# Raisonnement par récurrence Ensemble défini inductivement Principe des tiroirs

**TELECOM Nancy** 

## Démonstration par récurrence

Problème: soit E un ensemble et P une propriété définie sur E, on considère la formule:

$$(\forall x \in E) (P(x))$$
 (A)

Signification: la propriété P est vraie pour tous les éléments de E.

Pour établir des principes (de récurrence ou d'induction) permettant de démontrer de telles assertions (A), il est nécessaire que les ensembles E sur lesquels portent P vérifient certaines propriétés, (ensembles définis inductivement, ensembles bien fondés,...).

## Récurrences classiques sur N

## Définition (Principe de récurrence sur N à un cran)

Soit P une propriété définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , le principe de récurrence à un cran s'exprime par la formule logique suivante :

$$[P(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(P(n))$$

Exemple de mise en œuvre

Démonstration de  $(\forall n \in \mathbb{N})$   $(7^n - 1$  est divisible par 6).

On pose  $P(n) \equiv 7^n - 1$  est divisible par 6

- 1. On démontre P(0) le cas de base:  $7^O 1 = 1 1 = 0$ , 0 est divisible par 6.
- 2. On démontre le pas de récurrence  $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ .

On suppose P(n) (c'est l'hypothèse de récurrence H.R.), et à partir de H.R. on démontre P(n+1).

H.R. :  $7^n - 1$  est divisible par 6 c.-à-d.  $(\exists k \in \mathbb{N})(7^n - 1 = 6k)$  calculons:

$$7^{n+1} - 1 = 7^{n+1} - 7 + 7 - 1$$
  
=  $7(7^n - 1) + 6$   
=  $7 \times 6k + 6$  (par application de H.R.)  
=  $6(7k + 1)$ 

d'où  $7^{n+1} - 1$  est multiple de 6, c.-à-d. P(n+1)

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n))$ , c'est-à-dire que pour tout entier naturel n,  $7^n - 1$  est divisible par 6.

3

# Récurrences sur N (suite)

### Remarque

On peut commencer la récurrence à un entier quelconque  $a \in \mathbb{N}$ , le principe s'énonce ainsi :

$$[P(a) \ \text{et} \ (\forall n \in \mathbb{N} \setminus [0, a[) \ (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \setminus [0, a[) \ (P(n)))]$$

## Définition (Récurrence à k crans sur $\mathbb{N}$ )

Soit P une propriété définie sur  $\mathbb{N}$ , le principe de récurrence à k crans s'exprime par la formule logique suivante :

```
 [(P(0) \text{ et } P(1) \dots \text{ et } P(k-1)) \text{ et } 
 (\forall n \in \mathbb{N}) (P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } \dots \text{ et } P(n+k-1) \Rightarrow P(n+k))] 
 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(P(n))
```

### Remarques

- 1. Le cas de base est constitué des k propositions P(0), P(1), ... et P(k-1) à vérifier.
- 2.  $(\forall n \in \mathbb{N})$   $(P(n) \ et \ P(n+1) \ et \ \dots \ et \ P(n+k-1) \Rightarrow P(n+k))$  est le pas de récurrence. L'hypothèse de récurrence est constituée des k propositions P(n), ..., P(n+k-1).
- 3. On peut définir des variantes de ce principe qui commencent pour des entiers strictement supérieurs à 0.
- 4. Pour k = 1, on retrouve le principe précédent (à 1 cran).

# Ensemble défini inductivement (définition)

## Définition (Ensemble défini inductivement)

Un ensemble E défini inductivement est la donnée d'un ensemble B et d'un ensemble Cp d'opérations tels que :

- B ⊂ E.
- pour toute opération  $\phi$  de  $\mathcal{O}_{P}$ , pour tout  $x_1, \ldots x_n \in E : \phi(x_1, \ldots, x_n) \in E$ .
- E est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion des ensembles) vérifiant les deux propriétés précédentes.

### Remarques

- L'ensemble *B* s'appelle la base.
- Une opération de  $\mathcal{O}p$  d'arité n est une application de  $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}} \to E$ , mais
  - peut aussi faire intervenir d'autres ensembles (on peut donc considérer d'autres applications que des opérations).
- La troisième condition de la définition signifie que les éléments de l'ensemble *E* sont soit des éléments de la base *B*, soit des éléments obtenus en appliquant un nombre fini de fois les opérations de *Op* aux éléments de la base *B*.

# Ensembles définis inductivement (exemples)

### Arbres binaires

AB l'ensemble des arbres binaires étiquetés par des éléments de  $\mathbb N$  est défini inductivement par:

- la base  $B = \{avide\}$  (avide est l'arbre vide).
- L'ensemble des opérations comporte un seul élément défini par :  $(\forall e \in \mathbb{N})(\forall g \in AB)(\forall d \in AB) < g, e, d > \in AB$

Exemples d'arbres binaires étiquetés par  $\mathbb N$  :

```
a_1 = avide, a_2 = < avide, 4, avide >, a_3 = << avide, 4, avide >, 5, avide >, a_4 = << avide, 4, avide >, 5, avide, 1, avide >>, a_5 = << avide, 3, avide, 2, avide, 3, avide, 3, avide, 4, avide, 5, avide, 6, avide, 1, avide, 2, avide, 3, avide, 6, avide, 1, avide, 3, avide, 6, avide, 1, avide, 8, avide, 1, avide, 8, avide, 1, avide, 1, avide, 1, avide, 1, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 3, avide, 1, avide, 1, avide, 1, avide, 1, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 3, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 2, avide, 3, avide, 1, avide, 3, avide, 1, avide, 3, avide, 1, avide, 3, avide, 1, avide, 2, avide, 1, avide, 3, avide, 1, avide, 2, avide, 3, avide, 1, avide, 2, avide, 3, avide, 1, avide, 3, avide, 3, avide, 1, avide, 3, avide, 4, avide, 3, avide, 4, avide, 3, avide, 4, avide, 3, avide, 4, avide, 4,
```

#### Listes

*Liste*, l'ensemble des listes d'éléments de  $\mathbb N$  est définie inductivement par :

- la base  $B = \{nil\}$  (nil est appelé la liste vide).
- L'ensemble des opérations comporte la seule opération :: définie comme suit :
   (∀e ∈ N)(∀I ∈ Liste) e :: I ∈ Liste

nil, 4 :: nil, 6 :: (2 :: nil), 0 :: (5 :: (1 :: nil)) sont des listes d'entiers.

# Ensembles définis inductivement (exemples)

### Entiers naturels N

Tout entier naturel n peut être obtenu à partir de 0 par un nombre fini (n) d'additions successives de 1, ainsi :

```
\begin{array}{l} 2=0+1+1\\ 6=0+1+1+1+1+1+1\\ 12=0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\\ \text{L'ensemble }\mathbb{N} \text{ est défini inductivement par }: \end{array}
```

- 0 est l'élément formant la base.
- L'opération suc :  $x \mapsto x + 1$  est la seule opération de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ .

### Exemples:

### Entiers naturels impairs

Les entiers naturels impairs I peuvent être définis inductivement par :

- l'ensemble de base est {1}
- l'opération

plus2: 
$$\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$$
  
  $x \mapsto x+2$ 

# Principe d'induction (structurelle) sur les ensembles définis inductivement (définition)

## Définition (Principe d'induction)

Soit *E* un ensemble défini inductivement par

- une base B.
- un ensemble d'opération Op.

soit P une propriété définie sur E, le principe d'induction sur E s'exprime de la façon suivante :

```
[ (\forall x \in B) P(x) \text{ et}

(\forall \phi \in \mathcal{O}p) [(\forall x_1 \in E) \dots (\forall x_n \in E) (P(x_1) \text{ et} \dots \text{ et} P(x_n) \Rightarrow P(\phi(x_1, \dots, x_n)))]]

\Rightarrow (\forall x \in E) (P(x))
```

### Remarques

- Cas de base: la propriété doit être prouvée pour tous les éléments de la base B.
- Pas d'induction : la propriété doit être prouvée pour tout élément construit à partir d'une opération sous l'hypothèse que la propriété est vraie pour tous les éléments utilisés dans la construction. Ce pas d'induction est à démontrer pour toute opération de l'ensemble d'opérations  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ .
- La conclusion signifie que la propriété est vraie pour tout élément de l'ensemble.

# Principe d'induction structurelle (exemple)

## Définition (Principe d'induction sur les arbres binaires)

Soit l'ensemble AB des arbres binaires défini inductivement par :

- la base {avide},
- l'opération

$$<$$
  $_{-}>$ :  $AB \times \mathbb{N} \times AB \rightarrow AB$   
 $(g, e, d) \mapsto < g, e, d>$ 

Soit P une propriété définie sur AB, le principe d'induction structurelle sur l'ensemble AB s'exprime de la façon suivante :

```
[ P(avide) et (\forall g \in AB)(\forall d \in AB)(\forall e \in \mathbb{N})(P(g) \text{ et } P(d) \Rightarrow P(\langle g, e, d \rangle)) ] \Rightarrow (\forall a \in AB)(P(a))
```

# Principe d'induction structurelle (exemple)

## Définition (Principe d'induction sur les listes)

L'ensemble Liste des listes d'entiers est défini inductivement par :

- la base { *nil* },
- l'opération

$$:: \mathbb{N} \times Liste \rightarrow Liste$$
 $(e, l) \mapsto e :: l$ 

Soit P une propriété définie sur AB, le principe d'induction structurelle sur l'ensemble AB s'exprime de la façon suivante :

$$[P(nil) \ et \ (\forall e \in \mathbb{N})(\forall l' \in Liste)(P(l') \Rightarrow P(e :: l'))] \Rightarrow (\forall l \in Liste) \ (P(l))$$

# Fonction (récursive) sur un ensemble défini inductivement

## Définition (Fonction récursive)

Soient E un ensemble défini inductivement à partir de B,  $\mathcal{O}p$  et F un ensemble quelconque, la définition d'une fonction  $f:E\to F$  récursive consiste à donner :

- pour tout x de B des valeurs  $f(x) \in F$
- pour toute règle  $\phi$  de  $\mathcal{O}p$  des valeurs de  $f(\phi(x_1,\ldots,x_n))$  pouvant dépendre de  $f(x_1),\ldots,f(x_n)$  et  $x_1,\ldots,x_n$ .

## Remarques

Il est possible d'étendre cette définition à des fonctions récursives à plusieurs arguments, c'est-à-dire à des profils

$$E \times \ldots \times E \to F$$
, ou  $E \times \ldots \times E \times A_1 \times \ldots \times A_n \to F$ ,

où les  $A_i$  sont des ensembles quelconques. Dans ce cas les schémas des fonctions récursives peuvent être plus compliqués ..., peuvent alors se poser des problèmes de terminaison.

# Fonction récursive (exemple)

## Fonctions récursives sur les arbres binaires

Soit la fonction  $n: AB \to \mathbb{N}$  définissant le nombre d'éléments (entiers) d'un arbre binaire :

$$\begin{cases}
 n(avide) = 0 \\
 n(< g, e, d >) = 1 + n(g) + n(d)
\end{cases}$$

Soit la fonction  $h: AB \to \mathbb{N}$  définissant la hauteur d'un arbre binaire :

$$\begin{cases} h(avide) = 0 \\ h(\langle g, e, d \rangle) = 1 + max(h(g), h(d)) \end{cases}$$

# Mise en œuvre du principe d'induction pour les arbres binaires

Propriété à démontrer :  $(\forall a \in AB) \ n(a) \le 2^{h(a)} - 1$  (on note  $P(a) \equiv n(a) \le 2^{h(a)} - 1$ ).

 Cas de base: on vérifie la propriété pour les éléments de la base, c'est-à-dire l'arbre vide avide.

```
n(avide) = 0 d'après la définition de n
2^{h(avide)} - 1 = 2^0 - 1 d'aprés la définition de n
= 1 - 1
= 0
```

d'où  $n(avide) \le 2^{h(avide)} - 1$  et P est vérifiée pour avide.

Pas d'induction.

```
 (\forall g \in AB)(\forall d \in AB)(\forall e \in \mathbb{N})(P(g) \ et \ P(d) \Rightarrow P(< g, e, d >))  L'hypothèse d'induction : P(g) et P(d) Conclusion : P(< g, e, d >) Hypothèse d'induction : P(g) \in P(g) = P(g) et P(g) \in P(g) = P(g) Hypothèse d'induction : P(g) \in P(g) = P(g) function de P(g) \in P(g) function P(g) \in P(g) = P(g) function P(g) \in P(g)
```

• Conclusion générale :  $(\forall a \in AB) \ n(a) \leq 2^{h(a)} - 1$ 

## Principe des tiroirs

## **Définition**

Le principe des tiroirs (de Dirichlet) affirme que si m chaussettes occupent n tiroirs, et si m > n, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette.

## Remarque

Mathématiquement, le principe des tiroirs peut s'énoncer ainsi : Si E et F sont deux ensembles finis, tels que card(E) > card(F) et si  $f: E \to F$  est une application de E dans F, alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédents par f, c-à-d qu'il n'existe pas d'application injective de E dans F.