НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
Фізико-технічний інститут

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
з кредитного модуля «Методи обчислень»
на тему:
«ОБЧИСЛЮВАЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ»
Варіант №10

Виконав
студент 3 курсу ФТІ
групи ФІ-21
Климентьєв Максим Андрійович

Перевірив:

____

Оцінка:

____

Київ — 2025

Зміст

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Варіант 10

Знайти чисельний розв'язок рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x)$$

$$0 < x < L = 1$$

$$u(t=0) = u_0 = x \cdot (x+1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0$$

$$u(t,0) = u_1(t)$$

$$u(t,L) = u_2(t)$$

$$u(t,x) = u_0(x) \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$u_0(x) = u_0 = x \cdot (x+1)$$

$$u(t,x) = x \cdot (x+1) \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$u(t,0) = 0 \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot t) = 0$$

$$u(t,L) = L \cdot (L+1) \cdot \cos(\pi \cdot t) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot \cos(\pi \cdot t) + \cos(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\pi \cdot x \cdot (x+1) \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\pi^2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t,x)$$

$$F(t,x) = -\pi^2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot \cos(\pi \cdot t) - 2 \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$F(t,x) = -\cos(\pi \cdot t) \cdot \left(\pi^2 \cdot x \cdot (x+1) + 2\right)$$

Рівняння — гіперболічного типу.

Є нелінійність - будемо робити через явну схему.

Навести приклади процесів, які моделюються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу

2 ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДРЧП

2.1 Тришарова схема з вагами

$$
\begin{aligned}
-\frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot u(k+1, i-1) + \left(1 + 2 \cdot \frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2}\right) \cdot u(k+1, i) - \frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot u(k+1, i+1) = \\
= 2 \cdot u(k, i) - u(k-1, i) + \\
+ \Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1, i) + \\
+ \Delta t^2 \cdot (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \left(\frac{u(k, i+1) - 2 \cdot u(k, i) + u(k, i-1)}{\Delta x^2} + F(k, i)\right) + \\
+ \Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u(k-1, i+1) - 2 \cdot u(k-1, i) + u(k-1, i-1)}{\Delta x^2} + F(k-1, i)\right)
\end{aligned}
$$

Приведення до такого виду (9.2)

Після чого вирішується така система кожну ітерацію:

$$Ax = B$$

де x - незалежна змінна для u, де B - права частина, порахована через минулі незалежні змінні, де A - тридіагональна матриця з коефіцієнтів,

$$Shape(nx-2, nx-2) = A$$
$$Shape(nx-2) = B$$
$$Shape(nx-2) = x$$

Приведення до такого виду (9.4)

- Переваги: Необхідність меншої кількості точок для часу.
- Недоліки:
  - Треба нормально так подумати, аби правильно реалізувати;
  - Для коректної роботи схеми: $\sigma_1 \geq \sigma_2$;
  - $\sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1}{2}$ — схема є **стійкою** для будь-яких Δx та Δt;
  - $\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{2}$ — схема є **умовно стійкою**, тобто вона буде працювати для:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - 2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}}$$

2.2 Явна схема

$$u(k+1, i) = 2 \cdot u(k, i) - u(k-1, i) + \Delta t^2 \cdot \left(\frac{u(k, i+1) - 2 \cdot u(k, i) + u(k, i-1)}{\Delta x^2} + F(k, i)\right)$$

Приведення до такого виду (9.3)

- Переваги: Простота реалізації, висока швидкість
- Недоліки: Необхідна стійкість $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5$

Оберемо Тришарову схему з вагами (2.1)

3 ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ЗАСТОСУВАННЯ ОБРАНОГО МЕТОДУ

Як вже згадувалось у недоліках (2.1):

- Для коректної роботи схеми: $\sigma_1 \geq \sigma_2$;
- $\sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1}{2}$ — схема є **стійкою** для будь-яких Δx та Δt;
- $\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{2}$ — схема є **умовно стійкою**, тобто вона буде працювати для:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - 2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}}$$

4 ОПИС ПРОГРАМНОЇ РЕАЛИЗАЦІЇ

Тут можна побачити саму програму https://github.com/KlymentievMaksym/MetOb/blob/main/RGR/RGR.ipynb

Параметри:

Кількість вузлів $x = 100$

Кількість індексів дискретного часу $t = 1000$

Відстань між сусідніми просторовими вузлами $\Delta x = 0.01$

Відстань між сусідніми моментами часу $\Delta t = 0.002$

$L = 1$

$T = 2$

Застосовано Тришарову схему з вагами (2.1).

Масиви, початковий та кінцевий (9.1)

Побудовано графіки:

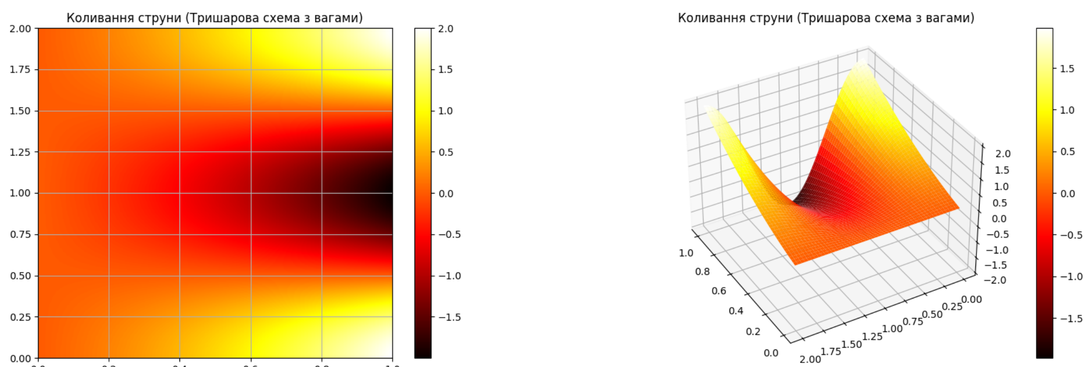

Рис. 1: Поверхня U(t, x) у 2D та 3D

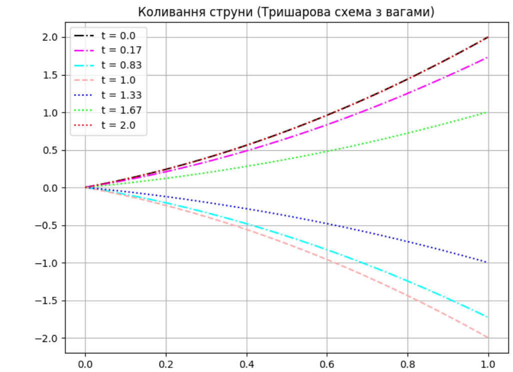

Рис. 2: Зрізи U(t, x) для фіксованих моментів часу

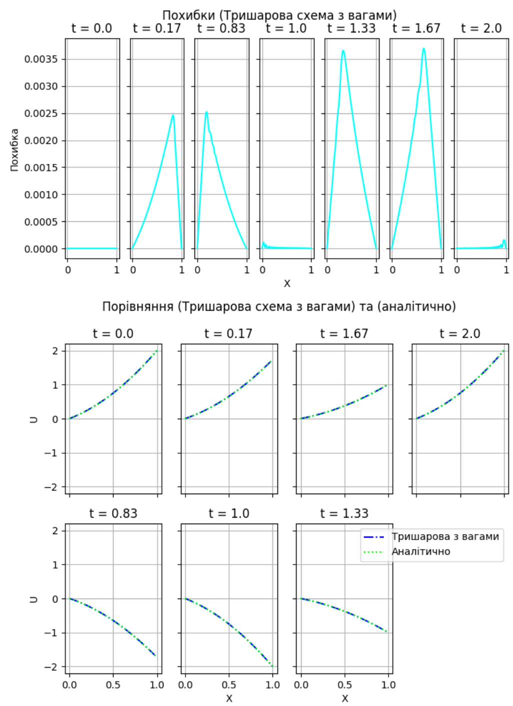

Рис. 3: Похибка

5 ОГЛЯД МЕТОДІВ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ

Можна збільшити кількість точок t.

6 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ТА ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ДО ПРИКЛАДУ РОБОТИ

Зі збільшенням t зменшується похибка

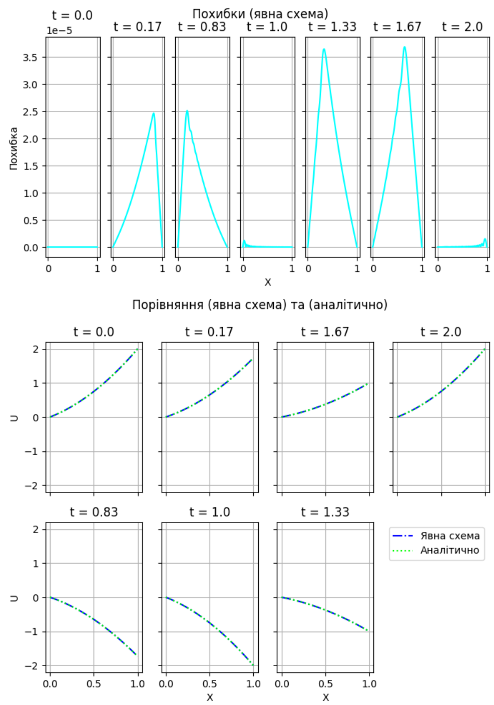

Рис. 4: Похибка (Фотографії узято з явної схеми, оскільки при однаковій кількості точок вони дають однакову похибку)

7 ВИСНОВКИ

Застосувавши Тришарову схему з вагами ми отримали коливання струни, яке майже таке ж, як аналітичний розв'язок. Приклади процесів, які моделюються за допомогою гіперболічних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

- Коливання струни. Одне з таких можна побачити вище, у постановці задачі.
- Коливання мембрани. Таке ж, як коливання струни, але з двома незалежними змінними.
- Поширення звукових хвиль.
- Поширення електромагнітних хвиль.

8 СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Методи обчислень: Розрахунково-графічна робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спец. 113 «Прикладна математика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.В. Стьопочкіна. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,7 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 56 с.

2. W. T. Lee. Tridiagonal Matrices: Thomas Algorithm. MS6021, Scientific Computation, University of Limerick. URL: http://www.industrial-maths.com/ms6021_thomas.pdf

9 ДОДАТКИ

9.1 Масиви, початковий та кінцевий

Початкова матриця (1000x100):

$$
\begin{pmatrix}
0.0 & 0.01020304050607081 & 0.020610141822263034 & \dots & 1.9697990001020307 & 2.0 \\
0.0 & 0.01020304050607081 & 0.020610141822263034 & \dots & 1.9697990001020307 & 1.9999604426373665 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.999841772114251 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9996439931249463 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9993671134930677 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.999011144171243 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.99857609924068 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9980619959106087 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9974688545176011 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9967966985247663 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.999841772114251 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999604426373665 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 2.0 \\
\end{pmatrix}
$$

Фінальна матриця (1000x100):

$$
\begin{pmatrix}
0.0 & 0.01020304050607081 & 0.020610141822263034 & \dots & 1.9697990001020307 & 2.0 \\
0.0 & 0.01020304050607081 & 0.020610141822263034 & \dots & 1.9697990001020307 & 1.9999604426373665 \\
0.0 & 0.010202637068360935 & 0.02060932671944144 & \dots & 1.9697195581339106 & 1.999841772114251 \\
0.0 & 0.010201830367918184 & 0.020607696720591286 & \dots & 1.9695592711572425 & 1.9996439931249463 \\
0.0 & 0.010200620584156602 & 0.020605252064306783 & \dots & 1.969316960781178 & 1.9993671134930677 \\
0.0 & 0.01019900789625577 & 0.020601993020245186 & \dots & 1.9689917575962361 & 1.999011144171243 \\
0.0 & 0.010196992479686104 & 0.020597919887864045 & \dots & 1.9685831569058483 & 1.99857609924068 \\
0.0 & 0.010194574504149699 & 0.020593032994595854 & \dots & 1.9680910411973875 & 1.9980619959106087 \\
0.0 & 0.010191754133025591 & 0.020587332693514874 & \dots & 1.9675156681484067 & 1.9974688545176011 \\
0.0 & 0.010188531524273675 & 0.020580819360640993 & \dots & 1.9668576264838946 & 1.9967966985247663 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0.0 & 0.01020677415746861 & 0.020603325625168555 & \dots & 1.9695620769242572 & 1.999841772114251 \\
0.0 & 0.010206447367528225 & 0.020606105713839022 & \dots & 1.969687107685745 & 1.9999604426373665 \\
0.0 & 0.010205302713256682 & 0.02060844158171087 & \dots & 1.9697346596870817 & 2.0 \\
\end{pmatrix}
$$

9.2 Тришарова схема з вагами

$$u(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x)$$

$$\frac{u_i^{k+1} - 2 \cdot u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = \sigma_1 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2 \cdot u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + F_i^{k+1} \right) +$$
$$+ (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k} - 2 \cdot u_i^{k} + u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} + F_i^{k} \right) +$$
$$+ \sigma_2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2 \cdot u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} + F_i^{k-1} \right)$$

$$u_i^{k+1} = 2 \cdot u_i^k - u_i^{k-1} + \Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2 \cdot u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + F_i^{k+1} \right) +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k} - 2 \cdot u_i^{k} + u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} + F_i^{k} \right) +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2 \cdot u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} + F_i^{k-1} \right)$$

$$u_i^{k+1} - \frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot \left(u_{i+1}^{k+1} - 2 \cdot u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} \right) =$$
$$= 2 \cdot u_i^k - u_i^{k-1} +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F_i^{k+1} +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k} - 2 \cdot u_i^{k} + u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} + F_i^{k} \right) +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2 \cdot u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} + F_i^{k-1} \right)$$

$$u(k+1, i) - \frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot (u(k+1, i+1) - 2 \cdot u(k+1, i) + u(k+1, i-1)) =$$
$$= 2 \cdot u(k, i) - u(k-1, i) +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1, i) +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \left(\frac{u(k, i+1) - 2 \cdot u(k, i) + u(k, i-1)}{\Delta x^2} + F(k, i) \right) +$$
$$+ \Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u(k-1, i+1) - 2 \cdot u(k-1, i) + u(k-1, i-1)}{\Delta x^2} + F(k-1, i) \right)$$

9.3 Явна схема

$$u(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x)$$

$$\frac{u_i^{k+1} - 2\cdot u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2\cdot u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} + F_i^k$$

$$u_i^{k+1} - 2\cdot u_i^k + u_i^{k-1} = \Delta t^2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^k - 2\cdot u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} + F_i^k\right)$$

$$u_i^{k+1} = 2\cdot u_i^k - u_i^{k-1} + \Delta t^2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^k - 2\cdot u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} + F_i^k\right)$$

9.4 Ax = B

A =

$$\begin{pmatrix}
\left(1+2\cdot\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\right) & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & \left(1+2\cdot\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\right) & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & \left(1+2\cdot\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\right) & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & \left(1+2\cdot\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\right) & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & \left(1+2\cdot\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\right) & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & -\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2} & \left(1+2\cdot\frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\right)
\end{pmatrix}$$

B =

$$
\begin{pmatrix}
\begin{gathered}
2\cdot u(k,1) - u(k-1,1) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1,1) + \\
+\Delta t^2 \cdot (1-\sigma_1-\sigma_2) \cdot \left(\frac{u(k,2)-2\cdot u(k,1)+u(k,0)}{\Delta x^2} + F(k,1)\right) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u(k-1,2)-2\cdot u(k-1,1)+u(k-1,0)}{\Delta x^2} + F(k-1,1)\right) + \\
+\frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot u(k+1,0)
\end{gathered} \\ \\
\begin{gathered}
2\cdot u(k,2) - u(k-1,2) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1,2) + \\
+\Delta t^2 \cdot (1-\sigma_1-\sigma_2) \cdot \left(\frac{u(k,3)-2\cdot u(k,2)+u(k,1)}{\Delta x^2} + F(k,2)\right) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u(k-1,3)-2\cdot u(k-1,2)+u(k-1,1)}{\Delta x^2} + F(k-1,2)\right)
\end{gathered} \\ \\
\cdots \\ \\
\begin{gathered}
2\cdot u(k,i) - u(k-1,nx-3) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1,nx-3) + \\
+\Delta t^2 \cdot (1-\sigma_1-\sigma_2) \cdot \left(\frac{u(k,nx-2)-2\cdot u(k,nx-3)+u(k,nx-4)}{\Delta x^2} + F(k,nx-3)\right) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u(k-1,nx-2)-2\cdot u(k-1,nx-3)+u(k-1,nx-4)}{\Delta x^2} + F(k-1,nx-3)\right)
\end{gathered} \\ \\
\begin{gathered}
2\cdot u(k,i) - u(k-1,nx-2) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1,nx-2) + \\
+\Delta t^2 \cdot (1-\sigma_1-\sigma_2) \cdot \left(\frac{u(k,nx-1)-2\cdot u(k,nx-2)+u(k,nx-3)}{\Delta x^2} + F(k,nx-2)\right) + \\
+\Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{u(k-1,nx-1)-2\cdot u(k-1,nx-2)+u(k-1,nx-3)}{\Delta x^2} + F(k-1,nx-2)\right) + \\
+\frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot u(k+1,nx-2)
\end{gathered}
\end{pmatrix}
$$

x =

$$
\begin{pmatrix}
u(k+1,1) \\
\cdots \\
u(k+1,nx-2)
\end{pmatrix}
$$