Topologie

Krug

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Topologie ist die Untersuchung stetiger Abbildungen. In den reellen Zahlen gibt es dafür das $\epsilon - \delta$ Kriterium.
Die Hauptfrage dieser Vorlesung ist, ob es stetige Abbildungen $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, die invers zueinander sind, wenn $m \neq n$. Also ob die Dimension invariant ist (Die Antwort ist ja).
Ein erster Versuch sind sogenannte raumfüllende Kurven. Dafür beweisen wir erst das Cantor Theorem.

THEOREM 1.1 (Peano). *Es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $[0,1] \to [0,1] \times [o,1]$

LEMMA 1.2. *Sei* $A \subseteq B$ *eine Teilmenge und* $f : B \mapsto A$ *injektiv. Dann gibt es eine Bijektion* $h : B \mapsto A$

BEWEIS. Setzt man $C := \bigcup_{n\geq 0} f^n (B \backslash A)$, dann ist

$$h : B \mapsto A; h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ x & x \in B \backslash C \end{cases} \tag{1.1}$$

surjektiv: Sei $y \in A$, also entweder
$y \in B\backslash C$ dann ist $y = h(y)$ oder
$y \in C$, dann gibt es $n \geq 1$, dass $y \in f^n(B\backslash A)$, also gibt es $x \in f^{n-1}(B\backslash A) \subseteq C$ mit $y = f(x)$
und surjektiv: Sei $x, x' \in B$ und $h(x) = h(x') = y$, dann ist entweder:
$y \in B\backslash C$, also $x, x' \in B\backslash C$, also $x = h(x) = h(x') = x$ oder
$y \in C$, dann ist $x, x' \in C$, also $f(x) = h(x) = h(x') = f(x')$ und da f injektiv ist, auch $x = x'$. □

THEOREM 1.3 (Schröder-Bernstein). *Sei* A, B *zwei Mengen, so dass injektive Abbildungen* $f : A \to B$, $g : B \to A$ *existieren, dann gibt es eine Bijektion* $h : A \to B$

BEWEIS. Sei $g : A \hookrightarrow B$, $f : B \hookrightarrow A$, dann setze $A' = g(A) \subseteq B$. Damit ist $g : A \mapsto A'$ bijektiv. Es existiert also eine inverse $g^{-1} : A' \to A$. Die Abbildung $f' := g \circ f : B \to A'$ ist injektiv, da f und g beide injektiv sind, also gibt es nach 1.2 eine Bijektion $h : B \to A'$. Damit ist $g^{-1} \circ h : B \to A$ bijektiv. □

BEMERKUNG. Für endliche Mengen $A \hookrightarrow B$ implies $|A| \leq |B|$, mit $B \hookrightarrow A$ also direkt $|A| = |B|$.

LEMMA 1.4. *Es gibt eine Bijektion von* $(0,1) \to \mathbb{R}$

BEWEIS. Die Abbildung ist durch die Verkettung von

$$\begin{aligned} (0,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); x \mapsto \pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}; x \mapsto \tan(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

□

THEOREM 1.5 (Cantor). *Es gibt eine Bijektion* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

BEWEIS. Es reicht nach 1.4 zu zeigen, dass es eine Bijektion von $(0,1) \to (0,1) \times (0,1)$ gibt und mit 1.3 zwei injektive Abbildungen $(0,1) \to (0,1) \times (0,1); x \mapsto (x,x)$ und $f : (0,1) \times (0,1) \to (0,1); f(0.a_1a_2\ldots, 0.b_1b_2\ldots) = 0.a_1b_1a_2b_2\ldots$ mit der dezimal Darstellung der Zahlen. □

Nach dieser Motivation geht es dann richtig in das Thema.

KAPITEL 2

Topologische Räume, metrische Räume und Stetigkeit

2.1. Definitionen und Beispiele

Definition 2.1 (Topologischer Raum). Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, bestehend aus einer Menge X und einem System von Teilmengen $\mathcal{T}$, sodass

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $U_1, U_1 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{T}$

Man nennt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf X und die Elemente aus $\mathcal{T}$ heißen *offene* Mengen.

Definition 2.2 (Abgeschlossenheit). Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt eine Teilmenge $Z \subseteq X$ abgeschlossen, wenn $U := X \backslash Z$, das Komplement in X, offen ist.

Beispiel 1. Topologische Räume:

(1) Grobe/Indiskrete Topologie: X beliebig, $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$
(2) Feine/Diskrete Topologie: X beliebig, $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$
(3) Kofinite Topologie: X beliebig, $\mathcal{T} := \{U \subset X : \ U = \emptyset \ \wedge \ M \backslash U \text{ endlich}\}$

Bemerkung. Es können nur endliche Schnitte zugelassen sein, da für beispielsweise $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$$\bigcap_{U_n \in \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}} U_n = \{0\}$$

gilt.

Bemerkung. Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. $\mathcal{T}^C := \{X \backslash U \mid U \in \mathcal{T}\}$ ist die Menge der Komplemente von Mengen in $\mathcal{T}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie (mit $\mathcal{T}^C$ der Menge der abgeschlossenen Mengen) wenn

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}^C$
- Beliebige Schnitte sind in $\mathcal{T}^C$
- Endliche Vereinigungen sind in $\mathcal{T}^C$

gilt (Eigenschaften folgen aus den de-Morganschen Regeln).

Beispiel 2. Zariski-Topologie (Algebraische Geometrie) $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ und $M \subset R$ eine Menge von Polynomen, dann sind die abgeschlossenen Mengen definiert als $V(M) := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n | f(x) = 0 \forall f \in M\}$

Definition 2.3 (Metrischer Raum). Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$:

- Positve Definitheit: $\mathrm{d}(x,y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ und $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \ \forall x, y \in X$
- Dreiecksungleichung: $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y) \ \forall x, y, z \in X$

Bemerkung. In metrischen Räumen gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\mathrm{d}(x,y) \geq |\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)|$$

$(|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)| \leq |\mathrm{d}(x,z) - (\mathrm{d}(z,x) + \mathrm{d}(x,y))|) = \mathrm{d}(x,y)$

Definition 2.4 (ε-Bälle). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jedes $x \in X$ definiere

$$\mathbb{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \mathrm{d}(x,y) < \varepsilon\},$$

der offene ε-Ball von x in X mit Radius ε.

Definition 2.5 (Norm). Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $p : E \to \mathbb{R}^+$ heißt Norm auf V, falls

(1) Homogenität: $p(\alpha v) = |\alpha| p(v)\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall v \in V$
(2) Dreiecksungleichung: $p(v + w) \le p(v) + p(w)$
(3) Echt positiv: $p(x) > 0\ \forall v \in V \backslash \{0\}$

Dann heißt $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Vektorraum.

Bemerkung.

$$\text{Norm} \Rightarrow \text{Metrik} \Rightarrow \text{Topologie}$$

Jede Norm wird durch $\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|_E$ zur Metrik und jede Metrik induziert über ε-Bälle eine Topologie.

Beispiel 3. Normierte (endlichdimensionale) Vektorräume:

(1) $\mathbb{K}^n$: $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$ mit Betragsnorm (ist $p = 2$ vom nächsten Beispiel)
(2) $\mathbb{K}^n$: $\|x\|_p = (\sum_{i=0}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ mit p-Norm
(3) $\mathbb{K}^n$: $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Beispiel 4. Metrische Räume:
die ersten beiden Beispiele beschreiben die induzierten Metriken von (2) und (3) aus normierte Vektorräume

(1) $\mathbb{K}^n$: $(\mathbb{K}^n, \mathrm{d})$ mit $\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|_p$
(2) $\mathbb{K}^n$: $(\mathbb{K}^n, \mathrm{d})$ mit $\mathrm{d}(x, y) := \max_{1 \le i \le n} \|x - y\|_\infty$ (offene Bälle werden zu Quadern)

Definition 2.6 (Induzierte Topologie). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert eine induzierte Topologie $\mathcal{T}_\mathrm{d}$ auf X, gegeben durch

$$U \subseteq X :\Leftrightarrow \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 :\ \mathbb{B}_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

Dies ist die durch d induzierte Topologie und dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_\mathrm{d})$.

Bemerkung. Es kann passieren, dass verschiedene Metriken dieselbe Topologie induzieren.

Definition 2.7 (Metrisierbarkeit). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, falls eine Abstandsfunktion d auf X existiert, sodass $\mathcal{T}_\mathrm{d} = \mathcal{T}$.

2.2. Stetigkeit

Definition 2.8 (Stetigkeit in topologischen Räumen). Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume.

$$f : X \to Y \mathit{stetig} :\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y :\ (U \in \mathcal{T}' \ \Rightarrow\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T})$$

Definition 2.9 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

$$\begin{aligned} f : X \to Y \mathit{stetig} &:\Leftrightarrow \forall x \in X, \varepsilon > 0 :\ \exists \delta > 0 : (d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_X(f(x), f(x')) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x)) \end{aligned}$$

Lemma 2.10. *In einem metrischen Raum sind alle ε-Bälle offen.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für alle $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$ ein $\varepsilon' > 0$ existiert, sodass $\mathbb{B}_{\varepsilon'}(x') \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(x)$.
Es gilt für $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$, dass $r := d(x, x') < \varepsilon$.
Wähle nun $\varepsilon' = \varepsilon - r$ und sei $y \in \mathbb{B}_{\varepsilon'}(x')$. Dann gilt $d(x, y) \le d(x, x') + d(x', y) < r + \varepsilon' = \varepsilon$. □

Proposition 2.11. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gilt:*
$f : X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq Y$ mit $U \in \mathcal{T}_{d_Y}$: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{d_X}$

Beweis. „$\Rightarrow$“
Sei $U \subseteq Y$ offen und sei $x \in f^{-1}(U)$. Es ist zu zeigen, dass für $\delta > 0$ $\mathbb{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$ gilt.
Da $U \subseteq Y$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass $\mathbb{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Da f stetig ist, gilt $f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$, also $\mathbb{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$.

„$\Leftarrow$"
Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ Nach Lemma 2.10 ist $\mathbb{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq Y$ offen. $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ist offen in X. Da $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ gilt, existiert ein $\delta > 0$, sodass $\mathbb{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Also $f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. □

Bemerkung. Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Standard Topologie ist das genau die normale Definition in der auch Polynome, . . . stetig sind.

Definition 2.12 (Homöomorphismus). Ein *Homöomorphismus* zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist eine bijektive, stetige Abbildung $f : X \to Y$ dessen inverse $f^{-1} : Y \to X$ auch stetig ist.
Wir schreiben dann $(X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ homöomorph. Kurz $X \cong Y$.

Beispiel 5.
(1) Strecken ist ein Homöomorphismus, mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$: $S_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto \lambda x$ und die inverse $(S_\lambda)^{-1} = S_{1/\lambda}$.
Mit der Standardtopologie auf Teilmengen ist auch für $M \subset \mathbb{R}^n$ $M \cong S_\lambda(M)$
(2) Einheitsball und Einheitsquadrat
$$C = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\} \cong S = \{(x, y)| \max\{|x|, |y|\} = 1\} \tag{2.1}$$

Bemerkung. Äquivalent zu homöomorph ist, dass f bijektiv, stetig und offen ist.
$$f \text{ offen } \Leftrightarrow (U \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f(U) \in \mathcal{T}_Y)$$
Dann gilt, da f bijektiv, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, also ist f^{-1} stetig.

Beispiel 6.
$$f : [0, 2\pi) \to C;\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \tag{2.2}$$
ist stetig und bijektiv, aber nicht offen, also kein Homöomorphismus.
Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$, dann ist
$$id_X : (X, finest) \to (X, coarsest) \tag{2.3}$$
stetig und bijektiv, aber
$$id_X : (X, coarsest) \to (X, finest) \tag{2.4}$$
nicht stetig

Definition 2.13 (Feinheit von Topologien). Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(X, \mathcal{T}_2)$ Topologien auf X.
$$\mathcal{T}_1 \text{ ist feiner als } \mathcal{T}_2 :\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2) \text{ stetig} \tag{2.5}$$

Beispiel 7. In $\mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{T}_1$ die Standardtopologie und $\mathcal{T}_2$ die kofinite Topologie. Dann gilt
$$coarsest \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq finest$$

2.3. Basen

Definition 2.14 (Basis einer Topologie). Eine Menge $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X ist Basis einer Topologie auf X, wenn
- $\forall x \in X\ \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B$
- $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \wedge \forall x \in B_1 \cap B_2 : \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

Beispiel 8.
(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge der offenen Bälle $\mathfrak{B} = \{\mathbb{B}_\epsilon(x)|x \in X, \epsilon > 0\}$ eine Basis einer Topologie.
(2) Sei X eine beliebige Menge. Dann ist die Menge aller einelementigen Teilmengen von X, $\mathfrak{B} = \{\{x\}|x \in X\}$, eine Basis einer Topologie.

Proposition 2.15. *Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis einer Topologie Dann ist die Menge aller Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{B}$ eine Topologie*
$$\mathcal{T}_\mathfrak{B} = \{\bigcup_{i \in I} B_i | B_i \in \mathfrak{B}\} \tag{2.6}$$
die von $\mathfrak{B}$ erzeugte Topologie.

Beweis.
- $\varnothing, X \in \mathcal{T}_\mathfrak{B}$

- Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie. Dann gibt es für alle $i \in I$ eine Menge J_i, dass $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_j$ damit ist

$$\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I_j} B_i\right) = \bigcup_{i\in\bigcup_{j\in J} I_j} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{B}} \tag{2.7}$$

- Sei $U, V \in \mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$, dann ist $U = \bigcup_{i\in I} B_i, V = \bigcup_{j\in J} B_i$, dann gibt es für $x \in U \cap V$ ein $i \in I$ und ein $j \in J$, dass $x \in B_i, B_j$, also $x \in B_i \cap B_j$. Nach dem zweiten Axiom für eine Basis gibt es dann $B_x \in \mathfrak{B}$ dass $x \in B_x \subseteq B_i \cap B_j \subseteq U \cap V$, damit ist dann $U \cap V = \bigcup_{x\in U\cap V} B_x \in \mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$

□

Beispiel 9. (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathfrak{B} = \{\mathbb{B}_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$ dann ist $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}} = \mathcal{T}_d$ (die von der Metrik induzierte Topologie).
(2) Sei X eine beliebige Menge. Dann ist die von $\mathfrak{B} = \{\{x\}|x \in X\}$ induzierte Topologie die diskrete Topologie.

Proposition 2.16. *Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ Basen von X und es gelte*

$$\forall x \in B_1 \in \mathfrak{B}_1 \wedge \forall x \in B_1 \in \mathfrak{B}_1\ \exists B_2 \in \mathfrak{B}_2 :\ x \in B_2 \subseteq B_1$$

Dann ist $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}_2}$ feiner als $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}_1}$.

Beweis. Sei $U \in \mathcal{T}_{\mathfrak{B}_1}$, dann ist $U = \bigcup_{i\in I} B_i$, $B_i \in \mathfrak{B}_1$. Für alle $x \in U$ gibt es ein $i \in I$, dass $x \in B_i$. Nach Annahme ist gibt es dann $B_x \in \mathfrak{B}_2$ mit $x \in B_x \subseteq B_i \subseteq U$, also ist $U = \bigcup_{x\in U} B_x \in \mathcal{T}_{\mathfrak{B}_2}$. □

Beispiel 10. Mit der euklidischen Norm $d(x, y)$ und der Maximumsnorm $d_1(x, y)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d_1}$, da man in jeden Ball einen Würfel packen kann und andersherum. (Basis der ϵ-Bälle).

Definition 2.17 (Subbasis). Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Subbasis einer Topologie auf X, wenn es für jedes $x \in X$ ein $S \in \mathcal{S}$ gibt, sodass $x \in S$.

Proposition 2.18. *Zu einer Subbasis existiert eine Topologie, deren Basis gegeben ist durch*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \coloneqq \{S_1 \cap .... \cap S_n \mid S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}\}$$

Wir nennen die Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$, die durch S erzeugte Topologie auf X.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass es sich um eine Basis einer Topologie handelt.
(1) z.zg. $\forall x \in X\ \exists B \in \mathfrak{B}_S : x \in B$:
Sei $x \in X$ beliebig. Nach der Definition von Subbasis existiert ein $B \in \mathcal{S}$, sodass $x \in B$. Dann ist auch $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.
(2) z.zg. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_{\mathcal{S}} \wedge \forall x \in B_1 \cap B_2 : \exists B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{S}} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$:
Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ und $x \in B_1 \cap B_2$. Dann gilt aber $B_1 = S_{11} \cap ... \cap S_{1n}$ und $B_2 = S_{21} \cap ... \cap S_{2n}$. Also ist $B_1 \cap B_2 = S_{11} \cap ... \cap S_{1n} \cap S_{21} \cap ... \cap S_{2n}$. Also gilt für $B \coloneqq B_1 \cap B_2$, dass $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.

□

Beispiel 11. Sei $S = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{[b, \infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Dann ist S offenbar eine Subbasis. Da $\forall x \in \mathbb{R}$ die Intervalle $(-\infty, x]$ und $[x, \infty) \in S$ gilt, ist $(-\infty, x] \cap [x, \infty) = \{x\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Also ist $\{x\}$ offen für alle $x \in \mathbb{R}$. Die durch S erzeugte Topologie ist die diskrete Topologie.

Definition 2.19 (Zweite Abzählbarkeitsaxiom). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Proposition 2.20. *$\mathbb{R}^n$ ist mit der Standardtopologie $\mathcal{T}$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis.

$$\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{B}_\epsilon(x)|x \in \mathbb{R}^n, \epsilon \in \mathbb{R}_+\}; \quad \mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{B}_\epsilon(x)|x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\} \tag{2.8}$$

Nach 2.16 ist dann $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathfrak{B}_2} = \mathcal{T}$ und $\mathfrak{B}_2$ ist abzählbar □

Beispiel 12. $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie erfüllt nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom, da $\{x\} \subset \mathbb{R}$ dann immer offen ist.

Lemma 2.21. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie auf Y. Dann gilt*

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f^{-1}(B) \subseteq_O X \ \forall B \in \mathcal{B}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“
Alle $B \in \mathcal{B}$ sind offen. Nach Vor. ist f stetig, also ist $f^{-1}(B) \subseteq_O X$.
„$\Leftarrow$“
Sei $U \subseteq_O Y \ \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$ für eine geeignete Menge I und $B_i \in \mathcal{B}$.
Insgesamt gilt dann $f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq_O X$, als Vereinigung offener Mengen. □

2.4. Grenzwerte

Definition 2.22 (Topologischer Grenzwert). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Dann gilt

$$a_n \to x \in X, \ n \to \infty \Leftrightarrow \forall \ x \in U \subseteq_O X : \ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \in U \ \forall n \geq N$$

Proposition 2.23. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge.*

$$a_n \to x \in X, \ n \to \infty \ \textit{bzgl.} \ (X, \mathcal{T}_d) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \ \exists N \in \mathbb{N} : \ d(x, a_n) < \epsilon \ \forall n \geq N$$

Beweis. „$\Rightarrow$“
Sei $\epsilon > 0$. Dann $\mathbb{B}_\epsilon(x) \subseteq_O X$. Nach Definition 2.22 $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{B}_\epsilon(x) \forall n \geq N$, also $d(a_n, x) < \epsilon$
„$\Leftarrow$“
Sei $x \in U \subseteq_O X$, nach Definition der induzierten Topologie gibt es dann $\epsilon > 0$ $\mathbb{B}_\epsilon(x) \subseteq U$. Damit $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{B}_\epsilon(x) \subseteq U \forall n \geq N$, also konvergiert a_n gegen x. □

Beispiel 13. (1) In $(X, finest)$ gilt: $a_n \to x \Leftrightarrow \exists N : a_n = x \ \forall n \geq N$
(2) In $(X, coarset)$ gilt: Jede Folge konvergiert gegen eden Punkt.

Deswegen braucht es die Trennungseigenschaften.

Definition 2.24 (Trennungsaxiome). (1)

$$X \text{ erfüllt } T_0 \Leftrightarrow \forall x \neq y \in X : \exists (x \in U \subseteq_O X : y \notin U) \ \vee \ \exists (y \in V \subseteq_O X : \ x \notin V)$$

(2)

$$X \text{ erfüllt } T_1 \Leftrightarrow \forall x \neq y \in X : \ \exists (x \in U \subseteq_O X \wedge y \in V \subseteq_O X) : \ x \notin V, y \notin U$$

(3)

$$X \text{ erfüllt } T_2 \text{ (hausdorffsch)} \Leftrightarrow X \text{ erfüllt } T_2 \text{ und } U \cap V = \varnothing$$

Beispiel 14. (1) Ein topologischer Raum mit diskreter Topologie ist Hausdorff
(2) Mit der gröbsten Topologie nicht mal T_1.
(3) Ein metrisierbarer top. Raum ist Hausdorff
(4) Eine unendlich große Menge X ist in der kofiniten Topologie T_1 aber nicht T_2. Setze $U := X\backslash\{y\}$, $V := X\backslash\{x\} \Rightarrow T_1$.
Sei $x \in U$ eine beliebige offene Umgebung mit $y \notin U$. Dann ist $X\backslash U$ endlich, also existiert keine offene Menge $V \subseteq X$, sodass $V \subseteq X\backslash U$.
(5) Die Topologie $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, X\}$ auf $X = \{1, 2, 3\}$ erfüllt nicht T_0.
(6) Die Topologie $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$ erfüllt T_0 aber nicht T_1 auf $X = \{1, 2, 3\}$.

Proposition 2.25. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann gilt*

$$X \textit{ erfüllt } T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X : \ \{x\} \subseteq X \textit{ ist abgeschlossen}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“
Seien $x, y \in X$ beliebig. Zeige $X\backslash\{x\}$ ist offen.
Da X T_1 erfüllt, existiert $y \in U \subseteq_O X$, sodass $x \notin U$, also $U \subseteq X\backslash\{x\}$. Also ist $y \in int(X\backslash\{x\})$. Das gilt für alle $x \neq y \in X$. Also sind alle Elemente in $X\backslash\{x\}$ innere Punkte $\Rightarrow X\backslash\{x\} = int(X\backslash\{x\})$. Damit ist $X\backslash\{x\}$ offen und $\{x\}$ abgeschlossen.

„$\Leftarrow$“
Seien $x, y \in X$ und $\{x\}, \{y\}$ abgeschlossen. Dann sind $X\backslash\{x\}$ und $X\backslash\{y\}$ offen und disjunkt. also erfüllt X T_1. □

PROPOSITION 2.26 (Eindeutigkeit von Grenzwerten). *In einem Hausdorff Raum gibt es höchstens einen Grenzwert.*

BEWEIS. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge die gegen $x \neq y \in X$ konvergiert, da X Hausdorffsch, gibt es $x \in U \subseteq_O X, y \in V \subseteq_O X$, $U \cap V = \emptyset$. Weil a_n gegen x konvergiert $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \in U \forall n \geq N$, also ist $a_n \notin V \forall n \geq N$. □

BEMERKUNG. Wenn $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch ist, dann schreibt man $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

DEFINITION 2.27. Sei X ein topologischer Raum $A \subseteq X$ eine Teilmenge

(1) Ein Punkt $x \in A$ ist *innerer Punkt* von A, wenn $\exists x \in U \subseteq_O X : U \subseteq A$.
(2) Ein Punkt $x \in X$ ist *Häufungspunkt* von A, wenn $\forall x \in U \subseteq_O X : U \cap (A\backslash\{x\}) \neq \emptyset$
(3) Ein Punkt $x \in X$ ist *Randpunkt* von A, wenn $\forall x \in U \subseteq_O X : U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X\backslash A)$

Zur obigen Definition korrespondieren die folgenden Teilmengen

DEFINITION 2.28. Sei X ein topologischer Raum $A \subseteq X$ eine Teilmenge

(1) Die Menge aller inneren Punkte bilden *das Innere* von A.
(2) Der Abschluss von A ist definiert als

$$\mathrm{cl}(A) := \bigcap_{\substack{Z\subseteq X \text{ closed} \\ A\subseteq X}} Z \tag{2.9}$$

(3) Der Rand von A ist definiert als $bdy(A) = cl(A)\backslash int(A)$

BEMERKUNG. (1) $\mathrm{int}(A)$ ist die größte offene Teilmenge von X die in A enthalten ist.

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup_{\substack{U\subseteq_O X \\ U\subseteq A}} U \qquad A \text{ offen } \Leftrightarrow A = int(A) \tag{2.10}$$

(2) $\mathrm{cl}(A)$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die A enthält.

$$A \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow A = cl(A)$$

BEISPIEL 15.
- $Y = [0,1) \subseteq X = \mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie), dann ist $\mathrm{int}(Y) = (0,1), \mathrm{bdy}(Y) = \{0,1\}, \mathrm{acc}(Y) = [0,1]$
- $A = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$, hat $\mathrm{int}(A) = \emptyset, \mathrm{bdy}(A) = A \cup \{0\}, \mathrm{acc}(A) = \{0\}$

LEMMA 2.29.

$$cl(A) = X\backslash int(X\backslash A)\,; \quad int(A) = X\backslash cl(X\backslash A) \tag{2.11}$$

wegen der de Morganschen Regeln

BEWEIS. Es gilt

$$cl(A) = \bigcap_{\substack{Z\subseteq X \text{ closed} \\ A\subseteq X}} Z = (\bigcup_{\substack{Z\subseteq X \text{ closed} \\ A\subseteq X}} Z^c)^c = X\backslash(\bigcup_{\substack{Z\subseteq X \text{ closed} \\ A\subseteq X}} X\backslash Z) = X\backslash(\bigcup_{\substack{U\subseteq_O X \\ U\subseteq X\backslash A}} U) = X\backslash int(X\backslash A)$$

und die andere Gleichung äquivalent. □

PROPOSITION 2.30. *Sei $Y \subseteq X$. Dann gilt*

$$cl(Y) = Y \cup bdy(Y) = Y \cup acc(Y)$$

BEWEIS. „$\mathrm{cl}(Y) \subseteq Y \cup \mathrm{bdy}(Y)$“Sei $x \in \mathrm{cl}(Y)$ zum Widerspruch von $x \notin Y$, $x \notin \mathrm{bdy}(Y)$, dann gibt es $x \in U \subseteq_O X : U \cap Y = \emptyset$, da $U \subseteq X\backslash Y$ damit ist $x \in \mathrm{int}(X\backslash Y)$, nach 2.29 also $x \notin \mathrm{cl}(Y)$ ein Widerspruch.
„$Y \cup \mathrm{bdy}(Y) \subseteq Y \cup \mathrm{bdy}(Y)$“ Dafür sei $x \in \mathrm{bdy}(Y)$ aber nicht in Y, also $\forall x \in U \subseteq_O X : \emptyset \neq U \cap Y = U \cap (Y\backslash\{x\})$, falls $x \in Y$, dann ist sowieso alles klar.
„$Y \cup \mathrm{acc}(Y) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$“ Sei also $x \in \mathrm{acc}(Y), x \notin Y$, da $Y \subseteq \mathrm{cl}(Y)$ nach 2.4. Angenommen $x \notin \mathrm{cl}(Y)$, dann gilt nach 2.29, dass $x \in \mathrm{int}(X\backslash Y)$, damit $\exists x \in U \subseteq_O X : U \subseteq X\backslash Y$ also $U \cap Y = \emptyset$, deswegen müsste $x \notin \mathrm{acc}(Y)$, was ein Widerspruch ist. □

Bemerkung. Sei $x \in X$, $A \subseteq X$. Wenn eine Folge in $A \setminus \{x\}$ existiert, die gegen x konvergiert, dann gilt $x \in \operatorname{acc}(A)$, aber i.A. nicht andersherum.
Also sei $x \in acc(A)$, dann gibt es nicht unbedingt eine Folge in $A \setminus \{x\}$, die gegen x konvergiert.

Beispiel 16. Koabzählbare Topologie.

Definition 2.31. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, genau dann, wenn $\forall x \in X$ eine Familie $\mathcal{B}_x \subseteq \{U \subseteq X \mid x \in U \subseteq_O X\}$ (Umgebungsbasis) von offenen Umgebungen von x existiert, sodass $\forall x \in V \subseteq_O X \; \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subseteq V$.

Proposition 2.32. *$(X, \mathcal{T})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Angenommen $(X, \mathcal{T})$ hat eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$. Setze für $x \in X$ $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$. Sei $x \in V \subseteq_O X$. Dann ist $V = \bigcup_{i \in I} B_i$ und es muss ein $j \in I$ existieren, sodass $x \in B_j \Rightarrow B_j \in \mathcal{B}_x \Rightarrow B_j \subseteq V$. □

Beispiel 17.
(1) Jeder metrisierbare topologische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Sei dafür $x \in X$ und setze $\mathcal{B}_x = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(2) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum ausgestattet mit der diskreten Topologie und X sei eine überabzählbare Menge. Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das erste aber *nicht* das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Proposition 2.33. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann gilt:*
$x \in acc(A) \Leftrightarrow \exists$ Folge in $A \setminus \{x\}$ mit Grenzwert x.

Beweis. „$\Leftarrow$" gilt immer.
„$\Rightarrow$" Sei $x \in acc(A)$ und $B_x = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis. Setze $V_n := U_1 \cap ... \cap U_n$. Dann erhalten wir eine absteigende Kette offener Umgebungen $V_1 \supseteq ... \supseteq V_n ...$.
Da $x \in acc(A)$ gilt, folgt per Def., dass $V_n \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Nehme ein $a_n \in V_n \cap (A \setminus \{x\})$.
Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x.
Sei $x \in U \subseteq_O X$ da $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $U_N \subseteq U \Rightarrow \forall n \geq N : V_n \subseteq U_N \Rightarrow a_n \in V_n \subseteq U_N \subseteq U \;\; \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x. □

Korollar 2.34. $(X, \mathcal{T})$ erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom, $A \subseteq X$.
Dann ist $cl(A) = \{x \in X \mid \exists \, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \; a_n \to x\}$

Beweis. Zeige $A \cup acc(A) = \{x \in X \mid \exists \, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \; a_n \to x\}$
„$\subseteq$"
1. Fall $x \in A$. Setze $a_n = x \; \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Fall $x \in acc(A)$. Dann verwende 2.33.
„$\supseteq$"
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $x \in X$ konvergiert.
$\Rightarrow \; x \notin int(X \setminus A) \; \Rightarrow x \in X \setminus int(X \setminus A) = cl(A)$. □

Lemma 2.35. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist äquivalent:*
(1) *f ist stetig*
(2) *$f^{-1}(Z) \subseteq X$ ist abgeschlossen $\forall Z \subseteq Y$ abgeschlossen.*
(3) *$\forall$ Teilmengen $A \subseteq X$: $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$*

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)"und ähnlich „(2) $\Rightarrow$ (1)"
Sei $Z \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist $Y \setminus Z$ offen in Y. Da f stetig ist, gilt $f^{-1}(Y \setminus Z) \subseteq_O X$. Also ist $f^{-1}(Z) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus Z)$ abgschlossen.
„(2) $\Rightarrow$ (3)"
$cl(f(A)) \subseteq Y$ ist abgeschlossen. Nach Vor. ist dann $f^{-1}(cl(f(A))) \subseteq X$ abgeschlossen. Da $A \subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$ folgt $cl(A) \subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$ nach 2.4. Insgesamt erhalten wir:
$f(cl(A)) \subseteq f(f^{-1}(cl(A))) \subseteq cl(f(A))$.

„(3) ⇒ (2)“
Sei $Z \in Y$ abgeschlossen. Dann ist $cl(Z) = Z$. Nach Vor. gilt

$$f(cl(f^{-1}(Z)) \subseteq cl(f(f^{-1}(Z)) \subseteq cl(Z) = Z \quad \Leftrightarrow$$
$$cl(f^{-1}(Z)) \subseteq f^{-1}(cl(Z)) \quad \Rightarrow cl(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z)$$

Also ist $f^{-1}(Z)$ abgeschlossen. □

THEOREM 2.36. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Wir betrachten folgende Aussagen*

(1) *f ist stetig.*
(2) *$\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit Grenzwert $x \in X$, gilt, dass $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Dann gilt: „(1) ⇒ (2)“gilt immer. Und falls die Topologie auf X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gilt auch „(2) ⇒ (1)“.

BEWEIS. „(1) ⇒ (2)“
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergent gegen $x \in X$. Sei $f(x) \in U \subseteq_O Y$. Dann ist $x \in f^{-1}(U) \subseteq X$.
$\Rightarrow\ \exists\ N \in \mathbb{N} :\ a_n \in f^{-1}(U)\ \forall\ n \geq N \Rightarrow\ f(a_n) \in U\ \forall\ n \geq N$.
„(2) ⇒ (1)“
Sei $A \subseteq X$. Wir wollen zeigen, dass $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$. Aus 2.35 folgt die Behauptung. Nach 2.33 existiert für alle $x \in cl(A)$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A\backslash\{x\}$ mit Grenzwert x. Nach Vor. gilt $f(a_n) \to f(x) \ \Rightarrow\ f(x) \in cl(f(A)) \ \Rightarrow\ f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$. □

2.5. Vollständigkeit

Bis auf Widerruf sei (X,d) ein metrischer Raum. Metrische Räume sind hausdorffsch, sodass jegliche Grenzwerte, falls existent, eindeutig bestimmt sind.

DEFINITION 2.37 (Cauchy-Folge, Vollständigkeit).
(1) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge* in X, falls $\forall\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $m,n > N_\varepsilon$ gilt.
(2) Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

BEMERKUNG.
(1) Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.
(2) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
(3) Hat eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, dann ist die Cauchy-Folge selbst konvergent mit demselben Grenzwert.

KOROLLAR 2.38. Sei (X,d) vollständig und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch (A, d_A) abgeschlossen.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus 2.34. □

2.6. Seperabilität

DEFINITION 2.39. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
(1) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *dicht* in X, falls $cl(M) = X$ gilt.
(2) Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt *nirgends dicht* in X, falls $int(cl(N)) = \varnothing$.
(3) Ein topologischer Raum heißt *seperabel*, falls eine abzählbar dichte Teilmenge existiert.

BEISPIEL 18.
(1) Sei $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Standardtopologie. Dann ist $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge.
(2) Sei $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der diskreten Topologie. Dann ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Dann ist $cl(U) = U \neq \mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.40. *Jeder seperable, metrisierbare topologische Raum erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

BEWEIS. □

KAPITEL 3

Raumfüllende Kurven

Theorem 3.1 (Peano). *Es gibt eine stetige surjektive Abbildung* $p:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$

Diese Abbildung ist in ternärer Darstellung gegeben durch:

$$p\left(0.t_1t_2t_3\dots\right)=\begin{pmatrix}0.a_1a_2a_3\dots\\0.b_1b_2b_3\dots\end{pmatrix}\tag{3.1}$$

mit

$$\begin{aligned}a_1=t_1,a_2=\tau^{t_2}t_3,a_3=\tau^{t_2+t_4}t_5,a_n=\tau^{t_2+\dots t_{2n-2}}t_{2n-1}\\b_1=\tau^{t_1}t_2,b_2=\tau^{t_1+t_3}t_4,b_n=\tau^{t_1+\dots+t_{2n-1}}t_{2n}\end{aligned}\tag{3.2}$$

wobei $\tau(0)=2,\tau(2)=0,\tau(1)=1$ Das heißt im Grunde wird auf jeder Verfeinerung des Gitters der Zickzack-Weg gelaufen. Je mehr Nachkommastellen also in Betracht gezogen werden, umso genauer wird also das Gebiet eingegrenzt, und da benachbarte Gebiete auf benachbarte Gebiete abgebildet werden ist die Funktion dann stetig.

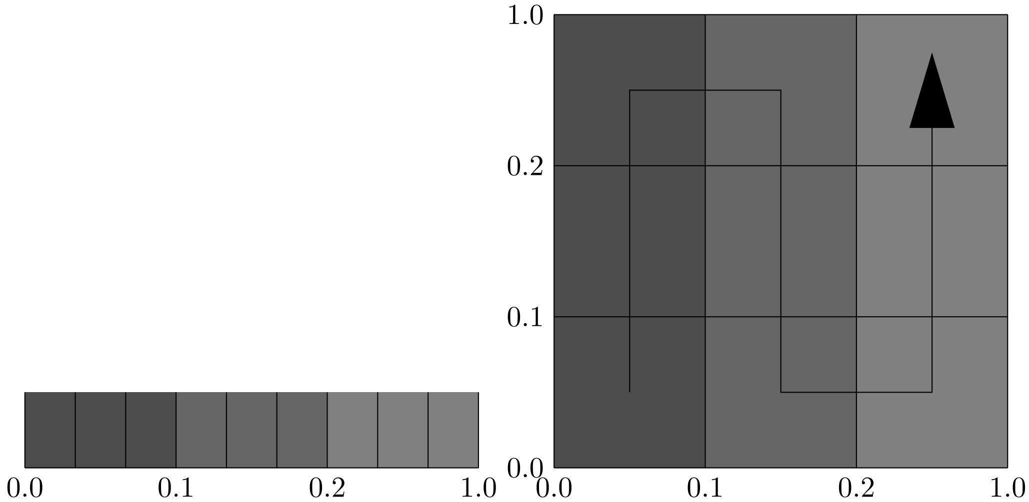

Abbildung 1. Peano-Kurve (ternäre Darstellung)

Lemma 3.2.

$$p\left(0.t_1t_2t_3\dots\right)=\begin{pmatrix}0.t_1\\0.\left(\tau^{t_1}t_2\right)\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sigma^{t_2}&0\\0&\sigma^{t_1}\end{pmatrix}p\left(0.t_3t_4\dots\right)\tag{3.3}$$

Beweis. In ternärer Darstellung

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}0.t_1\\0.\left(\tau^{t_1}t_2\right)\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sigma^{t_2}&0\\0&\sigma^{t_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.t_3\left(\tau^{t_4}t_5\right)\dots\\0.\left(\tau^{t_3}t_4\right)\dots\end{pmatrix}\\&\quad=\begin{pmatrix}0.t_1\\0.\left(\tau^{t_1}t_2\right)\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0.\left(\tau^{t_2}t_3\right)\left(\tau^{t_2+t_4}t_5\right)\dots\\0.\left(\tau^{t_1+t_3}t_4\right)\dots\end{pmatrix}\\&\qquad=\begin{pmatrix}0.t_1\left(\tau^{t_2}t_3\right)\dots\\0.\left(\tau^{t_1}t_2\right)\dots\end{pmatrix}=p\left(0.t_1t_2t_3\dots\right)\end{aligned}\tag{3.4}$$

□

Korollar 3.3. p ist wohldefiniert

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sind die ternären Darstellungen von t äquivalent:

$$t = 0.t_1 \dots t_k 0 \dots = 0.t_1 \dots t_{k-1} (t_k - 1) 2 \dots \tag{3.5}$$

Dann Induktion über n, $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, mithilfe des Lemmas □

Peano. Sei $t = 0.t_1 t_2 \dots$, $\delta > 0$

- t endet nicht mit einer unendlichen Folge an 0 oder 2.
  Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, dass $\frac{1}{3^N} < \frac{\delta}{2}$, dann gibt es ein Intervall der Form $\left(\frac{a}{3^{2N}}, \frac{a+1}{3^{2N}}\right)$ das t enthält. Dies wird abgebildet in ein Quadrat der Kantenlänge $\frac{1}{3^N}$, also ist für $\epsilon = \min\left\{\left|t - \frac{a}{3^{2N}}\right| \middle| a \in \left\{0, \dots, 3^{2N}\right\}\right\}$ die Stetigkeitsbedingung erfüllt.
- $t = 0.t_1 \dots t_k 0 \dots$, dann ist für $\epsilon = \frac{1}{3^{2N}}$ mit $N \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\frac{1}{3^N} < \frac{\delta}{4}$ die Stetigkeit erfüllt, da dann das Intervall von $\left(\frac{a-1}{3^{2N}}, \frac{a+1}{3^{2N}}\right)$ das t enthält in ein Quadrat der Kantenlänge $\frac{1}{3^N}$ um $p(t)$ abgebildet wird.

□

Beispiel 19. Die Lage der einzelnen Teilintervalle erhält man grob über

$$\begin{aligned} p(0.00\dots) &= \begin{pmatrix} 0.0\dots \\ 0.0\dots \end{pmatrix} \\ p(0.01\dots) &= \begin{pmatrix} 0.0\dots \\ 0.1\dots \end{pmatrix} \\ p(0.02\dots) &= \begin{pmatrix} 0.0\dots \\ 0.2\dots \end{pmatrix} \\ p(0.1\dots) &= \begin{pmatrix} 0.1\dots \\ 0.(\tau t_2)\dots \end{pmatrix} \\ p(0.2\dots) &= \begin{pmatrix} 0.2\dots \\ 0.t_2\dots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Und auch die vorher uneindeutigen Werte sind jetzt eindeutig:

$$p(0.1) = \begin{pmatrix} 0.1000\dots \\ 0.2222\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.0 \end{pmatrix}; \quad p(0.0222\dots) = \begin{pmatrix} 0.0222\dots \\ 0.2222\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Beispiel 20. Die linksinverse $c : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ von f, also mit $f \circ c = \mathrm{id}_{[0,1]}$

$$f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]; \begin{pmatrix} 0.a_1 a_2 \dots \\ 0.b_1 b_2 \dots \end{pmatrix} \mapsto 0.a_1 b_1 a_2 b_2 \dots \tag{3.8}$$

wäre auch ein guter Kandidat, also die Abbildung

$$c : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]; 0.t_1 t_2 \dots \mapsto \begin{pmatrix} 0.t_1 t_3 \dots \\ 0.t_2 t_4 \dots \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

allerdings ist dann bei dem Dreierraster an den Sprungpunkten, also zum Beispiel.

$$t = 0.1 = 0.0222\dots \quad c(0.1) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0 \end{pmatrix} p(0.022\dots) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

unstetig. In allen anderen Punkten stetig.

Bemerkung. Die endgültige Funktion folgt dann aus der Beobachtung, dass die Funktion

$$\sigma : [0,1] \to [0,1]; t \mapsto 1 - t \tag{3.11}$$

in ternärer Darstellung folgendermaßen wirkt $\tau : \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}; \tau(0) = 2; \tau(2) = 0; \tau(1) = 1$

$$\sigma(t = 0.t_1 t_2 \dots) = 0.(\tau t_1)(\tau t_2)\dots \tag{3.12}$$

Dann wird also immer für das mittlere Intervall die Reihenfolge gedreht.

KAPITEL 4

Konstruktionsmethoden topologischer Räume

4.1. Unterräume

Definition 4.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die *Teilmengentopologie* ist definiert durch

$$V \subseteq A \text{ ist offen bzgl. } (A, \mathcal{T}_A) \;:\Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{T}: \; V = A \cap U$$

Bemerkung. (1) Die Teilmengentopologie ist tatsächlich eine Topologie
(2) V ist in 4.1 nicht unbedingt offen bzgl. $(X, \mathcal{T})$
(3) Die Teilmengentopolgie ist die gröbste bzgl. der die Einbettung $\iota : A \to X$, $a \mapsto a$ stetig ist. Es ist $\iota^{-1}(U) = A \cap U$ offen für U offen.
(4) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $d_A := d_{|A \times A}$ eine Abstandsfunktion auf A und die induzierte Topologie $\mathcal{T}_{d_A}$ ist genau die Teilmengentopologie asoziiert zu $\mathcal{T}_d$.

Definition 4.2. Eine Eigenschaft P von topologischen Räumen heißt vererbbar, genau dann, wenn für alle topologischen Räume $(X, \mathcal{T})$ und für alle Teilmengen $A \subseteq X$ gilt: X hat $P \Rightarrow$ A hat P.

Proposition 4.3. *Die folgenden Eigenschaften topologischer Räume sind vererbbar:*
(1) *Metrisierbarkeit*
(2) T_1
(3) T_2 *(hausdorffsch)*
(4) *erstes Abzählbarkeitsaxiom*
(5) *zweites Abzählbarkeitsaxiom*

Beweis. (1) nach 4.1.
(3) Seien $x, y \in A$ und $x \neq y$. Da X T_2 ist, existieren $U, V \subseteq_O X$, sodass $x \in U$ $y \in V$ mit $U \cap V = \varnothing$. Mit $U' := A \cap U$ und $V' := A \cap V$ ist $U', V' \in \mathcal{T}_A$ und $U' \cap V' = \varnothing$. □

Bemerkung. Seperabilität ist nicht vererbbar.

Lemma 4.4. *Sei $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes X. Dann gilt für eine Teilmenge $A \subseteq Z$:*

$$A \text{ ist abgeschlossen in } Z \;\Leftrightarrow\; A \text{ ist abgeschlossen in } X$$

Beweis. „⇐“ Sei A abgeschlossen in X, dann ist $A = A \cap Z$ ist abgeschlossen in Z
„⇒“ Sei A abgeschlossen in Z, dann gibt es $T \subseteq X$ abgeschlossen in X, also $T \cap Z = A$, also ist A abgeschlossen in X □

Beispiel 21. Die Voraussetzung, dass Z abgeschlossen ist, ist tatsächlich notwendig. Betrachte $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ und $[\frac{1}{2}, 1) \subseteq (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $[\frac{1}{2}, 1)$ abgeschlossen in $(0,1)$, aber nicht in $\mathbb{R}$.

Definition 4.5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $\{U\}_{i \in I}$ von offenen Teilmengenmengen von X, sodass $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt.

Beispiel 22. $X = \mathbb{R}$ und $I = \mathbb{Z}$. Dann ist $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_1(i)$, also ist $\{B_1(i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.

Lemma 4.6. *Sei $\{U\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X bzgl. Topologie $\mathcal{T}$ und $V \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt*

$$V \subseteq_O X \;\Leftrightarrow V \cap U_i \subseteq_O U_i \;\; \forall i \in I \;\; \textit{Teilmengentopologie bzgl. } U_i$$

Beweis. „⇒“
Definition der Teilmengentopologie.
„⇐“
Sei $V \cap U_i \subseteq_O U_i \Rightarrow \ \exists\, W \ \subseteq_O X : \ W \cap U_i = V \cap U_i$ Dan W und U_i beide offen in X sind, ist auch $V \cap U_i$ offen in X $\forall i \in I$. Also ist $V = V \cap X = V \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} V \cap U_i$ offen in X. □

Proposition 4.7. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sei $\{U_i\}_{\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f_{|U_i} \text{ ist stetig } \forall i \in I$$

Beweis. „⇒“
folgt aus 4.1, da $f_{|U_i} = f \circ \iota$.
„⇐“
Sei $W \subseteq_O Y$. Dann ist $U_i \cap W = f_{|U_i}^{-1}(W) \subseteq_O U_i \ \forall i \in I$. Mit 4.6 folgt, dass $f^{-1}(W) \subseteq_O X$ $\Rightarrow$ f stetig. □

4.1.1. Fortsetzungsproblem. Sei $A \subseteq X$ ein Teilraum eines topologischen Raumes X und sei $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung in den top. Raum Y.
Frage: unter welchen Umständen existiert eine stetige Fortsetzung g von f, sodass $g_{|A} = f$ gilt und $g : X \to Y$ stetig ist?

Beispiel 23.
(1) $A = \{0,1\} \subseteq X = [0,1]$. $f = id_A : \{0,1\} \to \{0,1\}$ hat keine stetige Fortsetzung zu $g : [0,1] \to \{0,1\}$, da $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ gelten sollte. Benutze Zwischenwertsatz. Beachte die Topologie auf A als Teilraum der Standardtopologie.
(2)

Lemma 4.8. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist die Abbildung $d(-,A) : X \to \mathbb{R}$ mit $d(x,A) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ stetig und $d(x,A) > 0$, falls $x \in X \backslash A$ gilt.*

Beweis. Es gilt für beliebiges $a \in A$

$$d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a)$$

Nun nehme das Infimum

$$d(x,A) \le \inf_{a \in A}\{d(x,y) + d(y,a)\} \le d(x,y) + d(y,A) \ \Leftrightarrow$$
$$d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y)$$

Vertauscht man x und y, so gilt auch

$$-(d(x,A) - d(y,A)) \le d(x,y) \ \Rightarrow \ |d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

Damit ist $d(-,A)$ Lipschitzstetig.
Zeige $cl(A) = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\} = d^{-1}(\{0\})$
„⊆“
Es gilt $A \subseteq d^{-1}(\{0\})$ und $d^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen. Damit folgt $cl(A) \subseteq d^{-1}(\{0\})$.
„⊇“
Annahme $x \in d^{-1}(\{0\})$ und $x \notin cl(A) \ \Rightarrow x \in int(X \backslash A) \ \Rightarrow \ \exists \varepsilon > 0 : \ \mathbb{B}_\varepsilon(x) \subseteq X \backslash A \ \Rightarrow$ $d(x,A) > 0$ Widerspruch, also ist $x \in cl(A)$. □

Korollar 4.9. Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Dann sind auch die folgenden Abbildungen stetig: $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \ne 0 \ \forall x \in X$, auch $\frac{f}{g}$.

Beweis. Definiere $f \times g : X \times X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$ und $sum : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + y$. Dann ist $f + g = sum \circ f \times g$ eine Verkettung stetiger Funktionen. □

Lemma 4.10. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $B, C \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Abbildung $h : X \to [-1,1]$, sodass $h_{|B} = -1$ und $h_{|C} = 1$ gilt.*

Beweis. Definiere $h(x) := \frac{d(x,B)-d(x,C)}{d(x,B)+d(x,C)}$. Nach 4.9 ist diese Abbildung stetig und erfüllt offenbar die gewünschten Eigenschaften. □

Korollar 4.11. Unter denselben Annahmen wie in 4.10 existiert für $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < c$ eine stetige Abbildung $g : X \to [b, c]$ mit $g_{|B} \equiv b$ und $g_{|C} \equiv c$.

Beweis. Betrachte die Komposition

$$\begin{aligned} g : X &\to [-1, 1] \to [b, c] \\ x &\mapsto t \mapsto \frac{b+c}{2} + t \cdot \frac{c-b}{2} \end{aligned}$$

□

Theorem 4.12 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei ()*

Beweis. Angenommen, dass $f : A \to \mathbb{R}$ ein beschränktes Bild hat. Das bedeutet, dass $|f(a)| \leq M$ für alle $a \in A$.
Dann sind $B_1 := f{-}1([-M, -\frac{M}{3}])$ und $C_1 := f{-}1([\frac{M}{3}, M])$ abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von X.
Nach dem Korollar 4.11 existiert eine stetige Abbildung

$$g_1 : X \to [-\frac{M}{3}, \frac{M}{3}]$$

mit $g_{|B_1} = -\frac{M}{3}$ und $g_{|C_1} = \frac{M}{3}$. Weiter gilt $|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}M \quad \forall a \in A$.
Setze

$$\begin{aligned} f_1 : A &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f(a) - g_1(a) \end{aligned}$$

□

4.2. Produkte

Seien X, Y topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die Topologie, die durch die Basis $\mathcal{B} := \{U \times V \subseteq X \times Y \mid U \subseteq_O X,\ V \subseteq_O Y\}$ erzeugt wird.

Bemerkung. (1) $\mathcal{B}$ ist tatsächlich eine Basis einer Topologie:
- für alle $(x, y) \in X \times Y$ existiert die Menge $X \times Y \in \mathcal{B}$, sodass $(x, y) \in \mathcal{B}$ gilt.
- $\underbrace{(U_1 \times V_1)}_{\in \mathcal{B}} \cap \underbrace{(U_2 \times V_2)}_{\in \mathcal{B}} = (U_1 \cap U_2 \times V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B}$ selbst ist keine Topologie. Die Menge beliebiger Teilmengen von $\mathcal{B}$ ist eine Topologie.
(3) Betrachte $X = Y = \mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardtopologie.
(4) Induktiv kann man die Produkttopologie auf X^n defineren. Sie hat die Basis $\mathcal{B} = \{U_1 \times ... \times U_n \mid U_i\text{offen für } 1 \leq i \leq n\}$.

Definition 4.13. Sei I eine nicht notwendigerweise endliche Menge und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.
(1) Die *Boxtopologie* auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist erzeugt durch die Basis

$$\mathcal{B}_{Box} := \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \subseteq_O X_i \ \forall i \in I\}$$

(2) Die *Produkttopologie* auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist erzeugt durch die Basis

$$\mathcal{B}_{Prod} := \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \subseteq_O X_i \ \forall i \in I,\ U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I\}$$

Bemerkung. (1) Ist I eine endliche Menge, dann gilt $\mathcal{B}_{Box} = \mathcal{B}_{Prod}$.
(2) Beide Mengen sind tatsächlich Basen von Topologien

Lemma 4.14. *Die Projektionen*

$$\begin{aligned} pr_j : \prod_{i \in I} X_i &\to X_j \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto x_j \end{aligned}$$

sind sowohl für die Boxtopologie, als auch für die Produkttopologie stetig.

Beweis. Sei $U \subseteq_O X_j \Rightarrow pr_j^{-1}(U) = (\prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i) \times U \in \mathcal{B}_k$ $k \in \{Box, Prod\}$. □

Proposition 4.15. *Sei Z ein topologischer Raum und $f : Z \to X = \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung. Dann gilt*

$$f \text{ ist stetig (} X \text{ bzgl. der Produkttopologie)} \Leftrightarrow pr_i \circ f : Z \to X_i \text{ stetig } \forall i \in I$$

Beweis. „⇒“
folgt aus 4.14, da Verkettungen stetiger Funktionen stetig sind.
„⇐“
Sei $\prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{B}_{Prod}$. Also $U_i \subseteq_O X_i$ und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$. Dann gilt

$$f^{-1}(\prod_{i \in I} U_i) = \bigcap_{i \in I} (pr_i \circ f)^{-1}(U_i)$$

Das folgt aus:
sei $z \in Z$ mit $f(z) = (x_i)_{i \in I}$. Dann ist
$z \in \bigcup_{i \in I} (pr_i \circ f)^{-1}(U_i) \Leftrightarrow (pr_i \circ f)(z) \in U_i \ \forall i \in I \Leftrightarrow z \in f^{-1}(\prod_{i \in I} U_i)$. Der Durchschnitt geht aber nur über endlich viele $i \in I$, da fast alle $U_i = X_i$ sind und damit $(pr_i \circ f)^{-1}(X_i) = Z$ gilt.
Als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist $f^{-1}(\prod_{i \in I} U_i) \subseteq_O Z$. folgt unter Verwendung von 2.21? □

Definition 4.16. Sei X ein topologischer Raum und I eine Menge. Dann ist $X^I := \prod_{i \in I} X_i$ mit $X_i = X \ \forall i \in I$.Definiere die diagonale Abbildung $\delta : X \to X^I$, $x \mapsto (x_i)_{i \in I}$, sodass $x_i = x \ \forall i \in I$.

Beispiel 24.
(1) Sei $I = \{1, 2\}$. $X = \mathbb{R}$. Dann ist das Bild $\mathbb{R}$ unter δ die Diagonale in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(2) Sei $I = \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{R}$. $U_n = \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\}$. Dann ist $\delta^{-1}(U_1 \times U_2 ...) = U_1 \cap U_2 \cap ... = \{0\}$ nicht offen. Aber $U_1 \times U_2 ...$ ist offen in der Boxtopologie. Also ist δ nicht stetig, wenn wir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie ausstatten.
Aber δ ist stetig, wenn wir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie ausstatten, da $pr_n \circ \delta = id_{\mathbb{R}}$, also $x \mapsto (x, x, ...) \mapsto x$ gilt und es 4.15 ist anwendbar.

4.3. Quotientenstruktur

Definition 4.17. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Quotiententopologie auf Y (durch f induzierte Topologie) ist definiert durch

$$U \subseteq Y \text{ ist offen} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq_O X$$

Das ist die feinste Topologie auf Y, die f stetig macht.

Bemerkung. Sei X eine Menge.
Es gilt $(f : X \twoheadrightarrow Y) \cong (f' : X \twoheadrightarrow Y') :\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $g : Y \to Y' : g \circ f = f', \ g^{-1} \circ f' = f$.
Es existiert eine Bijektion zwischen

$$\{\text{Äquivalenzrel. auf X}\} \to \{\text{surj. Abbildungen mit } X \text{ als Definitionsmenge}\}/\cong$$
$$\sim \mapsto (\pi : X \to X/\sim;\ x \mapsto [x])$$
$$\sim_f \leftarrow\!\shortmid (f : X \twoheadrightarrow Y)$$

wobei $\sim_f$ definiert ist als: $x \sim_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$

Definition 4.18. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann heißt f eine Quotientenabbildung, falls f surjektiv und Y die Quotiententopologie hat.

Bemerkung. Y hat die Quotiententopologie $\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y : \ f^{-1}(U) \subseteq_O X \ \Rightarrow U \subseteq_O Y$. Dies folgt, da falls $U \subseteq_O Y$ gilt, man die Stetigkeit von f für die Rückrichtung von 4.17 benutzen kann.

Theorem 4.19.
(1) *Sei $f : X \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung. Dann gilt:*

$$f \text{ ist offen} \Rightarrow f \text{ ist eine Quotientenabbildung}$$

(2) *Sei $f : X \to Y$ eine Quotientenabbildung, Z ein weiterer top. Raum. $g : Y \to Z$ eine Abbildung. Dann gilt:*

$$g \text{ ist stetig} \Leftrightarrow g \circ f \text{ ist stetig}$$

(3) *Sei $f : X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : Y \to X/\sim_f$ mit $h \circ f = \pi$ und $\pi : X \to X/\sim_f$*

Beweis. (1) Sei $V \subseteq Y$, sodass $f^{-1}(V) \subseteq_O X$. Da f surjektiv ist, ist $f(f^{-1}(V)) = V$ und da f offen ist, wird die offene Menge $f^{-1}(V)$ auf eine offene Mengen abgebildet. Also $V = f(f^{-1}(V)) \subseteq_O Y$.

(2) „$\Rightarrow$“
Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.
„$\Leftarrow$“
Sei $U \subseteq_O X$. Es ist zu zeigen, dass $g^{-1}(U) \subseteq_O Y$.
Da $g \circ f$ stetig ist, gilt $(g \circ f)^{-1}(U) \subseteq_O X$. Da f eine Quotientenabbildung ist, gilt $f^{-1}[g^{-1}(U)] \subseteq_O X \;\Rightarrow g^{-1}(U) \subseteq_O Y$.

(3) Definiere $h : Y \to X/\sim_f,\; f(x) = y \mapsto [x],\; [x] \mapsto f(x)$. Bijektion.
h ist stetig, da π stetig ist, benutze (2).
h^{-1} ist stetig, da $f = h^{-1} \circ \pi$ stetig ist und und π eine Quotientenabbildung ist, benutze (2).

□

Bemerkung. Gegeben sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem top. Raum X. Wir schreiben $X/\sim$ für den topologischen Raum $X/\sim$ ausgestattet mit der Quotiententopologie bzgl. $\pi : X \to X/\sim$.

Beispiel 25. (1) Betrachte die 1-Sphäre

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Sie ist homöomorph zu $[0,1]/\{0,1\}$.

(2) Man kann den 2-dim. Torus auf drei Weisen beschreiben. Zuerst als Teilraum

$$T = \left\{ 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} \mid \phi, \psi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Es existiert nun ein Homöomorphismus, des Produkts

$$S^1 \times S^1 \to T$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \mapsto 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xu \\ yu \\ v \end{pmatrix}$$

Lemma 4.20 (Kompatibilität von Produkten und Quotienten). *Seien X_1, X_2 topologische Räume mit Äquivalenzrelationen $\sim_1, \sim_2$. Definiere nun eine Äquivalenzrelation auf $X_1 \times X_2$ durch:*

$$(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2') :\Leftrightarrow x_1 \sim_1 x_1' \wedge x_2 \sim_2 x_2'.$$

Dann gilt $(X_1 \times X_2)/\sim \;\cong X_1/\sim_1 \times X_2/\sim_2$

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f = (\pi_1 \times \pi_2) :\; X_1 \times X_2 &\to X_1/\sim_1 \times X_2/\sim_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto ([x_1], [x_2]) \end{aligned}$$

ist eine Quotientenabbildung, da Produkte surjektiver / stetiger / offener Abbildungen surjektiv / stetig / offen bleiben. Mit 4.19 folgt die Behauptung. □

Beispiel 26. (1) Möbiusband

(2) Projektiver Raum

Definition 4.21. Sei X ein topologischer Raum.

(1) Der Zylinder von X ist $X \times [0,1]$
(2) Der Kegel von X ist $(X \times [0,1])/\sim$, $(x,1) \sim (x',1)\ \forall x,x' \in X$
(3) Der Doppelkegel von X: $(X \times [0,1])/\sim$, $(x,1) \sim (x',1) \wedge (x,0) \sim (x',0)\ \forall x,x' \in X$

BEISPIEL 27. Die Summe von Sphären? Week5a

Welche topologischen Eigenschaften bleiben bei der Quotientenbildung erhalten?
Eine Eigenschaft, die erhalten bleibt ist Seperabilität.

THEOREM 4.22. *Sei X ein Hausdorffraum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, sodass $\pi : X \to X/\sim$ eine offene Abbildung ist. Dann gilt:*

$$X/\sim \text{ ist haudorffsch} \Leftrightarrow \Gamma_\sim = \{(x,x') \in X \times X \mid x \sim x'\} \text{ abg. in } X \times X$$

Wobei auf $X \times X$ die Produkttopologie definiert ist

BEWEIS. „$\Rightarrow$"
Sei $(x,x') \notin \Gamma_\sim$. Zeige, dass dann (x,x') ein innerer Punkt von $(X \times X)/\Gamma_\sim$ ist.
$[x] \neq [x'] \in X/\sim \Rightarrow$ da $X/\sim$ hausdorffsch ist, existieren offene Mengen $U,V \subseteq_O X/\sim$ mit $[x] \in U$, $[x'] \in V$ und $U \cap U = \varnothing \Rightarrow x \in \pi^{-1}(U)$, $x' \in \pi^{-1}(V)$ und $\nexists y \in \pi^{-1}(U)\ y' \in \pi^{-1}(V)$, sodass $y \sim y'$. Also ist $(x,x') \in \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V) \subseteq_O (X \times X)/\sim$.
„$\Leftarrow$"
Sei $[x] \neq [x'] \ \Rightarrow\ x \nsim x' \ \Rightarrow\ (x,x') \in (X \times X)\backslash\Gamma_\sim$ Da $\Gamma_\sim$ abgeschlossen ist, ist $(X \times X)\backslash\Gamma_\sim$ offen. $\Rightarrow\ \exists (x,x') \in W \subseteq_O (X \times X)\backslash\Gamma_\sim$.
Da $\mathcal{B}_{Prod}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_{Prod}$ ist, existieren $U,V \subseteq_O X$ mit $(x,x') \in U \times V \subseteq W \subseteq (X \times X)\backslash\Gamma_\sim$
Also folgt (?) $\pi(U),\pi(V) \subseteq_O X/\sim$, $[x] \in \pi(U)$, $[x'] \in \pi(V)$ und $\pi(U) \cap \pi(V) = \varnothing\ \Rightarrow\ X/\sim$ hausdorffsch. □

KOROLLAR 4.23. Es gilt folgende Äquivalenz

$$X \text{ hausdorffsch} \Leftrightarrow \Delta = \{(x,x) \in (X \times X)\} \subseteq (X \times X) \text{ ist abgeschlossen}$$

BEWEIS. Beachte $X = X/=$. □

DEFINITION 4.24. Sei G eine Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine stetige Operation von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}(X)$, wobei

$$\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ ist Homöomorphismus}\}$$

eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung ist.

BEMERKUNG. Für die Operation auf einem Element $x \in X$ schreibe $g \cdot x := \rho(g)(x)$.

PROPOSITION 4.25 (Charakterisierung stetige Gruppenoperationen). *Wenn $G \curvearrowright X$ eine stetige Gruppenoperation ist*

(1) *Das Folgende ist eine Äquivalenzrelation (geschrieben X/G) auf X:*

$$x \sim x' \ :\Leftrightarrow\ \exists g \in G :\ g \cdot x = x'$$

(2) *$\pi : X \to X/G$ ist offen.*
(3) *Sei X hausdorffsch und G eine endliche Gruppe. Dann ist X/G ebenfalls hausdorffsch.*

BEWEIS. (1) Genau wie im Fall endlicher Gruppen und den Bahnen.
(2) Sei $U \subseteq_O X$. Dann ist

$$\pi(U) = \{[x] \in X/G \mid \exists (g \in G \wedge x' \in U) :\ g \cdot x' = x\}$$

Dann gilt, da $\rho(g)$ ein Homöomorphismus, also offen

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{\rho(g)(U)}_{\text{offen}} \subseteq_O X$$

Da π aber stetig ist, folgt, dass $\pi(U) \subseteq_O X/G$. Also ist π offen.

(3) Seien $[x], [y] \in X/G$ und $[x] \neq [y]$. Da X hausdorffsch ist, existieren $U, V \subseteq_O X$, sodass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \varnothing$.
Nun gilt $\forall g \in G$: $[x] \in \pi(g(U))$, $[y] \in \pi(g(U))$. Also folgt

$$[x] \in \bigcap_{g \in G} \pi(g(U)) =: U'; \quad [y] \in \bigcap_{g \in G} \pi(g(V)) =: V'$$

Da G endlich ist, sind U', V' offen.
Annahme $\exists [z] \in U' \cap V'$: Dann ist $[z] \in \pi(g(U))$ und $z \in \pi(g(V))$ $\forall g \in G$, also

$$\exists (g' \in G \wedge u \in U): \; z = g'g \cdot u$$

$$\exists (g'' \in G \wedge v \in V): \; z = g''g \cdot v$$

$\Rightarrow z \in \mathrm{Bild}(g(U))$ und $z \in \mathrm{Bild}(g(V))$ $\forall g \in G \Rightarrow z \in U \cap V$, Widerspruch.
Also ist $U' \cap V' = \varnothing$ und X/G hausdorffsch.

$\square$

KAPITEL 5

Zusammenhang

DEFINITION 5.1. Sei X ein topologischer Raum.

(1) X ist wegzusammenhängend :⇔ Alle Punkte in X sind verbunden durch Wege :⇔ $\forall x, x' \in X\ \exists\ \sigma : [0,1] \to X$ stetige Abbildung, mit $\sigma(0) = x$ und $\sigma(1) = x'$
(2) X heißt zusammenhängend :⇔ $\varnothing$ und X die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen in X sind.

DEFINITION 5.2. Ein Raum Y ist lokal zusammenhängend, wenn für alle offenen Umgebungen $x \in U \subseteq_O Y$ eine zusammenhängende Menge $x \in V \subseteq_O U$ gibt

GEREONNNNNNN GEÄREJON

BEMERKUNG. $U \subset X$ ist offen und abgeschlossen :⇔ $bdy(U) = \varnothing$

BEWEIS. U abgeschlossen $\Rightarrow bdy(U) \subseteq U$
U offen $\Rightarrow bdy(U) \cap U = \varnothing$. □

LEMMA 5.3 (Keine nichttrivialen Zerlegungen in offene, disjunkte Mengen). *X ist zusammenhängend ⇔ $\forall\ U, V \subseteq_O X$ mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$ gilt $U = X$, $V = \varnothing$ oder $V = X$, $U = \varnothing$*

BEWEIS. „⇒ "
Sei X zusammenhängend und $U, V \subseteq_O X$, $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$. Dann sind aber $X \backslash U = V$ und $X \backslash V = U$ offen und abgeschlossen. Widerspruch zur Definition.
„⇐ "
Sei $U \subseteq X$ offen und abgeschlossen. Dann ist $V := X \backslash U \subseteq_O X$ und $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$.$\Rightarrow U = X$, $V = \varnothing$ oder $V = X$, $U = \varnothing$ nach Voraussetzung. Also ist X zusammenhängend. □

PROPOSITION 5.4. *Sei X ein topologischer Raum $A, B \subseteq X$, sodass $A \subseteq B \subseteq cl(A)$. Dann gilt*

$$A \text{ zusammenhängend} \Rightarrow B \text{ zusammenhängend}$$

BEWEIS. Sei $\varnothing \neq U \subseteq B$ offen und abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $U = B$ gilt.
„$U \cap A \neq \varnothing$ ": sei $x \in U$
1.Fall $x \in A$. Fertig.
2.Fall Annahme $x \notin A \Rightarrow x \in acc(A)$. Da x HP ist, ist dann $\forall x \in V \subseteq_O X : V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$.
Setze $V = U$. Widerspruch. $\Rightarrow U \cap A \neq \varnothing$.
Also ist $\varnothing \neq U \cap A \subseteq A$ offen und abgeschlossen (bzgl. der Teilmengentopologie auf A). Da A zusammenhängend ist, folgt, dass $U \cap A = A$ gilt $\Rightarrow cl(A) \subseteq cl(U) = U$. Also $B \subseteq U$, was zu zeigen war. □

PROPOSITION 5.5. *Jedes Intervall $I \in \mathbb{R}$ ist zusammenhängend und wegzusammenhängend.*

BEWEIS.
- wegzusammenhängend: Sei $x \le x' \in I$, dann ist die Abbildung

$$\sigma : [0,1] \to I; \sigma(t) = x + t\left(x - x'\right) \tag{5.1}$$

ein stetiger Weg von x nach x', da $\sigma(0) = x$ und $\sigma(1) = x'$, der komplett im Intervall liegt, da $x \le \sigma(t) \le x'$
- zusammenhängend: Nach 5.4 reicht es die Aussage für das offene Intervall $I = (a, b)$ zu zeigen. Sei $\varnothing \neq U \subseteq I$. Es ist zu zeigen, dass dann $U = I$ gilt.
Sei $x \in U$ und setze $s = \sup\{u \in \mathbb{R} \mid [x, u] \subseteq U\}$.
Annahme $s < b$: $\forall \varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{B}_\varepsilon(s) \cap U \neq \varnothing$ und $I \backslash U \cap \mathbb{B}_\varepsilon(s) \neq \varnothing$. Dann folgt jedoch,

dass $s \in bdy_I(U)$. Der Rand einer offenen und abgeschlossenen Menge ist jedoch leer. Widerspruch. Also gilt $s = b$.
Analog verfahre mit $i = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid [l,x] \subseteq U\} = a$.
Sei $y \in I$ mit $a < y < b$. 1. Fall: $y \geq x \;\Rightarrow\; \exists u \geq y : y \in [x,u] \subseteq U \;\Rightarrow y \in U$.
2.Fall: $y \leq x \;\Rightarrow\; \exists l \leq y : y \in [l,x] \subseteq U \;\Rightarrow y \in U$.
Insgesamt folgt $I = U$.

□

THEOREM 5.6. *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt*

$$X \text{ wegzusammenhängend} \Rightarrow X \text{ zusammenhängend}$$

BEWEIS. Folgern durch Widerspruch, sei X nicht zusammenhängend aber wegzusammenhängend, dann existiert $\varnothing \neq U \subsetneq X$ offen und abgeschlossen. Dann existieren $x \in U$ und $x' \in U^C$ und da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $\sigma : [0,1] \to X$ der $x = \sigma(0)$ mit $x' = \sigma(1)$ verbindet. Das Urbild von U, also $\varnothing \neq \sigma^{-1}(U) \subsetneq [0,1]$ ist dann eine offene , abgeschlossene und nicht leere Teilmenge von $[0,1]$, was ein Widerspruch ist, da $[0,1]$ als Intervall zusammenhängend ist. □

KOROLLAR 5.7. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ ist äquivalent

(1) A ist zusammenhängend
(2) A ist wegzusammenhängend
(3) A ist ein Intervall

BEWEIS. „(1) ⇒ (3)“
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und setze $i = \inf(A)$ und $s = \sup(A)$.

$$A \text{ ist Intervall} \Leftrightarrow (i,s) \subseteq A$$

Annahme: $\exists\ x \in (i,s)$, sodass $x \notin A$. Setze $U = (-\infty,x) \cap A, V = (x,\infty) \cap A \subseteq_O A$. Dann ist das eine nichttriviale Zerlegung von A. A ist aber zusammenhängend. Widerspruch.
„(3) ⇒ (1)“ ist 5.5.
Also sind (1) und (3) äquivalent.
„(1) ⇒ (2)“ ist 5.6
„(3) ⇒ (2)“ ist 5.5

□

Teilmengen von (weg-) zusammenhängenden topologischen Räumen sind nicht unbedingt wegzusammenhängend

$$(0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R} \tag{5.2}$$

dafür ist der Zusammenhang verträglich mit anderen Konstruktionen

THEOREM 5.8. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:*

$$X \text{ ist (weg-)zusammenhängend} \Rightarrow f(X) \text{ ist (weg-)zusammenhängend}$$

bezüglich der Teilmengentopologie auf $f(X)$

BEWEIS.
wegzusammenhängend:
Sei $f(x), f(x') \in f(X)$. Da X wegzusammenhängend ist gibt es einen stetigen Weg $\sigma : [0,1] \to X$, dass $\sigma(0) = x, \sigma(1) = x'$, also verbindet $\sigma' = f \circ \sigma : [0,1] \to f(X)$ die beiden Punkte $\sigma'(0) = f(x)$ und $\sigma'(1) = f(x')$.
zusammenhängend:
Sei $U \subseteq f(X)$ offen und abgeschlossen, dann ist $f^{-1}(U)$ auch offen und abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(U) = \varnothing$ oder $f^{-1}(U) = X$, also $U = \varnothing$ oder $U = f(X)$ □

KOROLLAR 5.9. Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gilt:

$$X \text{ ist (weg-)zusammenhängend} \Rightarrow X/\sim \text{ ist (weg-)zusammenhängend}$$

BEWEIS. Verwende 5.8 auf die Funktion $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$. Diese Funktion ist stetig und surjektiv. □

Beispiel 28 (Beispiele wegzusammenhängender topologischer Räume). Mannigfaltigkeiten, wie der Kreis $\mathbb{S}^1$, der Torus $\mathbb{T}^1$ und der projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ sind wegzusammenhängend.

Korollar 5.10. Wegzusammenhang ist eine topologische Eigenschaft i.e. sie ist erhalten unter Homöomorphismen 5.8

Korollar 5.11 (Zwischenwertsatz). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt: $\forall y \in [f(a), f(b)] :\ \exists\, x \in [a,b]$, sodass $y = f(x)$.

Beweis. Nach 5.7 ist $[a,b]$ zusammenhängend. Nach 5.8 ist auch $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend. Wieder nach 5.7 ist $f([a,b])$ ein Intervall. Da $f(a), f(b) \in f([a,b])$ gilt, folgt $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$. □

Beispiel 29. Die topologische Sinuskurve g erfüllt den Zwischenwertsatz aber ist nicht stetig:

$$\begin{aligned} &f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \\ &g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Der Graph $\Gamma_g \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend, da zuerst $X \cong \Gamma_f$:

$$\phi \circ \phi^{-1} : X \to \Gamma_f \to X; x \mapsto (x, f(x)) \mapsto x \tag{5.4}$$

also ist Γ_f zusammenhängend und wegzusammenhängend.
Außerdem ist Γ_g zusammenhängend, da $(0,0) \in cl(\Gamma_f)$: $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, also $(0,0)$ ein Häufungspunkt in Γ_g ist
Da $\Gamma_f \subseteq \Gamma_g \subseteq cl(\Gamma_f)$ und Γ_f zusammenhängend, ist auch Γ_g zusammenhängend nach 5.4.
Der Graph Γ_G ist nicht wegzusammenhängend, da g nicht stetig ist (Beweis ufert aus)

Proposition 5.12. *Seien X,Y topologische Räume. Dann gilt:*

$$X, Y \ \textit{(weg-)zusammenhängend} \Rightarrow X \times Y \ \textit{(weg-)zusammenhängend}$$

Beweis.
- wegzusammenhängend: Seien $(x,y), (x',y') \in X \times Y$. Da X, Y wegzusammenhängend sind, existieren stetige Wege σ, τ, sodass $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = x'$, $\tau(0) = y$, $\tau(1) = y'$. Setze nun $\phi(t) := (\sigma(t), \tau(t))$. Dann ist ϕ stetig und $\phi(0) = (x,y)$, $\phi(1) = (x',y')$. Also ist $X \times Y$ wegzusammenhängend.
- zusammenhängend: Sei $U \subseteq X \times Y$ offen und abgeschlossen. Für $x \in X$ sei $U \cap (\{x\} \times Y) \subseteq \{x\} \times Y \cong Y$. Dann ist $U \cap (\{x\} \times Y)$ offen und abgeschlossen in $\{x\} \times Y$.
  Also ist $U \cap (\{x\} \times Y) = \varnothing$ oder $U \cap (\{x\} \times Y) = \{x\} \times Y$.
  Also ist $U = V \times Y$, mit $V = \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subseteq U\}$.
  Analog $U = X \times W$, $W = \{y \in Y \mid X \times \{y\} \subseteq U\}$.
  Dann ist $U = \varnothing$ oder $U = X \times Y$. Also ist $X \times Y$ zusammenhängend.

□

Definition 5.13. Sei X ein topologischer Raum. Dann sind $x, x' \in X$ wegäquivalent, $x \sim_{path} x' \ :\Leftrightarrow \exists \sigma : [0,1] \to X$ stetig, mit $\sigma(0) = x$ und $\sigma(1) = x'$.

Proposition 5.14. *Wegäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf X.*

Definition 5.15. Die Äquivalenzklassen der Wegäquivalenz heißen *Wegkomponenten.* Der Raum der Wegkomponenten ist der Quotient $\pi_0(X) := X/\sim_{path}$.

Bemerkung. Ist X wegzusammenhängend. dann sind alle Punkte wegäquivalent. Also existiert nur eine Wegkomponente.

Definition 5.16. Ein topologischer Raum ist lokal wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow\ \forall\ x \in X,\ \forall x \in U \subseteq_O X :\ \exists\ x \in V \subseteq_O U$, sodass V wegzusammenhängend ist

Beispiel 30. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist lokal wegzusammenhängend, da alle offenen Bälle wegzusammenhängend sind (gerade Verbindung). Aber i.A. *nicht* wegzusammenhängend und auch nicht zusammenhängend.

Theorem 5.17. *Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann ist jede Wegkomponente von X offen und abgeschlossen in X.*

Beweis. Sei $[x]$ eine Wegkomponente, dann gibt es für jeden Represäntanten eine Umgebung $x \in V \subseteq_O X$ die Wegzusammenhängend ist, also $[x] \in \operatorname{int}([x])$, damit ist $[x]$ offen.
$X \backslash [x]$ ist die Vereinigung aller anderen Wegkomponenten, die offen sind. Nach dem ersten Teil ist dann $X \backslash [x]$ offen, also ist $[x]$ abgeschlossen. □

Korollar 5.18. Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann hat $\pi_0(X) = X/ \sim_{path}$ die diskrete Topologie.

Korollar 5.19. Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann gilt

$$X \text{ ist zusammenhängend } \Leftrightarrow X \text{ ist wegzusammenhängend}$$

Beweis. Sei $[x] \subseteq X$ eine Wegkomponente $\Rightarrow$ 5.17 $\varnothing \neq [x] \subseteq X$ offen und abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, gilt $[x] = X$. Also ist X wegzusammenhängend. □

Theorem 5.20 (Spezialfall der Dimensionsinvarianz). $\mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^n$ *folgt* $n = 1$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^1$, dann ist $\mathbb{R}^1 \backslash \{x\}$ nicht zusammenhängend und wenn $\mathbb{R}^n$ homeomorph zu $\mathbb{R}^1$ ist, wäre auch $\mathbb{R}^n_- = \mathbb{R}^n \backslash \{y\}$ nicht zusammenhängend, das passt aber nicht, da $\mathbb{R}^n_-$ wegzusammenhängend □

KAPITEL 6

Kompaktheit

Bemerkung. Die Beschränktheit von Unterräumen vom $\mathbb{R}^n$ ist keine topologische Eigenschaft. Es gilt beispielsweise $\tan : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus.

Definition 6.1 (Kompaktheit). Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

$$X \text{ kompakt } :\Leftrightarrow \text{ Jede offene Überdeckung von } X \text{ hat eine endl. Teilüberdeckung}$$

Eine offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung, falls für die offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ gilt, dass $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ und eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, sodass $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Definition 6.2. Eine metrischer Raum (X, d) heißt beschränkt, falls $N \in \mathbb{N}$, $x \in X$ existieren, sodass $\mathbb{B}_N(x) = X$, bzw. genau dann, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $d(x, y) \leq M \ \forall x, y \in X$.

Proposition 6.3. *Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt*

$$X \text{ ist kompakt} \Rightarrow X \text{ ist beschränkt}$$

Beweis. Sei $x \in X$ fest und sei $U_n = \mathbb{B}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X:
$\forall y \in X : \ d(x, y) \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N}.\ n > d(x, y) \ \Rightarrow \ y \in \mathbb{B}_n(x)$
Unter der Annahme, dass X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$, sodass $X = \bigcup_{j\in J} U_j$ gilt. Setze $N := \max(J)$.
$U_j \subseteq U_N$, $\forall j \leq N. \Rightarrow \ \bigcup_{j\in J} U_j = B_N(x) \ \Rightarrow X$ ist beschränkt. □

Beispiel 31. (1) $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.
(2) Sei X eine unendliche Menge mit der diskreten Metrik.
Dann gilt, dass X beschränkt ist, da $X = \mathbb{B}_2(x) \ \forall x \in X$, aber nicht kompakt.

Proposition 6.4. *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt*

$$X \text{ kompakt} \Rightarrow f(X) \text{ kompakt}$$

Beweis. Sei $(f(U_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ dann ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, also existiert eine endliche Teilüberdeckung $J \subset I$ mit $|J| < \infty$ also überdeckt $(f(U_i))_{i\in J}\ f(X)$ □

Korollar 6.5. Kompaktheit ist eine topologische Eigenschaft, i.e. sie bleibt erhalten unter Homöomorphismen. (vorige Proposition)

Lemma 6.6 (Heine-Borel I). *Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Sei $S = \{x \in [a, b] \mid \exists J \subseteq I \text{endlich} : \ [a, x] \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j\}$ z.zg. $b \in S$:
$s := \sup(S)$. Es gilt $a \in S : \ \exists i_a \in I : \ a \in U_{i_a} \ \Rightarrow \{a\} = [a, a] \subseteq U_{i_a} \ \Rightarrow a \in S \ \Rightarrow \ a \leq s \leq b$.
„$s \in S$“: $\exists i_s \in I$: $s \in U_{j_s}$, da U_i offen $\exists \varepsilon > 0$: $\mathbb{B}_\varepsilon(s) \cap [a, b] \subseteq U_{j_s}$.
Nehme $s < x < \min(s + \varepsilon, b) \ \Rightarrow [a, x] \subseteq \bigcup_{j\in J} \ \Rightarrow x \in S$. Widerspruch. $s = \sup(S)$.
$\Rightarrow \ s = b \ \Rightarrow \ b \in S \ \exists J \subseteq I$ endlich: $[a, b] \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j \ \Rightarrow \ [a, b]$ kompakt. □

Beispiel 32. Es ist $\mathbb{R} \cong (0, 1) \cong (a, b) \not\cong [a, b]$.

Bemerkung. Sei $Z \subseteq X$ mit der Teilmengentopologie. Eine offene Überdeckung von Z als Teilmenge des topologischen Raumes X ist eine Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \subseteq_O X$ mit $Z \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Also ist $\{U_i \cap Z\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung bzgl. der eigenen Teilmengentopologie von Z.

Anders herum gilt: Existiert eine offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ von Z bzgl. der Teilmengentopologie, so existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$, wobei $U_i \subseteq_O X \ \forall i \in I$ und $U_i \cap Z = V_i$ gilt (die offenen Mengen bzgl. der Teilraumtopologie sind gerade so definiert). Zusammengefasst gilt:

$$Z \text{ kompakt } \Leftrightarrow \text{ Jede offene Überdeckung von } Z \text{ hat eine endl. Teilüberdeckung}$$

Proposition 6.7. *Sei X ein kompakter Raum. Dann ist jeder abgeschlossene Unterraum $Z \subseteq X$ auch kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $Z \subseteq X$, dann ist $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X\backslash Z\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Menge $J \subseteq I$, dass $Z \subseteq X = (\bigcup_{i\in J} U_i) \cup (X\backslash Z)$, also ist $Z \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$ und $\{U_i\}_{i\in J}$ ist eine endliche Überdeckung. □

Proposition 6.8. *Sei X ein Hausdorffraum, nicht notwendiger Weise kompakt. $Z \subseteq X$. Dann gilt*

$$Z \textit{ kompakt} \Rightarrow Z \textit{ abgeschlossen}$$

Beweis. Sei $x \in X\backslash Z$. Zeige $x \in int(X\backslash Z)$.
$\forall z \in Z$: da X hausdorffsch $\exists (z \in U_z \subseteq_O X \wedge x \in V_z \subseteq_O X): \ U_z \cap V_z = \varnothing$
$\Rightarrow \ \{U_z\}_{z\in Z}$ ist eine offene Überdeckung von $Z \subseteq X \ \Rightarrow$ da Z kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $\exists J \subseteq Z$: $Z \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.
Setze $x \in V := \bigcap_{j\in J} V_j \subseteq_O X \ \Rightarrow \ V \subseteq X\backslash(\bigcup_{j\in J} U_j) \subseteq X\backslash Z$.
$\Rightarrow \ x \in int(X\backslash Z) \ \Rightarrow \ X\backslash Z \subseteq X$ ist offen $Z \subseteq X$ abgeschlossen. □

Beispiel 33. Sei X mit der gröbsten Topologie ausgestattet (nicht hausdorffsch). Dann ist jede Teilmenge $Z \subseteq X$ kompakt, jedoch nicht abgeschlossen.

Definition 6.9 (Verfeinerung einer Überdeckung). Sei X ein top. Raum und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in I}$ ist eine offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in\tilde{I}}$ von X zusammen mit einer Abbildung $\phi : \tilde{I} \to I$, sodass $V_i \subseteq U_{\phi(i)} \ \forall i \in \tilde{I}$.

Beispiel 34. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Seien $\{V_{j_i}\}_{j_i\in J_i}$ Überdeckungen von $U_i \ \forall i \in I$. Dann ist $\{V_{j_i}\}_{j_i\in J}$, $J = \bigcup_{i\in I} J_i$, eine Verfeinerung mit $\phi : J \to I$, $j_i \mapsto i$

Lemma 6.10. *Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\{V_j\}_{j\in\tilde{I}}$ eine Verfeinerung. Dann gilt:*

$$\{V_j\}_{j\in\tilde{I}} \textit{ hat eine endl. Teilüberdeckung} \Rightarrow \{U_i\}_{i\in I} \textit{ hat eine endl. Teilüberdeckung}$$

Beweis. Sei $J \subseteq \tilde{I}$ endlich, dann ist $X = \bigcup_{i\in J} U_i \subseteq \bigcup_{i\in J} U_{\phi(i)}$, dann ist $\{U_k\}_{k\in\phi(J)}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\{U_i\}_{i\in I}$ □

Proposition 6.11. *Seien X, Y kompakte Räume. Dann ist $X \times Y$ auch kompakt.*

Beweis. Nach 6.10 reicht es zu beweisen, dass jede offene Überdeckung der Form $\{U_i \times V_i\}_{i\in I}$ mit $U_i \subseteq_O X, V_i \subseteq_O Y$ eine endliche Teilüberdeckung hat.
Sei $x \in X$, dann ist $Y \cong \{x\} \times Y \subseteq X \times Y$, dann gibt es ein endliches $J_x \subseteq I$, dass $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{j\in J_x} (U_j \times V_j)$. Setzt man dann $W_x := \bigcap_{j\in J_x} U_j$, dann ist $\{W_x\}_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X, dann gibt es (X ist kompakt) also eine endliche Menge $K \subseteq X$, dass $X = \bigcup_{k\in K} W_k$. Dann ist $J = \bigcup_{k\in K} J_k$ auch eine endliche Menge (J_x sind alle endlich), also ist

$$\bigcup_{j\in J} (U_j \times V_j) = \bigcup_{k\in K} \left(\bigcup_{j\in J_k} U_j \times V_j \right) \supseteq \bigcup_{k\in K} (W_k \times Y) = X \times Y \tag{6.1}$$

Also ist $\{U_j \times V_j\}_{j\in J}$ eine endliche Teilüberdeckung. □

Korollar 6.12. Seien $X_1, ..., X_n$ kompakte Räume. Dann ist $X_1 \times X_n$ ebenfalls kompakt. (Induktion)

Theorem 6.13 (Tychonoff's Theorem). *Sei $\{X_i\}_{i\in X}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist auch $\prod_{i\in I} X_i$ (mit der Produkttopologie) kompakt.*

THEOREM 6.14 (Heine-Borel II).

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ kompakt } \Leftrightarrow K \textit{ ist abgeschlossen und beschränkt}$$

BEWEIS. „$\Rightarrow$"
Nach 6.3 ist K beschränkt und nach 6.8 abgeschlossen.
„$\Leftarrow$"
Da K beschränkt ist, ist $K \subseteq [-C, C]^n$. Nach 6.6 ist $[-C, C]$ kompakt und nach 6.12 ist $[C, C]^n$ dann kompakt. Nach 6.7 ist auch K kompakt, da K nach Voraussetzung abgschlossen ist. □

BEISPIEL 35. (1) $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt.
(2) $\mathbb{S}^n / \pm 1 \cong \mathbb{R}P^n$ ist kompakt

KOROLLAR 6.15. $K \subseteq \mathbb{R}$.

$$K \text{ kompakt } \Leftrightarrow \min(K), \max(K) \text{ existieren}$$

THEOREM 6.16 (Satz vom Minimum und Maximum). *Sei X ein kompakter Raum. Dann nimmt jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ihr Maximum auf X an.*

BEWEIS. Nach 6.4 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und nach 6.15 existieren $y_1, y_2 \in f(X)$, Minimum und Maximum. □

PROPOSITION 6.17. *Sei X kompakt, Y hausdorffsch. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen, i.e. für $Z \subseteq X$ abgeschlossen ist $f(Z)$ abgeschlossen in Y.*

BEWEIS. Sei $Z \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist nach 6.7 auch Z kompakt. Nach 6.4 ist auch $f(Z)$ kompakt. Und wegen 6.8 ist dann $f(Z)$ abgeschlossen. □

KOROLLAR 6.18. Sei X kompakt, Y hausdorffsch. Dann ist jede stetige, bijektive Funtion ein Homöomorphismus.

BEWEIS. Nach 6.17 ist f abgeschlossen. Sei $U \subseteq_O X \Rightarrow X \backslash U$ ist abgeschlossen. Also ist $f(X \backslash U) \subseteq Y$ abgeschlossen. Da aber f insbesondere surjektiv ist, gilt $f(X \backslash U) = Y \backslash f(U) \Rightarrow f(U) \subseteq_O Y$. □

BEISPIEL 36. Betrachte $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$, stetig und bijektiv. $\mathbb{S}$ ist hausdorffsch, aber $[0, 2\pi)$ ist nicht kompakt. Bekannterweise ist das kein Homöomorphismus.

KOROLLAR 6.19. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der kompakt und hausdorffsch ist. Sei $\mathcal{T}'$ eine andere Topologie auf der Menge X. Dann gilt:

$$\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}' \Rightarrow (X, \mathcal{T}') \text{ ist nicht mehr kompakt}$$

$$\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T} \Rightarrow (X, \mathcal{T}') \text{ ist nicht mehr hausdorffsch}$$

BEWEIS. Beweise durch Kontraposition

- Sei $(X, \mathcal{T}')$ kompakt, dann ist $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig und bijektiv. Nach 6.18 ist das dann ein Homöomorphismus, also gilt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.
- Sei $(X, \mathcal{T}')$ Hausdorffsch, dann ist $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig und bijektiv, also nach 6.18 ein Homöomorphismus. Damit muss $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

□

KOROLLAR 6.20. Sei $f : X \to Y$ eine surjektive und stetige Abbildung, X kompakt, Y hausdorffsch.Dann ist f eine Quotientenabbildung.

BEWEIS. Da f stetig ist, gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{quot}$. $U \in \mathcal{T}_{qout} :\Leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq_O X$.
$f : X \to (Y, \mathcal{T}_{quot})$ ist nach Vor. stetig und surjektiv $\Rightarrow (Y, \mathcal{T}_{quot})$ ist hausdorffsch und kompakt. Nach 6.19 folgt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{quot}$. □

BEISPIEL 37. (1) Die Abbildung

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1; t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

ist eine Quotientenabbildung, also $\frac{[0,2\pi]}{0 \sim 2\pi} \cong \mathbb{S}^1$

(2) Genauso ist $\Sigma\mathbb{S}^n \cong \frac{\mathbb{S}^n \times [-1,1]}{(x,-1)\sim(x,1)} \cong \mathbb{S}^{n+1}$, mit der Abbildung $f : \mathbb{S}^n \times [-1,1] \to \mathbb{S}^{n+1}; (x,t) \mapsto (\sin(\pi/2t) \cdot x, \cos(\pi/2t))$

Definition 6.21 (Folgenkompaktheit). Ein topologischer Raum ist folgenkompakt :⇔ Jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge

Proposition 6.22. *Sei X ein kompakter Raum, $A \subseteq X$. Dann gilt:*

$$|A| = \infty \;\Rightarrow\; acc(A) \neq \varnothing$$

Beweis. Kontraposition: $acc(A) = \varnothing \;\Rightarrow\; |A| < \infty$:
Sei $acc(A) = \varnothing$. Dann ist jedes Element in A ein isolierter Punkt.

$$\forall x \in X : \; \exists x \in U_x \subseteq_O X : \; U_x \cap A = \begin{cases} \{x\} & x \in A \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

$\{U_x\}_{x \in X}$ ist eine offene Überdeckung von X und da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq X$: $A \subseteq X = \bigcup_{x \in J} U_x$. Da jedes U_x höchstens ein Element enthält, folgt, dass $|A| \leq |J| < \infty$ gilt. □

Beispiel 38. Sei $X = [o,1]^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie. Definiere $a_n = (a_{n,i})_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, $a_{n,i} = \delta_{n,i}$, dann ist $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, $|A| = \infty$ aber $\operatorname{acc}(A) = \varnothing$; Sei $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]$, dann ist:
Entweder ein $x_i \notin \{0,1\}$, also mit $U = [0,1] \times \cdots \times (0,1) \times \ldots \;\; U \cap A = \varnothing$.
Andernfalls ist $x_{i_0} = 1$ für ein i_0, also mit U analog, nur $(0,1]$ an der i_0 Stelle: $U \cap A = a_{i_0}$ womit $x = a_{i_0}$, also ist x isolierter Punkt von A.
Im dritten Fall ist $x_i = 0$, also $U = [0,1)^{\mathbb{N}} \cap A = \varnothing$, also nach 6.22 ist $[0,1]^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie nicht kompakt.
Mit der Produkttopologie ist $[0,1]^{\mathbb{N}}$ nach 6.13 kompakt und der Häufungspunkt ist 0

Proposition 6.23. *Sei X ein top. Raum, der T_1 und das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gilt:*

$$X \text{ kompakt} \;\Rightarrow\; X \text{ folgenkompakt}$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Setze $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
1. Fall: $|A| < \infty$: es existiert konvergente Teilfolge.
2. Fall: $|A| = \infty$ Nach 6.22 ist $acc(A) \neq \varnothing$. Also $\exists x \in acc(A)$. (Benötige nun konvergente Teilfolge gegen dieses $x \in acc(A)$).
Sei $\mathcal{B}_x$ eine abzählbare Umgebungsbasis, sodass $U_1 \supseteq U_2 ... \ni x$.
Setze $j_n := \min\{k \mid a_k \in U_n\}$. $\{k \mid a_k \in U_n\} \neq \varnothing$, da $x \in acc(A)$ gilt.
Wir erhalten eine *nicht* stationär werdende Kette $j_1 \leq j_2 \leq ...$ da:
$\forall n \in \mathbb{N} : \; \exists m > n : \; j_m > j_n$. Dies gilt, da nach dem 1. Trennungsaxiom eine Umgebung $x \in U \subseteq_O X$ existiert, sodass $a_{j_n} \notin U$. Da $\mathcal{B}_x$: eine Umgebungsbasis ist $\exists m > n : \; U_m \subseteq U$. Also $j_m > j_n$.
Sei $i_1 < i_2 < ...$ mit $i_l \in \{j_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\forall l \in \mathbb{N}$. Nun ist $(a_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen obiges x konvergiert. Sei $x \in U \subseteq_O X$ und dann gilt $a_{i_n} \in U_n \subseteq U$. □

Theorem 6.24 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}^n$, dann gibt es $C \in \mathbb{R}$, dass $a_k \in [-C,C]^n$ für alle k, also ist die Menge kompakt. Nach 6.23 gibt es dann eine konvergente Teilfolge. □

Definition 6.25. Sei X ein top. Raum.

(1) Sei $x \in X$. Eine abgeschlossene Umgebung von x ist eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$, sodass $x \in int(Z)$ gilt.
(2) X ist lokalkompakt :⇔ $\forall\; x \in U \subseteq_O X \;\exists$ abgeschlossene Umgebung $x \in Z$: $Z \subseteq U$ und Z ist kompakt

Bemerkung. Eine abgeschlossene Umgebung ist der Abschluss einer Umgebung.

BEISPIEL 39. (1) Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt: Sei $x \in V \subseteq_O U$, dann gibt es $\epsilon > 0$, dass $x \in \mathbb{B}_\epsilon(x) \subseteq V$, und $x \in cl\left(\mathbb{B}_{\frac{\epsilon}{2}}(x)\right)$ was nach 6.14 kompakt ist.

(2) $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (analog $\mathbb{R}^I$ mit I unendlich) ist nicht lokal kompakt bezüglich der Produkttopologie, der Abschluss jeder nichtleeren offenen Menge in $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist nicht kompakt. Sei $U = U_1 \times \dots \times U_N \times \mathbb{R} \times \dots$, dann ist $cl(U) = cl(U_1) \times \dots \times cl(U_N) \times \mathbb{R} \times \dots$, jetzt sei $a_n = (x_1, \dots, x_N, n, 0, \dots)$ fix und $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, $|A| = \infty$ und $\operatorname{acc}(A) = \varnothing$:
Für $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist entweder:
$x_{N+1} = n$, dann ist $x \in U = \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}_{\frac{1}{2}}(n) \times \mathbb{R} \times \dots$ und $U \cap A = \varnothing$
Oder $x_{N+1} \notin \mathbb{N}$, dann ist $x \in U = \mathbb{R}^n \times (\lfloor x_{N+1} \rfloor, \lceil x_{N+1} \rceil) \times \mathbb{R} \times \dots$, also $U \cap A = \varnothing$

BEMERKUNG. Für $n \in \mathbb{N}$ I unendlich ist demnach $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^I$, da $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt ist und $\mathbb{R}^I$ nicht.

THEOREM 6.26 (Einpunkt-Kompaktifizierung). *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, also ein topologischer. Dann ist auf $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ Folgendes eine Topologie:*

$$\mathcal{T} = \underbrace{\{U \subseteq_O X\}}_{\text{Typ 1}} \cup \underbrace{\{X_\infty \backslash K \mid K \text{ kompakt}\}}_{\text{Typ 2}}$$

BEWEIS. Sei $\phi \in \mathcal{T}$, $X_\infty = X_\infty \backslash \varnothing$ (Beachte $\varnothing$ ist kompakt).
Seien $\{U_j\}_{j \in I}$ Elemente aus $\mathcal{T}$ aus X_∞.
Nun sei $I = J \sqcup K : U_j \subseteq_O X \ \forall j \in J$ und $U_k = X_\infty \backslash Z_k$, $Z_k \subseteq X$ kompakt.
Zeige zuerst Stabilität unter Vereinigung:
1. Fall: $K = \varnothing \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} U_j \subseteq_O X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ (vom Typ 1).
2. Fall $J \neq \varnothing$, $K \neq \varnothing$:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} U_j \cup \bigcup_{k \in K} (X_\infty \backslash Z_k) = X_\infty \backslash \underbrace{\Big(\bigcap_{k \in K} Z_k \cap \bigcap_{j \in J} (X \backslash U_j)\Big)}_{=:Z}$$

Wähle nun $k_0 \in K$: $Z \subseteq Z_{k_0}$. Weiter ist $X \backslash U_j$ und auch Z_k abgeschlossen, da kompakt und X hausdorffsch (6.8).
Nach 6.7 ist Z kompakt, da Z abgeschlossen ist.
Also ist $\bigcup_{i \in I} U_i = X_\infty \backslash Z \in \mathcal{T}$ (Typ 2).
3. Fall $J = \varnothing$: Dann gilt

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{k \in K} X_\infty \backslash Z_k = X_\infty \backslash \underbrace{\bigcap_{k \in K} Z_k}_{\text{kompakt}} \in \mathcal{T}$$

vom Typ 2. Nach 6.8 ist jedes Z_k abgeschlossen. Also ist auch der Durchschnitt abgeschlossen. Da der Durchschnitt eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist, ist er auch wieder kompakt.
Seien nun $U, V \in \mathcal{T}$.
1.Fall: $U, V \subseteq_O X$. Dann ist auch $U \cap V \subseteq_O X$.(Typ 1)
2.Fall: $U \subseteq_O X$, $V = X_\infty \backslash Z$, $Z \subseteq X$ kompakt.

$$U \cap V = U \cap \underbrace{X_\infty \backslash Z}_{\text{offen, 6.8}} \subseteq_O X$$

3.Fall: $U = X_\infty \backslash Z_1$, $V = X_\infty \backslash Z_2$

$$U \cap V = (X_\infty \backslash Z_1) \cap (X_\infty \backslash Z_2) = X_\infty \backslash (Z_1 \cup Z_2)$$

Da endliche Vereinigungen kompakter Mengen kompakt sind, folgt die Behauptung. □

DEFINITION 6.27. Wir nennen X_∞ die Einpunkt-Kompaktifizierung oder auch Alexandroff-Kompaktifizierung von X.

THEOREM 6.28. *Mit dieser Topologie ist X_∞ ein kompakter Hausdorffraum.*

BEWEIS. Da X Hausdorffsch, ist $(X_\infty \backslash K) \cap X = X \backslash K \subseteq_O X$ nach 6.8, also stimmt die Teilraumtopologie $X \subseteq X_\infty$ mit der Topologie auf X überein.
X_∞ ist kompakt: Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X_∞, dann gibt es ein $k \in I$, dass

$\infty \in U_k = X_\infty \backslash Z$ mit einem $Z \subseteq_K X$. Daann ist $Z \subseteq \bigcup_{i \in I \backslash \{k\}} U_i$, und da Z kompakt ist, gibt es dann eine endliche $J \subseteq I \backslash \{k\}$, dass $Z \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$, also ist $X_\infty = \bigcup_{j \in J \cup \{k\}} U_j$

X_∞ ist Hausdorffsch: Sei $x, x' \in X_\infty$, $x \neq x'$. Wenn $x, x' \in X$ sind, ist alles klar, da X Hausdorffsch ist. Andernfalls ist $x' = \infty$ und es existieren $U \subseteq_O X, Z \subseteq_K X$, dass $x \in U \subseteq Z \subseteq X$, also $x \in U \subseteq_O X_\infty$ und $\infty \in V = X_\infty \backslash Z \subseteq_O X_\infty$ und $U \cap V = \varnothing$. □

Theorem 6.29. *$(\mathbb{R}^n)_\infty \cong \mathbb{S}^n$ mit der stereographischen Projektion.*

Bemerkung.

(1) Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen lokalkompakten Hausdorffräumen. Dann erhalten wir einen Homöomorphismus $f : X_\infty \to Y_\infty$, $\infty \mapsto \infty$.

(2) Insbesondere gilt $\mathbb{S}^n \ncong \mathbb{S}^m$ für $n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ $n \neq m$

KAPITEL 7

Homotopie und die Fundamentalgruppe

Definition 7.1 (Homotopie). Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ stetige Abbildung. Eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$, sodass $H_0 := H(0) = (-, f_0)$ und $H_0 := H(1) = (-, f_1)$ gilt. Wir notieren kurz $H : f_0 \simeq f_1$

Bemerkung. (1) $\underline{0}, id_{\mathbb{R}^n}$ sind homotop.

$$
\begin{aligned}
H : \mathbb{R}^n \times [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\
(x, s) &\mapsto s \cdot x
\end{aligned}
$$

(2) Seien $f_0, f_1 X \to Y$ stetig und $f_0 \simeq f_1$, also $H_0 = f_0$ und $H_1 = f_1$. Dann erhalten wir für jedes gegebene $x \in X$ einen Weg von $f_0(x_0)$ zu $f_1(x_0)$ durch die Homotopie $H : (x_0, -) : [0,1] \to Y$.

Definition 7.2. Sei $Hom(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig}\}$. Für $K \subseteq X$, $U \subseteq Y$

$$S(K,U) := \{f : X \to Y \mid f(K) \subseteq U\} \subseteq Hom(X,Y)$$

Dann ist

$$\mathcal{S} := \{S(K,U) \mid K \subseteq X \text{ kompakt } U \subseteq_O Y\}$$

eine Subbasis einer Topologie auf $Hom(X,Y)$. Wir nennen sie die *offene-abgeschlossene-Topologie.*

Proposition 7.3. *Sei $Hom(X,Y)$ gegeben mit der offenen-abgeschlossenen-Topologie erzeugt durch $\mathcal{S}$. Weiter sei X lokalkompakt und hausdorffsch.*

(1) *Dann ist die Auswertungsabbildung*

$$
\begin{aligned}
ev : Hom(X,Y) \times X &\to Y \\
(f, x) &\mapsto f(x)
\end{aligned}
$$

stetig.

(2) *Die offene-abgeschlossene-Topologie die gröbste, sodass die Auswertungsabbildung stetig ist.*

(3) *Sei Z ein anderer topologischer Raum. Dann ist die Abbildung*

$$F : X \times Z \to Y \text{ stetig } \Leftrightarrow \hat{F} : Z \to Hom(X,Y),\ z \mapsto F(-,z) \text{ stetig ist}$$

(4) *Ist zusätzlich Y lokalkompakt und hausdorffsch, dann ist*

$$
\begin{aligned}
\circ : Hom(Y,Z) \times Hom(X,Y) &\to Hom(X,Z) \\
(g, f) &\mapsto g \circ f
\end{aligned}
$$

(5) *Ist Y lokalkompakt und hausdorffsch, dann ist auch $Hom(X,Y)$ hausdorffsch.*

Proposition 7.4. *Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $Hom(X,Y)$.*

Beweis.
- Reflexivität: Sei $f : X \to Y$ stetig, dann ist die konstante Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y; H(x,s) = f(x)$ für alle $s \in [0,1]$ eine Homotopie von f zu f.
- Symmetrie: Sei $H : f_0 \simeq f_1$, dann ist die umgekehrte Homotopie: $\bar{H}(x,y) := H(x, 1-s)$, $\bar{H}_0 = H_1 = f_1, \bar{H}_1 = H_0 = f_0$ eine Homotopie von $\bar{H} : f_1 \simeq f_0$.
- Transitivität: Sei $F : f_0 \simeq f_1$ und $G : f_1 \simeq f_2$ zwei Homotopien, dann ist die Verknüpfung

$$H(x,s) = \begin{cases} F(x, 2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G\left(x, 2\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{7.1}$$

mit $H_0 = F_0 = f_0, H_1 = G_1 = f_2$ eine Homotopie von $H : f_0 \simeq f_2$

□

Definition 7.5. Wir bezeichnen die Menge der Homotopieklassen stetiger Funktionen von $X \to Y$ mit $[X,Y] := Hom(X,Y)/\simeq$

Proposition 7.6. *Seien f,g stetige, homotope Abbildungen. Dann gilt:*

(1) *Sei $u : W \to X$ stetig. Dann ist $f \circ u \simeq g \circ u$. Das bedeutet, dass wir eine pull-back-Abbildung $u^\star : [X,Y] \to [W,Y]$, $f \mapsto f \circ u$ erhalten.*
(2) *Sei $v : Y \to Z$ stetig. Dann gilt $v \circ f \simeq v \circ g$. Wir erhalten eine push-forward-Abbildung $v_\star [X,Y] \to [X,Z]$, $f \mapsto v \circ f$.*

Beweis. Sei $H : f \simeq g$, dann ist die Abbildung

$$H^u := H \circ \left(u \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right); W \times [0,1] \to Y; H^u(w,s) = H(u(w),s) \tag{7.2}$$

eine Homotopie von $H^u_0 = f \circ u$ nach $H^u_1 = g \circ u$, also $H^u : f \circ u \simeq g \circ u$.
Sei $H : f \simeq g$, dann ist

$$H_v := v \circ H : X \times [0,1] \to Z, H_v(x,s) = v(H(x,s)) \tag{7.3}$$

Dann ist $(H_v)_0 = v(H_0) = v \circ f, (H_v)_1 = v(H_1) = v \circ g$, also $H_v : v \circ f \simeq v \circ g$ □

Definition 7.7 (einfach zusammenhängend). Sei X ein topologischer Raum.

(1) Seien $\alpha, \alpha' : [0,1] \to X$ zwei Wege mit $x_0 := \alpha(0) = \alpha'(0)$ und $x_1 := \alpha(1) = \alpha'(1)$. Dann ist eine Weghomotopie zwischen α und α' eine Homotopie

   $H : [0,1] \times [0,1] \to X,$

   sodass $H(-,0) = \alpha$, $H(-,1) = \alpha'$, $x_0 = H(0,-)$ und $x_1 = H(1,-)$.
(2) X heißt *einfach zusammenhängend* :⇔ X ist wegzusammenhängend und für jedes Paar von Wegen α, α' mit $\alpha(0) = \alpha'(0)$, $\alpha(1) = \alpha'(1)$ gilt $\alpha \simeq \alpha'$.

Bemerkung. (1) Weghomotopie ist eine Äquivalenzrelation
(2) Anschaulich gilt

$$\begin{aligned} X \text{ ist wegzusammenhängend} &\Leftrightarrow X \text{ hat keine Löcher mit Kodimension } 1 \\ X \text{ ist einfach zusammenhängend} &\Leftrightarrow X \text{ hat keine Löcher mit Kodimension } 1 \wedge 2 \end{aligned}$$

Definition 7.8 (Komposition von Wegen). Seien α, β zwei Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$

(1) Die Komposition der Wege ist gegeben als

$$\alpha \star \beta : [0,1] \to X$$
$$(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2 \cdot t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2(t - \frac{1}{2})) & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(2) Das Inverse eines Weges ist

$$\alpha^{-1} : [0,1] \to X$$
$$t \mapsto \alpha(1-t)$$

Lemma 7.9. *Sei X ein topologischer Raum, Z_1, Z_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = Z_1 \cup Z_2$. Dann gilt für jede Abbildung $f : X \to Y$:*

$$f \text{ ist stetig } \Leftrightarrow f_{|Z_1} \wedge f_{|Z_2} \text{ sind stetig}$$

Beweis. „⇒"
Die Einschränkung einer stetigen Funktion ist stetig.
„⇐"
Sei $C \subseteq Y$ abgeschlossen. (Zeige, $f^{-1}(C)$ ist abgeschlossen in X). Wegen der Stetigkeit von $f_{|Z_1}$ und $f_{|Z_2}$ gilt $f^{-1}_{|Z_1}(C) = f^{-1}(C) \cap Z_1$ und $f^{-1}_{|Z_2}(C) = f^{-1}(C) \cap Z_2$, also abgeschlossen in Z_1, bzw. Z_2. Nach 4.4 sind diese Mengen dann auch abgeschlossen in X.
Also ist $f^{-1}(C) = (f^{-1}(C) \cap Z_1) \cup (f^{-1}(C) \cap Z_2)$ abgeschlossen in X. □

Theorem 7.10. *Seien $[\alpha], [\beta]$ die Weghomotopieklasse eines Weges in X. Dann gilt:*

(1) *Setze $[\alpha] \star [\beta] := [\alpha \star \beta]$, falls $\alpha(1) = \beta(0)$ gilt. Dann gilt*

$$\alpha \simeq \alpha' \wedge \beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha \star \beta \simeq \alpha' \star \beta'$$

(2) *Für drei Wege* α,β,γ *mit* $\alpha(1)=\beta(0)$,$\beta(1)=\gamma(0)$ *gilt*

$$([\alpha]\star[\beta])\star[\gamma]=[\alpha]\star([\beta]\star[\gamma])$$

(3) *Für* $x_0\in X$ *sei* $\underline{x_0}:[0,1]\to X$ *der konstante Weg auf* x_0. *Dann gilt*
  (a) *Für* $\beta:[0,1]\to X$ *mit* $\beta(0)=x_0$*:* $[x_0]\star[\beta]=[\beta]$
  (b) *Für* $\alpha:[0,1]\to X$ *mit* $\alpha(0)=x_0$*:* $[\alpha]\star[x_0]=[\alpha]$

(4) *Für jeden Weg* $\alpha:[0,1]\to X$ *mit* $\alpha(0)=x_0$ *und* $\alpha(1)=x_1$ *haben wir* $[\alpha]\star[\alpha^{-1}]=[\underline{x_0}]$ *und* $[\alpha^{-1}]\star[\alpha]=[\underline{x_1}]$

Beweis. (1) Sei $G:\alpha\simeq\alpha'$ und $H:\beta\simeq\beta'$ und $\alpha(0)=\alpha'(0),\alpha(1)=\alpha'(1)=\beta(0)=\beta'(0),\beta(1)=\beta'(1)$. Dann ist

$$F(t,s)=\begin{cases}G(2t,s) & t\leq\frac{1}{2}\\ H\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) & t\geq\frac{1}{2}\end{cases}\tag{7.4}$$

eine Weghomotopie von $\alpha\star\beta$ nach $\alpha'\star\beta'$.

(2) Seien $\alpha,\beta,\gamma:[0,1]\to X$ Wege mit $\alpha(1)=\beta(0)$, $\beta(1)=\gamma(0)$.

$$(\alpha\star\beta)\star\gamma=\begin{cases}\alpha(4\cdot t) & t\leq\frac{1}{4}\\ \beta(4(t-\frac{1}{4})) & \frac{1}{4}<\frac{1}{2}\\ \gamma(2(t-\frac{1}{2})) & \frac{1}{2}\leq 1\end{cases}$$

Nun definiere Homotopie

$$H:[0,1]\times[0,1]\to X$$

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha(\frac{4t}{1+s}) & 0\leq t\leq\frac{s+1}{4}\\ \beta(4t-1-s) & \frac{s+1}{4}<t<\frac{s+2}{4}\\ \gamma(1-\frac{4(1-t)}{2-s}) & \frac{s+2}{4}\leq t\leq 1\end{cases}$$

und überprüfe auf Wohldefinitheit.

(3) Sei $\beta:[0,1]\to X$ ein Weg mit $\beta(0)=x_0$. Z.zg. $H:\beta\simeq\underline{x_0}\star\beta$. Definiere Homotopie:

$$H(t,s)=\begin{cases}x_0 & t\leq\frac{s}{2}\\ \beta(\frac{2t-s}{2-s}) & \frac{s}{2}<t\end{cases}$$

und überprüfe auf Wohldefinitheit.

(4) $\alpha:[0,1]\to X$ ein beliebiger Weg mit Startpunkt $\alpha(0)=\underline{x_0}$, dann ist die Homotopie $H:x_0\simeq\alpha\star\alpha^{-1}$ gegeben durch

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\leq t\leq\frac{s}{2}\\ \alpha(s)=\alpha^{-1}(1-s) & \frac{s}{2}\leq t\leq 1-\frac{s}{2}\\ \alpha^{-1}(2t-1)=\alpha(2-2t) & 1-\frac{s}{2}\leq t\leq 1\end{cases}\tag{7.5}$$

Analog $\alpha^{-1}\star\alpha\simeq\underline{x_1}$ mit $x_1=\alpha(1)$

□

Definition 7.11 (Fundamentalgruppe). Setze $x_0\in X$ fest. Dann heißt

$$\Omega(X,x_0)=\{\text{Wege }\alpha:[0,1]\to X\mid\alpha(0)=x_0=\alpha(1)\}$$

die Menge aller Schleifen und setze $\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\simeq$. Nach 7.10 ist das eine Gruppe, die *Fundamentalgruppe*, mit „$\star$" als Verknüpfung, $e=[\underline{x_0}]$ als Neutralelement und $[\alpha]^{-1}:=[\alpha^{-1}]$ als Inverses.

Proposition 7.12. *Sei* $\gamma:[0,1]\to X$ *ein Weg mit* $\gamma(0)=x_0$ *und* $\gamma(1)=x_1$. *Dann erhalten wir einen induzierten Gruppenisomorphismus*

$$\begin{aligned}u_\gamma:\pi_1(X,x_0)&\to\pi_1(X,x_1)\\ [\alpha]&\to[\gamma^{-1}\star\alpha\star\gamma]\end{aligned}$$

BEWEIS.
$$\begin{aligned} u_\gamma([\alpha]\star[\beta]) &= [\gamma^{-1}\star(\alpha\star\beta)\star\gamma] = [\gamma^{-1}\star\alpha\star\gamma\star\gamma^{-1}\star\beta\star\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}\star\alpha\star\gamma]\star[\gamma^{-1}\star\beta\star\gamma] = u_\gamma([\alpha])\star u_\gamma([\beta]) \end{aligned}$$

Weiter ist $(u_\gamma)^{-1} = u_{\gamma^{-1}}$ gegeben.
Zeige nun $u_\gamma \circ u_{\gamma^{-1}} = id_{\pi_1}(X,x_1)$ und $u_{\gamma^{-1}}\circ u_\gamma = \mathrm{id}_{\pi_1}(X,x_0)$ □

KOROLLAR 7.13. Wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist $\pi_1(X,x_0)$ bis auf Isomorphie unabhängig vom Basispunkt (schreibe dann $\pi_1(X,x_0) = \pi(X)$).

PROPOSITION 7.14. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum. Dann gilt*

$$X \text{ ist einfach zusammenhängend } \Leftrightarrow \pi_1(X) = \{e\} \text{ trivial}$$

BEWEIS. „$\Rightarrow$“ Sei $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$ eine Schleife in X, dann ist $\underline{x_0} \simeq \alpha$, also $\pi_1(X,x_0) = \{e\}$
„$\Leftarrow$“ Sind α,β zwei Wege von x_0 nach x_1, dann ist $\left[\alpha\star\beta^{-1}\right]\in\pi_1(x_0) = \{e\}$, also $\alpha\star\beta^{-1}\simeq\underline{x_0}$, damit ist $\alpha\simeq\alpha\star\beta^{-1}\star\beta\simeq\underline{x_0}\star\beta=\beta$ □

BEISPIEL 40. Trivialerweise $\pi_1(\{X,x_0\}) = \pi_1(\{x_0\}) = \{e\}$

DEFINITION 7.15. Sei $f: X\to Y$ eine stetige Abbildung. Dann erhalten wir einen push-forward Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} f_\star : \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(Y,f(x_0)) \\ \alpha &\mapsto f\circ\alpha \end{aligned} \tag{7.6}$$

Die Wohldefinitheit folgt aus 7.6 und es gilt (Gleichheit!) $f\circ(\alpha\star\beta) = (f\circ\alpha)\star(f\circ\beta)$.
Sei $g: Y\to Z$ eine weitere stetige Abbildung. Dann erhalten wir folgende Funktorialität zwischen der Komposition und der $\star$-Abbildung:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[rr, "g_\star\circ f_\star=(g\circ f)_\star"] \arrow[dr, "f_\star"'] & & \pi_1(Z,g(f(x_0))) \\
\alpha \arrow[rr, mapsto] \arrow[ddr, mapsto] & & g\circ f\circ\alpha \\
& \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[uur, "g_\star"'] & \\
& f\circ\alpha \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt, dass für einen Homöomorphismus $f: X\to Y$, folgt, dass $f_\star:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0)$ ein Gruppenisomorphismus ist (Die Umkehrung ist i.A. falsch).
$\Rightarrow$ Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante.

DEFINITION 7.16.
(1) Eine stetige Abbildung $f: X\to Y$ ist eine Homotopieäquivalenz $:\Leftrightarrow \exists\ g: Y\to X$ stetig, sodass $g\circ f = \mathrm{id}_X$ und $f\circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt. Wir nennen dann X,Y homotopieäquivalent, $X\simeq Y$
(2) Ein Unterraum $A\subseteq X$ ist ein Retrakt, falls eine stetige Abbildung $r: X\to A$ mit $r(a) = a\ \forall a\in A$ ($\Leftrightarrow\ r\circ\iota = \mathrm{id}_A,\ \iota: A\to X,\ a\mapsto a$).
(3) $A\subseteq X$ ist ein Homotopieretrakt, falls es eine Abbidlung $r: X\to A$ gewählt werden kann, sodass $\iota\circ r = \mathrm{id}_X$
(4) Ein topologischer Raum ist zusammenziehbar $:\Leftrightarrow\ \exists\ x_0\in X:\ \{x_0\}\subseteq X$ ist ein Homotopieretrakt.

DEFINITION 7.17 (sternförmig). Eine Teilmenge $X\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls

$$\exists x_0\in X:\ \forall x\in X:\ \{x_0 + t(x-x_0)\in X \mid t\in[0,1]\}\subseteq X$$

BEMERKUNG.
(1) Sei $A\subseteq X$ ein Homotopieretrakt, dann ist $\iota: A\to X$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser $r: X\to A$.
(2) Homotopieäquivalent zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

(3) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig $\Rightarrow$ X ist zusammenziehbar.

$$\begin{aligned} \iota : \{x_0\} &\to X \quad & r : X &\to x_0 \quad &\Rightarrow\ r \circ \iota = \mathrm{id}_{x_0} \\ x_0 &\mapsto x_0 & x &\mapsto x_0 \Rightarrow & \iota \circ r = \underline{x_0} \end{aligned}$$

Wir brauchen eine Homotopie, sodass $\underline{x_0} \simeq \mathrm{id}_X$.

$$\begin{aligned} H : X \times [0,1] &\to X \\ x &\mapsto H(x,t) = x_0 + t(x - x_0) \end{aligned}$$

Dann gilt, da X sternförmig ist, dass $H(-,0) = \underline{x_0}$ und $H(-,1) = \mathrm{id}_X$. (Beachte: es gibt zusammenziehbare Mengen, die nicht sternförmig sind.)

(4) Ist X zusammenziehbar, dann ist X wegzusammenhängend.

Beweis. Wir haben eine Homotopie zwischen $\underline{x_0} \simeq \mathrm{id}_X$, wie oben im Beispiel. $\square$

(5) $\mathbb{S}^1$ ist wegzusammenhängend aber nicht zusammenziehbar.

Beispiel 41. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit $f((x,y)) = (x,0,0)$. Dann ist eine Homotopieinverse gegeben durch $g((x,y,z)) = (x,y)$, $(g \circ f)(x,y) = (x,0)$ und $(f \circ g)(x,y,z) = (x,0,0)$. Wir erhalten Homotopien zwischen $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $H((x,y),s) = (x,sy)$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, $H((x,y,z),s) = (x,sy,sz)$.
Eine Homotopieinverse ist nicht eindeutig. Für obiges Beispiel wäre auch $h(x,y,z) = (x,0)$ eine Homotopieinverse mit $h \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $f \circ h \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Theorem 7.18. *Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $f_\star : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. Sei $g : Y \to X$, dann gibt es eine Homotopie $H : \mathrm{id} \simeq g \circ f$. Dann ist $\gamma = H(x_0,-) : [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach $g(f(x_0))$. Dann ist $u_{\gamma^{-1}} \circ f_\star \circ g_\star = \mathrm{id}$, da α homotop zu $\gamma \star (g \circ f \circ \alpha) \star \gamma^{-1}$ über $G := H \circ \big(\alpha \times \mathrm{id}_{[0,1]}\big)$ ist $G_0 = \alpha$ homotop zu $G_1 = g \circ f \circ \alpha$ und über $F : \alpha \simeq \gamma \star (g \circ f \circ \alpha) \star \gamma^{-1}$. Also ist $g_\star \circ f_\star = u_\gamma$, und da es analog $\tilde{f}_\star \circ g_\star = u_{\gamma^{-1}}$ gibt ist insgesamt $g_\star$ injektiv und surjektiv, also ist $g_\star$ ein Gruppen Isomorphismus. Damit auch $f_\star = (g_\star)^{-1} \circ u_\gamma$. $\square$

Korollar 7.19. Sei X zusammenziehbar. Dann ist $\pi(X) = \{e\}$, i.e. X ist einfach zusammenhängend. Insbesondere ist $\pi(\mathbb{R}^n) = \{e\}$, *i.e.* $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. X zusammenziehbar $\Rightarrow X \simeq \{x_0\} \Rightarrow \pi(X) \cong \pi(\{x_0\}) = \{e\}$. $\square$

Korollar 7.20. Sei $n \geq 2$, $p \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{p\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$

Beweis. Sei

$$t_p : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{p\} x \quad \mapsto x + p$$

ein Homöomorphismus. Zeige nun $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit der Einbettung ι ist ein Homotopieretrakt.
Folgendes ist ein Retrakt

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} &\to \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

Nun ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\} \cong \iota \circ r$, da für $H(x,s) = x + s(\frac{x}{\|x\|} - x)$ gilt, dass $H(x,0) = x = \mathrm{id}(x)$ und $H(x,1) = \frac{x}{\|x\|} = (\iota \circ r)(x)$. Daraus erhalten wir Homotopieäquivalenz zwischen $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \Rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. $\square$

Lemma 7.21 (Lebesgue-Lemma). *Sei X ein kompakter metrischer Raum, $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt:*

$$\exists :\ \delta > 0 :\ \forall A \subseteq X \ \textit{mit diam}(A) := \sup\{d(a,a') \mid a,a' \in A\} < \delta,\ \exists i \in I :\ A \subseteq U_i$$

Beweis. 7.4. $\square$

LEMMA 7.22. *Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n = 1$ eine Wegstückelung, so dass es für $0 \le j < n$ ein $i \in I$ gibt, sodass $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \in U_j$*

BEWEIS. $\{\alpha^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ ist eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Dann gilt nach 7.21: $\exists\delta > 0$: $\forall A \subseteq [0,1]$ mit $\operatorname{diam}(A) < \delta$ gilt $A \subseteq \alpha^{-1}(U_i)$ für ein $i \in I$. Nehme $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \delta$, $t_j = \frac{j}{n}$. Dann ist nach Konstruktion $\operatorname{diam}(t_j, t_{j+1}) = \frac{1}{n} < \delta$. □

LEMMA 7.23. *Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg und $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$. Definiere $\alpha_j := \alpha_{|[t_j,t_{j+1}]} \circ \lambda_j : [0,1] \to X$. $\lambda_j : [0,1] \to [t_j, t_{j+1}]$, $t \mapsto t_j + t(t_{j+1} - t_j)$. Dann gilt:*

$$\alpha = \alpha_0 \star \ldots \alpha_{n-1}$$

THEOREM 7.24. *Sei X ein topologischer Raum $U, V \subseteq_O X$ und $U \cup V = X$, U, V einfach zusammenhängend, $U \cap V$ wegzusammenhängend und nicht leer. Dann ist X einfach zusammenhängend.*

BEWEIS. Zuerst ist X wegzusammenhängend nach Problem 6.1. Nach 7.14 reicht es zu zeigenm, dass $\pi_1(X) = \{e\}$. Sei also $x_0 \in U \cap V$ der Basispunkt und α eine Schleife um x_0. Nach 7.22 gibt es dann $0 = t_0 < t_n < \cdots < t_n = 1$, dass $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subseteq U$ oder $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subseteq V$ für alle j, $\alpha(t_j) \in U \cap V$.
Des weiteren gibt es für alle j einen Weg γ_i von x_0 nach $\alpha(t_i)$ in $U \cap V$, da $U \cap V$ wegzusammenhängend ist.
Nach 7.23 ist dann

$$\alpha \simeq \alpha_0 \ldots \alpha_{n-1} \simeq \left(\alpha_0\gamma_1^{-1}\right)\left(\gamma_1\alpha_1\gamma_2^{-1}\right)\ldots(\gamma_{n-1}\alpha_{n-1}) \cong \underline{x_0}\ldots\underline{x_0} \simeq \underline{x_0} \tag{7.7}$$

wobei letzteres daraus folgt, dass U und V einfach zusammenhängend sind. □

KOROLLAR 7.25. $\mathbb{S}^n$ ist einfach zusammenhängend für $n \ge 2$.

BEWEIS. Definiere $N := (0, \ldots, 0, 1)$ und $S := (0, \ldots, 0, -1)$. Setze $U = \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$, $V = \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$. Durch die stereographische Projektion erhalten wir eine Homöomorphie zwischen $U \cong \mathbb{R}^n \cong V$ und nach 7.19 sind U, V dann auch einfach zusammenhängend.
Weiter erhalten wir eine Homöomorphie zwischen

$$\mathbb{S}^{n-1} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to U \cap V = \mathbb{S}^n \backslash \{N, S\}$$
$$(x_1, \ldots, x_n, \phi) \mapsto (\cos(\phi) \cdot x_1, \ldots, \cos(\phi) \cdot x_n, \sin(\phi))$$

Nach 5.12 ist $\mathbb{S}^{n-1} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wegzusammenhängend. Also ist auch $U \cap V$ wegzusammenhängend.
Dann ist nach 7.24 auch $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend. □

THEOREM 7.26. *Sei $(X, x_0), (Y, y_0)$ zwei punktierte Räume (Wahl eines Basispunktes). Dann ist*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

BEWEIS. Mit den Projektionen (stetig)

$$\begin{aligned} ((pr_X)_\star, (pr_Y)_\star) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\mapsto ([pr_X \circ \alpha], [pr_Y \circ \alpha]) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Und der Inversen

$$\Phi : ([\beta], [\gamma]) \mapsto [(\beta, \gamma)], \tag{7.9}$$

bleibt nur noch die Wohldefinitheit von Φ zu zeigen. Seien $H : \beta \simeq \beta'$ und $G : \gamma \simeq \gamma'$. Dann ist $F = (G, H) = (\beta, \gamma) \simeq (\beta', \gamma')$ und

$$\begin{aligned} F : [0,1] \times [0,1] &\to X \times Y \\ F(t,s) &= (G(t,s), H(t,s)) \\ F(-,0) = (G(-,0), H(-,0)) &= (\beta, \gamma) \\ F(-,1) = (G(-,1), H(-,1)) &= (\beta', \gamma') \end{aligned}$$

eine Homotopie von (β, γ) nach (β', γ'). □

KAPITEL 8

Überlagerungsräume und nichttriviale Fundamentalgruppen

Definition 8.1 (Überlagerung). (1) Seien X,$\tilde{X}$ topologische Räume. $f : \tilde{X} \to X$ stetig. Dann heißt für $x \in X$ die Menge $f^{-1}(X) \subseteq \tilde{X}$ Faser von f über x.

(2) Sei F mit der diskreten Topologie ausgestattet. Der triviale Überlagerungsraum mit Faser F ist die Projektionsabbildung $pr_X : F \times X \to X$, $(x,i) \mapsto x$. Dann ist

$$\begin{aligned} X \times F &\to \coprod_{i \in I} X_i \\ (x,i) &\mapsto x(i) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus (mit I Kopien von X).

(3) Eine Überlagerungsabbildung ist eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$, sodass $\forall x \in X :\ \exists x \in U \subseteq_O X$ und einen Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} f : p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times p^{-1}(\{x\}) \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

sodass $pr_U \circ f = p_{|p^{-1}(U)}$ gilt.

Außerdem müssen alle Fasern $p^{-1}\left(\{x\}\right) \subseteq \tilde{X}$ als Unterraumtopologie die diskrete Topologie haben. ($\tilde{X}$ wird dann Überlagerungsraum von X genannt)

(4) Äquivalent ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wenn $\forall x \in X : p^{-1}\left(\{x\}\right) \subseteq X$ diskret ist (wie vorher) und
$\forall x \in X : \exists U \subseteq_O X$ eine trivialisierende Umgebung, also $p^{-1}\left(U\right) = \bigsqcup_{a \in p^{-1}(\{x\})} \tilde{U}_a$ mit $a \in \tilde{U}_a \subseteq_O \tilde{X}$, $\tilde{U}_a \cap \tilde{U}_b = \varnothing$ für $a \neq b$ und $p|_{\tilde{U}_a} : \tilde{U}_a \to U$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Zeige die Äquivalenz der Defintionen:
„$\Rightarrow$“:
Ohne Beschränkung $f\left(a\right) = \left(p\left(a\right), a\right)$ für alle $a \in p^{-1}\left(\{x\}\right)$, sonst per Verknüpfung mit $\mathrm{id}_U \times \sigma$ mit einer Bijektion $\sigma : p^{-1}\left(\{x\}\right) \to p^{-1}\left(\{x\}\right)$, dann ist $\tilde{U}_a := f^{-1}\left(U \times \{a\}\right)$
„$\Leftarrow$“:
Sei $p^{-1}\left(U\right) = \bigsqcup_{a \in p^{-1}(\{x\})} \tilde{U}_a$, dann definiere

$$f : p^{-1}\left(U\right) = \bigsqcup_{a \in p^{-1}(\{x\})} \tilde{U}_a \to U \times p^{-1}\left(\{x\}\right); \tilde{x} \mapsto \left(p\left(tildex\right), a\right) \tag{8.1}$$

□

Beispiel 42.

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} := \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 =: X \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine Überlagerungsabbildung und $\mathbb{R}$ ist ein Überlagerungsraum von $\mathbb{S}^1$. Mit der Identifikation von $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} e^{i \cdot t}$ gilt dann für ein $x \in \mathbb{S}^1$ und dem dazugehörigen t_x

$$p^{-1}(\{x\}) = t_x + 2\pi \cdot \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad p^{-1}(U) = (t_x - \varepsilon, t_x + \varepsilon) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Im Sinne des obigen Diagramms gilt dann

$$\begin{aligned} f : p^{-1}(U) &\to U \times p^{-1}(\{x\}) \\ t + 2\pi \cdot n &\mapsto (p(t), 2\pi \cdot n + t_x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p : p^{-1}(U) &\to \mathbb{S}^1 \text{ Kreissektor} \\ t + 2\pi \cdot n &\mapsto p(t + 2\pi \cdot n) \end{aligned}$$

Definition 8.2. Sei $\tilde{X}$ ein topologischer Raum, G eine Gruppe und $G \curvearrowright X$ eine stetige Gruppenoperation ($\forall g \in G$ ist die Abbildung $g : X \to X$, $x \mapsto g \cdot x$ ein Homöomorphismus). Die Operation heißt Überlagerungsraum $:\Leftrightarrow \forall a \in \tilde{X}\ \exists a \in \tilde{U} \subseteq_O \tilde{X}$: $g(\tilde{U}) \cap U = \emptyset\ \forall e \neq g \in G$.

Beispiel 43. Sei $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$. $n \cdot x := x + 2\pi n$. Das ist eine Überlagerungsraumoperation $x \in \mathbb{R}$, nehme $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon < \pi$.

Definition 8.3. Sei $G \curvearrowright X$ eine Operation einer Gruppe auf einer Menge X. Dann gilt

$$\text{Die Operation ist frei } :\Leftrightarrow \ \forall e \neq g \in G,\ x \in X : g \cdot x \neq x$$

Bemerkung. $G \curvearrowright X$ ist eine Überlagerungsraumoperation $\Rightarrow$ $G \curvearrowright X$ ist eine freie Operation

Lemma 8.4. *Seien $x_1, ..., x_n$ paarweise verschiedene Elemente eines Hausdorffraums. Dann existieren offene Umgebungen $x_i \subseteq_O X$ für $i = 1, ..., n$ mit $U_i \cap U_j = \emptyset$ $i \neq j$.*

Beweis. Induktion: Annahme, dass $x_i \in U_i' \subseteq_O X$ für $i = 1, ..., n-1$ mit $U_i' \cap U_j' = \emptyset$, $i \neq j$. Da X ein Hausdorffraum ist, existieren für jedes Element x_i und das Element x_n offene Umgebungen $x_n \in V_i \subseteq_O X$ und $W_i \subseteq_O X$ nach Induktion: $V_i \cap W_i = \emptyset$ $(i = 1, ..., n-1)$. Dann können wir neue offene Umgebungen definieren, sodass

$$U_i := \begin{cases} U_i' \cap W_i & i \leq n-1 \\ \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i & i = n \end{cases}$$

Die erfüllen dann die geforderten Eigenschaften. □

Proposition 8.5. *Sei G eine endliche Gruppe die stetig auf einen Hausdorffraum X wirkt. Dann folgt, wenn $G \curvearrowright X$ frei, dass $G \curvearrowright X$ eine Überlagerungsraumoperation*

Beweis. Sei $a \in X$. Dann gibt es nach 8.4 eine Familie $\{ga \in V_{ga} \subseteq_O X\}$ mit $V_{ga} \cap V_{ha} = \emptyset$. Setze $U := \bigcap_{g \in G} g^{-1}(V_{ga})$, dann ist $g(U) \subseteq V_{ga}$, $U \subseteq V_{ea}$, also $g(U) \cap U \subseteq V_{ga} \cap V_{ea} = \emptyset$. □

Proposition 8.6. *Sei $G \curvearrowright \tilde{X}$ eine stetige Gruppenoperation. Dann gilt:*

$$G \curvearrowright \tilde{X} \text{ Überlagerungsoperation } \Leftrightarrow \ \pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/G =: X \text{ ist Überlagerungsabb.}$$

Beispiel 44.

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n / \{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^n \\ x &\mapsto -x \end{aligned} \tag{8.2}$$

Definition 8.7. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung und $f : Y \to X$ auch. Ein Lift (Hebung) von f entlang p ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$, sodass $p \circ f = \tilde{f}$

Beispiel 45. (1) Sei $p : \tilde{X} \to X$ ein Homöomorphismus. Dann hat jede stetige Abbildung $f : Y \to X$ eine eindeutige Hebung, nämlich $p^{-1} \circ f =: \tilde{f} : Y \to \tilde{X}$.

(2) Sei $p : \tilde{X} = X \times F \to X$, $(x, i) \mapsto i$, eine triviale Überlagerungsabbildung (F mit der diskreten Topologie). Dann hat jede stetige Abbildung $f : Y \to X$ mit Y zusammenhängend hat genau $|F|$ Hebungen. Nämlich für jedes $i \in F$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i : Y &\to X \times F \\ y &\mapsto (f(y), i) \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ eine beliebige Hebung. Dann ist $\{\tilde{f}^{-1}(X \times \{i\})\}_{i \in F}$ eine offene Überdeckung von Y mit paarweise disjunkten Elementen. Da $\tilde{f}$ stetig ist, existiert ein $i \in F$, sodass $\tilde{f}^{-1}(X \times \{i\}) = Y$ gilt.
$\Rightarrow \ \tilde{f}(Y) \subseteq X \times \{i\} \ \Rightarrow \ \tilde{f} = \tilde{f}_i$. □

PROPOSITION 8.8. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, Y ist zusammenhängend und lokal zusammenhängend. Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ zwei Lifts von F, also $p \circ \tilde{f}_1 = f = p \circ \tilde{f}_2$, dann folgt aus $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ für ein $y \in Y$, dass $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$*

BEWEIS. Es reicht zu zeigen, dass $B := \left\{y \in Y \middle| \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\right\} \subseteq Y$ offen und abgeschlossen ist, da Y zusammenhängend ist. Sei $y \in Y$ und $x = f(y)$ hat eine trivialisierende Umgebung $x \in U \subseteq_O X$. Dann gibt es ein $y \in W \subseteq_O f^{-1}(U)$, da Y lokalzusammenhängend ist, also sind $\tilde{f}_1|_W, \tilde{f}_2|_W$ zwei Lifts von $f|_W$. Nach dem Beispiel ist dann $\tilde{f}_1|_W = \tilde{f}_2|_W$ oder überall ungleich. Im ersten Fall ist $W \subseteq B$, also $y \in \operatorname{int}(B)$ und im zweiten Fall ist $y \operatorname{int}(Y \backslash B)$. Damit ist B offen und abgeschlossen, also ganz Y. □

DEFINITION 8.9. Sei $p : \tilde{X} \to X$ ein Überlagerungsraum. Eine Decktransformation von p (oder von $\tilde{X}$ über X) ist ein Homöomorphismus $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ (Automorphismus) mit $p \circ \sigma = p$ (σ ist ein Lift von p). Die Menge aller Decktransformationen ist bildet eine Gruppe, die Gruppe der Decktransformationen.
$\operatorname{deck}(p) = \operatorname{deck}(\tilde{X}/X) = \{\sigma : X \to X \mid p \circ \sigma = \sigma,\ \sigma \text{Homöomorphismus}\}$

BEISPIEL 46. Sei $\tilde{X} = X \times F \to X$ eine triviale Überdeckung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{deck}(\tilde{X}/X) &\cong \mathfrak{S}_F = \{\tau : F \to F \mid \tau \text{ Bijektion}\} \\ (\mathrm{id}_X \times \tau) &\leftarrow\!\shortmid \tau \end{aligned}$$

KOROLLAR 8.10. Sei $p : \tilde{X} \to X$ ein Überlagerungsraum, $\tilde{X}$ zusammenhängend und lokal zusammenhängend. Dann erhalten wir für jedes $a_0 \in \tilde{X}$ eine injektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{a_0} : \operatorname{deck}(\tilde{X}/X) &\hookrightarrow p^{-1}(p(a_0)) \\ \sigma &\mapsto \sigma(a_0) \end{aligned}$$

BEWEIS. Seien σ, τ zwei Decktransformationen mit $\sigma(a_0) = \tau(a_0)$. σ, τ sind Hebungen von p. $\Rightarrow$ mit (8.8) folgt $\sigma = \tau$. □

KOROLLAR 8.11. Sei $G \curvearrowright \tilde{X}$ eine Überlagerungsraumoperation. Dann ist ($\pi : \tilde{X} \to X := \tilde{X}/G$) $\operatorname{deck}(\pi) = \operatorname{deck}\left(\tilde{X}/X\right) = G$

BEWEIS. Trivial $G \subseteq \operatorname{deck}\left(\tilde{X}/X\right)$, sei $G \ni g : \tilde{X} \to \tilde{X}$, dann ist $\pi \circ g = \pi$, also $g \in \operatorname{deck}\left(\tilde{X}/X\right)$
Die Abbildung $\mathrm{ev}_{a_0} : G \to \pi^{-1}(\pi(a_0)) = \{ga_0 | g \in G\}$ ist surjektiv, da das die Definition der Bahn von a_0 ist ($\tilde{X}/G$ ist der Bahnenraum).
Außerdem ist $\mathrm{ev}_{a_0} : \operatorname{deck}\left(\tilde{X}/X\right) \to \pi^{-1}(\pi(a_0))$ injektiv nach 8.10. Da G eine Teilmenge ist, ist dann $G = \operatorname{deck}\left(\tilde{X}/X\right)$. □

BEISPIEL 47. $\operatorname{deck}\left(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z}$ und $\operatorname{deck}(\mathbb{S}^n/\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

LEMMA 8.12. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung und Y sei zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $H : Y \times [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung, sei $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ eine Hebung von $f := H_0 := H(-,0) : Y \to X$.*
Dann existiert genau eine Hebung $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to \tilde{X}$ von H mit $\tilde{H}_0 = \tilde{H}(-,0) = \tilde{f}$.

BEWEIS. Zunächst wird für jedes $y \in Y$ eine Umgebung U_y konstruiert mit einem Lift. Für alle $s \in [0,1]$ gibt es in X eine trivialisierende Umgebung um $H(y,s)$, also $H(y,s) \in W_s \subseteq_O X$. Dann existiert eine Umgebung im Urbild $(y,s) \in V_s = A_s \times B_s \subseteq H^{-1}(W_s) \subseteq_O Y \times [0,1]$ mit $A_s \subseteq_O Y$ und $B_s \subseteq [0,1]$. Da $[0,1]$ kompakt ist gibt es dann eine endliche Menge $J \subseteq [0,1]$, dass $\{y\} \times [0,1] \subseteq \bigcup_{s \in J} V_s$. Es gibt eine zusammenhängende Umgebung $y \in U_y \subseteq_O \bigcup_{s \in J} A_s$. Nach Lebesgue Lemma 7.21 gibt es eine Zerteilung $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$, dass $[t_j, t_{j+1}] \subseteq B_s$ für ein s, also $H(U_y \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq W_s$.
Dann gibt es nach Induktion einen Lift für die ersten n Intervalle also $j = 0, \ldots, n$, $\tilde{H}^j : U_y \times [0, t_j] \to \tilde{X}$ von $H|_{U_y \times [0,t_j]}$ mit $\tilde{H}^j\big|_{U_y \times [0,t_j]} = \tilde{f}\big|_{U_y}$.
Induktionsanfang: $\tilde{f}\big|_{U_y} = \tilde{H}^0 : U_y \times \{0\}$ ist ein Lift von $H|_{U_y \times \{0\}}$
Induktionsschritt: Da $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist existiert eine trivialisierende Umgebung $\tilde{H}(y, t_j) \in \tilde{W} \subseteq_O X$, dass $p|_{\tilde{W}} : \tilde{W} \to W_s$ ein Homöomorphismus ist. Dann kann

$\tilde{H}^{j+1}\big|_{U_y\times[t_j,t_{j+1}]} := \left(p|_{\tilde{W}}\right)^{-1}\circ H|_{U_y\times[t_j,t_{j+1}]}$ und $\tilde{H}_j\big|_{U_j\times[0,t_j]} := \tilde{H}^j$ definiert werden.
Dies ist bei t_j wohldefiniert, da die beiden Lifts $\left(p|_{\tilde{W}}\right)^{-1}\circ H|_{U_y\times\{t_j\}} = \tilde{H}^j\big|_{U_y\times\{t_j\}}$ bei (y,t_j) übereinstimmen, also nach 8.8.
Also ist für jedes y $\tilde{H}^n = \tilde{H}^y : U_y\times[0,1]\to\tilde{x}$ ein Lift von $H|_{U_y\times[0,1]}$ mit $\tilde{H}^y\big|_{U_y\times[0,1]}$.
Der gesamte Lift ist dann definiert auf allen U_y $\tilde{H}\big|_{U_y\times[0,1]} := \tilde{H}^y$ also auf ganz Y und wohldefiniert, da für $z\in U_y\cap U_{y'}$ die beiden Abbildungen $\tilde{H}^y\big|_{\{z\}\times[0,1]}$ und $\tilde{H}^{y'}\big|_{\{z\}\times[0,1]}$ zwei Lifts von $H|_{\{z\}\times[0,1]}$ sind mit $\tilde{H}^y(z,0) = \tilde{f}(z) = \tilde{H}^{y'}(z,0)$ und nach 8.8 gilt dann die Gleichheit auf ganz $U_y\cap U_{y'}$. Also ist $\tilde{H}$ ein Lift von H. □

Korollar 8.13. Sei $\alpha[0,1]\to X$ ein Weg in X, $x_0 := \alpha(0)$. Dann gilt:

$$\forall a_0\in p^{-1}(x_0) : \ \exists! \text{ Hebung } \tilde{\alpha}:[0,1]\to\tilde{X} \text{ von } \alpha \text{ mit } \tilde{\alpha}(0)=\alpha_0$$

Beweis. Nehme $Y=\{\star\}$, dann existiert für $H: Y\times[0,1]\to X; H(x,t)=\alpha(t)$ und $\tilde{f}:\{\star\}\to\tilde{X}; \tilde{f}(\star)=a_0\in p^{-1}(x_0)$ ein Lift von $f:\{\star\}\to X; f(\star)=x_0=H(-,0)$. Dann existiert nach 8.12 ein Lift von H, also eine stetige Abbildung $\tilde{H}:\{\star\}\times[0,1]\to\tilde{X}$, dass $\tilde{H}(-,0)=\tilde{f}$. Dann ist auch $\tilde{\alpha}:[0,1];\tilde{\alpha}(t)=H(\star,t)$ ein stetiger Weg mit $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{H}(\star,0)=\tilde{f}(\star)=a_0$ □

Korollar 8.14. Sei $p:\tilde{X}\to X$ eine Überlagerung, $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}:[0,1]\to\tilde{X}$ zwei Wege mit $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{\beta}(0)$, $p(\tilde{\alpha}(1))=p(\tilde{\beta}(1))$. Dann folgt aus $\alpha=p\circ\tilde{\alpha}\simeq p\circ\tilde{\beta}=\beta$, dass $\tilde{\alpha}\simeq\tilde{\beta}$

Bemerkung. Sei $\alpha:[0,1]\to X$ ein Weg, $a\in p^{-1}(\alpha(0))$, dann ist $\tilde{\alpha}_{a_0}$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}_a(0)=a$

- Sei $\beta:[0,1]\to X$ mit $\beta(0)=\alpha(1)$ dann ist $\widetilde{\alpha\star\beta}_a=\tilde{\alpha}_a\star\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}(1)}$
- Und $\tilde{\alpha}_a\star\widetilde{\alpha^{-1}}_{\tilde{\alpha}_a(1)}\simeq\underline{a}$ ist auch ein Lift von $\alpha\star\alpha^{-1}\simeq\alpha(0)$.

Proposition 8.15. *Sei $p:\tilde{X}\to X$ eine Überlagerung und X wegzusammenhängend. Dann existiert eine Bijektion $p^{-1}(\{x\})\cong p^{-1}(\{x'\})$*

Proposition 8.16. *Sei $p:\tilde{X}\to X$ eine Überlagerung, $a_0\in\tilde{X}$, $x_0=p(a_0)\in X$, dann ist $p_\star:\pi_1(\tilde{X},a_0)\to\pi_1(X,x_0)$ mit dem Bild $p_\star(\pi_1(\tilde{X},a_0))=\{\alpha\in\pi_1(X,x_0)|\tilde{\alpha}_{a_0}\text{Schleife bei } a_0\}\subseteq\pi_1(X,x_0)$*

Theorem 8.17. *Sei $p:\tilde{X}\to X$ eine Überlagerung $f:Y\to X$ stetig Y wegzusammenhängend und lokalzusammenhängend, $y_0\in Y$, $a_0\in\tilde{X}$ mit $f(y_0)=p(a_0)=x_0\in X$. Dann gibt es genau einen Lift $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ mit $\tilde{f}(y_0)=a_0$ genau dann wenn $f_\star(\pi_1(Y,y_0))\subseteq p_\star(\pi_1(\tilde{X},x_0))$*

Beweis. „$\Rightarrow$“
$p\circ\tilde{f}=f \ \Rightarrow\ p_\star\circ\tilde{f}_\star=f_\star$ (vgl. Pushforward Definition).
$f_\star(\pi_1(Y,y_0))=p_\star(\tilde{f}_\star(\pi_1(Y,a_0)))\subseteq p_\star(\pi_1(\tilde{X},a_0))$
„$\Leftarrow$“
Definiere $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ durch $\tilde{f}(y):=\widetilde{f_\star\alpha}_{a_0}(1)$ für jeden Weg α in Y von y zu y_0.
Unabhängigheit von $\tilde{f}$ von der Wahl von α:
Sei α' ein zweiter Weg von y zu y_0 $\Rightarrow$ $f_\star\alpha'$ ein Weg von x_0 zu $f(y)$
$\Rightarrow (f_\star\alpha')\star(f_\star\alpha^{-1})\in\pi_1(X,x_0)$ ist eine Schleife bei x_0
Mit der Eindeutigkeit von Hebungen gilt jedoch, dass $\mu^{-1}=\tilde{f}_\star\alpha_{a_0}(1)$
$\tilde{f}$ ist eine Hebung von f: $p(\tilde{f}(y))=p(\widetilde{f_\star\alpha}_{a_0}(1))=(f_\star\alpha)(1)f(\alpha(1))=f(y)$
$\tilde{f}(a_0)$: nehme den konstanten Weg $\alpha=\underline{y}$, dann gilt

$$\tilde{f}(y_0)=(\widetilde{f_\star\underline{y_0}})_{a_0})(1)=\underline{\tilde{x_0}}_{a_0}(1)=\underline{a_0}(1)=a_0$$

Stetigkeit von $\tilde{f}$: Sei $y\in Y$, $\tilde{f}(y)\in U\subseteq_O\tilde{X}$ (Wir benötigen $y\in W\subseteq_O Y:\ \tilde{f}(W)\subseteq U$).
Beachte, dass eine Überlagerungsabbildung trivialerweise immer offen ist und nehme $V\subseteq p(U)$ eine triviale Umgebung von $f(y)$.
Nehme $y\in W\subseteq_O f^{-1}(V)=\tilde{f}^{-1}(p^{-1}(V))$, sodass W wegzusammenhängend ist.

Sei $z \in W$. Sei β ein Weg von y nach z und α ein Weg von y_0 zu $y \Rightarrow \alpha \star \beta$ ist ein Weg von y_0 nach z.
Dann gilt

$$\tilde{f}(z) = f_\star(\widetilde{\alpha \star \beta})_{a_0}(1) = \widetilde{f_\star\alpha}_{a_0} \star \widetilde{f_\star\beta}_{\tilde{f}(y)}$$

Damit können wir $\mu = (p_{|_{U'}})^{-1} \circ (f_\star\beta)$ schreiben, da $\tilde{f}(y) \in U' \subseteq_O U$ $p_{|_{U'}} : U' \to V$ Homöomorphismus. $\Rightarrow$ $\tilde{f}(z) = \mu(1) \in U' \subseteq U$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}(W) \subseteq U$ □

Definition 8.18. Sei X ein topologischer Raum. Eine universelle Überlagerung von X ist eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ bei der $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend und lokalzusammenhängend ist.

Proposition 8.19. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung, dann ist für alle $a_0 \in \tilde{X}$ und $x_0 = p(a_0)$ die Auswertungsabbildung $ev_{a_0} : deck\left(\tilde{X}/X\right) \to p^{-1}(\{x_0\})$ eine Bijektion.*

Beweis. Nach Korollar 8.11 ist die Abbildung injektiv. Für die Surjektivität reicht Theorem 8.17 mit $(Y, y_0) = \left(\tilde{X}, a_0\right)$ und $\left(\tilde{X}, a_0\right) = \left(\tilde{X}, a\right)$ und $f = p : Y = \tilde{X} \to X$. Das gibt dann $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $p \circ \sigma = p$ und $\sigma(a_0) = a$.
Analog gibt es auch ein $\tau : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tau = p$, $\tau(a) = a_0$. Dann ist $\sigma \circ \tau$ ein Lift von p mit $\sigma \circ \tau = a$ genauso wie $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$ weshalb folgt $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Das geht auch für $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ also ist $\sigma \in \mathrm{deck}\left(\tilde{X}/X\right)$ mit $\mathrm{ev}_{a_0}(\sigma) = a$. Also existiert für jedes a eine Decktransformation. □

Theorem 8.20. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Dann gibt es einen Gruppenisomorphismus $deck\left(\tilde{X}/X\right) \cong \pi_1(X, x_0)$*

Beweis. Die Abbildungen sind $u : \mathrm{deck}\left(\tilde{X}/X\right) \to \pi_1(X, x_0)\, \sigma \mapsto p_\star(\alpha)$ zu irgendeinem Weg $\tilde{\alpha}$ von a_0 nach $\sigma(a_0)$ und $v : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{deck}\left(\tilde{X}/X\right); \alpha \mapsto \sigma(a_0) = \tilde{\alpha}_{a_0}(1)$.
u ist wohldefiniert, denn sind $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$ Wege von a_0 nach $\sigma(a_0)$ dann ist $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\alpha}'$, also auch $p_\star(\tilde{\alpha}) = p_\star(\tilde{\alpha}')$ damit $[p_\star\tilde{\alpha}] = [p_\star\tilde{\alpha}'] \in \pi_1(X, x_0)$.
v ist wohldefiniert weil $\alpha \simeq \alpha'$ damit $\tilde{\alpha}_{a_0} \simeq \tilde{\alpha}'_{a_0}$ und $\tilde{\alpha}_{a_0}(1) = \tilde{\alpha}_{a_0}(1)$. Da $u \circ v = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathrm{deck}(\tilde{X},X)}$ ist dann auch σ eindeutig.
u ist ein Gruppenhomomorphismus: Sei $\sigma, \tau \in \mathrm{deck}\left(\tilde{X}, X\right)$ und α ein Weg von a_0 nach $\sigma(a_0)$, β von a_0 nach $\tau(a_0)$. Dann ist $\sigma_\star\beta$ ein Weg von $\sigma(a_0)$ nach $\sigma(\tau(a_0))$ und $\alpha \star (\sigma_\star\beta)$ ein Weg von a_0 nach $\sigma(\tau(a_0))$ und dann

$$u(\sigma \circ \tau) = p_\star(\alpha \star (\sigma_\star\beta)) = (p_\star\alpha) \star (p_\star\sigma_\star\beta) = (p_\star\alpha) \star (p_\star\beta) = u(\sigma) \star u(\tau) \quad (8.3)$$

□

Korollar 8.21. $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong (\mathbb{Z}, +)$ $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$

Beweis.
(1) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ durch $n \cdot x := x + 2\pi n$ ist eine Überlagerungsraumoperation mit $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$. $\mathbb{R}$ ist einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend $\Rightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$ ist die universelle Überlagerung.
Es gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathrm{deck}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ (erste Isomorphie wegen 8.20, zweite Isomorphie wegen 8.11). Anschaulich wird hier die Windungszahl gezählt.
(2) Für $n \geq 2$ ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$ $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/(\pm 1)$. Nach 7.25 ist $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend, also gilt
$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathrm{deck}(\mathbb{S}^n/\mathbb{R}P^n) = (\{\pm 1\}, \cdot) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

□

KAPITEL 9

Konsequenzen von $\pi_1(\mathbb{S}^1) \neq \{e\}$

Zuerst kann die Dimensionsinvarianz für $\mathbb{R}^2$ bewiesen werden:

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus, dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$, also mit Korollar 7.20 und Korollar 8.21.

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{m-1}\right) \tag{9.1}$$

Nach Korollar 7.25 ist $\mathbb{S}^{m-1}$ einfach zusammenhängend für $m-1 \geq 2$, also muss $m-1=1$ und damit $m=2$. □

Theorem 9.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$

Beweis. Annahme, dass $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Für $s \in [0,1]$ definiere $f_s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0)$. Benutze nun Homotopie von Polynomen mit $f_0(z) = z^n$, $f_1(z) = f(z)$. Sei dafür $R > |a_{n-1}| + ... + |a_0|$ und $R > 1$.
Behauptung: $f_s(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$, $\forall s \in [0,1]$. Sei dafür

$$f_s(z) = z^n + \underbrace{s(a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0)}_{g_s(z)}$$

Dann gilt für $|z^n| = R^n$

$$|g_s(z)| \leq |a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0| \leq |a_{n-1}z^{n-1}| + ... + |a_0| = |a_{n-1}|R^{n-1} + ... + a_0 \leq (|a_{n-1}| + ... + |a_0|)R^{n-1} < R^n$$

Die folgende Abbildung sei gegeben

$$\gamma : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{S} \subseteq \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{z}{|z|}$$

Dann lässt sich die Homotopie

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$$
$$H(t,s) = \gamma\left(\frac{f_s(Re^{2\pi ti})}{f_s(R)}\right)$$

definieren (überprüfe Wohldefinitheit). Nun gilt $\forall s \in [0,1]$

$$H(0,s) = \gamma\left(\frac{f_s(Re^{2\pi \cdot 0})}{f_s(R)}\right) = \gamma(1)$$
$$H(1,s) = \frac{f_s(Re^{2\pi i})}{f_s(R)}) = \gamma(1)$$

Also ist H eine Weghomotopie. Es ist nun $\alpha = H(-,0)$, $\alpha(t) = \gamma(\frac{f_0(Re^{2\pi ti})}{f_0(R)}) = \gamma(\frac{R^n e^{2\pi nti}}{R^n}) = \gamma(e^{2\pi nti}) = e^{2\pi nti}$. $\beta = H(-,1)$, $\beta(1) = \gamma(\frac{f(Re^{2\pi it})}{f(R)})$.
Also gilt

$$G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$$
$$G(t,r) = \gamma\left(\frac{f(rRe^{2\pi ti})}{f(rR)}\right)$$

Es gi dann $G(0,s) = \gamma(\frac{f(rR)}{f(rR)}) = 1 = G(1,s)$ $\forall s \in [0,1]$. Also ist G eine Weghomotopie zwischen $G(-,1) = \beta$ und $\gamma = G(-,0)$, wobei $\gamma(t) = \gamma(\frac{f(0)}{f(0)}) = 1$, der konstante Weg.

Insgesamt erhalten wir, dass α weghomotop zum konstanten Weg γ ist. Aber α ist nicht nullhomotop, weil die Hebung $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto n \cdot t$ zur universellen Überlagerung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi t i}$ keine Schleife ist: $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $\tilde{\alpha}(1) = n$. Das ist ein Widerspruch. □

Definition 9.2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \| x| \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitsscheibe

Bemerkung. $\operatorname{bdy}(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^{n-1}$ $\mathbb{D}^n$ ist sternförmig

Proposition 9.3. $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$ *ist kein Retrakt*

Beweis. Angenommen es gibt einen Retrakt $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ also eine stetige Abbildung und $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ mit $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{D}^2; x \mapsto x$.
Wir erhalten den push-forward der Fundamentalgruppen mit dem folgenden kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "i_\star"] \arrow[rr, bend left] & \pi_1(\mathbb{D}^2) \arrow[r, "r_\star"] & \pi_1(\mathbb{S}^1) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \{e\} \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

□

Theorem 9.4 (Browers Fixpunktsatz). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ einen Fixpunkt, also $x_0 \in \mathbb{D}^n$ dass $f(x_0) = x_0$*

Beweis.
(1) $n = 1$: Dann ist $\mathbb{D} = [-1,1]$. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ stetig. Definiere $h(x) := f(x) - x$. Dann gilt

f hat Fixpunkt $\Leftrightarrow$ h hat Nullstelle

(a) $h(-1) = 0 \vee h(1) = 0$.
(b) $h(-1) \neq 0 \wedge h(1) \neq 0 \Rightarrow h(-1) = f(-1) + 1 > 0 \wedge h(1) < 0$. Insgesamt gilt also $h(-1) > 0 > h(1)$. Die Aussage folgt mit dem Zwischenwertsatz.

(2) $n = 2$: Annahme, dass $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ stetig ist ohne Fixpunkt. Definiere $g : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$ mit $g(x) :=$ Durchschnitt von dem Strahl von x zu $f(x)$ mit $\mathbb{S}$. Dann gilt $g(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$ mit $\lambda(x) > 0$ und $|g(x)| = 1$. Weiter ist $g(x) = x \ \forall x \in \mathbb{S}^1$. Insgesamt ist g ein Retrakt zu $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$, was ein Widerspruch zu 9.3 ist.

□

Bemerkung. 9.3 gilt für alle n, es existiert also kein Retrakt $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Man erhält diese allgemeine Aussage von 9.3 von der allgemeinen Aussage des Browerschen Fixpunktsatz und visa versa.

Beweis. „9.3 $\Rightarrow$ 9.4:
Angenommen $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Retrakt. Dann ist $r_{|_{\mathbb{S}^1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Definiere nun $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ durch $f(x) = -r(x)$. Dann gilt

(1) $x \notin \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow f(x) \neq x$
(2) $x \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow f(x) = -r(x) = -x \neq x$

□

Theorem 9.5 (Borsch-Klam-Theorem). *Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt*

(1) *Für alle $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt es $x \in \mathbb{S}^n$ dass $f(x) = f(-x)$*
(2) *Es gibt keine ungerade stetige Funktion von $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$*
(3) *Es gibt keine ungerade stetige Funktion von $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

Beweis. Zuerst sind die drei Aussagen equivalent

- „$\neg(2) \Rightarrow (3)$“ Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ ungerade, dann ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ungerade.
- „$\neg(3) \Rightarrow (2)$“ Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ungerade. Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : \tilde{f}(x) = \gamma(f(x)) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ ungerade.

- „$\neg(3) \Rightarrow (1)$" Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dann ist $f(-x) = -f(x) \neq f(x)$ da $f(x) \neq 0$.
- „$\neg(1) \Rightarrow (3)$" Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(-x) \neq f(x)$, dann gilt für $g(x) = f(x) - f(-x)$, dass $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und außerdem
$$g(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x) \qquad (9.2)$$
also ist g ungerade.

Für $n = 1$ lässt sich Aussage (2) prüfen: Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ stetig. Dann ist $f\left(\mathbb{S}^1\right) \subseteq \mathbb{S}^0$ zusammenhängend, da $\mathbb{S}^1$ zusammenhängend ist. Also ist f konstant und nicht ungerade. Für $n = 2$ □

Korollar 9.6. Es gibt keine injektive stetige Abbildung von $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$