

## 2 Der mathematische Rahmen der Quantenmechanik

## 2.1 Der Raum der Wellenfunktionen

- Die Menge der quadratintegrablen Funktionen  $\psi(\vec{x})$  auf  $\mathbb{R}^n$  wird als  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (bzw.  $L^2$ ) bezeichnet

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \{\psi(\vec{x}) : \int d^n x |\psi(\vec{x})|^2 < \infty\}$$

- $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist ein **Vektorraum**, d.h. insbesondere falls  $\psi, \phi \in L^2$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  dann ist auch

$$\lambda\psi + \mu\phi \in L^2 \quad (1)$$

- In  $L^2$  lässt sich ein **Skalarprodukt** definieren. Jedem Paar  $\psi, \phi \in L^2$  ordnen wir eine komplexe Zahl  $(\psi, \phi) \in \mathbb{C}$  zu

$$(\psi, \phi) = \int d\vec{x} \psi^*(\vec{x})\phi(\vec{x})$$

- **Eigenschaften des Skalarproduktes:**

- $(\psi, \phi)^* = (\phi, \psi)$
- $(\psi, \lambda\phi + \mu\chi) = \lambda(\psi, \phi) + \mu(\psi, \chi)$
- $(\lambda\psi + \mu\phi, \chi) = \lambda^*(\psi, \chi) + \mu^*(\phi, \chi)$
- Wenn  $(\psi, \phi) = 0$  dann heißen  $\psi$  und  $\phi$  **orthogonal**.

Es gilt

$$(\psi, \psi) = \int d^n x |\psi(\vec{x})|^2 \geq 0$$

und

$$(\psi, \psi) = 0 \iff \psi = 0$$

- Für das Skalarprodukt gilt die Cauchy - Schwartz - Ungleichung, womit sich Gleichung (1) beweisen lässt

$$|(\psi, \phi)| \leq \sqrt{(\psi, \psi)} \sqrt{(\phi, \phi)}$$

- Mit dem Skalarprodukt lässt sich eine **Norm** definieren

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) \geq 0$$

- Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt und einer dadurch induzierten Norm ist ein **(Prä-)Hilbertraum**  $\mathcal{H}$ .

Beispiele für Hilberträume, die in der Quantenmechanik wichtig sind:

- $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ , der Raum der quadratintegriblen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$(\psi, \phi) = \int d^n x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

und der Norm

$$||\psi||^2 = (\psi, \psi) = \int d^n x |\psi(\vec{x})|^2$$

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ , der Raum der  $n$ -komponentigen, komplexen Vektoren mit dem Skalarprodukt

$$(\psi, \phi) = \sum_{k=1}^n c_k^* d_k$$

für  $\psi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  und  $\phi = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  und der Norm

$$||\psi||^2 = (\psi, \psi) = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

Bemerkung: Ein **Hilbertraum** ist ein vollständiger Prähilbertraum, d.h. jede konvergent Folge von Elementen  $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$  konvergiert gegen ein Element  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .

- Ein **linearer Operator**  $A$  ist eine Abbildung die jedem Element  $\psi \in \mathcal{H}$  ein anderes Element zuordnet

$$A\psi = \tilde{\psi}$$

wobei gilt

$$A(\lambda\psi + \mu\phi) = \lambda A\psi + \mu A\phi$$

Beispiele:

- **Ortsoperator**  $\hat{x}_k$  mit  $k = 1, 2, 3$

$$\hat{x}_k\psi(\vec{y}) = x_k\psi(\vec{y})$$

- **Impulsoperator**  $\hat{p}_k$  mit  $k = 1, 2, 3$

$$\hat{p}_k\psi(\vec{x}) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}\psi(\vec{x})$$

- **Operator der kinetischen Energie**

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

- **Hamiltonoperator**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

- **Drehimpulsoperator**

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}} \quad \text{d.h.} \quad \hat{L}_k = \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{klm} \hat{x}_l \hat{p}_m$$

- Das Produkt  $AB$  von linearen Operatoren  $A$  und  $B$  ist definiert durch

$$AB\psi(\vec{x}) = A[B\psi(\vec{x})]$$

Zuerst wird  $B$  angewendet, dann  $A$ . Im Allgemeinen gilt  $AB \neq BA$ .

- Die Differenz  $AB - BA$  heißt **Kommutator** von  $A$  und  $B$  und wird bezeichnet als

$$[A, B] = AB - BA$$

Eigenschaften des Kommutators:

- $[A, B] = -[B, A]$
- $[\lambda A, B] = [A, \lambda B] = \lambda[A, B]$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$
- $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$  und  $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$  (Linearität)
- $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  und  $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$  (Kettenregel)

- Wichtige Kommutatoren in der Quantenmechanik:

- Für Ortsoperator  $\hat{x}$  und Impulsoperator  $\hat{p}$  in 1D gilt die **kanonische Kommutatorrelation**

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Beweis: Für beliebige  $\psi(x)$  gilt

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi(x) = \hat{x} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) [x\psi(x)] = i\hbar\psi(x)$$

- Für Ortsoperator  $\hat{x}$  und Impulsoperator  $\hat{p}$  in 3D gilt

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl} \quad [\hat{x}_k, \hat{x}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

Beweis: Analog wie in 1D.

- Für die Komponenten des Drehimpulsoperators  $\hat{L}$  gilt

$$[\hat{L}_k, \hat{L}_l] = i\hbar\epsilon_{klm}\hat{L}_m$$

Beweis: Definition des Drehimpulsoperators, Kettenregel und kanonischer Kommutator für Ort und Impuls.

- Der zu  $A$  **adjungierte Operator**  $A^\dagger$  erfüllt

$$(\psi, A\phi) = (A^\dagger\psi, \phi)$$

Beispiel: Sei  $A$  der Differentialoperator in einer Dimension  $A = \frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned} (\psi, A\phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x) A\phi(x) \\ &= \int dx \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \\ &= \psi^*(x) \phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int dx \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x) \right) \phi(x) \\ &\stackrel{!}{=} (A^\dagger\psi, \phi) \quad \text{also} \quad A^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Allgemeiner gelten die **Eigenschaften des Adjungierens**:

- $(A^\dagger)^\dagger = A$
- $(A\psi, \phi) = (\psi, A^\dagger\phi)$
- $(\lambda A + \mu B)^\dagger = \lambda^* A^\dagger + \mu^* B^\dagger$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$



- Ein **selbstadjungierter (oder hermitescher) Operator** erfüllt

$$A = A^\dagger$$

Beispiel: Der Impulsoperator:  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned} (\psi, \hat{p}\phi) &= \int dx \psi^*(x) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x) \\ &= - \int dx \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x) \right) \phi(x) \\ &= \int dx \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right)^* \phi(x) \\ &= (\hat{p}\psi, \phi) \end{aligned}$$

Für die Eigenwerte und -vektoren eines hermiteschen Operators  $A$

$$A\psi_{n,\alpha} = \lambda_n \psi_{n,\alpha}$$

gelten die Eigenschaften:

- Die **Eigenwerte sind reell**:  $\lambda_n \in \mathbb{R}$
- Die **Eigenvektoren  $\psi_{n,\alpha}$  sind orthogonal**:

$$(\psi_{n,\alpha}, \psi_{m,\beta}) = \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta}$$

[Beweis: Siehe später.]

## 2.2 Dirac Schreibweise

Ist eine sehr effiziente Notation für Rechnungen in der Quantenmechanik.

- Ein Vektor in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  wird als '**Ket**' bezeichnet und geschrieben als

$$|\psi\rangle$$

- Ein lineares Funktional  $\chi$  auf  $\mathcal{H}$  ist eine Abbildung, die einem Vektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  eine komplexe Zahl zuordnet

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \xrightarrow{\chi} \chi(|\psi\rangle) \in \mathbb{C}$$

und linear ist:

$$\chi(\lambda |\psi\rangle + \mu |\phi\rangle) = \lambda \chi(|\psi\rangle) + \mu \chi(|\phi\rangle)$$

Der Raum der linearen Funktionalen ist selbst ein Vektorraum und heißt dualer Raum  $\mathcal{H}^*$  zu  $\mathcal{H}$ . Elemente im dualen Raum  $\mathcal{H}^*$  werden als '**Bra**' bezeichnet und geschrieben als

$$\langle\chi|$$

so, dass  $\chi(|\psi\rangle) = \langle\chi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$

- Wir können zu jedem Ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  einen Bra  $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$  assoziieren:  $\langle\psi|$  bildet einen ket  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  auf die komplexe Zahl  $(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$  ab, das heißt

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= (|\psi\rangle, |\phi\rangle) \\ &= \int d^n x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad [\text{für Elemente in } L^2]\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\langle\psi| = (|\psi\rangle, \cdot)$$

Damit gilt (siehe Skalarprodukt):

- $\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$
- $\langle\psi|\lambda\phi_1 + \mu\phi_2\rangle = \lambda\langle\psi|\phi_1\rangle + \mu\langle\psi|\phi_2\rangle$
- $\langle\lambda\psi + \mu\phi|\phi\rangle = \lambda^* \langle\psi|\phi\rangle + \mu^* \langle\phi|\phi\rangle$
- $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$  und  $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle = 0$

- Für einen linearen Operator  $A$  gilt:

$$\begin{aligned}\langle \psi | A | \phi \rangle &= (| \psi \rangle, A | \phi \rangle) \\ &= \int d^n x \psi^*(\vec{x}) (A \phi(\vec{x})) \quad [\text{z.B. für Elemente in } \mathcal{H} = L^2]\end{aligned}$$

Es gilt

$$\langle \psi | A | \phi \rangle^* = \langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle$$

**Beweis:**  $\langle \psi | A | \phi \rangle^* = (| \psi \rangle, A | \phi \rangle)^* = (A | \phi \rangle, | \psi \rangle) = (| \phi \rangle, A^\dagger | \psi \rangle) = \langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle$

Damit lassen sich Mittelwerte schreiben als

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} \rangle &:= \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \int d^n x \psi^*(\vec{x}) (\hat{x} \psi(\vec{x})) = \int d^n x x |\psi(\vec{x})|^2 \\ \langle \vec{p} \rangle &:= \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int d^n x \psi^*(\vec{x}) (\hat{p} \psi(\vec{x})) = \int d^n x \psi^*(\vec{x}) (-i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{x}))\end{aligned}$$

- Es gilt

$$A | \psi \rangle = | \phi \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \langle \psi | A^\dagger = \langle \phi |.$$

**Beweis:**

Wegen  $A | \psi \rangle - | \phi \rangle = 0$  gilt für alle  $|\chi\rangle$ , dass  $0 = \langle \chi | (A | \psi \rangle - | \phi \rangle) = \langle \chi | A | \psi \rangle - \langle \chi | \phi \rangle$

bzw. durch komplex konjugieren  $0 = \langle \psi | A^\dagger | \chi \rangle - \langle \phi | \chi \rangle = (\langle \psi | A^\dagger - \langle \phi |) | \chi \rangle$  also  $\langle \psi | A^\dagger = \langle \phi |$ .

- Beweis für: Die **Eigenwerte** eines selbstadjungierten Operators sind **reell**.

Es gelte die Eigenwertgleichung

$$A |\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle .$$

O.B.d.A. sei das Spektrum  $\{\lambda_n\}$  diskret und die Eigenwerte seien nicht entartet. Damit gilt

$$\langle \psi_n | A | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \lambda_n | \psi_n \rangle = \lambda_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$

und wegen  $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = || |\psi\rangle ||^2 \geq 0$  gilt einerseits

$$\langle \psi_n | A | \psi_n \rangle^* = \lambda_n^* \langle \psi_n | \psi_n \rangle .$$

Andererseits

$$\langle \psi_n | A | \psi_n \rangle^* = \langle \psi_n | A^\dagger | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle = \lambda_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$

und damit folgt

$$\lambda_n^* = \lambda_n .$$

- Beweis für: Die **Eigenvektoren** eines selbstadjungierten Operators sind **orthogonal**.

Wir multiplizieren die Eigenwertgleichung

$$A |\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle$$

von links mit dem zum Eigenzustand  $|\psi_m\rangle$  assoziierten Bra  $\langle\psi_m|$

$$\langle\psi_m|A|\psi_n\rangle = \lambda_n \langle\psi_m|\psi_n\rangle.$$

Damit gilt einerseits

$$\langle\psi_m|A|\psi_n\rangle^* = \lambda_n \langle\psi_m|\psi_n\rangle^* = \lambda_n \langle\psi_n|\psi_m\rangle$$

und andererseits

$$\langle\psi_m|A|\psi_n\rangle^* = \langle\psi_n|A^\dagger|\psi_m\rangle = \langle\psi_n|A|\psi_m\rangle = \lambda_m \langle\psi_n|\psi_m\rangle$$

Also  $(\lambda_n - \lambda_m) \langle\psi_n|\psi_m\rangle = 0$ . Falls  $\lambda_n \neq \lambda_m$  muss  $\langle\psi_n|\psi_m\rangle = 0$  gelten. Somit ist gilt für normierte Eigenzustände  $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$  die Orthogonalitätsrelation

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}.$$

Bemerkung: Falls die Eigenwerte  $\lambda_n$  entartet sind, können die Eigenzustände  $\{|\psi_{n,\alpha}\rangle\}$  orthogonal gewählt werden, d.h.  $\langle\psi_{n,\alpha}|\psi_{m,\beta}\rangle = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$ .

- Die **Eigenzustände** eines hermiteschen Operators **bilden eine vollständige Basis** im Hilbertraum.

Es gelte  $A|\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle$  für einen Operator  $A = A^\dagger$ . Die Eigenzustände  $\{|\psi_n\rangle\}$  bilden eine Basis, d.h. für alle Zustände  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  existiert eine Darstellung

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$$

mit Amplituden  $c_n \in \mathbb{C}$ .

Multiplikation von links mit  $\langle\psi_m|$  ergibt  $\langle\psi_m|\Psi\rangle = \sum_n c_n \langle\psi_m|\psi_n\rangle = \sum_n c_n \delta_{mn} = c_m$ .

Also sind die Amplituden

$$c_n = \langle\psi_n|\Psi\rangle.$$

Damit folgt für beliebiges  $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|\Psi\rangle = [\sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|] |\Psi\rangle$ .

Die Eigenzustände erfüllen die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n| = \mathbb{1}$$

- Ein selbstadjungierter Operator besitzt eine **Spektraldarstellung**

$$A = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

wobei  $|\psi_n\rangle$  und  $\lambda_n$  die Eigenzustände und -werte von  $A$  sind,  $A |\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{1} A \mathbb{1} = \left[ \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right] A \left[ \sum_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \right] = \sum_{n,m} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| A |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \\ &= \sum_{n,m} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \lambda_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \\ &= \sum_{n,m} \lambda_m \delta_{nm} |\psi_n\rangle \langle \psi_m| = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \end{aligned}$$

- Die Funktion eines Operators  $f(A)$  ist definiert als

$$f(A) = \sum_n f(\lambda) |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$



- **Kommutierende Operatoren**  $[A, B] = 0$  besitzen einen **gemeinsamen Satz von Eigenvektoren**

$$A |a_n, b_m, \alpha\rangle = a_n |a_n, b_m, \alpha\rangle$$

$$B |a_n, b_m, \alpha\rangle = b_m |a_n, b_m, \alpha\rangle$$

$\alpha$  ist ein Entartungsindex.

Beweis:

- Die Eigenwertgleichungen von  $A$  und  $B$  seien

$$A |a_{n\alpha}\rangle = a_n |a_{n\alpha}\rangle$$

$$B |b_{m\beta}\rangle = b_m |b_{m\beta}\rangle$$

Die Eigenvektoren von  $B$  können in der Basis der Eigenvektoren von  $A$  aufgespannt werden mit Amplituden  $c_{m\beta}^{n\alpha} = \langle b_{m\beta} | a_{n\alpha} \rangle$

$$|a_{n\alpha}\rangle = \sum_m \sum_{\beta} c_{m\beta}^{n\alpha} |b_{m\beta}\rangle = \sum_m |\psi_{nm\alpha}\rangle$$

$$|\psi_{nm\alpha}\rangle := \sum_{\beta} c_{m\beta}^{n\alpha} |b_{m\beta}\rangle$$

Die  $|\psi_{nm\alpha}\rangle$  sind (nicht-normierte) Eigenzustände von  $B$

$$B |\psi_{nm\alpha}\rangle = b_m |\psi_{nm\alpha}\rangle.$$

- Es gilt

$$0 = (A - a_n) |a_{n\alpha}\rangle = \sum_m (A - a_n) |\psi_{nm\alpha}\rangle \quad (2)$$

- Wegen  $[A, B] = 0$  gilt für jeden Term in der Summe

$$B(A - a_n) |\psi_{nm\alpha}\rangle = (A - a_n)B |\psi_{nm\alpha}\rangle = b_m(A - a_n) |\psi_{nm\alpha}\rangle$$

Also sind die Vektoren  $(A - a_n) |\psi_{nm\alpha}\rangle$  wieder Eigenzustände von  $B$  zu Eigenwert  $b_m$  und daher linear unabhängig.

- Es muss daher jeder Term in der Summe in Gleichung (2) verschwinden,  $(A - a_n) |\psi_{nm\alpha}\rangle = 0$ , bzw

$$A |\psi_{nm\alpha}\rangle = a_n |\psi_{nm\alpha}\rangle$$

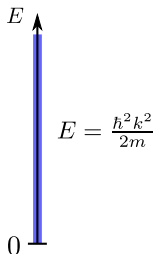
- Die normierten, gemeinsamen Eigenzustände von  $A$  und  $B$  zu Eigenwerten  $a_n$  und  $b_m$  sind daher

$$|a_n, b_m, \alpha\rangle := \frac{1}{\sqrt{\langle \psi_{nm\alpha} | \psi_{nm\alpha} \rangle}} |\psi_{nm\alpha}\rangle$$

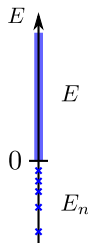
Bemerkung: Dies verallgemeinert sich für einen grösseren Satz  $\{A, B, C, \dots\}$  kommutierender Operatoren.

- Das **Spektrum** (die Menge der Eigenwerte) eines selbstadjungierten Operators hat im Allgemeinen einen diskreten und/oder kontinuierlichen Anteil.

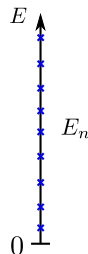
Beispiel: Spektrum des Hamiltonoperators  $\hat{H}$



freies Teilchen



endlicher  
Potentialtopf



unendlich tiefer  
Potentialtopf

Die Eigenwertgleichung für einen selbstadjungierten Operator  $A$  lautet daher im Allgemeinen:

$$A |\psi_{n,\alpha}\rangle = \lambda_n |\psi_{n,\alpha}\rangle$$

$$\text{diskret: } \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$$

$$A |\psi_{\lambda,\alpha}\rangle = \lambda |\psi_{\lambda,\alpha}\rangle$$

$$\text{kontinuierlich: } \lambda \in [a, b]$$

$\alpha$  bezeichnet eine mögliche Entartung.

- Weiterhin gilt:

- Die Eigenwerte sind reell,  $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$
- Die Eigenzustände sind orthogonal

$$\langle \psi_{m,\alpha} | \psi_{n,\beta} \rangle = \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \quad \langle \psi_{\lambda,\alpha} | \psi_{\lambda',\beta} \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \delta_{\alpha\beta} \quad \langle \psi_{n,\alpha} | \psi_{\lambda,\beta} \rangle = 0$$

diskret: Kroneckerdelta

- Die Eigenzustände bilden eine vollständige Basis in  $\mathcal{H}$ , d.h. für alle  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  gibt es eine Darstellung mit Amplituden  $c_{n,\alpha} = \langle \psi_{n,\alpha} | \Psi \rangle$  und  $c_{\lambda,\alpha} = \langle \psi_{\lambda,\alpha} | \Psi \rangle$ .

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,\alpha} c_{n,\alpha} |\psi_{n,\alpha}\rangle + \sum_{\alpha} \int d\lambda c_{\lambda,\alpha} |\psi_{\lambda,\alpha}\rangle$$

- Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbb{1} = \sum_{n,\alpha} |\psi_{n,\alpha}\rangle \langle \psi_{n,\alpha}| + \sum_{\alpha} \int d\lambda |\psi_{\lambda,\alpha}\rangle \langle \psi_{\lambda,\alpha}|$$

- Die Spektraldarstellung von  $A$  ist

$$A = \sum_{n,\alpha} \lambda_n |\psi_{n,\alpha}\rangle \langle \psi_{n,\alpha}| + w \sum_{\alpha} \int d\lambda \lambda |\psi_{\lambda,\alpha}\rangle \langle \psi_{\lambda,\alpha}|$$

- Eine Funktion von  $A$  ist

$$f(A) = \sum_{n,\alpha} f(\lambda_n) |\psi_{n,\alpha}\rangle \langle \psi_{n,\alpha}| + \sum_{\alpha} \int d\lambda f(\lambda) |\psi_{\lambda,\alpha}\rangle \langle \psi_{\lambda,\alpha}|$$