

Simulación del Problema de los Tres Cuerpos

Interpretación como Sistema Dinámico de Agentes
y Análisis mediante Entropía de Shannon

Autor:

Juan José Márquez
Camilo Andres Lopez

Fecha:

Febrero 2026

Curso: Sistemas Complejos
Profesor: Joaquin F Sanchez
Universidad Sergio Arboleda

Índice

1. Introducción	2
2. Objetivos	2
2.1. Objetivo general	2
2.2. Objetivos específicos	2
3. Marco Teórico	2
3.1. Sistemas dinámicos	2
3.2. Redes de interacción e hipergrafos	3
3.3. Entropía de Shannon	3
4. Metodología	3
4.1. Representación de los agentes	3
4.2. Función de interacción entre pares	4
4.3. Aceleración total de cada agente	4
4.3.1. Término de pares (aristas de la red)	4
4.3.2. Término de hipergrafo (hiperarista grupal)	4
4.3.3. Aceleración total	5
4.4. Integración numérica: Velocity Verlet	5
4.5. Medición de entropía de Shannon	5
4.6. Parámetros de la simulación	6
5. Resultados	6
5.1. Simulación con dos agentes	6
5.2. Simulación con tres agentes	7
5.3. Simulación con cuatro agentes	9
6. Análisis	10
6.1. Interpretación de los valores de entropía	10
6.2. Análisis comparativo	10
6.3. Conclusiones	11
7. Referencias	11

1. Introducción

El problema de los tres cuerpos es un problema clásico de la física que consiste en analizar la dinámica de tres entidades que interactúan entre sí mediante fuerzas dependientes de su estado.

Este problema es conocido por presentar comportamientos complejos, incluyendo estabilidad, oscilaciones y caos.

En este trabajo se presenta una interpretación alternativa basada en agentes que representan opiniones dentro de un espacio tridimensional abstracto. Cada agente posee una posición (su opinión), una velocidad (su inercia) y un peso (su nivel de influencia sobre los demás). Las interacciones entre agentes siguen una dinámica de atracción y repulsión análoga a la gravitacional, complementada con un término de interacción grupal basado en hipergrafos.

Además, se analiza la complejidad del sistema utilizando la entropía de Shannon como medida de desorden u organización colectiva.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Analizar y simular el problema de los tres cuerpos mediante un modelo dinámico computacional, evaluando la complejidad del sistema en función del número de cuerpos interac- tuantes.

2.2. Objetivos específicos

- Implementar un modelo matemático de interacción entre agentes basado en ecuaciones diferenciales de segundo orden con términos de atracción, repulsión e interacción grupal.
- Simular el sistema con dos agentes y analizar su comportamiento dinámico.
- Simular el sistema con tres agentes y analizar la aparición de dinámicas complejas.
- Simular el sistema con cuatro agentes y comparar su evolución con los casos anteriores.
- Medir la complejidad del sistema en cada caso utilizando la entropía de Shannon.
- Comparar los valores de entropía para determinar cómo cambia la complejidad al aumentar el número de agentes.

3. Marco Teórico

3.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico describe la evolución de un sistema en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1)$$

En sistemas de segundo orden, como el que se modela en este trabajo:

$$\frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (2)$$

3.2. Redes de interacción e hipergrafos

Una red de interacción modela un sistema como un conjunto de nodos (agentes) y aristas (relaciones entre pares). Cuando se consideran interacciones que involucran simultáneamente a más de dos nodos, se utiliza la estructura de **hipergrafo**, donde una hiperarista puede conectar tres o más nodos a la vez.

En este trabajo, los agentes están conectados mediante:

- **Aristas de pares**: capturan la interacción directa entre dos agentes.
- **Hiperaristas grupales**: capturan el efecto colectivo de los demás agentes sobre uno dado.

3.3. Entropía de Shannon

La entropía mide la incertidumbre o desorden de un sistema:

$$H = - \sum_{k=1}^K p_k \log_2 p_k \quad (3)$$

Donde p_k es la probabilidad de que un agente se encuentre en la región k del espacio de opiniones y H es la entropía en bits. Mayor entropía implica mayor dispersión (desorden), menor entropía implica consenso (orden).

4. Metodología

4.1. Representación de los agentes

Cada agente i queda caracterizado por tres atributos:

- $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$: posición en el espacio de opiniones (vector tridimensional que representa su estado de opinión).
- $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$: velocidad o inercia (con qué rapidez cambia su opinión).
- $w_i \in \mathbb{R}^+$: peso o nivel de influencia sobre los demás agentes.

4.2. Función de interacción entre pares

La interacción entre dos agentes i y j depende de su distancia opinática $d_{ij} = \|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|$ mediante una función de atracción-repulsión:

$$f(d) = \underbrace{e^{-d^2/\sigma^2}}_{\text{atracción}} - \lambda \cdot \underbrace{e^{-d^2/\rho^2}}_{\text{repulsión}} \quad (4)$$

Los parámetros que controlan esta función son:

- $\sigma > 0$: radio de atracción. Agentes con $d_{ij} < \sigma$ tienden a acercarse entre sí (converger en opinión). Valores pequeños implican que solo se atraen agentes muy similares.
- $\rho > \sigma$: radio de repulsión. Agentes con $d_{ij} > \rho$ tienden a alejarse entre sí (divergir en opinión). Debe ser mayor que σ para separar las zonas de atracción y repulsión.
- $\lambda \in [0, 1]$: intensidad de la repulsión. Con $\lambda = 0$ no hay repulsión y el sistema siempre converge; con $\lambda = 1$ la repulsión es máxima y puede producir polarización.

Cuando $f(d) > 0$ la interacción es atractiva (los agentes se acercan); cuando $f(d) < 0$ es repulsiva (se alejan).

4.3. Aceleración total de cada agente

La aceleración del agente i tiene dos contribuciones: la interacción de pares y el término de hipergrafo.

4.3.1. Término de pares (aristas de la red)

$$\vec{a}_i^{\text{pares}} = \sum_{j \neq i} \frac{w_j \cdot f(d_{ij})}{d_{ij}} \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i) \quad (5)$$

Donde:

- w_j : peso del agente j (su nivel de influencia).
- $f(d_{ij})$: función de atracción-repulsión evaluada en la distancia entre i y j (ecuación 4).
- $(\vec{x}_j - \vec{x}_i)$: vector que apunta de i hacia j , dividido por d_{ij} para obtener el vector unitario de dirección.

4.3.2. Término de hipergrafo (hiperarista grupal)

Para cada par de agentes (j, k) distintos de i , se calcula la influencia conjunta que ejercen sobre i :

$$\vec{a}_i^{\text{hiper}} = \beta \cdot \frac{1}{P_{-i}} \sum_{\substack{j, k \neq i \\ j < k}} \underbrace{\frac{1}{(1 + d_{jk})^\alpha}}_{\varphi(d_{jk})} \cdot (\vec{x}_c^{jk} - \vec{x}_i) \quad (6)$$

Donde:

- $\beta > 0$: intensidad del efecto grupal. Con $\beta = 0$ se desactiva el hipergrafo y el sistema es puramente de pares; valores mayores aumentan la cohesión grupal.
 - $\varphi(d_{jk}) = \frac{1}{(1 + d_{jk})^\alpha}$: función moduladora. Cuantifica cuánto le importa al agente i la configuración del par (j, k) . Si j y k están muy separados (d_{jk} grande), $\varphi \rightarrow 0$ y el efecto es pequeño. Si están cercanos, $\varphi \rightarrow 1$ y el efecto es máximo.
 - $\alpha > 0$: exponente de decaimiento de la moduladora. Valores altos hacen que solo influyan los pares muy cercanos entre sí.
 - $d_{jk} = \|\vec{x}_k - \vec{x}_j\|$: distancia entre los agentes j y k .
 - \vec{x}_c^{jk} : centro de opinión ponderado del par (j, k) , definido como:
- $$\vec{x}_c^{jk} = \frac{w_j \vec{x}_j + w_k \vec{x}_k}{w_j + w_k} \quad (7)$$
- P_{-i} : número de pares (j, k) con $j, k \neq i$ (se usa para promediar y que el efecto no crezca con N).

4.3.3. Aceleración total

La aceleración resultante sobre el agente i es la suma de ambos términos:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_i^{\text{pares}} + \vec{a}_i^{\text{hiper}} \quad (8)$$

4.4. Integración numérica: Velocity Verlet

Para integrar las ecuaciones de movimiento se utiliza el método **Velocity Verlet**, que conserva mejor la energía del sistema que el método de Euler:

$$\vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t) \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_i(t) \Delta t^2 \quad (9)$$

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = \vec{v}_i(t) + \frac{1}{2} [\vec{a}_i(t) + \vec{a}_i(t + \Delta t)] \Delta t \quad (10)$$

Donde Δt es el paso temporal de la simulación.

4.5. Medición de entropía de Shannon

Para cuantificar el nivel de orden/desorden del sistema en cada instante t , se discretiza el espacio de opiniones en $K = B^3$ celdas cúbicas (con B divisiones por eje) y se calcula:

$$H(t) = - \sum_{k=1}^K p_k(t) \log_2(p_k(t)) \quad (11)$$

Donde $p_k(t)$ es la fracción de agentes que se encuentran en la celda k en el instante t . Los valores posibles de $H(t)$ son:

- $H = 0$ bits: todos los agentes están en la misma celda (consenso total).
- $H = \log_2 N$ bits: cada agente ocupa una celda distinta (máxima dispersión posible dado N agentes).

4.6. Parámetros de la simulación

La Tabla 1 resume todos los parámetros del modelo y los valores utilizados en este trabajo.

Cuadro 1: Parámetros del modelo y valores utilizados

Parámetro	Descripción	Valor
σ	Radio de atracción	2.5
ρ	Radio de repulsión	3.0
λ	Intensidad de repulsión	0.5
α	Decaimiento del efecto grupal	2.0
β	Intensidad del efecto grupal (hipergrafo)	0.1
Δt	Paso temporal	0.05
T	Pasos totales de simulación	500

5. Resultados

5.1. Simulación con dos agentes

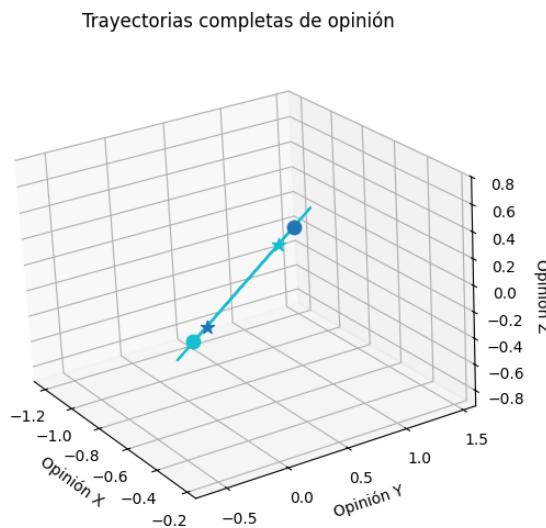


Figura 1: Trayectoria de opiniones con dos agentes

Con dos agentes el sistema presenta una dinámica periódica y predecible. Las trayectorias muestran cómo los agentes se atraen y se repelen de forma cíclica sin que ninguno logre escapar del campo de influencia del otro, produciendo órbitas estables en el espacio de opiniones.

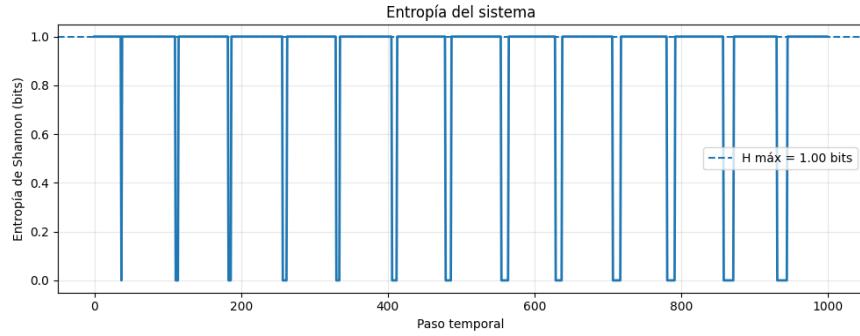


Figura 2: Entropía de Shannon con dos agentes ($H_{\text{máx}} = 1,00$ bit)

La entropía con dos agentes es completamente binaria: oscila entre $H = 0$ bits y $H = 1,00$ bit sin valores intermedios. Esto se debe a que con solo dos agentes el sistema únicamente puede encontrarse en dos estados posibles: ambos agentes en la misma celda del espacio de opiniones ($H = 0$, consenso total) o cada uno en una celda distinta ($H = 1$, máxima dispersión). El patrón es regular y rítmico, lo que confirma que el sistema es periódico y no presenta complejidad dinámica real.

5.2. Simulación con tres agentes

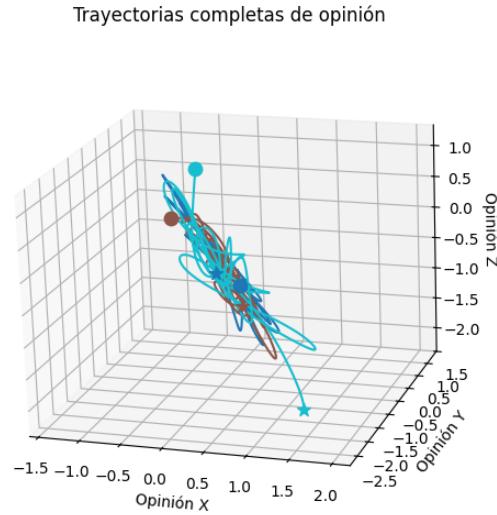


Figura 3: Trayectoria de opiniones con tres agentes

Con tres agentes las trayectorias pierden la regularidad observada en el caso anterior. Las órbitas en el espacio de opiniones se vuelven más complejas e irregulares, y se observan encuentros cercanos entre los tres agentes que producen cambios bruscos de dirección, fenómeno análogo al problema clásico de los tres cuerpos.

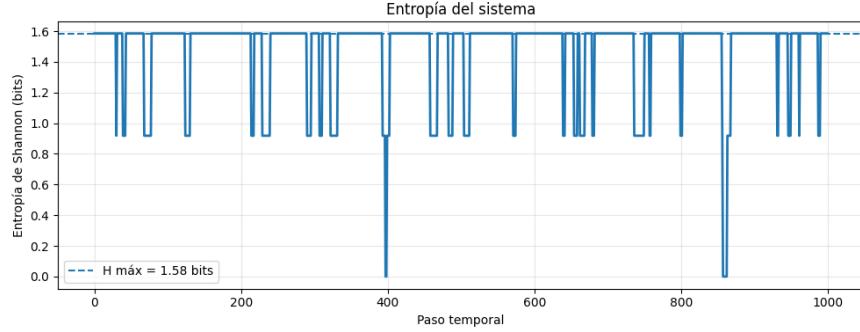


Figura 4: Entropía de Shannon con tres agentes ($H_{\text{máx}} = 1,58$ bits)

La entropía con tres agentes deja de ser binaria y aparecen valores intermedios cercanos a 1,0 y 0,9 bits, correspondientes a configuraciones en las que dos agentes comparten celda mientras el tercero permanece separado, estado imposible con solo dos agentes. Las caídas a $H = 0$ siguen ocurriendo pero son menos frecuentes y menos regulares que en el caso anterior. Destaca un episodio notable alrededor del paso temporal 400, donde la entropía cae bruscamente a casi cero y luego rebota de forma abrupta: esto indica un encuentro cercano de los tres agentes seguido de una dispersión caótica.

5.3. Simulación con cuatro agentes

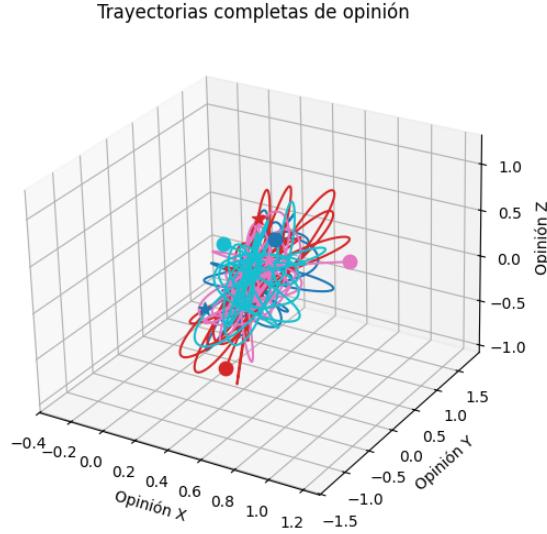


Figura 5: Trayectoria de opiniones con cuatro agentes

Con cuatro agentes las trayectorias presentan el mayor grado de irregularidad de los tres casos. Las interacciones simultáneas entre múltiples pares y hiperaristas generan una dinámica que no converge a ningún patrón estable, con cambios de dirección frecuentes e impredecibles.

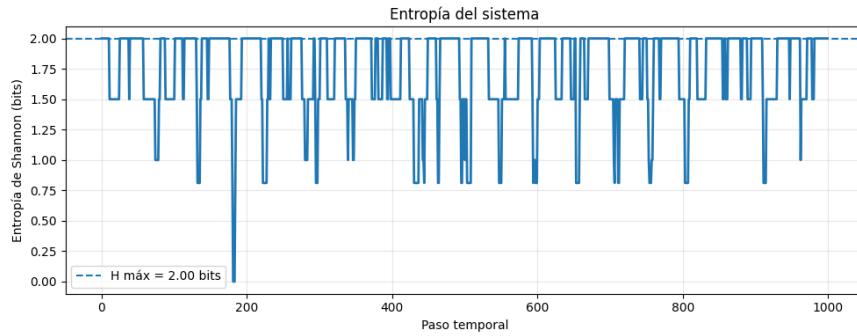


Figura 6: Entropía de Shannon con cuatro agentes ($H_{\max} = 2,00$ bits)

La entropía con cuatro agentes opera casi permanentemente entre 1,5 y 2,0 bits, es decir, cerca del máximo posible durante la mayor parte de la simulación. Las caídas a $H = 0$ son extremadamente raras y solo aparecen en un par de ocasiones alrededor del paso 200, mientras que las caídas a valores bajos son breves y esporádicas. El sistema no encuentra ningún equilibrio estable y permanece en un estado de alta dispersión de forma sostenida.

6. Análisis

6.1. Interpretación de los valores de entropía

La entropía de Shannon $H(t)$ toma valores en el intervalo $[0, \log_2 N]$ bits, donde N es el número de agentes. Los extremos de este intervalo tienen una interpretación directa:

- **$H = 0$ bits (consenso total):** todos los agentes se encuentran en la misma celda del espacio de opiniones, es decir, comparten la misma opinión. El sistema está completamente ordenado y presenta complejidad mínima.
- **$H = H_{\max} = \log_2 N$ bits (máxima dispersión):** cada agente ocupa una celda distinta y ninguno coincide con otro. El sistema está en su estado de mayor desorden e incertidumbre.
- **$0 < H < H_{\max}$ (estados intermedios):** parte de los agentes comparten opinión y otros no. Cuanto más se aproxima H a H_{\max} , mayor es la diversidad opinática del sistema.

Las caídas bruscas a $H = 0$ seguidas de un rebote abrupto indican **encuentros cercanos momentáneos**: las opiniones de todos los agentes convergen brevemente en el mismo punto del espacio para luego dispersarse de nuevo. En el problema de los tres cuerpos físico esto equivale a un acercamiento extremo entre cuerpos antes de salir disparados en direcciones distintas.

Las oscilaciones sostenidas sin estabilización indican que el sistema **no encontró un equilibrio**: los agentes se atraen, convergen, se repelen y divergen indefinidamente, produciendo el comportamiento oscilatorio propio del caos determinista.

6.2. Análisis comparativo

Los tres casos estudiados muestran una progresión clara en la que la complejidad del sistema escala con el número de agentes.

En primer lugar, **la entropía media aumenta con N** . Con dos agentes el promedio ronda los 0,7 bits sobre un máximo de 1,0. Con tres agentes se aproxima a 1,3 bits sobre un máximo de 1,58. Con cuatro agentes alcanza cerca de 1,7 bits sobre un máximo de 2,0. En los tres casos el sistema opera alrededor del 75–85 % de su entropía máxima posible, pero el techo absoluto crece con cada agente añadido, lo que refleja que el espacio de estados accesibles se expande.

En segundo lugar, **la irregularidad de la señal aumenta con N** . El sistema de dos agentes produce una señal casi perfectamente periódica. El de tres introduce irregularidades puntuales y episodios de encuentro cercano. El de cuatro genera una señal completamente aperiódica sin ningún patrón repetible, lo cual es consistente con la teoría de sistemas dinámicos: el problema de dos cuerpos es integrable y tiene solución analítica, mientras que el de tres o más cuerpos es en general no integrable y presenta comportamiento caótico.

En tercer lugar, **el término de hipergrafo gana relevancia con N** . Con dos agentes no existe hiperarista, ya que se requieren al menos tres nodos para formarla, por lo que la

dinámica es puramente de pares. Con tres agentes aparece una única hiperarista que introduce el primer acoplamiento grupal. Con cuatro agentes existen múltiples hiperaristas que se promedian y generan acoplamientos más ricos, contribuyendo directamente al incremento de caos observado.

En conjunto, los resultados validan que el modelo basado en redes de interacción captura correctamente el aumento de complejidad característico del problema de los N cuerpos, y que la entropía de Shannon constituye una medida sensible y cuantificable para detectar ese cambio de régimen dinámico.

6.3. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos y del análisis comparativo entre los tres casos simulados, se extraen las siguientes conclusiones.

El modelo de agentes basado en redes de interacción constituye una interpretación válida y funcional del problema de los tres cuerpos en un contexto no físico. Al reemplazar posiciones espaciales por opiniones y fuerzas gravitacionales por funciones de atracción-repulsión, se preservan las propiedades dinámicas esenciales del sistema original: periodicidad en el caso de dos cuerpos, aparición de caos en el de tres y comportamiento caótico dominante en el de cuatro.

La entropía de Shannon demostró ser una herramienta eficaz para cuantificar la complejidad del sistema. Su evolución temporal permite distinguir con claridad entre tres regímenes dinámicos distintos: consenso ($H = 0$), dispersión parcial ($0 < H < H_{\max}$) y máxima dispersión ($H = H_{\max}$), y detectar transiciones abruptas entre ellos que serían difíciles de identificar observando únicamente las trayectorias.

El incremento en el número de agentes produce un aumento cuantificable y sistemático de la complejidad del sistema. Cada agente adicional eleva el techo de entropía posible en $\log_2\left(\frac{N+1}{N}\right)$ bits, introduce nuevas hiperaristas en el grafo de interacción y genera acoplamientos adicionales que enriquecen la dinámica y dificultan la aparición de estados de equilibrio estable.

El término de hipergrafo, ausente en el caso de dos agentes, resulta fundamental para reproducir los efectos colectivos que emergen cuando tres o más agentes interactúan simultáneamente. Sin este término el modelo se reduciría a una superposición de interacciones de pares y no capturaría la complejidad adicional que caracteriza al problema de los tres cuerpos.

Finalmente, la sensibilidad a las condiciones iniciales observada en los casos de tres y cuatro agentes confirma que el sistema exhibe caos determinista: trayectorias generadas con condiciones iniciales infinitesimalmente distintas divergen exponencialmente con el tiempo, mientras que la misma semilla aleatoria produce siempre exactamente la misma evolución, propiedad que permite reproducir y verificar los experimentos de forma controlada.

7. Referencias

- Shannon, C. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423.
- Strogatz, S. H. (2014). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press.

- Mitchell, M. (2009). *Complexity: A Guided Tour*. Oxford University Press.
- Battiston, F. et al. (2020). Networks beyond pairwise interactions: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 874, 1–92.