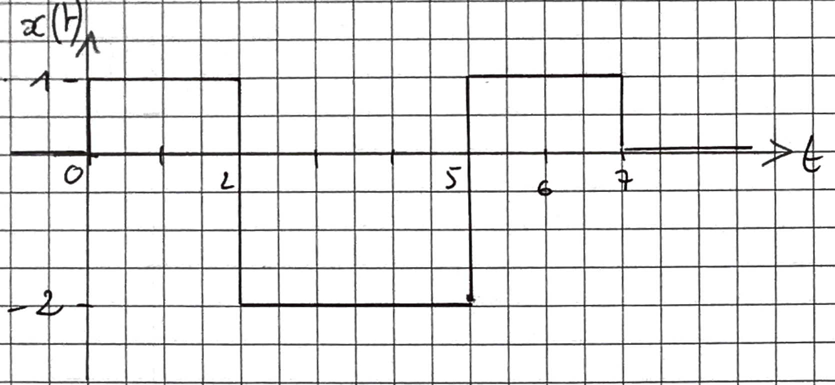
Exam SICA 1 2020

Exercice 1 — 3 points

1

$$x(t) = \mathbb{1}(t) - 3 \cdot \mathbb{1}(t-2) + 3 \cdot \mathbb{1}(t-5) - \mathbb{1}(t-7)$$

1)



1

2) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$

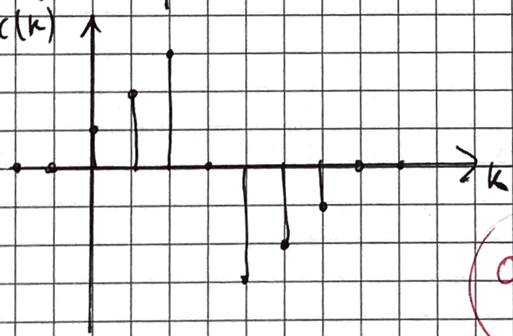
$= \int_0^2 1^2 \, dt + \int_2^5 (-2)^2 \, dt + \int_5^7 1^2 \, dt$

$= 2 + 4 \times 3 + 2 = 16.$

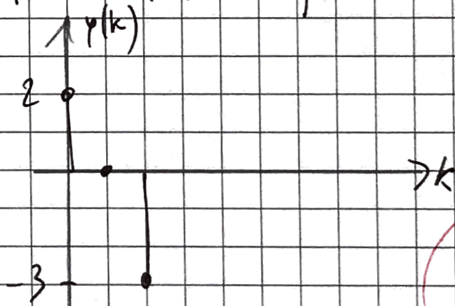
2

Exercice 2 — 3,5 points

1) $x(k) = \{1, 2, 3, 0, -3, -2, -1\}$ $\quad y(k) = \{2, 0, -3\}$



0,5



0,5

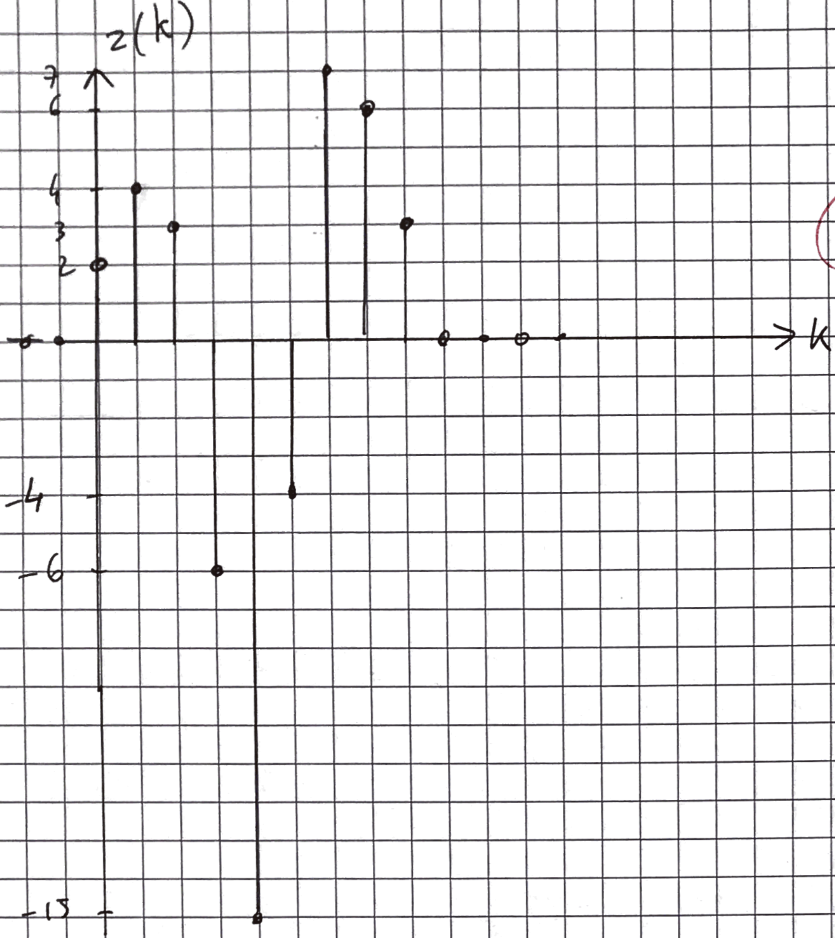
2) métho du tableau

		1	2	3	0	-3	-2	-1			
-3	0	2									→ 2
	-3	0	2								→ 4
		-3	0	2							→ −3 + 6 = 3
			-3	0	2						→ −6
				-3	0	2					→ −9 −6 = −15
					-3	0	2				→ −4
						-3	0	2			→ 9 − 2 = 7
							-3	0	2		→ 6
								-3	0	2	→ 3

2

$z(k) = \{2, 4, 3, -6, -15, -4, 7, 6, 3\}$

3 -



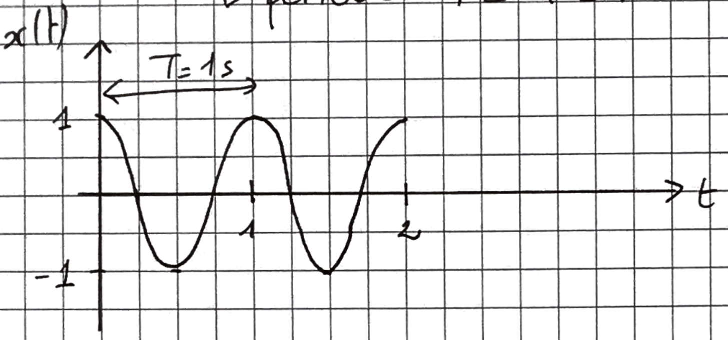
0,5

Exercice 3 11,5 ~~8~~ points

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1\ Hz$.

$\rightarrow$ période $T = 1\ s$.

1)



~~1~~

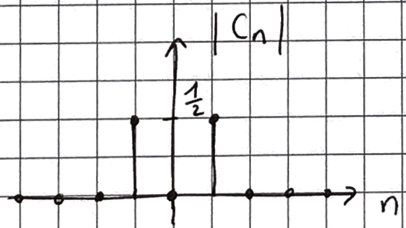
2) $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j 2\pi n f_0 t}$

Formule d'Euler : $\cos(2\pi f_0 t) = \dfrac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j 2\pi f_0 t}}{2}$ 0,5

$\Rightarrow \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_{-1} = \frac{1}{2} \\ C_n = 0 \quad n \neq 1 \text{ et } -1 \end{cases}$ 1,5

3)



les C_n sont réels ...
le spectre de phase est nul.

0,5 + 0,5

4) $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 3 \\ a_n = 0 \quad n \geq 2 \\ b_n = 0 \quad n \geq 1 \end{cases}$ 1,5

5) $C_0 = a_0 = -2$

$C_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{3}{2}$

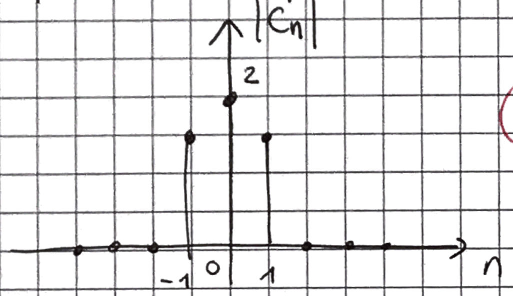
$C_{-1} = \frac{a_1}{2} = \frac{3}{2}$

$C_n = 0 \quad n \neq 0, 1, -1$

1,5.

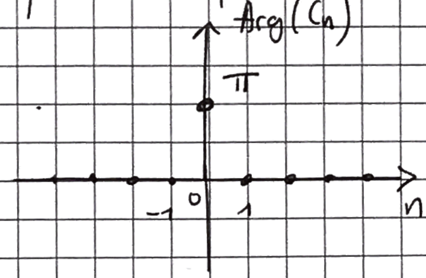
4

spectre d'amplitude



1

spectre de phase



0,5

⚠ $C_0 = -2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |C_0| = 2 \\ \mathrm{Arg}\, C_0 = \pi \ [2\pi]. \end{array} \right.$

6 – on remarque que $y(t) = -2 + 3\,x(t)$ 1,5

donc le spectre d'amplitude de x est multiplié par 3
et vient s'ajouter la composante continue -2
qui se traduit en 0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{à } +2 \text{ sur le spectre d'amplitude} \\ \text{à un déphasage de } \pi \text{ sur le spectre de phase.} \end{array} \right.$

7 – relation de Parseval 1,5

$$P_y = \frac{1}{T}\int_{[T]} |y(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

$$= \left|\frac{3}{2}\right|^2 + |-2|^2 + \left|\frac{3}{2}\right|^2 = \frac{9}{4} + 4 + \frac{9}{4} = \frac{17}{2} = 8,5.$$

Exercice 4 Spoints.

5

0,5

1 - Sa TF est périodique (X(f) est de periode 1 / X(ω) est 2π)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

2 - $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k}$$

$$= \sum_{k=0}^{4} e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{4} \left(e^{-j\omega}\right)^k$$ 1

Rappel : $$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ N & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

ici $a = e^{-j\omega}$ $\neq 1$ si $\omega \neq 0$ (ω est une variable ...)

$= 1$ si $\omega = 0$. $\Rightarrow$ il faut calculer le cas particulier $\omega = 0$.

0,5

$$X(0) = N = 5$$

0,5

$\omega \neq 0$ $$X(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega 5}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega\frac{5}{2}}\left(e^{j\omega\frac{5}{2}} - e^{-j\omega\frac{5}{2}}\right)}{e^{-j\omega\frac{1}{2}}\left(e^{j\omega\frac{1}{2}} - e^{-j\omega\frac{1}{2}}\right)}$$

$$= e^{-j2\omega} \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$ 1

3 - Table p 16 ligne 10

$N = 4$: $$X(\omega) = e^{-j2\omega} \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

1,5