выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \tag{5.73}$$

Покажем, что отсюда следует существование у функции f конечного предела в точке x_0. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in X, n = 1, 2, ...,$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{5.74}$$

и произвольно зададим $\varepsilon > 0$. Для этого ε, согласно сделанному предположению, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, удовлетворяющая условиям (5.72)—(5.73). В силу же условия (5.74), для этой окрестности $U(x_0)$ существует такое $n_0 \in \boldsymbol{N}$, что при всех $n > n_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, имеет место $x_n \in U(x_0)$, а так как $x_n \in X$, то $x_n \in U(x_0) \cap X$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$. Отсюда, принимая во внимание (5.72)—(5.73), получаем, что для всех $n > n_0$ и всех $m > n_0$ выполняется неравенство

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

т.е. числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши для числовых последовательностей (см. п. 4.7) и, следовательно, сходится.

Таким образом, для каждой последовательности $x_n \in X, n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Отсюда, как известно (см. лемму 4 в п. 5.6), следует существование конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. $\square$

В том случае, когда x_0 является числом, условие Коши можно сформулировать следующим образом:

для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$, удовлетворяющих условиям $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

При $x_0 = \infty$ условию Коши можно придать следующий вид:

для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$, удовлетворяющих условиям $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Для случая односторонних пределов условие Коши можно перефразировать без термина «окрестность» следующим образом:

для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η ($\eta < x_0$, когда рассматривается предел слева, и $\eta > x_0$, когда рассматривается предел справа), что для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$, удовлетворяющих условию $\eta < x' \leqslant x_0$, $\eta < x'' \leqslant x_0$ или соответственно $x_0 \leqslant x' < \eta$, $x_0 \leqslant x'' < \eta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Отметим, что все эти критерии существования предела функции, относящиеся к разным случаям и имеющие разную формулировку, благодаря удачно выбранной терминологии (понятию окрестности) получили единое доказательство.

5.16. Предел и непрерывность композиции функций

Рассмотрим вопрос о существовании конечных и бесконечных пределов композиций функций, каждая из которых имеет соответствующий предел.

Если $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : Y \to \boldsymbol{R}$ и выполнено условие $f(X) \subset Y$, то на множестве X определена композиция $g \circ f$ функций f и g или, как говорят, сложная функция $f[f(x)]$. Рассматриваемые ниже пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ могут быть конечными или бесконечными, а x_0 и y_0 – конечными или бесконечно удаленными точками прикосновения (см. п. 5.4) соответственно множеств X и $f(X)$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : Y \to \boldsymbol{R}$, $f(X) \subset Y$ и существуют конечные или бесконечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \tag{5.75}$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y); \tag{5.76}$$

тогда при $x \to x_0$ существует и предел (конечный или бесконечный) сложной функции $g[f(x)]$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : Y \to \boldsymbol{R}$, $f(X) \subset Y$ и функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g[f(x)]$ непрерывна в точке x_0.*