Klinik Aljabar Analisis
ASCI HIMATIKA ITS 2018–2019

Kumpulan Soal ONMIPA–PT Tingkat Wilayah

Tahun 2006–2024

DAFTAR ISI

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2006

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Supremum dan infimum dari himpunan $A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{8n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$, dengan $\mathbb{N}$ = himpunan semua bilangan asli adalah ...

2. Berapa banyak akar dari persamaan $ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, untuk $a > 0$?

3. Misalkan f terdiferensial secara kontinu di $x = a$ dan $f(a) \neq 0$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{f(a + 1/n)}{f(a)}\right]^n$$

4. Untuk nilai p berapa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^p$ konvergen?

5. Misalkan fungsi-fungsi f dan g kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b). Jika $f'(x) = g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$ dan $g(a) = a$, $g(b) = b$. tentukan nilai $|f(b) - f(a)|$.

6. Misalkan $p_n(x)$ polinom MacLaurin untuk fungsi $f(x) = e^x$, berapakah derajat polinom (n) terkecil sehingga $|e^x - p_n(x)| \leq 10^{-2}$ untuk $1 \leq x \leq 1$

7. Hitung $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\cos x}\, dx = \ldots$

8. Diberikan fungsi f terdiferensial pada $\mathbb{R}$. Jika $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{a}{x} + b\right)$ ada dan tidak nol.
$$\lim_{x\to 0}\left[f\left(\frac{a}{x} + b\right) - \frac{a}{x} f'\left(\frac{a}{x} + b\right)\right] = \alpha.$$
Berapakah nilai $\lim_{x\to\infty} f(x)$

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan barisan (x_n) dengan $0 < a = x_1 < x_2 = b$ dan

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

tinjau barisan (r_n) dengan $r_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

   (a) Tunjukkan bahwa $1 < r_n < 2$ untuk $n = 2, 3, 4, \ldots$

   (b) Selidiki kekonvergenan (r_n)

2. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas. *Variansi total* dari f pada $[a, b]$, ditulis $V_f[a, b]$, didefinisikan sebagai

$$V_f[a, b] := \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

dengan nilai supremum diambil atas semua partisi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ dari $[a, b]$. Disini $V_f[a, b]$ dapat bernilai ∞

   (a) Hitung/taksir $V_f[0, 1]$ untuk $f(x) := x \cos(1/x)$.

   (b) Hitung/taksir $V_f[0, 1]$ untuk $f(x) := x^2 \cos(1/x)$.

3. Diberikan barisan fungsi real (f_n), $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dengan

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   (a) Buktikan (f_n) tidak konvergen seragam pada $[0, 2]$

   (b) Tentukan $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, $x \in [0, 2]$

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Hitung $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=\ldots$

2. Tentukan banyaknya bilangan bulat 7 digit yang disusun dari angka 2,2,3,4,4,4,0.

3. Tentukan solusi dari $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$ dengan $a_1 = 5$.

4. Berapa banyakanya permutasi dari huruf-huruf ABCDEFG yang memuat string BA dan GF.

5. Saudara memilih 7 bilangan (tanpa pengembalian) dari himpunan

$$\{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}.$$

   Berapa peluang bahwa jumlah dari 7 bilangan yang terpilih genap?

6. Berapa banyak solusi bilangan bulat dari persamaan $x_1+x_2+x_3 = 20$ dengan $2 < x_1 < 6, 6 < x_2 < 10$ dan $0 < x_3 < 5$.

7. Kartu bridge dengan 52 kartu dibagi kepada 4 orang pemain sehingga masing-masing pemain menerima 13 kartu. Banyaknya cara yang dapat dilakukan ...

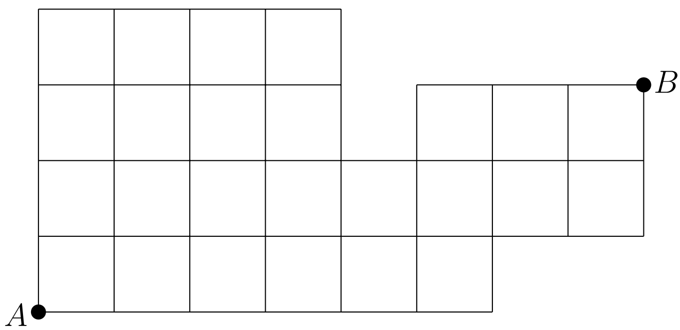
8. Berikan koefisien dari x^{80} dalam ekspansi $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{100}$.

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, \ldots, 9$ adalah himpunan 9 titik berbeda dengan koordinat bulat pada ruang xyz. Tunjukkan bahwa titik tengah dari garis yang menghubungkan sedikitnya satu pasang dari titik-titik tersebut berkoordinat bulat.

2. Ada n orang akan naik becak (menjadi pemumpang) r buah becak berlainan, dengan $n > r > 1$. dan setiap becak berisi satu atau dua penumpang. Ada berapa banyak cara memasangkan n orang ke r becak tersebut sehingga setiap becak berisi satu atau dua penumpang?

3. Tentukan banyak rute terpendek dari kota A ke kota B.



ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui polinom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ dengan bilangan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ menyatakan bilangan real. Jika $z_0 = 3 - 4i$ merupakan akar-akar dari polinom, maka salah satu akar lain yang pasti muncul adalah ...

2. Faktor polinom $z^4 + 1$ menjadi polinom dengan derajat lebih rendah, tetapi mempunyai koefisien real.

3. Tentukan jari-jari konvergensi

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$$

4. Tentukan banyaknya akar persamaan $z^4 - 5z + 1 = 0$ di $1 \leq |z| \leq 2$.

5. Diketahui fungsi analitik

$$f(z) = \frac{2(z-2)}{z(z-4)}$$

dan tuliskan sebagai $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$. Nilai a_{100} adalah ...

6. Diketahui $z_1 = -1 + i$ dan $z_2 = 3 + 4i$. Bilangan kompleks w berada pada penggalan garis yang mengghubungkan z_1 dan z_2. Jika $|w| = \sqrt{27}$, tentukan w.

7. Hitung nilai dari $\int_C e^{(2/z)}\, dz$ bila C adalah lingkaran satuan.

8. Diketahui C lingkaran berpusat di O. Tentukan nilai dari $\int_C \frac{1}{1-z}\, dz$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui f fungsi *entire* (analitik di seluruh daerah $\mathbb{C}$) dan diketahui pula ada bilangan bulat k, bilangan positif A dan B sehingga

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

   Buktikan bahwa f merupakan polinom dengan derajat paling tinggi adalah k.

2. Tunjukkan bahwa:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

   sekurang-kurangnya mempunyai satu nilai nol.

3. Buktikan $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \ldots$ untuk $|z| < 1$.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui $G = \{1, -1\}$ grup dengan operasi kali dan $G^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in G\}$ grup dengan operasi untuk setiap $x_1 = (a_1, b_1, c_1)$,$x_2 = (a_2, b_2, c_2) \in G$ berlaku

$$x_1 * x_2 = (a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2).$$

   Banyaknya subgrup dari G^3 dengan berorder 4 adalah ...

2. Penulisan permutasi $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ sebagai dari permutasi siklik yang saling disjoin adalah ...

3. Perhatikan grup dihedral dengan order 8: $D_4 = \{e, y, y^2, y^3, x, xy, xy^2, xy^3\}$, $x^2 = y^4 = e$ dan $xy = y^{-1}x$. Grup D_4 ini mempunyai subgrup berorder 4 yang tidak siklik yaitu ...

4. Perhatikan ring kuosien $\mathbb{Z}_5[x]/I$ dengan I adalah ideal yang dibangun oleh $h = x^3 + 3x + 2$. Unsur $(x + 2)/I$ di $\mathbb{Z}_5/I$ mempunyai balikan dengan balikannya adalah ...

5. Contoh ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{18}$ adalah ...

6. Perhatikan ring polinom $\mathbb{Z}_3[x]$ dan jika $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ notasi $\langle f \rangle$ menyatakan ideal yang dibangun oleh f. Bila $c \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + cx^2 + 1\rangle$ membentuk *field* adalah ...

7. Polinom $x^4 + 1$ di ring $\mathbb{Z}_5[x]$ dapat difaktorkan atas polinom tak tereduksi yaitu. . .

8. Jika F adalah *field* dengan order 81 maka karakteristik F adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu himpunan tak kosong dan $*$ suatu operasi biner pada G yang bersifat asosiatif dan untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a^2 * b = b = b * a^2$. Buktikan bahwa G adalah grup komutatif. catatan : $a^2 = a * a$

2. Misalkan R suatu ring dengan karakteristik n(hingga). Untuk setiap $a \in R$ notasi
$$G(a) = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$$
menyatakan subgrup siklik dari R terhadap operasi tambah yang dibangun oleh a.

   (a) Buktikan bahwa jika R *integral domain* maka untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku subgrup $G(a)$ dan $G(b)$ isomorfik.

   (b) Apakah jika pada pernyataan a, di atas syarat R *integral domain* kita hilangkan. Pernyataan "untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku subgrup $G(a)$ dan $G(b)$ isomorfik" masih berlaku? Jelaskan!

3. Dari R ring dan himpunan tak kosong $J \subset R$ dibentuk himpunan
$$N(J) = \{r \in R \mid rx = 0. \quad \forall x \in J\}$$

   (a) Tunjukkan $N(J)$ tidak kosong!

   (b) Apakah $N(J)$ merupakan ideal? Jelaskan!

   (c) jika $J \subset J' \subset R$ apa yang dapat saudara simpulkan tentang hubungan $N(J)$ dan $N(J')$. Jelaskan!

ALJABAR LINIER

BAGIAN PERTAMA

1. Jika A matriks berukuran 1999×2006, maka nilai minimal rank$(A)+$ nullitas(A) adalah ...

2. Koordinat x^2 terhadap basis $\{x^2+x, x+1, x^2+1\}$ adalah P_2 adalah ...

3. Jika $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ adalah pemetaan linier $x \in \mathbb{C}$, maka $T(x)$ adalah $\ldots$

4. Sukubanyak karakteristik matriks $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ adalah ...

5. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $A^{2006} = \ldots$

6. Misalkan himpunan vektor $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ di $\mathbb{C}^n$ bebas linier. Agar himpunan $\{u_1+\alpha u_2, u_2+\alpha u_3, u_3+\alpha u_4, u_4+\alpha u_1\}$ bebas linier, skalar α adalah $\ldots$

7. Misalkan $X = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ dan P adalah proyeksi ortogonal pada X. Matriks representasi P terhadap basis baku di ruang Euklid $\mathbb{R}^3$ adalah $\ldots$

8. Misalkan a bilangan real sehingga matriks $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ memiliki tiga nilai karakteristik real $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, maka a harus terletak di dalam selang $\ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan x_1, x_2 dan x_3 bilangan-bilangan real $x_1 < x_2 < x_3$. Pemetaan $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ didefinisikan dengan aturan

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{bmatrix}$$

   untuk setiap $p(x) \in P_2$.

   (a) Tunjukkan bahwa T merupakan pemetaan linier!

   (b) Periksa bahwa T bijektif

2. Misalkan A matriks berukuran 2×2 yang memenuhi $tr(A^2) = [tr(A)]^2$

   (a) Tentukan $\det(A)$

   (b) Jika A tidak dapat didiagonalkan, tentukan $tr(A)$

3. Misalkan λ adalah nilai karakteristik matriks P yang memenuhi $P^t = P^2$. Tentukan semua λ yang mungkin.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2007

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Diberikan p adalah bilangan prima dan $A = \left\{ -\frac{m}{n} - p\frac{n}{m} \right\}$. Tentukan $\sup(A)$.

2. Diberikan barisan (y_n) dengan $y_1 = 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{4}(y_n^2 + y_n^3) - 1$. Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3. Diberikan barisan (x_n) dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$. untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$. Didefinisikan barisan $y_n = \frac{1}{1+x_n}$, jumlah $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ dan hasil kali $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} y_k$ untuk n suku pertama dari y_n. Tentukan $S_n + P_n$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Diberikan $\theta_n = \arctan n$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} (\theta_{n+1} - \theta_n) = \ldots$

5. Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

6. Berikan contoh fungsi f yang tidak memenuhi persyaratan: jika $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kontinu, maka terdapat konstanta C dan $\varepsilon > 0$ sehingga

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\varepsilon}.$$

7. Diberikan fungsi $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ terdiferensial di setiap $x \in (0, 1)$ dan memenuhi persamaan $f(x) = f'(x) + \int_0^1 f(x)\,dx$ untuk setiap $x \in (0, 1)$. Jika terdapat $a, b \in (0, 1)$ dengan $f(a) = f(b) = \frac{a+b}{2}$ maka $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ldots$

8. Misalkan f fungsi konveks pada $[0, 2\pi]$ dengan $f^n(x) \leq M$. Tentukan nilai a dan b sehingga

$$a \leq \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \leq bM.$$

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dengan

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$$

Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = g(c)$.

2. Misalkan f terbatas $a \leq x \leq b$ dan untuk setiap pasangan bilangan x_1, x_2 dengan $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ berlaku

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

buktikan f kontinu pada $a \leq x \leq b$.

3. Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan terdiferensialkan secara kontinu, dan $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Tunjukkan bahwa $\displaystyle\int_b^a [f'(x)]^2\, dx \geq m^2(b - a)$ dan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $f(x) = f(a) + m(x - a)$.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Pada gerobak seorang penjual martabak manis tertulis, "menyediakan 1001 kombinasi taburan". Jika t adalah banyaknya jenis taburan yang penjual tersebut sediakan, tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk t.

2. Dari ke-26 abjad, berapa banyak yang dapat dituliskan tanpa mengangkat pensil dan tanpa mengulangi goresan yang telah dibuat?

   A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

3. Dari 10^8 graph pohon berlabel yang didefinsikan pada 10 titik, berapa banyak yang derajat setiap titiknya adalah 3 dan 1.

4. $\sum_{j \leq k \leq i} (-1)^k \binom{i}{k}\binom{k}{j} = \ldots$

5. Banyaknya solusi bilangan bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 < 16$, dengan $x_i \geq i$ untuk $i = 1, 2, 3$ adalah ...

6. Tentukan formula rekursif untuk c_n yang menyatakan banyakanya himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ yang tidak memuat dua bilangan yang berurutan.

7. Sepotong kawat berukuran 1 meter dipotong secara acak menjadi 3 bagian. Berapa peluang ketiga bagian ini membentuk segitiga?

8. Banyaknya pemetaan $f : \{1, 2, \ldots, 2007\} \to \{2006, 2007\}$ sehingga $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$ ganjil adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan sebelas bilangan bulat berbeda. Buktikan bahwa dua di antara bilangan-bilangan tersebut memiliki selisih yang merupakan kelipatan 10.

2. Diketahui bahwa mahasiswa A menyukai mata kuliah : Aljabar linier, Kombinatorika, dan Statistika; mahasiswa B menyukai mata kuliah: Aljabar linier, Analisis kompleks, Kombinatorika, dan Statistika; mahasiswa C menyukai mata kuliah: Aljabar linier, Analisis kompleks, Analisis Real, dan Struktur aljabar; mahasiswa D menyukai mata kuliah: Analisis kompleks, Kombinatorika ,dan Statisika; mahasiswa E menyukai mata kuliah: Aljabar linier, Analisis kompleks, dan Statistika; mahasiswa F menyukai mata kuliah: Aljabar linier, Analisis kompleks, dan Kombinatorika.

   Periksa apakah mungkin untuk membuat korespondensi 1-1 antara keenam mahasiswa dengan keenam mata kuliah sehingga setiap mahasiswa berpasangan dengan sebuah mata kuliah yang disukainya.

3. Kotak-kotak pada sebuah papan catur berukuran $n \times n$ diwarnai hitam dan putih sedemikian sehingga setiap kotak hitam bertetangga dengan sejumlah ganjil kotak hitam lainnya. Jika p menyatakan banyaknya, buktikan bahwa p ganjil jika dan hanya jika n ganjil.

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui bilangan kompleks $|a| < 1$. Didefinisikan pemetaan $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Jika $|z| = 1$, hitung $|\varphi_a(z)|$.

2. Diketahui fungsi f analitik di domain yang memuat cakram satuan $\{z : |z| \leq 1\}$ dan $a \in D^0$ dengan $f(a) = a$. Didefinisikan fungsi g yang analitik di domain yang memuat cakram satuan dengan sifat $g(0) = 0$ dan $|g(z)| = |f(z)|$ jika $|z| = 1$.

3. Diketahui C adalah kurva di kuadran pertama dengan $|z| = 2$ untuk setiap $z \in C$ dari $z = 2$ sampai dengan $z = 2i$. Jika $\left|\int_C \dfrac{dz}{z^2-1}\right| \leq ML$, tentukan nilai M sekecil mungkin dan L (nyatakan panjang kurva).

4. Hasil pemetaan lingkaran $L : |z-1| = 1$ oleh $w = \dfrac{i}{z+2i}$.

5. Diketahui fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik atau holomorfik. Kemudian untuk $a \in \mathbb{C}$ didefinisikan

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ A & z = a \end{cases}$$

tentukan nilai A agar f kontinu pada $\mathbb{C}$

6. Diketahui γ adalah lingkaran berpusat di 0 dan berjari-jari 2. Tentukan nilai dari $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2(z^2+1)}$.

7. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari modulus $z^2 - z$ pada cakram $|z| \leq 1$.

8. Diketahui $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 5$ dan $q(z) = z^2(1 + q(z))$ dengan $q(0) \neq -1$. Tentukan nilai residu dari $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ di $z = 0$.

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entire (analitik pada seluruh bidang kompleks). Jika u terbatas dan v satu-satu, maka tunjukkan bahwa $\forall z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ berlaku $f(z_1) - f(z_2) \notin \mathbb{C}$.

2. Misalkan f fungsi entire dan $|f'(z)| \neq |z|$ untuk semua z. Perlihatkan bahwa $f(z) = az + bz^2$ dengan $|b| \neq 1$.

3. Diketahui fungsi f pada cakram satuan D dan $|f(z)| < 1$ pada D. Jika a dan b adalah titik tetap di D $f(a) = a$ dan $f(b) = b$, gunakan lemma Scwartz untuk membuktikan $f(z) = z$.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{Z}_2\}$ grup terhadap operasi tambah. Banyaknya automorfisma di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

2. Misalkan *field* F berorder k dan $G = GL_n(F)$. Jika $Z(G)$ adalah senter dari G, yaitu $Z(G) = \{g \in G|xg = gx, \forall x \in G\}$, maka banyaknya unsur di $Z(G)$ adalah ...

3. Unsur di S_4 yang berorder 12 adalah ...

4. Ideal di ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$ yang dibangun oleh $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Jika D adalah suatu integral domain dengan sifat untuk setiap $x \in D$ berlaku $x^2 = x$, maka banyaknya unsur di D adalah ...

6. Diketahui $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ daerah Euclid bulat Gauss dengan pemetaan $d : \mathbb{Z} - \{0\} \to \{1,2,3,\dots\}$ dan $d(a+bi) = a^2 + b^2$ untuk semua $a+bi \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Faktorisasi atas unsur prima dari $100 \in \mathbb{Z}[i]$

7. Ring $\mathbb{Z}_{15}$ bukan *unique factorisation domain*. Sebagai contoh, ada dua faktorisasi atas prima yang berbeda dari polinom $x^2 - 3x + 2$ di ring $\mathbb{Z}_{15}[x]$, yaitu $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ dan $x^2 - 3x + 2 = \dots$

8. Jika *field* F hingga maka $F - \{0\}$ membentuk grup siklik terhadap operasi kali di F. Pembangun dari $F - \{0\}$ disebut elemen primitif dari F. Contoh elemen primitif dari *field* $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$adalah $\dots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu grup dan $K \subseteq G$ subgrup dari G dengan indeks K di G yaitu $[G : K] = 23$

   (a) Tentukan semua subgrup dari G yang mengandung K.

   (b) Jika G grup komutatif dan orde dari K yaitu $|K| = 5$ tunjukkan bahwa G grup siklik.

2. Misalkan ring R komutatif dan untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ didefinisikan

$$ann(a) = \{x \in R \mid ax = 0\}$$

   (a) Untuk setiap $a \in R$ buktikan bahwa $ann(a)$ ideal dari R

   (b) Jika $a, r, ar \neq 0$ dan $ann(a)$ ideal prima tunjukkan $ann(ar)$ juga ideal prima. catatan : ideal $I \subset R$ disebut ideal prima jika untuk setiap $xy \in I$ berlaku $x \in I$ atau $y \in I$

3. Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan $\alpha \neq 0$ dan terdapat bilangan bulat positif n sehingga $\alpha^n \in \mathbb{Q}$. Misalkan pula $g(x)$ polinomial monik berderajat terkecil di $\mathbb{Q}[x]$ sehingga $g(\alpha) = 0$

   (a) Tunjukkan bahwa terdapat $h(x) \in \mathbb{Q}$ sehingga $x^n - \alpha^n = h(x)g(x)$.

   (b) Jika $deg(g(x)) = m$ tunjukkan bahwa $g(0) = \pm a^m$.

ALJABAR LINIER

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan B basis bagi ruang vektor V atas F. Misalkan $T : V \to V$ linier dan memenuhi $[T(x)] = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$. Matriks penyajian (representasi) T terhadap basis B adalah $[T]_B = \dots$

2. Misalkan $X = \{(1, a, a), (a, 1, a), (a, a, 1)\} \subseteq \mathbb{C}^3$. Syarat perlu dan cukup agar X bergantung linier adalah $a \in \dots$

3. Misalkan V ruang vektor atas F dan $f : V \to F$. Nilai terbesar $rank(f)$ yang mungkin adalah ...

4. Pemetaan linier $T : P_2 \to P_3$ didefinisikan oleh $(T(f))(t) = t\dfrac{df(t)}{dt}, \forall f \in P_2$. Suku banyak karakteristik T adalah $p(x) = \dots$

5. Diberikan matriks $A(x) = \begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ 4 & x+3 \end{bmatrix}$. Nilai terkecil $\det(A(x))$ adalah ...

6. Matriks $\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ b & a & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ adalah matriks ortogonal jika dan hanya jika $(a, b) = \dots$

7. Misalkan K dan L dua subruang dari ruang vektor V atas F. Jika $K \neq L$ dan $\dim(K) = \dim(L) = 5$, maka dimensi subruang $K + L$ paling sedikit adalah ...

8. Banyak matriks bilangan bulat $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang memenuhi $A^3 = I$ dan $b + c = 0$.

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $A \in M_n(F)$ memenuhi $A^4 = 0$. Tunjukkan bahwa $I + A$ memiliki balikan dan berikan $(I + A)^{-1}$.

2. Misalkan $A \in M_2(F)$ pemetaan $T_A : M_2(F) \to M_2(F)$ didefinisikan dengan $T_A(X) = AX - XA, \forall X \in M_2(F)$

   (a) Tunjukkan bahwa T_A merupakan pemetaan linier.

   (b) Tunjukkan bahwa $null(T_A) \geq 2$.

3. Misalkan V ruang vektor berdimensi hingga atas F dan $\mathcal{L}(V, F)$ adalah himpunan semua pemetaan linier dari V ke F. Jika K subring dari V, didefinisikan

$$K^0 = \{f \in \mathcal{L}(V, F) | f(x) = 0, \forall x \in K\}$$

   Buktikan bahwa $(K \cap L)^0 = K^0 + L^0$, untuk setiap subruang K, L dari V.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2008

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Infimum dari himpunan $A = \left\{3^{2x} + 3^{1/2x} : x > 0\right\}$ adalah $\ldots$

2. Misalkan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mempunyai limit L di titik $x = 0$. Jika $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $g(x) = f(ax^2 + x), \forall x \in \mathbb{R}$ dan $a > 0$, maka $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ldots$

3. Benar atau salah: Jika $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, maka $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$. Jika salah, berikan contohnya.

4. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang didefinisikan dengan $(a_1) = \dfrac{1}{2}$, dan nilai $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Apakah (a_n) konvergen? Jika ya, berapa nilai limitnya?

5. Diketahui bahwa p buah bilangan bulat non-negatif $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$ bersifat $a_i \leq a_{i-1}, i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Nilai dari $\lim\limits_{n \to \infty} \left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n\right)$ adalah $\ldots$

6. Misalkan H adalah himpunan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dimana f mempunyai turunan yang kontinu, $f(0) = 0$, dan $f(1) = 1$. Untuk sembarang $f \in H$, didefinisikan l_f sebagai panjang grafik dari f pada interval $[0, 1]$. Nilai dari $\sup\{l_f \mid f \in H\}$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan barisan (x_n) yang konvergen ke x, dan selanjutnya didefinisikan barisan (y_n) dengan

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

   Tunjukkan bahwa barisan y_n juga konvergen ke x.

2. Diketahui fungsi $f,\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Untuk sebarang barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x berakibat barisan $\{f_n(x_n)\}$ konvergen ke $f(x)$. Tunjukkan bahwa fungsi f kontinu.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya bilangan terdiri dari dua digit sehingga hasil kali kedua digitnya genap adalah ...

2. Banyaknya bilangan bulat positif yang menjadi faktor 510510 adalah ...

3. $\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+r-1}{r} = \ldots$

4. Persamaan eksplisit untuk $g_n = \sqrt{g_{n-1} + g_{n-2}}$ dengan $g_1 = 1$ dan $g_2 = 3$ adalah ...

5. Pada bidang Cartesius kita ingin bergerak dari titik $(0, 0)$ menuju titik $(9, 7)$ dengan aturan: kita hanya boleh bergerak ke kanan atau ke atas. Cacah rute terpendek untuk bergerak dari titik $(0, 0)$ ke $(9, 7)$, bila rute dari titik $(3, 3)$ ke $(3, 4)$ tidak boleh digunakan adalah ...

6. Diketahui $A = \{0, 1\}$. Cacah string dengan panjang n di A^n yang tidak memuat 01 adalah ...

7. Pada suatu kantong terdapat masing-masing 50 bola berwarna merah, kuning, dan hijau. Jika setiap menit Anda mengambil suatu bola dari kantong, pada menit ke $\ldots$ dijamin anda mendapatkan 12 bola dengan warna yang sama.

8. Banyaknya graph sederhana (tidak saling isomorfik) dengan cacat verteks $n, (n \geq 2)$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Perlihatkan bahwa bila $n+1$ bilangan bulat dipilih dari himpunan $\{1, 2, \ldots, mn\}$ untuk suatu bilangan bulat $m \geq 2$, maka terdapat dua bilangan bulat yang selisihnya tidak lebih dari $m-1$.

2. Tunjukkan banyaknya cara menghubungkan $2n$ titik pada lingkaran berpasangan oleh n tali busur yang tidak saling berpotongan adalah $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots = a$ pada $|z| < 1$, dan $a \in \mathbb{C}$. Hasil dari
$$\frac{1}{z+1}\Big(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots\Big) = \dots$$

2. Misalkan z terletak pada lingkaran $|z| = 2$. Estimasi nilai
$$\left|\frac{z}{z^3 - z^2 - 2z + 2}\right|$$
adalah ...

3. Akar pangkat 3 dari
$$\left(\frac{i - \sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right)^2$$
adalah ...

4. Pada $\mathbb{C} : |z| \leq 3$. $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{z}{(z^2-1)(z+2)^3}\, dz = \dots$

5. Jika C sepenggal garis yang menghubungkan titik $2\sqrt{2}$ dan titik $2i\sqrt{2}$, maka estimasi nilai $\displaystyle\left|\int_C \frac{z^2}{z^2+2}\, dz\right| = \dots$

6. Prapeta dari garis $x + y - 1 = 0$ oleh transformasi linier $T(z) = 2iz + 2 - i$ adalah ...

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x)\dots\cos\Big(2^{2008}x\Big)\, dx = \dots$

8. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} e^{\sin\frac{1}{z}}\, dz = \dots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $h(z)$ fungsi harmonik bernilai kompleks dan $zh(z)$ juga harmonik. Tunjukkan $h(z)$ analitik.

2. Misalkan f analitik f' kontinu, dan $|f(z) - 1| < 1$ pada suatu daerah D. Tunjukkan bahwa $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-1}\, dz = 0$. Untuk setiap kurva tertutup C yang berada dalam D.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya polinom berderajat dua yang berbeda dalam $\mathbb{Z}_2[x]$ adalah ...

2. Misalkan $G = A(S)$. grup yang memuat semua permutasi dari $\{x_1, x_2, x_3\}$ dan $H = \{\sigma \in G \mid x_1\sigma = x_1\}$. Banyaknya koset kanan dari H di G adalah...

3. Banyaknya pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2008}$ adalah ...

4. Suatu contoh pasangan grup yang tak komutatif G dan $N \trianglelefteq G$ yang memenuhi G/N grup komutatif adalah (G, N) adalah ...

5. Contoh gelanggang R dimana hukum pembatalan tidak berlaku yaitu terdapat $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ sehingga $b \neq c$, tetapi $ab = ac$ adalah ...

6. Diberikan grup $G = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ terhadap operasi biner $*$ yang didefinisikan $(a, b)*(c, d) = (ac, b+d)$ untuk setiap $(a, b), (c, d) \in G$. Banyaknya unsur yang berorder 2 di G adalah ...

7. Bilangan $n \geq 2$ yang mengakibatkan $\mathbb{Z}_n$ grup terhadap operasi $*$ dengan $\overline{a} * \overline{b} = \overline{ab} + \overline{a} + \overline{b}$ untuk setiap $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ adalah ...

8. Semua ideal dari $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Q}$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G grup komutatif. Jika terdapat $a, b \in G, a \neq b$ sehingga $o(a) = o(b) = 2$. Tunjukkan bahwa $o(G)$ merupakan kelipatan 4. Apakah hal ini tetap berlaku apabila G bukan grup komutatif.

2. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Misalkan $\psi_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan $\psi_{ab}(x) = ax + b$. Misalkan $G = \{\psi_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ dan $N = \{\psi_{1b} \in G\}$. Tunjukkan bahwa G/N isomorfik dengan $\mathbb{R} - \{0\}$ (grup semua bilangan real tak nol terhadap operasi perkalian).

ALJABAR LINIER

BAGIAN PERTAMA

1. Pemetaan linier $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ didefinisikan melalui $T(\alpha, \beta) = (3\alpha - \beta, \alpha + 3\beta)$, untuk setiap $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Terhadap basis $\mathbb{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ bagi $\mathbb{R}^2$, matriks penyajian (representasi) T adalah ...

2. Matriks tak singular $X \in M_n(F)$ dikatakan *ortogonal* jika ke-n baris X membentuk sebuah himpunan ortonormal. Jika A ortogonal, maka haruslah $\det(A) = \ldots$

3. Untuk matriks $X = [x_{ij}] \in M_n(F)$, didefinisikan $\mathrm{tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$. Jika $A, B \in M_n(F)$, maka $\mathrm{tr}(AB - BA) = \ldots$

4. Jika $E \in M_n(F)$ memenuhi $E^2 = E$, balikan (invers) dari matriks $I + E$ adalah ...

5. Misalkan U, V, W tiga ruang vektor atas lapangan F, dengan $\dim(U) = 2008$ dan $\dim(V) = 8002$. Misalkan $T : V \to W$ dan $S : W \to U$ pemetaan-pemetaan linier yang memenuhi T satu-satu, S pada dan $\mathrm{Peta}(T) = \ker(S)$, maka $\dim(W) = \ldots$

6. Agar matriks $\begin{pmatrix} 1 & c \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ mempunyai nilai karakteristik(eigen) real dan tidak dapat didiagonalkan, maka haruslah nilai $c = \ldots$

7. Nilai terbesar multiplisitas geometri dari sembarang nilai karakteristik real $\begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ adalah ...

8. Banyaknya matriks bilangan bulat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ yang memenuhi $A^2 + A = 2I$ dan $\det(A) = 4$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan V ruang vektor atas F berdimensi $2m-1$ untuk suatu bilangan asli $m \geq 2$. Jika M dan N dua subruang dari V dengan $\dim(M) = \dim(N) = m$, tunjukkan bahwa $M \cap N \neq \{0\}$.

2. Misalkan $A = [a_{ij}] \in M_4(\mathbb{R})$ memenuhi $a_{ij} > 0$ jika $j \equiv i + 1 \mod 4$ dan $a_{ij} = 0$ jika $j \not\equiv i + 1 \mod 4$.

   (a) Tunjukkan bahwa semua komponen $(I + A)^3$ positif.

   (b) Apakah ada matriks A yang memenuhi semua syarat di atas sehingga $(I + A)^3$ singular?

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2009

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Nilai k yang merupakan bilangan bulat terkecil yang memenuhi ketaksamaan $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n < k$, untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ adalah ...

2. Diberikan barisan bilangan real $\langle x_n \rangle$, dengan $x_n \geq 0$ untuk setiap n. jika $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n x_n$ ada, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen ke ...

3. Suatu barisan bilangan real $\langle a_n \rangle$ didefinisikan dengan $a_0 > 0, a_1 > 0$, dan $a_{n+2} = 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Apakah barisan $\langle a_n \rangle$ konvergen? Jika iya, berapakah nilai limitnya?

4. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x+y) = f(x)f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Jika f kontinu di $x = 0$ dan terdapat bilangan real a dengan $g(a) = 0$, maka nilai $g(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ adalah ...

5. Contoh fungsi bernilai real f dan g diskontinu di c, tetapi fg kontinu di c adalah ...

6. Jika fungsi bernilai real f kontinu pada $[a, b]$ dengan $\displaystyle\int_a^b f\,dx = 0$, syarat yang harus dipenuhi agar $f(x) = 0$ untuk semua $x \in [a, b]$ adalah ...

7. Misalkan interval $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Fungsi-fungsi f dan g terdefinisi pada I. Turunan kedelapan dari f dan g, yaitu $f^{(8)}$ dan $g^{(8)}$, ada dan kontinu pada I. jika $f^{(k)}(c) = 0$ dan $g^{(k)}(c) = 0$, untuk $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$, tetapi $g^{(8)}(c) \neq 0$, maka $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ adalah ...

8. Diketahui fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu. Untuk sembarang himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$, $\overline{S}$ menyatakan *closure* dari S, yaitu irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat S. Jika $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$, maka $\overline{S} = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan real. jika $|f(x)| \leqslant |sinx|$ untuk semua x, buktikan bahwa
$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

2. Misalkan fungsi f terdiferensial pada $[a, b]$, $f'(x) \neq 0$ untuk semua $x \in (a, b)$ dan $f(a) = f(b) = 0$. Buktikan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga
$$|f'(c)| \geq \frac{1}{K} \int_a^b f,$$
untuk bilangan positif K.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya himpunan bagian dari $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ yang memuat ketiga elemen a, b, dan f adalah $\ldots$

2. Pada setiap titik sudut segitiga ABC diletakkan sebuah titik. Kemudian pada sisi AB diletakkan 4 buah titik, pada sisi BC diletakkan 5 buah titik dan pada sisi AC diletakkan 7 titik, banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dari titik-titik tersebut adalah ...

3. Untuk bilangan bulat $n \geq 1, \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = \ldots$

4. Banyaknya solusi bulat dari persamaan $a + b + c + d = 20$ dengan $a \geq 3$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, dan $d \geq 5$ adalah ...

5. Solusi dari relasi rekurensi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ dengan $a_0 = 1$ adalah ...

6. Bilangan bulat positif n terbesar agar 2^n membagi koefisien dari y^{10} pada ekspansi $(7y + 5)^{100}$ adalah ...

7. Pada suatu pesta akan dibuat satu rangkaian hiasan buah yang terdiri dari buah salak, apel, dan jeruk. Paling sedikit berapa buah yang harus disediakan untuk menjamin pada rangkaian buah tersebut terdaapat 8 salak atau 6 apel, atau 9 jeruk?

8. Banyak cara memilih 4 bilangan berbeda dari himpunan

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

sehingga dari 4 bilangan terpilih tidak terdapat 2 bilangan berurutan adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Dari 400 bilangan bulat $1, 2, 3, \ldots, 400$ dipilih 201 bilangan. Buktikan bahwa di antara 201 bilangan bulat terpilih terdapat 2 bilangan sehingga satu bilangan tersebut akan membagi bilangan yang lain.

2. Diberikan barisan $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ yang terdiri dari n buah 1 dan n buah -1 dengan jumlah parsialnya memenuhi sifat

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

   Perlihatkan bahwa banyaknya barisan yang demikian adalah $\dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

ANALISIS KOMPLEKS

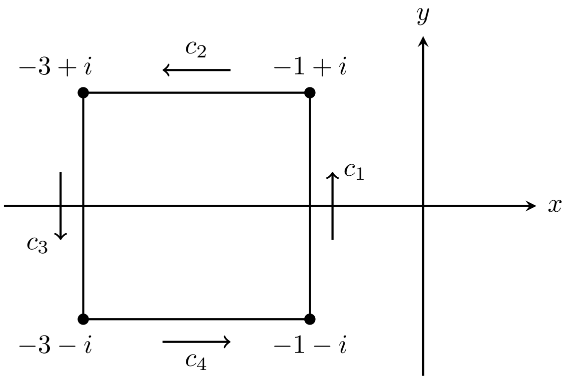
BAGIAN PERTAMA

1. Tuliskan bilangan kompleks $2009^i - i^{2009}$ dalam bentuk $a + bi$ dengan a, b bilangan real.

2. Tentukan fungsi linier entire (*entire linier function*) yang membawa **segitiga** dengan titik sudut 0,1 dan i menjadi **segitiga** sebangun dengan titik sudut $0, 2$, dan $i + 1$.

3. Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilagan kompleks z yang memenuhi $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, maka bilagan real terkecil A yang memenuhi $|z - 2i| \leq A$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ adalah ...

4. Hitung nilai $\int_C \overline{z}\, dz$ dengan C adalah lengkungan yang ada pada gambar berikut.



5. Hitung nilai $\oint_{|z|=2} \frac{z+2}{z^3 - 3z^2}\, dz$ dengan arah lengkungan sesuai dengan arah gerak jarum jam.

6. Hitung nilai $\int_{|z|=2} \frac{z+2}{z^2 - z}\, dz = \ldots$

7. Hitunglah nilai $\oint_C z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$ dengan C adalah lengkungan $|z| = 3$ dengan arah jarum jam.

8. Tentukan daerah konvergensi deret $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{2^n z^n}\right)$.

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $f(z)$ fungsi analitik yang terdefinisi pada himpunan buka yang memebuat cakram satuan $\{z \mid |z| \leq 1\}$. Misalkan pula $u(x, y) = Re(f(z))$ yaitu bagian real dari nilai fungsi f di titik (x, y). Buktikan bahwa
$$\int_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = 0$$
dengan C adalah lingkaran satuan.

2. Diketahui deret $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mempunyai jari-jari konvergensi R, dan bilangan kompleks z_0. Tentukan jari-jari konvergensi deret
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + z_0^n)\, c_n z^n.$$

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Diberikan 2 bilangan bulat $a = 2210$ dan $b = 1131$. Pembagi persekutuan terbesar d untuk a dan b dinyatakan sebagai $ax + by$ untuk suatu bilangan bulat x dan y adalah ...

2. Diberikan $n_1\mathbb{Z}, n_2\mathbb{Z}, \ldots, n_k\mathbb{Z}$ ideal-ideal dalam ring $\mathbb{Z}$. Kernel pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}n_1 \times \mathbb{Z}n_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}n_k$ yang didefinisikan dengan $r \mapsto (r(\mod n_1), r(\mod n_2), \cdots, r(\mod n_k))$ adalah ...

3. Diberikan F lapangan, $f(x)$ adalah polinomial berderajat n dalam $F[x]$ yang irredusibel dan α adalah suatu akar polinomial $f(x)$. Ideal yang dibangun oleh $f(x)$ dinotasikan sebagai $\langle f(x) \rangle$. Jika x dalam lapangan $F[x]/\langle f(x) \rangle$ diganti dengan α, maka $F[x]/\langle f(x) \rangle$ dapat dinyatakan sebagai $F[\alpha]$, yaitu

$$F[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in F\}$$

   Jika F_2 adalah lapangan dengan 2 elemen dan $f(x) = 1+x+x^2$ maka elemen-elemen $F[x]/\langle f(x) \rangle$ adalah ...

4. Banyaknya elemen idempoten dalam ring $\mathbb{Z}_{210}$ adalah ...

5. Diberikan n suatu bilangan bulat positif. Didefinisikan $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan subgrup $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan, maka $R/2009\mathbb{R}$ adalah ...

6. Misalkan $G = \{e, \theta, a, b, c, \theta a, \theta b, \theta c\}$ suatu grup dengan $a^2 = b^2 = c^2 = \theta$. $\theta^2 = e$, $ab = \theta ba = c$, $bc = \theta cb = a, ca, \theta ac = b$. Senter dari G adalah ...

7. Jika F_1 dan F_2 adalah lapangan, maka banyaknya ideal dari $F_1 \times F_2$ adalah ...

8. Misalkan f adalah homomorfisma dari suatu grup siklis yang berorder 8 pada suatu grup siklik yang berorder 4. Ker f adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan X suatu himpunan tak kosong, K lapangan dan $K[X]$ ruang vektor semua fungsi pada X yang bernilai-K. Adapun $S(x)$ menyatakan himpunan semua fungsi bijektif dari X ke X. Jika G sebarang grup aditif, maka aksi *(action)* grup G pada X adalah suatu homomorfisma grup dari G ke $S(x)$. Selanjutnya, didefinisikan pengaitan berikut

$$\psi : S(x) \to K[X], \sigma \mapsto \sigma *.$$

dengan $\sigma * (f)(x) := f(\sigma^{-1}x)$ untuk sebarang $f \in K[X]$

   (a) Buktikan ψ merupakan homomorfisma grup.

   (b) Jika S adalah aksi grup G pada X, maka buktikan ada homomorfisma grup berikut:

$$S* : G \to K[X], S * (g) = S(g).$$

2. Misalkan G sebarang grup. Jika $a, b \in G$ maka komutator a dan b yang dinotasikan dengan $[a, b]$ adalah $aba^{-1}b^{-1}$. Kemudian dibentuk himpunan $A = \{[a, b] \mid a, b \in G\}$. Jika $G' = \langle A \rangle$, maka buktikan G' adalah subgrup normal dan G/G' adalah grup komutatif.

ALJABAR LINIER

BAGIAN PERTAMA

1. Bentuk eselon tereduksi matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ adalah ...

2. Misal $C(\mathbb{R})$ menyatakan ruang fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Subruang $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid f" + f = 0\}$ memiliki dimensi...

3. Matriks persegi A memenuhi $A^3 = 0$, maka matriks $A + 2I$ tak singular dan $(A + 2I)^{-1} = \ldots$

4. Misalkan $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Didefinisikan pemetaan linier $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ melalui $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^3$. Bilangan positif terkecil yang memenuhi $\mathbb{R}^3 = Peta(T^k)$ adalah ...

5. Misalkan P_1 ruang polinom real berderajat paling tinggi 1 dengan hasil kali dalam $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Proses ortonormalisasi Gram-Schmidt pada himpunan $\{1, x\}$ di P_1 akan menghasilkan himpunan ortonormal ...

6. Misalkan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} v & v \end{bmatrix}$ dan $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = v\}$, maka $\min\{||x||_2 \mid x \in K\} = \ldots$

7. Agar matriks $\begin{bmatrix} w & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ memiliki dua nilai eigen yang sama, haruslah $w = \ldots$

8. Contoh matriks real simetris 2×2 yang semua komponennya taknol dan semua nilai karakteristiknya negatif adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan e vektor di $\mathbb{R}^n$ yang semua komponennya 1. Tentukan $\det(I - ey^T)$, untuk sembarang $y \in \mathbb{R}^n$. Tentukan semua y yang membuat $I - ey^T$ singular.

2. Misalkan A matriks kompleks berukuran $m \times n$ dan $b \in \mathbb{C}^m$. Buktikan bahwa persamaan $Ax = b$ memiliki solusi jika dan hanya jika $b{*}y = 0$, untuk semua $y \in \mathbb{C}^m$ yang memenuhi $A * y = 0$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2010

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan himpunan $A = \left\{ \cos\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Jika ada, $\sup A$ adalah ...

2. Berikan contoh fungsi bernilai real f yang diskontinu $\forall x \neq 0$ pada domainnya, tetapi f terdeferensialkan di $x = 0$.

3. Jika barisan bilangan real (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ maka untuk $n \to \infty$
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$
konvergen ke ...

4. Diberikan fungsi-fungsi bernilai real h dan f dimana f fungsi konveks. Syarat yang harus ditambahkan agar $f''(x)h(x) \geq 0, \forall x$ adalah ...

5. Nilai z yang memenuhi sehingga deret
$$1 + (z - z^2) + (z - z^2)^2 + (z - z^2)^3 + \ldots.$$
konvergen adalah ...

6. Misalkan turunan dari fungsi-fungsi f dan g kontinu dan $\lim\limits_{n\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to 0} g(x) = 0$. Jika $g(x) \neq 0$ dan $g'(x) \neq 0$ untuk setiap x dan $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, maka $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ adalah ...

7. Diketahui fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan $c \in (a, b)$. Didefinisikan fungsi $g : [c, b] \to \mathbb{R}$, dengan $g(x) = \displaystyle\int_c^x f^2(t)\,dt$, untuk setiap $x \in [c, b]$. Diberikan sebarang $\epsilon > 0$, nilai $\delta > 0$ yang dapat diambil agar setiap $x, y \in [c, b]\,, |x - y| < \delta$, berlaku $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ adalah ...

8. Nilai $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^{\frac{\pi}{2}}}{e^x} - e^x \right) dx$ adalah ...

9. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan $A \subseteq \mathbb{R}$. Hubungan $f(\overline{A})$ dan $\overline{f(A)}$ adalah . . . (Catatan: $\overline{A} = Cl(A)$)

10. Misalkan fungsi f terintegralkan dan kontinu seragam pada $\mathbb{R}$. Jika (f_n) barisan fungsi terintegralkan yang didefinisikan dengan $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$, maka $\int_0^1 f(x)\,dx = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan koefisien a, b dan c pada persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$ merupakan bilangan rasional dan $a \neq 0$. Buktikan jika $\alpha = r + s\sqrt{2}$ merupakan akar persamaan tersebut, dengan r dan s rasional, maka $\beta = r - s\sqrt{2}$ juga merupakan akar.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan A dan B adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Banyaknya pasangan berurut (A, B) dengan $A \cap B = \emptyset$ adalah ...

2. Banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang tidak habis dibagi 2, tidak habis dibagi 5, dan tidak habis dibagi 6 adalah ...

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} k^2 \binom{100}{k} = \ldots$

4. Banyaknya solusi bulat dari persamaan $a + b + c + d = 18$ dengan $1 \leq a \leq 5, -2 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 5, 3 \leq d \leq 9$, adalah ...

5. Solusi untuk formula rekursif $a_n = 4a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 4$ adalah

6. Banyaknya pemetaan pada (surjektif) yang dapat didefinisikan dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke himpunan $B = \{a, b, c\}$ adalah ...

7. Suatu kotak berisi 100 buah permen CHA CHA yang terdiri dari 30 permen hijau, 20 permen orange, 10 kuning, 10 biru, dan 20 cokelat. Bila anda diminta mengambil permen dari kotak tersebut, minimal banyaknya permen yang harus diambil untuk menjamin bahwa anda pasti mendapatkan 13 permen dengan warna yang sama adalah ...

8. Pada ruang xyz kita diizinkan untuk bergerak satu unit ke arah x positif, ke arah y positif, dan ke arah z positif. Banyak cara yang mungkin ditempuh bila kita bergerak dari $(0, 0, 0)$ ke $(4, 3, 5)$ adalah

9. Banyaknya pohon non-isomorfik yang memuat 7 titik adalah ...

10. Diberikan $k \geq 1$ adalah bilangan bulat dan n adalah bilangan asli. Bila jumlahan dilakukan atas semua bulat tak negatif dari $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, maka nilai dari

$$\sum \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Buktikan bahwa dalam sebarang barisan yang terdiri dari m bilangan bulat, terdapat satu atau beberapa suku-suku berturutan yang jumlahnya habis dibagi m.

2. Pada papan tertulis sembilan angka 0, sepuluh angka 1, dan sebelas angka 2. Kita diperbolehkan untuk menghapus dua angka berbeda dan menuliskan sebuah angka yang lainnya. Sebagai contoh, kita menghapus angka 1 dan 2, dan menuliskan angka 0. Tunjukkan bahwa dengan melakukan serangkaian langkah ini, pada papan akan tersisa angka-angka yang sama. Angka manakah yang tersisa?

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Tentukan nilai $5\,\mathrm{Re}(z) + 7\,\mathrm{Im}(z)$ jika $z = (3-3i)^{2010}$.

2. Tentukan Nilai
$$\oint \frac{1}{z^3(z+4)}dz$$
dengan C adalah lingkaran $|z+5| = 3$.

3. Dengan menggunakan $\oint_C \frac{dz}{z+1}$ dengan C lingkaran $|z| = 2$, hitung
$$\oint \frac{(x+1)dx - ydx}{(x+1)^2 + y^2}$$

4. Diketahui $f(z) = z^5 + 2z^3 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$, hitung
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
dengan C adalah lingkaran yang melingkupi semua akar $f(z)$

5. Misalkan $\{a_n\}$ barisan bilangan kompleks dengan $\sum |a_n| < \infty$ dan $\sum n|a_n| = \infty$. Tentukan jari-jari konvergensi deret $\sum a_n 2^n z^n$.

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan f fungsi analitik di $z_0 \in \Omega$ dengan $f'(z_0) \neq 0$. Jika C adalah lingkaran yang cukup kecil yang melingkari z_0, hitunglah

   (a) $\displaystyle\oint_C \frac{f(x) - f(z_0)}{(z - z_0)^2} dz$

   (b) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{f(x) - f(z_0)} dz$

2. Tentukan peta himpunan

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, 0 < arg(z) < \frac{\pi}{6} \right\}$$

   oleh pemetaan $f(z) = -iz^3$.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Kelipatan persekutuan terkecil dari 41327 dan 96577 adalah ...

2. Jika R adalah suatu lapangan dengan identitas perkalian $1 \neq 0$, maka ideal dari R yang tak nol adalah ...

3. Diberikan tabel Cayley untuk operasi $*$ pada himpunan $H = \{0, 1, 2, 3\}$ grup berikut ini

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	x	a	b
2	2	y	z	c
3	3	d	e	f

   Agar $(H, *)$ merupakan grup yang tidak isomorfik dengan $(\mathbb{Z}_4, +)$ maka $(a, b, c) = \ldots$

4. Diketahui $F = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$. Invers perkalian dari elemen $\overline{x+1} \in F$ adalah ...

5. Banyaknya homomorfisma grup dari $\mathbb{Z}_6$ ke $\mathbb{Z}_4$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan a, b bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa terdapat bilangan-bilangan bulat c dan d yang memenuhi $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 1$ jika dan hanya jika $a^2 - 2b^2 = 1$ atau $b^2 - 2a^2 = 1$.

2. Himpunan G adalah himpunan enam buah matriks real berukuran 3×3. Jika jumlah entri-entri pada setiap baris dan setiap kolom matriks tersebut adalah satu, carilah keenam matriks tersebut agar G membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.

ALJABAR LINIER

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a, b, c adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi
$$a(1,0,2) + b(0,2,1) + c(1,2,3) = (2,-2,3)$$
maka $a + b + 2c = \ldots$

2. Jika K dan L dua subruang dari $\mathbb{R}^{10}$ dan untuk $\dim K + \dim L = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $dim(K \cap L)$ adalah ...

3. Diberikan basis $S = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ bagi $\mathbb{R}^3$ dan vektor $\mathbf{u} = (1,2,1)$ di $\mathbb{R}^3$. Koordinat $\mathbf{u}$ terhadap basis S adalah ...

4. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Salah satu matriks real tak singular P yang membuat $P^{-1}AP$ matriks diagonal adalah ...

5. Matriks $A = [a_{ij}]$ matriks berukuran 2010×2010, dengan $a_{ij} = \begin{cases} i, & i+j = 2011 \\ 0, & i+j \neq 2011 \end{cases}$, maka det $A =$...

6. Misalkan $J : P_1 \to \mathbb{R}$ adalah tranformasi pengintegralan $J(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$, maka $Inti(J) =$...

7. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ dan $E = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sedangkan F dan G adalah matriks-matriks dasar(elementer) sehingga $A^{-1} = EFG$, maka $F - G = \ldots$

8. Untuk polinom-polinom $p = p(x)$ dan $q = q(x)$ di P_2, didefinisikan
$$\langle p, q\rangle = p(0)q(a) + p(\frac{1}{2})q(b) + p(1)q(c).$$

Untuk a, b, dan c tertentu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ merupakan sebuah hasil kali dalam pada P_2. Dengan norma yang berasal dari hasil kali dalam tersebut, $||4x^2 - 1|| \ldots$

9. Misalkan $T_1 : \mathbb{R}^{3\times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $T_2 : \mathbb{R}^{3\times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$ adalah transformasi linier dengan $T_2(A) = A^T$. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dan $(T_1 \circ T_2)(A) = T_1(A)$, maka $T_1(A) = \ldots$

10. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jika kolom kedua matriks A merupakan kelipatan k dari kolom keempat, maka salah satu pasangan karakteristik (pasangan eigen) untuk matriks A adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan D menyatakan operator differensial pada P_n. Untuk $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ tuliskan $D^k = D \circ D \circ D \circ \cdots \circ D$ yaitu komposisi k buah D. Definisikan operator $T = I + D + D^2 + \cdots + D^n$ pada P_n

   (a) Tunjukkan bahwa $X = \{1\} \cup \left\{x^k - kx^{k-1} \mid k = 1, 2, 3, \ldots, n\right\}$ adalah basis bagi P_n

   (b) Periksa apakah T pada. Berikan bukti untuk jawaban anda.

2. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n, A_i$ adalah matriks berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghilangkan baris dan kolom ke-i. Mislakan juga $p(t)$ dan $p_i(t)$ berturut-turut adalah polinom karakteristik matriks A dan A_i, tentukanlah hubungan linier antara $\dfrac{dp(t)}{dt}$ dan $p_i(t)$, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2011

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Infimum dari himpunan $\{n \in \mathbb{N} : (n!)\}$ adalah ...

2. Misalkan $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ adalah fungsi-fungsi injektif yang diferensiabel. Definisikanlah sebuah kombinasi fungsi dari f dan g sehingga dipenuhi sifat : jika $f(0) = g(1) = 0$, maka terdapat $c \in (0,1)$ sedemikian hingga $\left|\dfrac{(u(c))}{(v(c))}\right| = 2011$, untuk $u(x) = \ln f(x)$ dan $v(x) = \ln g(x), \forall(0,1)$.

3. Jika fungsi non-negatif f terintegralkan Riemann pada $[a,b]$ dan $0 \leq m \leq f(x) \leq M, x \in [a,b]$, tentukan nilai c dan d sehingga $c \leq (\int_a^b f^2) \leq d$.

4. Barisan (S_n) dengan $S_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(\dfrac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^n$ konvergen ke ...

5. Beri contoh suatu barisan dari fungsi-fungsi kontinu (f_n) yang terdefinisi pada $[0,1]$, sedemikian sehingga $0 \leq f_n(x) \leq 1$, dan $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, tetapi barisan tersebut tidak konvergen pada $[0,1]$.

6. Jika $\{a_n\}$ barisan dengan $a_{n+1} = a_n + \dfrac{(2-a)}{(2a+1)}$ untuk setiap n, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = \ldots$

7. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $f(x)$ rasional, untuk setiap $x \in [0,1]$, dan $f(0) = 0$, maka nilai $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \ldots$

8. Contoh fungsi f dan g yang kontinu seragam pada interval I, tetapi hasil kali keduanya tidak kontinu seragam pada I adalah ...

9. Diketahui $I \subseteq \mathbb{R}$ interval dari $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi. Jika c titik interior (*interior point*) I dan untuk setiap $x, y \in I$, dengan $x < y$, berlaku $f(x) \geq f(y)$, maka $\lim_{x\to c} f(x) = \ldots$

10. Jika $f''(x) + p(x)f(x) = 0$ dan $g''(x) + p(x)g(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka $W = f'g - fg' = \dots$ pada (a, b)

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui himpunan $E \subset \mathbb{R}$ tertutup dan fungsi $f : E \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam E, tunjukkan terdapat $c \in E$, dengan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$.

2. Jika fungsi $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ kontinu dan terbatas, tunjukkan bahwa fungsi $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x(1-x)f(x)$, kontinu seragam.

3. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial dan terdapat $c \in \mathbb{R}$ dengan $\lim_{x\to\infty} f'(x) = c$, Tunjukkan bahwa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Pada sebuah permutasi acak dari 26 huruf $\{a, b, c, d, \ldots, z\}$, peluang bahwa huruf b muncul tepat setelah huruf a adalah ...

2. Misalkan A adalah himpunan dengan n elemen dan B adalah himpunan dengan m elemen dengan $m \leq n$. Banyaknya pemetaan satu-satu (injektif) dari B ke A adalah ...

3. Solusi formula rekursif $v_n = v_{n-1} + n!n$ dengan $v_0 = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}^+$ adalah ...

4. Misalkan n adalah bilangan delapan digit yang disusun dari enam digit berbeda dengan digit pertama adalah digit 5. Bila n memuat tiga digit yang sama tetapi bukan digit 5, maka banyaknya cara menyusun n terdapat adalah ...

5. Koefisien dari x^{104} dalam ekspansi $\left(x - \dfrac{3}{5x}\right)^{210}$ adalah ...

6. Misalkan π adalah sebuah permutasi atas himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. Banyaknya permutasi π sehingga bilangan genap tidak dipetakan ke dirinya sendiri adalah ...

7. Untuk setiap $m, n, k \in \mathbb{N}$, nilai dari
$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \ldots.$$

8. Misalkan α adalah sebuah barisan $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ dengan nilai a_i adalah 1 atau 0 untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots, 20$. Misalkan $X = \{\alpha : a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 10\}$. Banyaknya barisan α sehingga $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \in \{0, 1, 2\}$ adalah ...

9. Misalkan $1 \leq n \leq 2011$ dengan n bilangan asli yang memuat digit 0. Banyaknya n yang demikian adalah ...

10. Jumlah semua bilangan desimal $0, xyz$ dimana x, y, dan z merupakan tiga digit yang berbeda adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 99999 sehingga jumlah digit-giti pada bilangan tersebut adalah 22.

2. Pada suatu acara seminar matematika dihadiri oleh n orang peserta seminar. Tunjukkan bahwa antara para peserta seminar tersebut, senantiasa terdapat dua orang peserta seminar yang mempunyai jumlah kenalan yang sama.

3. Sebuah graf dikatakan $k-$reguler bila setiap titik mempunyai derajat k. Sebuah *perfect matching* dari sebuah graf dengan n titik adalah himpunan $n/2$ sisi yang saling asing. Perlihatkan bahwa bila G adalah sebuah graf bipartit $k-$reguler, maka G mempunyai *perfect matching*.

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Tentukan jari-jari konvergensi deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n.$$

2. Tentukan luas daerah peta dari hasil pemetaan daerah

$$\{z=x+iy\in\mathbb{C}|-1<x\leq 2,-1\leq y\leq 3\}$$

oleh tranformasi linier $T(z)=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2-i$.

3. Berapakah nilai integral berikut

$$\int_{|z-a|=a}\frac{zdz}{z^4-1}\ ,\ a\in\mathbb{R}\ ,\ a>1.$$

4. Misalkan $f(z)$ fungsi analitik yang memenuhi $|f(z)|\leq 1+|z|^{3/2}$. Tuliskan semua fungsi analitik yang mungkin.

5. Misalkan $p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ dan $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$. Selanjutnya didefinisikan $f(z)=p(z)q(z)$. Hitung $f^{(n)}(0)$, yaitu nilai turunan ke n untuk fungsi f di titik nol. Nyatakan nilai tersebut dalam $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$.

BAGIAN KEDUA

1. Buktikan bahwa jika $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ dan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ maka $z_1.z_2, z_3$ adalah titik-titik ujung dari sebuah segitiga sama sisi yang berada di dalam lingkaran satuan.

2. Misalkan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ fungsi analitik dengan jari-jari konvergensi R dan di bidang kompleks hanya mempunyai satu pole order dua titik di z_0

   (a) Definisikan suatu fungsi analitik $F(z)$ yang analitik di seluruh bidang $\mathbb{C}$ yang diperoleh dari hasil perkalian $f(z)$ dengan suatu fungsi yang sederhana

   (b) Misalkan $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, berdasarkan hubungan yang diperoleh di soal (a), hitung nilai c_n dinyatakan dalam suku-suku dari barisan $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$

   (c) Hitung $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Jika G sebuah grup dengan subgrup H sedemikian sehingga $|G| < 45, |H| > 10$ dan $|G : H| > 3$, maka $|G| = \ldots$
2. Diberikan $\mathbb{Z}_2$ sistem bilangan bulat modulo 2 dan himpunan G yang unsur-unsurnya matriks 2×2 dengan komponen di $\mathbb{Z}_2$ dan determinan tak nol. Banyaknya subgrup berorde 2 adalah ...
3. Misalkan S_5 adalah grup simetri berorde 5. Orde dari (12)(345) di S_5 adalah ...
4. Misalkan R suatu ring dan F suatu lapangan. Jika $\theta : F \to R$ homomorfisma ring yang tidak nol maka $Inti(\theta) = \ldots$
5. Perhatikan ring polinom $\mathbb{Z}_3[x]$. Bilangan $c \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $x^3 + cx + 1$ tidak tereduksi di $\mathbb{R}_3[x]$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu grup dan N subgrup dari G. Buktikan perkalian $(Na) \cdot (Nb) = N(ab)$ pada himpunan koset kanan dari H terdefinisi dengan baik (*well defined*) jika dan hanya jika N subgrup normal dari G.

2. Misalkan R suatu gelanggang komutatif. Misalkan $r \in R$, didefinisikan $\rho_r : R \to R$, dimana $\rho_r(a) = ar$ untuk setiap $a \in R$. Buktikan R daerah integral jika dan hanya jika $Inti(\rho_r) = \{0\}$ untuk setiap $r \in R - \{0\}$.

ALJABAR LINIER

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui bahwa V adalah subruang dari P_3 yang dibangun oleh

$$\left\{x^3+x^2, x^3+x, x+1, x^2+1\right\},$$

maka dimensi V adalah ...

2. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks berukuran 2011×2011. Jika $a_{ij} = i + j$ untuk setiap i, j, maka $rank(A) = \ldots$

3. Bidang B di $\mathbb{R}^3$ melalui titik-titik $(1,0,0), (0,1,0)$, dan $(0,0,-1)$. Vektor satuan yang tegak lurus terhadap bidang B adalah ...

4. Diberikan vektor-vektor $x_1 = (1,1,0), x_2 = (0,1,1)$ di $\mathbb{R}^3$. Proses ortonormalisasi Gram-Schmidth pada x_1, x_2 menghasilkan vektor-vektor v_1, v_2, maka $v_2 = \ldots$

5. Misalkan A dan B matriks-matriks real berukuran berturut-turut 4×2 dan 2×4. Jika

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka $BA = \ldots$

6. Misalkan $T : P_2 \to \mathbb{R}$ adalah transformasi linier yang didefinisikan sebagai

$$T(P(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx, \quad \forall p(x) \in P_2,$$

maka dimensi $Inti(T)$ adalah ...

7. Mislkan $\mathbf{v} = (1,-2,4), \mathbf{w} = (-3,6,k) \in \mathbb{R}^3$. Jika tidak ada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ sehingga $\mathbf{w}$ adalah hasil proyeksi $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, maka himpunan semua nilai k yang mungkin adalah ...

8. Misalkan $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3$, untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, maka f <u>bukan</u> hasil kali dalam di $\mathbb{R}^3$ karena tidak memenuhi sifat ...

9. Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jika A mempunyai k kolom yang sama, maka dimensi ruang eigen A untuk nilai eigen $\lambda = 0$ paling sedikit adalah ...

10. Misalkan T operator linier pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ yang didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}, \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Jika A adalah vektor eigen T untuk nilai eigen -1, maka $\det(A) = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks berukuran 2011×2011 dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & for \;\; i \neq j \\ 2, & for \;\; i = j. \end{cases}$$

   Tentukan $\det(A)$.

2. Misalkan G operator linier pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ yang memetakan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ke $G(A) = A^T$, yaitu transpose dari A. Periksa apakah G dapat didiagonalkan. Jika ya, berikan diagonalisasi dari G.

3. Misalkan V adalah subruang dari $\mathbb{R}^{50}$ yang dibangun oleh vektor-vektor

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{50}$$

   adalah himpunan bilangan $\{1, 2, \ldots, 2500\}$, tentukan nilai terkecil dan nilai terbesar yang mungkin untuk $\dim(V)$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2012

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Diberikan $D \in \mathbb{R}$ dan fungsi $f, g : D \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) \leq g(x)$, untuk setiap $x \in D$. Beri contoh D, fungsi f dan g sehingga tidak benar bahwa $\sup\{f(x) : x \in D\} \leq \inf\{g(x) : x \in D\}$.

2. Diketahui $\{a_n\}$ barisan bilangan real dengan $a_1 > 0$ dan $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 + a_n}$ untuk setiap $n \geq 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ldots$

3. Diketahui fungsi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ terdiferensial hingga tingkat berapapun di $c \in (a, b)$. Nilai
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c + h) - 2f(c) + f(c - h)}{h^2}$$

4. Contoh fungsi f yang memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ adalah ...

5. Fungsi G, didefinisikan dengan $G(x) = \displaystyle\int_0^{sin\ x} \cos t\, dt$, maka $G'(x) = \ldots$

6. Osilasi fungsi f di titik x dinyatakan dengan $w_{f(x)}$. Diketahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $r > 0$. Diberikan himpunan $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid w_{f(x)} \geq r\right\}$, closure dari E adalah ...

7. Untuk nilai $n \to \infty$, jumlahan
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n^2 + k^2}}$$
konvergen ke ...

8. Bilangan real terkecil c sehingga untuk setiap $x > 0$ berlaku $\ln(1001 + 1011e^x) < c + x$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui $A \in \mathbb{R}, x \in A$ dan $y \in A^C$. Gunakan definisi himpunan terbuka untuk menunjukkan himpunan $E = \{t \in \mathbb{R} : y + t(x - y) \in A\}$ terbuka.

2. Diketahui fungsi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$ Jika $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$, Buktikan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke fungsi nol pada $[0,1]$.

3. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang turunan tingkat duanya ada dan $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa bangun yang dibentuk dari titik $(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3))$ dan $(4, f(4))$ bukan jajaran genjang

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Suatu perusahaan sepeda akan mengirim n buah sepeda ke dua dealer berbeda. Setiap dealer harus menerima paling seikit satu sepeda. Banyaknya cara penerimaan yang mungkin adalah ...

2. Sebuah kelas terdiri dari 35 orang mahasiswa. Banyaknya cara memberi nilai A, B, C, D, F sehingga paling sedikit ada satu nilai A dan paling sedikit ada satu nilai B adalah ...

3. Suatu barisan didefinisikan sebagai berikut

$$a_1 = 14 \text{ dan } a_k = 24 - 5a_{k-1}, \forall k > 1$$

   Untuk setiap bilangan bulat positif n, a_n dapat diekspresikan sebagai $a_n = pq^n + r$ dengan p, q, dan r adalah konstanta, nilai dari $p + q + r$ adalah ...

4. Sebuah barisan yang terdiri dari 12 suku dibentuk dari $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Bila setiap angka muncul paling sedikit 2 kali dan paling banyak empat kali, banyaknya barisan yang terbentuk adalah ...

5. Banyaknya solusi tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan $x^2 + y^2 = z^2 + 3$ adalah ...

6. Sejumlah n buah suku berbeda akan disusun di dalam k buah lemari berbeda. Banyaknya cara menyusun buku-buku tersebut adalah ...

7. Pada suatu kotak terdapat 17 pensil, yang terdiri dari 5 buah pensil HB, 5 buah pensil 2B, dan 7 buah pensil 1B. Banyaknya cara memilih 10 pensil sehingga paling sedikit terpilih 3 pensil 1B adalah ...

8. Untuk bilangan bulat positif h dan n nilai dari $\binom{h}{h} + \binom{h+1}{h} + \binom{h+2}{h} + \cdots + \binom{h+n}{h}$ adalah sama dengan nilai sebuah koefisien binomial ...

BAGIAN KEDUA

1. Buktikan bahwa jika λ adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat x dan y dengan $1 \leq x \leq n$ sedemikian sehingga $|x\lambda - y| < \frac{1}{n}$.

2. Untuk bilangan bulat tak negatif n dan k didefinisikan $A(n,k)$ sebagai koefisien dari x^k pada ekspansi $(1 + x + x^2 + x^3)^n$. Perlihatkan bahwa

$$A(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n}{k-2i}.$$

3. Untuk bilangan bulat positif m dan n perlihatkan bahwa

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{k-i} = \begin{cases} \binom{m}{k}, & \text{bila } m \geq k, \\ 0, & \text{bila } m < k. \end{cases}$$

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, manakah yang lebih besar antara

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \text{ dan } |arg\ z|.$$

2. Diberikan $w, z \in \mathbb{C}$ dengan $|w| \neq |z|$. Jika

$$Re\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{(|w|+|z|)(|w|-|z|)}{2012}$$

maka $|w - z| = \ldots$

3. Nilai

$$\int_C \frac{1}{1 - cos\ z}\, dz$$

dengan C lingkaran berpusat di O dan berjari-jari 2 adalah ...

4. Misalkan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ dengan $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n, c_0 = -1$, dan $c_1 = -1$, selanjutnya dengan menghitung nilai

$$z^2 f(z) + z f(z) - f(z)$$

maka bentuk ekspilit dari rumus $f(z)$ adalah ...

5. Diketahui f adalah fungsi analitik pada $\mathbb{C}$, dengan $f(z) \neq 0$ untuk $|z| = 1$, dan diketahui juga

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} = 2, \quad \int_{|z|=1} \frac{z f'(z)}{f(z)} = 0, \ dan \ \int_{|z|=1} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} = 1$$

Jika Z adalah himpunan semua akar dari f di dalam cakram satuan $|z| < 1$, maka $Z = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan
$$\frac{1}{z^2+z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
   (a) Tunjukkan bahwa barisan $\left\{\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\}$ konvergen.
   (b) Tentukan titik konvergensinya (atau nilai limitnya).

2. Misalkan f fungsi analitik di dalam dan pada lingkaran satuan dengan
$$|f(z)-z| < |z|$$
   Buktikan bahwa
$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 8.$$

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya unsur berorde 3 di grup Simetri S_3 adalah ...

2. Misalkan G adalah grup siklik berorde n yang dibangun oleh a, $G = \langle a \rangle$. Misalkan pula k suatu bilangan asli yang membagi n dan $H = \langle a^k \rangle$, maka $|G : H| = \ldots$

3. Diberikan $f(X) = X^2 - X + 1$ dan $g(X) = X^3 + 2X^2 + 2$ polinomial-polinomial di dalam $\mathbb{Z}_3(X)$. Faktor persekutuan terbesar dari $f(X)$ dan $g(X)$ adalah ...

4. Jika F lapangan dengan karakteristik p, maka untuk setiap $a, b \in F$, $(a + b)^p = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui H adalah subgroup normal di grup G dan G/H adalah grup komutatif. Jika K adalah subgroup di G yang memuat H, buktikan K merupakan subgroup normal.

2. Diberikan homomorfisma ring $\psi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_2[X]$ dengan definisi

$$\psi(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) := \overline{a_0} + \overline{a_1}X + \cdots + \overline{a_n}X^n,$$

dengan $\overline{a_i} = \pi(a_i)$, di mana π adalah proyeksi natural $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, $\pi(z) = z \mod 2$, untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$.

   (a) Tentukan Inti(ψ).

   (b) Buktikan Inti(ψ) adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[X]$.

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. Subruang $W = \{p(x) \in P_2 \mid p(1) = 0\}$ dari ruang vektor P_2 adalah subruang berdimensi ...

2. Misalkan $T : P_2 \to P_2$ adalah transformasi linier yang didefinisikan sebagai
$$T(p(x)) = x\frac{d}{dx}(p(x)),$$
untuk setiap $p(x) \in P_2$, maka matriks representasi (penyajian) T terhadap basis $\{1, x, x^2\}$ adalah ...

3. Misalkan $\mathbf{e}$ vektor di $\mathbb{R}^2$ yang semua komponennya 1. Jika $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ memberikan
$$I - \mathbf{e}\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
singular, maka $\operatorname{trace}(I - \mathbf{e}\mathbf{y}^T) = \ldots$

4. Misalkan $K = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ adalah subruang dari ruang Euklid $\mathbb{R}^3$, maka penulisan $(1, 0, 0)$ sebagai unsur $K \oplus K^{\perp}$ adalah ...

5. Pandang P_2 dengan hasil kali dalam $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Proses Gram-Schmidt pada $\{1, 1 - x\}$ menghasilkan ...

6. Jika $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks $\begin{bmatrix}3 & 2-a\\ a & -3\end{bmatrix}$, maka $a = \ldots$

7. Jika $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, maka $\sum_{k=0}^{2012} A^k = \ldots$

8. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tak singular dan untuk $i = 1, 2, \ldots, 6$, kolom ke-i matriks A adalah $\mathbf{a_i}$. Jika $B = \begin{bmatrix}\mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_4} & \mathbf{a_5} & \mathbf{a_6} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ dan $C = BA^{-1}$, banyaknya nilai eigen berbeda matriks C adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan A dan B dua unsur $\mathbb{R}^{n\times n}$ yang memenuhi $B-A+BA=2I$. Buktikan bahwa $AB=BA$.

2. Misalkan V adalah ruang vektor kompleks dan $T:V\to V$ linier. Misalkan m adalah bilangan asli. Jika $\text{Inti}(T^{m-1}) = \text{Inti}(T^m)$, buktikan bahwa $\text{Inti}(T^m) = \text{Inti}(T^{m+1})$.

3. Misalkan $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, $A\neq 0$, yang memenuhi $\mathbf{u}^TA\mathbf{u}=0$, untuk setiap $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$. Selidiki kebenaran pernyataan: terdapat vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ sehingga $A\mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{u}$, untuk setiap $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$.

   [**Catatan:** $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ menyatakan hasil kali silang antara $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{u}$.]

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2013

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Diberikan suatu barisan (a_n) dan (b_n), dengan $(a_n) = \log\left(n\sqrt{4n+1}\right)$ dan $b_n = \log((n+1)\sqrt{n})$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan barisan (c_n) dengan $c_n = a_n - b_n$, untuk setiap n, maka $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ldots$

2. Salah satu contoh himpunan $A \subseteq \mathbb{Z}$, dengan $\mathring{A} = \emptyset$ tetapi $\overline{A} = \mathbb{R}$ adalah ...

3. Diketahui fungsi f bernilai real terdefinisi pada $[1, \infty)$ yang memenuhi $f(1) = 1$ dan $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + (f(x))^2}$. Nilai $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ adalah ...

4. Diketahui $A = \left\{n + \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Nilai $sup\, A$ dan $inf\ A$ jika ada berturut-turut adalah ...

5. Salah satu contoh fungsi kontinu $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ dengan sifat setiap bilangan $K > 0$ terdapat $x, y \in [1, 4]$ dengan $|f(x) - f(y)| > K|x - y|$ adalah ...

6. Diketahui $a < b$ dan fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positif dan kontinu. Nilai B agar $B\sqrt{\int_a^b f(x)} \geq \int_a^b \sqrt{f(x)}$ adalah ...

7. Untuk nilai $n \to \infty$, jumlahan $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{(-1)^k}{k2^k}}$ konvergen ke ...

8. Salah satu contoh himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam pada A tetapi (f_n^2) adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui $B \subseteq \mathbb{R}, B \neq \emptyset$ dan B terbatas ke bawah. Didefinisikan

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ merupakan batas atas bawah dari } B\}.$$

Buktikan $A \neq \emptyset$ dan terbatas ke atas serta $\sup A = \inf B$.

2. Diberikan fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan fungsi naik monoton $g : f[a, b] \to \mathbb{R}$. Tunjukkan terdapat $x^* \in [a, b]$ dengan $(g \circ f)(x^*) = \sup\{g(y) : y = f(x), x \in [a, b]\}$

3. Tunjukkan pernyataan berikut ini : "Jika fungsi f mempunyai derivatif di setiap $x \in [a, b]$ maka untuk setiap nilai γ di antara $f'(a)$ dan $f'(b)$ terdapat $c \in [a, b]$ dengan $f'(c) = \gamma$."

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Semua bilangan bulat positif a, b, dan c yang memenuhi $a! + b! = c!$ adalah ...

2. Banyak cara yang dapat dilakukan untuk menutupi persegi panjang 1×9 dengan persegi panjang $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3$, atau 1×4 adalah ...

3. Seorang mahasiswa harus bekerja di lab selama lima hari dalam bulan Januari. Aturan lab mensyaratkan mahasiswa tidak boleh bekerja dalam dua hari berurutan. Banyaknya cara mahasiswa tersebut dapat menjadwalkan dirinya untuk bekerja di lab adalah ...

4. Banyaknya kombinasi solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ dengan $x \leq 2, x_2 \leq 3, x_3 \leq 4$ adalah ...

5. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, nilai dari $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}^2$ adalah ...

6. Dua bilangan bulat positif a dan b dikatakan prima relatif bila pembagi sekutu terbesar a dan b adalah 1. Banyaknya bilangan bulat positif $k \leq 210$ yang prima relatif terhadap 210 adalah ...

7. Seorang agen perjalanan harus mengunjungi empat kota masing-masing sebanyak lima kali. Jika kunjungan harus dimulai dan berakhir di dua kota yang berbeda, banyaknya kunjungan berbeda yang dapat dilakukan adalah ...

8. Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 2$, nilai dari $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-2) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan tujuh bilangan real, tunjukkan bahwa selalu dapat dipilih dua di antaranya, sebut a dan b yang memenuhi $0 < \dfrac{a-b}{ab+1} < \sqrt{3}$

2. Seorang pelajar akan menaiki tangga pada sebuah bangunan. Pada setiap langkah, pelajar tersebut dapat menggunakan satu anak tangga atau dua anak tangga. Misalkan (f_n) menyatakan banyaknya cara yang dapat dia tempuh untuk mencapai anak tangga ke-n. Berikan sebuah formula eksplisit bagi (f_n).

3. Tentukan banyaknya bilangan yang terdiri atas n anggota $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yang memenuhi dua kondisi berikut :

   (a) $a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

   (b) Angka 1 dan 3 muncul sebanyak $k \geq 2$ kali dengan k adalah bilangan genap

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Tentukan argumen dari bilangan kompleks $\left(\sqrt{3}i - 1\right)^6$.

2. Tentukan semua bilangan kompleks z yang memenuhi $\sin z = 2$.

3. Bayangan dari $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ oleh $w = z^3$ adalah ...

4. Misalkan r, R dua konstanta sehingga $0 < r < R$. Misalkan γ_r lingkaran $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Hitung nilai $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{R+z}{(R-z)z}\,dz$.

5. Jika C adalah lingkaran $|z| = 1$, maka nilai dari $\int_C \frac{\cos z}{\sin z}\,dz$.

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $f(z)$ dan konjugatnya merupakan fungsi analitik pada suatu domain terhubung. Buktikan bahwa f hanyalah fungsi konstan di domain tersebut.

2. Misalkan a dan b dua bilangan real konstan dan p bilangan bulat positif. Buktikan bahwa semua akar persamaan $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a + bi$ merupakan bilangan real jika dan hanya jika $a^2 + b^2 = 1$.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan G suatu grup dengan $|G| = 2013$. Ada berapa banyak subgrup H dari G sehingga $|H| = 13$?.

2. Perhatikan grup dihedral dengan order 8: $D_8 = \{e, y, y^2, y^3, x, xy, xy^2, xy^3\}, x^2 = y^4 = e$ dan $xy = y^{-1}x$.. Banyaknya unsur berorde dua di D_8 adalah ...

3. Diberikan $\mathbb{Z}_2$ sistem bilangan bulat modulo 2 dan himpunan

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   Banyaknya subgrup berorde dua dari G adalah ...

4. Ada berapa banyak $n \in \mathbb{Z}$ sehingga ideal $\langle n, x \rangle$ di $\mathbb{Z}_n$ merupakan ideal prima?

5. Invers polinom $f(x) = x + 1 \in \dfrac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^7 + x + 1 \rangle}$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu himpunan dengan operasi perkalian yang asosiatif. Misalkan terdapat $e \in G$ sehingga

   (a) $xe = x$ untuk setiap $x \in 6$ dan

   (b) Untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sehingga $xy = e$

   Buktikan bahwa G adalah grup.

2. Misalkan R suatu gelanggang dimana unsur kesatuan I_R tidak sama dengan nol. Unsur $e \in R$ disebut unsur idempoten apabila $e^2 = e$.

   (a) Jika $e \in R$ merupakan unsur idempoten, tunjukkan bahwa $1 - e$ juga merupakan unsur idempoten.

   (b) Jika R memiliki n buah idempoten, tunjukkan bahwa n merupakan bilangan genap.

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $W = \left\{ f \in C[1,2] \,\middle|\, \int_1^2 f(x)\,dx = a \right\}$. Agar W merupakan subruang dari ruang vektor $C[1,2]$, haruslah $a = \ldots$

2. Diberikan vektor-vektor $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x$, dan $f_3(x) = x^k e^x$ di ruang vektor $C(-\infty, \infty)$. Nilai-nilai bilangan real k yang menyebabkan bebas linear adalah ...

3. Misalkan $K = \{(x,y,z) \,|\, x - y + z = 0\}$ dan $L = span(1,0,1)$ adalah dua subruang dari $\mathbb{R}^3$, maka penulisan $(1,0,0)$ sebagai unsur $K \oplus L$ adalah ...

4. Misalkan $T : P_2 \to P_2$ pemetaan liner dengan definisi $T(p)(x) = x\dfrac{d}{dx}(p(x))$, untuk setiap $p \in P_2$. Nolitas (dimensi subruang inti) T^2 adalah ...

5. Jika $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor karakteristik matriks $\begin{bmatrix} 3 & 2-a \\ a & -3 \end{bmatrix}$, maka nilai karakteristik yang bersesuaian adalah ...

6. Misalkan A adalah matriks 5×5 yang memenuhi $A^{2013} = 0$. Banyaknya nilai karakteristik A yang berbeda adalah ...

7. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ maka $2A^{2013} - A^{2012} + 2A^{2011} - A^{2010} - 2A^{2009} - A + 4I = \ldots$

8. Pandang P_2 dengan hasil kali dalam $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Proses Gram-Schmidt pada $\{x, 1-x\}$ menghasilkan...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan V adalah subruang hasil kali dalam real. Buktikan bahwa untuk setiap $x, y \in V$ berlaku $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

2. Misalkan $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{2013\times 2013}$ dengan $a_{ij}=\begin{cases} i \text{ , jika } j > i \text{ atau } j = i-1 \\ 0 \text{ , jika } j = i \text{ atau } j < i-1 \end{cases}$ Tentukan det A.

3. Diberikan ruang hasil kali dalam P_2 dengan hasil kali dalam $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$, untuk setiap $p(x), q(x) \in P_2$. Misalkan $r(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $s(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ dan $t(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \in P_2$. Jika α, β, dan γ berturut-turut adalah sudut antara vektor $u(x) = ax^2 = bx + c$ dengan vektor $r(x), s(x)$, dan $t(x)$. Tentukan nilai $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2014

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui barisan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ dengan $x_0 = 0$ dan $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n-1}, n \geq 1$. Dinyatakan dalam x_0 dan x_1, nilai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ldots$

2. Diketahui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi naik. Fungsi f kontinu di a jika dan hanya jika $f(a) = \ldots$

3. Diketahui fungsi $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$, maka
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 x^n g(x)\,dx} = \ldots$$

4. Jika $s > 0, t > 0$ nilai-nilai s dan t agar deret
$$\sum \frac{(s+n)(s+n-1)\ldots(s+1)}{(t+n)(t+n-1)\ldots(t+1)}$$
konvergen adalah ...

5. Diketahui α merupakan bilangan irasional dan $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat. Jika $A = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$, maka klosur dari A adalah ...

6. Diketahui fungsi $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dengan $f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r)$ untuk setiap bilangan rasional r dan bilangan asli n, maka $f(x) = \ldots$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

7. Misalkan f dan g terdefinisi pada interval $I \subseteq R$, f'' dan g'''' ada dan kontinu pada I jika $f(c) = g(c) = 0$ dan $g''(c) \neq 0$ untuk suatu $c \in I$, syarat agar :
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)}$$
adalah ...

8. Misalkan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi f pada selang $[a, b]$. Jika f_n' kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ pada $[a, b]$ dan barisan $\{f_n'\}$ konvergen seragam ke fungsi g pada $[a, b]$, maka nilai

$$\int_a^x g(t)\,dt = \ldots$$

BAGIAN KEDUA

1. Dikethaui barisan $\{a_n\}$ didefinisikan barisan $\{b_n\}$ sebagai berikut:

$$b_n := \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n}{n}$$

   Buktikan :

   (a) Jika $a_n \to 0$, maka $b_n \to 0$.

   (b) Jika $a_n \to L$, dengan $L \neq 0$, selidiki kekonvergenan $\{b_n\}$.

2. Jika fungsi $f : [0,1] \to [0,1]$ memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, Buktikan bahwa $F = \{x \in [0,1] : f(x) = x\}$ merupakan singleton atau interval.

3. Diketahui fungsi $f : [0,a] \to [0,\infty]$ kontinu, dengan $f(0) = 0$ dan f mempunyai derivatif kanan dengan nilai derivatif kanan f di 0 adalah 0. Jika

$$f(t) \leq \int_0^t \frac{f(s)}{s}\, ds$$

   untuk setiap $t \in [0,a]$, Buktikan bahwa f merupakan fungsi nol pada $[0,a]$.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Pada suatu daerah, setiap nomor telepon terdiri dari 6 angka yang diawali dengan angka 6. Jika Anda mengajukan pemasangan untuk mendapat nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 4 angka berbeda, besarnya peluang Anda mendapat nomor dimaksud adalah ...

2. Solusi dari fungsi rekursif $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ untuk setiap $n > 2$ dimana $f(1) = 1, f(2) = 5$, adalah ...

3. Koefisien dari x^{118} dalam ekspansi $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{7x}\right)^{256}$ adalah ...

4. Banyaknya semua susunan huruf yang terdiri dari 7 huruf berbeda. Huruf pertama, huruf di tengah, dan huruf terakhir adalah sebuah huruf vokal, sedangkan 4 huruf lainnya adalah huruf konsonan adalah ...

5. Pada sebuah wahana permainan terdapat 4 jenis koin bernilai 1000, 5000, 10000, 25000. Banyaknya cara untuk mendapatkan 7 koin dengan total 49000 adalah ...

6. Barisan $\{a_n\}$ diperoleh dari barisan bilangan asli $1, 2, 3, \ldots$ dengan menghapus suku berbentuk kuadrat dan kubik. suku $a_{1.000.000}$ adalah ...

7. Diberikan bilangan ganjil $n \geq 5$. Banyaknya permutasi atas himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sedemikian sehingga tidak terdapat dua bilangan ganjil yang berurutan adalah ...

8. Untuk bilangan asli n nilai dari

$$3.2\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + 4.3\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} + \cdots + n.(n-1)\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \ldots$$

BAGIAN KEDUA

1. Sebuah titik $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ dikatakan sebuah titik *lattice* jika a_i adalah bilangan bulat untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$. Perhatikan bahwa setiap himpunan L_k yang terdiri dari $2^k + 1$ buah titik *lattice*, terdapat dua titik *lattice* $l_1, l_2 \in L_k$ sedemikian sehingga titik tengah dari l_1 dan l_2 adalah sebuah titik *lattice*.

2. Misalkan G adalah sebuah graf dengan n titik $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Sebuah matriks ketetanggaan $A = (a_{ij})$ dari graf G didefinisikan sebagai sebuah matriks bujur sangkar berordo n dengan entri

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{bila } \{v_i, v_j\} \text{ adalah sebuah sisi di } G, \\ 0, & \text{bila } \{v_i, v_j\} \text{ bukan sebuah sisi di } G. \end{cases}$$

   Buktikan bahwa entri $a_{ij}^{(m)}$ dari A^m menyatakan banyaknya jalan (walk) dengan panjang m yang menghubungkan titik v_i dan v_j.

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui polinomial $p(z)$ dan $q(z)$ sehingga berlaku

$$p(z)\cos^2 z + q(z)\sin^2 t = 2$$

   Untuk semua $z \in \mathbb{C}$. Hitunglah $p(1)$ dan $q(1)$.

2. Berikan sebuah contoh fungsi analitik tak konstan $f(z)$ di suatu himpunan sehingga titik limit dari himpunan pembuat nol fungsi f berada di luar D.

3. Misalkan $f(z)$ fungsi analitik di $|z| < \mathbb{R}$ dengan $\mathbb{R} > 1$. Hitunglah

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)\,dt$$

   dinyatakan dalam $f(0), f'(0), \ldots$

4. Misalkan $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ dan $g(z) = b_{-2}z^{-2} + b_{-1}z^{-1} + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$. Apabila deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dan $\sum\limits_{n=-2}^{\infty} b_n z^n$ konvergen di $|z| < 2$, Hitunglah

$$\int_{|z|=1} f(z)g(z)\,dz.$$

BAGIAN KEDUA

1. Carilah deret Laurent dari fungsi

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

yang berlaku di

(a) $|z| < 1$.

(b) $1 < |z| < 2$.

(c) $|z| > 2$.

2. Misalkan U fungsi harmonik pada daerah terhubung Ω di bidang kompleks $\mathbb{C}$

(a) Buktikan bahwa $f = \mu_x - i\mu_y$ merupakan fungsi holomorphik (analitik).

(b) Misalkan $\mu = Re(g)$ bagian real dari fungsi holomorphik (analitik) g. Buktikan $g' = f$.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 5 & 7 & 10 & 1 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{10}$. Orde dari σ adalah ...

2. Nilai maksimum dari $|G|$ di antara semua subgrup G dari $\mathbb{Z}_{2014}$ dengan $G \neq \mathbb{Z}_{2014}$ adalah ...

3. Banyaknya unit gelanggang (ring) $\mathbb{Z}_{13}$ adalah ...

4. Semua bilangan bulat s sehingga

$$I_s := \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(2014) = s\}$$

merupakan ideal $\mathbb{Z}[x]$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan dua buah grup $U \leq G$

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

dan

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

dengan operasi perkalian matriks

   (a) Tunjukkan bahwa U merupakan subgrup normal dari G.

   (b) Tunjukkan bahwa G/U isomorfik dengan $(\mathbb{R}, +)$.

2. Periksa apakah $\mathbb{Z}_{13}[x]/\langle x^{2014} - x^{1000} + 1 \rangle$ merupakan lapangan.

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. Matriks eselon baris tereduksi untuk $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ adalah ...

2. Misalkan W ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$. Dengan demikian V juga ruang vektor atas lapangan real R. Jika $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2014$, maka $\dim_{\mathbb{C}}(W) = \ldots$

3. Misalkan I_n adalah matriks identitas di $R^{n\times n}$ dan a, b, c, d adalah bilangan-bilangan real tak nol. Jika $A = \begin{bmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, maka $\det A = \ldots$

4. Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah transformasi pencerminan terhadap garis $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Untuk sebarang bilangan real a, $T(a, 2014) = \ldots$

5. Jika matriks $\begin{bmatrix} 3 & 2-a \\ a & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ memiliki dua vektor eigen yang saling ortogonal, maka $a = \ldots$

6. Bilangan -1 adalah nilai eigen matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Dimensi ruang eigen A untuk nilai eigen -1 adalah ...

7. Di ruang vektor P_2 kita definisikan hasil kali dalam $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$, Untuk setiap $p, q \in P_2$. Salah satu unsur P_2 yang normanya 1 dan ortogonal terhadap kedua polinom $u(x) = x^2 - 1$ dan $v(x) = x$ adalah ...

8. Transformasi linier $T : P_2 \to P_2$ didefinisikan sebagai $T(p)(x) = p(1-x) - p(1+x)$, untuk setiap $p \in P_2$. [sebagai contoh, $T(x^2 - 1) = -4x$]. Himpunan $\{ax^2 + bx + c, bx^2 + cx + a\}$ merupakan basis $Inti(T)$ jika $(a, b, c) = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam kompleks berdimensi hingga. Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ memenuhi $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$. Jika $K = span(\mathbf{u})$ dan $L = span(\mathbf{w})$. Buktikan bahwa $V = K^{\perp} \oplus L$.

2. Diberikan vektor-vektor taknol $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa matriks $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^t$ dapat didiagonalkan jika dan hanya jika $\mathbf{u}^t\mathbf{v} \neq 0$.

3. Misalkan $B_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times k}$. Definisikan $A_1 = [1], A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, dan untuk $n \geq 3, A_n = \begin{bmatrix} A_2 & B_{n-2} \\ B_{n-2}^T & A_{n-2} \end{bmatrix}$. Buktikan bahwa A_n tak singular untuk setiap bilangan asli n.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2015

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Jika $S = \{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, maka sup $S = \ldots$

2. Bentuk umum fungsi naik tegas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(f(x)+y) = f(x+y) + f(0)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ adalah ...

3. Diberikan barisan bilangan real non-negatif yang naik monoton $\{x_k\}$, mempunyai sifat $x_{nk} \geq nx_k$ dan sup $\dfrac{x_k}{k} = x < \infty$. Barisan $\left\{\dfrac{x_k}{k}\right\}$ konvergen ke ...

4. Fungsi $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, dengan $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x} = 0$. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ldots$

5. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 4x^2 + 1$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, dan barisan $\{x_n\}$, dengan $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Nilai $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ldots$

6. Fungsi $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dikatakan terdiferensial seragam pada (a,b), jika f terdiferensial di setiap titik $x \in (a,b)$ dan memenuhi sifat $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in (a,b)$ dengan $|x-y| < \delta$, maka $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x)\right| < \varepsilon$. Contoh fungsi terdiferensial tetapi tidak terdiferensial seragam adalah ...

7. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^n x^n$, untuk setiap $-1 < x < 1$. Jika fungsi $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, dengan $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, pada $(-1,1)$, maka nilai $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = \ldots$

8. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan $A = \{x \in \mathbb{R} : f^2(x) \leq 1\}$ maka klosur dari A, yaitu $\overline{A} = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n \geq 1$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan barisan $\{y_n\}$, dengan $y_n = x_n + \dfrac{2}{x_n}$ untuk setiap n. Jika $\{y_n\}$ konvergen, buktikan bahwa $\{x_n\}$ konvergen.

2. Misalkan f fungsi bernilai real terdiferensialkan pada $[a, b]$, dengan $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ dan $f(a) = f(b) = 0$. Tunjukkan terdapat $x_0 \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$|f'(x_0)| > \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

3. Diketahui fungsi φ konveks pada $\mathbb{R}$ dan f terintegral pada $[0, 1]$. Buktikan bahwa

$$\int_0^1 \varphi(f(t))\, dt \geq \varphi\left(\int_0^1 f(t)\, dt\right).$$

KOMBINATORIKA

1. Pada babak final sebuah turnamen, tim pemenang adalah tim yang pertama sekali memenangkan dua pertandingan secara berurutan atau tim yang pertama sekali memenangkan empat pertandingan. Banyaknya cara turnamen dapat terjadi adalah ...

2. Banyaknya cara mengisi persegi panjang berukuran 2×16 dengan persegi panjang yang berukuran $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4$ adalah ...

3. Enam komite akan dibentuk dari 14 orang. Bila 2 komite dari 6 komite ini terdiri atas 3 orang dan sisanya terdiri atas masing-masing 2 orang, maka banyaknya komite yang dapat dibentuk adalah ...

4. Sebuah *password* terdiri atas 7 huruf dibentuk dengan menggunakan huruf kapital. Sebuah *password* dikatakan legal bila memenuhi dua kondisi : (i) tidak terdapat huruf berulang, (ii) huruf X dan Y tidak saling berdekatan. Besarnya peluang untuk membentuk *password* legal adalah ...

5. Diberikan sebuah barisan (x_n) dengan suku ke n adalah $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ dimana $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Relasi rekursif yang memenuhi barisan (x_n) adalah ...

6. Lima buah dadu (enam sisi) digulirkan. Peluang bahwa mata dadu yang muncul berjumlah 14 adalah ...

7. Setiap bujursangkar pada persegi panjang berukuran $1 \times n$ diwarnai dengan menggunakan satu dari tiga warna merah, putih, atau biru. Banyak cara mewarnai persegi $1 \times n$ dengan merah, putih, atau biru sehingga terdapat genap buah bujursangkar berwarna putih adalah ...

8. Untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 2$, nilai dari

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{n}\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{n}\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{n-1}{n}\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = \cdots .$$

BAGIAN KEDUA

1. Suatu graf Λ disebut komplemen graf Γ jika $V(\Lambda) = V(\Gamma)$ dan sisi $e = (u, v) \in E(\Lambda)$ jika dan hanya jika sisi $e = (u, v) \notin E(\Gamma)$. Komplemen dari graf Γ ditulis $\overline{\Gamma}$. Tentukan bilangan positif terkecil N sedemikian sehingga untuk setiap sebarang graf Γ dengan N titik senantiasa memuat graf lengkap K_3 sebagai subgraf atau $\overline{\Gamma}$ memuat graf lengkap K_3 sebagai subgraf. Kemudian, Buktikan!

2 Sebuah papan catur C terdiri atas i baris dan j lajur. Misalkan b menyatakan banyaknya maksimal benteng yang dapat diletakkan pada C sehingga tidak ada dua benteng yang saling menuerang. Tentukan banyaknya cara meletakkan b buah benteng pada C sedemikian sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang. [Catatan : pada permainan catur, gerak benteng adalah berarah horizontal (pada baris) dan vertikal (pada lajur)]

2. Misalkan n adalah sebuah bilangan bulat positif. Buktikan bahwa :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Hitung bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks
$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}.$$

2. Hitung nilai
$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sin^2 z} \right).$$

3. Hitung nilai
$$\oint_C \frac{e^z}{(z + \pi i)^3}\, dz$$
dengan C adalah lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 4.

4. Jika f adalah fungsi penuh (entire), $f(0) = 1$ dan berlaku $|f(z) - e^z \sin 2z| < 4$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, maka tentukan nilai dari $f(1)$.

BAGIAN KEDUA

1. Kerjakan dua soal berikut

   (a) Tentukan nilai
   $$\min_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \frac{Im(z^5)}{(Im(z))^5}.$$

   (b) Tentukan nilai k sehingga peta dari lingkaran $|z-1| = k$ oleh fungsi kompleks $f(z) = \dfrac{z-3}{1-2z}$ adalah sebuah garis lurus.

2. Hitunglah
   $$\int_0^{2\pi} e^{e^{2it}-3it}\, dt.$$

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan G, H, dan K grup hingga. Misalkan pula homomorfisma $\varphi : G \to H$ dan homomorfisma $\psi : H \to K$ memenuhi $Im(\varphi) = Ker(\psi)$, Jika ψ homomorfisma surjektif dan $|K| = |H| = n$, maka $|Im(\varphi)| = \ldots$

2. Banyaknya polinom tak tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$ yang berderajat 3 adalah ...

3. Banyaknya pembagi nol di $\mathbb{Z}_{100}$ adalah ...

4. Misalkan R adalah ring dengan identitas perkalian dan $x \in R$ memenuhi $x^2 = x$, maka balikan (invers) dari $2x - 1$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu grup yang memiliki subgrup berorde 2015. Buktikan bahwa irisan semua subgrup dari G yang berorde 2015 merupakan subgrup normal dari G.

2. (a) Jika I ideal di $M_2(\mathbb{R})$ yang memuat $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu $a \neq 0$, buktikan bahwa $I = M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Tentukan semua ideal di ring $M_2(\mathbb{R})$

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan A, B, C berturut-turut matriks berukuran $m \times m$, $n \times n$ dan $n \times m$. Jika $\det(A) = 2$ dan $\det(B) = 3$, maka $\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix} = \ldots$

2. Diketahui bahwa $a \neq 0$. Agar himpunan $\{a + bx, ax + bx^2, b + ax^3\}$ bergantung linier di ruang vektor P_4, a dan b haruslah memenuhi hubungan ...

3. Di $\mathbb{R}^3$, subruang K dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dan subruang L dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, maka $K \cap L = \ldots$

4. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pemetaan linier T memenuhi $T(X) = AX - XA$, untuk setiap $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, maka dimensi $Inti(T)$ adalah ...

5. Diketahui bahwa $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks $\begin{bmatrix} a-1 & a \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka nilai eigen untuk u adalah ...

6. Banyaknya matriks real diagonal berukuran $n \times n$ yang ortogonal adalah ...

7. Diketahui matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} c & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Agar matriks AB dapat didiagonalisasi ortogonal, haruslah $(a, b, c) =$

8. Di ruang vektor P_2 kita didefinisikan hasil kali dalam $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, untuk setiap $p, q \in P_2$. Jika K dibangun oleh $\{1, x\}$, maka $K^{\perp} = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan a_1, a_2, b_1, b_2 empat vektor di $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $||a_1||_2 = ||b_1||_2 = 1$. Misalkan $A = [a_1 \;\; a_2]$ dan $B = [b_1 \;\; b_2]$ memenuhi $A^t B = I_2$, matriks identitas 2×2.

   (a) Tunjukkan bahwa keempat vektor tersebut dapat dipilih sehingga $B^t A = \text{diag}(1, 1, 0)$.

   (b) Dapatkah keempat vektor tersebut dipilih sehingga $B^t A$ bukan matriks diagonal? Berikan alasannya.

2. Misalkan U, V, W ruang-ruang vektor atas lapangan F, $\dim(V) = m$, dan $\dim(U) = n$. Misalkan pula $T : V \to W$ linier dan satu-satu, sedangkan $S : W \to U$ linier dan pada. Jika $\text{Peta}(T) = \text{Inti}(S)$, tentukan $\dim(W)$.

3. Misalkan $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ memenuhi $A^2 = I$

   (a) Tunjukkan bahwa 1 dan -1 adalah semua nilai eigen A.

   (b) Jika $E(1)$ dan $E(-1)$ adalah ruang-ruang eigen A, buktikan bahwa $\mathbb{R}^n = E(1) \oplus E(-1)$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2016

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Jika $S = \left\{ \dfrac{n}{2m} + \dfrac{6m}{n} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ maka $\inf(S) = \ldots$ dan $\sup(S) = \ldots$

2. Misalkan $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \ldots, 2016$. Jika $(a_1, a_2, \ldots, a_{2016})^{\frac{1}{2016}} = 2$, maka
$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_{2016}) \geq \ldots$$

3. Jika barisan bilangan real (x_n) memenuhi sifat $\lim\limits_{n \to \infty}(x_{2n} + x_{2n+1}) = 315$ dan $\lim\limits_{n \to \infty}(x_{2n} + x_{2n-1}) = 2016$, maka $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{x_{2n}}{x_{2n+1}}\right) = \ldots$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{8n^2}{n^4 + 1} = \ldots$

5. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}, f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, untuk setiap x, $0 \leq x \leq 1$ dan $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$. Jika $S_n = \sin(\pi a_n)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \ldots$

6. Jika $E = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ fungsi kontinu dengan $f(x) \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$, maka $E = \ldots$

7. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 4x$, untuk bilangan rasional x dan $f(x) = x + 6$, untuk bilangan irasional x, jika $E = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ kontinu di } x\}$, maka himpunan semua titik limit E adalah ...

8. Diketahui $a < \dfrac{\pi}{2}$. Jika $M < 1$ dengan $|\cos x - \cos y| \leq M|x - y|$, untuk setiap $x, y \in (0, a)$ maka $M = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = \inf \{|x - y| : y \in E\}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa fungsi f kontinu pada R.

2. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial hingga tingkat 2. Jika terdapat bilangan positif A dan B, dengan sifat $|f(x)| \leq A$ dan $|f'(x)| \leq B$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, Buktikan bahwa $|f'(0)| \leq 2\sqrt{AB}$.

3. Diketahui fungsi kontinu pada $[0, 1]$. Didefinisikan $f_n = f$ pada $[0, 1]$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$, untuk setiap $x \in [0, 1]$. Buktikan bahwa barisan fungsi (f_n) konvergen seragam pada $[0, 1]$ ke fungsi nol.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Sepotong kawat berukuran 1 meter dipotong secara acak menjadi 3 bagian. Besarnya peluang ketiga bagian ini membentuk sebuah segitiga adalah ...

2. Sebuah palindrom adalah sebuah barisan berhingga karakter sehingga dapat dibaca dengan cara yang sama baik dari kiri maupun kanan. SIKAPAKIS adalah sebuah palindrom. Banyaknya bilangan palindrom yang terdiri atas 7 digit sedemikian sehingga tidak terdapat digit yang muncul lebih dari 2 kali adalah ...

3. Dari himpunan 26 huruf $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$ dibentuk susunan 6 huruf berbeda (susunan tak perlu bermakna) sedemikian sehingga huruf pertama dan huruf terakhir adalah huruf vokal, dan sisanya huruf konsonan. Jika huruf b selalu muncul pada susunan dan berdampingan dengan huruf c, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah ...

4. Banyaknya cara memfaktorkan bilangan 441000 menjadi 2 faktor positif m dan n yang saling prima relatif adalah ...

5. Banyaknya graf sederhana berlabel atas n titik yang memiliki setidaknya dua sisi adalah ...

6. Banyaknya bilangan antara 1 dan 500 yang tidak habis dibagi 2, 4, dan 6 adalah ...

7. Didefinisikan suatu rekursif, $\forall n \in \mathbb{Z}$ berlaku $f(1) = 1, f(2) = 5$, dan $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1), \forall n > 2$, maka $f(n) = \ldots$

8. Dalam bentuk yang paling sederhana fungsi pembangkit biasa (*Ordinary Generating Function*), $g(x)$, dari barisan $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Perlihatkan bahwa untuk setiap himpunan yang tediri dari 7 bilangan bulat berbeda, maka terdapat dua bilangan x dan y pada himpunan tersebut sedemikian sehingga $x + y$ atau $x - y$ adalah kelipatan 10.

2. Tuliskan sebuah argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

dengan $n \geq 2$

3. Diberikan sebarang bilangan bulat positif a dan b, bilangan $r(a, b)$ dan t adalah suatu bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf lengkap dengan t titik, senantiasa akan membuat subgraf lengkap a titik dengan semua berwarna merah atau memuat subgraf lengkap b titik dengan semua sisi berwarna biru.Jika bilangan t ada dan $a, b \geq 2$, Buktikan bahwa

$$r(a-1, b) + r(a, b-1) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$$

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Hitunglah
$$(i-1)^{49}\left(\cos\frac{\pi}{40}+i\sin\frac{\pi}{40}\right)^{10}.$$

2. Diketahui fungsi $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$. Selidiki apakah ada fungsi harmonik $v(x,y)$ sehingga $f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik. Jika ada, tuliskan!

3. Carilah nilai maksimum dari $|z^2+2z-3|$ pada cakram satuan tertutup $|z|\leq 1$.

4. Tentukan residu dari fungsi
$$f(z)=\frac{e^{1/z}}{z^2+1}$$
di $z=0$.

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan S adalah sebuah domain (himpunan terbuka dan terhubung), dan γ adalah sebuah kurva tertutup di dalam S. Diketahui fungsi $f(z)$ analitik pada S dan $f'(z)$ kontinu pada S. Buktikan bahwa
$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z)\, dz$$
bernilai imajiner murni.

2. Diberikan bilangan-bilangan kompleks z_1, z_2, dan z_3 yang memenuhi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ dan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Buktikan bahwa
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Orde dari grup $\dfrac{\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4}{\langle \overline{3}, \overline{2} \rangle}$ adalah ...

2. Misalkan $\mathbb{R}[x, y]$ himpunan semua polinom real dengan dua variabel x dan y. Jika $\varphi : \mathbb{R}[x, y] \to \mathbb{R}[x, y]$ adalah homomorfisma grup yag didefinisikan melalui

$$\varphi : f(x, y) \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

   maka kernel dari φ adalah ...

3. Jika x adalah unsur di ring $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ yang memenuhi $(17 + 12\sqrt{2})x = 1$, maka x adalah ...

4. Misalkan $F = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Pada F didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian bulat modulo n. Bilangan asli n terkecil sehingga F membentuk lapangan adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup penjumlahan dari bilangan bulat modulo n. Tentukan semua bilangan asli n sehingga terdapat pemetaan bijektif $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ dan $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ yang membuat $f + g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ juga bijektif.

2. Misalkan

$$I = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \ , \ a_i \in 2\mathbb{Z} \text{ untuk setiap } i \right\} \subseteq \mathbb{Z}[x]$$

   Buktikan I membentuk Ideal Prima dari $\mathbb{Z}[x]$.

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. Jika $u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$, maka $uAv^T = \ldots$

2. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$, maka $A^{2016} = \ldots$

3. Diberikan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + ay + 2z &= -1 \\ x + a^2y + 4z &= 2 \\ 2x + (a+1)y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

   Nilai-nilai a yang membuat sistem persamaan linier tersebut mempunyai solusi tunggal adalah ...

4. Tentukan basis $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ matriks representasi transformasi linear $T : P_2 \to P_2$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, maka $T(x - x^2) = \ldots$

5. Pemetaan linear $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ memenuhi $T(1 + x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, T(x + x^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $T(1 + x^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Salah satu basis Inti$(T)$ adalah ...

6. Diketahui $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ untuk nilai eigen λ, maka nilai eigen A selain λ adalah ...

7. Komponen baris ke-i kolom ke-j matriks A yang berukuran $n \times n$ adalah 1 jika $i + j$ ganjil, dan 0 jika $i + j$ genap. Jika n ganjil, multisiplitas aljabar 0 sebagai nilai eigen A adalah ...

8. Untuk $f, g \in C[0,1]$ didefinisikan hasil kali dalam

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Agar fungsi $f(x) = \sin(kx)$ dan $g(x) = \cos(7x)$ tegak lurus pada ruang hasil kali dalam tersebut, maka nilai konstanta k adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan matriks A ukuran $n \times n$, dengan entri-entri

$$a_{ij} = \binom{x_i + j}{j - 1}$$

   Hitunglah determinan A_n, Jika didefinisikan

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

   untuk setiap bilangan rill x dan bilangan asli n dengan ketentuan

$$\binom{x}{0} = 1.$$

2. Di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definisikan hasil kali dalam $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$. Jika

$$W = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   Tentukan $W^{\perp}$, yaitu komplemen ortogonal dari W.

3. Diberikan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kita definisikan $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sebagai $T(X) = AX$, untuk setiap $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jika nolitas$(A) = k$, tentukan nolitas$(T)$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2017

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Diberikan fungsi tak nol $f : D \to \mathbb{R}$ dan fungsi $g : D \to \mathbb{R}$ dengan $D \subseteq \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\dfrac{g(x)}{f(x)} \leq 1, \forall x \in D$. Berilah contoh fungsi f dan g yang menunjukkan bahwa belum tentu berlaku $\sup\limits_{x \in D} g(x) \leq \inf\limits_{x \in D} f(x)$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(\dfrac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^n \right] = \ldots$

3. Jika barisan bilangan real positif (a_n) memenuhi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, maka
$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \right)^2 = \ldots$$

4. Deret fungsi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-x)^{k+1}}{k}$ konvergen ke ...dengan interval konvergensi ...

5. Dikatakan fungsi f terintegral pada $[a, b]$ dan
$$S = \{x \in (a, b) : f \text{ kontinu di } x\}.$$
Jika $p \in S$ dan $\int_a^b f^2(x)\, dx = 0$, maka $p^2 + f^2(p) = \ldots$

6. Diketahui fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (0, 1)$. Jika untuk setiap $x \in (0, 1)$ berlaku $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$, maka rumus f pada $[0, 1]$ adalah $f(x) = \ldots$

7. Diketahui fungsi $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu dan naik. Jika $f(a) = a$ dan $E = \{x \in [a, b] : f(x) \geq x\}$, maka $f(E) = \ldots$

8. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 1 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jika $|f(x) - 1| = 2 \sin 2x$, maka nilai $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui fungsi f mempunyai turunan hingga tingkat ke-2 pada $[0,1]$ dan fungsi g didefinisikan dengan $g(x) = f(x) + f(1-x)$. Jika $f''(x) > 0$, untuk setiap $x \in [0,1]$, Buktikan bahwa g turun pada $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ terdiferensial dan tidak ada x dengan $f(x) = f'(x) = 0$ Tunjukkan bahwa himpunan $\{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ berhingga.

3. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan hingga tingkat ke-2 pada $(0,1)$. Jika $f(0) = f(1) = 0$ dan $f'' + 2f' + f \geq 0$ pada $(0,1)$, buktikan bahwa $f(x) \leq 0$, untuk setiap $x \in [0,1]$.

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Pada sebuah pesta pernikahan terdapat enam orang (termasuk pengantin) yang hendak berfoto. Banyak cara menata pose foto dalam satu baris dari keenam orang tersebut sedemikian sehingga pengantin berdiri tidak saling berdekatan adalah ...

2. Sebuah rangkaian digit biner adalah sebuah barisan yang tediri dari 1 dan 0. Banyaknya rangkaian digit biner yang terdiri atas tepat delapan digit 0 dan tepat sepuluh digit 1 sedemikian sehingga setiap kemunculan digit 0 segera diikuti oleh digit 1 adalah ...

3. Pada sebuah lemari terdapat 25 helai baju yang terdiri atas 4 ukuran. Lima helai baju berukuran S, 4 helai baju berukuran M, 9 helai baju berukuran L, dan 7 helai baju berukuran XL. Untuk menjamin telah terambil 7 helai baju berukuran sama, maka sedikitinya total helai baju yang harus diambil dari lemari adalah ...

4. Sebuah keluarga besar beranggotakan 14 orang anak yang terdiri dari dua kelahiran kembar tiga identik, tiga kelahiran kembar 2 identik, dan dua anak yang lain. Bila kembar identik tak dapat dibedakan, maka banyak pose foto berdiri dalam satu baris dari 14 orang anak tersebut adalah ...

5. Solusi dari relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$ adalah ...

6. Banyak cara menugaskan 5 pekerjaan berbeda ke 4 orang pegawai berbeda sedemikian sehingga setiap pegawai ditugaskan ke paling sedikit satu pekerjaan adalah ...

7. Dalam bentuk yang paling sederhana fungsi pembangkit biasa (*ordinary generating function*), $g(x)$, dari barisan $(0, 1, 0, 1, 0, 1 \dots)$ adalah ...

8. Tentukan semua solusi (a, b, c) dari persamaan Diophantine $2^a + 5^b = c^2$.

BAGIAN KEDUA

1. Seorang petinju mempunyai waktu 75 minggu untuk mempertahankan gelar. Untuk itu pelatih menjadwalkan program latih tanding. Pelatih merencanakan sedikitnya terdapat satu latih tanding dalam satu minggu, tetapi tidak lebih dari total 125 latih tanding dalam periode 75 minggu. Perlihatkan ada periode waktu yang terdiri atas beberapa minggu berurutan sehingga terdapat tepat 24 latih tanding dalam periode waktu tersebut.

2. Diberikan bilangan bukat $n \geq 5$. Tuliskan sebuah argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan bahwa

$$\binom{2n}{5} = 2\binom{n}{5} + 2n\binom{n}{4} + (n^2 - n)\binom{n}{3}.$$

3. Suatu sisi e di graf G dikatakan suatu *cut edge* jika jumlah komponen dari G/e lebih dari jumlah komponen dari G. Buktikan bahwa, suatu sisi e adalah *cut edge* di G jika dan hanya jika e tidak termuat di setiap lingkaran di G.

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Berapa banyak akar berbeda dari persamaan $z^{12} = 1$ yang bukan merupakan bilangan real?

2. Diketahui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ adalah fungsi analitik dengan

$$f(z) = u(x) + iv(y)$$

untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$. Jika $f(20) = 17$ dan $f(17) = 20$ maka nilai dari $f(2017)$ adalah ...

3. Untuk sebarang bilangan kompleks a dan bilangan real positif r, didefinisikan

$$D_r^a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

Jika fungsi

$$T(z) = \frac{z}{z+1}$$

memenuhi

$$T^{-1}(D_r^0) = D_{2017r}^a$$

maka $a = \ldots$

4. Misalkan f adalah suku banyak berederajat 2 yang memenuhi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{zf'(z)}{f(z)}\, dz = 0, \text{ dan } \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)}\, dz = -2.$$

Jika $f(0) = 2017$ maka rumus ekspilit dari $f(z)$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan λ bilangan kompleks yang memenuhi $\lambda^{2017} = 1$ dan $\lambda \neq 1$

   (a) Buktikan bahwa $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{2016}$ semuanya berbeda.

   (b) Hitung nilai dari $(1 + \lambda)(1 + \lambda^2)(1 + \lambda^3) \ldots (1 + \lambda^{2016})$.

2. Diberikan bilangan real positif M. Misalkan fungsi analitik $f : D \to \mathbb{C}$ dengan $D = \{z : |z| \leq 1\}$ mempunyai bentuk deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

   dan memenuhi $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in D$

   (a) Untuk setiap $n \geq 1$ dan $0 < r < 1$, buktikan bahwa

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz.\right|$$

   (b) Dengan menggunakan (a) dan mengambil $r \to 1$, buktikan bahwa $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \geq 0$.

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya unit di ring $\mathbb{Z}_{2^n}$ adalah ...

2. Misalkan S_5 adalah grup permutasi atas $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya unsur berorde 2 di S_5 adalah ...

3. Banyaknya subgrup dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ adalah ...

4. Misalkan $\mathbb{F}_2$ adalah lapangan *field* dengan dua unsur. Semua polimom tereduksi berderajat 5 di $\mathbb{F}_2[x]$ yang tidak memiliki akar adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan H suatu subgrup normal hingga dari G. Misalkan pula $g \in G$ berorde n dan unsur di H yang komutatif dengan g hanyalah unsur identitas e.

   (a) Buktikan bahwa pemetaan $f : H \to H$ dengan $f(h) = g^{-1}h^{-1}gh$ merupakan suatu bijeksi.

   (b) Tunjukkan bahwa semua unsur di koset gH semuanya berorde n.

2. Buktikan bahwa I merupakan ideal maksimal di gelanggang R jika dan hanya jika terdapat suatu lapangan *field* F dan homomorfisma ring $f : R \to F$ yang surjektif sedemikian sehingga $I = \ker f$.

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan K dan L dua subruang berbeda dari ruang vektor real V. Jika $\dim(K) = \dim(L) = 4$, maka dimensi minimal yang mungkin untuk V adalah ...

2. Misalkan P_2 adalah ruang polinom real berderajat paling tinggi 2. Koordinat x^2 terhadap basis $\{x^2 + x, x + 1, x^2 + 1\}$ di P_2 adalah ...

3. Subruang U dan W dari ruang vektor $\mathbb{R}^5$ masing-masing dibangun oleh $\Big\{(1, 3, -2, 2, 3),\ (1, 4, -3, 4, 2),\ (2, 3, -1, -2, 9)\Big\}$ dan $\{(1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1)\}$. Salah satu basis dari subruang $U \cap W$ adalah ...

4. Dengan hasil kali dalam $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^t A)$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}\right\}$ adalah himpunan ortogonal jika dan hanya jika $a = \ldots$

5. Inti tranformasi linier $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dibangun oleh $\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}$. Jika $T(a, b, c, d) = (a + b - c, x, 0)$, maka $x = \ldots$

6. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Misalkan T operator linier pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan aturan $T(X) = AX - XA, \forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, maka $\mathrm{rank}(T) = \ldots$

7. Matriks $\begin{bmatrix} w & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ memiliki dua nilai eigen yang sama jika dan hanya jika $w \in S$, maka $S = \ldots$

8. Misalkan V ruang vektor fungsi-fungsi $ae^{3x}\sin x + be^{3x}\cos x$. Transformasi $T : V \to V$ didefinisikan $T(f) = f' + f$ untuk setiap $f \in V$. Matriks representasi T terhadap basis $\{e^{2x}\sin x, e^{3x}\cos x\}$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan A, B, C, D matriks-matriks berukuran $n \times n$. Misalkan pula A memiliki balikan dan $AC = CA$. Buktikan bahwa

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$$

2. Misalkan $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$ dengan $a_{ij} = v_i v_j$. Jika $\operatorname{rank}(A) = 1$, tentukanlah nilai k yang memenuhi

$$(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{k} A$$

3. Misalkan $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ memenuhi $A^2 = I$.

   (a) Tunjukkan bahwa 1 dan -1 adalah semua nilai eigen A.

   (b) Jika $E(1)$ dan $E(-1)$ adalah ruang-ruang eigen A, buktikan bahwa $\mathbb{R}^n = E(1) \oplus E(-1)$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2018

ANALISIS REAL

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong, jika $\sup A = \inf A$, maka himpunan A adalah ...

2. Jika

$$\lim_{x \to c} \frac{a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n}{(x-c)^n} = 0,$$

maka $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \ldots$

3. Deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \ldots$

4. Diketahui fungsi $f : [-5,4] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $E = \{x \in [-5,4] : f(x) = x\}$ maka closure dari E adalah ...

5. Nilai $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{2x^n}{x + x^{2n+1}}\, dx = \ldots$

6. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{2n-1}, & x \in \left[0, \dfrac{2n-1}{n}\right] \\ \\ 1, & x \in \left[\dfrac{2n-1}{n}, 2\right] \end{cases},$$

maka untuk $n \to \infty$, $\displaystyle\int_1^2 f_n(x)\, dx$ konvergen ke...

7. Diketahui $a \in \mathbb{R}$ dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $|xf(x) + a| < \sin^2(x-a)$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Nilai $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ldots$

8. Diketahui barisan bilangan real $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ keduanya konvergen ke 0. Jika $\{b_n\}$ turun monoton dan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 2018$, maka $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2b_n} = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Selidiki kekonvergenan barisan bilangan real $\{x_n\}$, dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}, n \geq 1$.

2. Buktikan pernyataan berikut, Jika untuk setiap n, f_n merupakan fungsi naik dan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

3. Diketahui fungsi f mempunyai turunan yang kontinu pada $[a, b]$. Jika $f(a) = f(b) = 0$ dan $\int_a^b [f(x)]^2\, dx = 1$. Buktikan bahwa

$$\int_a^b x^2 [f'(x)]^2\, dx \geq \frac{1}{4}.$$

KOMBINATORIKA

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya subset dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 25\}$ yang terdiri dari 3 bilangan sehingga dalam sebuah subset tidak terdapat dua bilangan berurutan adalah ...

2. Sebuah klub bulu tangkis mempunyai 35 anggota terdiri dari 15 anak laki-laki dan 20 anak perempuan. Klub akan membentuk 10 pasangan ganda campuran. Banyaknya cara yang mungkin untuk membentuk 10 pasangan ganda campuran adalah ...

3. Sebuah toko roti memproduksi 8 jenis donat. Donat dikemas dalam kotak berisi 12 buah donat. Banyaknya cara untuk mengisi sebuah kotak sehingga terdapat sedikitnya satu buah donat untuk setiap jenis adalah ...

4. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 2$. Nilai dari $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k k \binom{n}{k}$ adalah ...

5. Misalkan b_n adalah banyaknya untaian atas n huruf yang dapat dibentuk dengan menggunakan A, B, dan C sedemikian sehingga bila huruf A muncul bukan sebagai huruf akhir pada untaian, maka A harus segera diikuti oleh B. Relasi rekurensi dari barisan $\{b_n\}$ adalah ...

6. Diberikan permutasi $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$ atas himpunan $\{1, 2, \ldots, n\}$ dengan $n \geq 7$. Banyaknya permutasi π sehingga $\pi(1) = 5$ atau $\pi(3) = 7$ atau $\pi(6) = 2$ adalah ...

7. Dalam bentuk yang paling sederhana, fungsi pembangkit eksponensial (*exponential generating function*) dari barisan $(0!, 1!, 2!, 3!, \ldots, n!, ..)$ adalah ...

8. Diberikan sebuah graf sederhana G atas 6 titik $v_1, v_2, \ldots, v_6$. Bila G mempunyai 8 sisi dan derajat dari titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_6$ masing-masing adalah $1, 3, 3, 3$, dan 2, maka derajat titik v_6 adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Perhatikan barisan Fibonacci dengan relasi rekurensi, untuk $n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, f_1 = 1$. Didefinisikan matriks $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}$

   (a) Buktikan bahwa $F^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$.

   (b) Buktikan bahwa $f_{n+1}f_{n-1} = f_n^2 = \begin{cases} 1 \text{ ,} & \text{bila } n \text{ genap} \\ -1 \text{ ,} & \text{bila } n \text{ ganjil} \end{cases}$.

2. Andaikan G adalah sebuah graf sederhana (*simple graph*). Bila e adalah sebuah sisi yang menghubungkan titik u dan titik v di G, maka dikatakan bahwa titik u bertetangga dengan titik v. Derajat dari sebuah titik v di G adalah banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan v. Perlihatkan bahwa pada sebuah graf sederhana G terdapat sedikitnya dua titik dengan derajat sama.

3. Tentukan banyaknya cara untuk mewarna bujur sangkat 1×1 pada persegi panjang $1 \times n$ dengan menggunakan warna merah, hijau, atau biru sedemikian sehingga terdapat sejumlah genap bujur sangkar berwarna merah.

ANALISIS KOMPLEKS

BAGIAN PERTAMA

1. Bilangan bulat terkecil n dengan $n \geq 2018$ sehingga $(\sqrt{3} + 3i)^n$ merupakan bilangan real adalah ...

2. Diketahui bahwa segi-12 dan segi-18 beraturan dengan lingkaran luar yang jari-jarinya satu satuan mempunyai T titik persekutuan, dengan $T > 1$. Nilai T adalah ...

3. Apabila diketahui fungsi

$$f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) + \overline{z}\,\mathrm{Im}(z) + \overline{z}$$

terdiferensial kompleks di titik z_0, maka nilai dari $f'(z_0)$ adalah ...

4. Nilai integral kompleks

$$\int_{|z|=1} \left(z^2 \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \sin z \right) dz.$$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $z \in \mathbb{C}$ sehingga $|1+z^2| < 1$. Tunjukkan bahwa $2|1+z|^2 \geq 1$.

2. Diberikan $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ adalah sebuah suku banyak komplek berderajat $n > 0$ dan γ adalah lingkaran $|z| = r$. Buktikan
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{|p(z)|^2}{z^{1-n}} \, dz = a_0 \overline{a}_n r^{2n}.$$

STRUKTUR ALJABAR

BAGIAN PERTAMA

1. Suatu subgrup H di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ disebut *swapped* jika setiap (a, b) di H, berlaku (b, a) juga di H. Banyaknya subgrup bertipe *swapped* di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ adalah ...

2. Himpunan $\Omega = \left\{ e^{(2k\pi i)/7^m} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, dengan e merupakan bilangan Euler dan $i^2 = -1$, membentuk grup dengan operasi perkalian biasa. Banyaknya $\omega \in \Omega$ sedemikian sehingga $\Omega = \langle \omega \rangle$ adalah ...

3. Misalkan $\mathbb{Z}_2[x]$ merupakan ring polinom dengan koefisien di $\mathbb{Z}_2$ dan I merupakan ideal yang dibangun oleh $f(x) = x^2 + x \in \mathbb{Z}[x]$. Banyaknya unsur pembagi nol di ring $R = \mathbb{Z}_2[x]/I$ adalah ...

4. Diberikan ring komutatif $\mathbb{Z}_3[v] := \{\alpha_0 + \alpha_1 v \mid \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{Z}_3\}$, dengan $v \notin \mathbb{Z}_3$ dan $v^2 = v$. Banyaknya ideal maksimal di $\mathbb{Z}_3[v]$ adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan sebarang grup $(G,*)$ dan
   $A,B \subseteq G$, kita notasikan $A*B := \{a*b \mid a \in A, b \in B\}$

   (a) Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 3$ terdapat $A,B \subseteq (\mathbb{Z}_n,+)$ dengan $A,B \neq \mathbb{Z}_n$ dan $|A \cap B| = 1$ sedemikian sehingga $\mathbb{Z}_n = A+B$.

   (b) Buktikan bahwa jika $|A|+|B| > |G|$, maka $G = A*B$.

2. Misalkan K suatu lapangan hingga. Buktikan bahwa $1+1=0$ di K jika dan hanya jika untuk setiap $f \in K[x]$ dengan derajat f lebih besar atau sama dengan 1, polinom $f(X^2)$ merupakan polinom tereduksi.

ALJABAR LINEAR

BAGIAN PERTAMA

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{2018} = \ldots$

2. Jika $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \end{bmatrix}$ dengan $\alpha^2 \neq 1 \neq \beta^2$, maka $\det(A) = \ldots$

3. Diberikan vektor-vektor $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Salah satu basis subruang dari $\mathbb{R}^{2\times 2}$ yang dibangun oleh keempat vektor tersebut adalah ...

4. Pemetaan $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(u,v) = u_1v_1 - 3u_2v_1 - 3u_1v_2 + ku_2v_2$$

untuk setiap $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Himpunan semua nilai k yang membuat f hasil kali dalam di $\mathbb{R}$ adalah ...

5. Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memenuhi $A^TA = AA^T = 4I$. Himpunan semua nilai eigen A adalah ...

6. Misalkan $D : P_2 \to P_2$ dengan $D(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$. untuk semua $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Nilai eigen pemetaan $D^2 + D + I$ mempunyai multisiplitas geometri ...

7. Misalkan K adalah ruang nol matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, maka $K^\perp = \ldots$

8. Misalkan $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$

untuk semua bilangan real a, b, c, d. Himpunan

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

adalah basis $\mathbb{R}^{2\times 2}$, maka $[T]_X = \ldots$

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah transformasi linier pencerminan terhadap garis $y = \left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) x$. Tentukanlah $T(-5, 4)$.

2. Misalkan $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Buktikan bahwa $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq \text{rank}(A)+$ $\text{rank}(B)$.

3. Misalkan $x \in \mathbb{C}^n$ dengan $||x||_2 = 1$. Tentukan semua nilai eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & x^* \\ x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ serta vektor-vektor eigennya.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2019

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Diberikan barisan bilangan real (x_x). Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k}}{\sqrt{n}} = \ldots$$

2. Diberikan fungsi kontinu f dan g, dengan $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dan $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Jika $\lim_{n\to\infty} f(x) = A$ dan $\int_0^1 g(x)\, dx = B$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x)\, g\left(\frac{x}{n}\right) dx = \ldots$$

3. Misalkan $R = \mathbb{Z}_5[x]/I$ merupakan suatu gelanggang kuosien, dengan $I = \langle x^2 - 1 \rangle$ adalah ideal yang dibangun oleh polinom $x^2 - 1$ di $\mathbb{Z}_5[x]$. Banyaknya homomorfisma gelanggang yang bijektif dari R ke R adalah ...

4. Misalkan $(G, \circ)$ adalah grup dengan operasi $\circ$ (komposisi fungsi) dan $W = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{Z}_2$. Jika G merupakan himpunan yang unsur-unsurnya berupa pemetaan linear $g : W \to W$, dengan sifat untuk setiap basis β, $g(\beta) = \{g(b) \mid b \in \beta\}$ membentuk basis W, maka banyaknya subgrup berorde 2 di G adalah ...

5. Jika H adalah grup yang dibangun oleh α dan β, dengan $\alpha^2 = \beta^{2019} = (\alpha\beta)^2 = 1$, maka orde dari H adalah ...

6. Sebuah toko menjual empat jenis kembang gula rasa: mangga, jeruk, durian dan kopi. Untuk keperluan sampel akan dipilih paling banyak 3 rasa mangga, paling banyak 3 rasa jeruk, paling banyak 2

rasa durian, dan paling banyak 2 rasa kopi. Banyaknya cara untuk memilih sampel berukuran 5 adalah ...

URAIAN

1. Diberikan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial, terdapat $x_0 \in \mathbb{R}$ dengan $g(x_0) = 0$ dan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku $g(x) + g'(x) > 0$. Buktikan $[g(x)]^{2019} \geq 0$ untuk setiap $x \geq x_0$.

2. Diketahui Ω adalah koleksi semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

$$|f(x) - f(t)| \leq |x - t|^4,$$

untuk setiap $x, t \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa:

(i) untuk setiap $f \in \Omega$, f merupakan fungsi terbatas pada $\mathbb{R}$.

(ii) terdapat barisan fungsi (f_n) di dalam Ω, dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \infty.$$

3. Dua bilangan bulat a dan b disebut membangun gelanggang $\mathbb{Z}$, jika untuk setiap $c \in \mathbb{Z}, c = va + wb$, untuk suatu $v, w \in \mathbb{Z}$. Misalkan P merupakan peluang dua bilangan bulat yang dipilih secara acak dapat membangun $\mathbb{Z}$. Buktikan bahawa $P = \dfrac{6}{\pi^2}$. $\left(Petunjuk : Gunakan\ deret\ \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \right)$

4. Misalkan n merupakan bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi oleh 2 dan 5. Perlihatkan bahwa terdapat bilangan bulat q yang merupakan kelipatan dari n sedemikian sehingga semua digit dari q adalah 1. (Contoh: bila $n = 3$, maka $q = 111$ adalah kelipatan dari 3 yang semua digitnya adalah 1).

HARI KEDUA

(ALJABAR LINEAR, ANALISIS KOMPLEKS, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Matriks A adalah matriks ukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan asli genap dan ganjil yang berbeda satu dengan yang lain. Agar A menjadi matriks non-singular, maka banyaknya entri-entri bilangan ganjil paling sedikit adalah ...

2. Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan I adalah matriks identitas $n \times n$. Misalkan pula B adalah matriks $2n \times 2n$ dengan $B = \begin{bmatrix} A+I & A+2I \\ 0 & A+4I \end{bmatrix}$. Jika 2 adalah salah satu nilai eigen dari A, maka nilai-nilai eigen dari B yang dapat diketahui adalah ...

3. Jika
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z|^6 = 1 \right\}$$
dan
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z|^9 = 1 \right\},$$
maka banyaknya anggota $A \cap B$ adalah ...

4. Jika diketahui fungsi
$$f(z) = f(x+iy) = x^2 + axy + by^2 + i\left(cx^2 + dxy + y^2\right)$$
analitik di seluruh bidang kompleks, maka nilai dari $f(i)$ adalah ...

5. Koefisien suku yang memuat z^{4039} pada ekspansi deret Taylor fungsi $f(z) = z \sinh(z^2)$ di $z = 0$ adalah ...

6. Sebuah tes terdiri atas 10 soal. Setiap soal diberi nilai bulat dan paling sedikit diberi nilai 5. Bila soal pertama hanya boleh diberi nilai 10 atau 15 dan total nilai tes adalah 100, banyaknya cara memberi nilai pada tes tersebut adalah ...

URAIAN

1. Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam dan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis ortonormal V. Misalkan pula $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \subsetneq \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Tentukanlah banyaknya vektor yang normnya 1 dan ortogonal terhadap vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$.

2. Misalkan W adalah ruang vektor bagian dari ruang vektor $M_n(\mathbb{R})$ yang memenuhi $trace\,(AB) = 0$ untuk setiap $A, B \in W$. Tentukanlah bilangan bulat terkecil, sebut saja k, sedemikian sehingga $dim\ W \leq k$.

3. Diberikan $z_1, z_2, \ldots, z_n$ adalah bilangan-bilangan kompleks sehingga $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| > 0$. Buktikan bahwa

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0 \text{ jika dan hanya jika } \sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

($Re\,(w)$ *adalah notasi untuk bagian real dari bilangan kompleks* w)

4. Diberikan bilangan bulat $n \geq 4$. Tuliskan argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-4}{n-k}\binom{n+4}{k} = (n+4)\binom{2n-1}{n-1}.$$

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2020

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Jika himpunan $B \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas di bawah, serta himpunan $A = \{x \mid x \text{ adalah batas bawah dari } B\}$, maka $\sup A$ sama dengan ....

2. Diketahui fungsi f terintegral pada $[a, b]$, dengan fungsi Primtif $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika $E = \{x \in [a, b] \mid F'(x) \neq f(x)\}$, maka *closure* dari $[a, b] \setminus E$ sama dengan ...

3. Misalkan A merupakan suatu gelanggang polinom dengan koefisien di bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Penjumlahan dua unsur di A adalah sama dengan penjumlahan di gelanggang polinom biasa. Kemudian, perkalian $*$ di A sebagai berikut:

$$\beta x^k * (\alpha x^j) = \beta \sigma^k(\alpha) x^{k+j}$$

dimana $\sigma(a) = \overline{a}$, dengan $\overline{a}$ adalah konjugat dari a, untuk setiap $a \in \mathbb{C}$. Hasil dari $(x^{2020} + 2ix^7 + 9) * ((i-1)x^{20} + (1-i))$ adalah ...

4. Misalkan G adalah suatu grup yang dibangun oleh dua unsur a dan b. Salah satu relasi yang dipenuhi oleh a dan b adalah sebagai berikut:

$$a^2 = b^2 = (ab)^4 = 1,$$

maka orde terbesar dari G yang mungkin adalah ...

5. Misalkan

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{2^{2020}} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_{2^{2020}} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_{2^{2020}} \right\}$$

merupakan suatu gelanggang. Jika

$$M = \{\alpha \in B \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ sehingga } \alpha^n = 0\},$$

maka $M = ...$

6. Banyaknya solusi bilangan bulat non-negatif dari persamaan $a + b + c = 13$ dengan $a \leq 4$, $2 \leq b \leq 5$, dan $1 \leq c \leq 6$ adalah ...

URAIAN

1. Diberikan fungsi $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, dengan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Selanjutnya, diberikan fungsi $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $g'(x) = f(x)$, untuk setiap $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Apakah ada **fungsi kontinu** $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sehingga

$$g(x) = \phi(x)(x + 1),$$

untuk setiap $x \in [-1, 1]$? Jika ada, tentukan fungsi ϕ tersebut. Berikan penjelasan pada jawaban Saudara!

2. Diketahui $x_1 = \frac{1}{2}$ dan

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Selidiki apakah barisan (x_n) konvergen! Jika konvergen, tentukan limit dari barisan tersebut. Berikan penjelasan pada jawaban Saudara!

3. Misalkan G adalah suatu grup hingga yang tidak mengandung unsur berorder 3. Misalkan untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $(xy)^3 = x^3y^3$.

   (a) Buktikan bahwa untuk setiap $g \in G$ terdapat $z \in G$ sehingga $g = z^3$.

(b) Tunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $xy^2 = y^2x$.

(c) Buktikan bahwa G komutatif.

4. Diberikan himpunan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Bila Anda memilih $2^{n-1} + 1$ himpunan bagian berbeda dari A, buktikan bahwa di antara $2^{n-1} + 1$ himpunan bagian terpilih terdapat dua himpunan sedemikian sehingga yang satu adalah himpunan bagian dari yang lain.

HARI KEDUA

(ALJABAR LINEAR, ANALISIS KOMPLEKS, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Diketahui bahwa matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & a & 10 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

memiliki rank sama dengan 2. Nilai ab adalah ...

2. Misalkan A sebuah matriks ukuran 9×9 yang memenuhi sifat:

   (a) Semua komponen baris pertama matriks A berbeda. Komponen yang dimaksud adalah bilangan asli $\{n_1, n_2, \ldots, n_9\}$.

   (b) Komponen baris lainnya adalah suatu permutasi dari komponen pada baris pertama.

   Nilai eigen yang senantiasa dimiliki oleh matriks A dengan sifat tersebut adalah ...

3. Solusi dari relasi rekuren $u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-3}$, $(n \geq 3)$, dengan syarat awal $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, dan $u_2 = 0$ adalah ...

4. Banyak bilangan kompleks z sehingga $z^{2020} = 1$ tetapi $z^{20} \neq 1$ adalah ...

5. Cakram terbuka

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{3} \right| < r \right\}$$

dipetakan oleh fungsi

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

menjadi cakram terbuka

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Nilai r adalah ...

6. Penyelesaian dari persamaan

$$ie^z + 1 = 0$$

yang memenuhi $4 < |z| < 5$ adalah ...

URAIAN

1. Tentukanlah bilangan bulat positif k terkecil, sedemikian sehingga untuk setiap k buah matriks $A_1, A_2, \ldots, A_k$ berukuran 100×100 dengan komponen riil, senantiasa terdapat bilangan riil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ yang tidak semuanya nol sehingga

$$\det(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k) = 0.$$

Jelaskan jawaban Anda!

2. Misalkan

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Misalkan juga $\mathbf{b}$ sebuah vektor tak nol di $\mathbb{R}^3$ dan diketahui bahwa tiga vektor $\mathbf{e}_1$, $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ merupakan solusi suatu sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan A suatu matriks berukuran 3×3.

(a) Buktikan bahwa kombinasi linear $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, dengan a_1, a_2, a_3 skalar, juga merupakan solusi sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika dan hanya jika $a_1 + a_3 = a_2$.

(b) Jika

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

tentukan semua nilai eigen real dari A.

3. Misalkan $z \in \mathbb{C}$ sehingga $|z| + |z - 2020| = 2020$. Tunjukkan bahwa $|z - (20 + 20i)| \geq 20$.

4. Untuk bilangan bulat $x, y \geq 1$ tuliskan butki kombinatorial dari

$$xy = \binom{x+y}{2} - \binom{x}{2} - \binom{y}{2}.$$

KNMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2021

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Diberikan himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dengan $B = \{\frac{1}{x} : x \in A\}$. Jika $\inf(A) > 0$, maka $\sup(B) = \ldots$, dan jika $\inf(A) = 0$, maka $\sup(B) = \ldots$.

2. Diberikan barisan bilangan real (a_n), dengan
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k! + 4^{k+1}}{k!4^k},$$
maka $\lim_{n\to\infty} a_n = \cdots$

3. Misalkan a adalah bilangan asli terkecil yang mengakibatkan $\mathbb{Z}[x]/\langle a, x^2+1\rangle$ merupakan suatu field/lapangan yang mempunyai lebih dari satu unsur. Jika banyaknya unsur di lapangan ini adalah b, maka nilai $a \times b$ adalah ...

4. Misalkan G adalah suatu grup berorde 2021. Misalkan juga x dan y merupakan dua unsur di G yang tidak sama dengan identitas dan memiliki orde yang berbeda. Jika H adalah subgrup terkecil yang memuat x dan y, maka banyaknya unsur di H adalah ....

5. Solusi dari relasi rekuren $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2^n$, $(n \geq 3)$ dengan syarat $x_1 = 1, x_2 = 11$ adalah ....

URAIAN

1. Diberikan barisan bilangan real positif (x_n) dengan $x_{n+1} \leq x_n - \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa barisan (x_n) konvergen, kemudian tentukan nilai limitnya.

2. Diberikan fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika setiap himpunan terbuka G diperoleh $f(G)$ terbuka, buktikan bahwa fungsi f monoton.

3. Misalkan S adalah suatu himpunan yang memiliki dua operasi biner $\circ$ dan $\star$. Diketahui bahwa masing-masing operasi mempunyai unsur identitas (yang tidak mesti sama) dan untuk setiap $a, b, c, d \in S$ berlaku
$$(a \star b) \circ (c \star d) = (a \circ c) \star (b \circ d).$$
Haruskah operasi biner $\circ$ dan $\star$ merupakan operasi yang sama?

4. Misalkan $\mathbb{Z}_3[x]$ merupakan gelanggang polinom dengan koefisien-koefisien di $\mathbb{Z}_3$. Diberikan $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ dengan $x^{2k} - 1$ membagi $(f(x))^2 - 1$ untuk suatu bilangan asli $k \geq 1$. Buktikan:
   (a) $(f(x) - 1)(f(x) + 1) = a(x)(x^2 - 1)$ dan $(f(x) - x)(f(x) + x) = b(x)(x^2 - 1)$, untuk suatu $a(x)$ dan $b(x)$ di $\mathbb{Z}_3[x]$.
   (b) Jika $x^2 - 1$ tidak membagi $f(x) - x$ dan $f(x) + x$, maka $x^2 - 1$ membagi $f(x) - 1$ atau $f(x) + 1$.

5. Misalkan N adalah suatu bilangan bulat positif, dan j adalah suatu bilangan irasional. Buktikan bahwa terdapat bilangan rasional a/b dengan $1 \leq b \leq N$ memenuhi
$$\left| j - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b(N+1)}.$$

HARI KEDUA

(ALJABAR LINEAR, ANALISIS KOMPLEKS, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Misalkan T pemetaan linear dari $\mathbb{R}^{2021}$ ke $\mathbb{R}^3$ sehingga untuk setiap $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^{2021}$, vektor $T(\mathbf{x})$ di $\mathbb{R}^3$ berbentuk

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$$

untuk suatu $a, b \in \mathbb{R}$. Dimensi terkecil yang mungkin dari kernel T adalah ...

2. Banyaknya nilai eigen positif dari matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

adalah ...

3. Jika a dan b merupakan bilangan real dengan $0 < a < b < 2\pi$ yang memenuhi persamaan $e^{ai} + e^{bi} = i\sqrt{2}$, maka nilai dari $\frac{b}{a}$ adalah ...

4. Fungsi kompleks $f(z) = \frac{1}{z}$ memetakan garis $\text{Re}(z) = \frac{1}{4}$ ke lingkaran dengan jari-jari ...

5. Kata sandi tanpa perulangan karakter dibentuk dengan menggunakan huruf kapital. Sebuah kata sandi dikatakan *sempurna* bila tidak memuat untaian karakter XYZ maupun ZYX. Besarnya peluang untuk membentuk kata sandi *sempurna* yang terdiri atas 8 huruf adalah ....

URAIAN

1. (a) Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suatu pemetaan yang didefinisikan dengan

$$T(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\mathbf{x} & \text{jika } \mathbf{x} = (1,0,0) \\ \mathbf{x} & \text{jika } \mathbf{x} \neq (1,0,0) \end{cases}$$

Buktikan bahwa T pemetaan tidak linear dan jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, maka berlaku $T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = 0$.

(b) Jelaskan apakah terdapat pemetaan **tidak** linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sehingga berlaku $T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

2. Suatu matriks B berukuran 2×2 dengan komponen real dikatakan *menarik* jika terdapat matriks A berukuran 2×2 dengan komponen real sehingga

$$AB - BA = B^2$$

(a) Jelaskan apakah matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ menarik atau tidak.

(b) Jika matriks B menarik, buktikan bahwa B nilpoten, yakni $B^2 = 0$.

3. Misalkan $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ dan $B = \{z = x + (4 - 2x)i \ : \ x \in \mathbb{R}\}$. Jika $C = \{a - b \ : \ a \in A, b \in B\}$, maka tentukan $\inf\{|c| \ : \ c \in C\}$.

4. Diketahui suatu fungsi $f(z)$ analitik pada domain D. Jika ada konstanta $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ yang tidak semuanya nol sehingga $c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0$ untuk setiap $z \in D$, maka buktikan bahwa $f(z)$ adalah fungsi konstan pada D.

5. Pengubinan dengan panjang $n \geq 1$ adalah sebuah cara menutupi lantai berukuran $1 \times n$ dengan menggunakan ubin 1×1 berwarna merah, putih, hijau, kuning, atau biru. Sebuah pengubinan dikatakan *ideal* bila pengubinan menggunakan genap ubin merah, genap ubin hijau, dan ganjil ubin biru. Tentukan banyaknya pengubinan *ideal* dengan panjang n.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2022

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq |x^3 - x^2 y|^2$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Jika $f(1) = 1$, maka $f(2022) = \ldots$

2. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, maka nilai $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \ldots$

3. Misalkan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Baris kedua dari $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ agar $\alpha = (\sigma \circ \tau)^{-1}$ adalah ...

4. Semua $y \in \dfrac{\mathbb{Z}_8[x]}{\langle x^2 - 1 \rangle}$ sehingga $(7 + 5x)y = 0$ adalah ...

5. Misalkan n adalah bilangan asli yang terletak di antara 1 dan 2022 yang memuat digit 0. Banyaknya bilangan n yang demikian adalah ...

URAIAN

1. Diberikan fungsi $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ memenuhi $f(1) = 1$ dan $f'(x) = \dfrac{x}{x^4 + [f(x)]^4}$ untuk setiap $x \in [1, \infty)$. Buktikan bahwa $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ ada dengan nilainya tidak melebihi $1 + \frac{\pi}{8}$.

2. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$, dengan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_n = (\sqrt{2})^{x_{n-1}}$ untuk $n > 1$. Buktikan bahwa X konvergen, kemudian tentukan nilai limitnya.

3. Diberikan grup G dan $\phi : G \to G$ adalah suatu homomorfisma grup. Buktikan atau sangkal pernyataan berikut: ϕ adalah suatu isomorfisma jika dan hanya jika untuk setiap $g \in G$, orde g sama dengan orde $\phi(g)$.

4. Misalkan $R = \dfrac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^2 - x \rangle}$, dimana p adalah bilangan prima. Tunjukkan bahwa
$$S = \{(1-x)a \mid a \in R\}$$
isomorfik dengan $\mathbb{Z}_p$.

5. Misalkan n adalah suatu bilangan 12 digit yang disusun dari 3,4,5,6, atau 7. Jika setiap digit pada n muncul paling sedikit 2 kali dan paling banyak 4 kali, tentukan banyaknya susunan bilangan n yang dapat dibentuk.

HARI KEDUA

(ANALISIS KOMPLEKS, ALJABAR LINEAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Jika A matriks berukuran 2×2 dengan $\det(A) > 2$ yang memenuhi persamaan
$$A^2 = 2A + \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$
maka $\det(A) = \dots$

2. Misalkan P_1 adalah ruang polinom dengan koefisien real berderajat paling tinggi 1 yang dilengkapi dengan hasil kali dalam
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \text{untuk setiap } f, g \in P_1.$$
Diberikan pemetaan linear $T : P_1 \to \mathbb{R}^3$ yang memenuhi
$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T(2x-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$
Jika polinom $h(x) = ax + b$ dengan $b \neq 0$ tegak lurus terhadap setiap vektor di
$$\{f \in P_1 : T(f) = 0\}$$
maka $\dfrac{a}{b} = \dots$

3. Banyak bilangan kompleks tak real z yang memenuhi $z^{20} = 22$ adalah $\dots$

4. Jika $z = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + i\right)$ maka $\sqrt{2}(\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)) = \dots$ (tuliskan jawaban dalam bentuk paling sederhana)

5. Sisi-sisi dari petak persegi satuan sebuah papan catur 4×4 diwarnai merah. Banyaknya sisi satuan (panjangnya 1 satuan) minimal yang

harus diwarnai sehingga setiap petak persegi satuan memiliki paling sedikit tiga sisi berwarna merah adalah ...

URAIAN

1. Tentukan semua pasangan bilangan real a dan b sehingga sistem persamaan linear

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

konsisten (memiliki paling sedikit satu solusi). Jelaskan jawaban anda.

2. Misal $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan real. Jika $\operatorname{tr}(AB) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^2 + b_{ij}^2)$, buktikan bahwa $A^T = B$.

3. Diberikan bilangan-bilangan kompleks a dan b dengan $|a| = |b| = 1$. Tunjukkan bahwa

$$z = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

merupakan bilangan real dan memenuhi $0 \leq z \leq 4$.

4. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^3}{z^2}, & \text{jika } z \neq 0, \\ 0, & \text{jika } z = 0. \end{cases}$$

Apakah fungsi f terdiferensialkan kompleks di titik 0? Jelaskan!

5. Diberikan 30 titik dalam koordinat kartesius yakni titik $D_i(i, 1)$ dimana $i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ dan titik $D_j(j - 15, 4)$ dimana $j \in \{16, 17, \ldots, 30\}$. Tentukan banyaknya segitiga sama kaki yang dapat dibentuk dengan ketiga titik sudutnya diambil dari $\{D_1, D_2, \ldots, D_{30}\}$.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2023

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

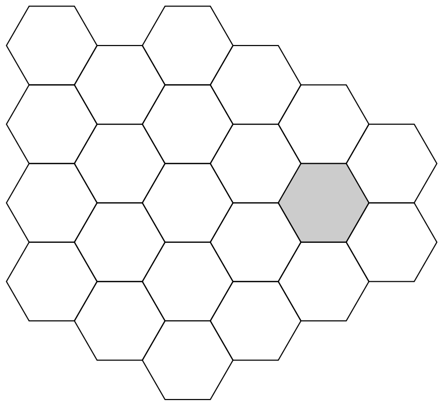
1. Misalkan fungsi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ memiliki turunan ke $n - 1$ yang kontinu pada $[a, b]$. Jika untuk suatu $c \in [a, b]$, $f^{(k)}(c) = 0$ dan $g^{(k)}(c) = 0$ untuk semua $k = 0, 1, 2, \cdots n - 2$ serta $g^{(n-1)}(c) \neq 0$. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{e^x}{g(x)} f(x) = \cdots$

2. Diberikan barisan real $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$. Jika $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$ dan $y_n = 1 + x_n$, maka $\lim\limits_{x \to \infty} y_n$ adalah ...

3. Diketahui bahwa $G := \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan dan $H := \{3a + 5b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subgrup dari G. Kardinalitas dari G/H adalah ...

4. Diketahui $\mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{24} := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}_{23},\ b \in \mathbb{Z}_{24}\}$ membentuk ring dengan operasi $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 \mod 23,\ b_1 + b_2 \mod 24)$ dan $(a_1, b_1)\dot{(}a_2, b_2) = (a_1 a_2 \mod 23,\ b_1 b_2 \mod 24)$. Banyaknya ideal di ring $\mathbb{Z}_{23} \times Z_{24}$ adalah ...

5. Diberikan 22 daerah segienam seperti pada gambar. Setiap segienam kecuali yang terarsir hitam, akan diwarnai tepat satu warna dari tiga pilihan warna: merah, hijau, dan biru sedemikian sehingga setiap dua segienam yang memiliki sisi persekutuan berbeda warna. Banyak cara pewarnaan yang dapat dilakukan adalah ...



URAIAN

1. Misalkan n adalah bilangan bulat 8 digit dengan digit pertama adalah 5. Berapakah peluang untuk mendapatkan n yang memuat tidak lebih dari 5 digit berbeda?

2. Diberikan barisan-barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) dengan (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, barisan (y_n) konvergen ke $y \in \mathbb{R}$. Jika barisan (z_n) didefinisikan dengan $z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i y_{n+1-i}$. Buktikan bahwa barisan (z_n) konvergen ke xy.

3. Diberikan fungsi kontinu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ memenuhi $(f(x))^2 \leq 4\int_0^x (f(t))^2\, dt$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Buktikan bahwa $3(f(x))^2 + 2f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

4. (a) Berikan suatu contoh homomorfisma grup ψ yang injektif dari grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ ke grup S_5.

   (b) Ada berapa banyak homomorfisma grup dari grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ ke S_5?

5. Diketahui R merupakan suatu ring dengan identitas perkalian 1_R dan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ untuk setiap $x, y \in R$. Apakah R merupakan ring komutatif?

HARI KEDUA

(ANALISIS KOMPLEKS, ALJABAR LINEAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Banyaknya bilangan asli kurang dari atau sama dengan 2023 yang memuat digit 0 adalah ...

2. Misalkan l garis di $\mathbb{R}^3$ yang merupakan perpotongan antara bidang $x + 2y + 3z = 20$ dan bidang $x - y + z = 23$. Jika garis l memotong bidang$-xy$ di titik $P(a, b, c)$, maka nilai dari $a + b + c$ adalah ...

3. Misalkan I adalah operator identitas pada $\mathbb{R}^3$ dan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah operator linear yang memenuhi

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

   Nilai dari $(T - I) \circ (T - 2I) \circ (T - 3I)\left(\begin{bmatrix}9\\7\\8\end{bmatrix}\right)$ adalah ...

4. Banyak bilangan kompleks tak real z yang memenuhi $|z - 20| + |z - 23| = 3$ adalah ...

5. Nilai m agar fungsi kompleks $f(z) = \dfrac{z - 2023}{1 - 3z}$ memetakan lingkaran $|z - 3| = m$ menjadi garis lurus adalah ...

URAIAN

1. Tentukan semua bilangan real a, b, c sehingga matriks

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\a & b & c\end{bmatrix}$$

   memiliki nilai eigen 2, 0, dan 23

2. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dengan komponen real sedemikian sehingga vektor Au dan u ortogonal untuk setiap vektor $u \in \mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa $A^T = -A$.

3. Misalkan $\omega \neq 1$ merupakan bilangan kompleks dengan sifat $w^7 = 1$. Tentukan semua bilangan bulat positif n sehingga

$$\sum_{k=1}^{n}(1+\omega^k+\omega^{2k}+\omega^{3k}+\omega^{4k}+\omega^{5k}+\omega^{6k}) = 2023$$

4. Buktikan

$$|\tan(x+iy)| \geq \frac{|e^y - e^{-y}|}{e^y + e^{-y}} \qquad \text{untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

5. Dalam suatu turnamen terdapat 28 tim yang akan bertanding. Masing-masing tim bermain satu sama lain hanya sekali. Perolehan poin pada setiap pertandingan adalah 2 poin bagi pemenang, 0 poin bagi yang kalah, dan masing-masing 1 poin untuk kedua tim bila berakhir seri. Dalam turnamen tersebut, lebih dari 75% pertandingan berakhir seri. Buktikan bahwa terdapat dua tim yang meraih total poin yang sama besar.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2024

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Jika I koleksi interval buka pada $\mathbb{R}$ dengan $I = \{I_n : I_n = \left(1, 1+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\}$, maka $\bigcup\limits_{I_n \in I} I_n = \cdots$ dan $\bigcap\limits_{I_n \in I} I_n = \cdots$.

2. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}, f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dengan $f_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1,1]$. Untuk setiap dua bilangan asli m dan n dengan $m \neq n$, nilai $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f_n(x) f_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \cdots$

3. Diberikan G suatu grup siklis dengan orde 2024. Banyak elemen G yang berorde ganjil adalah $\ldots$.

4. Jika a, b, c, d merupakan bilangan bulat sehingga $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mempunyai akar $\sqrt{3} - \sqrt{5}$, maka nilai $a+b+c+d$ adalah ....

5. Dalam sebuah kotak terdapat kelereng berwarna biru, hijau, merah, kuning, dan abu-abu dengan masing-masing warna terdapat 9 kelereng. Banyak cara mengambil 9 kelereng dari kotak sehingga setiap warna paling sedikit terambil satu kali adalah ....

URAIAN

1. Misalkan a dan b bilangan real positif yang memenuhi $\sqrt{b} < a < 2\sqrt{b}$. Barisan bilangan real (x_n) didefinisikan dengan $x_0 \geq 0$ dan

$$x_n = \frac{a x_{n-1} + b}{x_{n-1} + a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Apakah $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ada? Jika ya, tentukan nilai limitnya.

2. Diberikan fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan sifat untuk setiap $x \in [a, b]$ terdapat $p \in [a, b]$ dengan $|f(p)| \leq \dfrac{2023}{2024}|f(x)|$. Buktikan terdapat $c \in [a, b]$ dengan $f(c) = 0$.

3. Diketahui $R = \mathbb{Z}_{1013} \times \mathbb{Z}_{1013}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian berikut:

$$(a, b) + (c, d) = ((a + c) \mod 1013, (b + d) \mod 1013)$$
$$(a, c) \cdot (c, d) = (ac \mod 1013, (ad + bc + bd) \mod 1013)$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in R$. Buktikan terdapat tepat sebanyak 2024 elemen taknol di R yang merupakan pembagi nol. (**Catatan:** 1013 bilangan prima).

4. Suatu grup hingga $(G, *)$ berorde n dikatakan *rapi* jika terdapat n unsur berbeda $g_1, g_2, \cdots, g_n$ sehingga $G = \{g_1 * g_2, g_2 * g_3, \cdots, g_{n-1} * g_n, g_n * g_1\}$

   (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_7, +)$ *rapi*

   (b) Buktikan bahwa untuk setiap n genap, $(\mathbb{Z}_n, +)$ **tidak** *rapi.*

5. Tunjukkan bahwa jika $n + 1$ bilangan bulat berbeda diambil dari himpunan $\{1, 2, \cdots, kn\}$, maka selalu ada dua bilangan bulat yang selisihnya paling banyak $k - 1$.

HARI KEDUA

(ANALISIS KOMPLEKS, ALJABAR LINEAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Banyak bilangan kompleks z yang memenuhi $z^{20} = 1$ dan $z^{24} \in \mathbb{R}$ adalah ...

2. Jika diberikan fungsi kompleks $f(z) = \overline{z}e^{-|z|^2}$, maka nilai $f'(i)$ adalah ...

3. Misal P_4 adalah ruang polinomial dengan koefisien real berderajat paling tinggi 4. Didefinisikan pemetaan $T_k : P_4 \to P_4$ dengan

$$T_k\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right) := a_0 + a_1^k x^2 + a_2x^4.$$

   Banyak pasangan bilangan (k, m) dengan $k, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ sehingga T_k^m pemetaan linear adalah ...(Catatan: $T_k^m := \underbrace{T_k \circ T_k \circ \cdots \circ T_k}_{\textit{sebanyak } m \textit{ kali}}$.)

4. Misalkan $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{10}}$ basis baku dari ruang vektor $\mathbb{R}^{10}$. Tinjau dua himpunan $U = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4} + \mathbf{e_5} + \mathbf{e_6}, \mathbf{e_7} + \mathbf{e_8} + \mathbf{e_9} + \mathbf{e_{10}}\}$ dan $V = \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}, \mathbf{e_5} + \mathbf{e_6}, \mathbf{e_7} + \mathbf{e_8}, \mathbf{e_9} + \mathbf{e_{10}}\}$. Dimensi terkecil dari subruang yang memuat U dan V adalah ...

5. Dalam kejuaraan catur yang diikuti oleh 10 peserta, setiap peserta bertanding dengan peserta lain tepat satu kali. Peserta yang menang, kalah, dan seri di setiap pertandingan, berturut-turut diberikan skor 2, 0, dan 1. Jika total skor setiap peserta di akhir kejuaraan berbeda-beda, maka maksimal banyak pertandingan yang mungkin dimenangkan oleh peserta dengan skor terendah adalah ....

URAIAN

1. Untuk setiap bilangan kompleks z dengan $|z| = 1$, tunjukkan bahwa

$$1 \leq |1 + z| + |1 + 2z| \leq 5.$$

2. Tentukan daerah D di bidang kompleks sehingga untuk setiap $z \in D$, $\lim\limits_{|z| \to \infty} e^z$ ada.

3. Diberikan matriks
$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$
dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Buktikan bahwa matriks A dapat didiagonalkan.

4. Diberikan matriks
$$A = \begin{bmatrix} 20 & 24 \\ p & q \end{bmatrix}$$
dengan p dan q real. Selidiki apakah terdapat bilangan real p dan q agar ada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ sehingga persamaan
$$A^2\mathbf{x} = A\mathbf{b}$$
tidak memiliki solusi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Jika ada, sebutkan semua p dan q yang mungkin. Berikan penjelasan jawaban Saudara.

5. Jika koefisien a dan b dari persamaan garis lurus $ax + by = 0$ adalah dua bilangan berbeda dari $\{0, 1, 2, 3, 6, 7\}$, tentukan banyaknya garis lurus berbeda yang dapat dibentuk.

ONMIPA-PT TINGKAT WILAYAH 2025

HARI PERTAMA

(ANALISIS REAL, STRUKTUR ALJABAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Banyaknya unsur berorde 6 pada grup $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6$ adalah ...

2. Nilai dari $\sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$ adalah ...

3. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_k$ bilangan real nonnegatif, maka

$$\lim_{n\to\infty} (A_1^n + A_2^n + \cdots + A_k^n)^{1/n} = \ldots$$

4. Diberikan fungsi terdefierensial f dan g pada $(0, \infty)$. Jika untuk setiap $x \in (0, \infty)$ memenuhi $xf'(x) + g(x) = 0$ dan $xg'(x) + f(x) = 0$ maka $\{x \in (0, \infty) : f(x) - g(x) = 2025x\} = \ldots$

5. Himpunan

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z}_{20} \right\}$$

membentuk ring dengan operasi berikut.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) \bmod 20 & (b_1 + b_2) \bmod 20 \\ 0 & (c_1 + c_2) \bmod 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 a_2) \bmod 20 & (a_1 b_2 + b_1 c_2) \bmod 20 \\ 0 & (c_1 c_2) \bmod 20 \end{pmatrix}$$

Banyaknya unsur yang punya invers terhadap operasi $\times$ di R adalah ...

URAIAN

1. Tentukan solusi persamaan rekursif $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 6a_n = 0$ dengan syarat awal $a_0 = 3$ dan $a_1 = 4$.

2. Diberikan barisan bilangan real (a_n) dan (b_n) yang masing-masing konvergen ke bilangan real α dan β. Jika untuk setiap $n \geq 0$ didefinisikan

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

buktikan bahwa S_n konvergen ke $\alpha\beta$.

3. Jika fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mempunyai derivatif hingga tingkat 2 pada (a, b) dengan sifat $f(a) = f(b)$ dan setiap $x \in [a, b]$ berlaku $f''(x) - 2f'(x) + f(x) \leq 0$, buktikan bahwa $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(a)$.

4. Suatu unsur a di ring $(R, +, *)$ disebut *unsur idempoten* apabila $a * a = a$. Ring R dikatakan *menarik* apabila banyaknya unsur idempoten di R sama dengan suatu bilangan prima.

   (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$ merupakan ring menarik.

   (b) Jika p dan q merupakan dua bilangan prima yang berbeda, buktikan bahwa $(\mathbb{Z}_{pq}, +, \cdot)$ tidak menarik.

5. Diberikan grup hingga $(G, \cdot)$ dengan unsur identitas e. Misalkan terdapat a suatu unsur yang bukan identitas di G dan bilangan prima p sehingga

$$x^{p+1} = a^{-1}xa \quad \text{untuk setiap } x \in G.$$

   Buktikan bahwa:

   (a) Untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $(xy)^p = y^p x^p$.

   (b) Untuk setiap $x \in G$ berlaku $x^{p^2} = e$.

HARI KEDUA

(ANALISIS KOMPLEKS, ALJABAR LINEAR, KOMBINATORIKA)

ISIAN SINGKAT

1. Jika $z \neq 0$ merupakan bilangan kompleks yang memenuhi $z + \frac{1}{z} = 1$ maka nilai $z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}$ adalah ...
2. Jika $z \in \mathbb{C}$ memenuhi $\tan\left(\frac{1}{2}z\right) = 2i$, maka bagian imajiner dari z adalah ...
3. Misal J matriks berukuran 10×10 dengan semua entrinya adalah satu. Lebih lanjut, juga diberikan matriks identitas I berukuran 10×10. Invers dari matriks $I + 2025J$ berbentuk $aI - bJ$ dengan a, b bilangan real. Nilai dari $ab = \ldots$
4. Diberikan ruang vektor $P_1(\mathbb{R}) = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ dengan hasil kali dalam
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$
Unsur di $P_1(\mathbb{R})$ dengan panjang/norm $2\sqrt{2}$ dan tegak lurus dengan $1 - x$ adalah ...dan ...
5. Suatu bilangan 6 digit dengan setiap digitnya berbeda disebut bilangan cantik jika semua digitnya diambil dari $\{1, 2, \ldots, 6\}$ dan setiap dua digit yang berurutan selisihnya bukan kelipatan 3. Banyaknya bilangan cantik adalah ...

URAIAN

1. Diberikan himpunan $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$. Tentukan nilai minimum dari $|z^2 + 1 + 2025z|$ untuk semua $z \in D$ dan cari semua titik yang mencapai minimum tersebut.
2. Tentukan semua fungsi entire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yang memenuhi $f(z) = f\left(\frac{2025}{z}\right)$ untuk $z \neq 0$.
3. Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $\{u, v\}$.

(a) Tentukan semua bilangan real p sehingga subruang

$$W_p = \{k_1u+k_2v+k_3(pu+p^2v) : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R},\ k_1+2k_2+3k_3 = 0\}$$

tidak sama dengan V.

(b) Untuk setiap nilai p yang diperoleh pada bagian (a), tentukan basis dari ruang vektor W_p.

4. Misalkan $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ suatu operator linear yang memenuhi $T^5 = T^2$. Buktikan bahwa

$$\mathrm{Im}(T^5) \oplus \ker(T^2) = \mathbb{R}^7.$$

Catatan: Jika $P : V \to V$ suatu operator linear, maka $\mathrm{Im}(P) = \{P(v) \mid v \in V\}$ dan $\ker(P) = \{v \in V \mid P(v) = 0\}$.

5. Buktikan bahwa tidak ada persegi panjang dengan luas 20 satuan yang dapat dibentuk menggunakan 5 jenis tetromino pada gambar berikut, masing-masing 1 kali.