TELECOM Nancy *(ESIAL)*
Maths Numériques

feuille 2 : résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 *Découpages, quelques matrices particulières...*

1. Soit A une matrice (n, m), montrer que $A^j = Ae^j$ et que $A_i = (e^i)^\top A$ (rmq : ici e^j est le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et e^i le i ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
2. Soient A une matrice (n, m) et B une matrice (m, p). Montrer que $(AB)_i = A_i B$ et que $(AB)^j = AB^j$.
3. Montrer que le calcul de l'inverse d'une matrice A (n, n) revient à résoudre n systèmes linéaires de même matrice. Aide : poser $AA^{-1} = I$, utiliser un découpage par blocs suivant les colonnes, ce qui donne sur I : $I = (e^1|e^2|\dots|e^n)$.
4. Soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, on définit $A = xy^\top$. Quelles sont les dimensions de A ? Déterminer $KerA$ et ImA.
5. Soit $z \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $M = I + z(e^k)^\top$ (e^k étant le k ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) puis on applique cette matrice sur une matrice A de taille (n, m). Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ on a $(MA)_i = A_i + z_i A_k$. Ainsi chaque ligne i de la nouvelle matrice est égale à la ligne i de A plus la ligne k de A multipliée par le coefficient z_i.

Exercice 2 *Compléments au cours pour les matrices triangulaires*

1. Soient A et B deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures), montrer que la matrice AB est triangulaire inférieure (resp. supérieure) et que $(AB)_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.
2. Soit T une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) :
   (a) Calculer le déterminant de T ;
   (b) Quelles sont les valeurs propres de T ?
   (c) On suppose T inversible, montrer que T^{-1} est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) et que $(T^{-1})_{ii} = 1/t_{ii}$.

Exercice 3 *Méthode de Gauss-LU à la main !*

Résoudre le système linéaire $Ax = b$ par la méthode de Gauss (sans échange de lignes) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

On mettra bien en évidence les 3 matrices d'élimination successives $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ et $M^{(3)}$ et leurs inverses $L^{(k)}$. On rappelle qu'à l'étape k on a $A^{(k)} = M^{(k)} A^{(k-1)}$ et de même $b^{(k)} = M^{(k)} b^{(k-1)}$ avec :

$$M^{(k)} = I - z^{(k)} (e^k)^\top, \quad L^{(k)} = I + z^{(k)} (e^k)^\top$$

où le vecteur $z^{(k)}$ contient les coefficients permettant à l'étape k d'éliminer la variable x_k des équations $k + 1, \dots, n$.

Pour être proche des algorithmes effectivement utilisés, on remarquera qu'on peut enregistrer au fur et à mesure ces coefficients à la place des zéros obtenus, ce qui permet d'obtenir la matrice L de la factorisation LU de la matrice A sans calculs supplémentaires.

Dans un second temps vérifier que le vecteur $b^{(3)}$ (obtenu suite aux 3 étapes d'élimination de Gauss) est bien égal à la solution y du système linéaire $Ly = b$.

Exercice 4 *Unicité de la factorisation $A = LU$*

Soit A une matrice inversible qui admet une factorisation $A = LU$ (c'est à dire L est triangulaire inférieure à diagonale unité (tous les éléments diagonaux sont égaux à 1) et U est une matrice triangulaire supérieure. Démontrer l'unicité de la factorisation (aide : on suppose donc qu'il existe une autre factorisation $A = \tilde{L}\tilde{U}$ puis on montre que $\tilde{L} = L$ et $\tilde{U} = U$; pour cela on utilisera les résultats de l'exercice précédent sur les matrices triangulaires.).

Exercice 5 *Compte d'opérations*

1. écrire un algorithme effectuant la factorisation $A = LU$ en place (cf cours) et calculer le nombre d'opérations (la complexité de cet algorithme) en fonction de l'ordre n de la matrice.
2. étant donné une factorisation "en place" écrire l'algorithme de "descente remontée" permettant de résoudre un système linéaire $Ax = b$. De même calculer le nombre d'opérations.

Exercice 6 *Importance du pivotage dans la méthode de Gauss*

Montrer sur l'exemple ci-dessous que la méthode de Gauss sans pivotage donne des résultats catastrophiques si l'on considère une machine hypothétique travaillant avec l' ensemble de flottants $\mathbb{F}(10, 4, ., .)$ et une arithmétique de type IEEE (c-a-d que si u et v sont 2 flottants alors $u \odot v = fl(u \cdot v)$, tant que l'on ne rencontre pas d'*overflow* ou d'*underflow*, $\cdot$ désignant l'une des 4 opérations et $\odot$ l'opération machine correspondante).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5 \cdot 10^{-5} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 0 \end{array} \right.$$

Remarque : cet exemple explique pourquoi la factorisation standard est $PA = LU$ et non $A = LU$; la factorisation $PA = LU$ est obtenue en cherchant à chaque étape d'élimination le pivot le plus grand en valeur absolue. Une étape s'écrit alors matriciellement :

$$A^{(k)} = M^{(k)} P^{(k)} A^{(k-1)}$$

où $P^{(k)}$ est une matrice de permutation élémentaire (c-a-d une permuation qui n'échange que 2 éléments, ici k avec $i \geq k$ où i est l'indice du pivot choisi). On a vu dans le cours que si A est inversible alors une telle factorisation existe toujours. Son utilisation pour résoudre un système linéaire est toujours simple : on procède comme avec une factorisation $A = LU$ mais en l'appliquant sur le second membre $b' = Pb$.