



Conducción de Calor y Gradiente de Temperatura en dos Dimensiones

Producto Integrador de Aprendizaje

Benjamín Edgardo Gómez Medina, Edgar Ivan Hinojosa Saldaña.¹

Docente: Dr. Francisco Hernández Cabrera
24-11-2023—

1. Introducción y Marco Conceptual

Calor es la energía en tránsito debido a una diferencia de temperaturas, por lo siempre que exista una diferencia de temperaturas en un cuerpo o entre cuerpos, debe ocurrir una transferencia de calor, pero ¿qué es la conducción calorífica?, la conducción es el mecanismo de transferencia de calor en escala atómica a través de la materia por actividad molecular, por el choque de unas moléculas con otras, donde las partículas más energéticas le entregan energía a las menos energéticas, produciéndose un flujo de calor desde las temperaturas más altas a las más bajas. Los mejores conductores de calor son los metales. El aire es un mal conductor del calor. Los objetos malos conductores como el aire o plásticos se llaman aislantes.

La conducción de calor sólo ocurre si hay diferencias de temperatura entre dos partes del medio conductor, y el calor se transfiere mediante convección, radiación o conducción. Aunque estos tres procesos pueden tener lugar simultáneamente, puede ocurrir que uno de los mecanismos predomine sobre los otros dos. Por ejemplo, el calor se transmite a través de la pared de una casa fundamentalmente por conducción, el agua de una cacerola situada sobre un quemador de gas se calienta en gran medida por convección, y la Tierra recibe calor del Sol casi exclusivamente por radiación, en pocas palabras el calor se define como la energía cinética total de todos los átomos o moléculas de una sustancia. La temperatura es una medida de la energía cinética promedio de los átomos y moléculas individuales de una sustancia. Cuando se agrega calor a una sustancia, sus átomos o moléculas se mueven más rápido y su temperatura se eleva, o viceversa.

2. Análisis Teórico

Asumiendo un sólido en reposo, homogéneo y rígido tal que su única energía es la térmica. Sea $\rho = \rho(x)$

la densidad del cuerpo independiente del tiempo y la temperatura T . Sea e la energía interna por unidad de masa del sólido.

Ley de Calor

Sea V un volumen acotado abierto conexo y contenido en el interior de un sólido. La tasa de cambio de la energía térmica con respecto al tiempo en V

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e \, dx, \quad dx = dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

es igual al flujo neto de energía a través de la superficie de $\partial V = B$ más la razón de cambio en que el calor es generado en V

$$\int_V \rho \frac{\partial e}{\partial t} \, dx = - \int_B q \cdot n \, dS + \int_V f \, dx$$

donde q es el flujo de calor, n la normal del elemento de área dS de la superficie B , y f la razón a la que el calor es producido por unidad de volumen.

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss en la integral sobre B

$$\int_V (\rho e_t + \text{div } q - f) \, dx = 0.$$

Y en general se cumple para cualquier volumen arbitrario

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -\text{div } q + f \quad (1)$$

Para rango de temperaturas no muy altas $e = (T)$ depende linealmente de T

$$\frac{\partial e}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

donde c es el calor específico del material. La experiencia nos dice que el flujo de calor sucede de focos de temperaturas altas a bajos. Por tanto el flujo de calor en dirección n es $q \cdot n > 0$ si $\nabla T \cdot n < 0$ y viceversa, o en general (Ley de Fourier)

$$q = -k \nabla T \quad (3)$$

para $k > 0$.

¹Matrículas en orden correspondiente: 2076499, 2086053.

Colocando (3) y (2) en (1)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + F$$

donde $\alpha = k/c_p > 0$ y $F = f/c_p$, a es llamado difusividad térmica y k conductividad térmica.

Se asume en nuestro experimento que en el sólido no existen generaciones de calor ($F = 0$), y el alcance de estudio será en su estado estacionario, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, resultando

$$\nabla^2 T = 0$$

. Al ser el sólido una placa podemos despreciar su tercera dimensión

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

Donde a es la dimensión de la placa más corta y paralela a los tubos de refrigeración y calor, y b el largo. Consideramos un aislamiento adiabático de la placa con el medio, dando las condiciones de contorno de Neumann:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b,$$

Además de un par de condiciones de Dirichlet para establecer la temperatura en ambos flujos de cada lado de la placa:

$$T(x, 0) = f_0(x), \quad T(x, b) = f_b(x), \quad 0 < x < a.$$

Asumimos que estas fuentes son constantes así nuestra función es constante, esto es T_2 y T_1 respectivamente.

Por medio de separación de variables y las condiciones de Neumann se llega a un problema de Sturm-Liouville con la siguiente solución general R23 [2019]:

$$T(x, y) = a_0 + b_0 y + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cosh \frac{n\pi y}{a} + b_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \right] \quad (4)$$

Dadas las condiciones de frontera de Dirichlet se evalúan los respectivos coeficientes de Fourier.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{a} \int_0^a f_0(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx, \\ b_0 &= \frac{1}{ab} \int_0^a f_b(x) dx - \frac{a_0}{b}, \\ b_n &= \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_b(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx - a_n \coth \frac{n\pi b}{a}, \end{aligned} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde las $f_0(x) = T_2$ y $f_b(x) = T_1$ constantes. Los coeficientes de Fourier de una función constante son nulos excepto en los términos cero. Por lo cuál llegamos a la siguiente ecuación:

$$T(x, y) = \frac{T_2 - T_1}{b} y + T_1 \quad 0 < y < b \quad (5)$$

3. Hipótesis

Las temperaturas a lo largo de la placa de aluminio corresponden a la difusión térmica dada por la ecuación (5).

4. Consideraciones del Experimento

1. El sistema está envuelto en paredes adiabáticas
2. No hay fuentes de calor ni de energía internas, ni tampoco fuentes externas de convección además de los baños de temperatura constante
3. Material homogéneo y también el flujo de calor a través del mismo
4. El calor específico y la conductividad térmica son constantes
5. La temperatura del punto medido sobre el tubo de flujo de agua corresponde a la temperatura de los extremos de la barra
6. El sistema alcanza el estado estacionario y los extremos con las fuentes de temperatura son constantes.

5. Definición de Variables y Parámetros

Variable Independiente:

- Posición (x, y)

Variable Dependiente

- Temperatura (T)

Parámetros

- Temperatura T_1 y Temperatura T_2 de cada extremo de la placa
- Ancho y largo de la placa: 24 y 30 cm resp.
- Material de la placa: aluminio.

6. Montaje Experimental

En la práctica presente se utilizaron los siguientes materiales:

- Cuatro manitas
- Cuatro soportes universales
- Cobertura Adiabática de poliuretano
- Un calentador
- Un arduino uno
- Una placa de aluminio de 30cm de largo, y 24cm de ancho
- Una bomba de agua
- Dos tubos de cobre
- Cuatro mangueras
- Hielos
- Cinco termopares ds18b20
- Una protoboard
- Soldadura fría

6.1. Instalación

Para la debida ejecución del experimento se realizó la siguiente preparación:

- Se monta el arreglo de la placa de aluminio con las tuberías de cobre y se cubre la placa de cobertura adiabática de poliuretano.
- Las tuberías de cobre se cubren con una cobertura de material adiabático, posteriormente se conectan de cada extremo de las tuberías con cuatro manitas para que se pueda sostener con los soportes universales.
- Se conectan dos mangueras en los extremos de un lado al calentador para que pueda correr el vapor del agua en el sistema, así mismo se conectan otras dos mangueras en cada extremo del otro lado, y una de las mangueras a la bomba de agua.
- Se hizo un circuito electrónico, y por medio del arduino se pudo capturar la información de los termopares ds18b20 en la computadora.
- Se hizo un arreglo con un tubo de cristal largo al punto de presión de la tubería T para que diera un escape de presión dirigido, y evitar riesgos.

- Se tubo que hacer un arreglo con un pedazo de hielo seco montado, y encima el calentador para que la manguera estuviera en un ángulo adecuado, y no tuviera tanto problema en la acumulación de presión, y así reducir el agua caliente producida.
- Se colocó una pinza en el hielo seco para sostener un buen ángulo de inclinación en el punto de presión de la tubería tipo T.

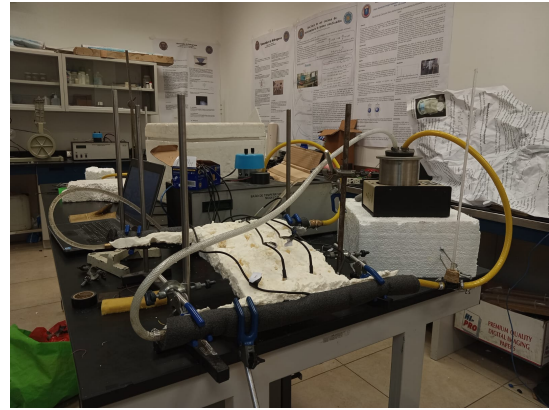


Imagen1: Montaje del experimento.

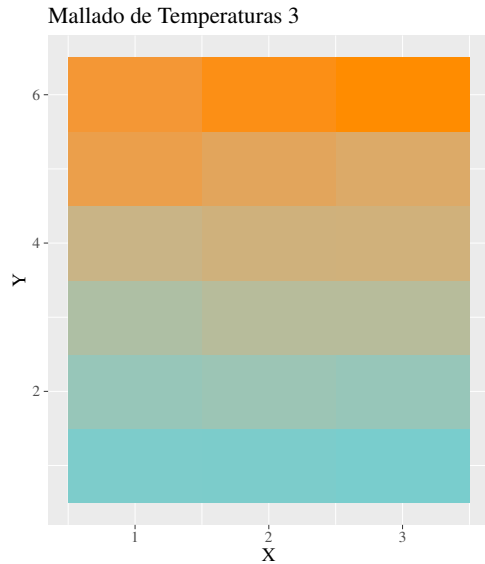
7. Procedimiento

El procedimiento seguido en la practica fue el siguiente:

1. Se calienta el agua hasta llegar a los 100° tentativamente, y de igual forma se enciende la bomba de agua con hielos hasta llegar a 0° tentativamente, y se espera a que llegue a equilibrio en la placa.
2. Se colocan tres de los termopares en tres de los orificios de la placa, y dos termopares se colocan pegados en la tubería de cobre de cada lado, y se espera un rato para que se obtengan los datos.
3. Posteriormente se cambian los tres termopares a los próximos orificios de la placa para la obtención de otros datos, y así sucesivamente hasta llegar a los últimos orificios del otro lado.

8. Mediciones

Se realizaron mediciones automatizadas gracias a los sensores y la captura de sus datos a través de una interfaz de desarrollo de sistemas embebidos en linux. Con ello se consiguió un juego de datos de cada serie de datos consistente de las temperaturas medidas en lo largo de la placa. Después de ello, se localizaron las temperaturas de un mismo punto en el mallado y se obtuvo su promedio, que son los datos que aparecen a continuación en el gráfico y en la tabla.



Gráfica1: Cada cuadro corresponde a un punto de medición en la placa, en la que su color denota la temperatura promedio de acuerdo a su escala de colores .

	1 (°C)	2 (°C)	3 (°C)
1	18.67 ± 0.05	18.53 ± 0.06	19.50 ± 0.03
2	22.09 ± 0.51	21.99 ± 0.68	22.07 ± 0.54
3	26.28 ± 0.97	29.14 ± 1.70	27.65 ± 1.58
4	33.28 ± 1.32	36.06 ± 1.81	35.11 ± 1.17
5	41.51 ± 2.13	42.43 ± 1.48	41.78 ± 1.79
6	55.62 ± 3.21	57.23 ± 3.43	60.52 ± 3.68

Cuadro1: Promedio de temperatura correspondiente a cada punto de medición de acuerdo a su renglón y columna.

Se realizaron tres juegos de mediciones como el mostrado, sin embargo por cuestiones de tiempo se mostrará exclusivamente el último que fue en el cuál se procuro un mayor tiempo para que guardara el equilibrio.

Los valores extremales promedios correspondientes a la parte baja y superior de la placa como se aprecia en la gráfica son los siguientes:

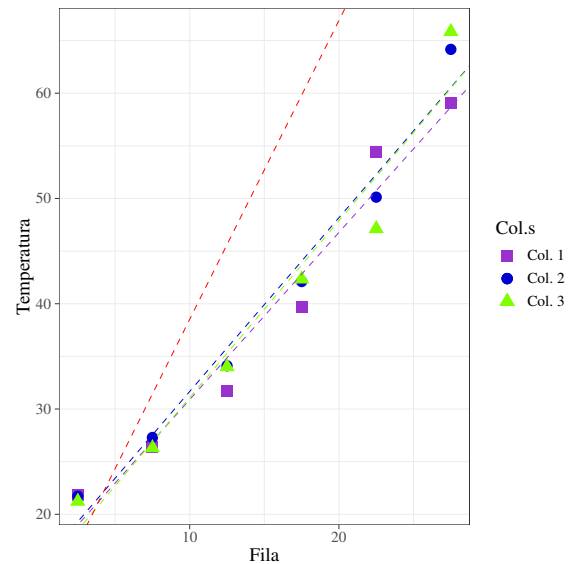
$$T_1 = 10,15^{\circ}\text{C}$$

$$T_2 = 95,28^{\circ}\text{C}$$

9. Análisis Experimental

9.1. Precisión

Observamos que existía sobre los datos una fuerte tendencia lineal, que sin embargo no pasaba por los puntos medidos en ambos extremos de la placa.



Gráfica2: Comparación de los distintos puntos según su columna, se interpolaron obteniendo una R^2 igual a 96%, 97% y 95% respectivamente. Todos con un p-valor menor a 0.05 tanto en la intersección como en la pendiente.

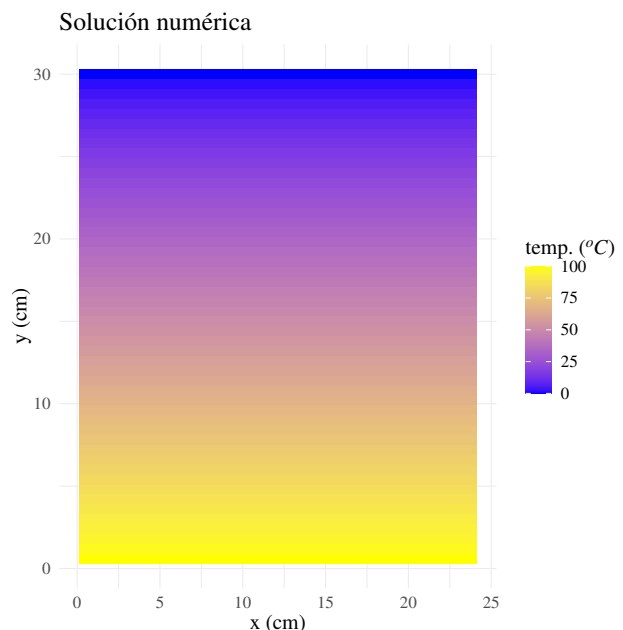
El nivel de significancia nos permite concluir que a lo largo de las columnas al rededor del 96% de las variaciones de la temperatura se ven explicadas por el modelo lineal de la regresión (intersección: $14,82 \pm 0,47$, pendiente: $1,63 \pm 0,04$).

Se destaca que bajo esta aproximación los valores de T_1 y T_2 son distintos a los medidos.

$$T'_1 = 14,82 \pm 0,47$$

$$T'_2 = 64 \pm 0,47$$

Se realizó una resolución numérica de la ecuación con el método de diferencias finitas dados T_1 y T_2 y las condiciones de frontera ya dichas.



Gráfica3: Solución realizada en R, se deja el programa al final del documento. La fuente caliente esta debajo y la fuente fría encima.

9.2. Exactitud

Ahora deduciremos la matriz correspondiente al mallado ideal, del cual sacaremos una matriz con todas las diferencias de la reja para luego dividirla entre el valor teórico, sumaremos todos los elementos de ésta última y lo dividiremos por el número total de elementos.

	T	T	T
1	17.24	17.24	17.24
2	31.43	31.43	31.43
3	45.62	45.62	45.62
4	59.81	59.81	59.81
5	74.00	74.00	74.00
6	88.19	88.19	88.19

Cuadro2: Temperatura correspondiente a cada punto de medición de acuerdo a su renglón y columna por medio de la ecuación en base los medidos T_1 y T_2 . Las dimensiones de la placa no corresponden

De modo que el error porcentual vendría a ser de

$$e\% = 26,42\%$$

10. Conclusiones

La precisión del experimento no fue buena, sin embargo si que lo fue su exactitud. Primeramente no se cumplió la consideración de la temperatura constante del extremo de la placa del calentador dado que este el funcionamiento de este no lo era, calentaba el agua cuando percibía bajones en la temperatura de ella. Por tanto no era estacionaria. En general el otro lado también presentaba pequeñas variaciones y a largo plazo un decrecimiento. También cabe mencionar que hubieron fugas milimétricas de vapor en la soldadura del tubo, lo cual sesgo los datos a lo ancho de la placa. Se puede apreciar en los cálculos de las temperaturas extremas que guarda una gran diferencia con las medidas. Esto es puede llegar a ser porque realmente no

medimos directamente esos extremos, sino el tubo que era de un material distinto y no estaba en contacto con el por la soldadura fría. Por tanto esta última pudo haber interferido en la medición al ser un aislante térmico.

Como recomendaciones es que se trabaje con un equipo enteramente homogéneo, esto es del mismo material tanto en tubos como en placa y que se pueda pegar no con siliconas aislantes. La segunda es siempre procurar un escape óptimo de presión porque esta puede causar porosidad causando fugas que sesgan las mediciones.

Referencias

(2019). MATHEMATICA TUTORIAL, Part 2.6: Mixed Problems for Laplace equation. [Online; accessed 24. Nov. 2023].

Guenther, R. B. and Lee, J. W. (1996). *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*. Courier Corporation.

Halliday, D. and Resnick, R. (2004). *Physics*. Wiley Custom Services.

Lyons, L. (2003). *A practical guide to data analysis for Physical Science Students*. Cambridge University Press.

Merrin, J. (2017). *Introduction to error analysis: The science of measurements, uncertainties, and data analysis*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Zemansky and Dittman (1997). *Heat and thermodynamics 7th Ed*. The McGraw-Hill Companies.

Zemansky, M. W., Dittman, R., and Sanchez, S. A. (1990). *Calor Y termodinamica Ed. 6*. McGraw-Hill.

```
1
2 library(ggplot2)
3 library(reshape2)
4 # T_1=10.14567 , T_2=95.282
5 # Dimensiones del dominio
6 width <- 24 # Ancho del rectángulo
7 height <- 30 # Altura del rectángulo
8 # Tamaño de la malla
9 nx <- 80 # Número de puntos en el eje x
10 ny <- 100 # Número de puntos en el eje y
11 # Creación de la malla
12 x <- seq(0, width, length.out = nx)
13 y <- seq(0, height, length.out = ny)
14 grid <- meshgrid(x, y)
15 X <- grid$x
16 Y <- grid$y
17 # Inicialización de la solución inicial
18 # Condición de Dirichlet en los bordes superior e inferior
```

```

19 # Condición de Neumann en los bordes izquierdo y derecho (derivadas normales cero)
20 f <- matrix(0, nrow = ny, ncol = nx)
21 f[1, ] <- T_1 # Condición de Dirichlet en la parte inferior
22 f[ny, ] <- T_2 # Condición de Dirichlet en la parte superior
23 f[, 1] <- f[, 2] # Condición de Neumann en el borde izquierdo
24 f[, nx] <- f[, nx - 1] # Condición de Neumann en el borde derecho
25 # Iteraciones para resolver la ecuación de Laplace
26 max_iter <- 10000
27 tolerance <- 1e-5
28 for (iteration in 1:max_iter) {
29   f_old <- f
30   # Actualización de los valores en el interior usando el método de diferencias
    finitas
31   for (i in 2:(ny - 1)) {
32     for (j in 2:(nx - 1)) {
33       f[i, j] <- 0.25 * (f_old[i+1, j] + f_old[i-1, j] + f_old[i, j+1] + f_old[i, j
        -1])
34     }
35   }
36   # Rectificación de las condiciones de frontera
37   f[1, ] <- T_1 # Condición de Dirichlet en la parte inferior
38   f[ny, ] <- T_2 # Condición de Dirichlet en la parte superior
39   f[, 1] <- f[, 2] # Condición de Neumann en el borde izquierdo
40   f[, nx] <- f[, nx - 1] # Condición de Neumann en el borde derecho
41   # Verificar la convergencia
42   if (max(abs(f - f_old)) < tolerance) {
43     print(paste("Convergencia alcanzada en la iteración", iteration))
44     break
45   }
46 }
47
48 tikz('mediciones3/Sol-num.tex', standAlone=TRUE, width = 5, height = 5)
49 ggplot(df, aes(x = Var2*24/100, y = Var1*30/50, fill = value)) +
50   geom_tile() +
51   scale_fill_gradient(low = "blue", high = "yellow", name="temp. ( $^{\circ}\text{C}$ )") +
52   labs(x = "x (cm)", y = "y (cm)", title = "Solución numérica") +
53   theme_minimal()
54 dev.off()

```