Chapitre 4 : Développement limité et Applications

1 Généralités

1.1 Vocabulaire de la topologie de $\mathbb{R}$

Soient θ, F et A des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et a un élément de $\mathbb{R}$

Définitions :

1. Un **intervalle centré** en a est un intervalle de la forme $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$
2. θ est un **ouvert** de $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \theta, \exists \epsilon > 0$ *tels que* $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset \theta$
3. F est un **fermé** de $\mathbb{R}$ si $\complement_{\mathbb{R}} F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
4. V est un **voisinage** de a si $\exists \epsilon > 0$ *tel que* $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset V$
5. L'**intérieur** de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A
6. L'**adhérence** de A, noté $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant A

Remarque :

θ est un ouvert de $\mathbb{R} \Leftrightarrow \theta$ est un voisinage de chacun de ses points

Exemples :

— un intervalle ouvert est un ouvert, un intervalle fermé est un fermé.
— $\theta =]1,2[\cup]5,6[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
— $F = [1,2] \cup [5,6]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

1.2 Définitions et premières propriétés

Définitions :

Soit n un entier, soient a un réel et V un voisinage de a, soit f définie sur V à valeur dans $\mathbb{R}$.

Nous disons que f admet un **développement limité d'ordre n au voisinage de a** noté $DL_n(a)$ si, il existe un polynôme P de degré au plus n (c-à-d $P \in \mathbb{R}_n[X]$) tel que, sur V,

$$f(x) = P(x-a) + \sigma((x-a)^n)$$

ou encore

$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$

$P(x-a)$ est la **partie régulière** du DL de f en a

Proposition : *Unicité du $DL_n(0)$ de f*

Si f admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique

Proposition : *Troncature d'un DL*

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, f admet un $DL_k(0)$ obtenu en tronquant P à l'ordre k

Proposition :

— f admet un $DL_0(0) \Leftrightarrow f$ est continue en 0
— f admet un $DL_1(0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en 0

Proposition :

Si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$

— f est paire $\Rightarrow P$ est paire
— f est impaire $\Rightarrow P$ est impair

Théorème : *Formule de Taylor-Lagrange*

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ alors, $\exists c \in]a, b[$, tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Théorème : *Formule de Taylor-Young*

Soient f une fonction classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I (intervalle de $\mathbb{R}$) et $a \in \overset{\circ}{I}$
si $f^{(n)}(a)$ existe alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$

Extension :

Soient f une fonction classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et $0 \in \overset{\circ}{I}$
si $f^{(n)}(0)$ existe alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \; x^k \; + x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$

Exercice : Déterminer les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x) = e^x$

2. $f(x) = sin(x)$

3. $f(x) = cos(x)$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$ Précisez les cas particuliers $\alpha = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$

5. $f(x) = ch(x)$

6. $f(x) = sh(x)$

1.3 Opérations sur les DL

Proposition : *Linéarité*

Si f admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est P, si g admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est Q, alors

1. $f+g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P+Q$
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est λP

Proposition : *Produit*

Si f admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est P, si g admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est Q, alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue par troncature du polynôme PQ au degré n

Proposition : *Composition*

Si f admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est P, si g admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est Q, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue par troncature du polynôme $Q \circ P$ au degré n

Exercice : Déterminer le $DL_n(0)$ de $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$

1. Déterminer le $DL_n(0)$ de $\cos x$
2. Calculer $1+\cos x$ puis $\sqrt{1+\cos x}$
3. Déterminer le $DL_n(0)$ de $\sqrt{1+u(x)}$ puis utiliser le dans le 2^e item

1.4 *Primitivation* et autres DL

Proposition :

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert contenant 0 et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, si f' admet un $DL_n(0)$ alors f admet un $DL_{n+1}(0)$. De plus, si la partie régulière de f' du $DL_n(0)$ est P, alors la partie régulière de f du $DL_{n+1}(0)$ est

$$f(0) + \int_0^x P(t)dt$$

Exercice : Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x) = ln(1+x)$

2. $f(x) = ln(1-x)$

3. $f(x) = Arctan(x)$

2 Applications des DL

2.1 Calcul de limites

Exercice : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{sh(x) - 2sh(2x) + sh(3x)}{ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}$$

2.2 Position d'une courbe par rapport à une de ses tangentes

Exercice : Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0 :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{ln(1+x)} - \frac{1}{x} \quad si\ x > 0 \\ \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{1}{DL_n(0)} - \frac{1}{x}$
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f

3 Notions de développement asymptotique

3.1 Position d'une courbe par rapport à ses asymptotes

Soit f une fonction définie sur V, voisinage de 0.

Définition - Proposition :

f admet un développement asymptotique dans l'échelle des x^n ($\in \mathbf{N}$) si :

$$\exists \alpha \in \mathbf{Z}, \exists P \in \mathbb{R}[X] \ \ tel\ que\ deg(P) \leq n, \forall x \in V,$$
$$f(x) = x^{\alpha}(P(x) + x^n \epsilon(x))$$

Nous disons que f admet un **développement asymptotique au voisinage de** 0 **avec la précision** $x^{\alpha+n}$

Exercice : Position d'une courbe par rapport à ses asymptotes

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}$, déterminer l'asymptote en $+\infty$ et les positions des courbes

1. Faire un changement de variable $X = \frac{1}{x}$ donc $f(x) = f(\frac{1}{X})$
2. Calculer le $DL_n(0)$ de $(1+u)^{\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$
3. Écrire l'équation de l'asymptote à C_f en $+\infty$
4. Déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote