Université de Lorraine
DIPLÔME: Telecom Nancy 2A - Apprentissage
Épreuve: MVSI Première épreuve (session 1)
Durée du sujet : 1 h 00
Date :Jeudi 10 décembre 2020 de 8 h 00 à 9h30
Nom du rédacteur : Dominique Méry
Documents personnels autorisés

Il est recommandé de bien lire les questions. Les explications et les justifications doivent être aussi simples et claires que possible. Les documents sont autorisés à l'exclusion des documents qui vous seraient transmis durant l'épreuve. Le sujet comprend quatre (4) exercices.

Premier écrit

Exercice 1

$$\begin{array}{l} \ell_0 : u = a*a \wedge v = b*b \wedge a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \\ w := u+v; \\ \ell_1 : w = (a+b)^2 - 2*a*b \end{array}$$

Soit l'annotation suivante. On suppose que a et b sont des constantes entières positives.

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit $\forall v, v'.P_\ell(v) \ \wedge \ cond_{\ell,\ell'}(v) \ \wedge \ v' = f_{\ell,\ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v')$. Vous devez répondre en énonçant et en démontrant les *conditions de vérification* c'est-à-dire en indiquant les differents pas de transformation.

Exercice 2

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = r \ \wedge \ u = x^r \ \wedge \ z = 6 \ \wedge x = u \\ y := r*r*r \\ \ell_2 : x = z \ \wedge \ y = z \ \wedge z = 4*p \end{array}$$

Soit r un nombre cubique c'est-à-dire de la forme $r = q^3$ où q est un entier positif. p est un entier positif.

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit $\forall v, v'.P_\ell(v) \ \wedge \ cond_{\ell,\ell'}(v) \ \wedge \ v' = f_{\ell,\ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v')$. Vous devez répondre en énonçant et en démontrant les *conditions de vérification* c'est-à-dire en indiquant les differents pas de transformation.

Exercice 3

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 5+z \ \wedge \ y = 1 \ \wedge \ z = 3 \ \wedge x = y \\ x := p*y \\ \ell_2 : x = z \ \wedge \ y = z \ \wedge z = 4*p \end{array}$$

Soit p un nombre différent d'une puissance de 5 c'est-à-dire différent de 5, 10, 15, 20, ...

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit $\forall v, v'.P_\ell(v) \ \wedge \ cond_{\ell,\ell'}(v) \ \wedge \ v' = f_{\ell,\ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v')$. Vous devez répondre en énonçant et en démontrant les *conditions de vérification* c'est-à-dire en indiquant les differents pas de transformation.

Exercice 4

Soit l'algorithme annoté suivant se trouvant à la page suivante et les pré et postconditions définies pour cet algorithme comme suit :

- Precondition: $x_1 \in \mathbb{N} \wedge x_2 \wedge \mathbb{N} \wedge x_1 \neq 0$
- Postcondition: $z = {x_1}^{x_2}$

On suppose que x_1 et x_2 sont des constantes.
Pour chaque paire (ℓ, ℓ') d'étiquettes correspondant à un pas élémentaire; on vérifie la propriété suivante :
$\forall x, y, q, r, x', y', q', r'.P_\ell(y_1, y_2, y_3, z) \wedge cond_{\ell,\ell'}(y_1, y_2, y_3, z) \wedge (y'_1, y'_2, y'_3, z') = f_{\ell,\ell'}(y_1, y_2, y_3, z) \Rightarrow P_{\ell'}(y'_1, y'_2, y'_3, z')$

Question 4.1 Enoncer et vérifier cette propriété pour les paires d'étiquettes suivantes: (ℓ_0, ℓ_1);

Question 4.2 Enoncer et vérifier cette propriété pour les paires d'étiquettes suivantes: (ℓ_1, ℓ_2);

Question 4.3 Enoncer et vérifier cette propriété pour les paires d'étiquettes suivantes: (ℓ_4, ℓ_5);

Question 4.4 Enoncer et vérifier cette propriété pour les paires d'étiquettes suivantes: (ℓ_7, ℓ_8);.

Fin de l'énoncé

precondition : $x_1 \in \mathbb{N} \wedge x_2 \in \mathbb{N} \wedge x_1 \neq 0$
postcondition : $z = {x_1}^{x_2}$
local variables : $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}$

$\ell_0 : \{y_1, y_2, y_3, z \in \mathbb{Z}\}$
$(y_1, y_2, y_3) := (x_1, x_2, 1);$
$\ell_1 : \{y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
while $y_2 \neq 0$ **do**
  $\ell_2 : \{y_2 \neq 0 \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
  if $impair(y_2)$ **then**
    $\ell_3 : \{impair(y_2) \wedge y_2 \neq 0 \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
    $y_2 := y_2 - 1;$
    $\ell_4 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 * y_1 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
    $y_3 := y_3 * y_1;$
    $\ell_5 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
  ;
  $\ell_6 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
  $y_1 := y_1 * y_1;$
  $\ell_7 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 * {y_1}^{y_2\ div 2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
  $y_2 := y_2\ div\ 2;$
  $\ell_8 : \{y_2 \geq 0 \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
;
$\ell_9 : \{y_2 = 0 \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
$z := y_3;$
$\ell_{10} : \{y_2 = 0 \wedge y_3 * {y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z} \wedge z = {x_1}^{x_2}\}$

Algorithme 1: Algorithme de l'exponentitaion indienne annoté