Рівневий набір гармонійних функцій

А. В. Тор

Для $\theta \in [0, \pi/2]$, розглянемо множини

...

...

...

де — комплексний многочлен, визначений формулою

...

Лема 1. *Нехай . Тоді кожна з множин та утворюється двома гладкими кривими, які локально ортогональні відповідно при та точніше:*

...

...

Дві криві, що визначають (відповідно), перетинаються лише при (відповідно). Більше того, для , вони розходяться по-різному до в одному з напрямків

...

Для , (відповідно), один промінь (відповідно) розходиться до (відповідно).

Доведення. Нехай задано непостійну гармонічну функцію u, визначену в деякій області D of C. Критичними точками u є саме ті, де

...

Вони ізольовані. Якщо v є гармонічним спряженням u у D, скажімо, $f(z) = u(z) + iv(z)$ аналітична у D, тоді за Коші-Ріманом,

...

Встановлений рівень

...

u через точку $z_0 \in D$ залежить від поведінки f поблизу z_0. Точніше, якщо z_0 є критичною точкою u, ($u'(z_0) = 0$), то існує околиця U околу z_0, голоморфної функції $g(z)$ визначена на U, така, що

...

Взявши гілку m-го кореня з $g(z)$, f має локальну структуру

...

Звідси випливає, що локально утворена m аналітичними дугами які проходять через z_0 і перетинаються там під рівними кутами π/m. Через регулярну точку $z_0 \in D$, ($u'(z_0) \neq 0$), теорема про неявну функцію стверджує, що є локально єдиною аналітичною дугою. Зауважте, що множина рівнів гармонічної функції не може закінчуватися у звичайній точці.

Розглянемо багатозначну функцію

...

Інтегруючи вздовж відрізка [1, a] , можна припустити, що без без втрати загальності, що

... (1)

Очевидно, що:

...

Отже, при фіксованому виборі аргументу та квадратного кореня всередині інтеграла, $f1,$ та g є однозначними аналітичними функціями в .

Припустимо, що для деяких ,

...

Тоді,

...

Беручи справжні деталі, ми отримуємо

...

За неперервністю функцій всередині цих інтегралів на відрізку $[0, 1]$, існують $t1, t2[0, 1]$ такі що

...

а потім

...

Взявши їх співвідношення, отримуємо

...

яка не може виконуватись, оскільки, якщо $a > 0$, то

...

Випадок ℑa < 0 є аналогічним, тоді як випадок a □ R можна легко відкинути. Таким чином, $a = 1$ є єдиною критичною точкою $f1,$. Since $f''1,(1) = 2g(1) = 0$, виводимо локальну поведінку $\sum_1^\theta$ поблизу $a = 1$.

Припустимо, що для деяких $]0, 2[$, промінь $\sum_{\pm 1}^\theta$ розходиться до певного моменту в $]-\infty, -1[$; або приклад,

$$\ldots$$

Нехай $\epsilon > 0$ так, що $0 < \theta - 2\epsilon$. Для $a \in \mathbb{C}$ задовольняє $\pi - \epsilon < \arg a < \pi$, $0 < \theta - 2\epsilon < \theta + 2\arg a + arg\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\sqrt{t(a-1)+2}dt < \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\epsilon}{2} < \pi$, що суперечить (1). Інші випадки подібні. Таким чином, будь-який промінь з $\sum_{\pm 1}^\theta$ повинен розходитись на inf. Випадок $\theta = 0$ є простішим.

Якщо $a \to$ inf, тоді $|f_{1,}(a)| \to +$inf; since $\Re f_{1,\theta}(a) = 0$, we have $|f_{1,}(a)| \to +$inf. Звідси випливає, що

$$\ldots$$

Ми отримуємо поведінку будь-якої дуги $\sum_1^\theta$, яка розходиться до inf. Зокрема, з принципу максимуму модуля, два промені з $\sum^\theta$ не можуть розходитись у inf. $\sum_1^\theta$ не можуть розходитись до inf в одному напрямку.

Якщо $\sum_1^\theta$ містить регулярну точку z_0 (наприклад, $\Im z_0 > 0$), яка не належить дугам $\sum_1^\theta$, що виходять з точки $a = 1$. Два промені кривої набору рівнів γ, що проходять через z_0 розходяться до inf у двох різних напрямках. Звідси випливає, що γ має проходити через $z_1 = 1 + iy$, для деяких $y > 0$, або $z_1 = y$, для деяких $y > 1$. Легко перевірити, що в обох випадках, для будь-якого вибору аргументу,

$$\ldots$$

і отримуємо протиріччя. Таким чином, $\sum_1^\theta$ утворюється лише двома двома кривими, що проходять через $a = 1$. Таку саму ідею дає структура $\sum_{-1}^\theta$; навіть більше, з співвідношення

$$\ldots \tag{2}$$

доступних для довільного $\theta \in [/4, /2]$, можна легко побачити що $\sum_{-1}^{\frac{\pi}{2}-\theta}$ і $\sum_1^\theta$ симетричні відносно уявної осі (2). Це приводить нас до того, щоб обмежити наше дослідження випадком. □