Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\mathrm{cth}(x)=\frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
$\mathrm{arsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Pravila za odvajanje

funkcija	*odvod*
$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Integracijske metode

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{x=g(t)} \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$u=g(x) \implies du=g'(x)dx \implies dx=\frac{du}{g'(x)}$$

Perpartes

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

Integral racionalne funkcije

Z deljenjem zapišemo racionalno funkcijo $R(x)$ v obliki $p(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$, kejr je r nižje stopnje od q.

Polinom q rezcepimo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje.

Funkcijo $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov:

$$\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{(x^2+bx+c)}+\ldots+\frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$$

Parcialne ulomke posamično integriremo:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\omega}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2a\omega}\right);\ \omega=\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\int \frac{px+q}{\underbrace{ax^2+bx+c}_{t}}dx = \frac{p}{2a}\ln|t| + \left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t}$$

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{p}{2a}\frac{t^{1-n}}{1-n} + \left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t^n}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^n\omega^n}I_n$$

$$I_n = \int\frac{dx}{(t^2+1)^n} \qquad I_1=\arctan t$$

$$I_n = I_{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)+\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}$$

Integrali trigonometričnih funkcij

Integrale z trigonometričnimi funkcijami z univerzalno trigonometrično substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije.

$$\tan\frac{x}{2}=t \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

Integral iracionalne funkcije

Integrale tipa $\int\frac{p(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ rešujemo na naslednji način:

- Če je p konstanten, integral (s substitucijo) prevedemo na enega izmed:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C; \quad a>0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C; \quad a>0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C; \quad a>0$$

- Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek:

$$\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\int\frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

  C je konstanta, $\widetilde{p}$ pa polinom, ki ima stopnjo 1 manjšo kot p. Koeficiente polinoma $\widetilde{p}$ in konstanto C dobimo z odvajanjem zgornje enačbe.

Uporaba integrala

Računanje površine ravninskih likov pod krivuljo

$$p=\int_a^b f(x)\ dx$$

Dolžina ravninske krivulje

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

Prostornina in površina vrtenine (vrtimo okoli x osi)

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\ dx$$

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$$

Prostornina vrtenine (vrtimo okoli y osi)

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\ dx$$

Težišče ravninskih likov

$$y_T=\frac{\int_a^b f(x)^2\ dx}{2p}$$

Doložina poti, ki jo pri vrtenju za 360° opiše težišče je $2\pi y_T$.

$$2\pi y_T p = \pi\int_a^b f(x)^2\ dx = V$$

Težišče ravninske krivulje

$$y_T=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Dolžina ravninske krivulje

$$y_T=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{s}$$

Parametrično podane krivulje

Enačba krivulje v $\mathbb{R}^3$ je oblike

$$\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in\mathbb{R}^3$$

Krivulje v polarnih koordinatah

$$r=r(\varphi)$$
$$x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi$$
$$\vec{r}(\varphi)=(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$$

Tangenta parametrične krivulje

Tangenta je kar vektor, ki ga dobimo z odvajanjem parametrične enačbe.

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$$
$$\dot{\vec{r}}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$$

Doložina parametrično podane krivulje

Majhen delček krivulije ima dolžino $ds=\|\vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t)\|=\|\dot{\vec{r}}(t)\|$. Doložina večjega dela krivulje je potem integral teh delčkov:

$$s=\int_a^b\|\dot{\vec{r}}(t)\|\ dt$$

Doložina krivulije v polarnih koordinatah

$$s=\int_a^b\sqrt{\dot{r}(\varphi)^2+r(\varphi)^2}\ d\varphi$$

Naravna parametrizacija

Pot $\vec{r}:I\to\mathbb{R}^3$ je naravno parametrizirana, če je $\forall t\in I\ :\ |\dot{\vec{r}}(t)|=1$.

Vsako pot lahko **naravno reparametriziramo**. Za nek $a\in I$ definiramo funkcijo

$$s:I\to J \qquad s(t)=\int_a^t|\dot{\vec{r}}(\tau)|d\tau$$

z $t:J\to I$ označimo izverz od s s. Potem je $\vec{\varphi}(s):J\to\mathbb{R}$ dana s predpisom $\vec{\varphi}(s)=\vec{r}(t(s))$ *naravno parametrizirana pot*.

Frenetove formule

Naj bo $\vec{r}(s)$ naravna parametrizacija.

$$\underbrace{\vec{T}=\vec{r}\,'}_{\text{tangenta}} \qquad \underbrace{\vec{N}=\frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}}_{\text{normala}} \qquad \underbrace{\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}}_{\text{binormala}}$$

$\kappa=|\vec{T}'|=|\vec{r}\,''|$ ... fleksijska ukrivljenost

$\tau=\frac{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,''|^2}$ ... torzijska ukrivljenost

Če je $\forall s\in I\ :\ \kappa(s)\neq 0$ so vektorji $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ dobro definirani in veljajo **Frenetove formule**:

$$\vec{T}'=\kappa\vec{N} \qquad \vec{N}'=\tau\vec{B}-\kappa\vec{T} \qquad \vec{B}'=-\tau\vec{N}$$

Frenetova baza in ukrivljenost v poljubni parametrizaciji

Naj bo $\vec{r}(t)$ poljubna regularna pot z neničelno fleksijska ukrivljenostjo.

$$\vec{T}=\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \qquad \vec{B}=\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|} \qquad \vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$$

$$\kappa=\frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad \tau=\frac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}$$

Metrični prostor

Preslikava $d:M\to M$ je **metrika** na množici M, če velja:

- $d(x,y)\geq 0$ in $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
- $d(x,y)=d(y,x)$
- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

Metrični prostor je par (M,d).
Normiran prostor je *vektorski prostor* V opremljen z normo. **Norma** je preslikava $\|\,\|:V\to\mathbb{R}^+$, ki ima lastnosti:

- $\|v\|=0\Rightarrow v=0$
- $\|\alpha v\|=|\alpha|\|v\|$
- $\|w+v\|\leq\|w\|+\|v\|$

Potem je V tudi metrični prostor z $d(w,v)=\|w-v\|$.

Odprte in zaprte množice

Odprta krogla $B(a,r)=\{x\in M: d(a,x)<r\}$
Zaprta krogla $\overline{B}(a,r)=\{x\in M: d(a,x)\leq r\}$
Množiva $U\subseteq M$ je **odprta**, če

$$\forall a\in U\ \exists\varepsilon>0: B(a,\varepsilon)\subseteq U$$

Množica $U\subset M$ je **zaprta**, če je U^C odprta.
Zaprtje $\bar{A}$ množice A je najmanjša množica v M, ki vsebuje A.
Notranjost $\mathring{A}$ je največja odprta množiva vsebovana v A.

Rob množice

Naj bo $A\subseteq M$. Točka $a\in A$ je **robna**, če vsaka odprta krogla $B(a,\varepsilon)$ seka A in A^C.
Rob ∂A je množica vseh robnih točk množice A.

Zaporedja

Zaporedje (a_n) z limito v metričenem porstoru $((M,d))$ je **konvergentno** z limito $a\in M$, če velja:

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,a)=0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: n\geq n_0\Rightarrow d(a_n,a)<\varepsilon$$

Zaporedje (a_n) je **Cauchyevo**, če velja:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: n,m\geq n_0\Rightarrow d(a_n,a_m)<\varepsilon$$

Vsako konvergentno zaporedje je tudi Cauchyevo. Obratno pa je res samo, če je metrični prostor **poln**. ($\mathbb{R}^n$ je poln)

Kompaktnost

Točka $s\in M$ je **stekališče** zaporedja a_n v metričnem prostoru (M,d), če $\forall\varepsilon>0$ v krogli $B(s,\varepsilon)$ neskončno mnogo členov.
Limita je tudi stekališče, obratno pa ni vedno res.
Metrični prostor M je **kompakten**, če ima vsako zaporedje iz M stekališče v M. Podmnožica $U\subseteq M$ je kompaktna, če je kompaktna kot metrični prostor za metriko, ki jo podeduje iz M.
Vsak kompakten metrični prostor je **poln**.
Podmnožica metričenga prostora je **omejena**, če je če je vsebovana v kaki krogli.
Heine-Borel Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je **kompaktna** $\Leftrightarrow$ je zaprta in omejena. $\langle$*vstavi vic o fiziku, ki je čokolado*$\rangle$

Zveznost preslikave

Preslikava $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ je zvezna v točki a, če

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M_1 : d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

Preslikava je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki.
Preslikava f je zvezna v točki $a \in M_1 \Leftrightarrow$ za vsako zaporedje a_n v M_1, ki konvergira proti a, konvergira $f(a_n)$ proti $f(a)$.

Enakomerna zveznost preslikave

Preslikava $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ je enakomerno zvezna, če

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M_1 : d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Vsaka enakomerno zvezna preslikava je zvezna, obratno pa je res samo če je (M_1, d_1) kompakten.

Skrčitve

Preslikava $f : (M, d) \to (M, d)$ je **skrčitev**, če

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{za nek } q \in [0, 1)$$

Banachovo načelo

Naj bo (M, d) poln in $f : M \to M$ skrčitev. Potem obstaja natanko en $x_0 \in M$ za katerega je $f(x_0) = x_0$.

Funkcije dveh spremenlivk

Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija in $(a, b) \in \mathbb{R}^{\not\models}$

- **Limita** $A = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, če velja

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$$
  $$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

- Funkcija je **zvezna** v točki (a, b), če

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$$
  $$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

- Če je f zvezna v točiki (a, b), je

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Smerni odvod

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x, y) + t\vec{s})}{t}$$

Parcialni odvod

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Če sta $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$ zvezna, sta enaka.

Diferenciabilnost

Funkcija f je diferenciabilna, če obstajata konstanti $A, B \in \mathbb{R}$, da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

- Če je f diferenciabilna v (a, b), je

  $$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

- Če je f parcialno odvedljiva v (a, b) in sta parcialna odvoda zvezna v (a, b), je f diferenciabilna v (a, b).

Taylorjeva formula

Taylorjev razvoj funkcije f okoli točke (a, b)

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right) +$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k + \ldots$$

Lokalni ekstremi

Kandidati za lokalne ekstreme so točke (a, b) v katerih je

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{in} \quad f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Hessejeva matrika

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

- $\det H(a, b) > 0$
  - $f_{xx}(a, b) > 0 \rightsquigarrow$ **lokalni minimum**
  - $f_{xx}(a, b) < 0 \rightsquigarrow$ **lokalni maksimum**
- $\det H(a, b) = 0 \rightsquigarrow$ *ne vemo kaj je to*
- $\det H(a, b) < 0 \rightsquigarrow$ *to ni lokalni ekstrem, ampak* **sedlo**