Logique du premier ordre (1)

TELECOM Nancy (1A)

Mathématiques Appliquées pour l'Informatique

2019-2020

Pourquoi la logique du premier ordre ?

- Possibilité de définir des variables prenant leur valeur dans des ensembles finis ou infinis, d'utiliser des quantificateurs, d'exprimer des propriétés sur des domaines infinis
- Une grande partie des mathématiques peut se formaliser en logique du premier ordre (avec égalité) (structure algébrique : groupe, anneaux, corps, théorie des ensembles)
- Logique universelle, pour aborder d'autres logiques (logiques d'ordre supérieur (où l'on peut quantifier sur les ensembles ou les fonctions), logiques modales, logiques multi-sortées ...)
- Notions générales identiques à la logique des propositions, mais plus compliquées : sémantique, systèmes formels (mise sous forme clausale, résolution, ...)

- INTRODUCTION À LA LOGIQUE (Théorie de la démonstration) René David, Karim Nour et Christophe Raffali. DUNOD
- MATHÉMATIQUES DISCRÈTES. Automates, langages, logique et décidabilité. Pierre Marchand. DUNOD
- Outils logiques pour l'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE. J.P. Delahaye. EYROLLES. 1988.
- Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Chin-Liang **Chang** and Richard Char-Tung **Lee**. Computer Science Classics.
- Logique mathématique, tome 1 : Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats. René Cori et Daniel Lascar. Masson (collection AXIOMES)
- Elements of the Theory of Computation. Harry **Lewis** and Christos H. **Papadimitriou**. Prentice-Hall.

Plan

- Syntaxe de la logique du premier ordre
  - Alphabets d'un langage du premier ordre
  - Termes (principe d'induction)
  - Substitution, unification
  - Atomes, formules (Principe d'induction pour les formules)
  - Variables libres, variables liées, formules polies
  - Application d'une substitution à une formule (pb de capture)
  - Clôture universelle, clôture existentielle d'une formule
- Sémantique
  - Valuation
  - Interprétation des termes, atomes et formules
  - Modèles, théorèmes, déduction sémantique

Alphabets d'un langage du premier ordre

Définition (Alphabets)

Les alphabets d'un langage du premier ordre sont les ensembles suivants :

- un ensemble X de symboles de variables, $X = \{x,\ y,\ z,\ \ldots\}$
- un ensemble C de symboles de constantes, $C = \{a,\ b,\ c,\ \ldots\}$
- une suite d'ensembles deux à deux disjoints de symboles de fonctions $F = (\mathbb{F}_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, chaque élément de $\mathbb{F}_n$ est un symbole de fonction d'arité $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les éléments de F sont notés $f,\ g,\ \varphi, \ldots$.
- une suite d'ensembles deux à deux disjoints de symboles de relations (ou symboles de prédicats), $R = (\mathbb{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chaque élément de $\mathbb{R}_n$ est un symbole de relation d'arité n. Les éléments de R sont notés $p,\ q,\ r \ldots$
- le symbole d'égalité $=$; symbole de relation que l'on distingue des autres symboles de R. $=$ est d'arité 2 que l'on utilise sous forme infixée.
- l'ensemble des connecteurs logiques $\{\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow\}$.
- deux quantificateurs $\forall$ ("pour tout") et $\exists$ ("il existe")
- des symboles de ponctuation (et) et ,

Les connecteurs logiques, les quantificateurs et les symboles de ponctuation sont communs à tous les langages du premier ordre.

Définition (Termes)

Soient X un ensemble de symboles de variables, C un ensemble de constantes et F un ensemble de symboles de fonctions muni d'arité, l'ensemble des termes construits sur X, C et F est défini inductivement de la façon suivante :

- les variables sont des termes,
- les constantes sont des termes,
- si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et f est un symbole fonctionnel d'arité n alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme,
- tous les termes sont générés par les 3 règles décrites précédemment.

On note $T(F, C, X)$ l'ensemble des termes construits sur X, C et F. Les termes peuvent être représentés par des arbres étiquetés par les symboles de $X \cup C \cup F$, les feuilles des arbres sont éléments de $X \cup C$, alors que les nœuds internes sont des éléments de F.

Termes (définitions, notations et exemples)

- un terme est dit **clos** s'il est sans variable,
- si t est un terme, $V(t)$ est l'ensemble des variables ayant des occurrences dans t,
- $X = \{x,\ y,\ z, \ldots\}$ un ensemble de variables, $C = \{a,\ b,\ c\}$ un ensemble de constantes et $F = \{f[2], g[2], s[1]\}$ un ensemble de symboles fonctionnels dont l'arité est indiquée entre crochets [.]
  - a, x, c sont des termes, (a et c sont des termes clos), ,
  - $s(y)$, $s(c)$, $f(a,\ x)$, $g(a,\ c)$, $f(y,\ y)$, $g(x,\ z)$, $f(a,\ a)$ sont des termes,
  - $s(f(a,\ x))$ est un terme,
  - $t = f(g(a,\ x),\ f(s(z),\ f(x,\ b)))$ est un terme, $V(t) = \{x,\ z\}$.

Proposition

Soit une propriété P dépendant d'un terme t, pour montrer que $P(t)$ est vraie pour tout terme t, il suffit de montrer les assertions suivantes :

- les cas de base
  - pour toute variable x, $P(x)$ est vrai
  - pour toute constante c, $P(c)$ est vrai
- cas général (hérédité de la propriété P)
  pour tout terme t_1,...,t_n et tout symbole f de fonction d'arité n, $P(t_1)$ et ... et $P(t_n)$ implique $P(f(t_1, \ldots, t_n))$

Définition (Substitution)

Soient X un ensemble de variables, C un ensemble de constantes et F un ensemble de symboles fonctionnels. Une substitution est une application σ de X vers $T(F, C, X)$ telle que $\sigma(x) = x$ sauf pour un nombre fini de variables x.

$$\sigma : X \to T(F, C, X)$$

Le domaine d'une substitution σ est l'ensemble des variables qui sont modifiées par cette substitution, on le note $dom(\sigma)$:

$$dom(\sigma) = \{x; x \in X \ et \ \sigma(x) \neq x\}$$

Une substitution est définie par les variables de son domaine et leur image, on dénote une substitution sous la forme suivante : $\{x_1 \mapsto t_1, \ \ldots, \ x_n \mapsto t_n\}$

Exemple

- $\sigma_1 = \{x \mapsto f(z, \ b), \ z \mapsto s(f(y, \ s(x)))\}$,
  on a donc $\sigma_1(x) = f(z, \ b)$ et $\sigma_1(z) = s(f(y, \ s(x)))$
  $dom(\sigma_1) = \{x, \ z\}$ et $\sigma_1(y) = y$ car $y \notin dom(\sigma_1)$
- $\sigma_2 = \emptyset$ est la substitution vide (c'est-à-dire la fonction identique telle que pour toute variable x de X, $\sigma_2(x) = x$)

Applications des substitutions (extension aux termes)

Définition

On étend l'application des substitutions aux termes de la façon suivante, si σ est une substitution :

- $\sigma(x)$ est (déjà) défini si x est une variable
- $\sigma(c) = c$ si c est une constante
- $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ (σ est un homomorphisme)

Exemple

Soient la substitution σ définie par
$\sigma = \{x \mapsto g(y,\ s(a)),\ z \mapsto g(f(a,\ b), x)),\ v \mapsto s(z)\}$ et le terme
$t = f(g(x,\ y),\ f(s(z),\ f(b,\ s(x))))$

$$\sigma(t) = \sigma(f(g(x,\ y),\ f(s(z),\ f(b,\ s(x))))) =$$
$$f(\sigma(g(x,\ y)),\ \sigma(f(s(z),\ f(b,\ s(x))))) =$$
$$f(g(\sigma(x),\ \sigma(y)),\ f(\sigma(s(z)),\ \sigma(f(b,\ s(x))))) =$$
$$f(g(\sigma(x),\ \sigma(y)),\ f(s(\sigma(z)),\ f(\sigma(b),\ \sigma(s(x))))) =$$
$$f(g(\sigma(x),\ \sigma(y)),\ f(s(\sigma(z)),\ f(\sigma(b),\ s(\sigma(x))))) =$$
$$f(g(g(y,\ s(a)),\ y),\ f(s(g(f(a,\ b),\ x)),\ f(b,\ s(g(y,\ s(a))))))$$

Définition (Unification)

Soient t et t' deux termes, t et t' sont unifiables si et seulement s'il existe une substitution σ telle que $\sigma(t) = \sigma(t')$; σ s'appelle un unificateur de t et t'.

Exemples

- $t = x$, $t' = y$, $\{x \mapsto y\}$, $\{y \mapsto x\}$ et $\{x \mapsto z,\ y \mapsto z\}$ sont des unificateurs de t et t'
- a et b ne sont pas unifiables
- $f(x,\ y)$ et $g(a,\ x)$ ne sont pas unifiables
- $t = f(x,\ g(z,\ s(z)))$, $t' = f(s(b),\ g(a,\ y))$,
  $\{x \mapsto s(b),\ z \mapsto a,\ y \mapsto s(a)\}$ est un unificateur de t et t'

Remarques

- deux termes dont les symboles fonctionnels de tête sont différents ne sont pas unifiables (exemple : $f(x,\ s(a))$ et $g(s(b),\ y)$ ne sont pas unifiables)
- une variable et un terme contenant cette variable ne sont pas unifiables (exemple : x et $s(x)$ ne sont pas unifiables)
- il existe des algorithmes d'unification permettant de déterminer si deux termes sont unifiables et si c'est le cas déterminent un unificateur de ces deux termes (voir TD)

Définition (atome)

Soient X un ensemble de variables, C un ensemble de constantes, F un ensemble de symboles de fonctions et R un ensemble de symboles de relations, un atome est de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ où

- r est un symbole de relation d'arité n et
- $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de $T(F, C, X)$.

Remarques et exemples

- Dans la définition, un seul symbole de relation apparaît en tête de l'atome.
- **Définition** : un littéral est soit un atome (i.e. de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$) soit la négation d'un atome (i.e. de la forme $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$)
- les notions de substitution et unification peuvent être aisément étendues aux atomes
- $X = \{x,\ y,\ z,\ u\}$, $C = \{a,\ b,\ c\}$, $F = \{f[2], g[2], s[1]\}$, $R = \{p[1], q[2], r[2]\}$
  - $p(a)$ et $q(a,\ s(x))$ sont des atomes
  - $f(x,\ a) = s(y)$ est un atome (car $=$ est un symbole de relation)
  - $r(f(g(s(x),\ a),\ s(b)),\ g(s(x),\ c))$ est un atome
  - $r(p(a),\ x)$ n'est pas un atome car $p(a)$ n'est pas un terme

Définition (Formules)

Soient les alphabets X (ensemble de variables), C (ensemble de constantes), F (ensemble de symboles de fonctions) et R (ensemble de symboles de relations), l'ensemble $\mathcal{F}or$ des formules est défini inductivement de la façon suivante :

- Les formules de base sont les atomes construits sur les alphabets X, C, F et R,
- les règles de constructions des formules sont :
  - si $f \in \mathcal{F}or$ alors $\neg f \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \Rightarrow f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \Leftrightarrow f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f \in \mathcal{F}or$ alors $\exists x\ f \in \mathcal{F}or$ (où x est un symbole de X, une variable)
  - si $f \in \mathcal{F}or$ alors $\forall x\ f \in \mathcal{F}or$ (où $x \in X$)

Un langage du premier ordre est constitué des alphabets X, C, F et R et des formules construites sur ces alphabets.

Principe d'induction structurelle sur les formules

Soit une propriété P dépendant d'une formule f, pour montrer que $P(f)$ est vraie pour toute formule f de $\mathcal{F}or$, il suffit de montrer les deux assertions suivantes :

- cas de base : $P(a)$ est vraie pour tout atome a
- cas généraux : pour toute formule f, f_1 et f_2 de $\mathcal{F}or$
  - $P(f)$ implique $P(\neg f)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \vee f_2)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \wedge f_2)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \Rightarrow f_2)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \Leftrightarrow f_2)$
  - $P(f)$ implique $P(\exists x\ f)$
  - $P(f)$ implique $P(\forall x\ f)$

Convention de priorité

- les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ sont prioritaires par rapport aux connecteurs logiques
- les connecteurs logiques sont par ordre de priorité décroissante : $\neg$, puis $\wedge$ et $\vee$ et enfin $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$
- on fusionne les listes de quantificateurs identiques, $\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 f$ peut être abrégé en $\exists x_1 x_2 \forall x_3 x_4 x_5 f$
- $f_1 = \exists x\ p(x,\ y) \vee r(x)$ et $f_2 = \exists x(p(x,\ y) \vee r(x))$ sont deux formules différentes

Définition (Variables libres d'une formule)

Soit f une formule de la logique du premier ordre, l'ensemble des variables libres de f, noté $VL(f)$ est défini récursivement de la façon suivante selon la forme de la formule :

- $VL(r(t_1, \dots, t_n)) = V(t_1) \cup \dots V(t_n)$ si $r(t_1, \dots, t_n)$ est un atome
- $VL(t_1 = t_2) = V(t_1) \cup V(t_2)$ si t_1 et t_2 sont des termes
- $VL(\neg f) = VL(f)$ si f est une formule
- $VL(f_1 \vee f_2) = VL(f_1) \cup VL(f_2)$ si f_1 et f_2 sont des formules (idem pour $VL(f_1 \wedge f_2) = VL(f_1 \Rightarrow f_2) = VL(f_1) \cup VL(f_2)$)
- $VL(\exists x\ f_1) = VL(f_1) \setminus \{x\}$ si x est une variable et f_1 est une formule
- $VL(\forall x\ f_1) = VL(f_1) \setminus \{x\}$ si x est une variable et f_1 est une formule

Remarques et exemples

- une variable est libre si elle possède une occurrence qui n'est pas sous l'influence d'un quantificateur
- une formule f est dite close si et seulement si $VL(f) = \emptyset$
- lorsqu'on applique une substitution à une formule, on substitue seulement les variables libres de cette formule
- $f \ = \ \forall x\ (x.y = y.x)$, $VL(f) = \{y\}$
- $g \ = \ (\forall x\ \exists y\ (x.z = z.y)) \wedge (x = z.z)$, $VL(g) = \{x,\ z\}$
- $h \ = \ \forall x\ (y = 0)$, $VL(h) = \{y\}$

Définition(Variables liées d'une formule)

L'ensemble des variables liées (ou muettes) $VM(f)$ d'une formule f est défini récursivement selon la forme de la formule de la façon suivante :

- $VM(r(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$ si r est un symbole de relation et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes (i.e. $r(t_1, \ldots, t_n)$ est un atome), de même $VM(t_1 = t_2) = \emptyset$
- $VM(\neg f) = VM(f)$ si f est une formule
- $VM(f_1 \vee f_2) = VM(f_1) \cup VM(f_2)$ si f_1 et f_2 sont des formules, de même $VM(f_1 \wedge f_2) = VM(f_1 \Rightarrow f_2) = VM(f_1) \cup VM(f_2)$
- $VM(\forall x\ f) = VM(f) \cup \{x\}$ si x est une variable et f une formule
- $VM(\exists x\ f) = VM(f) \cup \{x\}$ si x est une variable et f une formule

Remarques et exemples

- les variables liées (ou muettes) sont celles qui sont sous l'influence d'un quantificateur,
- $f = \forall x\ (x.y = y.x),\ VM(f) = \{x\}$
  $g = (\forall x\ \exists y\ (x.z = z.y)) \wedge (x = z.z),\ VM(g) = \{x,\ y\}$
- $h = \forall x\ (y = 0),\ VM(h) = \{x\}$

Définition (Formule polie)

Une formule f est polie si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $VL(f) \cap VM(f) = \emptyset$ (une variable n'est pas à la fois libre et liée)
- deux occurrences d'une même variable liée correspondent à la même occurence de quantificateur

Exemples et remarques

- $\forall x\ \exists y\ r(x,\ y) \vee r(x, z)$ n'est pas polie car x est à la fois *libre* et *liée*
- $(\forall x\ r(x,\ y)) \vee (\exists x\ p(x,\ z))$ n'est pas une formule polie, car il existe deux occurrences liées de la variable x qui ne correspondent pas à la même occurrence de quantificateur
- on peut rendre une formule polie en renommant systématiquement les variables liées par de nouvelles variables (i.e. des variables qui n'apparaissent nulle part ailleurs dans la spécification)
- il est important de mettre les formules sous forme polie, cela évite les problèmes de capture lors de l'application des substitutions
- en mathématiques on respecte en général la première condition de la définition, mais la deuxième est moins respectée

Application d'une substitution à une formule

Soit la formule

$$f = \forall x \ p(x, \ y)$$

on a $VL(f) = \{y\}$ et $VM(f) = \{x\}$.
Appliquer une substitution σ sur la formule f revient à appliquer σ aux variables libres de f. Par exemple :

- si $\sigma = \{y \mapsto a\}$ on obtient $\sigma(f) = \forall x \ p(x, \ a)$
- si $\sigma = \{y \mapsto s(z)\}$ on obtient $\sigma(f) = \forall x \ p(x, \ s(z))$
- si $\sigma = \{y \mapsto s(x)\}$ on obtient $\sigma(f) = \forall x \ p(x, \ s(x))$ cette application de substitution est fausse car on a phénomène de capture, ici l'occurence x de la variable x a été capturée par le quantificateur $\forall x$, elle est ainsi devenue liée alors qu'elle aurait dû rester libre.

  Pour pallier ce phénomène de capture, il est nécessaire de renommer auparavant la variable liée x, la formule f devient donc $\forall x_1 \ p(x_1, \ y)$ où x_1 est une nouvelle variable, n'apparaissant pas ailleurs dans les spécifications.

  On peut alors appliquer la substitution $\sigma = \{y \mapsto s(x)\}$ et l'on obtient $\sigma(f) = \forall x_1 \ p(x_1, \ s(x))$.

Formule close, clôture universelle, clôture existentielle

Définitions

- Une formule **close** est une formule sans variables libres.
- Soit f une formule dont les variables libres sont $x_1, \dots, x_n$. La clôture universelle de f est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n\ f$
- Soit f une formule dont les variables libres sont $x_1, \dots, x_n$. La clôture existentielle de f est la formule $\exists x_1 \dots \exists x_n\ f$

Sémantique de la logique du premier ordre

Pour définir la sémantique d'une formule :

- Une **interprétation** définit un **domaine** et donne la sémantique
  - des symboles de fonction, comme application effective du domaine vers le domaine, et
  - des symboles de relation, comme application du domaine vers les booléens.
- Une **valuation** donne un sens aux variables libres des formules.

Exemple

Soit la formule

$$\varphi = p(x,\ a) \wedge \exists y \exists z\ p(y,\ z)$$

donner une sémantique à cette formule, c'est dire si elle vaut 0 (faux) ou 1 (vrai), pour cela on doit préciser :

- le domaine (ensemble) dans lequel les variables et les constantes prennent leurs valeurs
- ce que sont les symboles **p**, **a** de la formule
- les valeurs des variables libres de la formule (ici x est la seule variable libre)

Définition (Valuation)

Soient X un ensemble de variables et E un ensemble, une valuation δ des variables de X est une application de X vers E : $\delta \ : \ X \to E$.

Définition

Soient δ une application de X vers E et e un élément de E, $\delta[x := e]$ est la valuation définie par

$\delta[x := e](y) = \delta(y) \ si \ y \neq x$

$\delta[x := e](x) = e$

Autrement dit $\delta[x := e]$ coïncide avec δ sauf en x ou elle vaut e

Exemple

Soient $X = \{x, \ y, \ z\}$, $E = \mathbb{N}$ et δ définie par $\delta(x) = 0$, $\delta(y) = 0$ et $\delta(z) = 1$.
Soit $\zeta = \delta[x := 2]$, on a $\zeta(x) = 2$, $\zeta(y) = 0$ et $\zeta(z) = 1$.

Remarques

- les valuations permettent de donner des valeurs aux variables libres des formules
- une valuation s'appelle aussi affectation de valeurs aux variables ou environnement
- l'ensemble des applications de X vers E est parfois noté E^X

Définition (Interprétation)

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, une interprétation I pour $\mathcal{L}$, est déterminée par les données suivantes :

- un ensemble E **non vide** appelé le domaine de l'interprétation I, on le note aussi $|I|$ ($E = |I|$)
- à chaque constante c on associe $I(c) \in E$
- à chaque symbole de fonction f d'arité n, on associe une application $I(f) \ : \ E^n \to E$
- à chaque symbole de relation r d'arité n on associe une relation $I(r)$ sur E^n, c'est-à-dire une application $I(r) \ : \ E^n \to \{0, \ 1\}$
- au symbole d'égalité $=$, on fait correspondre l'égalité $=$ sur E, c'est-à-dire $= \ : \ E \times E \to \{0, \ 1\}$

Remarques

- les variables et les constantes prennent leur valeur dans le domaine de l'interprétation I
- étant donné un symbole de fonction f d'arité n, $I(f)$ est une fonction comportant n d'arguments. De même si r est un symbole de relation $I(r)$ est une relation comportant le même nombre d'arguments que r.

Définition (Interprétation d'un terme)

Soient I une interprétation de domaine E et δ une valuation, la valeur du terme t dans l'interprétation I relativement à la valuation δ est un élément de E, noté $val_I(t,\ \delta)$ et défini par induction sur la structure des termes :

- si t est une variable x alors $val_I(x,\ \delta) = \delta(x)$
- si t est une constante c alors $val_I(c,\ \delta) = I(c)$
- si t est de la forme $f(t_1, \ldots, t_n)$ alors $val_I(f(t_1, \ldots, t_n), \delta) = I(f)(val_I(t_1,\ \delta), \ldots, val_I(t_n,\ \delta))$

Remarques

L'interprétation I sert à évaluer les symboles de fonctions (et les constantes), alors que la valuation δ sert à évaluer les variables.

Exemple

Soit le terme $t = f(s(x),\ a)$, on considère l'interprétation I telle que $|I| = \mathbb{N}$ et $I(f) = \times$, $I(s) = u \mapsto u + 1$ et $I(a) = 2$ et la valuation δ telle que $\delta(x) = 10$:

$$val_I(t,\ \delta) = val_I(f(s(x),\ a),\ \delta) = I(f)(val_I(s(x),\ \delta),\ val_I(a,\ \delta)) =$$
$$I(f)(I(s)(val_I(x,\ \delta)),\ I(a)) = I(f)(I(s)(\delta(x)),\ I(a)) = (10 + 1) \times 2 = 22$$

Définition

Soit I une interprétation de domaine E, soit δ une valuation des variables et soit ϕ une formule du premier ordre, la valeur de la formule ϕ dans l'interprétation I par rapport à la valuation δ notée $val_I(\phi,\ \delta)$ est un élément de $\mathbb{B} = \{0,\ 1\}$ défini inductivement sur la structure des formules de la façon suivante :

- $val_I(r(t_1, \ldots, t_n),\ \delta) = I(r)(val_I(t_1,\ \delta), \ldots, val_I(t_n,\ \delta))$
- $val_I(t_1 = t_2,\ \delta) = val_I(t_1,\ \delta) = val_I(t_2,\ \delta)$
- $val_I(\neg\phi,\ \delta) = \overline{val_I(\phi,\ \delta)}$
- $val_I(\phi_1 \vee \phi_2,\ \delta) = val_I(\phi_1,\ \delta) + val_I(\phi_2,\ \delta)$
- $val_I(\phi_1 \wedge \phi_2,\ \delta) = val_I(\phi_1,\ \delta)\ .\ val_I(\phi_2,\ \delta)$
- $val_I(\phi_1 \Rightarrow \phi_2,\ \delta) = \overline{val_I(\phi_1,\ \delta)} + val_I(\phi_2,\ \delta)$
- $val_I(\forall x \phi,\ \delta) = \begin{cases} 1 \text{ si pour tout élément } e \text{ de } E\ val_I(\phi,\ \delta[x := e]) = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- $val_I(\exists x \phi,\ \delta) = \begin{cases} 1 \text{ s'il existe un élément } e \text{ de } E \text{ tq } val_I(\phi,\ \delta[x := e]) = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

- l'interprétation d'un atome est analogue à celle d'un terme, mais sa valeur est un booléen (0 pour *faux* et 1 pour *vrai*)
- les connecteurs logiques $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\Rightarrow$ sont interprétés pas les fonctions booléennes $\bar{\ }$, $+$, $.$ et $\Rightarrow$
- les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont interprétés selon le sens courant dans le méta-langage par "pour tout" et "il existe"

Exemples

Soit le langage $\mathcal{L}$ défini par $V = \{x,\ y,\ z,\ u, \ldots\}$, $C = \{a\}$, $F = \emptyset$ et $R = \{r[2]\}$. Soit l'interprétation I définie par $|I| = \mathbb{N}$, $I(r) =<$ et $I(a) = 0$. Soit la valuation définie par $\delta(x) = 2$, $\delta(y) = 1$. On a :

1. $val_I(r(x,\ y),\ \delta) = 0$
2. $val_I(r(y,\ x),\ \delta) = 1$
3. $val_I(\forall z\ r(z,\ y), \delta) = 0$
4. $val_I(\exists z\ r(z,\ y),\ \delta) = 1$
5. $val_I(\exists z\ r(z,\ a),\ \delta) = 0$
6. $val_I(\exists z \forall u\ r(z,\ u),\ \delta) = 0$
7. $val_I(\exists z \forall u\ r(u,\ z),\ \delta) = 0$
8. $val_I(\forall z \exists u\ r(z,\ u),\ \delta) = 1$
9. $val_I(\exists z \forall u\ (r(z,\ u)\ \vee\ u = a),\ \delta) = 1$

Démonstration :

1. $val_I(r(x,\ y),\ \delta)$ est interprétée par $2 < 1$ donc vaut 0.
2. $val_I(r(y,\ x),\ \delta)$ est interprétée par $1 < 2$ donc vaut 1.
3. $val_I(\forall z\ r(z,\ y),\ \delta)$, est interprétée par $(\forall z \in \mathbb{N})\ z < 1$ qui est une assertion fausse, donc $val_I(\forall z\ r(z,\ y),\ \delta) = 0$.
4. $val_I(\exists z\ r(z,\ y),\ \delta)$ est interprétée par $(\exists z \in \mathbb{N})\ z < 1$ qui est une assertion vraie donc $val_I(\exists z\ r(z,\ y),\ \delta) = 1$.
5. suivants à faire ...

Proposition

Pour I fixé $val_I(\phi,\ \delta)$ ne dépend de δ que par l'intermédiaire des variables libres de ϕ.

Remarques

- Si δ_1 et δ_2 coïncident sur les variables libres de ϕ alors $val_I(\phi,\ \delta_1) = val_I(\phi,\ \delta_2)$.
- Ce résultat évident peut se montrer par récurrence sur la structure de ϕ.
- Si ϕ ne possède pas de variables libres (c'est-à-dire est une formule close) $val_I(\phi,\ \delta)$ ne dépend d'aucune valuation δ.
- Pour les formules ϕ closes, on peut donc noter $val_I(\phi)$ la valeur de vérité de ϕ dans l'interprétation I.

Définition (Modèle)

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, I une interprétation de $\mathcal{L}$, ϕ une formule de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$,

- I est un modèle de ϕ ssi **pour toute valuation** δ, $val_I(\phi,\ \delta) = 1$.
- I est un modèle de $\mathcal{A}$ ssi I est un modèle de chacune des formules de $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est contradictoire ssi $\mathcal{A}$ n'a pas de modèle.

Proposition

- I est un modèle de ϕ ssi I est un modèle de la clôture universelle de ϕ
- I est un modèle de $\mathcal{A}$ ssi I est un modèle des clôtures universelles des formules de $\mathcal{A}$

Démonstration

On montre le résultat pour une formule ϕ comportant une seule variable libre x, soit I un modèle de ϕ, on a les équivalences suivantes :
I un modèle de ϕ ssi pour toute valuation $\delta : X \to |I|$, $val_I(\phi,\ \delta) = 1$
ssi pour toute valuation δ, pour tout élément e de $|I|$, $val_I(\phi,\ \delta[x := e]) = 1$
ssi pour toute valuation δ, $val_I(\forall x\ \phi,\ \delta) = 1$ ssi I est un modèle de $\forall x\ \phi$
On peut finir la démonstration en faisant un raisonnement par récurrence sur le nombre de variables libres de la formule ϕ.

Soient le langage défini par $V = \{x,\ y,\ z\}$, $C = \{a\}$, $F = \{f[2]\}$ et les formules :

ϕ_1 : $\forall x \forall y \forall z\ f(x,\ f(y,\ z)) = f(f(x,\ y),\ z)$
ϕ_2 : $\forall x\ (f(a,\ x) = x \wedge f(x,\ a) = x)$
ϕ_3 : $\forall x \exists y\ (f(x,\ y) = a \wedge f(y,\ x) = a)$

Soient les interprétations suivantes :
I_1 définie par $|I_1| = \mathbb{N}$, $I_1(a) = 0$, $I_1(f) = +$ et
I_2 définie par $|I_2| = \mathbb{Z}$, $I_2(a) = 0$, $I_2(f) = +$

Soit I une interprétation,
si I est un modèle de ϕ_1, ϕ_1 exprime que $I(f)$ est une opération associative,
si I est un modèle de ϕ_2, ϕ_2 exprime que $I(a)$ est l'élément neutre de l'opération $I(f)$,

I_1 est un modèle des formules ϕ_1 et ϕ_2,
I_2 est un modèle des formules ϕ_1 et ϕ_2 et ϕ_3

Définition

Soit ϕ une formule et $\mathcal{A}$ un ensemble de formules

- on dit que ϕ se déduit sémantiquement de $\mathcal{A}$ si et seulement si tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de ϕ, on le note $\mathcal{A} \models \phi$.
- ϕ est un théorème (de la logique du premier ordre) si et seulement si **toute interprétation** est un modèle de ϕ, on le note $\models \phi$.
- on dit que deux formules ϕ et ψ sont équivalentes si et seulement si $\phi \Leftrightarrow \psi$ est un théorème de la logique du premier ordre, on a $\models \phi \Leftrightarrow \psi$.

Exemple

Soit $\mathcal{L}$ le langage défini par $V = \{x,\ y,\ z,\ u,\ x',\ y'\}$, $C = \{e\}$ et $F = \{*[2]\}$

Soit la formule ϕ : $\forall x \forall y \forall z\ [(x * y) * z = x * (y * z) \wedge e * x = x \wedge x * e = x \wedge \exists x'\ (x' * x = e \wedge x * x' = e)]$

Soit ψ : $\forall u\ [\forall x (u * x = x \wedge x * u = x) \Rightarrow u = e]$

Chaque modèle de ϕ est un groupe, ψ exprime l'unicité de l'élément neutre, on a $\{\phi\} \models \psi$.

Exemples et contre-exemples de théorèmes

- Les formules suivantes sont des théorèmes :
  - $p(c) \Rightarrow \exists x\ p(x)$
  - $\exists x \forall y\ r(x,\ y) \Rightarrow \forall y \exists x\ r(x,\ y)$
  - $\forall x \forall y\ r(x,\ y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\ r(x,\ y)$
  - $\exists x \exists y\ r(x,\ y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\ r(x,\ y)$
  - $\forall x\ (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x))$

  On mettra en évidence dans la suite des moyens pour démontrer ces théorèmes.
- Pour montrer qu'une formule ϕ n'est pas un théorème, on peut mettre en évidence une interprétation I qui n'est pas un modèle de ϕ.
  $\forall x \exists y\ r(x,\ y) \Rightarrow \exists y \forall x\ r(x,\ y)$ n'est pas un théorème.

  Soit l'interprétation I telle que $|I| = \mathbb{N}$ et $I(r) =<$ on a
  - $val_I(\forall x \exists y\ r(x,\ y)) = 1$, car $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x < y)$ est une assertion vraie (il suffit de choisir $y = x + 1$).
  - $val_I(\exists y \forall x\ r(x,\ y)) = 0$, car $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\ (x < y)$ est une assertion fausse, car il n'existe pas dans $\mathbb{N}$, d'élément supérieur à tous les éléments de $\mathbb{N}$,

  donc $val_I(\forall x \exists y\ r(x,\ y) \Rightarrow \exists y \forall x\ r(x,\ y)) = 0$, d'où I n'est pas un modèle de la formule ϕ et par conséquent ϕ n'est pas un théorème.