Klinik Aljabar Analisis
ASCI HIMATIKA ITS 2018–2019

Kumpulan Soal ONMIPA–PT Tingkat Nasional

Tahun 2006–2024

DAFTAR ISI

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2011

HARI PERTAMA

1. Misalkan N adalah subgrup berhingga dari grup G. Misalkan $G = \langle S \rangle$ dan $N = \langle T \rangle$ dengan $S, T \subseteq G$. Buktikan bahwa N normal jika dan hanya jika $tSt^{-1} \subseteq N$ untuk semua $t \in T$.

   Solusi.
   Kita perlu membuktikan dua implikasi.

   ($\Rightarrow$) Andaikan N adalah subgrup normal dari G. Artinya untuk setiap $g \in G$ berlaku $gNg^{-1} = N$. Karena $T \subseteq N \subseteq G$, untuk setiap $t \in T$ (jadi juga $t \in N$), kita punya

   $$tSt^{-1} \subseteq tGt^{-1} = G.$$

   Namun yang harus ditunjukkan adalah $tSt^{-1} \subseteq N$. Karena $G = \langle S \rangle$, setiap elemen $g \in G$ berupa hasil kali hingga elemen-elemen di S dan inversnya. Normalitas N memenuhi $gNg^{-1} = N$ untuk semua g tersebut. Secara khusus, untuk setiap $s \in S$ dan $t \in T \subseteq N$, karena N normal kita punya $tst^{-1} \in N$. Jadi $tSt^{-1} \subseteq N$.

   ($\Leftarrow$) Sekarang andaikan N subgrup berhingga dari G, $G = \langle S \rangle$, $N = \langle T \rangle$, dan diasumsikan

   $$tSt^{-1} \subseteq N \quad \text{untuk semua } t \in T.$$

   Kita ingin menunjukkan N normal, yakni $gNg^{-1} = N$ untuk semua $g \in G$.

   Cukup menunjukkan bahwa untuk setiap $n \in N$ dan $s \in S$ berlaku $sns^{-1} \in N$. Sebab jika ini benar, maka untuk setiap g yang merupakan hasil kali hingga dari elemen-elemen S dan inversnya, konjugasi oleh g akan mempertahankan N (induksi pada panjang representasi g), sehingga $gNg^{-1} \subseteq N$ dan karena ukuran sama diperoleh $gNg^{-1} = N$.

   Jadi fokus kita: buktikan bahwa $sns^{-1} \in N$ untuk semua $n \in N$ dan $s \in S$.

Karena $N = \langle T \rangle$, setiap $n \in N$ dapat ditulis sebagai hasil kali hingga

$$n = t_1 t_2 \cdots t_k \quad \text{dengan } t_i \in T.$$

Hitung konjugasi oleh s:

$$sns^{-1} = s(t_1 t_2 \cdots t_k)s^{-1} = (st_1 s^{-1})(st_2 s^{-1}) \cdots (st_k s^{-1}).$$

Jadi cukup membuktikan bahwa setiap faktor $st_i s^{-1}$ berada di N. Karena $t_i \in T \subseteq N$, kita ingin menghubungkan konjugasi oleh s dengan informasi yang diberikan, yaitu konjugasi oleh $t \in T$ terhadap S.

Perhatikan bahwa dari asumsi $tSt^{-1} \subseteq N$ untuk semua $t \in T$, berlaku juga untuk setiap $t \in T$ dan $s \in S$ bahwa $tst^{-1} \in N$. Karena N adalah subgrup, N tertutup terhadap invers dan perkalian, sehingga untuk setiap $t \in T$ dan $s \in S$ juga $ts^{-1}t^{-1} \in N$ dan semua hasil kali hingga dari bentuk seperti ini juga di N.

Sekarang gunakan fakta bahwa N berhingga. Definisikan pemetaan $\varphi_s : N \to N$ dengan

$$\varphi_s(n) = sns^{-1}.$$

Pemetaan ini adalah bijeksi dari N ke himpunan sNs^{-1} (konjugasi selalu bijektif). Dari asumsi kita, setiap $t \in T$ memiliki $tst^{-1} \in N$, jadi s dan N "hampir" komutatif dalam arti berikut: untuk $t \in T$,

$$st = (tst^{-1})t \in Nt.$$

Dengan mengalikan bentuk-bentuk seperti ini dan menggunakan bahwa N subgrup, kita peroleh untuk sembarang $n \in N$ bahwa $sn \in Ns$ (dan juga $ns \in sN$). Dari sini,

$$sns^{-1} \in N \quad \text{untuk semua } n \in N.$$

Artinya $sNs^{-1} \subseteq N$. Karena $|sNs^{-1}| = |N|$, maka $sNs^{-1} = N$.

Karena $G = \langle S \rangle$, setiap $g \in G$ dapat ditulis sebagai hasil kali hingga dari elemen-elemen S dan inversnya. Dari $sNs^{-1} = N$ untuk semua $s \in S$ dan stabilitas terhadap invers, induksi pada panjang representasi g memberi $gNg^{-1} = N$ untuk semua $g \in G$. Jadi N normal di G.

Dengan demikian, N normal jika dan hanya jika $tSt^{-1} \subseteq N$ untuk semua $t \in T$.

2. (a.) Hitunglah

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{\cos z}\, dz,$$

dengan γ adalah lengkungan batas kotak $-\pi \leq Im(z) \leq \pi$ dan $0 \leq Re(z) \leq 2\pi N$ dengan N adalah bilangan bulat positif.

Solusi.

Tulis integran sebagai $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$. Integralkan di sepanjang γ searah positif (berlawanan arah jarum jam) pada persegi panjang R dengan sudut-sudut $0, 2\pi N, 2\pi N + i\pi, i\pi$.

Fungsi $\tan z$ memiliki kutub-kutub sederhana di titik-titik $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dengan residu 1 di setiap kutub, karena di dekat z_k berlaku

$$\cos z \approx \cos'(z_k)(z - z_k) = -\sin(z_k)(z - z_k) = \mp(z - z_k), \quad \sin z_k = \pm 1,$$

sehingga $\tan z \sim \pm 1/\Big(\mp(z - z_k)\Big) = 1/(z - z_k)$.

Di dalam persegi panjang R kita punya syarat $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ dan $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi N$. Maka $\operatorname{Im} z_k = 0$ selalu memenuhi, sedangkan $\operatorname{Re} z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ harus berada antara 0 dan $2\pi N$. Hal ini setara dengan

$$0 \leq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi N \iff -\tfrac{1}{2} \leq k \leq 2N - \tfrac{1}{2}.$$

Karena k bilangan bulat, k mengambil nilai $0, 1, \ldots, 2N-1$, jadi ada tepat $2N$ kutub sederhana di dalam R.

Dengan Teorema Residuo,

$$\int_\gamma \tan z\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(\tan z; z_k) = 2\pi i \cdot (2N) \cdot 1 = 4\pi i N.$$

Jadi

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{\cos z}\, dz = 4\pi i N.$$

(b.) Hitung juga

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{\alpha + \cos z}\, dz,$$

dengan $|z| < 1$. Periksa semua ketaksamaan yang dignakan.

<u>Solusi.</u>

Notasi γ di sini adalah lingkaran $|z| = 1$ dengan orientasi positif. Integran dapat ditulis sebagai

$$f(z) = \frac{\sin z}{\alpha + \cos z}.$$

Asumsikan $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $|\alpha| > 1$ agar penyebut tidak pernah nol di $|z| \leq 1$. (Untuk $|\alpha| \leq 1$ dapat dianalisis terpisah dengan melihat letak akar $\cos z = -\alpha$.)

Karena $\sin z$ dan $\cos z$ holomorfik di seluruh $\mathbb{C}$ dan $|\cos z| \leq \cosh(\operatorname{Im} z)$, untuk $|z| \leq 1$ kita punya $|\cos z| \leq \cosh 1 < 2$. Jika $|\alpha| > 1$, maka untuk setiap z dengan $|z| = 1$ berlaku

$$|\alpha + \cos z| \geq \big|\, |\alpha| - |\cos z|\, \big| > 1 - \cosh 1,$$

sehingga $\alpha + \cos z \neq 0$ pada dan di dalam lingkaran, jadi f holomorfik di $|z| \leq 1$.

Akibatnya, dengan Teorema Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Dalam kasus khusus ketika memang tidak ada kutub di dalam $|z| < 1$ (misal $|\alpha|$ cukup besar sehingga $\cos z = -\alpha$ tidak punya solusi di $|z| < 1$), integral selalu nol. Pemeriksaan ketaksamaan di atas memastikan bahwa penyebut tidak pernah nol di daerah itu.

3. Diberikan $n \in \mathbb{N}$, buktikan secara kombinatorik bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k) = \binom{n+2}{3}.$$

Solusi.

Kita akan menafsirkan kedua ruas sebagai banyak cara memilih tiga bilangan bulat terurut dari himpunan $\{1, 2, \ldots, n+2\}$.

Perhatikan bahwa

$$\binom{n+2}{3}$$

adalah banyaknya cara memilih tripel terurut naik $1 \leq a < b < c \leq n+2$.

Sekarang kita hitung jumlah yang sama dengan cara lain. Tetapkan nilai tengah b dan hitung banyak cara memilih $a < b < c$. Jika b dipilih, banyak pilihan a yang mungkin adalah $1, 2, \ldots, b-1$ (ada $b-1$ pilihan), dan banyak pilihan c adalah $b+1, b+2, \ldots, n+2$ (ada $(n+2)-b$ pilihan). Jadi, untuk suatu b tertentu,

$$extbanyakpasangan(a, c) = (b-1)\Big((n+2)-b\Big).$$

Ambil $k = b-1$ sehingga k berjalan dari 1 sampai n (karena b berjalan dari 2 sampai $n+1$). Maka

$$(b-1)\Big((n+2)-b\Big) = k\Big((n+2)-(k+1)\Big) = k(n+1-k).$$

Menjumlahkan semua kemungkinan b (atau setara, semua $k = 1, 2, \ldots, n$) menghasilkan

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k),$$

yang persis ruas kiri.

Karena kedua cara penghitungan tersebut menghitung banyaknya tripel $1 \leq a < b < c \leq n+2$, kita memperoleh identitas

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k) = \binom{n+2}{3}.$$

4. Diberikan bahwa $S \subseteq \mathbb{R}$ tertutup dan $x \notin S$. Buktikan bahwa terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga

$$|y-x| = \inf\left\{|z-x| : z \in S\right\}.$$

Solusi.

Misalkan

$$d = \inf\{|z-x| : z \in S\}.$$

Kita ingin menunjukkan bahwa ada $y \in S$ dengan $|y-x| = d$.

Secara definisi infimum, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $z_n \in S$ sedemikian sehingga

$$d \leq |z_n - x| < d + \frac{1}{n}.$$

Jadi $|z_n - x| \to d$ ketika $n \to \infty$. Artinya barisan z_n berada dalam selang tertutup terbatas, misalnya di $[x-d-1, x+d+1]$ untuk n cukup besar. Karena $\mathbb{R}$ lengkap dan selang tertutup terbatas kompak, barisan (z_n) memiliki subbarisan yang konvergen. Ambil subbarisan (z_{n_k}) yang konvergen ke suatu $y \in \mathbb{R}$.

Karena setiap $z_{n_k} \in S$ dan S tertutup, limit subbarisan, yaitu y, juga berada di S.

Sekarang gunakan kekontinuan fungsi mutlak: dari $z_{n_k} \to y$ diperoleh

$$|z_{n_k} - x| \to |y-x|.$$

Tetapi di sisi lain, $|z_{n_k} - x| \to d$ karena $|z_n - x| \to d$. Jadi $|y-x| = d$.

Dengan demikian terdapat $y \in S$ yang jaraknya ke x sama dengan infimum jarak ke S.

5. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga

elemen-elemen pada diagonal bernilai positif, elemen-elemen lainnya bernilai negatif, dan hasil jumlah semua elemen pada setiap kolom adalah 1. Buktikan bahwa $\det(A) > 1$.

Solusi.

Misalkan $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ dengan $a_{jj} > 0$ dan $a_{ij} < 0$ untuk $i \neq j$, dan untuk setiap kolom j berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Kita akan menunjukkan bahwa semua nilai eigen A berharga real positif > 0 dan salah satunya lebih besar dari 1, sedangkan yang lain ≥ 1, sehingga hasil kali nilai-eigen (yakni determinan) > 1.

Ambil vektor $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Jumlah baris-baris bukanlah syarat yang diberikan, tetapi dari syarat kolom kita punya

$$A^T\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Artinya 1 adalah nilai eigen dari A^T dengan vektor eigen $\mathbf{1}$. Karena A dan A^T punya spektrum yang sama, 1 juga nilai eigen dari A.

Selain itu, karena setiap kolom menjumlah 1 dan entri luar diagonal negatif, entri diagonal harus lebih dari 1 (untuk mengimbangi penjumlahan negatif). Secara kasar, untuk kolom ke-j,

$$a_{jj} = 1 - \sum_{i\neq j} a_{ij} > 1,$$

karena setiap $a_{ij} < 0$ untuk $i \neq j$ sehingga $-\sum_{i\neq j} a_{ij} > 0$.

Matriks seperti ini adalah contoh matriks *M-matrix* nonsingular: diagonal positif besar, elemen luar diagonal non-positif, dan semua minor pokok positif. Dikenal bahwa semua nilai-eigen dari nonsingular M-matrix mempunyai bagian real positif dan determinannya positif. Lebih khusus lagi, karena setiap diagonal $a_{jj} > 1$, kita dapat menulis

$$A = I + B,$$

dengan B mempunyai diagonal positif dan luar diagonal negatif sedemikian sehingga setiap kolom B menjumlah 0. Spektrum A bergeser dari spektrum B sebesar 1, sehingga jika λ nilai eigen B, maka $\lambda + 1$ nilai eigen A.

Nilai-nilai eigen B memiliki bagian real taknegatif dan ada setidaknya satu yang positif (karena $B\mathbf{1} = 0$ dan $B \neq 0$), sehingga nilai-nilai eigen A semuanya > 0 dan setidaknya satu > 1. Karena $\det(A)$ adalah hasil kali semua nilai-eigen tersebut, dan semuanya > 0 serta tidak semuanya 1, kita peroleh

$$\det(A) > 1.$$

Argumentasi ini dapat dirapikan lagi dengan teori M-matrix atau menggunakan ketaksamaan determinan Hadamard yang diperkuat, tetapi inti utamanya: struktur tanda kolom dan diagonal memaksa spektrum A berada di $(0, \infty)$ dan memberi $\det(A) > 1$.

HARI KEDUA

1. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\lambda \in [0,1]$ berlaku

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x \, dx \geq 0$.

Solusi.

Sifat yang diberikan adalah ketaksamaan Jensen untuk fungsi cekung ke bawah (konveks) dengan parameter $\lambda \in [0,1]$. Jadi f konveks pada $\mathbb{R}$.

Gunakan identitas trigonometri

$$\cos x = \frac{1}{2}\Big(\cos x + \cos(2\pi - x)\Big).$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{x + (2\pi - x)}{2} = \pi.$$

Dengan konveksitas f untuk $\lambda = \frac{1}{2}$ diperoleh

$$f\left(\frac{x + (2\pi - x)}{2}\right) = f(\pi) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(2\pi - x).$$

Kalikan kedua ruas dengan $\cos x = \cos(2\pi - x)$ dan integralkan terhadap x dari 0 sampai 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(\pi)\cos x \, dx \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(f(x) + f(2\pi - x)\Big)\cos x \, dx.$$

Ruas kiri adalah nol karena

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0.$$

Untuk ruas kanan, lakukan substitusi $u = 2\pi - x$ pada integral yang memuat $f(2\pi - x)$:

$$\int_0^{2\pi} f(2\pi - x)\cos x\, dx = \int_{2\pi}^{0} f(u)\cos(2\pi - u)(-du) = \int_0^{2\pi} f(u)\cos u\, du.$$

Jadi ruas kanan menjadi

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(f(x) + f(2\pi - x)\Big)\cos x\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx.$$

Dari ketaksamaan semula kita peroleh

$$0 \le \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx.$$

Dengan demikian $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx \ge 0$.

2. Misalkan V adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Fungsi $f : V \to \mathbb{R}$ memenuhi sifat:

   (a) $f(v) \ge 0$ untuk $v \in V$ dan

   (b) $[f(u+w)]^2 + [f(u-w)]^2 = 2\,[f(u)]^2 + 2\,[f(w)]^2$,untuk semua $u, w \in V$.

   Buktikan bahwa $f(u+w) \le f(u) + f(w)$, untuk semua $u, w \in V$.

   Solusi.
   extitLangkah 1: Tunjukkan bahwa $f(0) = 0$ dan $f(-v) = f(v)$ untuk semua $v \in V$.

   Ambil $u = w = 0$ pada (b):

   $$[f(0+0)]^2 + [f(0-0)]^2 = 2[f(0)]^2 + 2[f(0)]^2 \Rightarrow 2[f(0)]^2 = 4[f(0)]^2.$$

   Karena $f(0) \ge 0$, ini memaksa $f(0) = 0$.

   Ambil $u = v$ dan $w = -v$:

   $$[f(v-v)]^2 + [f(v-(-v))]^2 = 2[f(v)]^2 + 2[f(-v)]^2$$

   memberi
   $$[f(0)]^2 + [f(2v)]^2 = 2[f(v)]^2 + 2[f(-v)]^2.$$

Dengan $f(0) = 0$ dan mengenali bahwa persamaan ini simetris terhadap penggantian v dengan $-v$, dapat disimpulkan (dengan membandingkan kedua sisi untuk v dan $-v$) bahwa $f(-v) = f(v)$ untuk semua v.

extitLangkah 2: Turunkan pertidaksamaan Minkowski $f(u+w) \leq f(u) + f(w)$.

Gunakan identitas (b) dengan mengganti u dan w berturut-turut oleh u dan w serta oleh u dan $-w$:

$$[f(u+w)]^2 + [f(u-w)]^2 = 2[f(u)]^2 + 2[f(w)]^2,$$

$$[f(u-w)]^2 + [f(u+w)]^2 = 2[f(u)]^2 + 2[f(-w)]^2.$$

Karena $f(-w) = f(w)$, kedua persamaan tersebut sama; tulis

$$[f(u+w)]^2 = 2[f(u)]^2 + 2[f(w)]^2 - [f(u-w)]^2.$$

Dengan (a), semua ruas taknegatif sehingga

$$[f(u+w)]^2 \leq 2[f(u)]^2 + 2[f(w)]^2.$$

Sekarang gunakan ketaksamaan Cauchy–Schwarz dalam bentuk $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ untuk bilangan real $a, b \geq 0$ dengan mengambil $a = f(u)$ dan $b = f(w)$:

$$[f(u) + f(w)]^2 \leq 2\Big([f(u)]^2 + [f(w)]^2\Big).$$

Gabungkan dua ketaksamaan di atas:

$$[f(u+w)]^2 \leq 2[f(u)]^2 + 2[f(w)]^2 \geq [f(u) + f(w)]^2.$$

Karena semua nilai f taknegatif (syarat (a)), akar kuadrat mempertahankan arah ketaksamaan sehingga

$$f(u+w) \leq f(u) + f(w).$$

Jadi f memenuhi pertidaksamaan segitiga pada V.

3. Misalkan R adalah ring komutatif dan $R[x]$ adalah polinomial terhadap ring R. Untuk suatu polinomial $f(x) \in R$, pandang ring faktor $\dfrac{R[x]}{\langle f(x) \rangle}$, dan setiap elemen dari $\dfrac{R[x]}{\langle f(x) \rangle}$ ditulis sebagai $\overline{p(x)}$ dengan $p(x) \in R[x]$.

   (a) Buktikan bahwa $p(x)$ dan $q(x)$ dua polinomial berbeda berderajat kurang dari n, maka $p(x) \neq q(x)$.

   (b) Jika $a \in R$ adalah elemen nilpoten, dan $f(x) = x^n - a$, maka $\overline{x}$ adalah elemen nilpoten di $\dfrac{R[x]}{\langle f(x) \rangle}$.

   Solusi.

   extbf(a)

   Andaikan $p(x)$ dan $q(x)$ dua polinom berbeda dengan $\deg p, \deg q < n$ tetapi mereka mewakili elemen yang sama di $R[x]/\langle f(x) \rangle$. Itu berarti $p(x) - q(x) \in \langle f(x) \rangle$, jadi ada $h(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga

   $$p(x) - q(x) = h(x)f(x) = h(x)(x^n - a).$$

   Jika $h(x) \neq 0$, maka $\deg(h(x)f(x)) \geq n$ karena $\deg f = n$ dan R komutatif; sehingga $p(x) - q(x)$ berderajat $\geq n$. Tetapi $p(x) - q(x)$ adalah selisih dua polinom berderajat $< n$, jadi derajatnya $< n$, kontradiksi. Jadi $h(x) = 0$ dan $p(x) - q(x) = 0$, artinya $p = q$. Dengan demikian, kelas-kelas residu yang berbeda di faktor ini mempunyai perwakilan unik dengan derajat $< n$.

   extbf(b)

   Diberikan $a \in R$ nilpoten, jadi ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga $a^m = 0$. Di ring faktor, dari $f(x) = x^n - a$ kita punya relasi

   $$\overline{x}^n = \overline{a}.$$

   Naikkan pangkat m:

   $$\left(\overline{x}^n\right)^m = \overline{a}^m = \overline{a^m} = \overline{0} = 0.$$

Jadi

$$\overline{x}^{nm} = 0,$$

yang menunjukkan bahwa $\overline{x}$ nilpoten di $R[x]/\langle f(x)\rangle$.

4. Diberikan fungsi $f : U \to U$ disebut sebagai biholomorfik jika f memiliki invers , dan f dan f^{-1} keduanya holomorfik atau analitik.

   (a) Buktikan bahwa jika $U = \mathbb{C}$, maka $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.

   (b) Carilah bentuk umum dari $f(z)$ dan jelaskan Argumen anda.

Solusi.

Andaikan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorfik.

extbf(a)

Kita akan menunjukkan bahwa $|f(z)| \to \infty$ saat $|z| \to \infty$. Jika tidak, ada barisan (z_n) dengan $|z_n| \to \infty$ tetapi $|f(z_n)|$ terbatas, misalnya $|f(z_n)| \le M$ untuk semua n. Karena f kontinu, himpunan $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| \le M\}$ kompak dan citranya $f^{-1}(K)$ (melalui f^{-1} yang kontinu) juga kompak; khususnya $f^{-1}(K)$ terbatas.

Namun setiap z_n berada di $f^{-1}(K)$ (karena $f(z_n) \in K$) dan $|z_n| \to \infty$, yang bertentangan dengan keterbatasan $f^{-1}(K)$. Jadi asumsi salah dan memang

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty.$$

extbf(b)

Karena f biholomorfik dari $\mathbb{C}$ ke $\mathbb{C}$, maka f holomorfik, satu-satu, dan onto. Teorema klasik dalam analisis kompleks menyatakan bahwa satu-satunya fungsi entire bijektif dari $\mathbb{C}$ ke $\mathbb{C}$ adalah fungsi linear takkonstan

$$f(z) = az + b,$$

dengan $a \neq 0$.

Sketsanya: karena f entire dan bukan polinomial derajat ≥ 2 (polinomial seperti itu tidak dapat satu-satu karena punya nilai eigen kritis atau cabang dengan beberapa pra-citra), f harus berderajat 1. Secara lebih formal, jika f entire bukan linear, maka f' memiliki nol (Teorema Rolle kompleks via Teorema Casorati–Weierstrass atau argumen derajat), sehingga pada titik tersebut f tidak lokal-bijektif, bertentangan dengan adanya invers holomorfik.

Jadi bentuk umum fungsi biholomorfik $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ adalah $f(z) = az + b$ dengan $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dan $b \in \mathbb{C}$.

5. Misalkan relasi rekurensi P_n yang didefinisikan dengan $P_1 = 2$ dan $P_{n+1} = P_n^2 - P_n + 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa $m \neq n$, maka P_m dan P_n keduanya relatif prima.

Solusi.

Kita tunjukkan bahwa untuk $m \neq n$, $\gcd(P_m, P_n) = 1$.

Pertama perhatikan sifat kongruensi sederhana. Dari definisi

$$P_{n+1} = P_n^2 - P_n + 1,$$

didapat

$$P_{n+1} - 1 = P_n(P_n - 1).$$

Artinya setiap faktor prima dari P_n juga membagi $P_{n+1} - 1$.

Secara umum, untuk $k > n$ dapat diturunkan (dengan induksi) bahwa

$$P_k \equiv 1 \pmod{P_n}.$$

Induksi: untuk $k = n + 1$,

$$P_{n+1} = P_n^2 - P_n + 1 \equiv 1 \pmod{P_n}.$$

Jika $P_k \equiv 1 \pmod{P_n}$ untuk suatu $k \geq n + 1$, maka

$$P_{k+1} = P_k^2 - P_k + 1 \equiv 1^2 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{P_n}.$$

Jadi benar untuk semua $k > n$.

Sekarang ambil $m < n$ tanpa mengurangi umum. Jika ada bilangan prima p yang membagi sekaligus P_m dan P_n, maka karena $n > m$ kita punya

$$P_n \equiv 1 \pmod{P_m}.$$

Maka $P_n \equiv 1 \pmod{p}$ (karena $p \mid P_m$), tetapi juga $p \mid P_n$, sehingga $P_n \equiv 0 \pmod{p}$. Kontradiksi karena $0 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Jadi tidak ada prima yang membagi keduanya kecuali mungkin 1, sehingga

$$\gcd(P_m, P_n) = 1.$$

Dengan demikian, P_m dan P_n relatif prima untuk setiap $m \neq n$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2012

HARI PERTAMA

1. Misalkan Z merupakan subgrup dari G yang memenuhi $\forall z \in Z$, $g \in G$ maka $zg = gz$. Jika G/Z siklis, tunjukkan bahwa G komutatif.

2. Misalkan $f : [a,b] \to [a,b]$ dengan $|f(z) - f(y)| < \dfrac{|x-y|}{3}$. Untuk semua $x, y \in [a,b]$. Tunjukkan bahwa ada $c \in [a,b]$ sehingga $f(c) = c$.

3. Misalkan V ruang vektor atas real. Didefinisikan vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ terikat afin jika terdapat $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ yang tidak semuanya 0 dan memenuhi $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0$ dan $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k = 0$

   (a) Tunjukkan bahwa vektor 0 bebas afin.

   b) Carilah contoh empat vektor di $\mathbb{R}^4$ yang bebas afin tetapi tidak bebas linier.

4. Misalkan f holomorfik kecuali di berhingga titik sebelah dalam suatu lengkungan tertutup berorientasi tertutup positif C.

   (a) Buktikan

   $$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \text{Residu}_{z=0} \left\{ \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} \right\}.$$

   (b) Gunakan hasil pada (a) untuk menghitung

   $$\oint_{|z|=2} \frac{z^5}{1-z^3}\,dz,$$

   pada $|z| = 2$.

5. Buktikan secara kombinatorik bahwa

   $$\sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n-2}{k} \binom{n+2}{k+2} = (n-2)\binom{2n-1}{n-1}.$$

HARI KEDUA

1. Misalkan R himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi $+$ dan $\times$ dengan

   (a) $(R, +)$ grup,

   (b) $(R, \times)$ asosiatif dan memiliki unsur identitas,

   (c) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ dan $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

   Tunjukkan bahwa $(R, +, \times)$ gelanggang.

2. Misalkan f merupakan entire dengan $Re(f(z)) \leq \dfrac{2}{|z|}$ untuk semua $|z| \geq 1$. Cari semua f.

3. Misalkan $(y_n)_{n\geq 0}$ barisan bilangan real dengan $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} = 1$. Tunjukkan bahwa ada c real sehingga $y_{n+1} = cy_n - y_{n-1}$ untuk $n \geq 1$.

4. Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dengan $\dim\{F(V)\} = n$. Misalkan $T : V \to V$ transfomasi linier. Tunjukkan bahwa terdapat $K \leq n$, sehingga $Peta(T^k) = Peta(T^{k+i})$ untuk semua bilangan asli i.

5. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terdiferensial dengan $f(a) = 0$. Misalkan terdapat $k > 0$ dan $m > 0$ sehingga $|f'(x) - kf(x)| \leq m|f(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2013

HARI PERTAMA

1. Suatu subgrup H dari G disebut subgrup *normal* jika untuk setiap $g \in G$ dan $h \in H$ berlaku $g^{-1}hg \in H$. Suatu subgrup H dari G dikatakan mempunyai sifat *refleksif* jika untuk setiap $a, b \in G$ dengan $ab \in H$ berlaku $ba \in H$. Tunjukkan bahwa H merupakan subgrup normal jika dan hanya jika H bersifat refleksif.

2. Misalkan $f : [0,1] \to [0,1]$ merupakan fungsi kontinu sedemikian sehingga $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku
$$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{8} \sup_{a\in[0,1]} |f'(a)|.$$

3. Misalkan u fungsi harmonik di $\mathbb{R}^2$ dan v fungsi harmonik konjugatnya (yaitu fungsi sehingga $f(z) = u(z) + iv(z)$ analitik). Jika
$$u^3 - 3uv^2 \geq 0,$$
di $\mathbb{R}^2$, carilah fungsi u dan v.

4. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks real $n \times n$ dengan $a_{ij} = \min\{i,j\}$,$i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tentukan A^{-1}.

5. Sebuah $n-$board adalah sebuah persegi panjang berukuran $n \times 1$. Misalkan f_n menyatakan banyaknya cara mengubin $n-$board dengan menggunakan ubin 1×1 dan ubin 2×1. Jadi $f_1 = 1$ dan $f_2 = 2$. Untuk $n \geq 0$, perlihatkan bahwa
$$f_{2n+1} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}.$$

HARI KEDUA

1. Untuk $0 \leq k \leq n/2$, berikan bukti kombinatorial dari persamaan

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1},$$

dengan n adalah bilangan bulat positif.

2. Misalkan I ideal di gelanggang R dan $S \subseteq R$. Didefinisikan $\langle I : S \rangle = \{r \in R : rs \in I \text{ untuk setiap } s \in S\}$.

   (a) Buktikan $\langle I : S \rangle$ ideal kiri di R.

   (b) Jika S ideal di R buktikan $\langle I : S \rangle$ ideal di R.

   (c) Jika R daerah integral $a, b \in R$ dengan $b \neq 0$, dan $I = \langle ab \rangle, J = \langle b \rangle$, buktikan $\langle I : J \rangle = \langle a \rangle$.

3. Diketahui fungsi

$$f(z) = \int_1^z \left(\frac{1}{w} + \frac{a}{w^2} \right) \cos w \, dw.$$

Tentukan nilai a agar fungsi tersebut bernilai tunggal di seluruh daerah bidang kompleks.

4. Misalkan $a_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_k$. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, perlihatkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(s_n)^\alpha}$ konvergen jika dan hanya jika $\alpha > 1$.

5. Misalkan l dan m dua garis di $\mathbb{R}^3$ yang bersilangan (yaitu tidak berpotongan dan tidak sejajar). Tentukan titik P di l dan Q di m yang meminimumkan jarak antara titik di l dan titik di m.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2014

HARI PERTAMA

1. Buktikan dengan kombinatorik
$$\sum_{k=2}^{n} k\binom{n-2}{k-2}\binom{n+2}{k} = (n+2)\binom{2n-1}{n-1}.$$

2. Diketahui fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang $[a,b]$. Misalkan $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b], f(x) \geq 0\}$. Tunjukkan bahwa barisan $\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$ konvergen ke M.

3. Diketahui $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ dengan jari-jari konvergensi $R > 0$ atau $R = \infty$. Misalkan $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}, 0 \leq r < R$.
   (a) Hitunglah $M(r)$ dengan $f(z) = \dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.
   (b) Hitunglah $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(M(r))}{\log(r)}$, $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$.
   (c) Diberikan f analitik dengan $f(0) = 0$. Buktikan bahwa:
$$\frac{M(r_2)}{M(r_1)} \geq \frac{r_2}{r_1}, 0 < r_1 < r_2 < R.$$

4. Diketahui V adalah ruang hasil kali dalam atas X dengan $\dim(V) = n \geq 2$, X basis bagi V, misalkan $A \in C^{n\times n}$ tak singular dan $B = (A^{-1})^*$. Untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ kolom ke i matriks A dan B sebagai koordinat x_i dan y_i di V terhadap X. Misalkan $K = \text{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ untuk suatu $1 \leq k < n$. Buktikan bahwa
   (a) Jika X ortonormal maka $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ adalah basis terhadap $K^\perp$.
   (b) Periksalah apakah implikasinya berlaku.

5. a dikatakan pembagi kiri dari b, jika $\exists x$ sehingga $ax = b$. p dikatakan prima kiri jika $p|_l ab$ maka $p|_l a$ atau $p|_l b$. Misalkan R ring dengan

setiap unsur dari R adalah prima kiri. Buktikan bahwa

(a) $\exists e \in R, \forall x \in R$ berlaku $ex = x$ dan $xe = x$.

(b) $\exists e \in R, \forall x \in R$ berlaku $xy = e$ dan $yx = e$.

HARI KEDUA

1. Diketahui $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi periodik dan $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Buktikan bahwa $f = g$.

2. Carilah koefisien $x^{2n+r}, 1 \leq r \leq 2n$ dari $\sum\limits_{l=0}^{2n} x^l (1+x)^{4n-l}$

3. Diketahui $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A bekerja sepenuhnya atas lapangan real. Buktikan bahwa A dapat didiagonalisasikan jika dan hanya jika $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

4. $G = \langle x, y : x^2 = y^2 = e \rangle$. Tuliskan $z = xy$.

   (a) Buktikan bahwa $H = \langle z \rangle$ merupakan subgrup normal dari G.

   (b) Buktikan bahwa $\dfrac{G}{H}$ merupakan grup siklik orde 1 atau 2.

5. Diketahui C_R adalah setengah lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dengan jari-jari R dan $f(z) \to 0$ secara seragam untuk $R \to \infty$. Buktikan bahwa
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{ikz}\, dz = 0,$$
   jika $k > 0$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2015

HARI PERTAMA

1. Misalkan D dan E dua matriks diagonal yang berukuran berturut-turut $m \times n$ dan $n \times n$. Jika $D = \text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ dan $E = \text{diag}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Buktikan bahwa

$$\det \begin{pmatrix} 0 & D \\ E & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{mn} d_1 d_2, \ldots d_m e_1 e_2 \ldots e_n.$$

2. Misalkan G grup hingga dan e elemen identitas di G. Didefinisikan dua himpunan $A = \{x \in G \mid x^3 = e\}$ dan $B = \{x \in G \mid x^2 \neq e\}$. Tunjukkan bahwa $|A|$ ganjil dan $|B|$ genap.

3. Misalkan m dan n dua bilangan tak negatif. Berikan sebuah bukti kombinatorial untuk

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{0 \le a \le \frac{(m-1)}{2}} \binom{m-a-1}{a} \binom{n+a}{2a} + \sum_{0 \le a \le \frac{m}{2}} \binom{m-a}{a} \binom{n+a}{2a}.$$

4. Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}$ yang memenuhi $\sqrt{x_1} \ge \sqrt{x_0 + 1}$ dan $\left| x_{n+1} - \dfrac{x_n^2}{x_{n-1}} \right| \le 1$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Perlihatkan bahwa barisan $\left\{ \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right\}$ konvergen.

5. Misalkan $P_t(z)$ merupakan polinomial dalam z untuk setiap nilai t dengan $0 \le t \le 1$. Misalkan pada $P_t(z)$ kontinu terdapat t, dalam arti

$$P_t(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j(t) z^j$$

dengan $a_j(t)$ kontinu, $j = 0, 1, \ldots, N$. Misalkan $Z = \{(z,t) | P_t(z) = 0\}$

   (a) Buktikan bahwa Z, merupakan himpunan tutup di perkalian topologi.

(b) Jika $P_{t_0}(z_0) = 0$ dan $\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) P_{t_0}(z)\Big|_{z=z_0} \neq 0$, buktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk t yang cukup dengan t_0, ada satu dan hanya satu $z \in D(z_0, t)$ sehingga $P_{t_0}(z) = 0$.

HARI KEDUA

1. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial, $f'(x) > f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $f(x_0) = 0$, untuk suatu $x_0 \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(x) > 0$, untuk setiap $x > x_0$. Sebagai aplikasi, diberikan $c > 0$, perlihatkan bahwa persamaan $ce^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ mempunyai tepat satu akar.

2. (a) Misalkan n bilangan asli. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\,dz = C_n^{2n},$$

dengan C adalah sebarang lingkaran yang mengelilingi titik asal, dan C_k^n adalah koefisien binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Gunakan hasil di atas untuk menentukan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}\binom{.2n}{n}$$

Tunjukkan perhitungannya.

3. Diketahui dua matriks persegi berukuran M dan N yang semua nilai eigennya real positif.

(a) Jika $M = M^*$ dan $N = N^*$, tunjukkan bahwa semua nilai eigen matriks MN positif.

(b) Berikan contoh matriks M dan N berukuran 3×3 sehingga MN hanya mempunyai nilai eigen real positif. Tunjukkan bahwa contoh yang diberikan memang memenuhi semua persyaratan yang diminta.

4. (a) Berikan contoh suku banyak $P(x)$ dengan koefisien rasional memenuhi

$$P(1+2\sqrt[3]{2}) = 1 + 2\sqrt[3]{4}$$

(b) Tentukan semua suku banyak $Q(x)$ dengan koefisien rasional yang memenuhi persamaan (a).

5. Didefinisikan $A_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan bentuk fungsi pembangkit

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n.$$

Buktikan bahwa

$$\sum_{n\geq 0} (2n+1)x^n A(x)^{2n+1} = \sum_{m\geq 0} (4x)^m.$$

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2016

HARI PERTAMA

1. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dan $b \in \mathbb{R}^2, b \neq 0$. Pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ didefinisikan sebagai $T(x) = Ax + b$. Oleh T, setiap titik dipetakan ke titik lain dan setiap garis dipetakan ke garis lain. Buktikan bahwa $Ab \neq b$ dan $(A - I)^2 = 0$, dengan I adalah matriks identitas 2×2.

2. Misalkan R suatu ring. Unsur $x \neq 0$ di R disebut sebagai pembagi nol kiri jika terdapat $a \neq 0$ di R sedemikian sehingga $xa = 0$. Secara serupa, unsur $y \neq 0$ di R disebut sebagai pembagi nol kanan jika terdapat $b \neq 0$ di R sedemikian sehingga $by = 0$. Misalkan x pembagi nol kiri dan y pembagi nol kanan di R. Jika R gelanggang dengan berhingga banyak unsur $xy \neq 0$, tunjukkan bahwa xy sekaligus merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan.

3. Misalkan fungsi kontinu $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$. Didefinisikan $u_n = \left(\int_0^1 (f(x))^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}}$ dan $M = \sup_{0\leq x\leq 1} f(x)$. Buktikan bahwa
   (a) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan α dan β dengan $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ sedemikian sehingga $M(1-\varepsilon) \leq f(x) \leq M, \forall x \in (\alpha, \beta)$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} u_n = M$.

4. Untuk setiap pernyataan berikut, buktikan atau berikan sebuah contoh penyangkal
   (a) Jika fungsi kompleks $f(z)$ terdefinisi pada cakram satuan terbuka $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan jika $f^2(z)$ analitik pada D, maka f analitik pada D.
   (b) Jika fungsi kompleks $f(z)$ terdefinisi dan terdiferensial kontinu pada cakram satuan terbuka $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan jika $f^2(z)$ analitik pada D, maka f analitik pada D.

5. Setiap bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, n$ diwarnai dengan tiga warna. Tentukan n terkecil sedemikian sehingga untuk sebarang pewarnaan dari bilangan-bilangan tersebut, selalu terdapat tiga bilangan

$x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ yang berwarna sama dan memenuhi $x_1 + x_2 = x_3$.

HARI KEDUA

1. Misalkan $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memiliki sifat: terdapat bilangan-bilangan real konstan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ sehingga $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = c_k$ untuk semua $1 \leq j \leq k \leq n$. Tentukan semua nilai eigen dari A.

2. Misalkan G suatu grup dengan n unsur $(n \geq 2)$ dan p adalah faktor prima terkecil dari n. Misalkan G memiliki tepat satu subgrup H yang berorde p. Tunjukkan bahwa untuk setiap $h \in H$ dan $g \in G$ berlaku $hg = gh$.

3. Diberikan suatu konstanta positif k. Misalkan barisan bilangan real non-negatif a_n memenuhi $a_{m+n} \leq a_m + a_n + K$, untuk setiap bilangan bulat positif m, n. Perlihatkan bahwa barisan $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ konvergen.

4. Diberikan bilangan-bilangan kompleks z_1, z_2, z_3 dengan $z_1 \neq z_2$ dan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$. Buktikan bahwa

$$\min\{kz_1 + (1-k)z_2 - z_3 \mid k \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2r}|z_1 - z_3||z_2 - z_3|.$$

5. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak trivial. Didefinisikan $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}, k \in \mathbb{N}$ adalah suatu pewarnaan sisi dengan dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan P dari titik u ke titik v di graf G ditulis $u - v$ *path* P di G. Lintasan $u - v$ *path* P di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika di setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang mengakibatkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G ditulis $rc(G)$, yaitu banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk sedemikian sehingga graf G *rainbow connected*. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Misalkan C_n adalah graf lingkaran (*cycle*) dengan $n \geq 3$. Tentukan $rc(C_n)$, kemudian buktikan.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2017

HARI PERTAMA

1. Untuk bilangan bulat k dan n dengan $0 \leq k \leq n$, Buktikan bahwa

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Misalkan A dan B adalah matriks dalam $\mathbb{R}^{n \times n}$ yang memenuhi persamaan $AB^2 - 2BAB + B^2A = 0$. Tentukan nilai eigen terbesar dari matriks $AB - BA$.

3. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan kompleks dengan sifat $abc = 1$ dan

$$\begin{cases} a^{20} + b^{20} + c^{20} = \dfrac{1}{a^{20}} + \dfrac{1}{b^{20}} + \dfrac{1}{c^{20}} \\ a^{17} + b^{17} + c^{17} = \dfrac{1}{a^{17}} + \dfrac{1}{b^{17}} + \dfrac{1}{c^{17}} \\ a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} = \dfrac{1}{a^{2017}} + \dfrac{1}{b^{2017}} + \dfrac{1}{c^{2017}} \end{cases}$$

Buktikan bahwa $1 \in \{a, b, c\}$.

4. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mempunyai sifat: untuk setiap deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen berakibat deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergen, buktikan bahwa terdapat $M > 0$ dan $\varepsilon > 0$, dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{R}, 0 < x < \varepsilon$ berlaku $|f(x)| \leq Mx$.

5. (a) Berikan contoh suatu bilangan prima ganjil p dan suatu grup G sehingga $|G| = p + 1$ dan p membagi $|\mathrm{Aut}(G)|$.

   (b) Misalkan p suatu bilangan prima ganjil dan G suatu grup dengan $|G| = p + 1$. Buktikan bahwa jika p membagi $|\mathrm{Aut}(G)|$ maka $p = 4k + 3$ untuk suatu bilangan bulat k.

HARI KEDUA

1. Misalkan A dan B adalah matriks dalam $\mathbb{R}^{2017\times 2017}$ yang memenuhi persamaan-persamaan $A^{-1} = (A+B)^{-1} - B^{-1}$ dan $\det(A^{-1}) = 2017$. Tentukan $\det(B)$.

2. Misalkan R suatu gelanggang yang memenuhi $x^2 = x$ untuk setiap x di R

   (a) Tunjukkan bahwa R merupakan gelanggang komutatif.

   (b) Buktikan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, \ldots x_n$ di R, ideal $I := \langle x_1\rangle + \langle x_2\rangle + \cdots + \langle x_n\rangle$ dapat dituliskan sebagai $I = \langle x\rangle$ untuk suatu x di R.

3. Sebuah barisan $\{Y_n\}$ didefinisikan oleh $Y_1 = 2$ dan $Y_{n+1} = Y_n(Y_n - 1) + 1$, untuk $n \geq 1$. Buktikan bahwa bila $m \neq n$, maka pembagi sekutu terbesar dari Y_m dan Y_n adalah 1 dan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{Y_i} = 1.$$

4. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan surjektif. Jika untuk setiap $y \in \mathbb{R}$, cacah anggota himpunan $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ paling banyak dua, buktikan bahwa f monoton.

5. Misalkan $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ dan

$$f(z) = \frac{z^4 + 2017}{z^4 + z^3 + 1}.$$

   (a) Buktikan bahwa untuk setiap $R > 2$ berlaku

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{|z|=R} f(z)\,dz.$$

   (b) Hitung $\int_C f(z)\,dz$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2018

HARI PERTAMA

1. Diberikan bilangan asli n. Cari semua bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right).$$

   Untuk suatu bilangan kompleks $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ dengan $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$.

2. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor-vektor kolom dari A. Vektor-vektor kolom tersebut memenuhi hubungan

$$k_i = (i+2)k_{i+2},$$

   dengan $i = 1, 2, \ldots, (n-2)$.
   Untuk $n > 3$. Pilihlah satu nilai eigen A kemudian tentukan dimensi terkecil yang mungkin untuk ruang eigen dari nilai eigen yang terpilih.

3. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1$, definisikan h_n sebagai banyaknya cara menuliskan n sebagai jumlahan dari bilangan 1 dan 2 dengan memperhatikan urutan kemunculan bilangan 1 dan 2. Sebagai contoh $h_3 = 3$, karena $3 = 1+1+1, 3 = 2+1$, dan $3 = 1+2$. Selanjutnya $h_4 = 5$, karena $4 = 1+1+1+1, 4 = 1+1+2, 4 = 1+2+1, 4 = 2+1+1$, dan $4 = 2+2$. Buktikan bahwa untuk $k \geq 0$

$$h_{2k+1} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\binom{k-i}{j}\binom{k-j}{i}.$$

4. Diberikan fungsi kontinu $f : [0,\infty) \to [0,a]$ untuk suatu bilangan real $a > 0$, dan f memenuhi *The Intermediate Value Property* pada $[0,\infty)$. Jika $f(0) = 0$ dan $xf(x) \geq \int_0^x f(t)\,dt$, untuk semua $x \in (0,\infty)$, buktikan bahwa f mempunyai anti derivatif.

5. Diberikan bilangan prima p dan bilangan asli $n \geq 3$. Misalkan

$$G_n(p) := \left\{ x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | a_i \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Definisikan operasi $\circ$ di $G_n(p)$ melalui $P \circ Q = P(Q(x))$ modulo x^{n+1}. Sebagai contoh di $G_3(5)$, misalkan $P = x + 2x^2$ dan $Q = x + 3x^2$, maka

$$\begin{aligned} P \circ Q &= (x + 3x^2) + 2(x + 3x^2)^2 \\ &= x + 3x^2 + 2(x^2 + 6x^3 + 9x^4) \\ &= x + 5x^2 + 12x^3 + 18x^4 \\ &= x + 5x^2 + 12x^3 \quad \text{(karena modulo } x^4\text{)} \\ &= x + 2x^3 \quad \text{(karena koefisiennya di } \mathbb{Z}_5\text{)} \end{aligned}$$

Periksa apakah $G_n(p)$ merupakan grup terhadap operasi $\circ$.

HARI KEDUA

1. Diberikan bilangan bulat tak negatif k dan n sehingga $0 \leq k < n$. Berikan bukti kombinatorial bahwa

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} 2^j.$$

2. (a) Apakah $\langle x + 2018 \rangle$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$?

   (b) Apakah $\langle x + 2018 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{Z}[x]$?

3. Misalkan barisan bilangan real $\{x_n\}$ terbatas dan memenuhi $x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, $\forall n \geq 0$. Jika $A_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$, buktikan:

   (a) barisan $\{A_n\}$ konvergen.

   (b) barisan $\{x_n\}$ konvergen.

4. Buktikan atau beri contoh penyangkal

   (a) Untuk setiap fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jika fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan definisi

   $$g(x) = f(x^{2018}), \forall x \in \mathbb{R},$$

   mempunyai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yang konvergen di suatu persekitaran $x = 0$ maka f mempunyai turunan di $x = 0$.

   (b) Untuk setiap fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jika fungsi $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dengan definisi

   $$g(z) = f(z^{2018}), \forall z \in \mathbb{C},$$

   mempunyai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ yang konvergen di suatu persekitaran $z = 0$ maka f mempunyai turunan di $z = 0$.

5. Diberikan bilangan asli n. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan $\det(A) = a + d = 1$. Jika $A^n = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, maka tentukanlah $a' + d'$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2019

HARI PERTAMA

1. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi sifat bahwa jika untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ dan $x, y \in \mathbb{R}$ maka

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq 0.$$

   Buktikan:

   (a) Untuk semua x dan y dengan $x < y$, maka

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx$ adalah positif.

2. Misalkan G adalah grup dan H subgrup dari G. Buktikan bahwa tidak ada subgrup S dari G dengan $S \neq G$ dan $S \supseteq G - H$.

3. Diberikan bilangan bulat n dan k dengan $0 \leq k \leq n/2$. Tuliskan sebuah bukti kombinatorial dari persamaan:

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{m-k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

4. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

   yang bersifat analitik pada $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan diasumsikan bahwa

$$W := \iint_{\mathcal{U}} |f'(z)|^2 \, dx dy < \infty.$$

   Buktikan:

   (a) $W = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$.

(b) Untuk setiap $z \in \mathcal{U}$ berlaku:

$$|f(z) - f(0)| \leq \sqrt{\frac{W}{\pi} \ln\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right)}.$$

5. Diberikan F dan H matriks berukuran $n \times n$ dengan

$$HF - FH = 2^{2019} F$$

Misalkan $\mathbf{v}$ adalah vektor eigen dari H dengan $F\mathbf{v} \neq 0$. Buktikan terdapat bilangan bulat positif k sehingga $F^k\mathbf{v}$ adalah vektor eigen dari F.

HARI KEDUA

1. Diberikan bilangan bulat positif k dan n. Buktikan bahwa

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \begin{cases} n! & \text{jika } k = n, \\ \\ 0 & \text{jika } k > n. \end{cases}$$

2. Bilangan bulat positif n dikatakan *cantik* jika terdapat empat bilangan kompleks a, b, c, dan d yang memenuhi

$$a^n = b^n = c^n = d^n = 1 \quad \text{dan} \quad a + b + c + d = 1.$$

   (a) Tunjukkan bahwa terdapat bilangan cantik.

   (b) Apakah 28 merupakan bilangan cantik? Jelaskan.

3. Misalkan R suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Ideal I dan J di R memenuhi $I + J = R$.

   (a) Buktikan bahwa pemetaan $\phi : R \to R/I \times R/J$ yang didefinisikan melalui $\phi(r) = (r + I, r + J)$ merupakan homomorfisma yang surjektif.

   (b) Gunakan bagian (a) di atas untuk membuktikan bahwa $R/(I \cap J)$ isomorfik dengan $R/I \times R/J$.

4. Misalkan A matriks tak nol berukuran $n \times (n-k)$, $k < n$, dengan kolom-kolom A adalah himpunan ortogonal yang tidak memuat vektor nol. Misalkan juga $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ adalah vektor kolom berukuran $n - k$. Jika matriks

$$B = [A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_{n-k} \mid A\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_k]$$

   dengan A_i adalah kolom ke-i dari A, tentukan suatu basis bagi ruang nol B.

5. Diberikan barisan bilangan real positif $\{a_n\}$ untuk $n \geq 0$. Barisan

tersebut memenuhi:

$$\sqrt{a_0} + 1 \leq \sqrt{a_1} \quad \text{dan} \quad \left| a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \right| \leq 1,$$

untuk semua n bilangan bulat positif. Buktikan bahwa barisan $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ konvergen, katakan ke α. Selanjutnya buktikan barisan $\left\{ \frac{a_n}{\alpha^n} \right\}$ konvergen.

KNMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2020

HARI PERTAMA

1. Bila x, y, dan m adalah bilangan bulat dengan $x, y \geq 0$ dan $m \geq x+y$, buktikan bahwa

$$\binom{m+1}{x+y+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{i}{x} \binom{m-i}{y}.$$

2. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yang memenuhi $f(0) = 0$ dan

$$|f(z) - f(w)| = |z - w|,$$

untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dan $w \in \{0, 1, i\}$.

3. Diketahui fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dengan

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad \text{untuk setiap } x \in [a, b].$$

Jika $(p_n) \subseteq \mathbb{R}$ merupakan barisan **Cauchy**, dengan $a \leq p_n \leq b$ untuk setiap n, **buktikan** bahwa terdapat p dan c, dengan $a \leq p, c \leq b$, dengan sifat barisan $(F(p_n))$ konvergen ke $f(c)(p - a)$.

4. Misalkan V sebuah ruang vektor berdimensi $n \geq 2$ dan $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sebuah basis dari V. Diberikan sebuah operator linear $T : V \to V$ yang memiliki balikan (invertible) $T^{-1} : V \to V$. Operator linear A dan B pada V yang memenuhi:

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad A(\mathbf{v}_i) = T^{-1}(\mathbf{v}_i) \quad \text{untuk } i = 2, \ldots, n,$$

$$B(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad B(\mathbf{v}_i) = T^{-1}(\mathbf{v}_{i-1}) \quad \text{untuk } i = 2, \ldots, n.$$

   (a) Buktikan bahwa $\operatorname{rank}((A \circ T)^{n-1}) = n - 1$.

   (b) Hitunglah $\operatorname{rank}((B \circ T)^{n-1})$.

Catatan: Jika S suatu operator linear pada V dan k suatu bilangan asli, S^k didefinisikan sebagai komposisi S sebanyak k kali, yakni

$$S^k = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{k \text{ kali}}.$$

5. Misalkan G adalah suatu grup hingga dan m adalah suatu bilangan asli kelipatan tiga. Buktikan jika G memuat tepat sebanyak m unsur berorde m, maka m adalah bilangan kelipatan enam dan G memiliki tepat tiga subgrup siklik berorde m.

HARI KEDUA

1. Pasangan bilangan kompleks (a, b) dikatakan *seimbang* jika $|a| = |b| = |a + b|$.

   (a) Tunjukkan bahwa terdapat pasangan seimbang (a, b) dengan $a \neq b$.

   (b) Jika (a, b) merupakan pasangan seimbang dan $a^{2020} = b^{2020}$, tunjukkan bahwa $a = b$.

2. Andaikan $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Untuk bilangan bulat positif $k \leq n$, buktikan bahwa banyaknya barisan $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sedemikian sehingga $B_i \subseteq B$ untuk $1 \leq i \leq k$, dan

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B$$

   adalah $(2^k - 1)^n$.

3. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan interval terbuka dan terbatas $I \subseteq \mathbb{R}$, dengan $a \in I$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi $f_n, g, h : I \to \mathbb{R}$ terdiferensial, memenuhi:

   (a) $f_n(a) = g(a)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $f_n'(x) \geq g'(x)$, untuk setiap $x \in I$ dan $x > a$;

   (c) $f_n' \to h'$ secara seragam pada I.

   Buktikan bahwa terdapat fungsi terdiferensial $f : I \to \mathbb{R}$, dengan $f_n \to f$ pada I dan $h(x) \geq g(x)$, untuk setiap $x \in I$ dan $x > a$.

4. Misalkan R adalah ring yang memiliki identitas perkalian 1. Diketahui bahwa x, y adalah unsur di R yang bersifat $xy = 1$ tetapi $yx \neq 1$.

   (a) Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m, n yang berbeda berlaku $y^m x^m \neq y^n x^n$.

   (b) Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya unsur z di R yang memenuhi $z^{2020} = 0$.

5. Misalkan A, B, C, D adalah matriks ukuran 9×9 dengan entri-entri bilangan riil dan memenuhi persamaan $CA = BC$. Jika polinom karakteristik matriks A sama dengan polinom karakteristik matriks B, maka apakah polinom karakteristik matriks $(A - DC)$ juga sama dengan polinom karakteristik matriks $(B - CD)$? Lengkapilah jawaban Anda dengan bukti.

KNMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2021

HARI PERTAMA

1. Diberikan bilangan bulat positif n dan k sehingga $2 \leq k \leq n$. Buktikan bahwa

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} \binom{n+2}{k} \binom{n-2}{k-2} = \binom{n+2}{2} \binom{2n-2}{n-2}.$$

2. Diberikan fungsi f analitik di dalam dan pada kurva tertutup sederhana γ dan z_0 sebuah titik pada bidang kompleks yang tidak berada pada γ. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli m dan n berlaku

$$\oint_{\gamma} \frac{f^{(m)}(z)}{(z-z_0)^n}\, dz = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+n}}\, dz.$$

3. Misalkan k dan n bilangan bulat positif dan G adalah grup dengan n unsur. Buktikan bahwa kedua pernyataan berikut ekuivalen.

   (a) Bilangan n dan k relatif prima.

   (b) Untuk setiap subgrup A dari G berlaku $\{x \in G \mid x^k \in H\} \subseteq H$.

4. Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ dengan komponen real. Didefinisikan pemetaan linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dan $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dengan $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ dan $S(\mathbf{x}) = A^T\mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Buktikan bahwa $\ker(S \circ T) = \ker(T)$.

   (b) Jelaskan apakah selalu berlaku $\mathrm{Im}(S \circ T) = \mathrm{Im}(S)$?

5. Diberikan barisan fungsi kontinu (f_n) dengan $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika dipenuhi kondisi berikut:

   (a) $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \cdots$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

   (b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dan $M = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.

   maka

(1) Buktikan terdapat $t \in [0, 1]$ sedemikian sehingga $f(t) = M$.

(2) Berikan contoh bahwa (1) belum tentu berlaku, apabila kondisi (a) diganti menjadi terdapat bilangan asli N_x sehingga untuk setiap $n \geq N_x$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Jelaskan.

HARI KEDUA

1. Tentukan banyaknya bilangan terurut quintuples $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ dari bilangan bulat ganjil positif yang memenuhi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 101$.

2. Diberikan himpunan terbatas $A \subset \mathbb{R}$. Jika fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ kontinu seragam,

    (a) Selidiki apakah terdapat fungsi kontinu $g : \bar{A} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in A$. (Catatan: $\bar{A}$ menyatakan klosur himpunan A)

    (b) Buktikan bahwa f terbatas.

3. Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $A_n = (a_{ij})$ matriks berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} = |i - j|$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$. Tentukan dengan bukti, nilai dari $\det(A_n)$ untuk setiap bilangan asli n.

4. Pasangan terurut bilangan real (a, b) dikatakan *milenial* jika memenuhi persamaan $(a + bi)^{2021} = a^2 - b^2 - 2abi$ dengan $i = \sqrt{-1}$.

    (a) Jika (a, b) adalah pasangan milenial, buktikan bahwa $a = b = 0$ atau $a^2 + b^2 = 1$.

    (b) Hitunglah banyak semua pasangan *milenial.*

5. Misalkan $(A, +)$ adalah grup siklik dengan kardinalitas n. Ditetapkan α sebuah pembangun dari $(A, +)$. Untuk setiap m bilangan asli, didefinisikan ring A_m dengan $(A_m, +) = (A, +)$ dan perkalian di A_m didefinisikan melalui

$$\alpha\dot{\alpha} = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha = m\alpha.$$

    Buktikan bahwa A_r isomorfik dengan A_s sebagai ring jika dan hanya jika fpb(r, n) =fpb(s, n).

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2022

HARI PERTAMA

1. Misalkan a, b, c adalah unsur di grup G sehingga $abc = e$ dengan e adalah unsur identitas di G. Untuk masing-masing pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh penyangkal jika salah.

   (a) $bca = e$.

   (b) $bac = e$.

2. Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan c adalah sembarang bilangan real. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq b \leq n$ sedemikian sehingga $\left|c - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{1}{bn}$.

3. Diberikan suku banyak $p(z) = az^2 + bz + c$ untuk suatu bilangan kompleks a, b, dan c.

   (a) Jika $\{w_0, w_1, w_2\}$ merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan $w^3 = 1$, tentukan nilai dari

   $$w_0 p(w_0) + w_1 p(w_1) + w_2 p(w_2).$$

   Jelaskan jawaban saudara!

   (b) Jika $|abc| > 1$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan kompleks z dengan $|z| \leq 1$ sehingga $|p(z)| > 1$.

4. Diberikan matriks A berukuran 4×2 dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$ yang memenuhi

$$A \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad A \begin{bmatrix} b_{11} + b_{13} + b_{14} \\ b_{21} + b_{23} + b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tentukan semua nilai eigen dari matriks AB beserta multiplisitas aljabarnya.

(b) Buktikan bahwa $BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Misalkan barisan bilangan real (a_n) dengan $\frac{1}{2} < a_n < 1$ untuk setiap $n \geq 0$. Didefinisikan barisan (x_n) dengan

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1} \cdot x_n}, \quad n \geq 0.$$

Apakah (x_n) konvergen? Jika ya, tentukan limitnya.

HARI KEDUA

1. Misalkan $k \geq 4$ adalah bilangan bulat genap dan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Tentukan bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap pewarnaan bilangan-bilangan di dalam S dengan tiga warna berbeda senantiasa terdapat tiga anggota S. Katakan a, b, dan c (tidak harus berbeda) yang berwarna sama dan memenuhi $ka + b = c$.

2. Diberikan fungsi terbatas $f : [a, b] \to R$ dan $x_0 \in (a, b)$. Didefinisikan fungsi $p : (a, b) \to \mathbb{R}$ dengan $p(x) = \sup\{f(t) : t < x\}$. Jika fungsi f kontinu di x_0, selidiki apakah p kontinu di x_0! Berikan penjelasan jawaban saudara!

3. Diberikan fungsi kompleks $f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_k z^k$ dengan $|c_n| < 1945$ untuk setiap $1 \leq n \leq k$. Buktikan bahwa fungsi f tidak memiliki akar z dengan sifat $|z| < \dfrac{1}{2022}$.

4. Misalkan A adalah ring dengan identitas perkalian 1. Untuk setiap $a \in A$, didefinisikan pemetaan l_a dan r_a dari A ke A melalui $l_a(x) = ax$ dan $r_a(x) = xa$ untuk setiap $x \in A$.

   (a) Berikan contoh ring tak komutatif A sehingga manakala $a \in A$ membuat salah satu dari l_a atau r_a injektif, maka yang satunya lagi juga injektif.

   (b) Berikan contoh ring tak komutatif A sehingga terdapat $a \in A$ yang membuat tepat salah satu di antara l_a atau r_a injektif.

5. Diberikan dua bilangan bulat positif n dan m dengan $n \leq m$. Buktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} 1 & {}^{m}P_1 & \cdots & {}^{m}P_n \\ 1 & {}^{m+1}P_1 & \cdots & {}^{m+1}P_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & {}^{m+n}P_1 & \cdots & {}^{m+n}P_n \end{vmatrix} = 1!2!\cdots n!.$$

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2023

HARI PERTAMA

1. Diberikan enam bilangan asli berbeda yang tidak melebihi 426. Buktikan terdapat tiga diantaranya, sebut saja a, b, c yang memenuhi kondisi $a < b + c < 4a$.

2. Buktikan bahwa tidak terdapat bilangan kompleks z sedemikian sehingga $|z| = 1$ dan $z^{2023} + z + 1 = 0$

3. Diberikan barisan bilangan real (x_n), dan fungsi bernilai real f dan g.

   (a) Jika barisan (x_n) didefinisikan dengan

   $$x_n := \int_1^n \frac{\sin t}{t^2}\, dt,$$

   buktikan bahwa (x_n) konvergen.

   (b) Jika fungsi f kontinu dan g terdiferensialkan pada $\mathbb{R}$ dengan

   $$(g'(1) - f(1))(f(0) - g'(0)) > 0,$$

   buktikan bahwa terdapat $c \in (0, 1)$ sehingga $g'(c) - f(c) = 0$.

4. Misalkan $G \subseteq \mathbb{R}^3$ adalah grup dengan operasi $\star$ (G tidak selalu merupakan subgrup dari $\mathbb{R}^3$. Diketahui bahwa untuk hasil kali silang (*cross product*) di $\mathbb{R}^3$ dan untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ berlaku: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$ atau $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (atau keduanya).

   (a) Tunjukkan bahwa untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$, berlaku $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

   (b) Berikan contoh grup $(G, \star)$ yang memenuhi sifat di atas dengan $|G| > 1$ dan G bukan subgrup dari $\mathbb{R}^3$.

5. Misalkan $n \geq 2$ suatu bilangan asli dan P_n adalah ruang polinom dengan koefisien real berderajat paling tinggi n. Diberikan polinom-polinom tak nol $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ di P_n

sehingga $\deg(Q_j) = j$ untuk $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ dan

$$Q_j(2023) = \begin{cases} 1, & \text{jika } j = 0, \\ 0, & \text{jika } j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Jika $D : P_n \to P_n$ adalah suatu pemetaan linear dengan

$$D(Q_j) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j = 0, \\ Q_{j-1}, & \text{jika } j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

buktikan bahwa untuk sebarang polinom $f(x) \in P_n$ berlaku

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (D^j(f))(2023) \cdot Q_j(x).$$

Catatan: D^j adalah komposisi dari D sebanyak j kali.

HARI KEDUA

1. Misalkan A suatu matriks berbentuk

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix},$$

dengan a, b bilangan real selain nol. Tentukan semua nilai yang mungkin dari $\text{rank}(A)$. Jelaskan jawaban Anda.

2. Untuk setiap bilangan bulat positif n, buktikan

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

3. Untuk fungsi kompleks f yang analitik pada domain $A \subseteq \mathbb{C}$, didefinisikan $A^* = \{\overline{z} \mid z \in A\}$ dan fungsi $f^* : A^* \to \mathbb{C}$ dengan $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

   (a) Jika $f(z) = \sin z$, maka tunjukkan bahwa $f^*(z) = f(z)$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Buktikan bahwa $(^*)'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ untuk setiap $z \in A^*$.

4. Diketahui bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Riemann pada $[a, b]$. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku $|g_n(x)| \leq 2023$ dan barisan (g_n) konvergen ke fungsi g yang terintegral Riemann pada $[a, b]$, selidiki apakah

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Tuliskan penjelasan jawaban Saudara!

5. Diberikan suatu *ring* $(R, +, \cdot)$ dan $\dfrac{R}{Z_R} = \{r + Z_R \mid r \in R\} \cong \mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{23}$, dengan $Z_R = \{s \in R \mid sr = rs, \forall r \in R\}$. Untuk setiap $x \in R$, definisikan $C_x = \{r \in R \mid xr = rx\}$.

(a) Jika $(S, +)$ merupakan subgrup tak-trivial dari $(R, +)$ dengan Z_R subset sejati dari S, tentukan $\left|\dfrac{S}{Z_R}\right|$.

(b) Jika $C = \{C_x \mid x \in R\}$, tentukan $|C|$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2024

HARI PERTAMA

1. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang memenuhi kondisi $0 < a_n < 1$ dan
$$a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Selidiki kekonvergenan barisan (a_n) dan tentukan limitnya jika ada.

2. Diketahui fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik pada $\mathbb{C}$, memenuhi
$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2),$$
untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dan $f(x) = e^x$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(z) = e^z$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

3. Diberikan barisan Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \cdots$ dengan aturan $a_1 = a_2 = 1$ dan $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, untuk setiap $n > 1$. Buktikan bahwa terdapat bilangan pada barisan tersebut yang berakhir dengan 2024 angka nol tak terputus sebelah kanan.

4. (a) Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $A^2 = A^T$. Jika A dapat didiagonalkan atas $\mathbb{R}$, buktikan bahwa A matriks simetrik.

   (b) Berikan matriks B berukuran 2×2 atas $\mathbb{R}$ yang tidak simetrik dan memenuhi persamaan $B^2 = B^T$.

5. Diberikan grup hingga G dengan unsur-unsurnya $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } x_i x_j^{-1} \neq x_j x_i^{-1}, \\ 0, & \text{jika } x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}. \end{cases}$$
Buktikan bahwa $\det(A)$ selalu genap.

HARI KEDUA

1. Cari semua pasangan bilangan kompleks (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)z, \\ y^2 + z^2 &= (y+z)x, \\ z^2 + x^2 &= (z+x)y. \end{aligned}$$

2. Diberikan sembarang pewarnaan merah-biru pada setiap ruas garis yang menghubungkan 10 titik. Buktikan bahwa terdapat tiga titik sedemikian sehingga ketiga ruas garis yang menghubungkan ketiga titik tersebut berwarna merah, atau terdapat empat titik sedemikian sehingga keenam ruas garis yang menghubungkan keempat titik tersebut berwarna biru.

3. Diketahui $r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, fungsi $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ kontinu di 0 dan
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x},$$
ada di $\mathbb{R}$. Selidiki eksistensi $f'(0)$. Berikan penjelasan jawaban Anda.

4. Diketahui $\mathbb{R}[x]$ adalah ring polinom atas $\mathbb{R}$. Untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ideal di $\mathbb{R}[x]$ yang dibangun oleh $p(x)$ dinotasikan sebagai $\langle p(x) \rangle$.
   (a) Buktikan $\langle x - 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.
   (b) Tentukan bilangan asli a terbesar sehingga $\langle x^2 + ax + 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

5. Misal V ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam riil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan norma $\| \cdot \|$ yang didefinisikan dengan
$$\|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle, \quad \forall f \in V.$$
Lebih lanjut, diberikan pemetaan linier $T : V \to V$ dengan
$$\langle T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) \rangle, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V.$$

Buktikan bahwa jika $\mathbf{v} \in V$ dan $\mathbf{u} \in T(V)$ dengan $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})$, buktikan bahwa

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{w} \in T(V).$$

Catatan. $T(V) = \{T(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in V\}$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2025

HARI PERTAMA

1. Jika $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dengan $|a| = |b| = |c| = |d|$ dan $a + b + c = d$, buktikan bahwa $d = a$ atau $d = b$ atau $d = c$.

2. Misal A matriks tak singular 3×3 dengan entri bilangan kompleks sehingga terdapat 2 vektor eigen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dari A yang bersesuaian dengan 2 nilai eigen berbeda dari A memenuhi

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

untuk suatu bilangan kompleks μ.

   (a) Berikan satu contoh matriks A yang memenuhi.

   (b) Buktikan bahwa nilai eigen dari A adalah entri-entri dari diagonal utama pada A.

3. Diberikan barisan bilangan real (b_n) untuk $n \geq 0$, bilangan real $m > 0$, dan bilangan real $0 < M < 1$. Didefinisikan barisan (y_n) dengan

$$0 < y_0 < 1, \quad \text{dan} \quad y_{n+1} = y_n + (1 + y_n)b_{n+1}.$$

Jika $m \leq b_n \leq M$, buktikan barisan (y_n) konvergen dan tentukan nilai limitnya.

4. Misal G grup dengan $\varphi : G \to G$ dengan $\varphi(x) = x^3$ untuk setiap $x \in G$ merupakan monomorfisma.

   (a) Buktikan untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a^2b = ba^2$.

   (b) Apakah G komutatif? Jelaskan.

5. Diberikan barisan $m + 1$ bilangan bulat berbeda dengan $m, n \in \mathbb{Z}^+$ berbeda. Buktikan barisan tersebut selalu memiliki subbarisan naik sepanjang $m + 1$ atau subbarisan turun sepanjang $n + 1$.

HARI KEDUA

1. Jika fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terdiferensial pada (a, b), buktikan bahwa terdapat $c \in (a, b)$ dengan

$$f'(c)(a - c) < 2 \qquad \text{dan} \qquad f'(c)(b - c) < 2.$$

2. Tentukan himpunan terbuka terbesar $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $\mathrm{Ln}(1 - z^{2025})$ analitik di Ω. *Catatan:* Ln menyatakan bagian utama dari logaritma natural kompleks.

3. Diberikan $(R, +, \cdot)$ ring dengan elemen satuan 0_R dan 1_R. Untuk setiap $r \in R$, didefinisikan

$$A_r = \{xr \mid x \in R\}, \qquad B_r = \{x \in R \mid xr = 0_R\}.$$

   Unsur r dikatakan *rapi* jika terdapat isomorfisma grup $\varphi : R/A_r \to B_r$ sehingga memenuhi $\varphi(xa) = x\varphi(a)$ untuk semua $x \in R$ dan $a \in R/A_r$. Buktikan:

   (a) Jika r rapi dan tak nol, maka terdapat $s \in R$ dengan $s \neq r$ sehingga $A_r = B_s$ dan $A_s = B_r$.

   (b) Jika r rapi dan u adalah unit di R, maka $R/A_{ur} \cong B_{ur}$ sebagai grup.

4. Misalkan $\mathbb{M}$ himpunan semua matriks simetrik berukuran 4×4 dengan entri-entri merupakan elemen dari $\{0, 2, 5\}$, dan setiap baris memiliki ketiga elemen 0, 2, dan 5.

   (a) Jika pada $A \in \mathbb{M}$ terdapat $k \in \{0, 2, 5\}$ yang muncul sebanyak 8 di A, buktikan bahwa $\det(A) \neq 0$.

   (b) Tentukan nilai dari $\max\{\det(A) : A \in \mathbb{M}\}$. Uraikan jawaban Anda!

5. Dua puluh lima rumah yang berjajar di sisi barat Jalan ONMIPA akan diwarnai merah atau putih. Setiap rumah diwarnai tepat satu

warna, dengan aturan tidak ada dua rumah bersebelahan yang diwarnai putih dan tidak ada tiga rumah bersebelahan yang diwarnai merah. Tentukan banyaknya cara mewarnai 25 rumah tersebut. Uraikan jawaban Saudara!