TELECOM Nancy (1A) — Mathématiques Appliquées pour l'Informatique

Logique des propositions

Exercice 1

On considère l'ensemble $P = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t\}$ de variables propositionnelles. Pour chacune des formules suivantes donner

— l'arbre abstrait de la formule si la formule appartient à $Prop(P)$, c'est-à-dire si la formule est bien formée

— une expression infixée, débarrassée des parenthèses superflues en tenant compte des priorités des connecteurs logiques (par ordre de priorité décroissante $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ et "parenthèsage" gauche-droite)

1. $\neg((q \Rightarrow r) \vee p)$
2. $(((p \wedge q)\neg r) \Rightarrow p)$
3. $((\neg p \Rightarrow (\neg r \vee q)) \Rightarrow p)$
4. $(\neg\neg(q \Rightarrow r) \vee (\neg q \Rightarrow \neg r))$
5. $(p \vee (\neg q \wedge (r \wedge s)))$
6. $(((p \wedge (\neg q)) \vee r) \Rightarrow (s \wedge t))$

Exercice 2

Cet exercice a seulement pour but de rappeler la terminologie relative à la logique des propositions. On considère la formule α suivante : $\alpha = [(a \Rightarrow b) \wedge ((c \vee \neg b) \Rightarrow a)] \Rightarrow (b \wedge c)$

1. Quelles sont les variables propositionnelles intervenant dans α ? Sur quelles variables propositionnelles doit-on connaître la valeur d'une valuation pour connaître la valeur correspondante de α ?
2. Donner la sémantique de cette formule α.
3. Cette formule admet-elle un modèle ? Donner un exemple de modèle de cette formule. Cette formule est-elle une tautologie ? est-elle contradictoire ?

Exercice 3

La logique des propositions est couramment utilisée pour modéliser des énoncés exprimés dans les langages naturels (français, anglais, ...). Dans le contexte des langages naturels, une *proposition* est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse.

Par exemple :

Les affirmations suivantes sont des propositions :

"2 plus 3 font 5"

"π est compris entre 4 et 5"

alors que les affirmations suivantes ne le sont pas :

"la présente affirmation est fausse"

"tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré"

La première affirmation conduit à un paradoxe, la seconde est une phrase trop imprécise, il faudrait préciser à quel ensemble appartient le nombre dont on prend le carré ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ...).

1. En notant p et q les affirmations suivantes :

   p = "Jean est fort en maths"

   q = "Jean est fort en chimie"

   Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres p et q et des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

   (a) "Jean est fort en maths mais faible en chimie"

   (b) "Jean n'est fort ni en maths ni en chimie"

   (c) "Jean est fort en maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en maths"

   (d) "Jean est fort en maths s'il est fort en chimie"

   (e) "Jean est fort en chimie et en maths ou il est fort en chimie et faible en maths"
2. En notant p, q et r les affirmations suivantes :

p = “Pierre fait des maths”
q = “Pierre fait de la chimie”
r = “Pierre fait de l’anglais”

représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l’aide des lettres p, q, r et des connecteurs usuels.

(a) “Pierre fait des maths et de l’anglais mais pas de la chimie”
(b) “Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l’anglais”
(c) “il est faux que Pierre fasse de l’anglais sans faire de maths”
(d) “il est faux que Pierre ne fasse pas des maths et fasse quand même de la chimie”
(e) “il est faux que Pierre fasse de l’anglais ou de la chimie sans faire de maths”
(f) “Pierre ne fait ni anglais ni chimie mais il fait des maths”

3. Enoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d’employer l’expression : “...il est faux ...”

(a) “si demain il pleut ou il fait froid je ne sortirai pas”
(b) “le nombre 522 n’est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7”
(c) “ce quadrilatère n’est ni un rectangle ni un losange”
(d) “si Paul ne va pas travailler ce matin il va perdre son emploi”

Exercice 4
Dans les formules suivantes sélectionner les tautologies et examiner les raisonnements logiques sous-jacents.

$$\begin{array}{l}\neg\neg x \Leftrightarrow x,\quad x \Rightarrow x,\quad (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (y \Rightarrow x),\quad (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x),\\ (\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y),\quad \neg x \Rightarrow (x \Rightarrow y),\quad \neg x \vee x,\quad \neg(\neg x \wedge x),\\ [x \Rightarrow (y \Rightarrow (z \Rightarrow t))] \Rightarrow [(y \Rightarrow x) \Rightarrow ((x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow t))],\\ (x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y) \Rightarrow z),\quad (x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \Rightarrow \mathcal{F}),\\ (x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((\neg y \wedge \neg z) \Rightarrow \neg x)\end{array}$$

Exercice 5
Pour chacun des ensembles de formules $\mathcal{A}$ et des formules α suivants déterminer si $\mathcal{A} \models \alpha$.

1. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow a,\ a \vee b\}$, $\alpha = a \wedge b$
2. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b,\ a \vee b\}$, $\alpha = b \Rightarrow a$
3. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b,\ a \vee b\}$, $\alpha = a \vee \neg a$
4. $\mathcal{A} = \{a \wedge \neg b,\ \neg a \wedge b\}$, $\alpha = a$

Exercice 6
Si $\mathcal{A}$ est un ensemble de formules du calcul des propositions et α, β deux formules du calcul des propositions, on rappelle que $\mathcal{A} \models \alpha$ signifie que tout modèle de l’ensemble de formules $\mathcal{A}$ est un modèle de α.

1. Montrer que $\mathcal{A} \models \alpha$ si et seulement si $\mathcal{A} \cup \{\neg\alpha\}$ est contradictoire.
2. Montrer que $\mathcal{A} \cup \{\alpha\} \models \beta$ si et seulement si $\mathcal{A} \models \alpha \Rightarrow \beta$

Exercice 7
Mettre les formules suivantes sous forme clausale, (conjonction de clauses) et sous forme d’ensemble de clauses, dire de combien de clauses elles sont composées :

$f_1 = p \Rightarrow q$,
$f_2 = \neg(p \Rightarrow q)$,
$f_3 = p \Rightarrow (q \vee r)$,
$f_4 = (p \wedge q) \vee r$,
$f_5 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$,
$f_6 = (p \wedge r) \Rightarrow q$,
$f_7 = \neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow r)$,

$f_8 = p \Leftrightarrow q$
$f_9 = p \Rightarrow p \vee q$

Indications : éliminer le connecteur $\Rightarrow$ en remplaçant la formule $p \Rightarrow q$ par la formule équivalente $\neg p \vee q$ et utiliser les propriétés faisant intervenir les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.

Exercice 8

Soit P un ensemble de variables propositionnelles et $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des clauses construites sur P. On considère le système formel $(\mathcal{C}(P),\ \emptyset,\ \mathcal{R})$ où

$$\mathcal{R} = \{\ \frac{c_1 \vee a \vee c_2,\quad c_3 \vee \neg a \vee c_4}{c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee c_4}(resolution)\ \}$$

et c_1, c_2, c_3, c_4 sont des clauses et a est une variable propositionnelle.

On appelle réfutation dans un ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(P)$ une démonstration $(f_i)_{1 \le i \le n}$ avec hypothèses dans $\mathcal{H}$ dont la dernière clause f_i est la clause vide, on parle aussi de réfutation de $\mathcal{H}$.

On considère l'ensemble $P = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ de variable propositionnelles. Donner des réfutations des ensembles suivants :

1. $C_1 = \{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ \neg c,\ b\}$
2. $C_2 = \{\neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee b,\ a,\ \neg c\}$
3. $C_3 = \{\neg a \vee \neg b,\ \neg c \vee a,\ \ c,\ \neg d \vee b,\ d \vee b\}$
4. $C_4 = \{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d,\ \neg c \vee \neg e \vee \neg f,\ \neg a \vee \neg d,\ b \vee c,\ a \vee c,\ \neg c \vee e,\ \neg c \vee f\}$

Exercice 9

(Partiel 2011-2012). Soient les affirmations h_1, h_2, h_3 et h_4 et la conclusion c suivantes :

— h_1 : J'aime la ratatouille niçoise, ou je suis né un 29 février, ou je sais jouer du trombone à coulisse.
— h_2 : Si je sais jouer du trombonne à coulisse, alors j'aime la ratatouille niçoise ou je ne suis pas né un 29 février.
— h_3 : si je ne suis pas né un 29 février et si je n'aime pas la ratatouille niçoise, alors je ne sais pas jouer du trombonne à coulisse.
— h_4 : Je n'aime pas la ratatouille niçoise ou je ne sais pas jouer du trombone à coulisse.
— c : J'aime la ratatouille niçoise ou je suis né un 29 février, et je ne sais pas jouer du trombone à coulisse.

On introduit les trois variables propositionnelles r, f et t suivantes :

r : "J'aime la ratatouille niçoise"
f : "Je suis né un 29 février"
t : "Je sais jouer du trombone à coulisse"

1. Ecrire les affirmations h_1, h_2, h_3, h_4 et c sous forme de formules de la logique des propositions en utilisant les variables propositionnelles r, f et t.
2. Mettre sous forme de clauses les formules h_1, h_2, h_3, h_4 et $\neg \mathbf{c}$. Montrer que l'ensemble des clauses obtenues à partir des formules h_1, h_2, h_3 et h_4 est non contradictoire en donnant un modèle de cet ensemble.
3. En utilisant le principe de résolution de Robinson, déduire de la question précédente que **c** est une conséquence logique des hypothèses h_1, h_2, h_3 et h_4.

Exercice 10

Résoudre le problème logique suivant. Un homme déclare :

— Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content,
— Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors,
— Le jour où je ne mange pas, je ne suis pas content ou je dors,
— Le jour où je mange, je suis content ou je bois,
— Le jour où il ne pleut pas et où je suis content, je ne mange pas,
— Mais aujourd'hui je suis content.

Question : quel temps fait-il aujourd'hui ?

Indications : essayer de déduire qu"'il pleut" ou qu"'il ne pleut pas" à partir de ces affirmations, après avoir montré que l'ensemble des affirmations n'est pas contradictoire.