Graphes et Recherche Opérationnelle

Introduction générale

J.-F. Scheid

v2.2

Introduction générale

Le terme *recherche opérationnelle* (Operations Research en anglais) date de la seconde guerre mondiale où les anglo-saxons ont cherché à optimiser l'implantation de radars de défense anti-aérienne et à déterminer la taille optimale des convois d'approvisionnement.

Une définition possible de la RO:

Ensemble de méthodes d'analyse scientifique (maths et info) des phénomènes d'organisation qui traite de l'**optimisation** de l'architecture et du fonctionnement des systèmes (industriels, économiques, numériques ...).

La RO est un outil d'**aide à la décision**.

Introduction générale

Schéma général:

Problème concret (de type RO)

modélisation

résolution par une méthode de RO

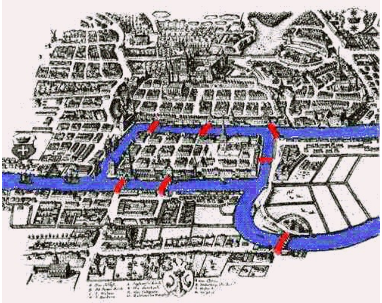
interprétation des résultats

prise de décision

Quelques exemples et domaines d'applications de la RO

Quelques exemples et domaines d'applications de la RO

1. Un premier exemple : *Les ponts de Königsberg* (Euler 1735).

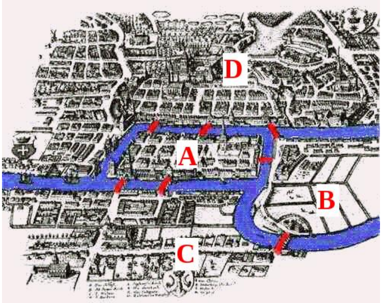


Deux îles reliées entre elles par 1 pont et 6 ponts relient les îles à la ville.

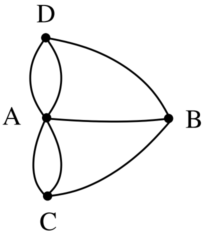
A partir d'un point de départ quelconque, existe-t-il un chemin passant une et une seule fois par chaque pont et qui revient au point de départ ?

Introduction générale

La réponse est **NON**. La preuve utilise un **graphe**: les arêtes du graphe représentent les ponts et les sommets les différents endroits de la ville (rives gauche et droite, les deux îles).



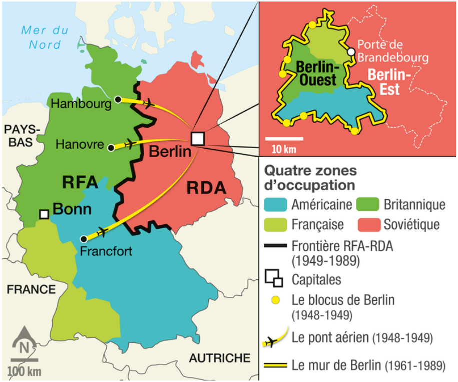
$\Longrightarrow$



Si la réponse était OUI alors nombre pair d'arêtes reliées à chaque noeud $\rightarrow$ contradiction.

2. *Programmation linéaire pour l'organisation optimale de convois (G. Dantzig, 1947)*.

Blocus de Berlin-Ouest en juin 1948 (15 mois).



Convois d'avions US et anglais pour approvisionner les 2 millions de personnes de Berlin-Ouest.

1 avion toutes les 45s au plus fort du trafic avec 278000 vols en 15 mois.

Introduction générale

Variables : avions US et anglais, équipages, pistes, provisions, dépenses.

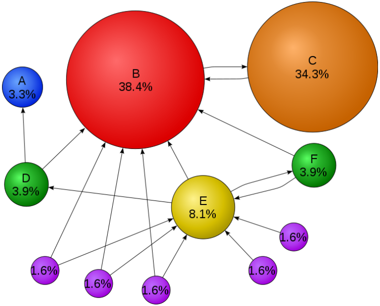
Contraintes :

- les avions US sont plus gros et ils nécessitent 2 fois plus de personnels par avion (1 équipage par avion anglais contre 2 pour un avion US).
- 64 équipages, 44 avions disponibles.
- un vol US coûte 9000$ contre 5000$ pour un vol anglais. Le coût total par semaine est limité à 300.000$
- un avion US a une capacité de $850m^3$ contre $560m^3$ pour un avion anglais.
- ...

Objectif : déterminer le nombre d'avions US et anglais à utiliser pour maximiser le contenu total embarqué.

3. *Graphe et PageRank (Larry Page - Sergey Brin, 1998)*.
Classement des pages Web utilisé par les moteurs de recherches.

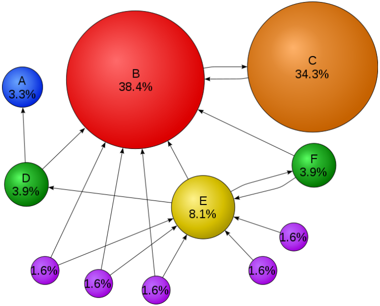
Modélisation du Web : graphe orienté dont les sommets j représentent les pages du Web et les arcs $j \to i$ les hyperliens.



Introduction générale

3. *Graphe et PageRank (Larry Page - Sergey Brin, 1998)*.
   Classement des pages Web utilisé par les moteurs de recherches.

   Modélisation du Web : graphe orienté dont les sommets j représentent les pages du Web et les arcs $j \to i$ les hyperliens.



Principe du PageRank: *une page i est importante si beaucoup de pages importantes pointent vers i.*

Importance de la page i :

$$\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} \mu_j$$

l_j : nb de liens sortant de la page j

$\Rightarrow$ pb aux valeurs propres $\mu = A\mu$.

4. *Problème de production*.

   Détermination d'un plan optimal de fabrication: une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premières, machines, personnel ...) en quantités limitées. Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise.

   Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé ?

4. *Problème de production*.

Détermination d'un plan optimal de fabrication: une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premières, machines, personnel ...) en quantités limitées. Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise.

Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé ?

$\rightarrow$ modélisation par programmation linéaire (simplexe).

x_i : quantité (non entière) du produit i fabriqué.

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \ \leftarrow \text{l'objectif}$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \ \leftarrow \text{les contraintes} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

Introduction générale

Un exemple de problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P_1 et P_2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Un exemple de problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P_1 et P_2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Quelles quantités (non entières) de produits P_1 et P_2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

x_1, x_2 sont les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

- *Objectif*

  Bénéfice total $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$.

  On cherche

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right].$$

x_1, x_2 sont les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

- *Objectif*

  Bénéfice total $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$.

  On cherche
  $$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

- *Contraintes*
  - Disponibilité de chacune des ressources :
  $$\begin{array}{ll} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 & \text{(équipement)} \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 & \text{(main d'oeuvre)} \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 & \text{(matière première)} \end{array}$$
  - Positivité des variables: $x_1, x_2 \geq 0$.

Exercice

début de l'exercice 1 feuille 1

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 en utilisant 4 machines $M_1, \cdots, M_4$. Chacun de ces deux produits nécessite un temps de passage donné (en heures) sur chacune des 4 machines. Les temps de passage par unité de produit sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque machine n'est disponible que pendant une certaine durée, également indiquée dans le tableau.

	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	0h	1,5h	2h	3h
P_2	3h	4h	3h	0h
disponibilité	39h	60h	57h	57h

Les produits P_1 et P_2 rapportent respectivement les bénéfices $B_1 = 1700$ euros et $B_2 = 3200$ euros par unité. On cherche à déterminer le plan de production pour maximiser le bénéfice total. **Modéliser ce problème sous forme de programme linéaire (PL).**

Introduction générale

5. *Problème de transport/logistique*.

Une entreprise dispose de plusieurs entrepôts contenant chacun un certain nombre de containers. Plusieurs magasins commandent des containers. On connaît le coût de transport de chaque dépôt aux magasins.

Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?

Introduction générale

Modélisation de problèmes de transport/logistique par programmation linéaire **en nombres entiers** / "Branch-and-Bound"

Un exemple. 3 magasins (M_1,M_2,M_3) et deux entrepôts (E_1,E_2).

Tableau des coûts :

	M_1	M_2	M_3	disponibilité entrepôts $\downarrow$
E_1	5	3	4	8
E_2	6	7	2	9
demande magasins $\rightarrow$	4	5	8	

Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?

x_{ij} : nombre de containers de l'entrepôt E_i acheminés au magasin M_j ($1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$.)

$$min_{\mathbf{x}} \left(F(\mathbf{x}) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 2x_{23} \right)$$

$$\begin{array}{ll}
x_{11} + x_{21} = 4 & \text{(demande du magasin } M_1\text{)} \\
x_{12} + x_{22} = 5 & \text{(demande du magasin } M_2\text{)} \\
x_{13} + x_{23} = 8 & \text{(demande du magasin } M_3\text{)} \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 8 & \text{(disponibilité entrepôt } E_1\text{)} \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 9 & \text{(disponibilité entrepôt } E_2\text{)}
\end{array}$$

$$x_{ij} \textbf{ entiers}, \forall i, j$$

5. *Problèmes d'affectation*.

   n tâches doivent être affectées à n machines (1 tâche par machine). Le coût d'exécution de chaque tâche par chacune des machines est connu.

   Trouver l'affectation qui minimise le coût total.

   $\rightarrow$ programmation linéaire en **variables binaires** / flot maximal à travers un graphe

a) un premier exemple de problème d'affectation en variables binaires *: affectation des cours d'ouverture du Collégium INP de l'UL*

Affectations des cours d'ouverture en 2014-15 par programmation linéaire (collaboration avec Telecom Nancy Services):

1578 élèves, 78 cours proposés sur 3 jours (avec répétitions) .

$\rightarrow$ Plus de 150 000 variables :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève } i \text{ suit le cours } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Introduction générale

Chaque élève doit suivre 3 cours et donne une liste de préférence d'au moins 6 cours.

$\rightarrow$ maximisation de la satisfaction collective (globale) :

$$\max_{x_{ij}} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

où $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève } i \text{ a choisi le cours } j \text{ dans sa liste de préférence} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Introduction générale

Chaque élève doit suivre 3 cours et donne une liste de préférence d'au moins 6 cours.

$\rightarrow$ maximisation de la satisfaction collective (globale) :

$$\max_{x_{ij}} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

où $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève } i \text{ a choisi le cours } j \text{ dans sa liste de préférence} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

... et plus de 43 000 contraintes !

$\rightarrow$ contraintes linéaires sur les variables de type égalités/inégalités.
Par exemple : (chaque élève suit exactement 3 cours)

$$\sum_j x_{ij} = 3, \quad \text{pour tout } i$$

Introduction générale

Solveur de programmation linéaire en nombres entiers CPLEX (IBM) :

$<$ 2 min sur station de travail Intel Xeon 2.26 GHz (4 cores/8 threads), 24GB RAM.

Taux de satisfaction $> 97\%$.

Exercice

exercice 3 feuille 1

On découpe un programme en n procédures (tâches) que l'on veut exécuter sur un ordinateur possédant m processeurs. À chaque procédure effectuée sur un processeur donné, il correspond un coût en temps de calcul. Ainsi pour la procédure i effectuée sur le processeur j, le coût est $c_{ij} > 0$.
Chacune des n tâches doit être effectuée par un et un seul processeur.
Mais chaque processeur peut exécuter plusieurs tâches ou pas du tout. On cherche à minimiser le coût total d'exécution des n procédures.

1. Modéliser ce problème sous forme d'un problème de programmation linéaire faisant intervenir des variables binaires.
2. Modéliser la variante suivante (plus réaliste...) qui consiste à minimiser le plus grand coût d'exécution.

b) un autre exemple de problème d'affectation : le sudoku

2	·	·	·	·	**4**	·	**3**	·
·	**9**	·	·	·	·	·	**7**	·
·	·	·	·	**6**	·	·	**4**	·
3	**8**	·	·	·	**7**	·	·	·
6	·	·	·	·	·	**5**	·	·
·	·	**2**	·	·	·	**8**	·	·
·	·	·	**8**	·	·	**9**	·	·
·	·	·	·	**9**	·	·	·	**2**
·	·	**4**	·	·	**2**	·	**8**	·

b) un autre exemple de problème d'affectation : le sudoku

2	·	·	·	·	**4**	·	**3**	·
·	**9**	·	·	·	·	·	**7**	·
·	·	·	·	**6**	·	·	**4**	·
3	**8**	·	·	·	**7**	·	·	·
6	·	·	·	·	·	**5**	·	·
·	·	**2**	·	·	·	**8**	·	·
·	·	·	**8**	·	·	**9**	·	·
·	·	·	·	**9**	·	·	·	**2**
·	·	**4**	·	·	**2**	·	**8**	·

2	1	5	7	8	**4**	6	**3**	9
4	**9**	6	2	5	3	1	**7**	8
8	3	7	1	**6**	9	2	**4**	5
3	**8**	9	5	2	**7**	4	1	6
6	7	1	9	4	8	**5**	2	3
5	4	**2**	3	1	6	**8**	9	7
1	2	3	**8**	7	5	**9**	6	4
7	6	8	4	**9**	1	3	5	**2**
9	5	**4**	6	3	**2**	7	**8**	1

b) un autre exemple de problème d'affectation : le sudoku

2	·	·	·	·	**4**	·	**3**	·
·	**9**	·	·	·	·	·	**7**	·
·	·	·	·	**6**	·	·	**4**	·
3	**8**	·	·	·	**7**	·	·	·
6	·	·	·	·	·	**5**	·	·
·	·	**2**	·	·	·	**8**	·	·
·	·	·	**8**	·	·	**9**	·	·
·	·	·	·	**9**	·	·	·	**2**
·	·	**4**	·	·	**2**	·	**8**	·

2	1	5	7	8	**4**	6	**3**	9
4	**9**	6	2	5	3	1	**7**	8
8	3	7	1	**6**	9	2	**4**	5
3	**8**	9	5	2	**7**	4	1	6
6	7	1	9	4	8	**5**	2	3
5	4	**2**	3	1	6	**8**	9	7
1	2	3	**8**	7	5	**9**	6	4
7	6	8	4	**9**	1	3	5	**2**
9	5	**4**	6	3	**2**	7	**8**	1

Variables d'affectation : pour une case $(i, j) \in [\![1, 9]\!]^2$,

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si le chiffre } k \in [\![1, 9]\!] \text{ est affecté à la case } (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\rightarrow$ maximisation de la fonction $f \equiv 1$ avec contraintes sur les x_{ijk}.

c) un dernier exemple de problème d'affectation : *mariages stables*

Trouver n mariages stables entre hommes et femmes.

Il y a *instabilité* si un homme et une femme préfèrent tous deux se mettre en couple plutôt que de rester avec son conjoint respectif.

c) un dernier exemple de problème d'affectation : *mariages stables*

Trouver n mariages stables entre hommes et femmes.

Il y a *instabilité* si un homme et une femme préfèrent tous deux se mettre en couple plutôt que de rester avec son conjoint respectif.

Deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont *instables* si (par exemple) X_1 préfère Y_2 à Y_1 **et** Y_2 préfère X_1 à X_2.

c) un dernier exemple de problème d'affectation : *mariages stables*

Trouver n mariages stables entre hommes et femmes.

Il y a *instabilité* si un homme et une femme préfèrent tous deux se mettre en couple plutôt que de rester avec son conjoint respectif.

Deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont *instables* si (par exemple) X_1 préfère Y_2 à Y_1 **et** Y_2 préfère X_1 à X_2.

Chaque homme et chaque femme exprime ses préférences parmi l'ensemble des individus de l'autre sexe (liste).

Un exemple (1=premier choix)

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	$(2,2)$	$(3,3)$	$(1,1)$
X_2	$(1,1)$	$(3,1)$	$(2,2)$
X_3	$(3,3)$	$(2,2)$	$(1,3)$

- 6 mariages possibles.
- (X_1, Y_3), (X_2, Y_1), (X_3, Y_3) est stable.
- (X_1, Y_2), (X_2, Y_3), (X_3, Y_1) est instable.

Un exemple (1=premier choix)

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	$(2,2)$	$(3,3)$	$(1,1)$
X_2	$(1,1)$	$(3,1)$	$(2,2)$
X_3	$(3,3)$	$(2,2)$	$(1,3)$

- 6 mariages possibles.
- (X_1, Y_3), (X_2, Y_1), (X_3, Y_3) est stable.
- (X_1, Y_2), (X_2, Y_3), (X_3, Y_1) est instable.

Propriété : il existe (au moins) une solution stable, algorithme de Gale-Shapley (1962).

Quelques applications du problème des mariages stables:

- Services Internet distribués (page web, vidéos,...) avec utilisateurs/serveurs.
    - Les utilisateurs préfèrent accéder à des serveurs de proximité pour des réponses rapides (liste de préférences des serveurs pour chaque utilisateur).
    - Les serveurs préfèrent servir des utilisateurs dont le coût est faible (liste de préférences des utilisateurs pour chaque serveur).
- APB (jusqu'en 2017) puis Parcours-Sup (h=formation, f=étudiant)

6. *Le problème de voyageur de commerce*.

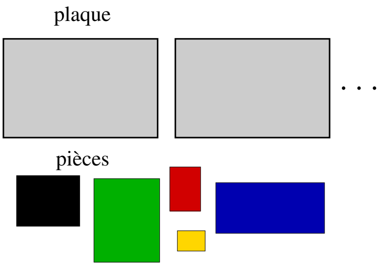
   Un voyageur de commerce doit visiter n villes. La distance entre chaque ville est donnée.

   Trouver le plus court trajet passant par les n villes.

   $\rightarrow$ programmation dynamique : on décompose le problème en sous-problèmes et on résout les sous-problèmes des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.

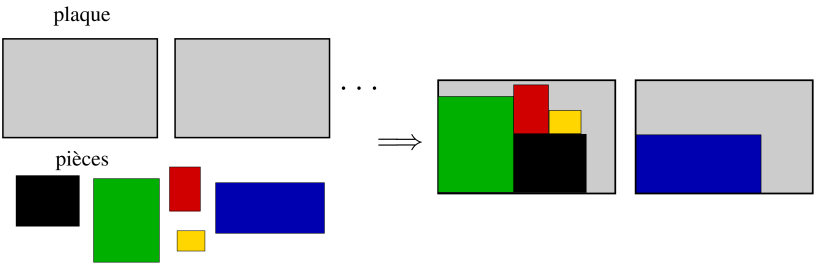
7. *Placement optimal de pièces 2D/3D (Bin Packing)*.

En 2D : on dispose de plaques rectangulaires toutes identiques dans lesquelles on veut placer des pièces rectangulaires sans chevauchement. Les pièces à placer ont des dimensions différentes.



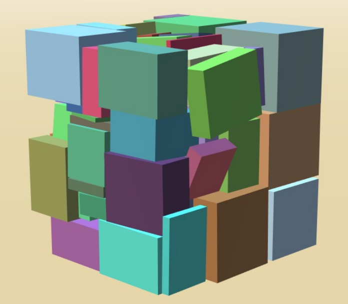
7. *Placement optimal de pièces 2D/3D (Bin Packing)*.

En 2D : on dispose de plaques rectangulaires toutes identiques dans lesquelles on veut placer des pièces rectangulaires sans chevauchement. Les pièces à placer ont des dimensions différentes.



Trouver le placement optimal des pièces pour minimiser le nombre de plaques utilisées.

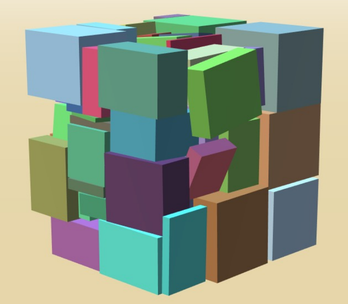
Aussi en **3D** ...



Daniel Hartmeier/ benzedrine.ch

Introduction générale

Aussi en **3D** ...



Daniel Hartmeier/ benzedrine.ch

→ méthodes heuristiques (du grec *eurisko*, "je trouve" : art de faire des découvertes, d'inventer) : fournir rapidement une solution réalisable mais pas nécessairement optimale.

- *algorithmes gloutons* (greedy algorithm) : faire un choix *localement* optimal
- *méthodes évolutionnistes* : algos génétiques, colonies de fourmis, ...

Tous les problèmes précédents sont des *problèmes de combinatoire*. Par ex., pour le problème du voyageur de commerce, il y a $n!$ possibilités.

Avec $n = 20$, l'énumération des trajets possibles à une vitesse d'un million par seconde, prendrait 77094 années ...

$\rightsquigarrow$ *trouver des méthodes efficaces (exactes, approchées ...)*.

Formalisation.

Tous les problèmes mentionnés ci-dessus et présentés dans ce cours peuvent se formaliser de la façon suivante.

$$\max\{f(x),\ x \in X\}$$

- $f : X \to \mathbb{R}$ est la fonction **objectif** qui peut être linéaire, quadratique, nonlinéaire...
- X est l'ensemble des solutions possibles dites **réalisables** (les contraintes). L'ens. X est fini mais en général de très grande taille.

Formalisation.

Tous les problèmes mentionnés ci-dessus et présentés dans ce cours peuvent se formaliser de la façon suivante.

$$\max\{f(x),\ x \in X\}$$

- $f : X \to \mathbb{R}$ est la fonction **objectif** qui peut être linéaire, quadratique, nonlinéaire...
- X est l'ensemble des solutions possibles dites **réalisables** (les contraintes). L'ens. X est fini mais en général de très grande taille.

Remarque importante

Pour un problème de *minimisation*, on se ramène à une *maximisation* avec

$$\min f = -\max(-f)$$

Introduction générale

Contenu du cours.

- *Programmation linéaire*: modélisation, aspects géométriques, méthode du simplexe, analyse de sensibilité ($\rightarrow$ test 20min).
- *Graphes et R.O* ($\rightarrow$ test 20min).
  - *Flot optimal dans un graphe*
  - *Programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)*
  - *Programmation dynamique*
  - *Introduction aux méthodes heuristiques* : algorithme A^*, recuit simulé, algorithmes génétiques, colonies de fourmis.

Introduction générale

Contenu du cours.

- *Programmation linéaire*: modélisation, aspects géométriques, méthode du simplexe, analyse de sensibilité ($\rightarrow$ test 20min).
- *Graphes et R.O* ($\rightarrow$ test 20min).
    - *Flot optimal dans un graphe*
    - *Programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)*
    - *Programmation dynamique*
    - *Introduction aux méthodes heuristiques* : algorithme A^*, recuit simulé, algorithmes génétiques, colonies de fourmis.

Organisation.

- Evaluations (FISE): deux tests écrits E1, E2 (20min), un test machine E3, un examen final E4 (1h30).
  note finale =0.13*(E1+E2+E3) + 0.6*E4
- Documents : un polycopié de cours sur la programmation linéaire + transparents du cours

Quelques ouvrages de références.

1. *Précis de recherche opérationnelle – Méthodes et exercices d'application*, Faure, Lemaire, Picouleau; 2008.
   → ouvrage de référence, un "classique".
2. *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle : Tome 1 (Graphes : leurs usages, leurs algorithmes), Tome 3 (Programmation linéaire et extensions, problèmes classiques)*. Roseaux : Billionnet, Carlier, Chrétienne, Lemaire, Faure; 1985/1998.
   → contient des exercices classiques en lien avec [1].
3. *Linear programming 1: Introduction*, G. Dantzig, M. Thapa, 1997.
   Linear programming 2: Theory and Extensions, G. Dantzig, M. Thapa, 2003.
   → ouvrage très complet.

Quelques ouvrages de références (suite).

4. *Optimisation discrète – De la modélisation à la résolution par des logiciels de programmation mathématique*, Billionnet, 2007.
   → ouvrage récent qui contient un exposé de méthodes plus modernes que [1]. Ouvrage intéressant.
5. *Recherche opérationnelle pour ingénieurs Tome I et II*, Hêche, Liebling, de Werra; 2003.
   → malgré son titre (!), contenu assez mathématique; contient des démonstrations intéressantes.
6. *Introduction à l'algorithmique*, Corman, Leiserson, Rivest, 2002.
   → aspects algorithmiques des maths numériques, de la Recherche Opérationnelle et des probabilités.