# Odvodi

Oavoai	
funkcija	odvod
c	0
$x^n$	$nx^{n-1}$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	$a^x$
$x^x$	$x^x(1+\ln x)$
ln(x)	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\sin(x)$	cos(x)
$\cos(x)$	-sin(x)
tan(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	ch(x)
$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	sh(x)
$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$
$cth(x) = \frac{1}{th(x)}$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$
$arsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arth(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

# Pravila za odvajanje

funkcija	odvod
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{(x)}$	$f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$
g(x)	$g^2(x)$
f(g(x))	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

# Integracijske metode

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$u = g(x) \implies du = g'(x)dx \implies dx = \frac{du}{g'(x)}$$

#### Perpartes

$$\int u(x) \, v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int v(x) \, u'(x) \, dx$$

#### Integral racionalne funkcije

Z deljenjem zapišemo racionalno funkcijo R(x) v obliki  $p(x)+\frac{r(x)}{q(x)},$  kejr je r nižje stopnje od q.

Polinom  $\boldsymbol{q}$  rezcepimo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje.

Funkcijo  $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov:

$$\begin{split} \frac{1}{(x-a)^k} &\leadsto \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \\ \\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^l} &\leadsto \frac{B_1 + C_1 x}{(x^2+bx+c)} + \dots + \frac{B_l + C_l x}{(x^2+bx+c)^l} \end{split}$$

Parcialne ulomke posamično integriremo:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a\omega} \arctan\left(\frac{2ax + b}{2a\omega}\right); \ \omega = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{p}{2a} \ln|t| + \left(q - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{t}$$

$$\int \frac{px + q}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{p}{2a} \frac{t^{1-n}}{1-n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{t^n}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{1}{a^n \omega^n} I_n$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(t^2 + 1)^n} \qquad I_1 = \arctan t$$

$$I_n = I_{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2(n-1)} \right) + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}$$

#### Integrali trigonometričnih funkcij

Integrale z trigonometričnimi funkcijami z univerzalno trigonometrično substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije.

$$\tan\frac{x}{2} = t$$
  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$   $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$   $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 

## Integral iracionalne funkcije

Integrale tipa  $\int \frac{p(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$  rešujemo na naslednji način:

• Če je p konstanten, integral (s substitucijo) prevedemo na enega izmed:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C; \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C; \quad a > 0$$

ullet Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek:

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{C}{\tilde{p}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

C je konstanta,  $\tilde{p}$  pa polinom, ki ima stopnjo 1 manjšo kot p. Koeficiente polinoma  $\tilde{p}$  in konstanto C dobimo z odvajanjem zgornje enačbe.

# Uporaba integrala

Računanje površine ravninskih likov pod krivulijo

$$p = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

Dolžina ravninske krivulije

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \ dx$$

Prostornina in površina vrtenine (vrtimo okoli x osi)

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$
$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Prostornina vrtenine (vrtimo okoli y osi)

$$V = 2\pi \int_{a}^{b} x f(x) dx$$

Težišče ravninskih likov

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)^2 dx}{2p}$$

Doložina poti, ki jo pri vrtenju za  $360^{\circ}$  opiše težišče je  $2\pi y_T$ .

$$2\pi y_T p = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = V$$

Težišče ravninske krivulije

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \ dx}{s}$$

Dolžina ravninske krivulije

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \ dx}{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \ dx}$$

# Parametrično podane krivulje

Enačba krivulje v  $\mathbb{R}^3$  je oblike

$$\overrightarrow{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{split} r &= r(\varphi) \\ x(\varphi) &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) &= r(\varphi)\sin\varphi \\ \overrightarrow{r}(\varphi) &= (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi) \end{split}$$

#### Tangenta parametrične krivulije

Tangenta je kar vektor, ki ga dobimo z odvajanjem parametrične enačbe.

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

## Doložina parametrično podane krivulije

Maihen delček krivulije ima dolžino

 $ds = ||\overrightarrow{r}(t+dt) - \overrightarrow{r}(t)|| = ||\overrightarrow{r}(t)||$ . Doložina večjega dela krivulje je potem integral teh delčkov:

$$s = \int_{a}^{b} \| \overrightarrow{r}(t) \| dt$$

# Doložina krivulije v polarnih koordinatah

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} \ d\varphi$$

#### Naravna parametrizacija

Pot  $\overrightarrow{r}:I\to\mathbb{R}^3$  je naravno parametrizirana, če je  $\forall t\in I \ : \ |\overrightarrow{r}(t)|=1.$ 

Vsako pot lahko **naravno reparametriziramo**. Za nek  $a \in I$  definiramo funkcijo

$$s: I \to J$$
  $s(t) = \int_a^t |\overrightarrow{r}(\tau)| d\tau$ 

z  $t: J \to I$  označimo izverz od s s. Potem je  $\overrightarrow{\varphi}(s): J \to \mathbb{R}$  dana s predpisom  $\overrightarrow{\varphi}(s) = \overrightarrow{r}(t(s))$  naravno parametrizirana pot.

# Frenetove formule

Naj bo $\overrightarrow{r}(s)$  naravna parametrizacija.

$$\underbrace{\overrightarrow{T} = \overrightarrow{r}'}_{\text{tangenta}} \quad \underbrace{\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{T}'}{|\overrightarrow{T}'|}}_{\text{normala}} \quad \underbrace{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \times \overrightarrow{N}}_{\text{binormala}}$$

 $\kappa = |\overrightarrow{T}'| = |\overrightarrow{r}''|$  . . . fleksijska ukrivljenost

$$\tau = \frac{(\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''})\overrightarrow{r'''}}{|\overrightarrow{r''}|^2}$$
 . . . torzijska ukrivljenost

Če je  $\forall s \in I : \kappa(s) \neq 0$  so vektorji  $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}$  dobro definirani in veljajo **Frenetove formule**:

$$\overrightarrow{T}' = \kappa \overrightarrow{N} \qquad \overrightarrow{N}' = \tau \overrightarrow{B} - \kappa \overrightarrow{T} \qquad \overrightarrow{B}' = -\tau \overrightarrow{N}$$

# Frenetova baza in ukrivljenost v poljubni parametrizaciji

Naj bo $\overrightarrow{r}(t)$ poljubna regularna pot z neničelno fleksijska ukrivljenostjo.

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}|} \qquad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad \tau = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$

# Metrični prostor

Preslikava  $d: M \to M$  je **metrika** na množici M, če velja:

- $d(x,y) \ge 0$  in  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- d(x, y) = d(y, x)
- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

Metrični prostor je par (M, d).

Normiran prostor je vektorski prostor V opremljen z normo. Norma je preslikava  $\| \| : V \to \mathbb{R}^+$ , ki ima lastnosti:

- $||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\bullet \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- $||w + v|| \le ||w|| + ||v||$

Potem je V tudi metrični prostor z d(w, v) = ||w - v||.

#### Odprte in zaprte množice

Odprta krogla  $B(a,r) = \{x \in M: d(a,x) < r\}$  Zaprta krogla  $\overline{B}(a,r) = \{x \in M: d(a,x) \leq r\}$  Množiva  $U \subset M$  je odprta, če

$$\forall a \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

Množica  $U\subset M$  je **zaprta**, če je  $U^C$  odprta. **Zaprtje**  $\bar{A}$  množice A je najmanjša množica v M, ki

vsebuje A. Notranjost  $\mathring{A}$  je največja odprta množiva vsebovana v A

#### Rob množice

Naj bo $A\subseteq M.$  Točka  $a\in A$ je **robna**, če vsaka odprta krogla  $B(a,\varepsilon)$ seka A in  $A^C.$ 

**Rob**  $\partial A$  je množica vseh robnih točk množice A.

#### Zaporedia

Zaporedje  $(a_n)$  z limito v metričenem porstoru ((M,d)) je konvergentno z limito  $a \in M$ , če velja:

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0$$

 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$ 

Zaporedje  $(a_n)$  je **Cauchyevo**, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \ge n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Vsako konvergentno zaporedje je tudi Cauchyevo. Obratno pa je res samo, če je metrični prostor **poln**. ( $\mathbb{R}^n$  je poln)

#### Kompaktnos

Točka  $s\in M$  je **stekališče** zaporedja  $a_n$  v metričnem prostoru (M,d), če  $\forall \varepsilon>0$  v krogli  $B(s,\varepsilon)$  neskončno mnogo členov.

Limita je tudi stekališče, obratno pa ni vedno res. Metrični prostor M je **kompakten**, če ima vsako zaporedje iz M stekališče v M. Podmnožica  $U \subseteq M$  je kompaktna, če je kompaktna kot metrični prostor za metriko, ki jo podeduje iz M.

Vsak kompakten metrični prostor je  $\mathbf{poln}.$ 

Podmnožica metričenga prostora je **omejena**, če je če je vsebovana v kaki krogli.

Heine-Borel Podmnožica v  $\mathbb{R}^n$  je **kompaktna**  $\Leftrightarrow$  je zaprta in omejana.  $\langle vstavi\ vic\ o\ fiziku,\ ki\ je\ \check{c}okolado \rangle$ 

# Zveznost preslikave

Preslikava  $f:(M_1,d_1)\to (M_2,d_2)$ je zvezna v točki a, če

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M_1: d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),f(a)) < \varepsilon$$
 Enakomerna zveznost preslikave

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

Preslikava je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki.

Preslikava fje zvezna v točki  $a \in M_1 \Leftrightarrow {\tt za}$ vsako zaporedje  $a_n$  v  $M_1$ , ki konvergira proti a, konvergira  $f(a_n)$  proti f(a).

Preslikava  $f:(M_1,d_1)\to (M_2,d_2)$ je enakomerno zvezna,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x,y \in M_1: d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Vsaka enakomerno zvezna preslikava je zvezna, obratno pa je res samo če je  $(M_1, d_1)$  kompakten.

## Skrčitve

Preslikava  $f:(M,d)\to (M,d)$  je **skrčitev**, če

$$d(f(x), f(y)) \le qd(x, y)$$
 za nek  $q \in [0, 1)$ 

#### Banachovo načelo

Naj bo (M,d) pol<br/>n in  $f:M\to M$  skrčitev. Potem obstaja natanko en  $x_0 \in M$  za katerega je  $f(x_0) = x_0$ .