Télécom-Nancy 2020-2021
Module MAP Apprentissage

Probabilités, feuille 2, Corrections

Exercice 1 *Opérations sur les événements*
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ une famille d'événements associés à un univers Ω. Décrire à l'aide des opérateurs ensemblistes usuels les situations ou les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A_1, A_2, A_3 est réalisé : $\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup A_3$.
2. L'un seulement des événements A_1, A_2 est réalisé : $(A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$. Notons que cela peut s'écrire également $(A_1 \cup A_2) \cap \overline{(A_1 \cap A_2)}$, et s'appelle la différence symétrique de A_1 et A_2 : $A_1 \triangle A_2$.
3. A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3 : $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$.
4. A chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi : $A_1 \subset A_2$.
5. A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
6. A_1 ou A_2 se produisent toujours : $A_1 \cup A_2 = \Omega$.
7. Tous les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ se réalisent : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.
8. L'un au moins des A_i se réalise : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
9. Tous les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ se réalisent à partir d'un certain rang : $\displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=N}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega; \exists i \in \mathbb{N}^*, \forall j \geq i, \omega \in A_j\}$. Cet événement est réalisé par ω s'il existe un rang $i \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel ω réalise tous les événements A_j. Ainsi ω réalise une infinité successive d'événements A_j.
10. Une infinité d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ se réalisent : $\displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=N}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega; \forall i \in \mathbb{N}^*, \exists j \geq i, \omega \in A_j\}$. Cet événement est réalisé par ω si pour tout rang $i \in \mathbb{N}^*$, il est possible de trouver un rang supérieur j tel que ω réalise A_j. Ainsi ω réalise une infinité (pas forcément successive) d'événements A_j.

Exercice 2 Parmi 10 ordinateurs portables, 5 sont en bon état et 5 ont des défauts. N'ayant pas cette information, un client achète 6 de ces ordinateurs.

1. Quelle est la probabilité qu'il achète exactement 2 ordinateurs défecteux ?

   Notons A_i les événements "L'acheteur achète i ordinateurs défectueux", $i = 0, 1, ..., 6$.
   Chaque ordinateur acheté est l'équivalent du choix au hasard d'un ordinateur dans le stock décrit. Nous sommes en situation d'équiprobabilité (tirage au hasard) donc nous pouvons utiliser la formule classique "Nombre de cas favorables / Nombre de cas possibles" :
   $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{C_5^2.C_5^4}{C_{10}^6} = \dfrac{5}{21} \simeq 0.2381.$
2. Quelle est la probabilité qu'il achète au moins 2 ordinateurs défectueux ?
   L'événement contraire est "acheter moins de 2 ordinateurs défectueux, c'est-à-dire 0 ou 1 ordinateur défectueux". Sa probabilité sera plus rapide à calculer. Elle s'écrit $1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1)$. L'événement

A_0 est impossible puisqu'il y a seulement 5 ordinateurs sans défaut : $\mathbb{P}(A_0) = 0$.
$\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{C_5^1.C_5^5}{C_{10}^6} = \dfrac{1}{42} \simeq 0.0238$.
et finalement : $\frac{41}{42} \simeq 0.9762$.

Exercice 3 On organise une course entre trois voitures A, B et C. La voiture A a deux fois plus de chances de gagner que la voiture B ; et B a trois fois plus de chances de gagner que C. On admettra qu'il n'y a pas d'ex-aequo.

1. Quelles sont les probabilités respectives de gagner de chacune des trois voitures ?

   Notons les événements A, B, C = "La voiture A (respectivement B, C) gagne".
   On a par hypothèse : $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B) = 3\mathbb{P}(C)$. Donc $\mathbb{P}(A) = 6\mathbb{P}(C)$.

   Appliquons la formule de Poincaré, les intersections étant vides : $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Donc $6\mathbb{P}(C) + 3\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C) = 1$ et donc $\mathbb{P}(C) = 1/10$, $\mathbb{P}(B) = 3/10$, $\mathbb{P}(A) = 6/10$.

2. Quelle est la probabilité pour que A ou B gagne ?
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 9/10$.

Exercice 4 Le sang de tout être humain possède une caractéristique appelée rhésus. Pour chacun des deux sexes, la probabilité qu'un individu soit R+ est 0,85.

1. La formation d'un couple (H, F) est indépendante de ce facteur. Enumérer les différentes possibilités et leurs probabilités.

   Notons l'événement R+ : "le nouveau-né est R+". $\mathbb{P}(R+) = 0,85$. Alors $\overline{R+} = R- =$ "le nouveau-né est R-" et $\mathbb{P}(R-) = 0,15$.
   Notons (H, F) les informations de rhésus sur un couple. Les possibilités sont :
   $P_1 = (R+, R+)$ avec probabilité $\mathbb{P}(P_1) = 0,85^2 = 0,7225$
   $P_2 = (R+, R-)$ avec probabilité $\mathbb{P}(P_2) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$
   $P_3 = (R-, R+)$ avec probabilité $\mathbb{P}(P_3) = 0,1275$
   $P_4 = (R-, R-)$ avec probabilité $\mathbb{P}(P_4) = 0,15^2 = 0,0225$

2. Dans les couples où l'homme est R+ et la femme R-, il se produit dans 8 % des naissances des accidents qui nécessitent un traitement spécial du nouveau-né. Déterminer la probabilité qu'un nouveau-né, de parents dont on ne connaît pas le facteur rhésus, doive subir ce traitement.

   On se place dans le cas des couples $P_2 = (R+, R-)$, notons T l'événement "le nouveau-né doit subir un traitement". On a : $\mathbb{P}(T/P_2) = 0,08$ et $\mathbb{P}(T/P_i) = 0$ si $i = 1, 3, 4$.

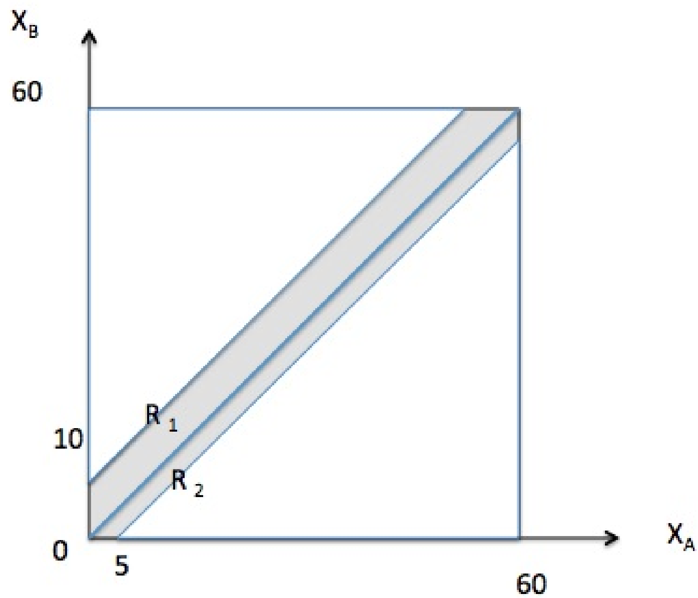
   On cherche $\mathbb{P}(T)$. On remarque que (P_1, P_2, P_3, P_4) forment un système complet d'événements. Alors on peut écrire :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(T \cap P_1) + \mathbb{P}(T \cap P_2) + \mathbb{P}(T \cap P_3) + \mathbb{P}(T \cap P_4) \\ &= \mathbb{P}(T/P_1).\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(T/P_2).\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(T/P_3).\mathbb{P}(P_3) + \mathbb{P}(T/P_4).\mathbb{P}(P_4) \\ &= 0 + 0,08 \times 0,1275 + 0 + 0 \\ &= 0,0102 \end{aligned}$$

Exercice 5 *La rencontre*

Mr A et Melle B ont décidé de se donner rendez-vous entre minuit et 1h du matin. Chacun arrivera au hasard, uniformément et indépendamment l'un de l'autre, dans l'intervalle $[0, 1]$ au lieu fixé. Melle B attendra 5 minutes avant de partir, Mr A 10 minutes.

Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Notons X_A, X_B le nombre de minutes après minuit pour l'arrivée de Mr A, et Melle B respectivement. X_A et X_B sont des variables aléatoires indépendantes, et réparties uniformément entre 0 et 60 mn. (On verra plus tard que l'on pourrait les modéliser par une loi uniforme). Ainsi le couple de variables aléatoires (X_A, X_B) peut être visualisé comme un point de coordonnées X_A et X_B dans le carré de taille $[0; 60]^2$. L'événement $R =$ "Mr A et Melle B se rencontrent", peut se scinder en deux événements incompatibles selon quelle personne arrive en premier entre minuit et 1h : $R = R_1 \cup R_2$, avec
$R_1 = \{X_A \leq X_B \leq X_A + 10\} =$ "Mr A arrive en premier et rencontre Melle B",
$R_2 = \{X_B \leq X_A \leq X_B + 5\} =$ "Melle B arrive en premier et rencontre Mr A".



On voit sur le graphe que la partie à conserver est la bande oblique. Pour cela, le plus simple est de retirer les aires des deux triangles à l'aire globale du carré de côté 60 : $60^2 - \frac{50^2}{2} - \frac{55^2}{2} = 837,5$ et donc la probabilité finale est : $\mathbb{P}(R) = \frac{837,5}{3600} = 0.2326$.