Odvodi

$funkcija$	$odvod$
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\mathrm{cth}(x)=\frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
$\mathrm{arsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Pravila za odvajanje

$funkcija$	$odvod$
$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Integracijske metode

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{x=g(t)} \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$u=g(x) \implies du=g'(x)dx \implies dx=\frac{du}{g'(x)}$$

Perpartes

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx$$

Integral racionalne funkcije

Z deljenjem zapišemo racionalno funkcijo $R(x)$ v obliki $p(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$, kejr je r nižje stopnje od q.
Polinom q rezcepimo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje.
Funkcijo $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov:

$$\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{(x^2+bx+c)}+\ldots+\frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$$

Parcialne ulomke posamično integriremo (*imenovalec mora biti nerazcepen!*):

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a\omega}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2a\omega}\right);\ \omega=\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\int \frac{px+q}{\underbrace{ax^2+bx+c}_{t}}dx=\frac{p}{2a}\ln|t|+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t}$$

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\frac{p}{2a}\frac{t^{1-n}}{1-n}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t^n}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{a^n\omega^n}I_n$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(t^2+1)^n} \qquad I_1=\arctan t$$

$$I_n=I_{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)+\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}$$

Integrali trigonometričnih funkcij

Integrale z trigonometričnimi funkcijami z univerzalno trigonometrično substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije.

$$\tan\frac{x}{2}=t \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

Integral iracionalne funkcije

Integrale tipa $\int\frac{p(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ rešujemo na naslednji način:

- Če je p konstanten, integral (z dopolnitvijo do ■ in s substitucijo) prevedemo na enega izmed:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C;\quad a>0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C;\quad a>0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C;\quad a>0$$

- Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek:

$$\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$
$$\widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\int\frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

C je konstanta, $\widetilde{p}$ pa polinom, ki ima stopnjo 1 manjšo kot p. Koeficiente polinoma $\widetilde{p}$ in konstanto C dobimo z odvajanjem zgornje enačbe.

Uporaba integrala

Računanje površine ravninskih likov pod krivuljo

$$p=\int_a^b f(x)\ dx$$

Dolžina ravninske krivulje

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

Prostornina in površina vrtenine (vrtimo okoli x osi)

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\ dx$$

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$$

Prostornina vrtenine (vrtimo okoli y osi)

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\ dx$$

Težišče ravninskih likov

$$y_T=\frac{\int_a^b f(x)^2\ dx}{2p}$$

Doložina poti, ki jo pri vrtenju za 360° opiše težišče je $2\pi y_T$.

$$2\pi y_T p=\pi\int_a^b f(x)^2\ dx=V$$

Težišče ravninske krivulje

$$y_T=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Dolžina ravninske krivulje

$$y_T=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Parametrično podane krivulje

Enačba krivulje v $\mathbb{R}^3$ je oblike

$$\overrightarrow{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in\mathbb{R}^3$$

Krivulje v polarnih koordinatah

$$r=r(\varphi)$$
$$x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi$$
$$\overrightarrow{r}(\varphi)=(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi)$$

Tangenta parametrične krivulje

Tangenta je kar vektor, ki ga dobimo z odvajanjem parametrične enačbe.

$$\overrightarrow{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$$
$$\dot{\overrightarrow{r}}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$$

Doložina parametrično podane krivulje

Majhen delček krivulje ima dolžino
$ds=\|\overrightarrow{r}(t+dt)-\overrightarrow{r}(t)\|=\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\|$. Doložina večjega dela krivulje je potem integral teh delčkov:

$$s=\int_a^b\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\|\ dt$$

Doložina krivulje v polarnih koordinatah

$$s=\int_a^b\sqrt{\dot{r}(\varphi)^2+r(\varphi)^2}\ d\varphi$$

Naravna parametrizacija

Pot $\overrightarrow{r}:I\to\mathbb{R}^3$ je naravno parametrizirana, če je
$\forall t\in I\ :\ |\dot{\overrightarrow{r}}(t)|=1$.
Vsako pot lahko **naravno reparametriziramo**. Za nek $a\in I$ definiramo funkcijo

$$s:I\to J \qquad s(t)=\int_a^t|\dot{\overrightarrow{r}}(\tau)|d\tau$$

z $t:J\to I$ označimo izverz od s s. Potem je $\overrightarrow{\varphi}(s):J\to\mathbb{R}$ dana s predpisom $\overrightarrow{\varphi}(s)=\overrightarrow{r}(t(s))$ *naravno parametrizirana pot.*

Frenetove formule

Naj bo $\overrightarrow{r}(s)$ naravna parametrizacija.

$$\underbrace{\overrightarrow{T}=\overrightarrow{r}'}_{\text{tangenta}} \qquad \underbrace{\overrightarrow{N}=\frac{\overrightarrow{T}'}{|\overrightarrow{T}'|}}_{\text{normala}} \qquad \underbrace{\overrightarrow{B}=\overrightarrow{T}\times\overrightarrow{N}}_{\text{binormala}}$$

$\kappa=|\overrightarrow{T}'|=|\overrightarrow{r}''|$ ... fleksijska ukrivljenost

$\tau=\frac{(\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}'')\overrightarrow{r}'''}{|\overrightarrow{r}''|^2}$ ... torzijska ukrivljenost

Če je $\forall s\in I\ :\ \kappa(s)\neq0$ so vektorji $\overrightarrow{T},\overrightarrow{N},\overrightarrow{B}$ dobro definirani in veljajo **Frenetove formule**:

$$\overrightarrow{T}'=\kappa\overrightarrow{N} \qquad \overrightarrow{N}'=\tau\overrightarrow{B}-\kappa\overrightarrow{T} \qquad \overrightarrow{B}'=-\tau\overrightarrow{N}$$

Frenetova baza in ukrivljenost v poljubni parametrizaciji

Naj bo $\overrightarrow{r}(t)$ poljubna regularna pot z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo.

$$\overrightarrow{T}=\frac{\dot{\overrightarrow{r}}}{|\dot{\overrightarrow{r}}|} \qquad \overrightarrow{B}=\frac{\dot{\overrightarrow{r}}\times\ddot{\overrightarrow{r}}}{|\dot{\overrightarrow{r}}\times\ddot{\overrightarrow{r}}|} \qquad \overrightarrow{N}=\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{T}$$

$$\kappa=\frac{|\dot{\overrightarrow{r}}\times\ddot{\overrightarrow{r}}|}{|\dot{\overrightarrow{r}}|^3} \qquad \tau=\frac{(\dot{\overrightarrow{r}}\times\ddot{\overrightarrow{r}})\dddot{\overrightarrow{r}}}{|\dot{\overrightarrow{r}}\times\ddot{\overrightarrow{r}}|^2}$$

Metrični prostor

Preslikava $d:M\to M$ je **metrika** na množici M, če velja:

- $d(x,y)\geq0$ in $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
- $d(x,y)=d(y,x)$
- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

Metrični prostor je par (M,d).
Normiran prostor je *vektorski prostor* V opremljen z normo. **Norma** je preslikava $\|\ \|:V\to\mathbb{R}^+$, ki ima lastnosti:

- $\|v\|=0\Rightarrow v=0$
- $\|\alpha v\|=|\alpha|\|v\|$
- $\|w+v\|\leq\|w\|+\|v\|$

Potem je V tudi metrični prostor z $d(w,v)=\|w-v\|$.

Odprte in zaprte množice

Odprta krogla $B(a,r)=\{x\in M:d(a,x)<r\}$
Zaprta krogla $\overline{B}(a,r)=\{x\in M:d(a,x)\leq r\}$
Množiva $U\subseteq M$ je **odprta**, če

$$\forall a\in U\ \exists\varepsilon>0:B(a,\varepsilon)\subseteq U$$

Množica $U\subset M$ je **zaprta**, če je U^C odprta.
Zaprtje $\bar{A}$ množice A je najmanjša množica v M, ki vsebuje A.
Notranjost $\mathring{A}$ je največja odprta množiva vsebovana v A.

Rob množice

Naj bo $A\subseteq M$. Točka $a\in A$ je **robna**, če vsaka odprta krogla $B(a,\varepsilon)$ seka A in A^C.
Rob ∂A je množica vseh robnih točk množice A.

Zaporedja

Zaporedje (a_n) z limito v metričenem porstoru $((M,d))$ je **konvergentno** z limito $a\in M$, če velja:

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,a)=0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:n\geq n_0\Rightarrow d(a_n,a)<\varepsilon$$

Zaporedje (a_n) je **Cauchyevo**, če velja:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:n,m\geq n_0\Rightarrow d(a_n,a_m)<\varepsilon$$

Vsako konvergentno zaporedje je tudi Cauchyevo. Obratno pa je res samo, če je metrični prostor **poln**. ($\mathbb{R}^n$ je poln)

Kompaktnost

Točka $s\in M$ je **stekališče** zaporedja a_n v metričnem prostoru (M,d), če $\forall\varepsilon>0$ v krogli $B(s,\varepsilon)$ neskončno mnogo členov.
Limita je tudi stekališče, obratno pa ni vedno res.
Metrični prostor M je **kompakten**, če ima vsako zaporedje iz M stekališče v M. Podmnožica $U\subseteq M$ je kompaktna, če je kompaktna kot metrični prostor za metriko, ki jo podeduje iz M.
Vsak kompakten metrični prostor je **poln**.
Podmnožica metričenga prostora je **omejena**, če je če je vsebovana v kaki krogli.
Heine-Borel Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je **kompaktna** $\Leftrightarrow$ je zaprta in omejena. ⟨*vstavi vic o fiziku, ki je čokolado*⟩

Zveznost preslikave

Preslikava $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ je zvezna v točki a, če

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M_1 : d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

Preslikava je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki.
Preslikava f je zvezna v točki $a \in M_1 \Leftrightarrow$ za vsako zaporedje a_n v M_1, ki konvergira proti a, konvergira $f(a_n)$ proti $f(a)$.

Enakomerna zveznost preslikave

Preslikava $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ je enakomerno zvezna, če

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y \in M_1 : d_1(x,y)<\delta \Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Vsaka enakomerno zvezna preslikava je zvezna, obratno pa je res samo če je (M_1, d_1) kompakten.

Skrčitve

Preslikava $f : (M, d) \to (M, d)$ je **skrčitev**, če

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{za nek } q \in [0, 1)$$

Banachovo načelo

Naj bo (M, d) poln in $f : M \to M$ skrčitev. Potem obstaja natanko en $x_0 \in M$ za katerega je $f(x_0) = x_0$.

Funkcije dveh spremenlivk

Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija in $(a, b) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$

- **Limita** $A = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, če velja

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:$$
$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-A|<\varepsilon$$

- Funkcija je **zvezna** v točki (a, b), če

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:$$
$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$$

- Če je f zvezna v točiki (a, b), je

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Smerni odvod

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x, y) + t\vec{s})}{t} = \nabla f \vec{s}$$

Gradient:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Parcialni odvod

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Če sta $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$ zvezna, sta enaka.

Diferenciabilnost

Funkcija f je diferenciabilna, če obstajata konstanti $A, B \in \mathbb{R}$, da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

- Če je f diferenciabilna v (a, b), je

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

- Če je f parcialno odvedljiva v (a, b) in sta parcialna odvoda zvezna v (a, b), je f diferenciabilna v (a, b).

Taylorjeva formula

Taylorjev razvoj funkcije f okoli točke (a, b)

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k+\ldots$$

Lokalni ekstremi

Kandidati za lokalne ekstreme so točke (a, b) v katerih je

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{in} \quad f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Hessejeva matrika

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

- $\det H(a, b) > 0$
  - $f_{xx}(a, b) > 0 \rightsquigarrow$ **lokalni minimum**
  - $f_{xx}(a, b) < 0 \rightsquigarrow$ **lokalni maksimum**
- $\det H(a, b) = 0 \rightsquigarrow$ *ne vemo kaj je to*
- $\det H(a, b) < 0 \rightsquigarrow$ *to ni lokalni ekstrem, ampak* **sedlo**

Preslikave $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Odvod preslikave F v točki $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je takšna $n \times m$ matrika A, da velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(x + h) - F(x) - Ah|}{|h|} = 0$$

Matriko A imenujemo **Jacobijeva matrika**

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Odvod kompozituma

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x))DF(x)$$

Približna vrednost preslikave

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}^n : |h| \cong 0$

$$F(x + h) \cong F(x) + DF(x)h$$

Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ z lastnostijo, da je $Df(a)$ obrnljiva matrika. Potem lokalno (okoli $f(a)$) obstaja inverz preslikave f in velja

$$F(f^{-1})(f(a)) = Df(a)^{-1}$$

Izrek o implicitni preslikavi

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gladka preslikava z lastnostjo, da je $f(a, b) = 0$ in da je $D_y f(a, b)$ obrnljiva. Potem lokalno (okoli b) obstaja gladka preslikava $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da je $g(a) = b$ in

$$\forall x : f(x, g(x)) = 0$$

dodatno velja

$$Dg(a) = -D_y f(a, b)^{-1} D_x f(a, b)$$

Vezani ekstremi

Iščemo ekstreme funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 0$. Potreben pogoj za ekstrem je, da je gradient funkcije f vzporeden gradientu funkcije g. Ta pogoj lahko izrazimo tudi z:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

in izračunamo lokalne ekstreme funkcije F. *Če imamo več pogojev, dodamo* λ_i

Diferencialne enačbe

Ločljive spremenljivke

$$g(y)y' = f(x)$$

Upoštevamo, da je $y' = \frac{dy}{dx}$. Enačbo pomnožimop z dx in integriramo obe strani enačbe.

Homogena diferencialna enačba

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Uvedemo novo spremenlivko $v(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow y' = xv' + v$, vstavimo v začetno enačbo in dobimo

$$xv'v = f(x) \;\Rightarrow\; \frac{v'}{f(v) - v} = \frac{1}{x}$$

Linearna diferencialna enačba

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Najprej rešimo *homogeni del* $(r(x) = 0)$

$$py' + qy = 0 \;\Rightarrow\; y = De^{P(x)};\; P(x) = -\int \frac{q}{p} dx$$

D postane funkcija odvisna od x (*variacija konstante*).
Zgornjo enačbo odvajoamo in dobimo y'.

$$y' = D'e^P - \frac{q}{p} De^P$$

y in y' vstavimo v prvotno enačbo in iz nje izrazimo D', D dobimo z integriranjem.

Bernoullijeva diferencialna enačba

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)^\alpha$$

Če je $\alpha = 0$, je enačba linearna. Če je $\alpha = 1$ ima ločljive spremenljivke. Sicer, enačbo prevedemo na linearno.
Enačbo delimo z y^α in uvedemo novo funkcijo $z = y^{1-\alpha}$ $\Rightarrow z' = (1 - \alpha)y'y^{-\alpha}$. Dobimo linearno enačbo:

$$\frac{1}{1 - \alpha} pz' + qz = r$$

Eksaktne diferencialne enačbe

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \text{ali} \quad P + Qy' = 0$$

Naj bo rešitev enačbe $u(x, y) = C$.
Če je $P_y = Q_x$, obstaja funckcija u, da je $\nabla u = (P, Q) \Rightarrow u_x = P$, $u_y = Q$.
Izračunamo u tako da u_x *integriramo po x (namesto konstante prištejemo funkcijo* $f(y)$*). Nato pravkar izračunani u odvajamo po y in ga enačimo z* $u_y = Q$.
Izrazimo f' *in z integriranjem dobimo* f.
Če $P_y \neq Q_x$, obstaja integrajoči množitelj μ, da je $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$

Homegena linearna dif. enačba 2. reda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Naj bo $y_1(x)$ dana rešitev enačbe. Drugo linearno neodvisno rešitev $y_2(x)$ dobimo kot rešitev

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = W(x) \quad W(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

Nehomogena linearna dif. enačba 2. reda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Naj bosta y_1, y_2 linearno neodvisni rešitvi homegene enačbe $(r(x) = 0)$. Partikularno rešitev dobimo z nastavkom:

$$y_p = C_1(x)y1 + c_2(x)y_2$$

kjer funkciji C_1, C_2 zadoščata

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \qquad C_1' y_1' + C_2' y_2' = r(x)$$

Linearna dif. enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

Kjer sta $p, r \in \mathbb{R}$.
Najprej rešimo homogeni del. V zgornjo enačbo vstavimo $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

- Če je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, je splošna rešitev oblike

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- Če je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, je splošna rešitev oblike

$$\lambda_1 = a + bi \qquad \lambda_2 = a - bi$$
$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin ax$$

Linearna dif. enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti in posebno vrsto nehomogenosti

$$y'' + py' + qy = P(x)e^{\lambda x}$$

kjer so $p, q, \lambda \in \mathbb{R}$, $P(x)$ pa polinom.
Partikularno rešitev določimo z nastavkom

$$y_p = Q(x)x^k e^{\lambda x}$$

Kjer je $Q(x)$ polinom iste stopnje kot P, k pa pove večkratnost ničle karakterističnega polinoma.

Sistemi linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{x} = Ax$$

Kjer je A 2×2 matrika.

- Če se A da diagonalizirati, oziroma ima dva linearno neodvisna lastna vektorja $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ in lastni vrednosti λ_1, λ_2.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{e_2}$$

- Če se A ne da diagonalizirati, oziroma ima samo en lastni vektor $\vec{e}$, potem izračunamo $\vec{k}$ kot rešitev $(A - \lambda I)\vec{k} = \vec{e}$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{e} + C_2 e^{\lambda t}(\vec{k} + t\vec{e})$$

Funkcijska zaporedja in vrste

Zaporedje funkcij f_n **po točkah konvergira** proti f, če $\forall x \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
f_n **enakomerno konvergira** proti f, če
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

- Če f_n konvergira enakomirno, konvergira tudi po točkah
- Če zaporedje zveznih funkcji konvergira proti f, je tudi f zvezna
- Če zaporedje f_n enakomerno konvergira proti f, tudi $\int_a^x f_n(t)dt$ enakomerno konvergira proti $\int_a^x f(t)dt$
- Če zaporedje odvedljivih f_n, konvergira po točkah k f, in zaporedje f_n' konvergira enakomerno, potem f_n' konvergira k f'
- **Weierstrassov kriterij** Če $|f_n(x) - f(x)| < c_n\ \forall x \in I$ in $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, zaporedje f_n enakomerno konvergira k f

Funkcijska vrsta $\sum f_n$ **po točkah konvergira**, če $\forall x \in I$ vrsta konvergira.
$\sum f_n$ **enakomerno konvergira**, če enakomerno konvergira zaporedje delnih vsot.