Télécom-Nancy 2020-2021
Module MAP - Apprentissage

Probabilités, feuille 2

Exercice 1 *Opérations sur les événements*
Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}*}$ une famille d'événements d'un univers Ω. Décrire à l'aide des opérateurs ensemblistes usuels les situations ou les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A_1, A_2, A_3 est réalisé.
2. L'un seulement des événements A_1, A_2 est réalisé.
3. A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3.
4. A chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi.
5. A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble.
6. A_1 ou A_2 se produisent toujours.
7. Tous les événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}*}$ se réalisent.
8. L'un au moins des A_i se réalise.
9. Tous les événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}*}$ se réalisent à partir d'un certain rang.
10. Une infinité d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}*}$ se réalisent.

Exercice 2 Parmi 10 ordinateurs portables, 5 sont en bon état et 5 ont des défauts. N'ayant pas cette information, un client achète 6 des ces ordinateurs.

1. Quelle est la probabilité qu'il achète exactement 2 ordinateurs défecteux ?
2. Quelle est la probabilité qu'il achète au moins 2 ordinateurs défectueux ?

Exercice 3 On organise une course entre trois voitures A, B et C. La voiture A a deux fois plus de chances de gagner que la voiture B ; et B a trois fois plus de chances de gagner que C. On admettra qu'il n'y a pas d ?ex-aequo.

1. Quelles sont les probabilités respectives de gagner de chacune des trois voitures ?
2. Quelle est la probabilité pour que A ou B gagne ?

Exercice 4 Le sang de tout être humain possède une caractéristique appelée rhésus. Pour chacun des deux sexes, la probabilité qu'un individu soit R+ est 0,85.

1. La formation d ?un couple est indépendante de ce facteur. Enumérer les différentes possibilités et leurs probabilités.
2. Dans les couples où l'homme est R+ et la femme R-, il se produit dans 8 % des naissances des accidents qui nécessitent un traitement spécial du nouveau-né. Déterminer la probabilité qu'un nouveau-né, de parents dont on ne connaît pas le facteur rhésus, doive subir ce traitement.

Exercice 5 *La rencontre*
Mr A et Melle B ont décidé de se donner rendez-vous entre minuit et 1h du matin. Chacun arrivera au hasard, uniformément et indépendamment l'un de l'autre, dans l'intervalle $[0, 1]$ au lieu fixé. Melle B attendra 5 minutes avant de partir, Mr A 10 minutes.

Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Exercices supplémentaires non corrigés en T.D. : Devoir à la maison

Exercice 6 Soient A et B deux événements associés à un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que :

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = -P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A})P(B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Exercice 7 Soit Ω un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, A et B deux événements. Prouver que :

$$\max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1; 0) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A); \mathbb{P}(B))$$

Donner un exemple pour lequel chacune des bornes est atteinte.
Etablir un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$.