Kriptosistem

$$\begin{aligned} &\mathcal{B} \ldots \text{besedila} \\ &\mathcal{C} \ldots \text{kriptogrami} \\ &\mathcal{K} \ldots \text{ključi} \\ \mathcal{E} = \{E_k : \mathcal{B} \to \mathcal{C}; k \in \mathcal{K}\} &\ldots \text{kodirne f.} \\ \mathcal{D} = \{D_k : \mathcal{C} \to \mathcal{B}; k \in \mathcal{K}\} &\ldots \text{dekodirne f.} \end{aligned}$$

Za vsak $e \in \mathcal{K}$ obstaja $d \in \mathcal{K}$

$$D_d(E_e(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

Vsaka kodrirna funkcija $E_k \in \mathcal{E}$ je injektivna.

Produkt kriptosistemov

Naj bosta $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}', \mathcal{D}')$ in $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}'', \mathcal{D}'')$ kriptosistema za katera je $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_2$.

$$S_1 \times S_2 = (\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mathcal{E}, \mathcal{D})$$

$$E_{(k_1,k_2)}(x) = E''_{k_2}(K'_{k_1}(x))$$
$$D_{(k_1,k_2)}(y) = D'_{k_1}(D''_{k_2}(y))$$

Prevedljivost kriptosistemov

Kripto sistem $\mathcal{S} = (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ je prevedljiv na $\mathcal{S}' = (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}', \mathcal{E}', \mathcal{D}')$, če obstaja $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, da za vsak $k \in \mathcal{K}$ velja:

$$E_k = E'_{f(k)} \qquad D_k = D'_{f(k)}$$

Tedaj pišemo $S \to S'$.

Kriptosistema sta **ekvivalentna**, če velja $S \to S'$ in $S' \to S$.

Tedaj pišemo $S \equiv S'$.

Idempotentnost kriptosistemov

Kriptosistem S je idempotenten, če

$$S \times S \equiv S$$

Klasični kriposistem so vsi idempotentni.

Klasični kriptosistem

Cezarjeva šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{25}$$
$$E_k(x) \equiv x + k \mod 25$$
$$D_k(y) \equiv y - k \mod 25$$

Substitucijska šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathcal{K} = S(\mathbb{Z}_{25})$$

Ključ je permutacija $\pi \in \mathcal{K}$

$$E_k(x) = \pi(x)$$
$$D_k(y) = \pi^{-1}(y)$$

Afina šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{25}^* \times \mathbb{Z}_{25}$$

Ključ $(a, b) \in \mathcal{K}$

$$K_{(a,b)}(x) = ax + b \mod 25$$

$$D_{(a,b)}(y) = a^{-1}(y - b) \mod 25$$

Vigenerjeva šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{25}^n$$

Ključ $\underline{k} \in \mathcal{K}$

$$K_{\underline{k}}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{k} \mod 25$$

$$D_{\underline{k}}(\underline{y}) = \underline{y} - \underline{k} \mod 25$$

Permutacijska šifra

Simbolov ne nadomeščamo, ampak jih premešamo

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}^n, \quad \mathcal{K} = S_n$$

$$K_\pi(\underline{x}) = \underline{x}_{\pi(1)} + \cdots + \underline{x}_{\pi(n)}$$

$$D_\pi(\underline{x}) = \underline{x}_{\pi^{-1}(1)} + \cdots + \underline{x}_{\pi^{-1}(n)}$$

Hillova šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}^n, \quad \mathcal{K} = \{A \in \mathbb{Z}_{25}^{n \times n} | \det(A) \in \mathbb{Z}_{25}^*\}$$

Ključ je matrika $A \in \mathcal{K}$

$$K_A(\underline{x}) = A\underline{x} \mod 25$$

$$D_A(\underline{y}) = A^{-1}\underline{y} \mod 25$$

Bločne šifre

Kripotsistem $(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ je bločna šifra dolžine n, če je $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \Sigma^n$, kjer je Σ končna abeceda.

Vsaka kodirna funkcija je ekvivalentna neki permutaciji Σ^n, njena dekodirna funkcija pa inverzu te permutacije.

Afina bločna šifra

$$\Sigma = \mathbb{Z}_m$$

$$\mathcal{K} = \left\{(A, \underline{b});\ A \in \mathbb{Z}_m^{n \times n}, \det(A) \in \mathbb{Z}_m^*, \underline{b} \in \mathbb{Z}_m^n\right\}$$

$$E_{(A,\underline{b})}(\underline{x}) \equiv A\underline{x} + \underline{b} \mod m$$
$$D_{(A,\underline{b})}(\underline{x}) \equiv A^{-1}\underline{x} - \underline{b} \mod m$$

Iterativne šifre

Sestavlja jih

- **razpored ključev**: Naj bo K ključ. K uporabimo za konstrukcijo krožnih ključev $(K^1, \ldots, K^{N_r})$ temu seznamu pravimo razpored ključev.
- **krožna funkcija**: ima dva argumenta: tekoče stanje in krožni ključ:
  $$w^r = g(w^{r-1}, K^r)$$
  Da je dešifriranje možno mora biti g injektivna za vsak fiksen ključ K; tj. $\exists g^{-1}$:
  $$g^{-1}(g(w, K), K) = w \qquad \forall w, K$$
- **šifriranje skozi N_r podobnih krogov**: Besedilo x vzamemo za začetno stanje w^0:
  $$y = g(g(\ldots g(g(x, K^1), K^2) \ldots, K^{N_r-1}), K^{N_r})$$
- **dešifriranje**:
  $$x = g^{-1}(\ldots g^{-1}(g^{-1}(y, K^{N_r}), K^{N_r-1}) \ldots, K^1)$$

Substitucijsko-permutacijsko omrežje

je iterativna bločna šifra kjer je $\Sigma = \{0, 1\}$, $\ell, m \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \Sigma^{\ell m}$

- **substitucije**: $\pi_s \in S(\Sigma^\ell)$
  S-škatla - zamenja ℓ bitov z drugimi biti
- **permutacije**: $\pi_p \in S_{\ell m}$
  P-škatla - zamenja ℓm bitov z drugimi biti

Oznaka za delitev na zloge dolžine ℓ:

$$x = x_1 x_2 \ldots x_m, \quad |x_i| = \ell$$

Kodiranje:

$w^0 = b$
za $r = 1, \ldots, N_r - 1$:
  $u^r = w^{r-1} \oplus K^r$ // primasamo K
  za $i = 1, \ldots, m$:
    $\underline{v}_i^r = \pi_s(\underline{u}_i^r)$ // substitucija zlogov
  $w^r = v^r_{\pi_p(1)}, \ldots, v^r_{\pi_p(\ell m)}$ // permutacija bitov
// zadnji krog
$u^{N_r} = w^{N_r-1} \oplus K^{N_r}$
za $i = 1, \ldots, m$:
  $\underline{v}_i^{N_r} = \pi_s(\underline{u}_i^{N_r})$
vrni $c = v^{N_r} \oplus K^{N_r+1}$ // beljenje

Dekodiranje:

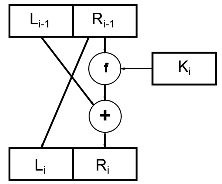
$v_r^N = c \oplus K^{N_r+1}$
za $i = 1, \ldots, m$:
  $\underline{u}_i^{N_r} = \pi_s^{-1}(\underline{v}_i^{N_r})$
za $r = N_r - 1, \ldots, 1$:
  $w^r = u^r \oplus K^{r+1}$
  $v^r = (w^r_{\pi_p^{-1}(1)}, \ldots, w^r_{\pi_p^{-1}(\ell m)})$
  za $i = 1, \ldots, m$:
    $\underline{u}_i^r = \pi_s^{-1}(\underline{v}_i^r)$
$b = u^1 \oplus K^1$

Feistelova šifra

je bločna iterativna šifra dolžine $2t$ za abecedo $\Sigma = \{0, 1\}$.

N_r je št. krogov, $K^1, \ldots, K^{N_r}$ razpored ključev, ki ga dobimo iz ključa K in $f_K : \Sigma^t \to \Sigma^t$ je *Feistelova kodirna funkcija.*

En krog kodiranja:



Teorija števil

Eulerjeva funkcija

Eulerjeva funkcija nam pove koliko je obrnlivih elementov v $\mathbb{Z}_m$.

$$|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$$

Za $n \in \mathbb{N}$ s paraštevilskim razcepom $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ velja:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_m^{\alpha_m}) = n \prod_{p_k \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Euljerjev izrek:

$$\gcd(a, m) = 1 \Leftrightarrow a^{\varphi(m)} \equiv_m 1; a \in \mathbb{Z}_m^*$$
$$a, m \in \mathbb{N} \wedge \gcd(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$$
$$a^{\varphi(m)} = 1 \text{ v } \mathbb{Z}_m^*$$

Mali Fermatov izrek: če je $m \in \mathbb{P}$ $(\varphi(m) = m - 1)$ in $\gcd(a, m) = 1$, potem:

$$a^{m-1} \equiv_m 1$$

Razširjen evklidov algoritem

vhod: (a, b)
$(r_0, x_0, y_0) = (a, 1, 0)$
$(r_1, x_1, y_1) = (b, 0, 1)$
$i = 1$

dokler $r_i \neq 0$:
  $i = i+1$
  $k_i = r_{i-2} // r_{i-1}$
  $(r_i, x_i, y_i) = (r_{i-2}, x_{i-2}, y_{i-2}) - k_i(r_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})$
konec zanke
vrni: $(r_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})$

Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$. Tedaj trojica (d, x, y), ki jo vrne razširjen evklidov algoritem z vhodnim podatkomk (a, b), zadošča:

$$ax + by = d \text{ in } d = \gcd(a, b)$$