НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
Фізико-технічний інститут

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
з кредитного модуля «Методи обчислень»
на тему:
«ОБЧИСЛЮВАЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ»
Варіант №10

Виконав
студент 3 курсу ФТІ
групи ФІ-21
Климентьєв Максим Андрійович

Перевірив:
____________________________

Оцінка:
____________________________

Київ — 2025

## Зміст

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

**Варіант 10**

Знайти чисельний розв'язок рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x)$$

$$0 < x < L = 1$$

$$u(t = 0) = u_0 = x \cdot (x + 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0) = 0$$

$$u(t, 0) = u_1(t)$$

$$u(t, L) = u_2(t)$$

---

$$u(t, x) = u_0(x) \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$u_0(x) = u_0 = x \cdot (x + 1)$$

$$u(t, x) = x \cdot (x + 1) \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

---

$$u(t, 0) = 0 \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot t) = 0$$

$$u(t, L) = L \cdot (L + 1) \cdot \cos(\pi \cdot t) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

---

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot \cos(\pi \cdot t) + \cos(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\pi \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\pi^2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

---

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x)$$

$$F(t, x) = -\pi^2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \cos(\pi \cdot t) - 2 \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$F(t, x) = -\cos(\pi \cdot t) \cdot \left(\pi^2 \cdot x \cdot (x + 1) + 2\right)$$

---

Рівняння — гіперболічного типу.

Є нелінійність - будемо робити через явну схему.

---

Навести приклади процесів, які моделюються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу

# 2 ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДРЧП

# 3 ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ЗАСТОСУВАННЯ ОБРАНОГО МЕТОДУ

1. Тришарова схема з вагами

$$u(t,x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x)$$

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{k+1} - 2\cdot u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = \sigma_1 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2\cdot u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + F_i^{k+1}\right) +\\ + (1-\sigma_1-\sigma_2)\cdot\left(\frac{u_{i+1}^{k} - 2\cdot u_i^{k} + u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} + F_i^{k}\right) +\\ + \sigma_2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2\cdot u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} + F_i^{k-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_i^{k+1} = 2\cdot u_i^k - u_i^{k-1} + \Delta t^2\cdot\sigma_1 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2\cdot u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + F_i^{k+1}\right) +\\ + \Delta t^2\cdot(1-\sigma_1-\sigma_2)\cdot\left(\frac{u_{i+1}^{k} - 2\cdot u_i^{k} + u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} + F_i^{k}\right) +\\ + \Delta t^2\cdot\sigma_2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2\cdot u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} + F_i^{k-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_i^{k+1} - \frac{\Delta t^2\cdot\sigma_1}{\Delta x^2}\cdot\left(u_{i+1}^{k+1} - 2\cdot u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}\right) =\\ = 2\cdot u_i^k - u_i^{k-1} +\\ + \Delta t^2\cdot\sigma_1\cdot F_i^{k+1} +\\ + \Delta t^2\cdot(1-\sigma_1-\sigma_2)\cdot\left(\frac{u_{i+1}^{k} - 2\cdot u_i^{k} + u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} + F_i^{k}\right) +\\ + \Delta t^2\cdot\sigma_2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2\cdot u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} + F_i^{k-1}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u(k+1,i) - \frac{\Delta t^2 \cdot \sigma_1}{\Delta x^2} \cdot (u(k+1,i+1) - 2 \cdot u(k+1,i) + u(k+1,i-1)) = \\
&= 2 \cdot u(k,i) - u(k-1,i) + \\
&+ \Delta t^2 \cdot \sigma_1 \cdot F(k+1,i) + \\
&+ \Delta t^2 \cdot (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \left( \frac{u(k,i+1) - 2 \cdot u(k,i) + u(k,i-1)}{\Delta x^2} + F(k,i) \right) + \\
&+ \Delta t^2 \cdot \sigma_2 \cdot \left( \frac{u(k-1,i+1) - 2 \cdot u(k-1,i) + u(k-1,i-1)}{\Delta x^2} + F(k-1,i) \right)
\end{aligned}
$$

- Переваги: Простота реалізації, висока швидкість
- Недоліки:
  - Для коректної роботи схеми: $\sigma_1 \geq \sigma_2$;
  - $\sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1}{2}$ — схема є **стійкою** для будь-яких $\Delta x$ та $\Delta t$;
  - $\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{2}$ — схема є **умовно стійкою**, тобто вона буде працювати для:

$$
\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - 2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}}
$$

2. Явна схема

$$
u(t,x)
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x)
$$

$$
\frac{u_i^{k+1} - 2 \cdot u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2 \cdot u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} + F_i^k
$$

$$
u_i^{k+1} - 2 \cdot u_i^k + u_i^{k-1} = \Delta t^2 \cdot \left( \frac{u_{i+1}^k - 2 \cdot u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} + F_i^k \right)
$$

$$
u_i^{k+1} = 2 \cdot u_i^k - u_i^{k-1} + \Delta t^2 \cdot \left( \frac{u_{i+1}^k - 2 \cdot u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} + F_i^k \right)
$$

$$
u(k+1,i) = 2 \cdot u(k,i) - u(k-1,i) + \Delta t^2 \cdot \left( \frac{u(k,i+1) - 2 \cdot u(k,i) + u(k,i-1)}{\Delta x^2} + F(k,i) \right)
$$

- Переваги: Простота реалізації, висока швидкість
- Недоліки: Необхідна стійкість $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5$

# 4 ОПИС ПРОГРАМНОЇ РЕАЛИЗАЦІЇ

Параметри:

Кількість вузлів $x = 100$

Кількість індексів дискретного часу $t = 100000$

Відстань між сусідніми просторовими вузлами $\Delta x = 0.01$

Відстань між сусідніми моментами часу $\Delta t = 0.00005$

$L = 1$

Застосовано явну схему.

Масиви, початковий та кінцевий (9)

Побудовано графіки:

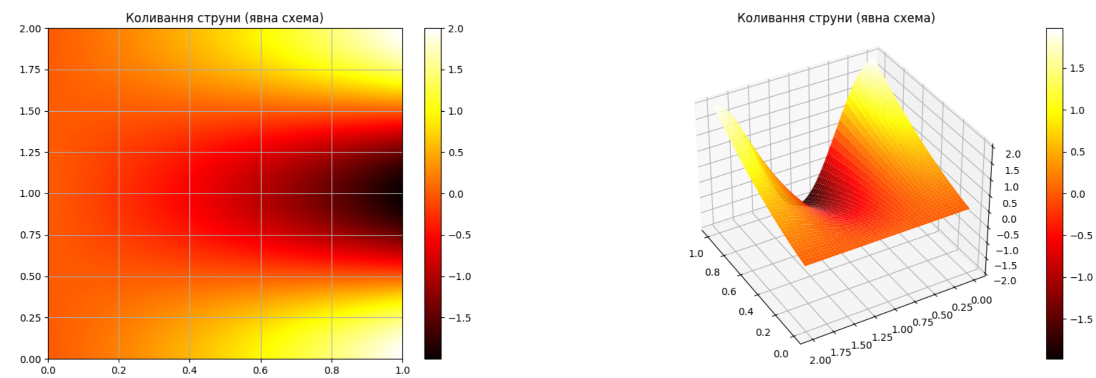


Рис. 1: Поверхня U(t, x) у 2D та 3D

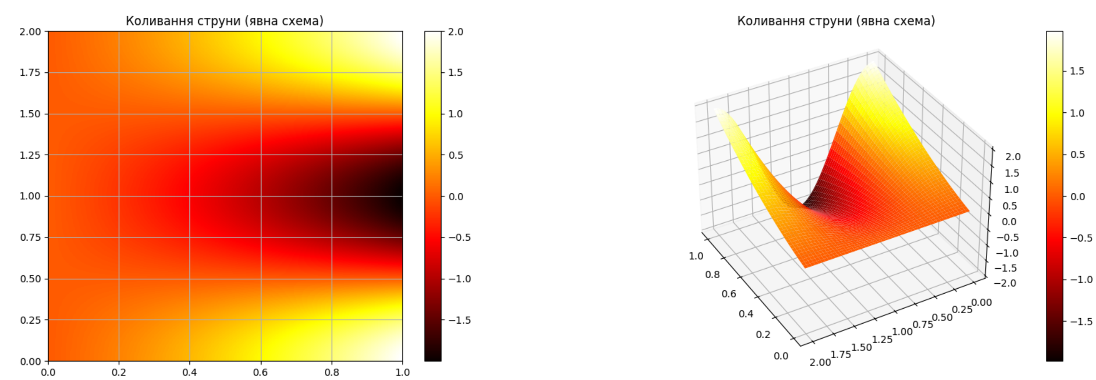


Рис. 2: Зрізи U(t, x) для фіксованих моментів часу

# 5 ОГЛЯД МЕТОДІВ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ

# 6 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ТА ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ДО ПРИКЛАДУ РОБОТИ

# 7 ВИСНОВКИ

# 8 СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1.

# 9 ДОДАТКИ

Різне

Start Matrix (100000x100):

$$\begin{pmatrix}
0.0 & 0.01020304050607081 & 0.020610141822263034 & \dots & 1.9697990001020307 & 2.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999999753254956 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.999999901301983 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999997779294636 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999996052079412 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999993831374194 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999991117179041 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999987909494017 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999984208319204 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 1.9999980013654692 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & -1.999999901301983 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & -1.9999999753254956 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & -2.0
\end{pmatrix}$$

Received Matrix (100000x100):

$$\begin{pmatrix}
0.0 & 0.01020304050607081 & 0.020610141822263034 & \dots & 1.9697990001020307 & 2.0 \\
0.0 & -1.9999999805773505 & -3.9999507106768935 & \dots & -188.43500752856792 & 1.9999999753254956 \\
0.0 & -1.9999999065538376 & -3.9999998186151107 & \dots & -195.91107678311408 & 1.999999901301983 \\
0.0 & -1.9999997831813179 & -3.999999571870071 & \dots & -195.99956337495996 & 1.9999997779294636 \\
0.0 & -1.999999610459795 & -3.999999226427025 & \dots & -196.0000441955736 & 1.9999996052079412 \\
0.0 & -1.9999993883892728 & -3.9999987822859797 & \dots & -196.00002406230797 & 1.9999993831374194 \\
0.0 & -1.9999991169697569 & -3.999998239446947 & \dots & -195.9999974666734 & 1.9999991117179041 \\
0.0 & -1.9999987962012535 & -3.99999759790994 & \dots & -195.99996603135077 & 1.9999987909494017 \\
0.0 & -1.999998426083771 & -3.9999968576749736 & \dots & -195.9999297598208 & 1.9999984208319204 \\
0.0 & -1.9999980066173189 & -3.9999960187420682 & \dots & -195.99988865209056 & 1.9999980013654692 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0.0 & 1.9999999065538376 & 3.9999998186151107 & \dots & 195.9116714171308 & -1.999999901301983 \\
0.0 & 1.9999999805773505 & 3.9999509606818933 & \dots & 188.4918441248053 & -1.9999999753254956 \\
0.0 & 2.000000005251855 & 3.9999512600365073 & \dots & 188.54868323177544 & -2.0
\end{pmatrix}$$