Рівневий набір гармонійних функцій

А. В. Тор

Для $\theta \in [0, \pi/2[$, розглянемо множини

...

...

...

де $p_a(z)$ — комплексний многочлен, визначений формулою

...

Лема 1. *Нехай $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тоді кожна з множин $\Sigma_{1,\theta}$ та $\Sigma_{-1,\theta}$ утворюється двома гладкими кривими, які локально ортогональні відповідно при $z = 1$ та $z = -1$ точніше:*

...

...

Дві криві, що визначають $\Sigma_{1,\theta}$ (відповідно $\Sigma_{-1,\theta}$), перетинаються лише при $z = 1$ (відповідно $z = -1$). Більше того, для $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$, вони розходяться по-різному до ∞ в одному з напрямків

...

Для $\theta = 0$, (відповідно $\theta = \frac{\pi}{2}$), один промінь $\Sigma_{1,\theta}$ (відповідно $\Sigma_{-1,\theta}$) розходиться до $z = -1$ (відповідно $z = 1$).

Доведення. Нехай задано непостійну гармонічну функцію u, визначену в деякій області D of $\mathbb{C}$. Критичними точками u є саме ті, де

...

Вони ізольовані. Якщо v є гармонічним спряженням u у D, скажімо, $f(z) = u(z) + iv(z)$ аналітична у D, тоді за Коші-Ріманом,

...

Встановлений рівень

...

u через точку $z_0 \in D$ залежить від поведінки f поблизу z_0. Точніше, якщо z_0 є критичною точкою u, ($u'(z_0) = 0$), то існує околиця $\mathcal{U}$ околу z_0, голоморфної функції $g(z)$ визначена на $\mathcal{U}$, така, що

...

Взявши гілку m-го кореня з $g(z)$, f має локальну структуру

$$\dots$$

Звідси випливає, що Σ_{z_0} локально утворена m аналітичними дугами які проходять через z_0 і перетинаються там під рівними кутами π/m. Через регулярну точку $z_0 \in D$, ($u\prime(z_0) \neq 0$), теорема про неявну функцію стверджує, що Σ_{z_0} є локально єдиною аналітичною дугою. Зауважте, що множина рівнів гармонічної функції не може закінчуватися у звичайній точці.

Розглянемо багатозначну функцію

$$\dots$$

Інтегруючи вздовж відрізка [1, a] , можна припустити, що без втрати загальності, що

$$\dots \tag{1}$$

Очевидно, що:

$$\dots$$

Отже, при фіксованому виборі аргументу та квадратного кореня всередині інтеграла, $f1, \theta$ та g є однозначними аналітичними функціями в $\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1]$.

Припустимо, що для деяких $a \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,-1], a \neq 1$,

$$\dots$$

Тоді,

$$\dots$$

Беручи справжні деталі, ми отримуємо

$$\dots$$

За неперервністю функцій всередині цих інтегралів на відрізку $[0,1]$, існують $t1, t2 \in [0,1]$ такі що

$$\dots$$

а потім

$$\dots$$

Взявши їх співвідношення, отримуємо

$$\dots$$

яка не може виконуватись, оскільки, якщо $\Im a > 0$, то

$$\dots$$

Випадок $\Im a < 0$ є аналогічним, тоді як випадок $a \in R$ можна легко відкинути. Таким чином, $a = 1$ є єдиною критичною точкою $\Re f_{1,\theta}$. Since $f\prime\prime_{1,\theta}(1) = 2g(1) \neq 0$, виводимо локальну поведінку $\Sigma_{1,\theta}$ поблизу $a = 1$.

Припустимо, що для деяких $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, промінь $\Sigma_{\pm 1,\theta}$ розходиться до певного моменту в $]-\infty, -1[$; або приклад,

...

Нехай $\epsilon > 0$ так, що $0 < \theta - 2\epsilon$. Для $a \in \mathbb{C}$ задовольняє $\pi - \epsilon < \arg a < \pi$, $0 < \theta - 2\epsilon < \theta + 2\arg a + arg\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\sqrt{t(a-1)+2}dt < \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\epsilon}{2} < \pi$, що суперечить (1). Інші випадки подібні. Таким чином, будь-який промінь з $\Sigma_{\pm 1,\theta}$ повинен розходитись на ∞. Випадок $\theta = 0$ є простішим.

Якщо $a \to \infty$, тоді $|f_{1,\theta}(a)| \to +\infty$; since $\Re f_{1,\theta}(a) = 0$, we have $|\Im f_{1,\theta}(a)| \to +\infty$. Звідси випливає, що

...

Ми отримуємо поведінку будь-якої дуги $\Sigma_{1,\theta}$, яка розходиться до ∞. Зокрема, з принципу максимуму модуля, два промені з $\Sigma_{,\theta}$ не можуть розходитись у ∞. $\Sigma_{1,\theta}$ не можуть розходитись до ∞ в одному напрямку.

Якщо $\Sigma_{1,\theta}$ містить регулярну точку z_0 (наприклад, $\Im z_0 > 0$), яка не належить дугам $\Sigma_{1,\theta}$, що виходять з точки $a = 1$. Два промені кривої набору рівнів γ, що проходять через z_0 розходяться до ∞ у двох різних напрямках. Звідси випливає, що γ має проходити через $z_1 = 1 + iy$, для деяких $y > 0$, або $z_1 = y$, для деяких $y > 1$. Легко перевірити, що в обох випадках, для будь-якого вибору аргументу,

...

і отримуємо протиріччя. Таким чином, $\Sigma_{1,\theta}$ утворюється лише двома двома кривими, що проходять через $a = 1$. Таку саму ідею дає структура $\Sigma_{-1,\theta}$; навіть більше, з співвідношення

$$\ldots \tag{2}$$

доступних для довільного $\theta \in [\pi/4, \pi/2[$, можна легко побачити що $\Sigma_{-1,\frac{\pi}{2}-\theta}$ і $\Sigma_{1,\theta}$ симетричні відносно уявної осі (2). Це приводить нас до того, щоб обмежити наше дослідження випадком. $\square$