Uporaba integrala

Računanje površine ravninskih likov pod krivuljo

$$p = \int_a^b f(x)\ dx$$

Dolžina ravninske krivulje

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$$

Prostornina in površina vrtenine (vrtimo okoli x osi)

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\ dx$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

Prostornina vrtenine (vrtimo okoli y osi)

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\ dx$$

Težišče ravninskih likov

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)^2\ dx}{2p}$$

Doložina poti, ki jo pri vrtenju za 360° opiše težišče je $2\pi y_T$.

$$2\pi y_T p = \pi \int_a^b f(x)^2\ dx = V$$

Težišče ravninske krivulje

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Dolžina ravninske krivulje

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Parametrično podane krivulje

Enačba krivulje v $\mathbb{R}^3$ je oblike

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

Krivulje v polarnih koordinatah

$$r = r(\varphi)$$

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$

$$\vec{r}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$$

Tangenta parametrične krivulje

Tangenta je kar vektor, ki ga dobimo z odvajanjem parametrične enačbe.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

Doložina parametrično podane krivulje

Majhen delček krivulje ima dolžino $ds = \|\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)\| = \|\dot{\vec{r}}(t)\|$. Doložina večjega dela krivulje je potem integral teh delčkov:

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\ dt$$

Doložina krivulje v polarnih koordinatah

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}\ d\varphi$$

Naravna parametrizacija

Pot $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ je naravno parametrizirana, če je $\forall t \in I\ :\ |\dot{\vec{r}}(t)| = 1$.
Vsako pot lahko **naravno reparametriziramo**. Za nek $a \in I$ definiramo funkcijo

$$s : I \to J \qquad s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau$$

z $t : J \to I$ označimo izverz od s s. Potem je $\vec{\varphi}(s) : J \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $\vec{\varphi}(s) = \vec{r}(t(s))$ *naravno parametrizirana pot.*

Frenetove formule

Naj bo $\vec{r}(s)$ naravna parametrizacija.

$$\underbrace{\vec{T} = \vec{r}'}_{\text{tangenta}} \qquad \underbrace{\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}}_{\text{normala}} \qquad \underbrace{\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}}_{\text{binormala}}$$

$\kappa = |\vec{T}'| = |\vec{r}''|$ ... fleksijska ukrivljenost

$\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'')\vec{r}'''}{|\vec{r}''|^2}$ ... torzijska ukrivljenost

Če je $\forall s \in I\ :\ \kappa(s) \neq 0$ so vektorji $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ dobro definirani in veljajo **Frenetove formule**:

$$\vec{T}' = \kappa\vec{N} \qquad \vec{N}' = \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \qquad \vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

Frenetova baza in ukrivljenost v poljubni parametrizaciji

Naj bo $\vec{r}(t)$ poljubna regularna pot z neničelno fleksijska ukrivljenostjo.

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \qquad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \qquad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad \tau = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$

Metrični prostor

Preslikava $d : M \to M$ je **metrika** na množici M, če velja:

- $d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Metrični prostor je par (M, d).
Normiran prostor je *vektorski prostor* V opremljen z normo. **Norma** je preslikava $\|\ \| : V \to \mathbb{R}^+$, ki ima lastnosti:

- $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
- $\|w + v\| \leq \|w\| + \|v\|$

Potem je V tudi metrični prostor z $d(w, v) = \|w - v\|$.

Odprte in zaprte množice

Odprta krogla $B(a, r) = \{x \in M : d(a, x) < r\}$
Zaprta krogla $\overline{B}(a, r) = \{x \in M : d(a, x) \leq r\}$
Množiva $U \subseteq M$ je **odprta**, če

$$\forall a \in U\ \exists\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

Množica $U \subset M$ je **zaprta**, če je U^C odprta.
Zaprtje $\bar{A}$ množice A je najmanjša množica v M, ki vsebuje A.
Notranjost $\mathring{A}$ je največja odprta množiva vsebovana v A.

Rob množice

Naj bo $A \subseteq M$. Točka $a \in A$ je **robna**, če vsaka odprta krogla $B(a, \varepsilon)$ seka A in A^C.
Rob ∂A je množica vseh robnih točk množice A.

Zaporedja

Zaporedje (a_n) z limito v metričenem porstoru $((M, d))$ je **konvergentno** z limito $a \in M$, če velja:

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

Zaporedje (a_n) je **Cauchyevo**, če velja:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Vsako konvergentno zaporedje je tudi Cauchyevo. Obratno pa je res samo, če je metrični prostor **poln**. ($\mathbb{R}^n$ je poln)

Kompaktnost

Zveznost

Skrčitve

Banachovo načelo