Universidad Tecnológica del Norte de Guanajuato.

Campus Dolores Hidalgo.

TSU en Desarrollo de Software Multiplataforma.

Área TIC´S.

**Cálculo diferencial.**

Juana Martha Hernández Sandoval.

**Unidad 1:** Limites y Continuidad.

**Grupo:** GDS0331.

**Alumnos:**

1220100983. Andrés Arredondo Escalante.

Dolores Hidalgo C.I.N., Guanajuato, México, a 16 de Junio de 2021.

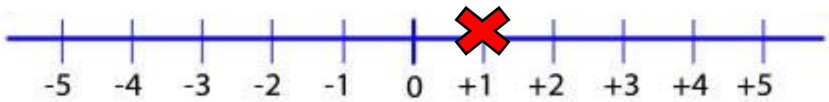
## Contenido

**Límites y Límites Laterales.**

EJERCICIO: Calcula de forma Tabular, Analítica y Gráfica los límites de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 3x + 2$ ; cuando $x \to 1$
2. $f(x) = 1 - x^2$ ; cuando $x \to 3$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ ; cuando $x \to 0$

1. $f(x) = 3x + 2$ cuando $x \to 1$.




| | Limite por la izquierda | | | $f(x) = 3x + 2$ | Limite por la derecha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
| f(x) | 4.7 | 4.97 | 4.997 | 5 | 5.003 | 5.03 | 5.3 |

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f(0.9) = 3(0.9) + 2 = 4.7$$

$$f(0.99) = 3(0.99) + 2 = 4.97$$

$$f(0.999) = 3(0.999) + 2 = 4.997$$

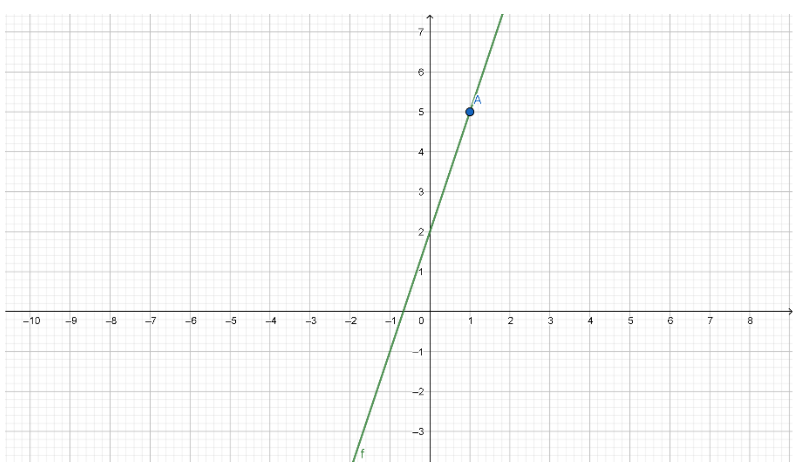
$$f(1.001) = 3(1.001) + 2 = 5.003$$

$$f(1.01) = 3(1.01) + 2 = 5.03$$

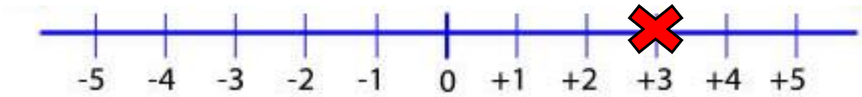
$$f(1.1) = 3(1.1) + 2 = 5.3$$

cuando $x \to 1$

$$\lim_{x \to 1} 3x + 2 = 3\,(1) + 2 = 3 + 2 = 5$$



2. $f(x) = 1 - x^2$ cuando $x \to 3$.




| | Limite por la izquierda | | | $f(x) = 1 - x^2$ | Limite por la derecha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
| f(x) | -7.41 | -7.9401 | -7.994001 | -8 | -8.006001 | -8.0601 | -8.61 |

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$f(2.9) = 1 - (2.9)^2 = -7.41$$

$$f(2.99) = 1 - (2.99)^2 = -7.9401$$

$$f(2.999) = 1 - (2.999)^2 = -7.994001$$

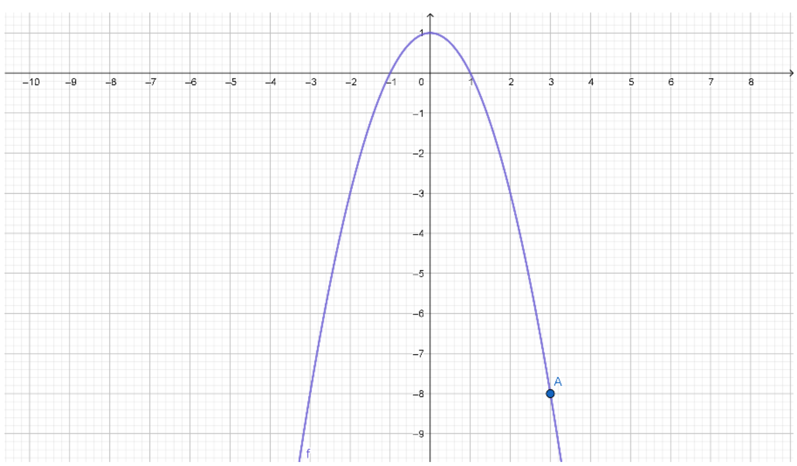
$$f(4.001) = 1 - (3.001)^2 = -8.006001$$

$$f(4.01) = 1 - (3.01)^2 = -8.0601$$

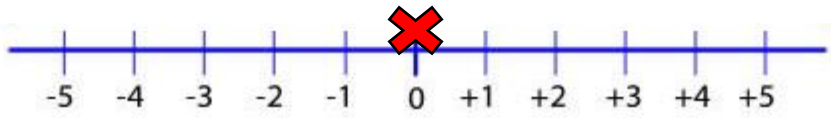
$$f(4.1) = 1 - (3.1)^2 = -8.61$$

cuando $x \to 3$

$$\lim_{x \to 3} 1 - x^2 = 1 - (3)^2 = 1 - 9 = -8$$



3. $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.




| | Limite por la izquierda | | | $f(x) = \frac{1}{x}$ | Limite por la derecha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -0.1 | -0.01 | -0.001 | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
| f(x) | -10 | -100 | -1000 | ∞ | 1000 | 100 | 10 |

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(-0.1) = \frac{1}{x} = -10$$

$$f(-0.01) = \frac{1}{x} = -100$$

$$f(-0.001) = \frac{1}{x} = -1000$$

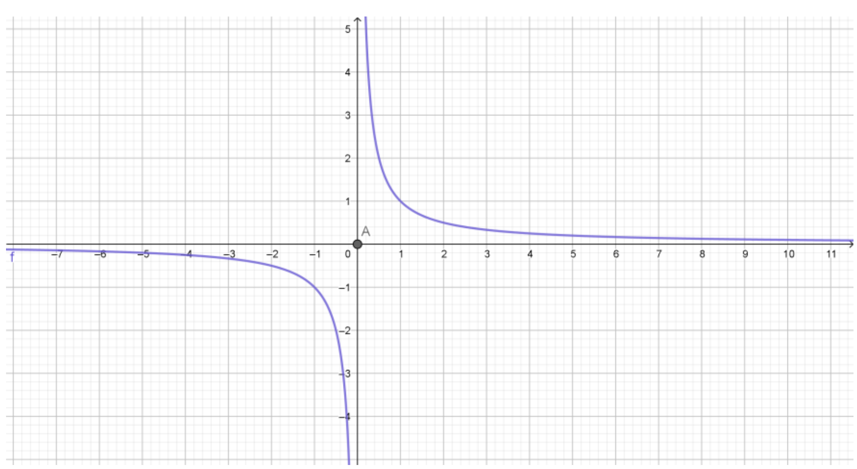
$$f(0.001) = \frac{1}{x} = 1000$$

$$f(0.01) = \frac{1}{x} = 100$$

$$f(0.1) = \frac{1}{x} = 10$$

cuando $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

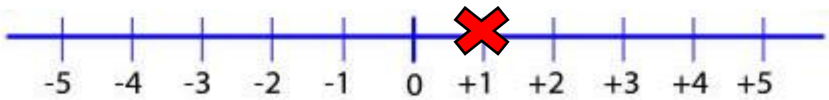


**Límites Infinitos.**

**EJERCICIO:** Calcula de forma Tabular, Analítica y Gráfica los límites infinitos de las siguientes funciones y concluye como en el ejemplo anterior.

4. $f(x) = \frac{3}{x-1}$; cuando $x \to 1$
5. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$; cuando $x \to 2$
6. $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ ; cuando $x \to -1$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.




| | Limite por la izquierda | | | $f(x) = \frac{3}{x-1}$ | Limite por la derecha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1 | 1.001 | 1.01 | 0.1 |
| f(x) | -30 | -300 | -3000 | ∞ | 3000 | 300 | 30 |

$$f(x) = \frac{3}{x-1}$$

$$f(0.9) = \frac{3}{x-1} = -10$$

$$f(0.99) = \frac{3}{x-1} = -100$$

$$f(0.999) = \frac{3}{x-1} = -1000$$

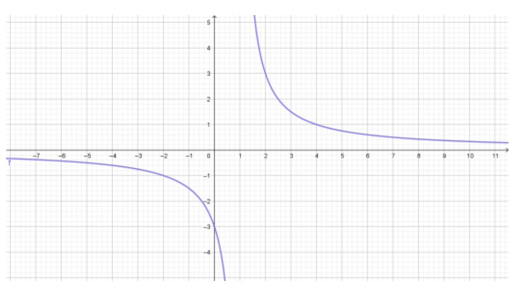
$$f(1.001) = \frac{3}{x-1} = 1000$$

$$f(1.01) = \frac{3}{x-1} = 100$$

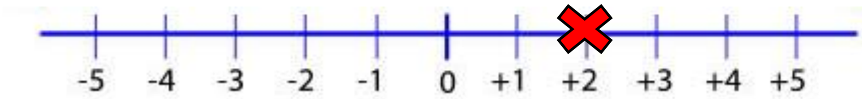
$$f(0.1) = \frac{3}{x-1} = 10$$

cuando $x \to 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{3}{(1)-1} = \frac{3}{0} = \infty$$



5. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ cuando $x \to 2$.




| | Limite por la izquierda | | | $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ | Limite por la derecha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
| f(x) | 100 | 10000 | 1000000 | ∞ | 1000000 | 10000 | 100 |

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f(1.9) = \frac{1}{((1.9)-2)^2} = 100$$

$$f(1.99) = \frac{1}{((1.99)-2)^2} = 10000$$

$$f(1.999) = \frac{1}{((1.999)-2)^2} = 1000000$$

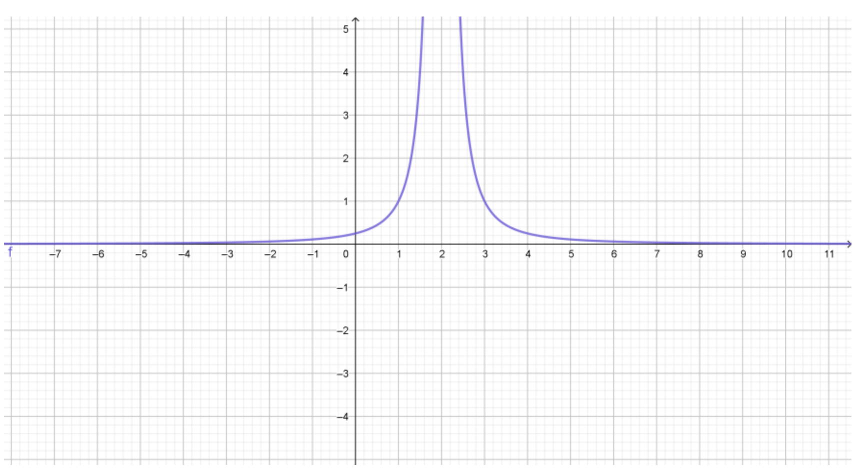
$$f(2.001) = \frac{1}{((2.001)-2)^2} = 1000000$$

$$f(2.01) = \frac{1}{((2.01)-2)^2} = 10000$$

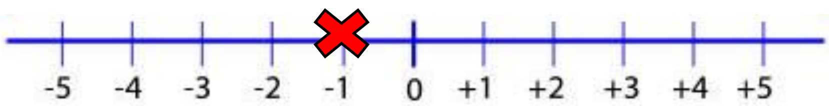
$$f(2.1) = \frac{1}{((2.1)-2)^2} = 100$$

cuando $x \to 0$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{(0)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$



6. $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ cuando $x \to$ -1.




| | Limite por la izquierda | | $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ | Limite por la derecha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | -1.1 | -1.01 | -1.001 | -1 | -0.999 | -0.99 | -0.9 |
| **f(x)** | 10 | 100 | 1000 | ∞ | -1000 | -100 | -10 |

$$f(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$f(-1.1) = \frac{-1}{(-1.1)+1} = 10$$

$$f(-1.01) = \frac{-1}{(-1.01)+1} = 100$$

$$f(-1.001) = \frac{-1}{(-1.001)+1} = 1000$$

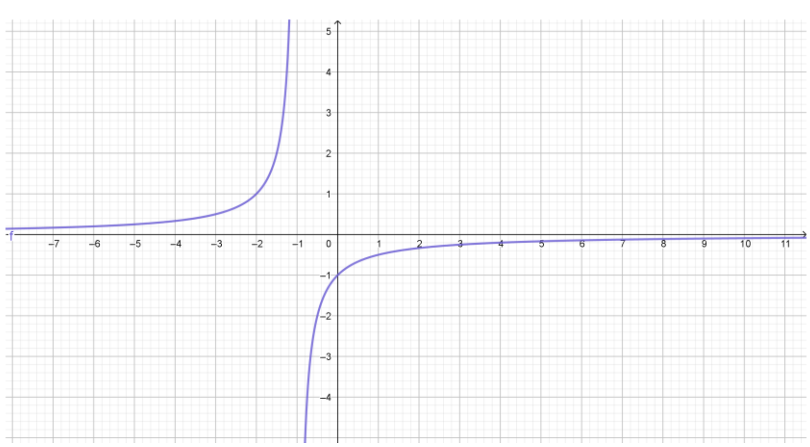
$$f(-0.999) = \frac{-1}{(-0.999)+1} = -1000$$

$$f(-0.99) = \frac{-1}{(-0.99)+1} = -100$$

$$f(-0.9) = \frac{-1}{(-0.9)+1} = -10$$

cuando $x \to$ -1

$$\lim_{x \to -1} \frac{-1}{(-1)+1} = \frac{-1}{0} = \infty$$



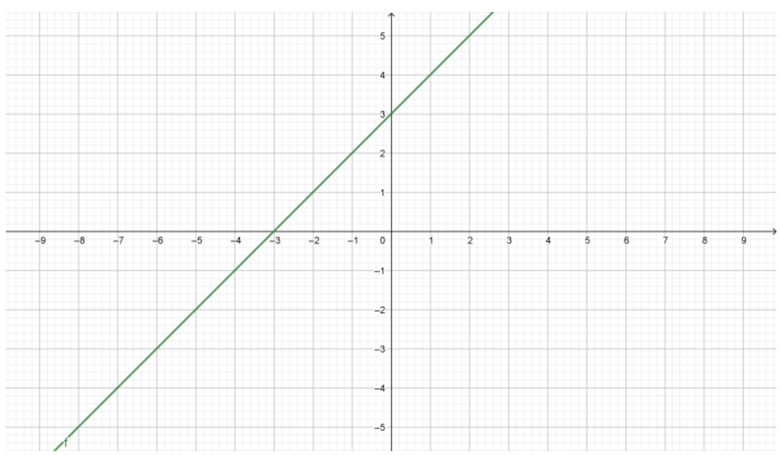
**Cálculo Analítico de Límites.**

**EJERCICIO:** Calcula de forma Analítica y Gráfica los límites de las siguientes funciones. No olvides concluir cada uno como en los ejemplos de clase.

7. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ ; cuando $x \to 3$
8. $f(t) = \frac{t^3+1}{t^2-1}$ ; cuando $t \to -1$
9. $f(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ ; cuando $t \to 1$
10. $f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-12}$ ; cuando $x \to 4$
11. $f(x) = \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x-4}$ ; cuando $x \to \infty$
12. $f(z) = \frac{z^2-3z+1}{2z^2+5}$ ; cuando $z \to 0$
13. $f(x) = \frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^3}$ ; cuando $h \to \infty$
14. $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$ ; cuando $x \to 0$

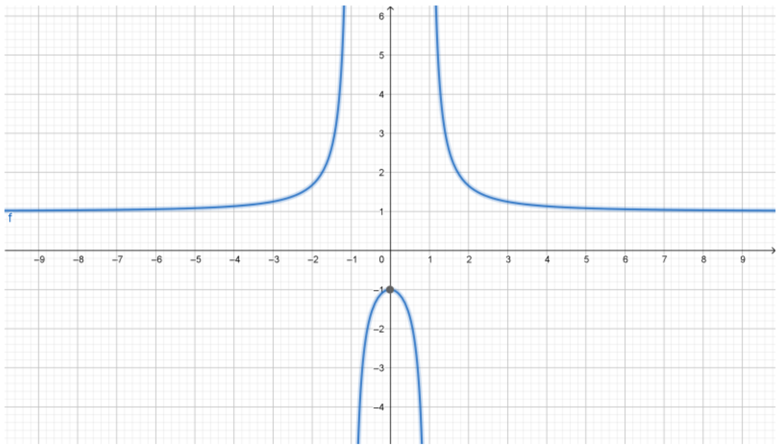
**7.** $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ cuando $x \to 3$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{\boldsymbol{x-3}} = x+3 = 3+3 = 6$$



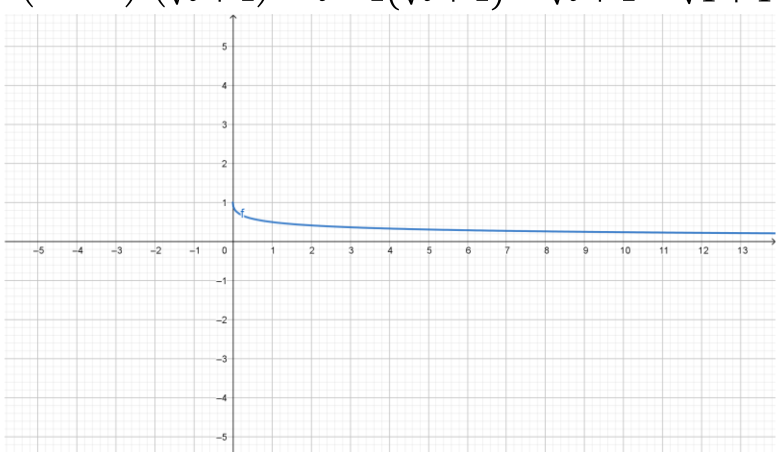
8. $f(\mathrm{t}) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ cuando t → -1.

$$\lim_{t \to -1} \frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty$$



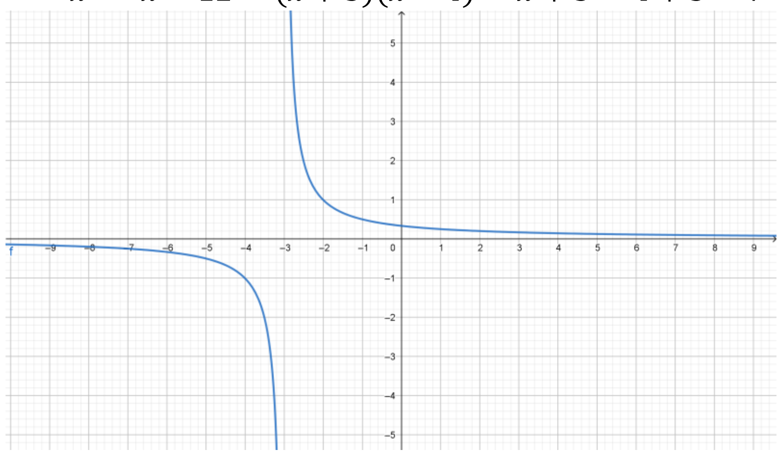
9. $f(\mathrm{t}) = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ cuando t → 1.

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}\right)\left(\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1}\right) = \frac{t-1}{t-1\left(\sqrt{t}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{t}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$



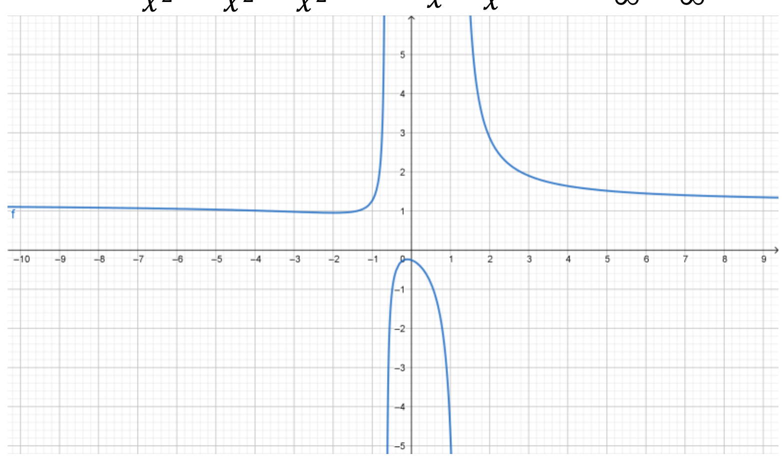
**10.** $f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-12}$ cuando $x \to 4$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}$$



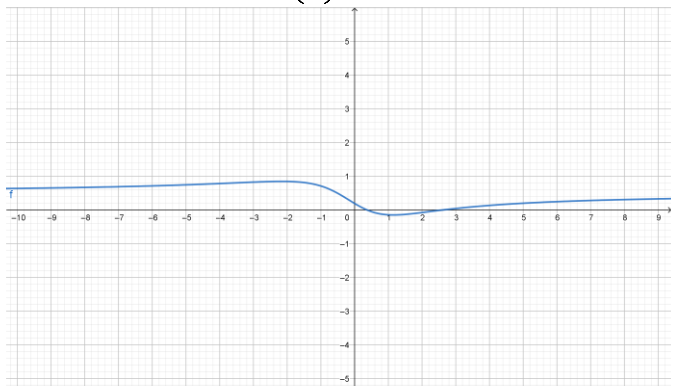
**11.** $f(x) = \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x-4}$ cuando $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x-4} = \frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \frac{6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{6+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{5-\frac{3}{\infty}-\frac{4}{\infty}} = \frac{6+0+0}{5-0-0} = \frac{6}{5}$$



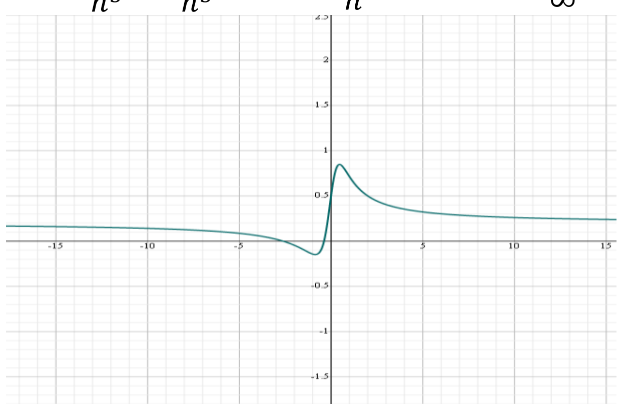
**12.** $f(\text{z}) = \frac{z^2-3z+1}{2z^2+5}$ cuando z $\rightarrow$ 0.

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2-3z+1}{2z^2+5} = \frac{(0)^2-3(0)+1}{(0)^2+5} = \frac{0-0+1}{\mathbf{0+5}} = \frac{1}{5}$$



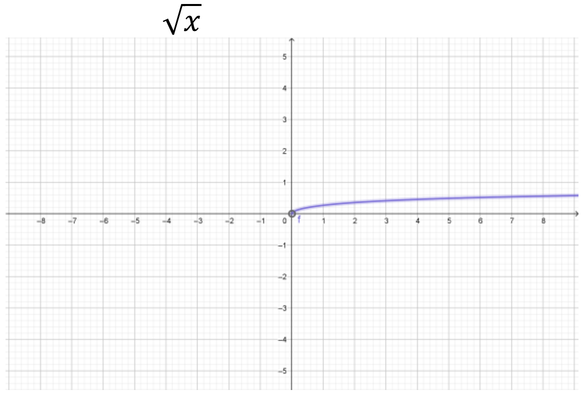
**13.** $f(x) = \frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^3}$ cuando h$\rightarrow$ $\infty$.

$$\lim_{h\to\infty}\frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^3} = \frac{\frac{x^2h}{h^3}+\frac{3xh^2}{h^3}+\frac{h^3}{h^3}}{\frac{2xh}{h^3}+\frac{5h^3}{h^3}} = \frac{\frac{x^2}{h^2}+\frac{3x}{h}+1}{\frac{2x}{h^2}+5} = \frac{\frac{x^2}{\infty^2}+\frac{3x}{\infty}+1}{\frac{2x}{\infty^2}+5} = \frac{0+0+1}{\mathbf{0+5}} = \frac{1}{\mathbf{5}}$$



**14.** $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$ cuando $x \rightarrow$ 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}} = 0$$



**Asíntotas Horizontales, Verticales y Oblicuas.**

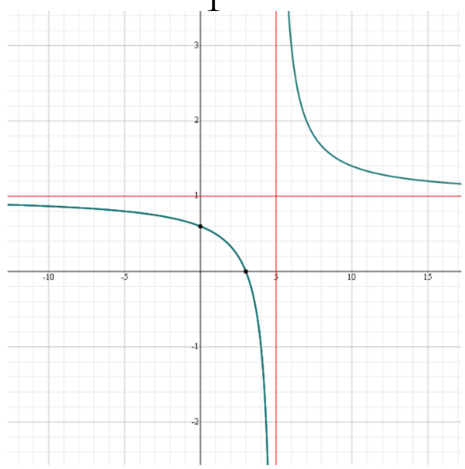
**EJERCICIO:** Realiza de forma analítica y grafica el cálculo de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas para cada una de las siguientes funciones.

15. $f(x) = \frac{x-3}{x-5}$
16. $f(x) = \frac{2x^2+4}{x-1}$
17. $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$

15. $f(x) = \frac{x-3}{x-5}$

$$x - 5 = 0;\ x = 5$$

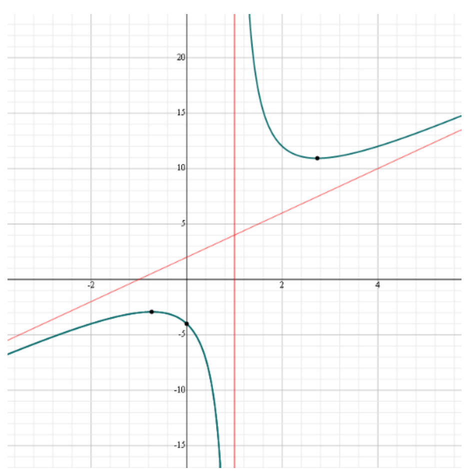
$$y = \frac{1}{1};\ y = 1$$




16. $f(x) = \frac{2x^2+4}{x-1}$

$$x - 1 = 0;\ x = 1$$

$$y = \frac{2x+4}{x-1};\ y = 2x + 2$$



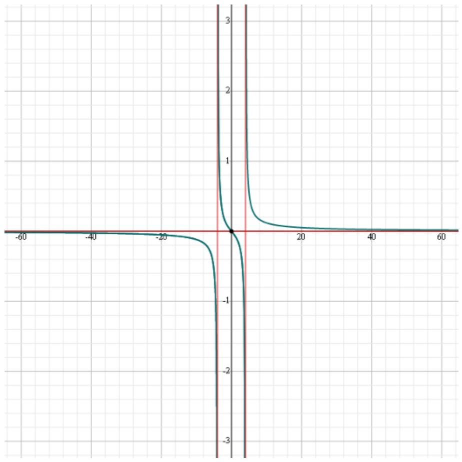
17. $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$

$$x^2 - 16 = 0;\ x^2 = 16;$$

$$x = \sqrt{16} \qquad\qquad x = -\sqrt{16}$$

$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$

$$y = \frac{x}{x^2 - 16};\ y = 0$$



**Continuidad.**

**EJERCICIO:** Prueba la continuidad de las siguientes funciones de acuerdo a los puntos vistos en clase. Al final toma captura de pantalla o dibuja la gráfica de cada una de las funciones e indica el punto de continuidad.

18. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ; *cuando* $x \to 2$
19. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ; *cuando* $x \to 1$
20. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ ; *cuando* $x \to 2$

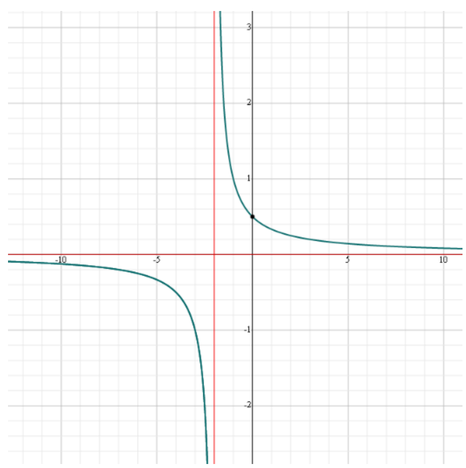
**18.** $f(x) = \frac{1}{x+2}$ cuando $x \to 2.$

$$(-\infty, -\mathbf{2}) \cup (-\mathbf{2}, \infty)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \qquad y \qquad f(2) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

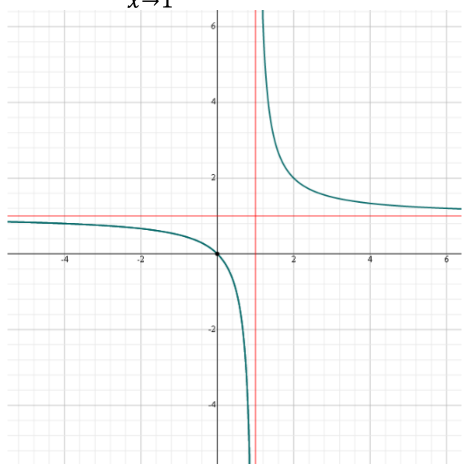
$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x\to 2} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



19. $f(x)=\frac{x}{x-1}$ cuando $x\to 1.$

$$(-\infty,\mathbf{1})\cup(\mathbf{1},\infty)$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \qquad y \qquad f(1)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

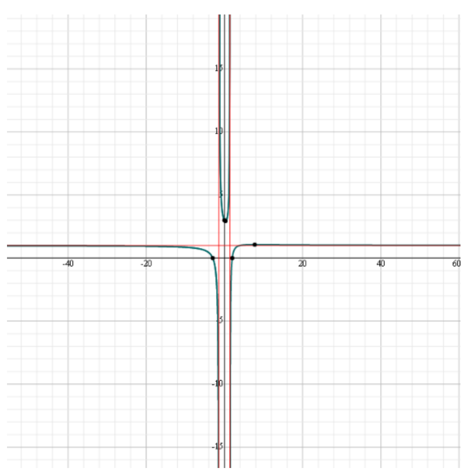
$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(a)$$



20. $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-2}$ cuando $x\to 2.$

$$(-\infty,-\sqrt{\mathbf{2}})\cup(-\sqrt{\mathbf{2}},\sqrt{\mathbf{2}})\cup(\sqrt{\mathbf{2}},\infty)$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-2}=\frac{2^2+2-6}{2^2-2}=\frac{4+2-6}{4-2}=\frac{0}{2}=0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-2}=\frac{2^2+2-6}{2^2-2}=\frac{4+2-6}{4-2}=\frac{0}{2}=0 \qquad y$$
$$f(2)=\frac{2^2+2-6}{2^2-2}=\frac{4+2-6}{4-2}=\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(a) \qquad \lim_{x\to 2}0=0$$



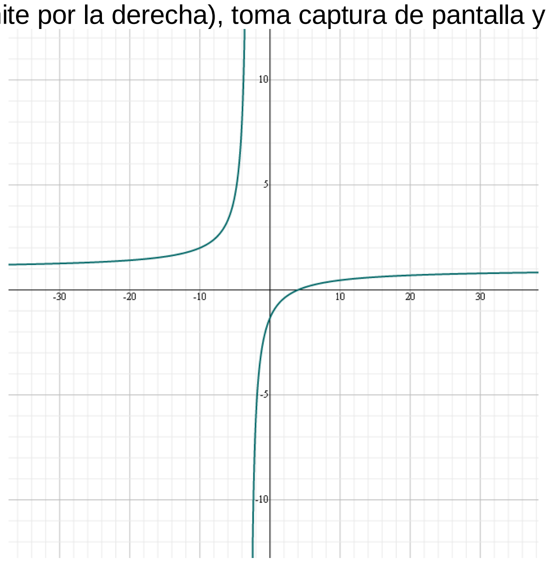
**Examen.**

Sea la función $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}$

1. Calcular el límite de la función cuando $\boldsymbol{x} \to \infty$ . (Recuerda que si se presenta en determinación debes aplicar algún método para tratar de evitarla)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-4}{x+3} = \frac{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}} = \frac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{1-\frac{4}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

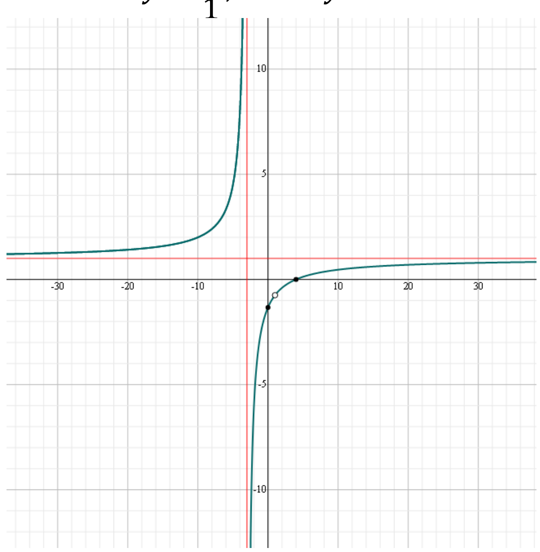
2. Confirma en el software GeoGebra el límite de la función con los tres comandos vistos en clase (limite, límite por la izquierda, límite por la derecha), toma captura de pantalla y pégala.



3. Calcular de forma analítica y dibujar la gráfica de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función.

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} = \frac{x-4}{x+3} = x+3 = 0; \quad x = -3$$

$$y = \frac{1}{1}; \quad y = 1$$



4. Probar la continuidad de la función cuando $x \to 2$

$$(-\infty, \mathbf{-3}) \cup (\mathbf{-3}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, \infty)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} = \frac{(2)^2-5(2)+4}{(2)^2+2(2)-3} = \frac{4-10+4}{4+4-3} = \frac{-2}{5} = -0.4$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} = \frac{4-10+4}{4+4-3} = \frac{-2}{5} = -0.4$$

$$f(2) = \frac{(2)^2-5(2)+4}{(2)^2+2(2)-3} = \frac{4-10+4}{4+4-3} = \frac{-2}{5} = -0.4$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(a) \quad \lim_{x\to 1} = -0.4 = -0.4$$