Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа
экономики»
Образовательная программа «Прикладная математика»
бакалавр

Отчёт
по проектной работе

Построение и исследование периодических орбит вокруг точки L_1
системы Солнце-Земля

Выполнил студент гр. БПМ 223

Конюшенко Максим Николаевич

____
(подпись)

Руководитель проекта:

Аксёнов Сергей Алексеевич

________ ______________
(оценка) *(подпись)*

____
(дата)

Москва 2023

Содержание

Аннотация

Данный документ представляет собой отчёт о проделанной работе в рамках выполнения исследовательского проекта "Построение и исследование периодических орбит вокруг точки L1 системы Солнце-Земля". В рамках проекта были построены и исследованы двухпериодические орбиты, получающиеся из точки бифуркации типа удвоение периода семейства гало орбит.

1 Введение

В данном разделе описаны основные теоретические сведения, связанные с выполнением проекта.

1.1 Круговая ограниченная задача трёх тел

Существует задача гравитационного взаимодействия N тел, она состоит в описании движения материальной точки в гравитационном поле, создаваемом N массивными телами. В ней массы тел, положения и скорости в начальный момент времени считаются известными, а найти необходимо положение и скорость в любой момент времени. Описывается эта задача следующей системой (1.1):

$$\begin{cases} \dfrac{dr_i}{dt} = v_i \\ \dfrac{dv_i}{dt} = \sum\limits_{j \neq 1}^{N} G m_j \dfrac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где m_i, r_i, v_i - масса, радиус-вектор и скорость i-го тела соотвественно, G - гравитационная постоянная.

Круговая ограниченная задача трёх тел является одной из задач небесной механики, в ней изучается движение материальной точки, на которую действуют два массивных тела, движущиеся по круговым орбитам вокруг их общего барицентра. В рамках данного проекта рассматривается система, в которой два массивных тела это - Солнце и Земля.

Движение малого тела описывается во вращающейся системе координат, в которой два массивных тела неподвижны. В круговой ограниченной задаче трёх тел существуют пять особых точек, называемых **точками либрации**. Если поместить малое тело в эти точки с нулевой скоростью в подвижной системе, то оно будет покоиться относительно массивных тел. А именно, L_1, L_2, L_3 располагаются на прямой, соединяющей массивные тела, а L_4 и L_5 называют треугольными, так как они образуют правильные треугольники с двуми массивными телами системы. Существование таких точек объясняется тем, что в них действие гравитационных сил на малое тело полностью компенсируется центробежной силой. Около точек либрации существуют различные семейства периодических решений данной задачи.

1.2 Цели и задачи

Цель проекта – построение и исследование семейств периодических решений круговой ограниченной задачи трех тел.

Задачи проекта:

— Реализация алгоритмов автоматизации расчета, периодических орбит вокруг точки либрации L1 системы Солнце-Земля;

— Выполнение вычислительных экспериментов по построению периодических орбит и расчета их характеристик;

— Описание полученных семейств орбит и анализ их свойств.

2 Математическая модель

В данном разделе описаны основные математические выкладки, используемые в работе.

2.1 Постановка ограниченной задачи трёх тел

В общей задаче трёх тел исследуется движение трёх тел, взаимодействующих друг с другом в соответствии с законом тяготения Ньютона. Задача трёх тел описывается системой дифференциальных уравнений (формула 2.1)

$$\begin{cases} \ddot{\bar{r}}_1 = \gamma m_2 \dfrac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} + \gamma m_3 \dfrac{\bar{r}_3 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^3} \\ \ddot{\bar{r}}_2 = \gamma m_1 \dfrac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3} + \gamma m_3 \dfrac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_3 - \bar{r}_2|^3} \\ \ddot{\bar{r}}_3 = \gamma m_2 \dfrac{\bar{r}_2 - \bar{r}_3}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_3|^3} + \gamma m_1 \dfrac{\bar{r}_1 - \bar{r}_3}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_3|^3}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где γ - гравитационная постоянная, r_i, i $= \{1,\ 2,\ 3\}$ - радиус векторы тел, m_i, i $= \{1,\ 2,\ 3\}$ - массы соответсвующих тел, производная берётся по времени.

В круговой ограниченной задаче трёх тел, в отличие от общей задачи, предполагается, что два массивных тела движутся по круговым орбитам с центром в их центре масс, а масса третьего тела бесконечно мала. Это позволяет получить систему уже из всего трёх уравнений.

2.2 Обезразмеривание и вращающаяся система координат

Введём следующие обозначения для массивных тел нашей системы: тело P_1 имеет массу m_1, а тело P_2 имеет массу m_2. Для описания движения малого тела вводится вращающаяся система координат. Центр системы расположен в центре масс тел P_1 и P_2, а ось X проходит через эти два тела, ось Y дополняет базис в плосокcти вращения двух тел до ортонормированного, а ось Z дополняет базис в пространстве до правой тройки.

За единицу массы примем $m_1 + m_2$ и пусть $m_1 > m_2$. Производится обезразмеривание системы и полагается, что масса тела P_1 равна $\mu_1 =$ 1 - μ, масса тела P_2 равна $\mu_2 = \mu$, где $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$.

Обезразмеривание длины производится таким образом, что расстояние между двумя массивными телами равными 1. Единица времени выбирается такой, что угловая скорость двух массивных тел становится равной одному, $\omega = 1$.

2.3 Уравнения движения в новой системе

В результате замены системы и обезразмеривания мы получили новую систему, описывающую движение третьего тела (формула 2.2):

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где U $= \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + \dfrac{\mu_1}{r_1} + \dfrac{\mu_2}{r_2}$, а $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}$ - расстояния от первого и второго до меньшего тела соотвественно.

В круговой ограниченной задаче трёх тел нет общего аналитического решения. В данной работе для поиска периодических решений используется численный алгоритм.

2.4 Точки либрации

В круговой ограниченной задаче трёх тел сущетсвуют особые точки - точки либрации, в которых малое тело будет оставаться неподвижным относительно вращающейся системы. Они являются решениями системы уравнений 2.2. Такие точки в системе Солнце-Земля приведены на рисунке 2.1

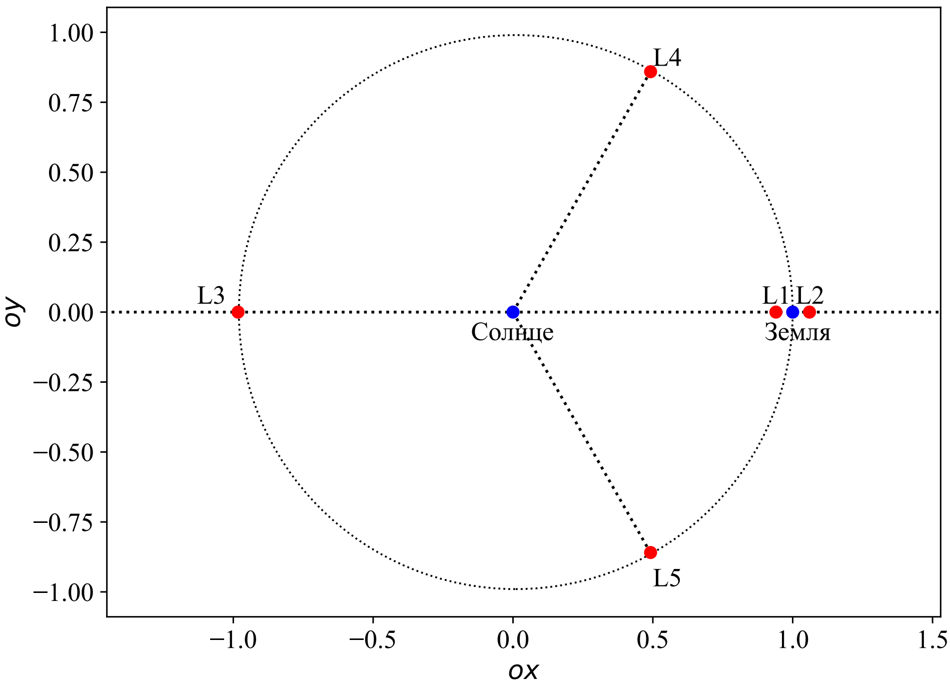

Рисунок 2.1 — Расположение точек либрации в системе Солнце-Земля

Точки L_1, L_2, L_3 являются точками неустойчивого равновесия, в то время как точки L_4 и L_5 обладают устойчивым равновесием. Неустойчивое равновесие означает, что при бесконечно малом импульсе тело покинет точку. Как видно из рисунка, точка L_1 находится между двумя массивными телами системы, находясь при этом на относительно небольшом расстоянии от меньшего тела. А точки L_2 и L_3 в свою очередь находятся за менее и более массивными телами соответственно.

Вокруг точек либрации существуют семейства периодических орбит, такие орбиты вокруг точки L_1 в системе Солнце-Земля рассматриваются в данном проекте.

2.5 Поиск семейства орбит

Механичесое состояние материальной точки задётся вектором вида (x, y, z, v_x, v_y, v_z) В ходе работы рассматривались орбиты, которые обладают свойством симметрии относительно плоскости $\{$y, $v_x, v_z\}$. Считается, что в начальный момент времени вектор состояния имеет вид $\{$x, 0, z, 0, v_y, 0$\}$. Для определения периодического решения достаточно знать три из шести компонент. Далее, если известно начальное состояние периодической орбиты (x_0, 0, z_0, 0, v_y, 0), то начальное состояние другой орбиты из того же семейства можно найти в виде: $(x_0 + r\cos\alpha, 0, z_0 + r\sin\alpha, 0, v_y, 0)$, где x_0, z_0 - координаты известной нам точки, α - некоторый угол, r - расстояние между начальными условиями, это расстояние считается известным. Теперь остаётся вопрос поиска скорости.

2.6 Сечение Пуанкаре и множители Флоке

Для поиска скорости орбиты используется сечение Пуанкаре другого решения, начальное состояние которого известно и находится на фиксированном расстоянии R от искомого решения.

Сечение Пуанкаре - это множество точек пересечения орбиты с заданной плоскостью. В данной работе использовалось сечение Пуанкаре плосокостью $Y = 0$. Орбиты, которые рассматриваются в данной работе, пересекают плоскость 4 раза.

Затем, происходит поиск начальной скорости, при которой сечение Пуанкаре искомой орбиты становится близко к сечению Пуанкаре известного решения.

Существуют такие точки, в которых малое изменение начальных условий приводит к качественному изменению решений, они называются *точками бифуркации*. Существуют точки бифуркации разного типа, например, при бифуркациях может увеличитваться период орбиты в n раз или переходить движение из плоскости в пространство. Такую точку можно определить при помощи **множителей Флоке**.

Матрица, которая линейно связывает небольшое изменение вектора состояния периодической орбиты в начальный момент времени и изменение вектора состояния через период называется *матрицей монодромии*. И вот собственные значения этой матрицы, как раз и называются множителями Флоке. Как уже было сказано выше, существуют разные типы бифуркации, так, бифуркации типа умножение периода на n происходят, когда множетили Флоке будут являться решениями уравнения вида $\lambda^n = 1$ над полем комплексных чисел. Если верно, что все множители Флоке по модулю равны 1, то решение является устойчивым, иначе - неустойчивым. А в случае, если все множители Флоке являются вещественными, то это означает, что семейство не содержит бифуркаций.

3 Ход работы

В данном разделе описаны основные шаги по выполнению задач, указанных во введении.

3.1 Подбор параметров

Важную роль в процессе рассчёта играет подбор параметров оптимизаторов, от них зависит точность полученных результатов. В ходе работы периодически менялось расстояние от последней посчитанной и следующей считающейся точки, называемое *шагом*. Необходимо было менять также менять ограничения на *изменения угла и координат*.

Во время расчёта семейства на экран выводились следующие данные (таблица 3.1), по которому можно было бы оценивать качество подбора параметров.

№	v_1	$Alpha$	$Goal$
1	-0,04334532128698155	2,228778399624393	0,035831174525596476
2	-0,043345053439593946	2,2333547947665235	0,00465350255752095
3	-0,0433452103742819	2,2379311899086543	0,0005737635132156971
4	-0,0433452103742819	2,2357216419320194	0,009525643482201751
5	-0,04334526817453942	2,242507585050785	0,009559248723078007
6	-0,043345086571948195	2,2365114672425985	0,0036429995941857918
7	-0,043345168029234146	2,239387025267357	0,00693542429508772
8	-0,043345108750102244	2,237533921489829	0,005383233984751934

Таблица 3.1 — Таблица данных, получаемых во время расчёта орбиты из семейства

Здесь в таблице v_1 - составляющая скорости по Y, $Alpha$ - угол, а $Goal$ - целевая функция, она рассчитывает расстояние между начальным состоянием орбиты и состоянием через период. Эта функция принимает значение 0, если $Alpha$ и скорость соответствуют периодической орбите. И, например, по этим данным можно понять как хорошо найден параметр ограничения изменения угла. Мы видим, что за 8 шагов точность дошла только до 10^{-3} и мы можем проанализировать, какие изменения с ней произойдут, если увеличить или уменьшить этот параметр. При дальнейших расчётах средняя точность целевой функции составляла не менее, чем 10^{-5}.

3.2 Поиск семейства орбит

Для расчёта двух периодических орбит изначально была выбрана точка бифуркации типа удвоения периода на ветке гало орбит. На основе этих начальных данных, используя алгоритм, описанный в предыдущем разделе, было рассчитано семейство двух периодических орбит (рис 3.1), а также определена точка бифуркации из него. В качестве языка программирования для выполнения задачи был использован Python.

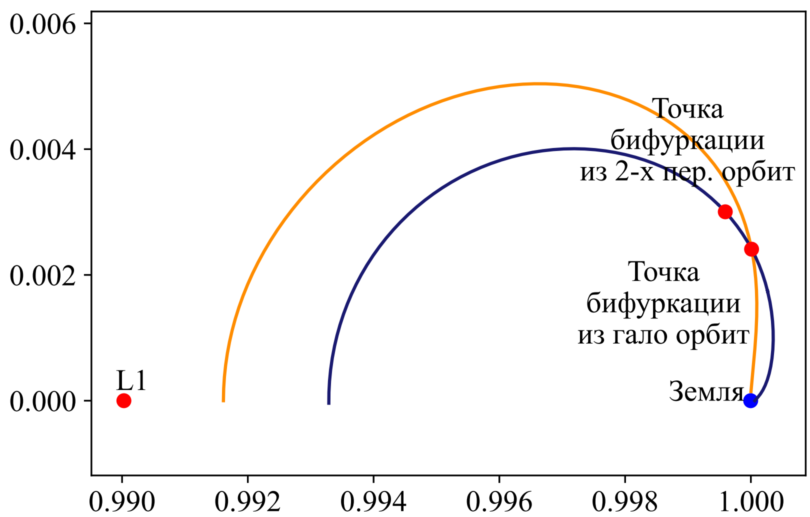

Рисунок 3.1 — Ветки гало (оранжевым) и рассчитанных двух периодических (синим) орбит

Таким образом, в ходе работы была расчитана синяя ветвь двух периодических орбит.

3.3 Анализ получившихся орбит

Траектории орбит, получившихся, в ходе выполнения работы, были визуализированы в трёхмерном пространстве, а также были получены их проекции на плоскости XY, XZ и YZ (рис. 3.2 и 3.3).

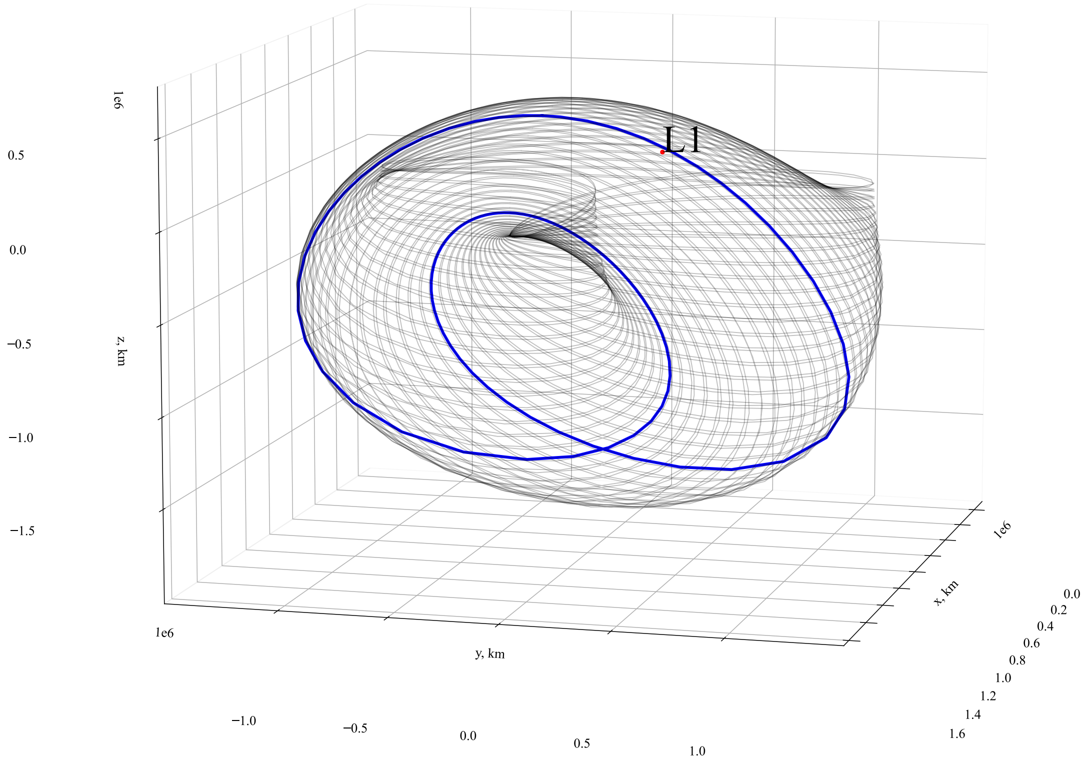

Рисунок 3.2 — Траектории орбит в пространстве

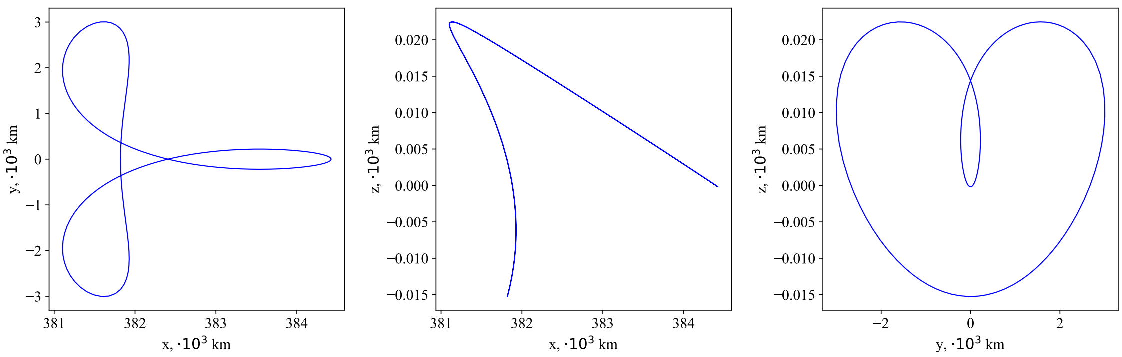

Рисунок 3.3 — Проекция одной из траекторий орбит семейства на плоскости XY, XZ, YZ

Из полученных визуализаций видно, что рассчитанные орбиты действительно представляют собой семейство двух периодических орбит вокруг точки либрации L_1.

Как было сказано в предыдущем разделе, исходя из множителей Флоке (рис. 3.4) мы можем сделать вывод об устойчивости или не устойчивости решения.

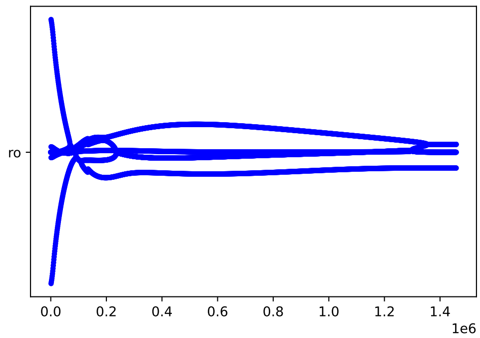

Рисунок 3.4 — График множителей Флоке для семейства

Посмотрев на график расположения множителей, мы можем сделать вывод о том, что в данном семействе нет устойчивых решений, так как понятно, что у каждой орбиты есть множитель, модуль которого больше 1.

Также, зная показатели множителей, мы можем сделать вывод о наличии бифуркаций в семействе. И из графика показателей (рис. 3.5) видно, что в данном семействе есть точки бифуркации типа умножение периода на n, так как существуют комплексные множители Флоке, она представлена на рисунке 3.1.

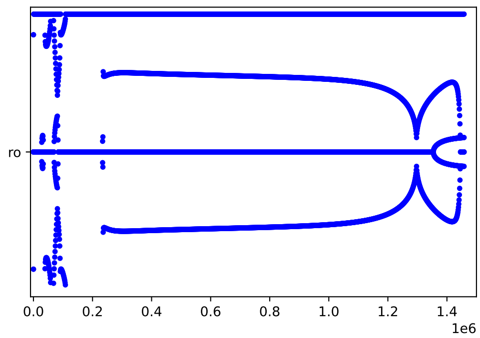

Рисунок 3.5 — График показателей множителей Флоке для семейства

4 Вывод

В ходе работы над проектом были выполнены все задачи, которые были поставлены в начале. Были найдены начальные условия двух периодических орбит, бифурцирующих из гало орбит около точки либрации L_1 системы Солнце-Земля. Все построенные орбиты были визуализированы и представлены в данном отчёте. Проведен анализ устойчивости решений и найдены точки бифуркации этого семейства.

Список использованных источников

1. *Bober Stanislav, Aksenov Sergey Guskova Mariia. OrbiPy.* источник. `https://bitbucket.org/stas_bober/orbipy/src/master/`.

2. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. под ред. И. И. Шевченко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 588 с. - ISBN 978-5-9221-1121-8. / Дермотт С Мюррей К. — М., 2010.