CORRECTION - EXERCICES DE RÉVISION - MAP 2016-2017

**Exercice 1.** Charles ne supporte pas les chats et Sophie déteste les chiens. Charles n'élève pas plus d'un chien et Sophie pas plus d'un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de 0,2. Si Charles n' a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de 0,1.
On note $X$ le nombre de chiens de Charles et $Y$ le nombre de chats de Sophie. Alors on sait que $\mathbf{P}(X = 1) = 0.2; \mathbf{P}(Y = 1/X = 0) = 0.1$

**1.1.** Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux.
$\mathbf{P}(\text{aucun animal}) = \mathbf{P}(X = 0 \cap Y = 0) = \mathbf{P}(Y = 0/X = 0) \times \mathbf{P}(X = O) = (1 - 0.1).(1 - 0.2) = 0.72$

Soit $Z$ le nombre d'animaux du couple (on suppose qu'il ne peut y avoir que des chiens ou des chats). La probabilité pour que $Z$ soit égal à 1 est de 0,1. Alors on sait que $\mathbf{P}(Z = 1) = 0.1$ et P(Z = 0) = $0.72(q1)$.

**1.2.** Calculer la probabilité pour que $Z$ soit égal à 2.
$\mathbf{P}(Z = 2) = 1 - \mathbf{P}(Z = 1) - \mathbf{P}(Z = 0) = 0.18$

**1.3.** Calculer $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.
$E(Z) = \mathbf{P}(Z = 1) + 2.\mathbf{P}(Z = 2) = 0.46$ ; $\sigma^2(Z) = \mathbf{P}(Z = 1) + 4.\mathbf{P}(Z = 2) - (E(Z))^2 = 0.6084$ ; $\sigma(Z) = 0.78$

**1.4.** Etablir la loi de probabilité du couple $(X, Y)$.

| X $\backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.72 | 0.08 |
| 1 | 0.02 | 0.18 |

Deux des 4 probabilités sont connues. La troisième se calcule: $\mathbf{P}(Y = 1 \cap X = 0) = \mathbf{P}(Y = 1/X = 0)\mathbf{P}(X = 0) = 0.1 \times 0.8 = 0.08$, et la dernière est obtenue par différence.

**1.5.** Etablir la loi de probabilité de $Y$. (somme de chaque colonne)

| Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\mathbf{P}(Y = i)$ | 0.74 | 0.26 |

**1.6.** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
Par exemple: $Cov(X, Y) = 0.18 - 0.26 \times 0.2 = 0.128 \neq 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

**Exercice 2.** On considère une variable aléatoire $X$ dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ \dfrac{\cos x}{2} & \text{si } x \in ]0, \frac{}{2}] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, \frac{}{2}] \end{cases}$$

**2.1.** Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité.
$f$ est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, \frac{}{2}\}$, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{/2} \frac{cosx}{2} dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{sinx}{2}\right]_{0}^{/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

**2.2.** Déterminer la fonction de répartition de $X$.
$F(x) = 0$ si $x < -1$

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-1}^{x} (u+1)du = x^2/2 + x + 1/2$ si $x \in [-1; 0]$

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-1}^{0} (u+1)du + \int_{0}^{x} \frac{cosu}{2} du = \frac{1}{2} + \frac{sinx}{2}$ si $x \in ]0; /2]$

$F(x) = 1$ si $x > \frac{}{2}$

**2.3.** Calculer l'espérance de $X$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du = \int_{-1}^{0} u(u+1)du + \int_{0}^{/2} \frac{xcosx}{2} dx = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2}\left[xsinx\right]_{0}^{/2} - \frac{1}{2}\int_{0}^{/2} sinxdx = \frac{-1}{6} + \frac{}{4} - \frac{1}{2} = \frac{}{4} - \frac{2}{3} \simeq 0.1187$$ par intégration par parties.

**Exercice 3.** On considère une variable aléatoire $X$, dont la densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = c\, e^{-|x|}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

**3.1.** Déterminer la valeur de la constante $c$.
La fonction $f$ étant une densité de probabilité, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
Par raison de symétrie, on a:

$2c \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 2c[-e^{-x}]_{0}^{+\infty} = 2c = 1$ donc $c = \frac{1}{2}$.

**3.2.** Calculer la moyenne et la variance de $X$.
Par raison de symétrie, la moyenne $E(X)$ est nulle, ce que l'on vérifie par le calcul:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx\right) = \frac{1}{2}\left([xe^{x}]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \Gamma(2)\right) = \frac{1}{2}(0 - 1 + 1) = 0$$

$E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$, la fonction à intégrer étant paire, on a :

$$E(X^2) = 2\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = \Gamma(3) = 2! = 2$$

et donc $V(X) = 2 - 0 = 2$

**Exercice 4.** La durée du vol (exprimée en minutes) entre Chicago (C) et Reykjavik (R) suit une loi normale d'espérance 360 et d'écart-type 25: $\mathcal{N}(360; 25)$. L'avion fait ensuite une escale à R dont la durée suit une loi $\mathcal{N}(45; 10)$. Enfin la durée du vol de R à Paris (P) suit une loi $\mathcal{N}(180; 40)$. Les trois durées sont supposées indépendantes. L'avion décolle à 21 heures (heure locale) de C, et est annoncé à P à 14 heures 30 (heure locale).
Sachant que le décalage horaire entre C et P est de + 6 heures, déterminer la probabilité que l'heure d'arrivée diffère de plus ou moins 15 minutes de l'heure annoncée.
Notons $X_1$ la durée du vol de C à R, $X_1 \backsim \mathcal{N}(360; 25)$ ;
$X_2$ la durée de l'escale, $X_2 \backsim \mathcal{N}(45; 10)$ ;
$X_3$ la durée du vol de R à P, $X_3 \backsim \mathcal{N}(180; 40)$.
La durée totale du trajet est $X = X_1 + X_2 + X_3$. Puisque les variables aléatoires sont indépendantes, alors $X \backsim \mathcal{N}(585; 48,22)$ (somme des moyennes, et $\sqrt{25^2 + 10^2 + 40^2}$).
Compte tenu du décalage horaire, 14h30 à P correspond à 8h30 à C. La durée annoncée du vol (calculée en heure locale de C) est de 21h à 8h30, soit 11h30, ou 690 minutes. Il faut donc calculer $\mathbf{P}(690 - 15 < X < 690 + 15) = \mathbf{P}(675 < X < 705) = \mathbf{P}(1,87 < Z < 2,49) = F(2,49) - F(1,87) = 0,9936 - 0,9693 = 0,0243$, avec $Z = \frac{X-585}{48,22}$ variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

**Exercice 5.** Dans une boite de 100 fusibles, on admet qu'il y a 2 fusibles défectueux. On prend (sans remise) au hasard 10 fusibles.

**5.1.** Déterminer les probabilités $P_0$, $P_1$, $P_2$ d'obtenir respectivement 0, 1, 2 fusibles défectueux.
Il s'agit d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(100, 10, 0, 02)$. Donc:
$P_0 = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{C_2^0 C_{98}^{10}}{C_{100}^{10}} = \frac{89}{110} = 0,8091$
$P_1 = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{C_2^1 C_{98}^{9}}{C_{100}^{10}} = \frac{2}{11} = 0,1818$
$P_2 = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{C_2^2 C_{98}^{8}}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{110} = 0,0091$

**5.2.** Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de fusibles défectueux parmi les 10 fusibles tirés. Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance mathématique de deux façons différentes.
Puisque $X$ suit une loi hypergéométrique, on a $E(X) = 10 \times 0,02 = 0,2$. On peut également calculer directement la moyenne: $E(X) = 0 \times 0,8091 + 1 \times 0,1818 + 2 \times 0,0091 = 0,2$.

**5.3.** On reprend (sans remise) au hasard 10 fusibles dans la même boite. Déterminer les probabilités $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$ d'obtenir respectivement 0, 1, 2 fusibles défectueux, sachant que l'on n'a pas obtenu de fusibles défectueux lors du premier tirage. Calculer $Q_0 + Q_1 + Q_2$.
Notons $Y$ la variable aléatoire du nombre de fusibles défectueux obtenus au second tirage. On a déja prélevé 10 fusibles, donc ce sera une autre loi hypergéométrique $\mathcal{H}(90, 10, 0, 02)$. Donc:
$Q_0 = \mathbf{P}((Y = 0)/(X = 0)) = \frac{C_2^0 C_{88}^{10}}{C_{90}^{10}} = \frac{80 \times 79}{90 \times 89} = 0,7890$
$Q_1 = \mathbf{P}((Y = 1)/(X = 0)) = \frac{C_2^1 C_{88}^{9}}{C_{90}^{10}} = \frac{2 \times 10 \times 80}{90 \times 89} = 0,1998$
$Q_2 = \mathbf{P}((Y = 2)/(X = 0)) = \frac{C_2^2 C_{88}^{8}}{C_{90}^{10}} = \frac{10 \times 9}{90 \times 89} = 0,0112$
$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$