

MOwNiT - laboratorium 3

Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

Ćwiczenie zostało wykonane w języku C++, kompilowane przy użyciu gcc, poleceniem g++, testy przeprowadzane były na laptopie wyposażonym w Intel Core i5-7200U i 8GB RAM, na systemie Linux.

1. Treść zadania:

Stosując metodę Newtona oraz metodę siecznych wyznacz pierwiastki równania $f(x) = 0$ w zadanym przedziale $[a, b]$. Dla metody Newtona wybierz punkty startowe rozpoczynając od wartości końców przedziału, zmniejszając je o 0.1 w kolejnych eksperymentach numerycznych. Odpowiednio dla metody siecznej jeden z końców przedziału stanowić powinna wartość punktu startowego dla metody Newtona, a drugi – początek, a następnie koniec przedziału $[a, b]$.

Porównaj liczbę iteracji dla obu tych metod (dla różnych dokładności ρ), stosując jako kryterium stopu:

$$1) \quad |x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \rho$$

$$2) \quad |f(x^{(i)})| < \rho$$

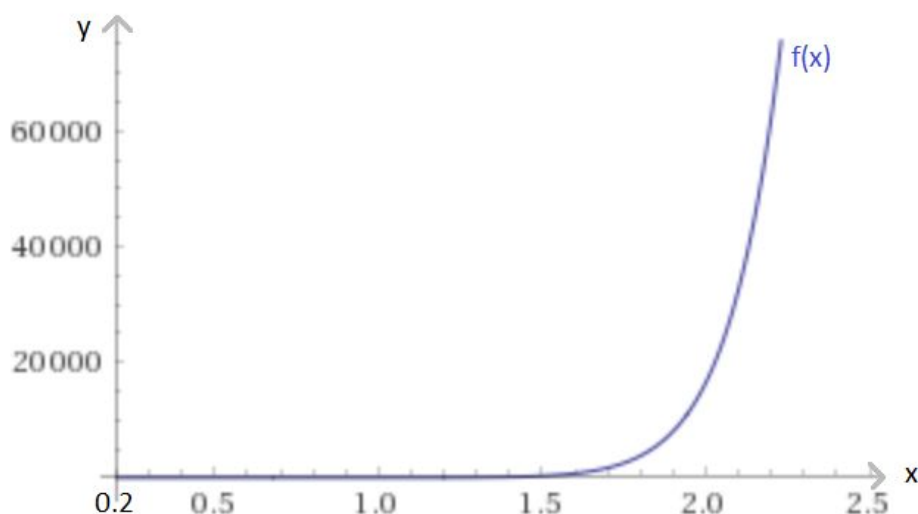
W mojej wersji zadania funkcja f oraz przedział $[a, b]$ przyjmują postać:

$$f(x) = (x - 1) * e^{-16x} + x^{14}$$

$$[a, b] = [0.2, 2.5]$$

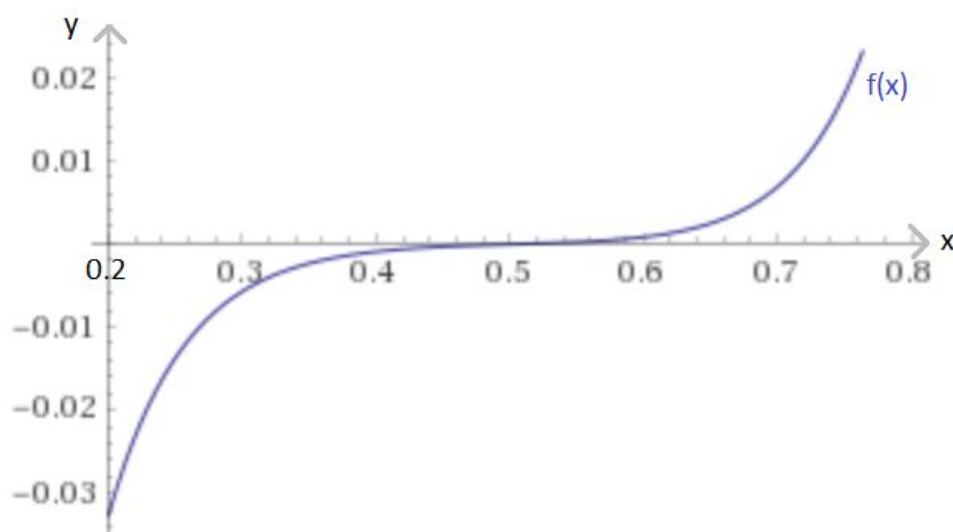
Używając narzędzia WolframAlpha wyznaczyłem wykres funkcji f i wyliczyłem jej miejsca zerowe.

Rys 1: Wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[0.2, 2.5]$



Aby łatwo zaobserwować przebieg funkcji w pobliżu miejsca zerowego wyznaczyłem również wykres $f(x)$ na przedziale $[0.2, 0.8]$.

Rys 2: Wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[0.2, 0.8]$



Funkcja f na zadanym przedziale ma dokładnie jedno miejsce zerowe:
 $x_0 \approx 0.522247$

Eksperyment wykonałem dla każdej kombinacji opisanych w zadaniu miejsc startowych metod siecznych i Newtona. W każdym przypadku badałem liczbę iteracji potrzebną do spełnienia warunku stopu i wartość wyliczonego miejsca zerowego (wyliczone x_0). Obliczenia wykonywane były dla $\rho = 0.0001$, $\rho = 1e-07$, $\rho = 1e-10$, oddzielnie dla obu warunków stopu. Warunek o przeciwnych znakach funkcji w punktach startowych metody siecznych, zgodnie z poleceniem, nie był sprawdzany.

Tabela 1: Liczba iteracji i wyliczone miejsce zerowe funkcji w zależności od punktu startowego i przyjętej dokładności ρ . Do obliczeń wykorzystano **metodę Newtona** oraz **pierwszy warunek stopu**.

| punkt startowy metody | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-07$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 |
| 2.5 | 23 | 0.522253 | 24 | 0.522247 | 25 | 0.522247 |
| 2.4 | 23 | 0.522247 | 23 | 0.522247 | 24 | 0.522247 |
| 2.3 | 22 | 0.522249 | 23 | 0.522247 | 23 | 0.522247 |
| 2.2 | 21 | 0.522284 | 22 | 0.522247 | 23 | 0.522247 |

| | | | | | | |
|-----|----|----------|----|----------|----|----------|
| 2.1 | 21 | 0.522247 | 22 | 0.522247 | 22 | 0.522247 |
| 2.0 | 20 | 0.522252 | 21 | 0.522247 | 22 | 0.522247 |
| 1.9 | 19 | 0.522289 | 20 | 0.522247 | 21 | 0.522247 |
| 1.8 | 19 | 0.522247 | 20 | 0.522247 | 20 | 0.522247 |
| 1.7 | 18 | 0.522248 | 19 | 0.522247 | 19 | 0.522247 |
| 1.6 | 17 | 0.522252 | 18 | 0.522247 | 18 | 0.522247 |
| 1.5 | 16 | 0.522259 | 17 | 0.522247 | 18 | 0.522247 |
| 1.4 | 15 | 0.522267 | 16 | 0.522247 | 17 | 0.522247 |
| 1.3 | 14 | 0.522267 | 15 | 0.522247 | 16 | 0.522247 |
| 1.2 | 13 | 0.522258 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 1.1 | 12 | 0.52225 | 13 | 0.522247 | 13 | 0.522247 |
| 1.0 | 11 | 0.522247 | 12 | 0.522247 | 12 | 0.522247 |
| 0.9 | 9 | 0.522272 | 10 | 0.522247 | 11 | 0.522247 |
| 0.8 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 | 9 | 0.522247 |
| 0.7 | 6 | 0.522248 | 7 | 0.522247 | 7 | 0.522247 |
| 0.6 | 4 | 0.522247 | 5 | 0.522247 | 5 | 0.522247 |
| 0.5 | 2 | 0.522247 | 3 | 0.522247 | 3 | 0.522247 |
| 0.4 | 4 | 0.522247 | 5 | 0.522247 | 5 | 0.522247 |
| 0.3 | 6 | 0.522247 | 7 | 0.522247 | 7 | 0.522247 |
| 0.2 | 7 | 0.522264 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 |

Tabela 2: Liczba iteracji i wyliczone miejsce zerowe funkcji w zależności od punktu startowego i przyjętej dokładności ρ . Do obliczeń wykorzystano **metodę Newtona** oraz **drugi warunek stopu**.

| punkt startowy metody | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-07$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 |
| 2.5 | 21 | 0.537183 | 23 | 0.522253 | 24 | 0.522247 |

| | | | | | | |
|-----|----|----------|----|----------|----|----------|
| 2.4 | 21 | 0.527046 | 23 | 0.522247 | 24 | 0.522247 |
| 2.3 | 20 | 0.534289 | 22 | 0.522249 | 23 | 0.522247 |
| 2.2 | 20 | 0.525223 | 22 | 0.522247 | 22 | 0.522247 |
| 2.1 | 19 | 0.52991 | 21 | 0.522247 | 22 | 0.522247 |
| 2.0 | 18 | 0.536914 | 20 | 0.522252 | 21 | 0.522247 |
| 1.9 | 18 | 0.525418 | 20 | 0.522247 | 20 | 0.522247 |
| 1.8 | 17 | 0.528647 | 19 | 0.522247 | 20 | 0.522247 |
| 1.7 | 16 | 0.532638 | 18 | 0.522248 | 19 | 0.522247 |
| 1.6 | 15 | 0.536647 | 17 | 0.522252 | 18 | 0.522247 |
| 1.5 | 14 | 0.539915 | 16 | 0.522259 | 17 | 0.522247 |
| 1.4 | 14 | 0.524445 | 16 | 0.522247 | 16 | 0.522247 |
| 1.3 | 13 | 0.524445 | 15 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 1.2 | 11 | 0.539622 | 13 | 0.522258 | 14 | 0.522247 |
| 1.1 | 10 | 0.535336 | 12 | 0.52225 | 13 | 0.522247 |
| 1.0 | 9 | 0.529719 | 11 | 0.522247 | 12 | 0.522247 |
| 0.9 | 8 | 0.524723 | 10 | 0.522247 | 10 | 0.522247 |
| 0.8 | 6 | 0.529538 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 |
| 0.7 | 4 | 0.533181 | 6 | 0.522248 | 7 | 0.522247 |
| 0.6 | 2 | 0.531382 | 4 | 0.522247 | 5 | 0.522247 |
| 0.5 | 1 | 0.522566 | 2 | 0.522247 | 2 | 0.522247 |
| 0.4 | 2 | 0.505723 | 4 | 0.522247 | 5 | 0.522247 |
| 0.3 | 4 | 0.514236 | 6 | 0.522247 | 7 | 0.522247 |
| 0.2 | 6 | 0.520037 | 7 | 0.522264 | 8 | 0.522247 |

Tabela 3: Liczba iteracji i wyliczone miejsce zerowe funkcji, przy pierwszym punkcie startowym metody 0.2, w zależności od drugiego punktu startowego i przyjętej dokładności ρ . Do obliczeń wykorzystano **metodę siecznych** oraz **pierwszy warunek stopu**.

| pierwszy punkt startowy metody | drugi punkt startowy metody | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-07$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 |
| 0.2 | 2.5 | 2 | 0.2 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.4 | 2 | 0.200001 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.3 | 2 | 0.200001 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.2 | 2 | 0.200002 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.1 | 2 | 0.200004 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.0 | 2 | 0.200007 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.9 | 2 | 0.200014 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.8 | 2 | 0.200028 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.7 | 2 | 0.200058 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.6 | 2 | 0.200127 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.5 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.4 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.3 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.2 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.1 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.0 | 12 | 0.522247 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.9 | 10 | 0.522247 | 12 | 0.522247 | 12 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.8 | 6 | 0.522246 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.7 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 | 10 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.6 | 7 | 0.522247 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.5 | 4 | 0.522247 | 5 | 0.522247 | 6 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.4 | 7 | 0.522247 | 8 | 0.522247 | 9 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.3 | 9 | 0.522247 | 10 | 0.522247 | 11 | 0.522247 |

Tabela 4: Liczba iteracji i wyliczone miejsce zerowe funkcji, przy pierwszym punkcie startowym metody 2.5, w zależności od drugiego punktu startowego i przyjętej dokładności ρ . Do obliczeń wykorzystano **metodę siecznych** oraz **pierwszy warunek stopu**.

| pierwszy punkt startowy metody | drugi punkt startowy metody | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-07$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 |
| 2.5 | 2.4 | 33 | 0.522247 | 34 | 0.522247 | 35 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.3 | 33 | 0.522247 | 34 | 0.522247 | 35 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.2 | 32 | 0.522247 | 33 | 0.522247 | 34 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.1 | 31 | 0.522247 | 32 | 0.522247 | 33 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.0 | 30 | 0.522247 | 32 | 0.522247 | 32 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.9 | 29 | 0.522247 | 31 | 0.522247 | 31 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.8 | 28 | 0.522247 | 30 | 0.522247 | 30 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.7 | 27 | 0.522247 | 28 | 0.522247 | 29 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.6 | 26 | 0.522247 | 27 | 0.522247 | 28 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.5 | 25 | 0.522247 | 26 | 0.522247 | 27 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.4 | 23 | 0.522247 | 25 | 0.522247 | 26 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.3 | 22 | 0.522247 | 23 | 0.522247 | 24 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.2 | 1 | 1.19996 | 22 | 0.522247 | 23 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.1 | 1 | 1.09999 | 20 | 0.522247 | 21 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.0 | 1 | 0.999996 | 18 | 0.522247 | 29 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.9 | 1 | 0.899999 | 16 | 0.522247 | 17 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.8 | 1 | 0.8 | 14 | 0.522247 | 15 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.7 | 1 | 0.7 | 1 | 0.7 | 12 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.6 | 1 | 0.6 | 1 | 0.6 | 9 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.5 | 1 | 0.5 | 1 | 0.5 | 6 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.4 | 1 | 0.4 | 1 | 0.4 | 9 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.3 | 1 | 0.3 | 1 | 0.3 | 11 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.2 | 1 | 0.2 | 13 | 0.522247 | 14 | 0.522247 |

Tabela 5: Liczba iteracji i wyliczone miejsce zerowe funkcji, przy pierwszym punkcie startowym metody 0.2, w zależności od drugiego punktu startowego i przyjętej dokładności ρ . Do obliczeń wykorzystano **metodę siecznych** oraz **drugi warunek stopu**.

| pierwszy punkt startowy metody | drugi punkt startowy metody | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-07$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 |
| 0.2 | 2.5 | 10 | 0.515162 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.4 | 10 | 0.515162 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.3 | 10 | 0.515163 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.2 | 10 | 0.515163 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.1 | 10 | 0.515164 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 2.0 | 10 | 0.515165 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.9 | 10 | 0.515167 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.8 | 10 | 0.515172 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.7 | 10 | 0.515183 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.6 | 10 | 0.515208 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.5 | 10 | 0.515266 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.4 | 10 | 0.515412 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.3 | 10 | 0.515795 | 12 | 0.522242 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.2 | 10 | 0.51683 | 12 | 0.522243 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.1 | 10 | 0.519374 | 12 | 0.522245 | 13 | 0.522247 |
| 0.2 | 1.0 | 9 | 0.512928 | 11 | 0.522242 | 12 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.9 | 7 | 0.502972 | 10 | 0.522247 | 11 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.8 | 3 | 0.50622 | 6 | 0.522246 | 7 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.7 | 5 | 0.527719 | 7 | 0.52226 | 9 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.6 | 3 | 0.537315 | 6 | 0.52225 | 7 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.5 | 2 | 0.522586 | 3 | 0.52223 | 5 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.4 | 4 | 0.517339 | 6 | 0.522243 | 7 | 0.522247 |
| 0.2 | 0.3 | 6 | 0.512106 | 8 | 0.522244 | 9 | 0.522247 |

Tabela 6: Liczba iteracji i wyliczone miejsce zerowe funkcji, przy pierwszym punkcie startowym metody 2.5, w zależności od drugiego punktu startowego i przyjętej dokładności ρ . Do obliczeń wykorzystano **metodę siecznych** oraz **drugi warunek stopu**.

| pierwszy punkt startowy metody | drugi punkt startowy metody | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-07$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 | liczba iteracji | wyliczone x_0 |
| 2.5 | 2.4 | 30 | 0.529385 | 33 | 0.522247 | 34 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.3 | 29 | 0.534463 | 32 | 0.522248 | 33 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.2 | 28 | 0.539483 | 31 | 0.522253 | 32 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.1 | 28 | 0.528371 | 30 | 0.522265 | 32 | 0.522247 |
| 2.5 | 2.0 | 27 | 0.529829 | 30 | 0.522247 | 31 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.9 | 26 | 0.530523 | 29 | 0.522247 | 30 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.8 | 25 | 0.530333 | 28 | 0.522247 | 29 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.7 | 24 | 0.529298 | 27 | 0.522247 | 28 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.6 | 23 | 0.527616 | 25 | 0.522259 | 27 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.5 | 21 | 0.537503 | 24 | 0.52225 | 25 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.4 | 20 | 0.532283 | 23 | 0.522247 | 24 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.3 | 19 | 0.527344 | 21 | 0.522258 | 23 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.2 | 17 | 0.532303 | 20 | 0.522247 | 21 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.1 | 15 | 0.536966 | 18 | 0.52225 | 19 | 0.522247 |
| 2.5 | 1.0 | 13 | 0.539498 | 16 | 0.522253 | 17 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.9 | 11 | 0.538583 | 14 | 0.522252 | 15 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.8 | 9 | 0.533825 | 12 | 0.522248 | 13 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.7 | 7 | 0.526924 | 9 | 0.522255 | 10 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.6 | 4 | 0.526623 | 6 | 0.522254 | 7 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.5 | 2 | 0.522566 | 3 | 0.52223 | 5 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.4 | 4 | 0.515797 | 6 | 0.522243 | 7 | 0.522247 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|---|----------|----|----------|----|----------|
| 2.5 | 0.3 | 6 | 0.503463 | 9 | 0.522247 | 10 | 0.522247 |
| 2.5 | 0.2 | 9 | 0.515162 | 11 | 0.522242 | 12 | 0.522247 |

Wnioski:

Niezależnie od punktu startowego zastosowanie metody Newtona pozwoliło nam na uzyskanie zbliżonych do oczekiwanych wyników. Im bliżej miejsca zerowego funkcji f znajdował się punkt startowy metody, tym mniej iteracji było potrzebnych do spełnienia warunku stopu. W tym przypadku stosowanie drugiego warunku stopu pozwalało na minimalnie niższą liczbę iteracji (około 1, 2 iteracje mniej, niż w przypadku zastosowania pierwszego warunku stopu). Natomiast stosowanie pierwszego warunku stopu pozwalało na uzyskanie dokładniejszego wyniku. Wynika to zapewne z bardzo zbliżonych do zera wartości w punktach otaczających miejsce zerowe funkcji f .

Stosowanie metody siecznych dla miejsc startowych dobieranych w sposób opisany w treści zadania spowodowało otrzymanie nieoczekiwanych wyników w relatywnie wielu przypadkach. Warto jednak zauważyć, że błędne wyniki były otrzymywane tylko dla pierwszego kryterium stopu. W tabeli 3 błędne wyniki były bardzo zbliżone do lewego krańca przedziału. Wynikało to z bardzo dużej wartości na prawym krańcu przedziału, w stosunku do wartości na lewym krańcu, przez co wykres prostej łączącej punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ był na tyle "pionowy", że lewy koniec przedziału nie zmieniał się na tyle szybko, aby pierwszy warunek stopu nie został spełniony już po dwóch iteracjach. Zastosowanie odpowiednio niskiego $\rho = 1e-07$ zwalczało opisany problem. W tabeli 4 błędne wyniki wynikały z analogicznego problemu, możemy jednak zauważyć, że tam dopiero $\rho = 1e-10$ było odpowiednio niskie, aby uniknąć przekłamań.

Warto również zauważyć, że dla rozpatrywanej funkcji brak sprawdzania warunku na punkty startowe w metodzie siecznych (gwarantującego przeciwne znaki wartości w występujących w punktach startowych) nie był problemem, gdyż charakterystyka f pozwalała na znajdowanie kolejnych punktów przybliżających rozwiązanie w przedziale $[0.2, 2.5]$ w przypadku każdej rozpatrywanej pary punktów początkowych.

Pozostałe wyniki uzyskiwane za pomocą metody siecznych były bardzo zbliżone do wyników otrzymywanych metodą Newtona. Przy zastosowaniu pierwszego kryterium stopu liczba iteracji metody siecznych była nieco wyższa, natomiast oferowała wyższą dokładność wyliczonego x_0 . Stosowanie drugiego warunku stopu znacząco zmniejszało liczbę iteracji gdy jednym z krańców przedziału było 0.2 oraz pozwalało uzyskiwać nieco mniej dokładne wyniki, natomiast gdy jednym z krańców przedziału było 2.5 dokładność wyników była bardzo podobna do uzyskiwanej w metodzie Newtona przy drugim warunku stopu, niestety liczba iteracji była nieco wyższa.

2. Treść zadania:

Rozwiąż wskazany układ równań metodą Newtona:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{cases}$$

Przeprowadź eksperymenty dla różnych wektorów początkowych. Sprawdź, ile rozwiązań ma układ. Przy jakich wektorach początkowych metoda nie zbiega do rozwiązania? Jakie wektory początkowe doprowadzają do jakiego rozwiązania? Należy także zastosować dwa różne kryteria stopu.

Zastosowane kryteria stopu to:

$$1) \| \mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)} \| < \rho$$

$$2) \| F(\mathbf{x}^{(i)}) \| < \rho$$

gdzie $\mathbf{x}^{(i)}$ oznacza wektor niewiadomych $([x_1, x_2, x_3])$ wyliczony w i-tej iteracji, a $F(\mathbf{x}^{(i)})$ oznacza wektor otrzymany przez podstawienie niewiadomych wyliczonych w i-tej iteracji do wektora:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 - 3 \end{bmatrix}$$

Podany układ równań ma 3 rzeczywiste rozwiązania, WolframAlpha podaje je jako:

$$[1, -1, -1]$$

$$[1, 0, 0]$$

$$[0.953156, -0.428689, -0.0922802]$$

Eksperyment przeprowadziłem dla dwóch różnych wartości ρ ($\rho = 0.0001$, $\rho = 1e-10$).

Normą użytą do badania warunku stopu była **norma maksimum**. Jako wektory początkowe w kolejnych próbach przyjmowałem wektory $[-10000, -10000, -10000]$, $[0, 0, 0]$, $[10000, 10000, 10000]$, $[-1337.420, 20000, -0.001]$, $[5, 10, 15]$, $[1, -1, -1]$, $[1, 0, 0]$, $[0.953156, -0.42869, -0.0922802]$.

Tabela 7: Wyliczone za pomocą metody Newtona rozwiązania układu równań oraz liczba iteracji potrzebna do ich uzyskania przy zastosowaniu różnych wektorów początkowych i pierwszego warunku stopu

| Wektor początkowy | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|--|-----------------|---|-----------------|---------------------------------------|
| | Liczba iteracji | Wektor wynikowy | Liczba iteracji | Wektor wynikowy |
| [-10000, -10000, -10000] | 141 | [1.0001, -1.00007, -1.00015] | 160 | [1, -1, -1] |
| [0,0,0] | 22 | [0.999933, -1.00016, -1.00012] | 41 | [1, -1, -1] |
| [10000, 10000, 10000] | 395 | [1.00013, -1.00002, -1.00015] | 414 | [1, -1, -1] |
| [-1337.420, 20000, -0.001] | 58 | [0.999944, -1.00016, -1.00016] | 77 | [1, -1, -1] |
| [5, 10, 15] | 123 | [1.00008, -1.00005, -1.00013] | 142 | [1, -1, -1] |
| [1, -1, -1] | 0 | [1, -1, -1] | 0 | [1, -1, -1] |
| [1, 0, 0] | 0 | [1, 0, 0] | 0 | [1, 0, 0] |
| [0.953156, -0.42869, -0.0922802] | 0 | [0.953156, -0.428689, -0.0922802] | 100076 | [1, -1.00002e-05, -1.27008e-10] |

Tabela 8: Najbliższy wyliczonemu wektorowi wektor będący wzorcowym rozwiązaniem układu równań, a także różnica między nimi (norma maksimum różnicy tych wektorów, w tabeli nazwana po prostu różnicą), dla wektorów wyliczonych w poprzedniej tabeli.

| Wektor początkowy | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------|----------------------------|-------------|
| | Najbliższy wektor wzorcowy | Różnica | Najbliższy wektor wzorcowy | Różnica |
| [-10000, -10000, -10000] | [1, -1, -1] | 0.00014845 | [1, -1, -1] | 1.5186e-10 |
| [0,0,0] | [1, -1, -1] | 0.000160689 | [1, -1, -1] | 1.64408e-10 |
| [10000, 10000, 10000] | [1, -1, -1] | 0.000152813 | [1, -1, -1] | 1.56337e-10 |
| [-1337.420, 20000, -0.001] | [1, -1, -1] | 0.000161032 | [1, -1, -1] | 1.64761e-10 |
| [5, 10, 15] | [1, -1, -1] | 0.000128694 | [1, -1, -1] | 1.31656e-10 |
| [1, -1, -1] | [1, -1, -1] | 0 | [1, -1, -1] | 0 |
| [1, 0, 0] | [1, 0, 0] | 0 | [1, 0, 0] | 0 |
| [0.953156, -0.42869, -0.0922802] | [0.953156, -0.42869, -0.0922802] | 0 | [1, 0, 0] | 1.00002e-05 |

Tabela 9: Wyliczone za pomocą metody Newtona rozwiązania układu równań oraz liczba iteracji potrzebna do ich uzyskania przy zastosowaniu różnych wektorów początkowych i drugiego warunku stopu

| Wektor początkowy | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|--|-----------------|---|-----------------|---------------------------------------|
| | Liczba iteracji | Wektor wynikowy | Liczba iteracji | Wektor wynikowy |
| [-10000, -10000, -10000] | 142 | [1.00005, -1.00004, -1.00007] | 161 | [1, -1, -1] |
| [0,0,0] | 24 | [0.999984, -1.00004, -1.00003] | 43 | [1, -1, -1] |
| [10000, 10000, 10000] | 396 | [1.00006, -1.00001, -1.00007] | 415 | [1, -1, -1] |
| [-1337.420, 20000, -0.001] | 60 | [0.999987, -1.00004, -1.00004] | 79 | [1, -1, -1] |
| [5, 10, 15] | 124 | [1.00004, -1.00002, -1.00006] | 143 | [1, -1, -1] |
| [1, -1, -1] | 0 | [1, -1, -1] | 0 | [1, -1, -1] |
| [1, 0, 0] | 0 | [1, 0, 0] | 0 | [1, 0, 0] |
| [0.953156, -0.42869, -0.0922802] | 0 | [0.953156, -0.428689, -0.0922802] | 264160 | [1, -3.78675e-06, -1.82116e-11] |

Tabela 10: Najbliższy wyliczonemu wektorowi wektor będący wzorcowym rozwiązaniem układu równań, a także różnica między nimi (norma maksimum różnicy tych wektorów, w tabeli nazwana po prostu różnicą), dla wektorów wyliczonych w poprzedniej tabeli.

| Wektor początkowy | $\rho = 0.0001$ | | $\rho = 1e-10$ | |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------|----------------------------|-------------|
| | Najbliższy wektor wzorcowy | Różnica | Najbliższy wektor wzorcowy | Różnica |
| [-10000, -10000, -10000] | [1, -1, -1] | 7.18306e-05 | [1, -1, -1] | 7.34806e-11 |
| [0,0,0] | [1, -1, -1] | 3.76273e-05 | [1, -1, -1] | 3.8493e-11 |
| [10000, 10000, 10000] | [1, -1, -1] | 7.39454e-05 | [1, -1, -1] | 7.5647e-11 |
| [-1337.420, 20000, -0.001] | [1, -1, -1] | 3.77079e-05 | [1, -1, -1] | 3.85756e-11 |
| [5, 10, 15] | [1, -1, -1] | 6.22727e-05 | [1, -1, -1] | 6.37046e-11 |
| [1, -1, -1] | [1, -1, -1] | 0 | [1, -1, -1] | 0 |
| [1, 0, 0] | [1, 0, 0] | 0 | [1, 0, 0] | 0 |
| [0.953156, -0.42869, -0.0922802] | [0.953156, -0.42869, -0.0922802] | 0 | [1, 0, 0] | 3.78675e-06 |

Wnioski:

Eksperyment pokazuje, że metoda Newtona przy zastosowaniu odpowiednio niskiego ρ w warunku stopu potrafi w bardzo dokładny sposób przybliżyć nam wektor wynikowy. Analizując tabele możemy zauważyć, że zastosowanie drugiego warunku stopu powoduje wykonanie nieco większej liczby iteracji (w większości przypadków tylko jednej dodatkowej iteracji), przez co zapewnia wyniki około dziesięciokrotnie bliższe rzeczywistemu rozwiązaniu układu. Jak widzimy w przypadku zadanego układu metoda w zdecydowanej większości przypadków zbiega do wektora [1, -1, -1]. Tylko zastosowanie wektora startowego bardzo zbliżonego do innego rozwiązania układu pozwoliło nam uzyskać wynik bardzo bliski temu rozwiązaniu. Ostatni wiersz tabel pokazuje ciekawą sytuację, mianowicie zastosowanie jako wektora startowego wektora [0.953156, -0.42869, -0.0922802], podawanego przez WolframAlpha jako jedno z przybliżonych rozwiązań układu, dla zastosowania odpowiednio niskiego ρ (w moim przypadku $\rho = 1e-10$) spowodowało

uzyskanie wyniku najbardziej zbliżonego do innego wektora - $[1, 0, 0]$. Ta sytuacja pozwala myśleć, że bardzo niewiele wektorów startowych zbiega do trzeciego rozwiązania układu i są to tylko wektory bardzo bliskie temu rozwiązaniu. Nie udało mi się odnaleźć żadnego wektora startowego, dla którego metoda nie zbiegała by do żadnego z rozwiązań.