Kriptosistem

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}&\ldots\text{besedila}\\
\mathcal{C}&\ldots\text{kriptogrami}\\
\mathcal{K}&\ldots\text{ključi}\\
\mathcal{E}=\{E_k:\mathcal{B}\to\mathcal{C};k\in\mathcal{K}\}&\ldots\text{kodirne f.}\\
\mathcal{D}=\{D_k:\mathcal{C}\to\mathcal{B};k\in\mathcal{K}\}&\ldots\text{dekodirne f.}
\end{aligned}$$

Za vsak $e\in\mathcal{K}$ obstaja $d\in\mathcal{K}$

$$D_d(E_e(x))=x\quad\forall x\in\mathcal{B}$$

Vsaka kodrirna funkcija $E_k\in\mathcal{E}$ je injektivna.

Produkt kriptosistemov

Naj bosta $\mathcal{S}_1=(\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1,\mathcal{K}_1,\mathcal{E}',\mathcal{D}')$ in $\mathcal{S}_2=(\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2,\mathcal{K}_2,\mathcal{E}'',\mathcal{D}'')$ kriptosistema za katera je $\mathcal{C}_1=\mathcal{B}_2$.

$$S_1\times S_2=(\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2,\mathcal{E},\mathcal{D})$$

$$E_{(k_1,k_2)}(x)=E''_{k_2}(K'_{k_1}(x))$$
$$D_{(k_1,k_2)}(y)=D'_{k_1}(D''_{k_2}(y))$$

Prevedljivost kriptosistemov

Kripto sistem $\mathcal{S}=(\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{K},\mathcal{E},\mathcal{D})$ je prevedljiv na $\mathcal{S}'=(\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{K}',\mathcal{E}',\mathcal{D}')$, če obstaja $f:\mathcal{K}\to\mathcal{K}'$, da za vsak $k\in\mathcal{K}$ velja:

$$E_k=E'_{f(k)}\qquad D_k=D'_{f(k)}$$

Tedaj pišemo $S\to S'$.

Kriptosistema sta **ekvivalentna**, če velja $S\to S'$ in $S'\to S$.

Tedaj pišemo $S\equiv S'$.

Idempotentnost kriptosistemov

Kriptosistem S je idempotenten, če

$$S\times S\equiv S$$

Klasični kriposistem so vsi idempotentni.

Klasični kriptosistem

Cezarjeva šifra

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathcal{K}=\mathbb{Z}_{25}$$

$$E_k(x)\equiv x+k\mod 25$$

$$D_k(y)\equiv y-k\mod 25$$

Substitucijska šifra

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathbb{Z}_{25},\quad\mathcal{K}=S(\mathbb{Z}_{25})$$

Ključ je permutacija $\pi\in\mathcal{K}$

$$E_k(x)=\pi(x)$$

$$D_k(y)=\pi^{-1}(y)$$

Afina šifra

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathbb{Z}_{25},\quad\mathcal{K}=\mathbb{Z}_{25}^*\times\mathbb{Z}_{25}$$

Ključ $(a,b)\in\mathcal{K}$

$$K_{(a,b)}(x)=ax+b\mod 25$$

$$D_{(a,b)}(y)=a^{-1}(y-b)\mod 25$$

Vigenerjeva šifra

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathcal{K}=\mathbb{Z}_{25}^n$$

Ključ $\underline{k}\in\mathcal{K}$

$$K_{\underline{k}}(\underline{x})=\underline{x}+\underline{k}\mod 25$$

$$D_{\underline{k}}(\underline{y})=\underline{y}-\underline{k}\mod 25$$

Permutacijska šifra

Simbolov ne nadomeščamo, ampak jih premešamo

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathbb{Z}_{25}^n,\quad\mathcal{K}=S_n$$

$$K_\pi(\underline{x})=\underline{x}_{\pi(1)}+\cdots+\underline{x}_{\pi(n)}$$

$$D_\pi(\underline{x})=\underline{x}_{\pi^{-1}(1)}+\cdots+\underline{x}_{\pi^{-1}(n)}$$

Hillova šifra

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathbb{Z}_{25}^n,\quad\mathcal{K}=\{A\in\mathbb{Z}_{25}^{n\times n}\,|\det(A)\in\mathbb{Z}_{25}^*\}$$

Ključ je matrika $A\in\mathcal{K}$

$$K_A(\underline{x})=A\underline{x}\mod 25$$

$$D_A(\underline{y})=A^{-1}\underline{y}\mod 25$$

Bločne šifre

Kripotsistem $(\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{K},\mathcal{E},\mathcal{D})$ je bločna šifra dolžine n, če je $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\Sigma^n$, kjer je Σ končna abeceda.

Vsaka kodirna funkcija je ekvivalentna neki permutaciji Σ^n, njena dekodirna funkcija pa inverzu te permutacije.

Afina bločna šifra

$$\Sigma=\mathbb{Z}_m$$

$$\mathcal{K}=\left\{(A,\underline{b});\ A\in\mathbb{Z}_m^{n\times n},\det(A)\in\mathbb{Z}_m^*,\underline{b}\in\mathbb{Z}_m^n\right\}$$

$$E_{(A,\underline{b})}(\underline{x})\equiv A\underline{x}+\underline{b}\mod m$$
$$D_{(A,\underline{b})}(\underline{x})\equiv A^{-1}\underline{x}-\underline{b}\mod m$$

Iterativne šifre

Sestavlja jih

- **razpored ključev**: Naj bo K ključ. K uporabimo za konstrukcijo krožnih ključev $(K^1,\ldots,K^{N_r})$ temu seznamu pravimo razpored ključev.
- **krožna funkcija**: ima dva argumenta: tekoče stanje in krožni ključ:
  $$w^r=g(w^{r-1},K^r)$$
  Da je dešifriranje možno mora biti g injektivna za vsak fiksen ključ K; tj. $\exists g^{-1}$:
  $$g^{-1}(g(w,K),K)=w\qquad\forall w,K$$
- **šifriranje skozi N_r podobnih krogov**: Besedilo x vzamemo za začetno stanje w^0:
  $$y=g(g(\ldots g(g(x,K^1),K^2)\ldots,K^{N_r-1}),K^{N_r})$$
- **dešifriranje**:
  $$x=g^{-1}(\ldots g^{-1}(g^{-1}(y,K^{N_r}),K^{N_r-1})\ldots,K^1)$$

Substitucijsko-permutacijsko omrežje

je iterativna bločna šifra kjer je $\Sigma=\{0,1\}$, $\ell,m\in\mathbb{N}$ in $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\Sigma^{\ell m}$

- **substitucije**: $\pi_s\in S(\Sigma^\ell)$
  S-škatla - zamenja ℓ bitov z drugimi biti
- **permutacije**: $\pi_p\in S_{\ell m}$
  P-škatla - zamenja ℓm bitov z drugimi biti

Oznaka za delitev na zloge dolžine ℓ:

$$x=x_1x_2\ldots x_m,\quad|x_i|=\ell$$

Kodiranje:

$w^0=b$
za $r=1,\ldots,N_r-1$:
  $u^r=w^{r-1}\oplus K^r$ // primasamo K
  za $i=1,\ldots,m$:
    $\underline{v}_i^r=\pi_s(\underline{u}_i^r)$ // substitucija zlogov
  $w^r=v^r_{\pi_p(1)},\ldots,v^r_{\pi_p(\ell m)}$ // permutacija bitov
// zadnji krog
$u^{N_r}=w^{N_r-1}\oplus K^{N_r}$
za $i=1,\ldots,m$:
  $\underline{v}_i^{N_r}=\pi_s(\underline{u}_i^{N_r})$
vrni $c=v^{N_r}\oplus K^{N_r+1}$ // beljenje

Dekodiranje:

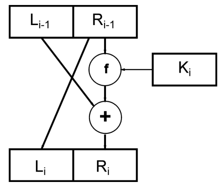
$v_r^N=c\oplus K^{N_r+1}$
za $i=1,\ldots,m$:
  $\underline{u}_i^{N_r}=\pi_s^{-1}(\underline{v}_i^{N_r})$
za $r=N_r-1,\ldots,1$:
  $w^r=u^r\oplus K^{r+1}$
  $v^r=(w^r_{\pi_p^{-1}(1)},\ldots,w^r_{\pi_p^{-1}(\ell m)})$
  za $i=1,\ldots,m$:
    $\underline{u}_i^r=\pi_s^{-1}(\underline{v}_i^r)$
$b=u^1\oplus K^1$

Feistelova šifra

je bločna iterativna šifra dolžine $2t$ za abecedo $\Sigma=\{0,1\}$.

N_r je št. krogov, $K^1,\ldots,K^{N_r}$ razpored ključev, ki ga dobimo iz ključa K in $f_K:\Sigma^t\to\Sigma^t$ je *Feistelova kodirna funkcija.*

En krog kodiranja:



Teorija števil

Eulerjeva funkcija

Eulerjeva funkcija nam pove koliko je obrnlivih elementov v $\mathbb{Z}_m$.

$$|\mathbb{Z}_m^*|=\varphi(m)$$

Za $n\in\mathbb{N}$ s paraštevilskim razcepom $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ velja:

$$\varphi(n)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_m^{\alpha_m})=n\prod_{p_k\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

Euljerjev izrek:

Naj bo G končna grupa. Potem red elementa $a\in G$ deli red grupe G.

$$\gcd(a,m)=1\Leftrightarrow a^{\varphi(m)}\equiv_m 1;a\in\mathbb{Z}_m^*$$

$$a,m\in\mathbb{N}\wedge\gcd(a,m)=1\Rightarrow a^{\varphi(m)}\equiv_m 1$$

$$a^{\varphi(m)}=1\text{ v }\mathbb{Z}_m^*$$

Mali Fermatov izrek: če je $m\in\mathbb{P}$ $(\varphi(m)=m-1)$ in $\gcd(a,m)=1$, potem:

$$a^{m-1}\equiv_m 1$$

Razširjen evklidov algoritem

vhod: (a, b)
$(r_0, x_0, y_0) = (a, 1, 0)$
$(r_1, x_1, y_1) = (b, 0, 1)$
$i = 1$

dokler $r_i \neq 0$:
  $i = i+1$
  $k_i = r_{i-2} // r_{i-1}$
  $(r_i, x_i, y_i) = (r_{i-2}, x_{i-2}, y_{i-2}) - k_i(r_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})$
konec zanke
vrni: $(r_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})$

Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$. Tedaj trojica (d, x, y), ki jo vrne razširjen evklidov algoritem z vhodnim podatkomk (a, b), zadošča:

$$ax + by = d \text{ in } d = \gcd(a, b)$$

Grupe

- **grupoid** $(M, \cdot)$ urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo $\cdot$.
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M\ \forall x \in M : e \cdot x = x \cdot e = x$.
- **grupa** polgrupa v kateri ima vsak element inverz $\forall x \in M\ \exists x^{-1} \in M : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$.

Množica $\mathbb{Z}_m$

$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, ..., m-1\}$

Vpeljemo seštevanje $+_m$ po modulu m in množenje $\cdot_m$ po modulu m. Dobimo grupo $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ in monoid $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$.
Red elementa $x \in \mathbb{Z}_m$ je $\frac{m}{\gcd(m,x)}$

Množica $\mathbb{Z}_m^*$

To je množica vseh obrnljivih elementov v $\mathbb{Z}_m$ (operacija: množenje).

$$|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$$

Element $x \in \mathbb{Z}_m$ je obrnljiv če se da rešiti *diofantsko enačbo*:

$$xy + km = 1$$

za neznanki y (inverz od x) in k.

Cayleyjeva tabela

Za vsak element množice imamo en stolpec in eno vrstico. V vsakem polju je produkt elementa vrstice in elementa stolpca. (Presek vrstice a in stolpca b je ab)

Red elementa

Naj bo $(G, \cdot)$ grupa. Red elemneta a je najmanjše naravno število $n \in \mathbb{N}$, da velja

$$a^n = e$$

oznaka: $\#a$

Red grupe

je število elementov G, oznaka $|G|$.

Ciklična grupa

Grupa je ciklična, če vsebuje a reda $|G|$:

$$G = \left\{a, a^2, a^3, \ldots, a^{|G|} = e\right\}$$

Končni obsegi

$(K, +, \cdot)$ je obseg, če je

- $(K, +)$ abelova grupa
- $(K^*, \cdot)$ grupa $(K^* = K \setminus \{0\})$
- velja distributivnost:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Obseg je **komutativen**, če je $(K^*, \cdot)$ komutativna.

Praštevilski obsegi

Če je p praštevilo, je $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ končen obseg.

Galoisovi obsegi

$$\mathrm{GF}(p) \cong \mathbb{Z}_p \qquad p \in \mathbb{P}$$

$$\mathrm{GF}(p^n) \cong \mathbb{Z}_p[x]/(u)$$

- $u \in \mathbb{Z}_p[x]$ je nerazcepen polinom stopnje n
- elementi $\mathrm{GF}(p^n)$ so ostanki polinomov iz $\mathbb{Z}_p$ pri deljenju z polinomom u
- seštevanje je enako kot seštevanje v $\mathbb{Z}_p[x]$
- produkt izračunamo v $\mathbb{Z}_p[x]$ nato pa vzamemo ostanek pri deljenju z u

Množica neničelnih/obrnljivih elementov $(GF(p^n)^*, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_{p^n-1}, \cdot)$ je vedno izomorfna neki ciklični grupi. Generatorjem te grupe rečemo **primitivni elementi** Galoisovega obsega.