forma moderna se debe a Giuseppe Donati, creador de instrumentos italiano que desarrolló este instrumento serio a partir de un juguete para niños (Montagu, 2018).

Por supuesto, para estudiar una ocarina como un sistema físico no es necesario asumir que esta funciona como un resonador de Helmholtz, pero es posible mostrar (Allen, 2012) que, bajo cierta aproximación, su frecuencia está dada precisamente por la ecuación (6), lo que sugiere que es un resonador de Helmholtz.

Cabe aclarar que, como ya se mencionó, la ecuación (6) es una aproximación incluso para resonadores de Helmholtz “puros”, lo cual, la ocarina, no es. Esta tiene un borde filoso donde el aire choca para producir sonido, y el mecanismo de este borde filoso no está descrito aún de forma satisfactoria, lo que es un gran problema en aeroacústica y acústica musical. Este hecho hace que la ecuación (6) sea *aún más aproximada* para una ocarina. De todos modos, existen simulaciones numéricas que corroboran que el fenómeno que utiliza la ocarina para producir tonos musicales es, en efecto, el de resonancia de Helmholtz, produciendo los picos característicos de esta resonancia, aunque a una frecuencia menor a la predicha por el modelo de Helmholtz “puro” (Okada et al., 2019). De este modo, se sigue considerando como una buena aproximación.

El objetivo de la presente práctica es obtener una estimación de la velocidad del sonido en el aire, utilizando una ocarina. Se tiene como hipótesis que la ecuación (6) es una buena aproximación para el comportamiento de una ocarina, y la verificaremos obteniendo un valor para la velocidad del sonido en el aire y contrastándolo con valores estándar en la literatura.

## 2. Materiales y método

Materiales:

- Una ocarina impresa en 3D.
- Un impulsor de aire.
- Una manguera.
- Un sensor de sonido (frecuencias, micrófono de celular y Aplicación phypox).
- Un vernier digital.

Método:

Se tomó el área de los orificios abiertos de la ocarina como variable independiente durante cada ensayo. La determinación del área de las aberturas se realizó a partir de la medición de los

correspondientes diámetros de cada uno de los orificios A, B, C, D y O del instrumento. Para propósitos de medir el diámetro, se utilizó un vernier digital.

Se midió la intensidad del sonido de cada combinación posible de orificios abiertos (es decir, para diferentes áreas) colocando el sensor de sonido cerca de la ocarina, a cuya boquilla se enlazó la manguera, a su vez conectada al impulsor de aire, de tal forma que se produjera el efecto de “soplar en la boquilla” con la misma intensidad. La aplicación phyphox realizó una transformada de Fourier de las intensidades medidas para hallar la frecuencia de cada uno de los ensayos, es decir, la frecuencia de resonancia de cada configuración.

Posteriormente, se procesaron los pares de datos  $(\sqrt{A}, f)$  (raíz cuadrada del área, frecuencia) y se realizó una estimación de mínimos cuadrados sin intercepción.

El diagrama esquemático del arreglo experimental se muestra en la figura 1.

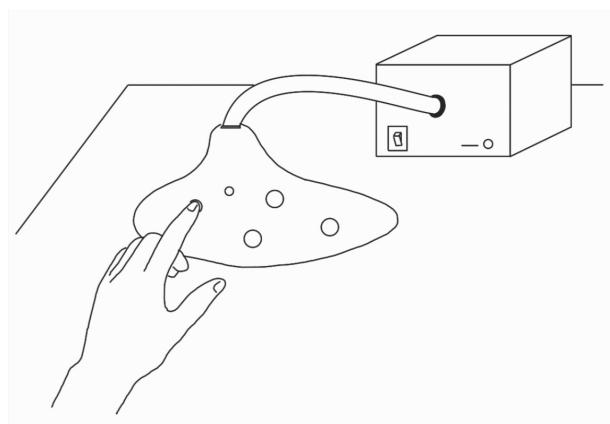


Fig. 1. Diagrama esquemático del arreglo experimental.

### 3. Resultados

#### 3.1. Mediciones

La figura 2 presenta las frecuencias medidas para cada una de las sumas de las áreas de los orificios abiertos en cada ensayo. Los resultados se presentan también en una tabla adjunta en la sección de apéndices (tabla 4).

Gráfica de frecuencia en función de raíz cuadrada del área

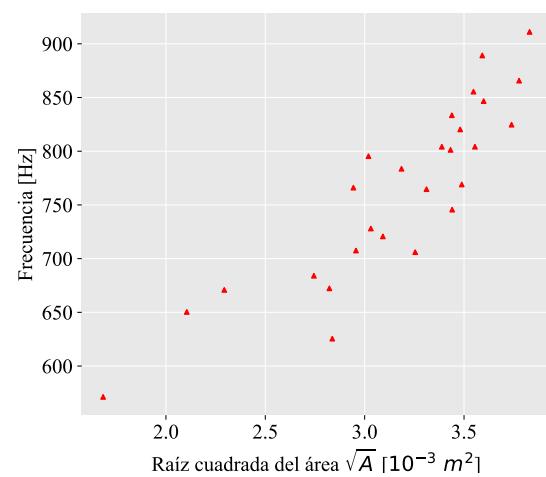


Fig. 2. Gráfica de frecuencias medidas en función de la raíz cuadrada de las áreas de las aberturas.

Medimos un volumen de la ocarina de  $1,588(1) \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , un espesor de  $4,3 \times 10^{-3}(1) \text{ m}$ , usamos una presión absoluta de 100 kPa y una densidad del aire de  $1,2 \text{ kg/m}^3$ .

#### 3.2. Modelo lineal

Se obtuvieron dos relaciones lineales entre las variables  $\sqrt{A/Vl}/2\pi$  y  $f_H$  a partir de asumir primero una intercepción nula y posteriormente una intercepción diferente de cero. Ambas rectas se encuentran graficadas en la figura 3, así como los datos medidos empíricamente.

Gráfica de frecuencia en función de raíz cuadrada del área escalada

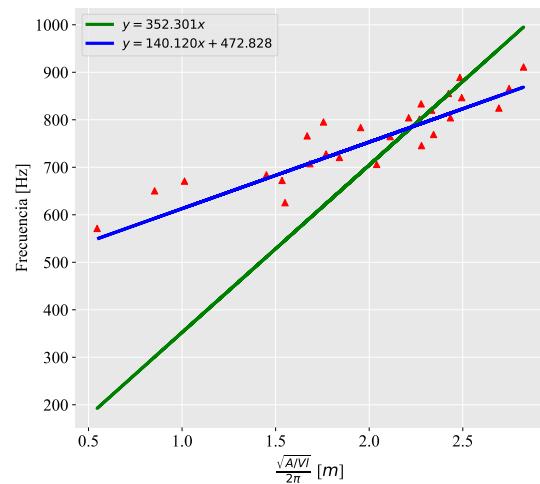


Fig. 3. Gráfica de frecuencias medidas en función de la raíz cuadrada de las áreas de las aberturas escaladas y rectas teóricas calculadas.

Los estadísticos de la relación lineal obtenida con intercepción nula se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Resultados de Modelo Lineal sin intercepción.

| <i>Variable dependiente:</i>               |                        |
|--|------------------------|
| $\sqrt{Area/(Volumen \cdot Espesor)}/2\pi$ |                        |
| Pendiente                                  | 352.301***<br>(11.504) |
| Observaciones                              | 27                     |
| R <sup>2</sup>                             | 0.973                  |

*Nota:* \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Los estadísticos de la relación lineal obtenida con intercepción diferente de cero se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Resultados de Modelo Lineal considerando una intercepción.

| <i>Dependent variable:</i>                 |                        |
|--|------------------------|
| $\sqrt{Area/(Volumen \cdot espesor)}/2\pi$ |                        |
| Pendiente                                  | 140.120***<br>(8.317)  |
| Intercepción                               | 472.828***<br>(17.885) |
| Observaciones                              | 27                     |
| R <sup>2</sup>                             | 0.919                  |
| R <sup>2</sup> ajustada                    | 0.916                  |

*Nota:* \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

También hacemos un estimado teórico de la velocidad del sonido en el aire, utilizando su definición:

$$v_0 = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (7)$$

Tomando  $\gamma = 1,401$  como el índice adiabático del aire (Engineeringtoolbox, 2023),  $P = 100 \text{ kPa}$  como la presión atmosférica y  $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$  como la densidad del aire, obtenemos el valor:

$$v_0 = 341,68 \text{ m s}^{-1} \quad (8)$$

## 4. Discusión

### 4.1. Análisis gráfico

En la figura 2 observamos que las mediciones de frecuencia y la raíz cuadrada de las mediciones del área de las aberturas aparentan obedecer una relación lineal. En la figura 3 observamos dos posibles ajustes a un modelo lineal, uno en el cual la intercepción se ha suprimido, forzando el modelo a tener la intercepción en el origen, y otro en el que se permitió una intercepción. En esta última figura, se ha utilizado  $\sqrt{A}/(2\pi\sqrt{Vl})$  como variable dependiente, de tal modo que la pendiente corresponde al valor de la velocidad del sonido  $v_0$ .

A pesar de que, basándonos en la ecuación (5), no esperamos que exista una intercepción con el eje de las ordenadas, podemos ver que los datos se ajustan mejor a la curva del modelo con intercepción. A pesar de ello, podemos observar que el modelo con intercepción predice una velocidad del sonido de  $v_0 = 140,12 \text{ m s}^{-1}$ , que es vastamente diferente del valor teórico calculado (8) y a cualquier valor en la literatura.

### 4.2. Exactitud

En la tabla 3 observamos que los estadísticos asociados a cada modelo reflejan un ajuste lineal, como se puede inferir a partir de los valores de los coeficientes de determinación mayores a 0,90 y los  $p$ -valores menores a un nivel de significancia del 1 % en las tablas 2 y 1. Sin embargo, el mayor porcentaje en la variación de la frecuencia explicado debido a las áreas está dado por el modelo de intercepción (97 %), además de que tiene un error porcentual significativamente menor al otro.

Tabla 3. Porcentajes de la exactitud.

| Velocidad del sonido                                     | Reportado ( $343 \text{ m s}^{-1}$ ) | Teórico ( $341,68 \text{ m s}^{-1}$ ) |
|--|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Modelo sin intercepción<br>( $350,30 \text{ ms}^{-1}$ )  | 2,1 %                                | 2,5 %                                 |
| Modelo con intercepción<br>( $140,12 \text{ m s}^{-1}$ ) | 59 %                                 | 59 %                                  |

Nótese también que el error estándar asociado a la velocidad del sonido estimada es de  $350,30 \pm 11,50 \text{ m s}^{-1}$ . Si analizamos el error, tenemos lo siguiente:

$$350,3 \pm 11,5 - 343 \pm 0,5 = 7,3 \pm 12 \quad (9)$$

es decir, la diferencia es menor a la incertidumbre asociada con las cantidades, de modo tal que es despreciable, lo que nos señala que el modelo sin intercepción es más exacto y tiene mayor explicación de la variación de la frecuencia debido a las áreas.

## 5. Conclusiones

Con base en el análisis de los estadísticos y del error presentado en la discusión, sostenemos que la relación (3) se verifica en el presente experimento. El modelo usado, a pesar de ser visualmente contraintuitivo, está estadísticamente respaldado, además de presentar una exactitud y precisión apropiados en el campo de las ciencias exactas. Concluimos que el modelo de la resonancia de Helmholtz se puede aplicar aproximadamente al análisis de una ocarina con resultados satisfactorios, que se manifiestan en el valor obtenido de la velocidad del sonido.

## Referencias

- Allen (24 de dic. de 2012). *How ocarinas work (Page 1)*. URL: <https://web.archive.org/web/20130314100538/http://ocarinaforest.com/info/physics/how-ocarinas-work/>.
- Crowell, Benjamin (5 de abr. de 2013). *Simple Nature: An Introduction to Physics for Engineering and Physical Science Students*. Light y Matter.
- Engineeringtoolbox (31 de oct. de 2023). *Air - specific heat ratio*. URL: [https://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-ratio-d\\_602.html](https://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-ratio-d_602.html).
- Feynman, Richard P., Robert B. Leighton y Matthew Sands (29 de sep. de 2015). *The Feynman Lectures on Physics, Vol. I. The New Millennium Edition: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. Basic Books.
- Fishbane, Paul M., Stephen Gasiorowicz y Stephen T. Thornton (1 de ene. de 2005). *Physics for Scientists and Engineers, Extended Version*. Prentice Hall.
- Greene, Chad A., Theodore F. Argo IV y Preston S. Wilson (2009). «A Helmholtz resonator experiment for the Listen Up project». En: *Proceedings of meetings on acoustics*, pág. 025001. DOI: 10.1121/1.3112687. URL: <https://doi.org/10.1121/1.3112687>.
- Mechel, F.P. (25 de jun. de 2008). *Formulas of Acoustics*. Springer Science & Business Media.
- Montagu, Jeremy (2018). *Vessel flutes*. URL: <https://jeremymontagu.co.uk/VesselFlutes.html>.
- Okada, Hiroaki et al. (sep. de 2019). «Numerical Simulation of Aerodynamics Sound in an Ocarina Model». En: *PROCEEDINGS of International Symposium on Music Acoustics*.
- Resnick, Robert, David Halliday y Kenneth S. Krane (1 de ene. de 2002). *Physics, Volume 1*. John Wiley & Sons.
- resonance (23 de feb. de 2025). En: URL: <https://www.merriam-webster.com/dictionary/resonance>.
- Sakurai, J. J. y Jim Napolitano (17 de sep. de 2020). *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/9781108587280. URL: <https://doi.org/10.1017/9781108587280>.
- Strutt, John William (20 de jul. de 2009). *401. The Theory of the Helmholtz Resonator*. Cambridge University Press eBooks, págs. 365-375. DOI: 10.1017/cbo9780511704017.054. URL: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511704017.054>.
- Thomson, William y Marie Dahleh (1 de nov. de 2013). *Theory of Vibrations with Applications: Pearson New International Edition*. 5.<sup>a</sup> ed. Pearson.
- von Helmholtz, Hermann (1895). *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music : Helmholtz, Hermann von, 1821-1894 : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive*. URL: <https://archive.org/details/onsensationsof00helmrich/page/n17/mode/2up>.
- WilliWiper (26 de sep. de 2011). *Keine Macht den Dosen - Das GlasBlasSing Quintett*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=IAHGtzZY5Yg>.

## Apéndice

### Resultados de las mediciones

Tabla 4. Frecuencias medidas para cada configuración de orificios cubiertos

| Orificio cerrado | Área [cm <sup>2</sup> ] | f <sub>H</sub> [Hz] | Orificio cerrado | Área [cm <sup>2</sup> ] | f <sub>H</sub> [Hz] |
|------------------|-------------------------|---------------------|------------------|-------------------------|---------------------|
| A                | 1.398                   | 833.50              | ABC              | 0.635                   | 672.36              |
| B                | 1.664                   | 889.16              | ABD              | 0.751                   | 766.11              |
| C                | 2.035                   | 865.72              | ABO              | 0.277                   | 670.90              |
| D                | 2.151                   | 911.13              | ACD              | 1.122                   | 706.05              |
| O                | 1.677                   | 846.68              | ACO              | 0.648                   | 625.49              |
| AB               | 0.831                   | 795.41              | ADO              | 0.764                   | 707.52              |
| AC               | 1.202                   | 764.65              | ADO              | 0.764                   | 707.52              |
| AD               | 1.318                   | 804.20              | BCO              | 0.914                   | 720.70              |
| AO               | 0.844                   | 728.03              | BDO              | 1.030                   | 783.69              |
| BC               | 1.468                   | 820.31              | CDO              | 1.401                   | 745.61              |
| BD               | 1.584                   | 855.47              | ABCO             | 0.008                   | 571.29              |
| CD               | 1.955                   | 824.71              | ABDO             | 0.196                   | 650.39              |
| CO               | 1.481                   | 769.04              | ACDO             | 0.568                   | 684.08              |
| DO               | 1.597                   | 804.20              |                  |                         |                     |

### Código n Python para generar gráficas y obtener relación lineal (con intercepción) entre variables

```
# Grafica de frecuencia vs area
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
import numpy as np
import math
import scipy
```

```

from statistics import linear_regression

frecuencia = []
area = []
sqrt_area = []
sqrt_area_mm = []
sqrt_area_escalada = []
volumen = 0.0001588
longitud = 0.0043

for line in open('practica3.txt', 'r'):
    lines = [i for i in line.split()]
    frecuencia.append(float(lines[0]))
    area.append(float(lines[1]))

for elemento in area:
    sqrt_area.append(math.sqrt(elemento))
    sqrt_area_mm.append(math.sqrt(math.sqrt(elemento)*10**3))
    sqrt_area_escalada.append(math.sqrt(elemento)/(2*math.pi*math.sqrt(volumen*longitud)))

# Se definen elementos de estilo para la grafica.
mpl.rcParams['axes.spines.left'] = False
mpl.rcParams['axes.spines.right'] = False
mpl.rcParams['axes.spines.top'] = False
mpl.rcParams['axes.spines.bottom'] = False
mpl.rcParams['lines.linewidth'] = 3
plt.rcParams['axes.facecolor'] = "#e8e8e8"
plt.rcParams['axes.axisbelow'] = True
plt.rcParams['axes.labelsize'] = 16
plt.rcParams['axes.titlesize'] = 18
plt.rcParams["font.family"] = "Times New Roman"
plt.rcParams['xtick.labelsize']=16
plt.rcParams['ytick.labelsize']=16

# Grafica de raiz cuadrada de area vs frecuencia
plt.figure(figsize=(6.5,5.6))
plt.grid(color = "white")
plt.title("Grafica de frecuencia en funcion de raiz cuadrada del rea ", y=1.02)
plt.xlabel(r'Ra z cuadrada del rea $\sqrt{A}$ [$10^{-3} \text{ m}^2$]')
plt.ylabel(r'Frecuencia [Hz]')
plt.scatter(sqrt_area_mm, frecuencia, marker = '^', s=12, color = "red", zorder=2)

plt.savefig('areavsfrecuencia', format='pdf', dpi=1200)
plt.show()

resultado1 = scipy.stats.linregress(sqrt_area_escalada, frecuencia)
print(resultado1)
slope, intercept = linear_regression(sqrt_area_escalada, frecuencia, proportional = "True")
print(slope, intercept)
arr_sqrt_area_escalada = np.array(sqrt_area_escalada, dtype='float32')
arr_frecuencia = np.array(frecuencia, dtype='float32')
arr_sqrt_area_escalada =
arr_sqrt_area_escalada[:, np.newaxis]
a,_,_,_ = np.linalg.lstsq(arr_sqrt_area_escalada, arr_frecuencia, 1)
print(a)

# Funcion te rica
pendiente = 352.29
def f1(area_escalada):
    return pendiente*area_escalada
funcion1 = np.vectorize(f1)
pendiente = 352.29
def f2(area_escalada):
    return resultado1.slope*area_escalada + resultado1.intercept
funcion2 = np.vectorize(f2)

# Grafica de raiz cuadrada de area escalada vs frecuencia y recta teorica
plt.figure(figsize=(8,7.2))
plt.grid(color = "white")
plt.title("Grafica de frecuencia en funcion de raiz cuadrada del rea escalada", y=1.02)
plt.xlabel(r'$\frac{\sqrt{A/V}}{2\pi}$ [m$]$')
plt.ylabel(r'Frecuencia [Hz]')
plt.scatter(sqrt_area_escalada, frecuencia, marker = '^', color = "red")
plt.plot(sqrt_area_escalada, funcion1(sqrt_area_escalada), color = "green", label=r"$y = 352.29x$")
plt.plot(sqrt_area_escalada, funcion2(sqrt_area_escalada), color = "blue", label = f"$y = \{round(resultado1.slope, 2)\}x + \{round(resultado1.intercept, 2)\}$")
plt.legend(prop={'size': 12})

```

```
plt.savefig('areaescaladasfrecuencia',
            format='pdf', dpi=1200)
plt.show()
```

## Código en R para el procesamiento de las mediciones y sus modelos lineales

```
library(stargazer)
data <- read.csv('Practica5-datos.csv')

#0, 938.6
decoder <- function(x) {
  xc = strsplit(x, split = "")
  control = AreaT
  for (letra in xc[[1]]){
    if (letra == "A") {
      control = control - AreaA
    } else if (letra == "B") {
      control = control - AreaB
    } else if (letra == "C") {
      control = control - AreaC
    } else if (letra == "D") {
      control = control - AreaD
    }
    else if (letra == "O") {
      control = control - AreaO
    }
  }
  return(control)
}

# areas en milimetros cuadrados

#Ai = (9.4e-3) * (5.9e-3)
AreaA = (pi/4)*(10.5e-3)**2
AreaB = (pi/4)*(5.7e-3)**2
AreaC = (pi/4)*(9e-3)**2
AreaD = (pi/4)*(3.5e-3)**2
AreaO = (pi/4)*(8.7e-3)**2
AreaT = AreaA + AreaB + AreaC + AreaD +
  AreaO # + Ai

AreaA = (pi/4)*(10.3e-3)**2
AreaB = (pi/4)*(5.5e-3)**2
AreaC = (pi/4)*(8.8e-3)**2
AreaD = (pi/4)*(3.2e-3)**2
AreaO = (pi/4)*(8.4e-3)**2
AreaT = AreaA + AreaB + AreaC + AreaD +
  AreaO # + Ai
```

```
rho = 1.20
P = 100e3
gamma = 1.401
air_v = sqrt(gamma * P / rho)

# L = 14.3e-3
l = 4.3e-3
#theta = 11.3 * (pi / 180)
#b = ((56.2e-3 )/ 2) - 1
#a = (106.9e-3 / 2) - 1
#V3 = pi * ( (4/3)* a * b ** 2 + (4 / 15)
#           * (a **3) * (tan(theta)) **2 )
#V2 = 2 * 23e-6
#V = (1.588 - 0.596)*10**-4
V = 1.588e-4

area <- c()
for (j in 1:length(data[,1])){
  area <- append(area,
                 decoder(data[j,1]))
}
data$area <- ( area) / ( V *l )
modelo <- lm(2*pi*Freq ~ sqrt(area) + 0,
             data)
summary(modelo)

modeloin <- lm(Freq ~ sqrt(area) , data)
summary(modeloin)

stargazer(modeloin, type = "latex", title
          = "Resultados de Modelo Lineal
          considerando una intercepcion",
          dep.var.labels = c("\sqrt{Area
                            / (Volumen \cdot espesor)}"),
          covariate.labels = c("2\cdot Frecuencia"),
          omit.stat = c("f", "ser"),
          align = TRUE, out = "modelo-lin-
          in.tex")

plot(sqrt(data$area), 2*pi*data$Freq)
abline(a=0, b=352.3)

plot(sqrt(data$area), 2*pi*data$Freq)
abline(modeloin)
write.csv(data,"practica-5.csv", row.names
          = FALSE)
```