1 Grundprinzipien relativistischer Beschreibung

- Raum & Zeit als Grundstruktur, also Punktmenge mit geometrischen Strukturen sei gegeben
- Automorphismengruppe der Raumzeit (z.B. Galilei-Gruppe, Poincaré-Gruppe)
- Automorphismengruppe als Symmetrie dynamischer Gesetze, Bewegungsgleichungen für „Teilchen“ & „Felder“
  - Teilchen: Abb.$\gamma : \mathbb{R} \to M$ (Raumzeit)
  - Felder: Abb.$F : M \to V$ (Vektorraum)

  Aktion der Automorphismengruppe (der Raumzeit) auf dynamischen Größen „Teilchen“ & „Felder“

Definition 1.1. *Aktion Aktion einer Gruppe G auf Menge M ist ein Homomorphismus*

$$\Phi : G \to \mathrm{Bij}(M) \tag{1.1}$$

$$g \mapsto \phi_g \tag{1.2}$$

$$\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2} = \phi_{g_1 \circ g_2} \tag{1.3}$$

$$\phi_{e_G} = \mathrm{id}_M \tag{1.4}$$

Allgemeine Form von Bewegungsgleichungen:

$$B\left[\Sigma; \gamma, F\right] = 0 \tag{1.5}$$

Mit F einem Feld und γ der Bahnkurve in der Raumzeit der Teilchen. Gelöst wird nach (γ, F) bei gegebenem Σ (Hintergrundstrukturen). Sei T eine Aktion der Gruppe G auf den dynamischen Größen (γ, F)

$$g \mapsto T_g : (\gamma, F) \mapsto (T_g\gamma, T_gF) \tag{1.6}$$

Dann heißt G Symmetriegruppe der Bewegungsgleichung (BWG) wenn

$$B\left[\Sigma; T_g\gamma, T_gF\right] = 0 \Leftrightarrow B\left[\Sigma; \gamma, F\right] = 0 \; \forall \, g \in G \tag{1.7}$$

d.h. die mit g transformierten dynamischen Größen erfüllen wieder dieselbe BWG.
Unterschied Symmetrie zu Kovarianz: Bei Symmetrie dürfen nur die dynamischen Größen transformiert werden, bei Kovarianz aber alle. Kovarianz:

$$B\left[T_g\Sigma; T_g\gamma, T_gF\right] = 0 \Leftrightarrow B\left[\Sigma; \gamma, F\right] = 0 \tag{1.8}$$

Bei $T_g\Sigma$ werden auch die Hintergrundstrukturen transformiert. Kovarianz ist eine „relativ“ triviale (leicht zu erfüllende) Forderung, im Gegensatz zu Symmetrie.

Beispiel 1.2. *Diffusionsgleichung*

$$\partial_t \phi = k \triangle \phi \tag{1.9}$$

Sei $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ *, so dass* $n^\mu \partial_\mu = \partial_t$

$$n^\mu \partial_\mu \phi = k \left(n^\mu n^\nu - \eta^{\mu\nu}\right) \partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{1.10}$$

wobei $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ *und* $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ *die Minkowski-Metrik sind. In* $B\left[\Sigma; \gamma, F\right]$ *kommen* η, n *aus den Strukturen, also* Σ, ϕ *ist ein Feld* F. *Würde man* n *&* η *mittransformieren, so wäre die Diffusionsgleichung Poincarékovariant. Aber natürlich ist die Poincaré-Gruppe keine Symmetrie-Gruppe dieser BWG. Achtung: Terminologie nicht eindeutig.*

Ist G eine Gruppe und

$$\phi : G \to \mathrm{Bij}(M) \tag{1.11}$$

$$g \mapsto \phi_g \tag{1.12}$$

ein Homomorphismus, dann heißt

$$(\phi, G, M) \tag{1.13}$$

(verallgemeinerte) Darstellung, oder auch „Wirkung“ von G auf M.

- Die Darstellung heißt treu bzw. effektive (Wirkung) $\Leftrightarrow$ ϕ injektiv (G wird durch ϕ in $\mathrm{Bij}(M)$ „eingebettet“). Damit wird also nur das neutrale Element auf das neutrale Element abgebildet. Die Wirkung jedes nicht neutralen Gruppenelements bewegt mindestens einen Punkt.
- Die Wirkung heißt frei, falls ϕ_g für $g \neq e_G$ keine Fixpunkte besitzt. Damit werden alle Punkte bewegt.
- Die WIrkung heißt (einfach) transitiv, falls für $p, q \in M$ (genau) ein $g \in G$ existiert mit $\phi_g(p) = q$.

Sind G & H Gruppen. Auf der Menge $G \times H$ existieren mehrere Gruppenstrukturen

1. Direktes Produkt:

$$G \times H = \{(g,h) | g \in G, h \in H\} \tag{1.14}$$
$$(g,h)(g',h') = (gg', hh') \tag{1.15}$$
$$(e_g, e_h) \text{ neutrales Element} \tag{1.16}$$

2. Semidirekte Produkte:

$$G \rtimes_\alpha H \quad \alpha \in \hom(H, \mathrm{Aut}(G)) \tag{1.17}$$

wobei $\mathrm{Aut}(G)$ die Gruppe der Isomorphien auf G sind. Jeder Homomorphismus $\alpha \in \hom(H, \mathrm{Aut}(G))$ definiert eine Gruppenstruktur auf der Menge $G \times H$ wie folgt:

$$(g,h)(g',h') = (g\alpha_h(g'), hh') \tag{1.18}$$

Man rechnet leicht nach: (e_G, e_H) ist neutrales Element $(g,h)^{-1} = \left(\alpha_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}\right)$. Außerdem gilt Assoziativität:

$$(g,h)\left[(g',h')(g'',h'')\right] = \left[(g,h)(g',h')\right](g'',h'') \tag{1.19}$$

Diese Gruppe heißt das semi-direkte Produkt von G auf H bezüglich α. Bezeichnung $G \rtimes_\alpha H$ (Achtung Notation nicht einheitlich). Übungsaufgaben: Inverses Element und Assoziativität.

In der Physik wichtig sind semi-direkte Produkte mit $G = V =$ Vektorraum (aufgefasst als abelsche Gruppe), $H \subset \mathrm{GL}(V)$ (invertierbare lineare Abbildungen von V auf sich selbst) und $\alpha : H \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ (= stetige Automorphismen der Gruppe V). Dann ist das semidirekte Produkt einfach:

$$(v,h)(v',h') = (v + h(v'), hh') \tag{1.20}$$
$$(v,h)^{-1} = \left(-h^{-1}(v), h^{-1}\right) \tag{1.21}$$
$$(0, e_H) \text{ neutrales Element} \tag{1.22}$$

Konkreter: $V = \mathbb{R}^n$ und $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Man kann $\mathbb{R}^n \rtimes H$, $H \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ als Untergruppe von $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ auffassen, d.h. se gibt eine Einbettung $j : \mathbb{R}^n \rtimes H \hookrightarrow \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$

$$j : (v,h) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & h \end{array}\right) \tag{1.23}$$

$$j(v,h) \cdot j(v',h') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + h(v') & h' \end{pmatrix} = j((v,h),(v',h')) \tag{1.24}$$

Lie-Gruppen als Mannigfaltigkeit (Mft)?

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}\mathbf{P}^3 \tag{1.25}$$
$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{S}^3 \tag{1.26}$$
$$\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{S}^1 \tag{1.27}$$
$$E^3 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\mathbf{P}^3 \tag{1.28}$$
$$\mathbb{R}^4 \rtimes (\mathrm{SO}(1,3)) \text{ Lorentz-Gruppe} \tag{1.29}$$

2 Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{F}$ den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 2.1. *Eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}$ mit einer Abbildung:*

$$V \times V \to V \tag{2.1}$$
$$(x, y) \mapsto [x, y] \tag{2.2}$$

genannt „Lie-Produkt“ oder „Lie-Klammer“, sodass $\forall\, x, y, z \in V$ und alle $a \in \mathbb{F}$ gilt:

1. $[x, y] = -[y, x]$ *(Antisymmetrie)*
2. $[x, y + az] = [x, y] + a[x, z]$ *(Bilnearität)*
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *(Jacobi-Identität)*

Achtung: Es gibt keine Assoziativtät! $[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$

Beispiel 2.2.

$$V = \mathbb{R}^3 \quad [\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y} \tag{2.3}$$

1) & 2) trivial, 3) folgt so:

$$\begin{aligned} &\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) \\ =&\vec{y}(\vec{x}\vec{z}) - \vec{z}(\vec{x}\vec{y}) + \vec{z}(\vec{x}\vec{y}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}) + \vec{x}(\vec{z}\vec{y}) - \vec{y}(\vec{x}\vec{z}) \\ =&0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Jede assoziative Algebra ist auch eine Lie-Algebra, z.B. Algebra der $n \times n$-Matrizen

$$[X, Y] = XY - YX \tag{2.5}$$

1) & 2) sind wieder klar. 3) folgt aus Assoziativität
Sei V ein Vektorraum und $\mathrm{End}(V)$ = *Endomorphismen von V eine assoziative Algebra unter $\circ$, d.h. für $\varphi, \varphi' \in$* $\mathrm{End}(V)$*:*

$$[\varphi, \varphi'] = \varphi \circ \varphi' - \varphi' \circ \varphi \tag{2.6}$$

Definition 2.3. *Ist L Lie-Algebra, dann ist L' eine Lie-Unteralgebra $\Leftrightarrow$ L' ist Untervektorraum und falls $[\cdot,\cdot]|_{L'}$ zu einer Lie-Algebra macht, $[L', L'] \subset L'$.*
Eine Lie-Unteralgebra $L' \subset L$ heißt Ideal, falls: $[x, y] \in L'$ $\forall\, x \in L'$ und $\forall\, y \in L$ Man schreibt dann auch $[L', L] \subset L'$. Lie-Ideale sind für Lie-Algebren, was Normalteiler (invariante Untergruppen) für Gruppen sind. Ist $L' \subset L$ ideal, dann ist L/L' wieder Lie-Algebra.

$$[[x]_{L'}, [y]_{L'}] = [[x, y]]_{L'} \tag{2.7}$$

Definition 2.4. *Seien $L = (V, [\cdot,\cdot])$ und $L' = (V', [\cdot,\cdot]')$ Lie-Algebren: Eine lineare Abb.$\varphi : V \to V'$ heißt Lie-Homomorphismus $\Leftrightarrow$ $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]'$ $\forall\, x, y \in L$.*
Wie üblich definiert $\ker(\varphi) = \{x \in L | \varphi(x) = 0\}$ *Der Kern eines Lie-Homomorphismus ist ein Ideal. Eine Lie-Algebra heißt Abelsch $\Leftrightarrow$ $[x, y] = 0\ \forall\, x, y \in L$.*
L heißt einfach $\Leftrightarrow$ $\{0\}$ und L sind die einzigen Ideale, d.h. L hat keine nicht-trivialen Ideale. Oft fordert man zusätzlich, dass $\dim(L) = \dim_{\mathbb{F}}(V) \geq 2$
L heißt halbeinfach, wenn $\dim(L) \geq 2$ *und* $\{0\}$ *das einzige abelsche Ideal ist.*

Bemerkung 2.5. *Halbeinfach spielt für die Darstellungstheorie und Anwendungen in der Physik eine große Rolle.*
Sei $\dim(L) = \dim_{\mathbb{F}} = n$

$$\{e_a | a = 1, \ldots, n\} \text{ Basis} \tag{2.8}$$

Dann existieren $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ *Koeffizienten*

$$C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba} \; mit \; [e_a, e_b] = C^c{}_{ab} e_c \tag{2.9}$$

Wegen $\sum_{(a,b,c)\in S_3} [e_a, [e_b, e_c]] = 0$

$$\Leftrightarrow C^m{}_{an} C^n{}_{bc} + C^m{}_{bn} C^n{}_{ca} + C^m{}_{cn} C^n{}_{ab} = 0 \tag{2.10}$$

Also genügen die Koeffizienten $C^c{}_{ab}$*s den Bedingungen*

1. $C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}$
2. $C^m{}_{na} C^n{}_{bc} = 0$

Umgekehrt gilt: Ein Satz von Koeffizienten $C^c{}_{ab}$ *der 1) & 2) genügt definiert eine Lie-Algebra.*
Unter Basiswechsel

$$e_a \mapsto e'_a := A^b{}_a e_b \tag{2.11}$$

ist

$$[e'_a, e'_b] = C'^c{}_{ab} e'_c \tag{2.12}$$

$$C^c{}_{ab} \mapsto C'^c{}_{ab} = \left(A^{-1}\right)^c{}_l C^l{}_{mn} A^m{}_a A^n{}_b \tag{2.13}$$

$\{C^c{}_{ab}\}$ *und* $\{C'^c{}_{ab}\}$ *definieren gleiche bzw. isomorphe Lie-Algebren.*

Definition 2.6. *Die direkte Summe zweier Lie-Algebren* $L'\left(V', [\cdot,\cdot]'\right)$, $L'' = \left(V'', [\cdot,\cdot]''\right)$ *ist gegeben durch:*

$$L = (V, [\cdot,\cdot]) \; mit \; V = V' \oplus V'' \tag{2.14}$$

$$[x' \oplus x'', y' \oplus y''] = [x', y']' \oplus [x'', y''] \tag{2.15}$$

$$\forall x', y' \in V' \; x'','' \in V'' \tag{2.16}$$

Definition 2.7. *Eine Derivation* $\varphi \in \mathrm{Der}(L)$ *der Lie-Algebra* $L = (V, [\cdot,\cdot])$ *ist ein* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *mit:*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)] \tag{2.17}$$

$\mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{End}(V)$ *ist eine Lie-Unteralgebra, denn für* $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Der}(L)$*:*

$$\begin{aligned}
[\varphi, \varphi']([x, y]) &:= (\varphi \circ \varphi' - \varphi' \circ \varphi)[x, y] \\
&= [\varphi \circ \varphi'(x), y] + [\varphi'(x), \varphi(y)] + [\varphi(x), \varphi'(y)] + [x, \varphi \circ \varphi'(y)] \\
&\quad [\varphi' \circ \varphi(x), y] + [\varphi(x), \varphi'(y)] + [\varphi'(x), \varphi(y)] + [x, \varphi' \circ \varphi(y)] \\
&= [[\varphi, \varphi'](x), y] + [x, [\varphi, \varphi'](y)]
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Es existiert ein natürlicher Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L) \tag{2.19}$$

$$x \mapsto \mathrm{ad}_x := [x, \cdot] \tag{2.20}$$

$$\mathrm{ad}_x : y \mapsto \mathrm{ad}_x(y) = [x, y] \, \mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(L) \tag{2.21}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_x([y, z]) &= [x, [y, z]] \\
&= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\
&= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L)$ ist Lie-Homomorphismus

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \tag{2.23}$$

Anwenden auf $z \in L$:

$$\begin{aligned}\left[[x,y],z\right] &= -\left[[y,z],x\right] - \left[[z,x],y\right] \\ &= \left[x[y,z]\right] - \left[y,[x,z]\right] \\ &= \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x(z)\end{aligned} \tag{2.24}$$

□

Den so definierten Lie-Homomorphismus

$$L \to \mathrm{End}(L) \quad x \mapsto \mathrm{ad}_x \tag{2.25}$$

auch die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra (auf sich selbst).
Einen Lie-Homomorphismus

$$L \to \mathrm{End}(W) \tag{2.26}$$

auf W als $\mathbb{F}$-Vektorraum nennt man eine Darstellung von L auf W

Definition 2.8. *Seien $L' = \left(V', [\cdot,\cdot]'\right)$ und $L'' = \left(V'', [\cdot,\cdot]''\right)$ Lie-Algebren und*

$$\sigma : L'' \to \mathrm{Der}\left(L'\right) \tag{2.27}$$

$$x'' \mapsto \sigma_{x''} \tag{2.28}$$

ein Lie-Homomorphismus. Dann ist:

$$L = (V, [\cdot,\cdot]) \tag{2.29}$$

$$L = L' \rtimes_\sigma L'' \tag{2.30}$$

die Semidirekte Summe von L' mit L'' definiert durch:

$$V = V' \oplus V'' \tag{2.31}$$

und

$$[x' \oplus x'', y' \oplus y''] = \left([x', y']' + \sigma_{x''}(y') - \sigma_{y''}(x')\right) \oplus [x'', y'']'' \tag{2.32}$$

Antisymmetrie, Bilinearität und Jacobi-Identität in der Übung nachgerechnet.

Definition 2.9. *Die Killing-Form einer Lie-Algebra $L = (V, [\cdot,\cdot])$ ist eine symmetrische Bilinearform*

$$K : V \times V \to \mathbb{F} \tag{2.33}$$

definiert durch

$$K(x,y) = \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\right) \tag{2.34}$$

Bezüglich einer Basis $\{e_a | a = 1, \ldots, n\}$ von L ist $[e_a, e_b] = C^c{}_{ab}$ und

$$\left(\mathrm{ad}_{e_a}\right)^c{}_b = C^c{}_{ab} \tag{2.35}$$

Damit

$$K_{ab} = K(e_a, e_b) = \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\right) = C^n{}_{am} C^m{}_{bn} \tag{2.36}$$

Proposition 2.10. $\forall\, x, y \in L$ *gilt:*

$$K([x,y],z) = K(x,[y,z]) \Leftrightarrow K([y,x],z) + K(x,[y,z]) = 0 \tag{2.37}$$

Beweis. Aus $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ folgt:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_{[x,y]} \circ \mathrm{ad}_z\right) \\ &= \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z\right) \\ &= \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_y\right) \\ &= \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{[y,z]}\right)\end{aligned} \tag{2.38}$$

□

Der Nullraum von K ist definiert durch

$$N(L) := \{x \in L \big| K(x,y) = 0 \; \forall \, y \in L\} \tag{2.39}$$

Ist $x \in N(L)$, dann folgt aus

$$K([x,y],z) = K(x,[y,z]) = 0 \; \forall \, y,z \tag{2.40}$$

$N(L)$ ist ein Ideal. Das kann verallgemeinert werden zu:

Korollar 2.11. *Sei $I \subset L$ ein Ideal dann ist auch $I^\perp$ ein Ideal:*

$$I^\perp = \{x \in L \big| K(x,y) = 0 \; \forall \, y \in I\} \tag{2.41}$$

Beweis.

$$K([I^\perp, L], I) = K(I^\perp, [L,I]) = K(I^\perp, I) = 0 \tag{2.42}$$

Damit folgt $[I^\perp, L] \subset I^\perp$ □

Proposition 2.12. *Ist $I \subset L$ ein Ideal, dann ist*

$$K_I = K|_I, \tag{2.43}$$

d.h. die Killingform von I ist gleich der Einschränkung der Killingform von L auf I

Beweis. Ist $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Bild}(\varphi) \subset W \subset V$, dann gilt

$$\mathrm{Spur}(\varphi) = \mathrm{Spur}(\varphi|_W) \tag{2.44}$$

Angewandt auf $\varphi = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \in \mathrm{End}(V)$ mit $x, y \in I$, dann ist $\mathrm{Bild}(\varphi) \subset I \subset L$.s □

Satz 2.13 (Cartan)**.** *L ist genau dann halbeinfach, wenn K nicht ausgeartet ist, d.h. $N(L) = \{0\}$*

Beweis. Ist $I \subset L$ ein abelsches Ideal $\neq \{0\}$ und $0 \neq x \in I$, $y \in L$, dann

$$K(x,y) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x|_I, \mathrm{ad}_y|_I) = 0 \tag{2.45}$$

Da $\mathrm{ad}_x|_I = 0$ falls I abelsch (und Bild $\subset I$). Andere Richtung als Übung. □

Zerlegung von halbeinfachen Lie-Algebren in die direkte Summe von einfachen Lie-Algebren. Sei L halbeinfache Lie-Algebra und $I \subset L$ Ideal

$$K([I^\perp, I], L) = K(I^\perp, [I, L]) = K(I^\perp, I) = 0 \tag{2.46}$$

Dann $[I^\perp, I] = N(L) = \{0\}$ und damit $I^\perp \cap I = \{0\}$, also $L = I \oplus I^\perp$. Enthält I weitere Ideale kann die Zerlegung analog weiter geführt werden, bis keine weiteren Ideale mehr existieren:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i \tag{2.47}$$

Proposition 2.14. *L halbeinfach, dann*

$$[L,L] = \mathrm{Span}\{[x,y] \big| x, y \in L\} \tag{2.48}$$

Definition 2.15. *Eine Lie-Algebra für die $[L,L] = L$ gilt, heißt perfekt*

Definition 2.16. *Eine Lie-Algebra heißt kompakt, falls K negativ definit ist. Achtung: Das Wort „Kompakt" bezieht sich auf die zur Lie-Algebra zugehörigwn Lie-Gruppen. EIne Lie-Algebra als topologischer Raum ist natürlich nie kompakt.*

Beispiel 2.17. $L = (\mathbb{R}^3, \times)$, $\vec{e}_a \times \vec{e}_b = \epsilon_{ab}{}^c \vec{e}_c$, $C^c{}_{ab} = \epsilon_{ab}{}^c$

$$K_{ab} = C^n{}_{am} C^m{}_{bn} = \epsilon_{am}{}^n \epsilon_{bn}{}^m = -2\delta_{ab} \tag{2.49}$$

2.1 Matrix Lie-Gruppen

„Matrix“ heißt: Jede der betrachteten Gruppen besitzt eine treue endliche Darstellung (sog. „definierende Darstellung“). Achtung: Es existieren endlich dim. Lie-Gruppen die keine Matrixgruppen sind, z.B. alle Überlagerungsgruppen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Beispiel 2.18.

$$\mathrm{GL}\left(\mathbb{F}^n\right) := \left\{x \in \mathrm{End}\left(\mathbb{F}^n\right) \middle| \det(x) \neq 0\right\} \tag{2.50}$$

$$\mathrm{SL}\left(\mathbb{F}^n\right) := \left\{x \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{F}^n\right) \middle| \det(x) = 1\right\} \tag{2.51}$$

$$\mathrm{O}\left(p, q_-\right) := \left\{x \in \mathrm{End}\left(\mathbb{F}^n\right) \middle| xE^{(p,q)}x^T = E^{(p,q)}\right\} \tag{2.52}$$

$$\mathrm{SO}\left(p, q_-\right) := \left\{x \in \mathrm{O}\left(p, q_-\right) \middle| \det(x) = 1\right\} \tag{2.53}$$

$$\mathrm{U}\left(p, q_-\right) := \left\{x \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}^n\right) \middle| xE^{(p,q)}X^T = E^{(p,q)}\right\} \tag{2.54}$$

$$\mathrm{SU}\left(p, q_-\right) := \left\{x \in \mathrm{U}\left(p, q_-\right) \middle| \det(x) = 1\right\} \tag{2.55}$$

$$\mathrm{SO}(1,3) = \mathit{Lorentzgruppe} \cup \{-\mathbb{1}_4\} \tag{2.56}$$

wobei

$$E^{(p,q)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q \end{array}\right) \tag{2.57}$$

Ebenfalls Matrix-Gruppen sind solche, die aus semi-direkten Produkten mit $\mathbb{F}^n$ entstehbar.
Sei $G \subset \mathrm{End}(V)$ $(V \cong \mathbb{F}^n)$ eine Gruppe & $A : \mathbb{R} \supset (-\epsilon, \epsilon) \to G$ differenzierbare Kurve mit $A(0) = \mathrm{id}$. Wir definieren $\dot{A} := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} A(s)$ = Tangentialvektor an der Gruppenidentität.

Satz 2.19. *Die Menge der Tangentialvektoren an die Gruppenidentität bilden eine* <u>*reelle*</u> *Lie-Algebra,* $\mathrm{Lie}(G)$.

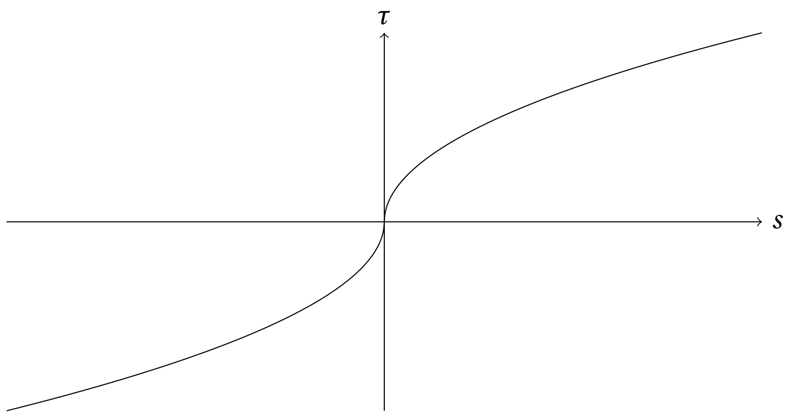
Beweis.

1. Linearität: Ist $X = \dot{A}$ und $Y = \dot{B}$, definiere $C(s) = A(s)B(s)$, dann $\dot{C} = \dot{A} + \dot{B} = X + Y$. Ebenso: Ist $X = \dot{A}$, definiere $B(s) = A(as)$ $\dot{B} = aX$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Geschwindigkeit bei $e \in G$ bildet Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2. Abgeschlossenheit unter Kommutatorbildung: Sei $X = \dot{A}$ & $Y = \dot{B}$. Wir müssen zeigen, dass eine Kurve $C(s)$ existiert mit $C(0) = e$ und $\dot{C} = [X, Y] = XY - YX$. Definiere also

$$C(s) = \begin{cases} A(\tau(s))\,B(\tau(s))\,A^{-1}(\tau(s))\,B^{-1}(\tau(s)) & s \geq 0 \\ B(\tau(s))\,A(\tau(s))\,B^{-1}(\tau(s))\,A^{-1}(\tau(s)) & s \leq 0 \end{cases} \tag{2.58}$$

wobei $\tau(s) = \mathrm{sign}(s)\sqrt{s}$ und invers $s(\tau) = \mathrm{sign}(\tau)\,\tau^2$



Obwohl keine der Kurven $s \mapsto A(\tau(s))$ etc. selber differenzierbar ist (weil $\tau(s)$ nicht differenzierbar ist), ist dennoch die Kurve $s \mapsto C(s)$ bei $s = 0$ differenzierbar. Für $s \searrow 0$ (Rechtsableitung) gilt:

$$\begin{aligned} \dot{C}_R = \lim_{s \searrow 0}\left\{\frac{C(s) - e}{s}\right\} &= \lim_{s \searrow 0}\left\{\frac{[A(\tau(s)), B(\tau(s))]\,A^{-1}(\tau(s))\,B^{-1}(\tau(s))}{s}\right\} \\ &= \lim_{\tau \searrow 0}\left\{\left[\frac{A(\tau) - e}{\tau}, \frac{B(\tau) - e}{\tau}\right] A^{-1}(\tau)\,B^{-1}(\tau)\right\} \\ &= [X, Y] \end{aligned} \tag{2.59}$$

$\dot{C}_L$ analog.

$\square$

Da die Lie-Struktur durch die von $\mathrm{End}(V)$ induziert wird, gilt automatisch die Jacobi-Identität. Ist $D \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}(W))$ eine lineare Darstellung von G auf den Vektorraum W, dann induziert diese eindeutig eine Darstellung

$$D_* \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{End}(W)) \tag{2.60}$$

Beweis. Das sieht man so: Sei $A(s)$ Kurve in G mit $A(0) = e$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(s) = X$. Dann ist $A'(s) = (D \circ A)(s) = D(A(s))$ eine Kurve in $\mathrm{GL}(W)$ mit $A'(0) = e|_{\mathrm{GL}(W)}$. Wir sehen voraus, dass D differenzierbar ist.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A'(s) = D_*(X). \tag{2.61}$$

Dabei ist D_* die Ableitung der Abb.D bei $e \in G$. Wir müssen zeigen:

$$D_*([X,Y]) = [D_*(X), D_*(Y)] \tag{2.62}$$

Wir zuvor betrachten wir Kurven in G; $A(s)$ $B(s)$ mit $\dot{A} = X$ $\dot{B} = Y$ und $C(s)$ def. wie oben und deren Bilder unter D in $\mathrm{GL}(W)$ (A', B', C'). Für $s \geq 0$ ist dann:

$$C'(s) = D(C(s)) \tag{2.63}$$

Abgeleitet ergibt einerseits

$$\dot{C}' = D_* \dot{C} = D_*([X,Y]) \tag{2.64}$$

andererseits, weil D Homomorphismus

$$C' = D(A(\tau(s)))\, D(B(\tau(s)))\, [D(A(\tau(s)))]^{-1} [D(A(\tau(s)))]^{-1} \tag{2.65}$$

folgt nach identischer Rechnung $\dot{C}' = [D_* X, D_* Y]$ $\square$

Adjungierte Darstellung

$$\mathrm{Ad} \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))) \tag{2.66}$$

$$G \ni A \mapsto \mathrm{Ad}_A : x \mapsto \mathrm{Ad}_A(x) \tag{2.67}$$

Sei $B(s)$ Kurve in G mit $B(0) = e$ und $\dot{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} B(s) = Y$, dann

$$\mathrm{Ad}_A(Y) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} AB(s)A^{-1} = AYA^{-1} \tag{2.68}$$

Achtung: Da $Y \in \mathrm{End}(V)$ i. A. nicht in $\mathrm{GL}(V)$ liegt, ist hier mit „·“ das Produkt in der assoziativen Algebra $\mathrm{End}(V)$ gemeint (Komposition). Ist nun $A = A(t)$ selbst eine Kurve mit $A(0) = e$ und $\dot{A} = X$, dann folgt mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} A(t) = -X \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{A(t)}(Y) &= \mathrm{Ad}_*(X)(Y) \\ &= [X,Y] = \mathrm{ad}_X(Y) \end{aligned} \tag{2.70}$$

Damit $\mathrm{Ad}_* = \mathrm{ad}$

2.2 Die Exponentialabbildung

Sei $\exp : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ def. durch

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \qquad X^n = X \circ \cdots \circ X \tag{2.71}$$

Ist $X \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in \mathrm{GL}(V)$ und sei $\mathrm{Ad}_A : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ die Abb.

$$\mathrm{Ad}_A(X) = A \circ X \circ A^{-1} \qquad \mathrm{Ad}_A\left(X^n\right) = [\mathrm{Ad}_A(X)]^n \tag{2.72}$$

Damit erhält man $\mathrm{Ad}_A \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_A$

Proposition 2.20. $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Spur}$

Beweis. einfach über $\mathbb{C}$ (nötigenfalls Komplexifizierung $V \otimes \mathbb{C}$), dann existiert eine Basis $\left\{e_a \middle| a = 1, \dots, n\right\}$ aus Eigenvektoren von $X \in \mathrm{End}\left(V^{\mathbb{C}}\right)$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \exp(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_1} \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} \det\left(\exp(X)\right) &= \exp\left(\sum_n \lambda_n\right) \\ &= \exp\left(\mathrm{Spur}(X)\right) \end{aligned} \tag{2.74}$$

□

Korollar 2.21.

$$\exp(\mathrm{End}(V)) \subseteq \mathrm{GL}^+(V) = \{x \in \mathrm{GL}(V) | \det(X) > 0\} \tag{2.75}$$

Beweis. Ist $X : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{End}(V)$ mit $X(0) = 0$ und $\dot{X} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} X(s)$, dann $A(s) := \exp(X(s))$ mit $A(0) = e$

$$\dot{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \exp(X(t)) = \exp_*\left(\dot{X}\right) = \dot{X}\ \forall\, X \tag{2.76}$$

Nach dem Satz über Umkehrfunktionen bildet exp eine offene Umgebung U von $O \in \mathrm{End}(V)$ in eine offene Umgebung U' von $e \in \mathrm{GL}(V)$ ab, und zwar bijektiv und in beide Richtungen diff'bar . exp ist also lokal ein Diffeomorphismus. Global kann dagegen sowohl die Injektivität, als auch die Surjektivität nicht erfüllt sein. □

Beispiel 2.22. *Exponentialabbildungen*

1. $G = \mathrm{U}(1) = \left\{e^{i\lambda} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ *und* $\mathrm{Lie}(G) = \{i\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$. *Kurven in G sind z.B.* $A(s) = e^{i\lambda(s)}$ *mit* $\lambda(0) = 0$, $\dot{A}(0) = i\lambda \in i\mathbb{R}$ *aber* $\exp(i\lambda) = \exp\left(i\lambda'\right) \Leftrightarrow \lambda - \lambda' = 2\pi n$, *also ist* exp *surjektiv, aber nicht injektiv.*

2. $G = \mathrm{SO}(3) = \mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{A \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^3\right) \middle| A^T = A^{-1}\right\}$ *und* $\mathrm{Lie}(G) = \left\{x \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^3\right) \middle| X + X^T = 0\right\}$. exp *-Funktion ist auch hier nicht injektiv. Auch hier gilt Surjektivität (Übung).*
   Das sind aber Spezialfälle. i. A. nicht surjektiv.

3. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *Behauptung: Kein Element der Form*

$$D_n = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \tag{2.77}$$

   liegt im Bild von exp

Beweis. Clevere Beobachtung: Ist $A \in G$ in Bild $(\exp)$, dann ex. $H \in G$ mit $H^2 = A$; $A = \exp x$, $H = \exp \frac{1}{2} x$. Es reicht also zu zeigen, dass D_n keine Wurzel hat, d.h. $D_n \neq H^2$

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad H^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

$$b(a+d) = c(a+d) = 0 \tag{2.79}$$

$$a^2 + bc = -n \tag{2.80}$$

$$d^2 + bc = -\frac{1}{n} \tag{2.81}$$

1. Fall: $(a+d) \neq 0$, $b = c = 0$, also $a^2 = -n$
2. Fall: $(a+d) = 0$, also $n^2 = 1$

□

Beachte, dass D_n in der Komponente der Gruppeneinheit liegt, d.h. es gibt eine stetige Kurve $A(s)$, die e mit D_n verbindet

$$A(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) & \sin(2\pi s) \\ -\sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) \end{pmatrix} & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \begin{pmatrix} \varphi(s) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varphi(s)} \end{pmatrix} & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{2.82}$$

mit $\varphi(s) = 2(1-n)s + (n-2)$ sodass $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ und $\varphi(1) = -n$
Obwohl $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ i. A. nicht surjektiv ist (auch dann nicht, wenn G zusammenhängend ist) wird doch ganz G (zusammenhängend) von $\mathrm{Lie}(G)$ im folgenden Sinne „erzeugt“ :

Proposition 2.23. *Ist G zusammenhängende Lie-Gruppe und $A \in G$. Dann ex. endlich viele $X_1, \dots, X_n \in \mathrm{Lie}(G)$, dass*

$$A = \exp(X_1) \cdot \dots \cdot \exp(X_n) \tag{2.83}$$

Zum Beweis benötigen wir folgendes

Lemma 2.24. *Sei G zusammenhängende topologische Grupep und $V \subset G$ offene Umgebung der Identität $e \in G$. Sei $A \in G$, dann ex. endlich viele $g_1, \dots, g_n \in V$, $A = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$*

Beweis. Wir betrachten die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus V, also

$$G' = \{g \in G \mid \exists g_1, \dots, g_n \in V, n < \infty, g = g_1 \cdot \dots \cdot g_n\} \tag{2.84}$$

G' ist offen und eine Untergruppe. Es ist $V \subset G'$, also $gV = \{gg' \mid g' \in V\}$ offene Umgebung von g denn die Linksoperation $L_g : G \to G \quad h \mapsto gh$ hat stetige Inverse $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$, somit offene Abbildungen. In einer topologischen Gruppe ist eine offene Untergruppe auch abgeschlossen, da sie das Komplement der Vereinigung aller von G' verschiedenen Nebenklassen gG' ist, die alle offen sind. $G' \subset G$ ist also offen und abgeschlossen. Da G' nichtleer und G zusammenhängend ist, folgt $G' = G$ □

Satz 2.25. *Jedes Element in der Komponente der Einheit einer Lie-Gruppe ist das endliche Produkt von Bildern der Exponentialfunktion.*

Sei G Lie-Gruppe & $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Wir betrachten die Kurve

$$\begin{aligned} A(S) &= \exp(sX) \\ \dot{A} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} A(s) = X \end{aligned} \tag{2.85}$$

Für $A \in \mathrm{Hom}((\mathbb{R}, +), G)$

$$\begin{aligned} A(s_1) A(s_2) &= \exp(s_1 X) \exp(s_2 X) \\ &= \exp((s_1 + s_2) X) \\ &= A(s_1 + s_2) \end{aligned} \tag{2.86}$$

Proposition 2.26. *Jeder differenzierbare Homomorphismus* $A : (\mathbb{R}, +) \to G$ *ist von der Form* $A(s) = A\exp(sx)$ *für ein* $x \in \operatorname{Lie}(G)$

Beweis. Sei A diff'bar Homomorphismus mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} = X$

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A\left(s+s'\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(s)\,A\left(s'\right)\\ \dot{A}(s) = A(s)\,X\end{gathered} \tag{2.87}$$

Betrachte Kurve $C(s) = A(s)\exp(-sX)$. Dann ist wegen

$$\dot{C}(s) = A(s)\,x\exp(-sx) - A(s)\,x\exp(-sx) = 0 \tag{2.88}$$

$C(s) = \mathrm{id}|_G = e$ konstant, also $A(s) = \exp(-sx)$ □

Seien G & G' Lie-Gruppen und $\Phi : G \to G'$ eine differenzierbarer Homomorphismus. Dann ist $A(s) = \phi\left(\exp(sx)\right) \in \operatorname{Hom}\left((\mathbb{R},+), G'\right)$ mit

$$\dot{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(s) = \dot{\phi}(x) = \phi_*\big|_e(x) \tag{2.89}$$

Aus Proposition folgt:

$$\phi\left(\exp(tx)\right) = \exp\left(t\dot{\phi}(x)\right) \tag{2.90}$$

Korollar 2.27. *Sei* $\phi : G \to G'$ *diff'bar Homomorphismus, dann gilt:*

$$\phi \circ \exp = \exp \circ \phi \tag{2.91}$$

Beachte: $\phi \in \operatorname{Hom}\left(G, G'\right)$

$$\dot{\phi} = \operatorname{Hom}\left(\operatorname{Lie}(G), \operatorname{Lie}\left(G'\right)\right) \tag{2.92}$$

Letzteres folgte bereits am z.B. der Darstellung (gezeigt): Sind $A(s)$, $B(s)$ *Kurven in G mit* $\dot{A} = X$ & $\dot{B} = Y$, *sowie* $C(s)$ *mit* $\dot{C} = [X, Y]$. *Dann sind* $A'(s) := \phi(A(s))$, $B'(s) := \phi(B(s))$ *und* $C'(s) = \phi(C(s))$ *Kurven in* G' *mit*

$$\dot{A}' = \dot{\phi}(X) \quad \dot{B}' = \dot{\phi}(Y) \quad \dot{C}' = \dot{\phi}([X, Y]) \tag{2.93}$$

Ausder Homomorphie von ϕ *und der Form von C (Produkt* $ABA^{-1}B^{-1}$*) folgt* $\dot{C}' = \left[\dot{\phi}(X), \dot{\phi}(Y)\right]$. *Da X, Y beliebig ist* $\dot{\phi} \in \operatorname{Hom}\left(\operatorname{Lie}(G), \operatorname{Lie}\left(G'\right)\right)$

Die Frage ist nun, inwieweit auch die Umkehrung gilt, also inwieweit ein Lie-Algebren-Homomorphismus der zugehörigen Lie-Gruppe induziert. Seien also $\operatorname{Lie}(G)$ & $\operatorname{Lie}\left(G'\right)$ die Lie-Algebren der Lie-Gruppen G bzw. G' und:

$$\varphi : \operatorname{Lie}(G) \to \operatorname{Lie}\left(G'\right) \tag{2.94}$$

ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Frage: Existiert $\phi \in \operatorname{Hom}\left(G, G'\right)$ mit $\dot{\phi} = \varphi$ Eindeutigkeit: Seien ϕ_1 & ϕ_2 zwei Homomorphismen $G \to G'$ mit

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \varphi \tag{2.95}$$

Dann folgt wegen

$$\phi_{1,2} \circ \exp = \exp \circ \dot{\phi}_{1,2} = \exp \circ \varphi \tag{2.96}$$

dass ϕ_1 undϕ_2 auf Elementen der From $\exp(x_1)\ldots\exp(x_n)$ übereinstimmen, d.h. auf der Komponente der Einheit. Also: Ist G zusammenhängend dann ist ϕ mit $\dot{\phi} = \varphi$ eindeutig bestimmt, sofern es existiert. Beachte: Ob G' zusammenhängend ist, interessiert nicht. Ist G hingegen nicht zusammenhängend, dann kann es mehrere Homomorphismen geben mit $\dot{\phi} = \varphi$

Beispiel 2.28.

$$\begin{aligned} G = G' = \mathrm{O}(3) &= \left\{A \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^3\right) \middle| AA^T = \mathrm{id}|_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ \mathrm{O}(3) &= \mathrm{SO}(3) \cup \mathrm{PSO}(3) \\ \mathrm{SO}(3) &= \{A \in \mathrm{O}(3) | \det(A) = +1\} \\ \mathrm{PSO}(3) &= \{A \in \mathrm{O}(3) | \det(A) = -1\} \end{aligned} \tag{2.97}$$

Sei $f : \mathrm{Lie}(\mathrm{O}(3)) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{O}(3))$ *und sei* $\phi : \mathrm{O}(3) \to \mathrm{O}(3)$ *Homomorphismus mit* $\dot{\phi} = f$*, dann ist* $\phi' = \det \cdot \phi$

$$\phi'(A) = \det(A)\,\phi(A) \tag{2.98}$$

Dann ist $\phi' \neq \phi$ *aber* $\dot{\phi}' = \dot{\phi} = f$

Proposition 2.29. *Seien* $G \neq G'$ *Lie-Gruppen, wobei* G *zusammenhängend ist. Sei* $f : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}\left(G'\right)$ *Lie-Homomorphismus. Dann gibt es höchstens einen differenzierbaren Gruppen-Homomoprhismus* $\phi : G \to G'$ *mit* $\dot{\phi} = f$*. Ein solches* ϕ *existiert genau dann, falls* G *einfach zusammenhängend ist, d.h.* $\Pi_1(G) = \{1\}$ *die Fundamentalgruppe ist trivial. Beweis: algebraische Topologie*

Bemerkung 2.30. *Für allgemeine topologische Räume muss* Π_1 *nicht unbedingt abelsch sein. Für topologische Gruppen ist* Π_1 *aber immer abelsch.*

$$\begin{aligned} \Pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) &= \mathbb{Z} \\ \Pi_1\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \Pi_1(8) &= \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.99}$$

Zu jeder zusammenhängenden Lie-Gruppe existiert eine eindeutige zusammenhängende <u>und</u> einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\bar{G}$ mit