Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\mathrm{cth}(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
$\mathrm{arsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Pravila za odvajanje

funkcija	*odvod*
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Integracijske metode

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{x=g(t)} \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$u = g(x) \implies du = g'(x)dx \implies dx = \frac{du}{g'(x)}$$

Perpartes

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

Integral racionalne funkcije

Z deljenjem zapišemo racionalno funkcijo $R(x)$ v obliki $p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kejr je r nižje stopnje od q.
Polinom q rezcepimo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje.
Funkcijo $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov:

$$\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1 + C_1x}{(x^2+bx+c)} + \ldots + \frac{B_l + C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$$

Parcialne ulomke posamično integriremo (*imenovalec mora biti nerazcepen!*):

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\omega}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2a\omega}\right);\ \omega = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\int \frac{px+q}{\underbrace{ax^2+bx+c}_{t}}dx = \frac{p}{2a}\ln|t| + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t}$$

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{p}{2a}\frac{t^{1-n}}{1-n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t^n}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^n\omega^n}I_n$$

$$I_n = \int\frac{dx}{(t^2+1)^n} \qquad I_1 = \arctan t$$

$$I_n = I_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}$$

Integrali trigonometričnih funkcij

Integrale z trigonometričnimi funkcijami z univerzalno trigonometrično substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije.

$$\tan\frac{x}{2} = t \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Integral iracionalne funkcije

Integrale tipa $\int\frac{p(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ rešujemo na naslednji način:

- Če je p konstanten, integral (z dopolnitvijo do ■ in s substitucijo) prevedemo na enega izmed:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \quad a > 0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C; \quad a > 0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C; \quad a > 0$$

- Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek:

$$\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int\frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

C je konstanta, $\widetilde{p}$ pa polinom, ki ima stopnjo 1 manjšo kot p. Koeficiente polinoma $\widetilde{p}$ in konstanto C dobimo z odvajanjem zgornje enačbe.

Uporaba integrala

Računanje površine ravninskih likov pod krivuljo

$$p = \int_a^b f(x)\ dx$$

Dolžina ravninske krivulje

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$$

Prostornina in površina vrtenine (vrtimo okoli x osi)

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\ dx$$

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

Prostornina vrtenine (vrtimo okoli y osi)

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\ dx$$

Težišče ravninskih likov

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)^2\ dx}{2p}$$

Doložina poti, ki jo pri vrtenju za 360° opiše težišče je $2\pi y_T$.

$$2\pi y_T p = \pi\int_a^b f(x)^2\ dx = V$$

Težišče ravninske krivulje

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Dolžina ravninske krivulje

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Parametrično podane krivulje

Enačba krivulje v $\mathbb{R}^3$ je oblike

$$\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

Krivulje v polarnih koordinatah

$$r = r(\varphi)$$
$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$
$$\vec{r}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$$

Tangenta parametrične krivulje

Tangenta je kar vektor, ki ga dobimo z odvajanjem parametrične enačbe.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

Doložina parametrično podane krivulje

Majhen delček krivulije ima dolžino $ds = \|\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)\| = \|\dot{\vec{r}}(t)\|$. Doložina večjega dela krivulje je potem integral teh delčkov:

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\ dt$$

Doložina krivulije v polarnih koordinatah

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}\ d\varphi$$

Naravna parametrizacija

Pot $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ je naravno parametrizirana, če je $\forall t \in I\ :\ |\dot{\vec{r}}(t)| = 1$.
Vsako pot lahko **naravno reparametriziramo**. Za nek $a \in I$ definiramo funkcijo

$$s : I \to J \qquad s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(\tau)|d\tau$$

z $t : J \to I$ označimo izverz od s s. Potem je $\vec{\varphi}(s) : J \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $\vec{\varphi}(s) = \vec{r}(t(s))$ *naravno parametrizirana pot*.

Frenetove formule

Naj bo $\vec{r}(s)$ naravna parametrizacija.

$$\underbrace{\vec{T} = \vec{r}'}_{\text{tangenta}} \quad \underbrace{\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}}_{\text{normala}} \quad \underbrace{\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N}}_{\text{binormala}}$$

$\kappa = |\vec{T}'| = |\vec{r}''|$ ... fleksijska ukrivljenost

$\tau = \frac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\vec{r}'''}{|\vec{r}''|^2}$ ... torzijska ukrivljenost

Če je $\forall s \in I\ :\ \kappa(s) \neq 0$ so vektorji $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ dobro definirani in veljajo **Frenetove formule**:

$$\vec{T}' = \kappa\vec{N} \qquad \vec{N}' = \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \qquad \vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

Frenetova baza in ukrivljenost v poljubni parametrizaciji

Naj bo $\vec{r}(t)$ poljubna regularna pot z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo.

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \qquad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|} \qquad \vec{N} = \vec{B}\times\vec{T}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad \tau = \frac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}$$

Metrični prostor

Preslikava $d : M \to M$ je **metrika** na množici M, če velja:

- $d(x,y) \geq 0$ in $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Metrični prostor je par (M,d).
Normiran prostor je *vektorski prostor* V opremljen z normo. **Norma** je preslikava $\|\,\| : V \to \mathbb{R}^+$, ki ima lastnosti:

- $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
- $\|w + v\| \leq \|w\| + \|v\|$

Potem je V tudi metrični prostor z $d(w,v) = \|w - v\|$.

Odprte in zaprte množice

Odprta krogla $B(a,r) = \{x \in M : d(a,x) < r\}$
Zaprta krogla $\overline{B}(a,r) = \{x \in M : d(a,x) \leq r\}$
Množiva $U \subseteq M$ je **odprta**, če

$$\forall a \in U\ \exists\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \subseteq U$$

Množica $U \subset M$ je **zaprta**, če je U^C odprta.
Zaprtje $\bar{A}$ množice A je najmanjša množica v M, ki vsebuje A.
Notranjost $\mathring{A}$ je največja odprta množiva vsebovana v A.

Rob množice

Naj bo $A \subseteq M$. Točka $a \in A$ je **robna**, če vsaka odprta krogla $B(a,\varepsilon)$ seka A in A^C.
Rob ∂A je množica vseh robnih točk množice A.

Zaporedja

Zaporedje (a_n) z limito v metričenem porstoru $((M,d))$ je **konvergentno** z limito $a \in M$, če velja:

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

Zaporedje (a_n) je **Cauchyevo**, če velja:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Vsako konvergentno zaporedje je tudi Cauchyevo. Obratno pa je res samo, če je metrični prostor **poln**. ($\mathbb{R}^n$ je poln)

Kompaktnost

Točka $s \in M$ je **stekališče** zaporedja a_n v metričnem prostoru (M,d), če $\forall\varepsilon > 0$ v krogli $B(s,\varepsilon)$ neskončno mnogo členov.
Limita je tudi stekališče, obratno pa ni vedno res.
Metrični prostor M je **kompakten**, če ima vsako zaporedje iz M stekališče v M. Podmnožica $U \subseteq M$ je kompaktna, če je kompaktna kot metrični prostor za metriko, ki jo podeduje iz M.
Vsak kompakten metrični prostor je **poln**.
Podmnožica metričenga prostora je **omejena**, če je če je vsebovana v kaki krogli.
Heine-Borel Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je **kompaktna** $\Leftrightarrow$ je zaprta in omejena. ⟨*vstavi vic o fiziku, ki je čokolado*⟩

Zveznost preslikave

Preslikava $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ je zvezna v točki a, če
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M_1 : d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

Preslikava je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki.
Preslikava f je zvezna v točki $a \in M_1 \Leftrightarrow$ za vsako zaporedje a_n v M_1, ki konvergira proti a, konvergira $f(a_n)$ proti $f(a)$.

Enakomerna zveznost preslikave

Preslikava $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ je enakomerno zvezna, če

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y \in M_1 : d_1(x,y)<\delta \Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Vsaka enakomerno zvezna preslikava je zvezna, obratno pa je res samo če je (M_1, d_1) kompakten.

Skrčitve

Preslikava $f : (M, d) \to (M, d)$ je **skrčitev**, če

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{za nek } q \in [0, 1)$$

Banachovo načelo

Naj bo (M, d) poln in $f : M \to M$ skrčitev. Potem obstaja natanko en $x_0 \in M$ za katerega je $f(x_0) = x_0$.

Funkcije dveh spremenlivk

Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija in $(a, b) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$

- **Limita** $A = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, če velja

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :$$
$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-A|<\varepsilon$$

- Funkcija je **zvezna** v točki (a, b), če

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :$$
$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$$

- Če je f zvezna v točiki (a, b), je

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Smerni odvod

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x, y) + t\vec{s})}{t} = \nabla f \vec{s}$$

Gradient:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$

Parcialni odvod

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Če sta $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$ zvezna, sta enaka.

Diferenciabilnost

Funkcija f je diferenciabilna, če obstajata konstanti $A, B \in \mathbb{R}$, da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

- Če je f diferenciabilna v (a, b), je

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

- Če je f parcialno odvedljiva v (a, b) in sta parcialna odvoda zvezna v (a, b), je f diferenciabilna v (a, b).

Taylorjeva formula

Taylorjev razvoj funkcije f okoli točke (a, b)

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k+\ldots$$

Lokalni ekstremi

Kandidati za lokalne ekstreme so točke (a, b) v katerih je

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{in} \quad f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Hessejeva matrika

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

- $\det H(a, b) > 0$
  - $f_{xx}(a, b) > 0 \rightsquigarrow$ **lokalni minimum**
  - $f_{xx}(a, b) < 0 \rightsquigarrow$ **lokalni maksimum**
- $\det H(a, b) = 0 \rightsquigarrow$ *ne vemo kaj je to*
- $\det H(a, b) < 0 \rightsquigarrow$ *to ni lokalni ekstrem, ampak* **sedlo**

Preslikave $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Odvod preslikave F v točki $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je takšna $n \times m$ matrika A, da velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(x + h) - F(x) - Ah|}{|h|} = 0$$

Matriko A imenujemo **Jacobijeva matrika**

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Odvod kompozituma

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x))DF(x)$$

Približna vrednost preslikave

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}^n : |h| \cong 0$

$$F(x + h) \cong F(x) + DF(x)h$$

Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ z lastnostijo, da je $Df(a)$ obrnljiva matrika. Potem lokalno (okoli $f(a)$) obstaja inverz preslikave f in velja

$$F(f^{-1})(f(a)) = Df(a)^{-1}$$

Izrek o implicitni preslikavi

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gladka preslikava z lastnostijo, da je $f(a, b) = 0$ in da je $D_y f(a, b)$ obrnljiva. Potem lokalno (okoli b) obstaja gladka preslikava $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da je $g(a) = b$ in

$$\forall x : f(x, g(x)) = 0$$

dodatno velja

$$Dg(a) = -D_y f(a, b)^{-1} D_x f(a, b)$$

Vezani ekstremi

Iščemo ekstreme funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 0$.

Potreben pogoj za ekstrem je, da je gradient funkcije f vzporeden gradientu funkcije g. Ta pogoj lahko izrazimo tudi z:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

in izračunamo lokalne ekstreme funkcije F. *Če imamo več pogojev, dodamo* λ_i