

# Übung 10

## Computational Physics III

Matthias Plock (552335)      Paul Ledwon (561764)

23. Juli 2018

### Inhaltsverzeichnis

0.1	Betrachtungen zum Parameter $R(L)$ . . . . .	1
0.2	Betrachtungen zum Fehler von $R(L)$ . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Bestimmung von <math>\kappa_c</math> in <math>d = 2, 3, 4</math> Dimensionen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Konvergenzverhalten von <math>R(\infty)</math></b>	<b>2</b>
2.1	Kosterlitz-Thouless-Phase . . . . .	2
2.2	Höhere Dimensionen . . . . .	2

### 0.1 Betrachtungen zum Parameter $R(L)$

Für die Magnetisierung gilt im Falle großer Systeme für die unterschiedlichen Phasen

$$\langle |M|^2 \rangle \stackrel{L \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \chi L^{-d} & \text{ungeordnet/paramagnetisch/symmetrisch} \\ \text{const } L^{-\eta} & \text{Kosterlitz-Thouless} \\ |M_0|^2 & \text{ferromagnetisch/Goldstone} \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$R(L) = \frac{\langle |M|^2 \rangle_{>2L}}{\langle |M|^2 \rangle_{>L}} \stackrel{L \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} 2^{-d} & \text{ungeordnet/paramagnetisch/symmetrisch} \\ 2^{-\eta} & \text{Kosterlitz-Thouless} \\ 1 & \text{ferromagnetisch/Goldstone} \end{cases}$$

Hierbei ist  $d$  die Dimension des Systems und  $\eta = \sigma(\frac{1}{\kappa})$  bzw. im XY-Modell  $\eta = \frac{1}{4\pi\kappa}$ .

### 0.2 Betrachtungen zum Fehler von $R(L)$

Für die gaußsche Fehlerfortpflanzung ist eine Normalverteilung des Fehlers der unterschiedlichen Größen, sowie die Unkorreliertheit der verschiedenen Größen notwendig.

Im Gegensatz zum Binderparameter, der aus Größen aus derselben Messung berechnet wird und diese dadurch korreliert sind, wird der Parameter  $R(L)$  aus Messwerten zwei verschiedener Messungen berechnet, wodurch keine Korrelation vorliegt. Durch die Normalverteilung der Fehler ist es darum möglich, zur Bestimmung des Fehlers von  $R(L)$  eine Fehlerfortpflanzung durchzuführen.

## 1 Bestimmung von $\kappa_c$ in $d = 2, 3, 4$ Dimensionen

Für verschiedene Systemgrößen  $L$  (und  $2L$ ) wurde jeweils in 2,3 und 4 Dimensionen für verschiedene Werte von  $\kappa$  wurde das Betragsquadrat der Magnetisierung mittels einer Monte-Carlo-Simulation gemessen.

Aus den Ergebnissen dieser Messungen wurde dann  $R(L)$  bestimmt und in Abb. 1-3 geplottet. Aus den Schnittpunkten von  $R(L_1)$  und  $R(L_2)$  sollte nun das kritische  $\kappa$  bestimmt werden, dass die paramagnetische und ferromagnetische Phase voneinander trennt. Die Werte von  $R$  schneiden sich jedoch mehr als einmal, weswegen diese Methode nicht angewendet wurde. Stattdessen wurde aus den Plots das  $\kappa_c$  aus den Sprüngen abgelesen, welche die beiden Phasen voneinander trennen. Da die Werte für  $\kappa$  abgelesen werden, wird ein großer Fehler abgeschätzt.

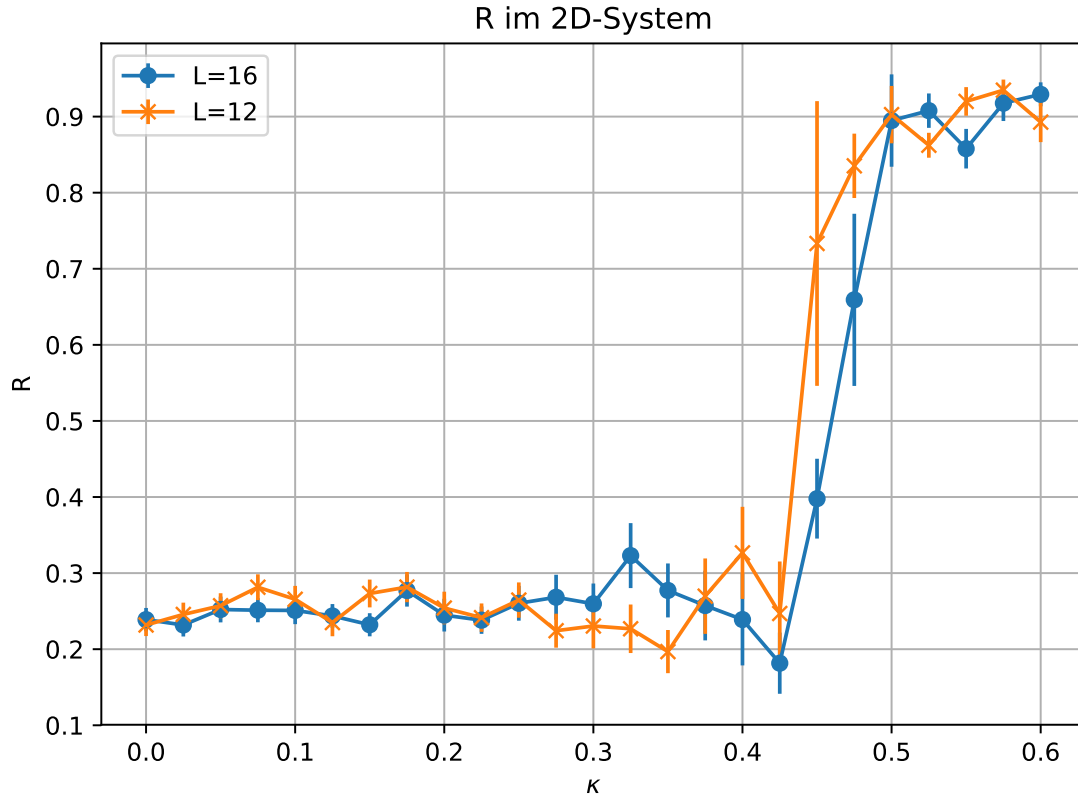


Abbildung 1: Bestimmung von  $\kappa_c$  in 2 Dimensionen für verschiedene Systemgrößen  $L$

Damit ergibt sich für die kritischen  $\kappa$  ungefähr

$$\kappa_{c,2d} = 0.425 \pm 0.25$$

$$\kappa_{c,3d} = 0.25 \pm 0.25$$

$$\kappa_{c,4d} = 0.175 \pm 0.25$$

## 2 Konvergenzverhalten von $R(\infty)$

### 2.1 Kosterlitz-Thouless-Phase

Im XY-Modell wird für  $R(L)$  in 2 Dimensionen in der Kosterlitz-Thouless-Phase und große Systeme folgendes Konvergenzverhalten erwartet:  $R = 2^{-\frac{1}{4\pi\kappa}}$

Für verschiedene Systemgrößen und  $\kappa > \kappa_c$  und wurde die Magnetisierung gemessen, daraus  $R$  berechnet und graphisch dargestellt, siehe Abb. 4. Qualitativ scheinen die Datenpunkte der analytischen Angabe für  $R$  zu folgen, auch wenn viele Datenpunkte auch innerhalb ihrer Unsicherheiten nicht in den Bereich der des analytischen  $R$  kommen. Dafür warum die 3 Datenpunkte bei einer Systemgröße von  $L = 32$  so weit entfernt vom erwarteten  $R$  Wert liegen, konnte keine Erklärung gefunden werden.

### 2.2 Höhere Dimensionen

Für verschiedene Systemgrößen und für  $\kappa = 0.05 < \kappa_c$  wurde die Magnetisierung gemessen und  $R$  berechnet und graphisch dargestellt, siehe Abb. 5. Aufgrund der Tatsache, dass mit der Dimension die Anzahl der zu generierenden Zufallszahlen steigt, kann für höhere Dimensionen keine so großen  $L$  gewählt werden, da dies zu Speicherproblemen führte. Die Datenpunkte folgen qualitativ dem erwarteten Verhalten  $R = 2^{-d}$ , liegen aber nicht immer im Rahmen ihrer Unsicherheit im Bereich

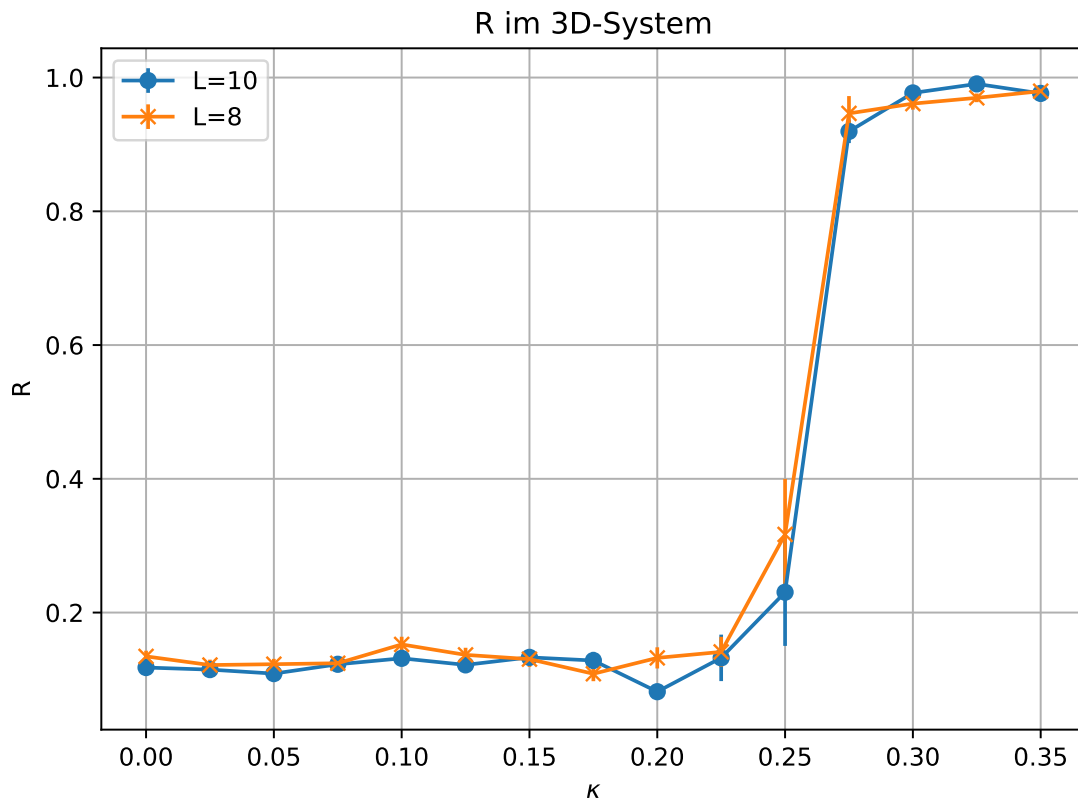


Abbildung 2: Bestimmung von  $\kappa_c$  in 3 Dimensionen für verschiedene Systemgrößen  $L$

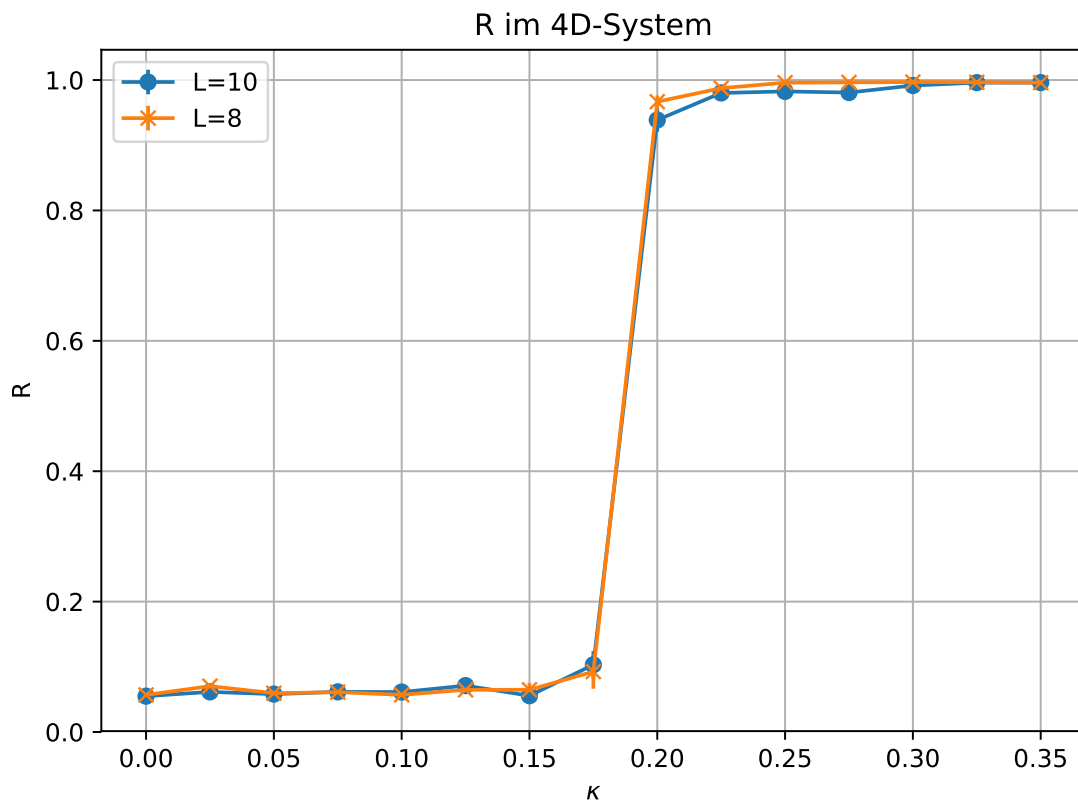


Abbildung 3: Bestimmung von  $\kappa_c$  in 4 Dimensionen für verschiedene Systemgrößen  $L$

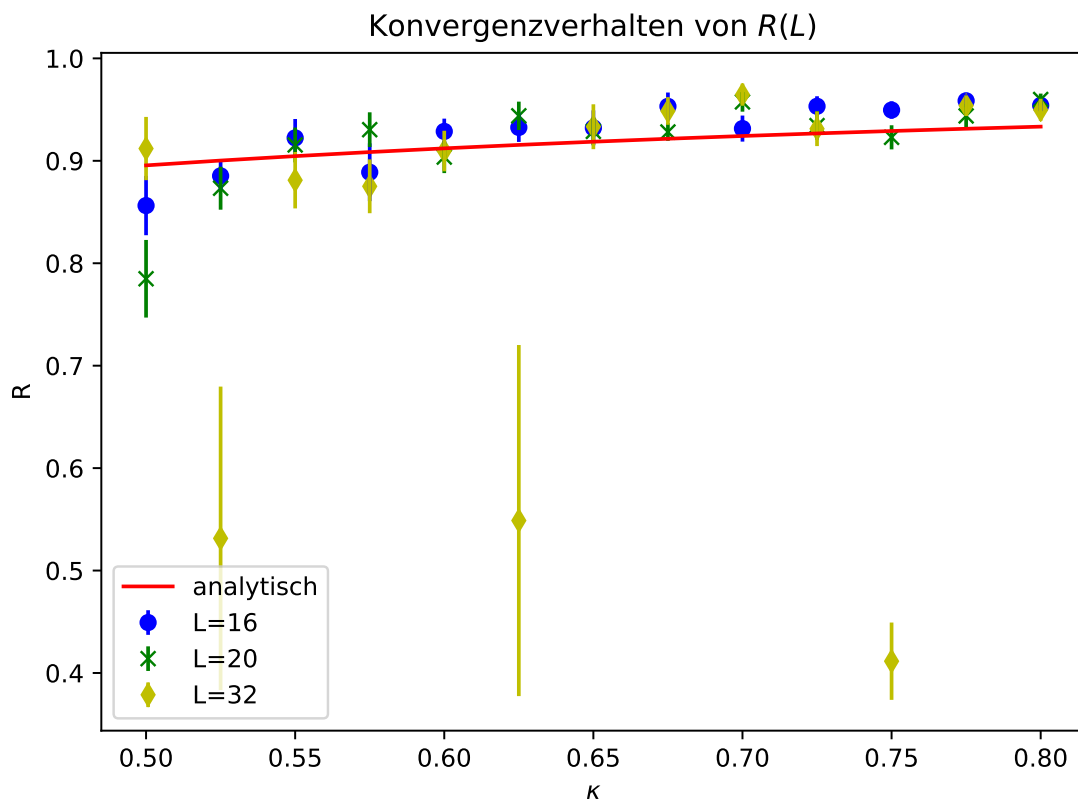


Abbildung 4: Konvergenzverhalten von  $R$  für große 2D-Systeme in Abhängigkeit von  $\kappa$

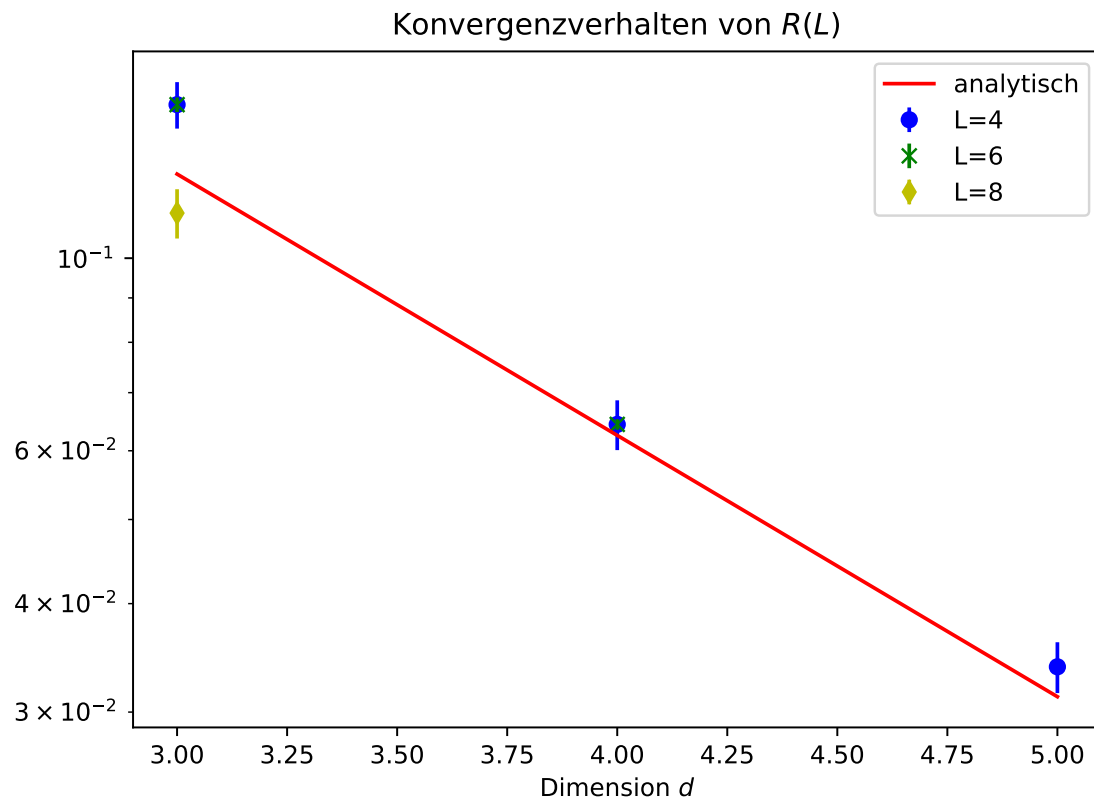


Abbildung 5: Konvergenzverhalten  $R$  für große Systeme in Abhängigkeit von der Dimension des Systems

des analytischen Wertes. Möglicherweise sind die gewählten  $L$ -Werte noch zu niedrig, damit der Limes  $L \rightarrow \infty$  gilt.