★ Exercice 5: Théoriquement, c'est bon.

On considère deux grandeurs physiques t et y qui sont liées entre-elles par une relation fonctionnelle du type $y = f(t)$. On dispose d'un modèle pour la fonction f. On sait que f est une combinaison linéaire de n fonctions élémentaires $\phi_1, \cdots, \phi_n$ connues :

$$f(t) = f_{\mathbf{x}}(t) = x_1\phi_1(t) + \cdots + x_n\phi_n(t)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ sont des paramètres réels qu'on cherche à identifier. Pour cela, on réalise une série de m mesures $(t_i, y_i)_{1\leq i\leq m}$ et on cherche à minimiser le plus grand écart absolu entre le modèle donné par $f_{\mathbf{x}}$ et les mesures :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{1\leq i\leq m} |f_{\mathbf{x}}(t_i) - y_i| \tag{3}$$

Remarque : si l'on remplace l'objectif (3) par la somme des carrés des écarts, c'est-à-dire avec

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |f_{\mathbf{x}}(t_i) - y_i|^2,$$

alors on obtient exactement la formulation en moindres carrés...

On notera $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ les normes sur $\mathbb{R}^n$ d'un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top$.

▷ **Question 1:** Ecrire le problème (3) sous la forme

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty := \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{1\leq i\leq m} |A\mathbf{x}_i - b_i| \tag{4}$$

en précisant ce que valent le vecteur $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^\top$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

▷ **Question 2:** Transformer le problème précédent en un problème de programmation linéaire sous forme canonique pure. (*Indication :* introduire la variable $e = \max_i |A\mathbf{x}_i - b_i|$).

▷ **Question 3:** On considère à présent la fonction objectif

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 := \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |A\mathbf{x}_i - b_i| \tag{5}$$

Transformer ce nouveau problème en un problème de programmation linéaire sous forme canonique pure.