TELECOM Nancy — UNIVERSITÉ DE LORRAINE

08 Mars 2022 (2h)

OMG : Mathématiques Générales

La notation tiendra compte de la RIGUEUR, de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Algèbre linéaire

★ **Exercice 1: Sous-espaces vectoriels et bases (3 Pts)**

Dans $\mathbb{R}^4$, nous considérons les sous-ensembles :

- $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R} \mid 3x - y + t = 0\}$
- $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R} \mid |x+t| = |y|\}$

Préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base.

★ **Exercice 2: Famille libre (20 Pts)**

Nous posons $\phi_k(x) = \cos kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

▷ **Question 1:** Montrer que la famille $(\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

★ **Exercice 3: Application linéaire (10 Pts)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et Id l'application identité ($Id(x) = x$) tel que

$$f^2 - 3f + 2Id = 0$$

▷ **Question 1:** Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f

▷ **Question 2:** Établir que $\ker(f - Id)$ et $\ker(f - 2Id)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

(Indication) Théorème : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires (dans E)
2. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$

★ **Exercice 4: Endomorphisme et Automorphisme(3 Pts)**

Soient f et g des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (2x - 4y, x - 2y) \qquad g(x,y) = (3x - 4y, x - y)$$

▷ **Question 1:** Monter que f est un endomorphisme

▷ **Question 2:** Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$

▷ **Question 3:** Montrer que g automorphisme

★ **Exercice 5: S-E-V des émissions (3 Pts)**

Soit $\mathcal{M}_{2,2}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices carré de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$

▷ **Question 1:** **(1.5 Pts)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}^{\mathbb{R}}$

▷ **Question 2:** **(1 Pt)** Donner une base de $\mathcal{A}$

▷ **Question 3:** **(0.5 Pt)** Donner la dimension de $\mathcal{A}$