# 1 Grundprinzipien relativistischer Beschreibung

- Raum & Zeit als Grundstruktur, also Punktmenge mit geometrischen Strukturen sei gegeben
- Automorphismengruppe der Raumzeit (z.B. Galilei-Gruppe, Poincaré-Gruppe)
- Automorphismengruppe als Symmetrie dynamischer Gesetze, Bewegungsgleichungen für „Teilchen“ & „Felder“
  - Teilchen: Abb.$\gamma : \mathbb{R} \to M$ (Raumzeit)
  - Felder: Abb.$F : M \to V$ (Vektorraum)

  Aktion der Automorphismengruppe (der Raumzeit) auf dynamischen Größen „Teilchen“ & „Felder“

**Definition 1.1.** *Aktion Aktion einer Gruppe $G$ auf Menge $M$ ist ein Homomorphismus*

$$\Phi : G \to \mathrm{Bij}\,(M) \tag{1}$$
$$g \mapsto \phi_g \tag{2}$$
$$\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2} = \phi_{g_1 \circ g_2} \tag{3}$$
$$\phi_{e_G} = \mathrm{id}_M \tag{4}$$

Allgemeine Form von Bewegungsgleichungen:

$$B\,[\Sigma; \gamma, F] = 0 \tag{5}$$

Mit $F$ einem Feld und $\gamma$ der Bahnkurve in der Raumzeit der Teilchen. Gelöst wird nach $(\gamma, F)$ bei gegebenem $\Sigma$ (Hintergrundstrukturen). Sei $T$ eine Aktion der Gruppe $G$ auf den dynamischen Größen $(\gamma, F)$

$$g \mapsto T_g : (\gamma, F) \mapsto (T_g\gamma, T_gF) \tag{6}$$

Dann heißt $G$ Symmetriegruppe der Bewegungsgleichung (BWG) wenn

$$B\,[\Sigma; T_g\gamma, T_gF] = 0 \;\Leftrightarrow\; B\,[\Sigma; \gamma, F] = 0 \;\forall\, g \in G \tag{7}$$

d.h. die mit $g$ transformierten dynamischen Größen erfüllen wieder dieselbe BWG.
Unterschied Symmetrie zu Kovarianz: Bei Symmetrie dürfen nur die dynamischen Größen transformiert werden, bei Kovarianz aber alle. Kovarianz:

$$B\,[T_g\Sigma; T_g\gamma, T_gF] = 0 \;\Leftrightarrow\; B\,[\Sigma; \gamma, F] = 0 \tag{8}$$

Bei $T_g\Sigma$ werden auch die Hintergrundstrukturen transformiert. Kovarianz ist eine „relativ“ triviale (leicht zu erfüllende) Forderung, im Gegensatz zu Symmetrie.

**Beispiel 1.1.** *Diffusionsgleichung*

$$\partial_t\phi = k\,\triangle\phi \tag{9}$$

*Sei $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , so dass $n^\mu\partial_\mu = \partial_t$*

$$n^\mu\partial_\mu\phi = k\,(n^\mu n^\nu - \eta^{\mu\nu})\,\partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{10}$$

*wobei $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ und $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ die Minkowski-Metrik sind. In $B\,[\Sigma; \gamma, F]$ kommen $\eta$, $n$ aus den Strukturen, also $\Sigma$, $\phi$ ist ein Feld $F$. Würde man $n$ & $\eta$ mittransformieren, so wäre die Diffusionsgleichung Poincarékovariant. Aber natürlich ist die Poincaré-Gruppe keine Symmetrie-Gruppe dieser BWG. Achtung: Terminologie nicht eindeutig.*

Ist $G$ eine Gruppe und

$$\phi : G \to \mathrm{Bij}\,(M) \tag{11}$$
$$g \mapsto \phi_g \tag{12}$$

ein Homomorphismus, dann heißt

$$(\phi, G, M) \tag{13}$$

(verallgemeinerte) Darstellung, oder auch „Wirkung“ von $G$ auf $M$.

- Die Darstellung heißt <u>treu</u> bzw. effektive (Wirkung) $\Leftrightarrow$ $\phi$ injektiv ($G$ wird durch $\phi$ in $\text{Bij}(M)$ „eingebettet“ ). Damit wird also nur das neutrale Element auf das neutrale Element abgebildet. Die Wirkung jedes nicht neutralen Gruppenelements bewegt mindestens einen Punkt.

- Die Wirkung heißt <u>frei</u>, falls $\phi_g$ für $g \neq e_G$ keine Fixpunkte besitzt. Damit werden alle Punkte bewegt.

- Die WIrkung heißt (einfach) transitiv, falls für $p, q \in M$ (genau) ein $g \in G$ existiert mit $\phi_g(p) = q$.

Sind $G$ & $H$ Gruppen. Auf der Menge $G \times H$ existieren mehrere Gruppenstrukturen

1. Direktes Produkt:

$$G \times H = \{(g,h) | g \in G, h \in H\} \tag{14}$$
$$(g,h)(g',h') = (gg', hh') \tag{15}$$
$$(e_g, e_h) \text{ neutrales Element} \tag{16}$$

2. Semidirekte Produkte:

$$G \rtimes_\alpha H \quad \alpha \in \text{hom}(H, \text{Aut}(G)) \tag{17}$$

wobei $\text{Aut}(G)$ die Gruppe der Isomorphien auf $G$ sind. Jeder Homomorphismus $\alpha \in \text{hom}(H, \text{Aut}(G))$ definiert eine Gruppenstruktur auf der Menge $G \times H$ wie folgt:

$$(g,h)(g',h') = (g\alpha_h(g'), hh') \tag{18}$$

Man rechnet leicht nach: $(e_G, e_H)$ ist neutrales Element $(g,h)^{-1} = \left(\alpha_{h^{-1}}\left(g^{-1}\right), h^{-1}\right)$. Außerdem gilt Assoziativität:

$$(g,h)\left[(g',h')(g'',h'')\right] = \left[(g,h)(g',h')\right](g'',h'') \tag{19}$$

Diese Gruppe heißt das semi-direkte Produkt von $G$ auf $H$ bezüglich $\alpha$. Bezeichnung $G \rtimes_\alpha H$ (Achtung Notation nicht einheitlich). Übungsaufgaben: Inverses Element und Assoziativität.

In der Physik wichtig sind semi-direkte Produkte mit $G = V =$ Vektorraum (aufgefasst als abelsche Gruppe), $H \subset \text{GL}(V)$ (invertierbare lineare Abbildungen von $V$ auf sich selbst) und $\alpha : H \hookrightarrow \text{GL}(V)$ (= stetige Automorphismen der Gruppe $V$). Dann ist das semidirekte Produkt einfach:

$$(v,h)(v',h') = (v + h(v'), hh') \tag{20}$$
$$(v,h)^{-1} = \left(-h^{-1}(v), h^{-1}\right) \tag{21}$$
$$(0, e_H) \text{ neutrales Element} \tag{22}$$

Konkreter: $V = \mathbb{R}^n$ und $H \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Man kann $\mathbb{R}^n \rtimes H$, $H \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ als Untergruppe von $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$ auffassen, d.h. se gibt eine Einbettung $j : \mathbb{R}^n \rtimes H \hookrightarrow \text{GL}(n+1, \mathbb{R})$

$$j : (v,h) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & h \end{array}\right) \tag{23}$$

$$j(v,h) \cdot j(v',h') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + h(v') & h' \end{pmatrix} = j((v,h), (v',h')) \tag{24}$$

Lie-Gruppen als Mannigfaltigkeit (Mft)?

$$\text{SO}(3) \cong \mathbb{R}\mathbf{P}^3 \tag{25}$$
$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{S}^3 \tag{26}$$
$$\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{S}^1 \tag{27}$$
$$E^3 = \mathbb{R}^3 \rtimes \text{SO}(2) \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\mathbf{P}^3 \tag{28}$$
$$\mathbb{R}^4 \rtimes (\text{SO}(1,3)) \text{ Lorentz-Gruppe} \tag{29}$$

## 2 Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{F}$ den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

**Definition 2.1.** *Eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}$ mit einer Abbildung:*

$$V \times V \to V \tag{30}$$
$$(x, y) \mapsto [x, y] \tag{31}$$

*genannt „Lie-Produkt“ oder „Lie-Klammer“ , sodass $\forall x, y, z \in V$ und alle $a \in \mathbb{F}$ gilt:*

1. $[x, y] = -[y, x]$ *(Antisymmetrie)*
2. $[x, y + az] = [x, y] + a[x, z]$ *(Bilnearität)*
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *(Jacobi-Identität)*

*Achtung: Es gibt keine Assoziativtät!* $[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$

**Beispiel 2.1.**

$$V = \mathbb{R}^3 \quad [\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y} \tag{32}$$

*1) & 2) trivial, 3) folgt so:*

$$\begin{aligned} &\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) \\ =&\vec{y}(\vec{x}\vec{z}) - \vec{z}(\vec{x}\vec{y}) + \vec{z}(\vec{x}\vec{y}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}) + \vec{x}(\vec{z}\vec{y}) - \vec{y}(\vec{x}\vec{z}) \\ =&0 \end{aligned} \tag{33}$$

*Jede assoziative Algebra ist auch eine Lie-Algebra, z.B. Algebra der $n \times n$-Matrizen*

$$[X, Y] = XY - YX \tag{34}$$

*1) & 2) sind wieder klar. 3) folgt aus Assoziativität*
*Sei $V$ ein Vektorraum und* $\mathrm{End}(V)$ = *Endomorphismen von $V$ eine assoziative Algebra unter $\circ$, d.h. für $\varphi, \varphi' \in \mathrm{End}(V)$:*

$$\left[\varphi, \varphi'\right] = \varphi \circ \varphi' - \varphi' \circ \varphi \tag{35}$$

**Definition 2.2.** *Ist $L$ Lie-Algebra, dann ist $L'$ eine Lie-Unteralgebra $\Leftrightarrow$ $L'$ ist Untervektorraum und falls $[\cdot, \cdot]|_{L'}$ zu einer Lie-Algebra macht, $[L', L'] \subset L'$.*
*Eine Lie-Unteralgebra $L' \subset L$ heißt Ideal, falls: $[x, y] \in L' \; \forall x \in L'$ und $\forall y \in L$ Man schreibt dann auch $[L', L] \subset L'$. Lie-Ideale sind für Lie-Algebren, was Normalteiler (invariante Untergruppen) für Gruppen sind. Ist $L' \subset L$ ideal, dann ist $L/L'$ wieder Lie-Algebra.*

$$[[x]_{L'}, [y]_{L'}] = [[x, y]]_{L'} \tag{36}$$

**Definition 2.3.** *Seien $L = (V, [\cdot, \cdot])$ und $L' = \left(V', [\cdot, \cdot]'\right)$ Lie-Algebren: Eine lineare Abb.$\varphi : V \to V'$ heißt Lie-Homomorphismus $\Leftrightarrow$ $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]' \; \forall x, y \in L$.*
*Wie üblich definiert* $\ker(\varphi) = \{x \in L | \varphi(x) = 0\}$ *Der Kern eines Lie-Homomorphismus ist ein Ideal. Eine Lie-Algebra heißt Abelsch $\Leftrightarrow$ $[x, y] = 0 \; \forall x, y \in L$.*
*$L$ heißt einfach $\Leftrightarrow$ $\{0\}$ und $L$ sind die einzigen Ideale, d.h. $L$ hat keine nicht-trivialen Ideale. Oft fordert man zusätzlich, dass* $\dim(L) = \dim_{\mathbb{F}}(V) \geq 2$
*$L$ heißt halbeinfach, wenn* $\dim(L) \geq 2$ *und $\{0\}$ das einzige abelsche Ideal ist.*

**Bemerkung 1.** *Halbeinfach spielt für die Darstellungstheorie und Anwendungen in der Physik eine große Rolle.*
*Sei* $\dim(L) = \dim_{\mathbb{F}} = n$

$$\{e_a | a = 1, \ldots, n\} \;\; Basis \tag{37}$$

*Dann existieren* $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ *Koeffizienten*

$$C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba} \textit{ mit } [e_a, e_b] = C^c{}_{ab}e_c \tag{38}$$

*Wegen* $\sum_{(a,b,c)\in S_3} [e_a, [e_b, e_c]] = 0$

$$\Leftrightarrow\ C^m{}_{an}C^n{}_{bc} + C^m{}_{bn}C^n{}_{ca} + C^m{}_{cn}C^n{}_{ab} = 0 \tag{39}$$

*Also genügen die Koeffizienten* $C^c{}_{ab}s$ *den Bedingungen*

1. $C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}$
2. $C^m{}_{na}C^n{}_{bc} = 0$

*Umgekehrt gilt: Ein Satz von Koeffizienten* $C^c{}_{ab}$ *der 1) & 2) genügt definiert eine Lie-Algebra.*
*Unter Basiswechsel*

$$e_a \mapsto e'{}_a := A^b{}_a e_b \tag{40}$$

*ist*

$$\left[e'{}_a, e'{}_b\right] = C'^c{}_{ab}e'{}_c \tag{41}$$

$$C^c{}_{ab} \mapsto C'^c{}_{ab} = \left(A^{-1}\right)^c{}_l C^l{}_{mn}A^m{}_a A^n{}_b \tag{42}$$

$\left\{C^c{}_{ab}\right\}$ *und* $\left\{C'^c{}_{ab}\right\}$ *definieren gleiche bzw. isomorphe Lie-Algebren.*

**Definition 2.4.** *Die direkte Summe zweier Lie-Algebren* $L'\left(V', [\cdot,\cdot]'\right)$, $L'' = \left(V'', [\cdot,\cdot]''\right)$ *ist gegeben durch:*

$$L = (V, [\cdot,\cdot]) \textit{ mit } V = V' \oplus V'' \tag{43}$$

$$\left[x' \oplus x'', y' \oplus y''\right] = \left[x', y'\right]' \oplus \left[x'', y''\right] \tag{44}$$

$$\forall\, x', y' \in V'\ x''{,}'' \in V'' \tag{45}$$

**Definition 2.5.** *Eine Derivation* $\varphi \in \mathrm{Der}(L)$ *der Lie-Algebra* $L = (V, [\cdot,\cdot])$ *ist ein* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *mit:*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)] \tag{46}$$

$\mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{End}(V)$ *ist eine Lie-Unteralgebra, denn für* $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Der}(L)$*:*

$$\begin{aligned}
\left[\varphi, \varphi'\right]([x, y]) &:= \left(\varphi\circ\varphi' - \varphi'\circ\varphi\right)[x, y] \\
&= \left[\varphi\circ\varphi'(x), y\right] + \left[\varphi'(x), \varphi(y)\right] + \left[\varphi(x), \varphi'(y)\right] + \left[x, \varphi\circ\varphi'(y)\right] \\
&\quad \left[\varphi'\circ\varphi(x), y\right] + \left[\varphi(x), \varphi'(y)\right] + \left[\varphi'(x), \varphi(y)\right] + \left[x, \varphi'\circ\varphi(y)\right] \\
&= \left[\left[\varphi, \varphi'\right](x), y\right] + \left[x, \left[\varphi, \varphi'\right](y)\right]
\end{aligned} \tag{47}$$

*Es existiert ein natürlicher Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L) \tag{48}$$

$$x \mapsto \mathrm{ad}_x := [x, \cdot] \tag{49}$$

$$\mathrm{ad}_x : y \mapsto \mathrm{ad}_x(y) = [x, y]\, \mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(L) \tag{50}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_x([y, z]) &= [x, [y, z]] \\
&= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\
&= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]
\end{aligned} \tag{51}$$

$\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L)$ ist Lie-Homomorphismus

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \tag{52}$$

Anwenden auf $z \in L$:

$$\begin{aligned} [[x,y],z] &= -[[y,z],x] - [[z,x],y] \\ &= [x[y,z]] - [y,[x,z]] \\ &= \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x(z) \end{aligned} \tag{53}$$

□

Den so definierten Lie-Homomorphismus

$$L \to \mathrm{End}(L) \quad x \mapsto \mathrm{ad}_x \tag{54}$$

auch die <u>adjungierte</u> Darstellung der Lie-Algebra (auf sich selbst).
Einen Lie-Homomorphismus

$$L \to \mathrm{End}(W) \tag{55}$$

auf $W$ als $\mathbb{F}$-Vektorraum nennt man eine Darstellung von $L$ auf $W$

**Definition 2.6.** *Seien $L' = \left(V', [\cdot,\cdot]'\right)$ und $L'' = \left(V'', [\cdot,\cdot]''\right)$ Lie-Algebren und*

$$\sigma : L'' \to \mathrm{Der}\left(L'\right) \tag{56}$$

$$x'' \mapsto \sigma_{x''} \tag{57}$$

*ein Lie-Homomorphismus. Dann ist:*

$$L = (V, [\cdot,\cdot]) \tag{58}$$

$$L = L' \rtimes_\sigma L'' \tag{59}$$

*die <u>Semidirekte Summe</u> von $L'$ mit $L''$ definiert durch:*

$$V = V' \oplus V'' \tag{60}$$

*und*

$$\left[x' \oplus x'', y' \oplus y''\right] = \left(\left[x', y'\right]' + \sigma_{x''}\left(y'\right) - \sigma_{y''}\left(x'\right)\right) \oplus \left[x'', y''\right]'' \tag{61}$$

*Antisymmetrie, Bilinearität und Jacobi-Identität in der Übung nachgerechnet.*

**Definition 2.7.** *Die <u>Killing-Form</u> einer Lie-Algebra $L = (V, [\cdot,\cdot])$ ist eine symmetrische Bilinearform*

$$K : V \times V \to \mathbb{F} \tag{62}$$

*definiert durch*

$$K(x,y) = \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\right) \tag{63}$$

*Bezüglich einer Basis $\{e_a | a = 1, \dots, n\}$ von $L$ ist $\left[e_a, e_b\right] = C^c{}_{ab}$ und*

$$\left(\mathrm{ad}_{e_a}\right)^c{}_b = C^c{}_{ab} \tag{64}$$

*Damit*

$$K_{ab} = K\left(e_a, e_b\right) = \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\right) = C^n{}_{am} C^m{}_{bn} \tag{65}$$

**Proposition 2.1.** *$\forall x, y \in L$ gilt:*

$$K([x,y],z) = K(x,[y,z]) \Leftrightarrow K([y,x],z) + K(x,[y,z]) = 0 \tag{66}$$

*Beweis.* Aus $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ folgt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_{[x,y]} \circ \mathrm{ad}_z\right) \\ =&\mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z\right) \\ =&\mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_y\right) \\ =&\mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{[y,z]}\right) \end{aligned} \tag{67}$$

□

Der Nullraum von $K$ ist definiert durch

$$N(L) := \{x \in L | K(x,y) = 0 \, \forall \, y \in L\} \tag{68}$$

Ist $x \in N(L)$, dann folgt aus

$$K([x,y],z) = K(x,[y,z]) = 0 \, \forall \, y,z \tag{69}$$

$N(L)$ ist ein Ideal. Das kann verallgemeinert werden zu:

**Korollar 2.1.** *Sei $I \subset L$ ein Ideal dann ist auch $I^\perp$ ein Ideal:*

$$I^\perp = \{x \in L | K(x,y) = 0 \, \forall \, y \in I\} \tag{70}$$

*Beweis.*

$$K\left(\left[I^\perp, L\right], I\right) = K\left(I^\perp, [L,I]\right) = K\left(I^\perp, I\right) = 0 \tag{71}$$

Damit folgt $\left[I^\perp, L\right] \subset I^\perp$ □

**Proposition 2.2.** *Ist $I \subset L$ ein Ideal, dann ist*

$$K_I = K|_I\,, \tag{72}$$

*d.h. die Killingform von $I$ ist gleich der Einschränkung der Killingform von $L$ auf $I$*

*Beweis.* Ist $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Bild}(\varphi) \subset W \subset V$, dann gilt

$$\mathrm{Spur}(\varphi) = \mathrm{Spur}(\varphi|_W) \tag{73}$$

Angewandt auf $\varphi = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \in \mathrm{End}(V)$ mit $x, y \in I$, dann ist $\mathrm{Bild}(\varphi) \subset I \subset L$.s □

**Satz 2.1** (Cartan)**.** *$L$ ist genau dann halbeinfach, wenn $K$ nicht ausgeartet ist, d.h. $N(L) = \{0\}$*

*Beweis.* Ist $I \subset L$ ein abelsches Ideal $\neq \{0\}$ und $0 \neq x \in I$, $y \in L$, dann

$$K(x,y) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = \mathrm{Spur}\left(\mathrm{ad}_x|_I\,, \mathrm{ad}_y|_I\right) = 0 \tag{74}$$

Da $\mathrm{ad}_x|_I = 0$ falls $I$ abelsch ( und Bild $\subset I$). Andere Richtung als Übung. □

Zerlegung von halbeinfachen Lie-Algebren in die direkte Summe von einfachen Lie-Algebren. Sei $L$ halbeinfache Lie-Algebra und $I \subset L$ Ideal

$$K\left(\left[I^\perp, I\right], L\right) = K\left(I^\perp, [I,L]\right) = K\left(I^\perp, I\right) = 0 \tag{75}$$

Dann $\left[I^\perp, I\right] = N(L) = \{0\}$ und damit $I^\perp \cap I = \{0\}$, also $L = I \oplus I^\perp$. Enthält $I$ weitere Ideale kann die Zerlegung analog weiter geführt werden, bis keine weiteren Ideale mehr existieren:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i \tag{76}$$

**Proposition 2.3.** *$L$ halbeinfach, dann*

$$[L,L] = \mathrm{Span}\{[x,y] | x,y \in L\} \tag{77}$$

**Definition 2.8.** *Eine Lie-Algebra für die $[L,L] = L$ gilt, heißt perfekt*

**Definition 2.9.** *Eine Lie-Algebra heißt kompakt, falls $K$ negativ definit ist. Achtung: Das Wort „Kompakt" bezieht sich auf die zur Lie-Algebra zugehörigwn Lie-Gruppen. EIne Lie-Algebra als topologischer Raum ist natürlich nie kompakt.*

**Beispiel 2.2.** $L = \left(\mathbb{R}^3, \times\right)$, $\vec{e}_a \times \vec{e}_b = \epsilon_{ab}{}^c \vec{e}_c$, $C^c{}_{ab} = \epsilon_{ab}{}^c$

$$K_{ab} = C^n{}_{am} C^m{}_{bn} = \epsilon_{am}{}^n \epsilon_{bn}{}^m = -2\delta_{ab} \tag{78}$$

## 2.1 Matrix Lie-Gruppen

„Matrix" heißt: Jede der betrachteten Gruppen besitzt eine treue endliche Darstellung (sog. „definierende Darstellung" ). Achtung: Es existieren endlich dim. Lie-Gruppen die keine Matrixgruppen sind, z.B. alle Überlagerungsgruppen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

**Beispiel 2.3.**

$$\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n) := \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{F}^n) | \det(x) \neq 0\} \tag{79}$$

$$\mathrm{SL}(\mathbb{F}^n) := \{x \in \mathrm{GL}(\mathbb{F}^n) | \det(x) = 1\} \tag{80}$$

$$\mathrm{O}(p, q_-) := \left\{x \in \mathrm{End}(\mathbb{F}^n) \middle| x E^{(p,q)} x^T = E^{(p,q)}\right\} \tag{81}$$

$$\mathrm{SO}(p, q_-) := \{x \in \mathrm{O}(p, q_-) | \det(x) = 1\} \tag{82}$$

$$\mathrm{U}(p, q_-) := \left\{x \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \middle| x E^{(p,q)} X^T = E^{(p,q)}\right\} \tag{83}$$

$$\mathrm{SU}(p, q_-) := \{x \in \mathrm{U}(p, q_-) | \det(x) = 1\} \tag{84}$$

$$\mathrm{SO}(1,3) = \mathit{Lorentzgruppe} \cup \{-\mathbb{1}_4\} \tag{85}$$

*wobei*

$$E^{(p,q)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q \end{array}\right) \tag{86}$$

Ebenfalls Matrix-Gruppen sind solche, die aus semi-direkten Produkten mit $\mathbb{F}^n$ entstehbar. Sei $G \subset \mathrm{End}(V)$ ($V \cong \mathbb{F}^n$) eine Gruppe & $A : \mathbb{R} \supset (-\epsilon, \epsilon) \to G$ differenzierbare Kurve mit $A(0) = \mathrm{id}$. Wir definieren $\dot{A} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0} A(s) =$ Tangentialvektor an der Gruppenidentität.

**Satz 2.2.** *Die Menge der Tangentialvektoren an die Gruppenidentität bilden eine* <u>*reelle*</u> *Lie-Algebra,* $\mathrm{Lie}(G)$.

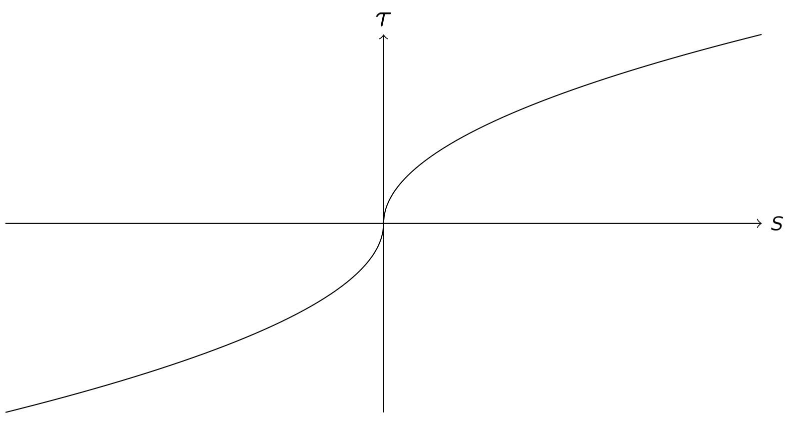
*Beweis.*

1. Linearität: Ist $X = \dot{A}$ und $Y = \dot{B}$, definiere $C(s) = A(s)B(s)$, dann $\dot{C} = \dot{A} + \dot{B} = X + Y$. Ebenso: Ist $X = \dot{A}$, definiere $B(s) = A(as)$ $\dot{B} = aX$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Geschwindigkeit bei $e \in G$ bildet Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2. Abgeschlossenheit unter Kommutatorbildung: Sei $X = \dot{A}$ & $Y = \dot{B}$. Wir müssen zeigen, dass eine Kurve $C(s)$ existiert mit $C(0) = e$ und $\dot{C} = [X, Y] = XY - YX$. Definiere also

$$C(s) = \begin{cases} A(\tau(s))\, B(\tau(s))\, A^{-1}(\tau(s))\, B^{-1}(\tau(s)) & s \geq 0 \\ B(\tau(s))\, A(\tau(s))\, B^{-1}(\tau(s))\, A^{-1}(\tau(s)) & s \leq 0 \end{cases} \tag{87}$$

wobei $\tau(s) = \mathrm{sign}(s)\sqrt{s}$ und invers $s(\tau) = \mathrm{sign}(\tau)\,\tau^2$



Obwohl keine der Kurven $s \mapsto A(\tau(s))$ etc. selber differenzierbar ist (weil $\tau(s)$ nicht differenzierbar ist), ist dennoch die Kurve $s \mapsto C(s)$ bei $s = 0$ differenzierbar. Für $s \searrow 0$ (Rechtsableitung) gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{C}_R = \lim_{s \searrow 0} \left\{ \frac{C(s) - e}{s} \right\} &= \lim_{s \searrow 0} \left\{ \frac{\left[A(\tau(s)), B(\tau(s))\right] A^{-1}(\tau(s)) B^{-1}(\tau(s))}{s} \right\} \\
&= \lim_{\tau \searrow 0} \left\{ \left[ \frac{A(\tau) - e}{\tau}, \frac{B(\tau) - e}{\tau} \right] A^{-1}(\tau) B^{-1}(\tau) \right\} \\
&= [X, Y]
\end{aligned} \tag{88}$$

$\dot{C}_L$ analog.

□

Da die Lie-Struktur durch die von $\mathrm{End}(V)$ induziert wird, gilt automatisch die Jacobi-Identität.
Ist $D \in \hom(G, \mathrm{GL}(W))$ eine lineare Darstellung von $G$ auf den Vektorraum $W$, dann induziert diese eindeutig eine Darstellung

$$D_* \in \hom(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{End}(W)) \tag{89}$$

Das sieht man so: Sei $A(s)$ Kurve in $G$ mit $A(0) = e$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0} A(s) = X$. Dann ist $A'(s) = (D \circ A)(s) = D(A(s))$ eine Kurve in $\mathrm{GL}(W)$ mit $A'(0) = e|_{\mathrm{GL}(W)}$. Wir sehen voraus, dass $D$ differenzierbar ist.