TELECOM Nancy

Examen 01 Février 2023 (2h)

OMG : Mathématiques Générales

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

La notation tiendra compte de la RIGUEUR,
de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Partie I - Algèbre linéaire

★ Exercice 1: S-E-V des émissions (3 Pts)

Soit $\mathcal{M}_{2,2}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices carré de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

▷ **Question 1: (1.5 Pts)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}^{\mathbb{R}}$

▷ **Question 2: (1 Pt)** Donner une base de $\mathcal{A}$

▷ **Question 3: (0.5 Pt)** Donner la dimension de $\mathcal{A}$

★ Exercice 2: L'Iso scelle et bla bla... (6 Pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

▷ **Question 1: (2 Pts)** Calculer $\det(A)$

▷ **Question 2: (2 Pts)** Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Pour quelles valeurs de m est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

▷ **Question 3: (2 Pts)** Nous posons $m = 1$, trouver une base du noyau de u

Rappel : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, soit B sa matrice associée, par rapport à la base canonique. soit X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors, nous pouvons écrire :

$$f(X) = Y \iff BX = Y$$

★ Exercice 3: Bases ou $\mathbb{K}^2$ (3 Pts)

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

▷ **Question 1: (1.5 Pts)** Donner une base de ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$

▷ **Question 2: (1 Pts)** Donner la matrice associée à ce système linéaire

▷ **Question 3: (0.5 Pts)** Calculer le déterminant de cette matrice réduite aux variables x_1, x_2, x_4

★ Exercice 4: Exemples (4 Pts)

▷ **Question 1: (2 Pts)** Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif.

▷ **Question 2: (2 Pts)** Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel surjectif et non injectif.

★ Exercice 5: L'image d'Épinal (4 Pts)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$;

▷ **Question 1: (2 Pts)** Montrer que $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$.

▷ **Question 2: (2 Pts)** Donner un exemple très simple où $Im(f+g) \neq Im(f) + Im(g)$.

Partie II - Définitions

Nous supposons que E et F sont des K-espaces vectoriels, nous avons les définitions suivantes :

- Endomorphisme de E : Application linéaire de E dans E.
- Isomorphisme de E dans F : Application linéaire bijective de E dans F
- Automorphisme de E : Application linéaire bijective de E dans E (Endo + Iso)
- Injective : Une fonction g est dite injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée correspond au plus à un seul élément de l'ensemble de départ. Il existe au plus un antécédent.
- Surjective : Une fonction f est dite surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée correspond à au moins un élément de l'ensemble de départ. Il existe au moins un antécédent.
- Bijective : Une fonction h est dite bijective si et seulement si elle est et injective et surjective.
- Im(f) et Ker(f) sont des espaces vectoriels tels que :

$$Im(f) = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}$$

$$Ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0\}$$

- Sous-espace vectoriel : Soient E un K-espace vectoriel et G un sous-ensemble de E, alors G est un SEV de E si :
  1. $0_E \in G$
  2. $\forall (x, y) \in G^2, \forall \lambda \in K, x + \lambda y \in G$
- Famille génératrice : Soit $Fam = \{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$, une famille de vecteurs de E. Fam est dite génératrice pour E ssi :
  1. $\forall x \in E, \exists \lambda_i \in K$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$
  2. $Vect(Fam) = \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ avec $\lambda_j \in K\}$
- Famille libre : Fam est libre ssi $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [[1; n]], \lambda_k = 0$
- B est une base de E ssi B est une famille libre et génératrice de E