III. Modèles dérivés :
Les Réseaux de Petri (RdP)

1. Généralités
2. Formalisme de base
3. Algèbre linéaire
4. Propriétés des RdP

RdP : Généralités

- Origine :**Travaux de Carl Adam Petri** (thèse en 1962)

- Le RdP est un **outil de modélisation** qui permet l'étude de systèmes dynamiques et discrets en décrivant les relations entre des conditions et des évènements.

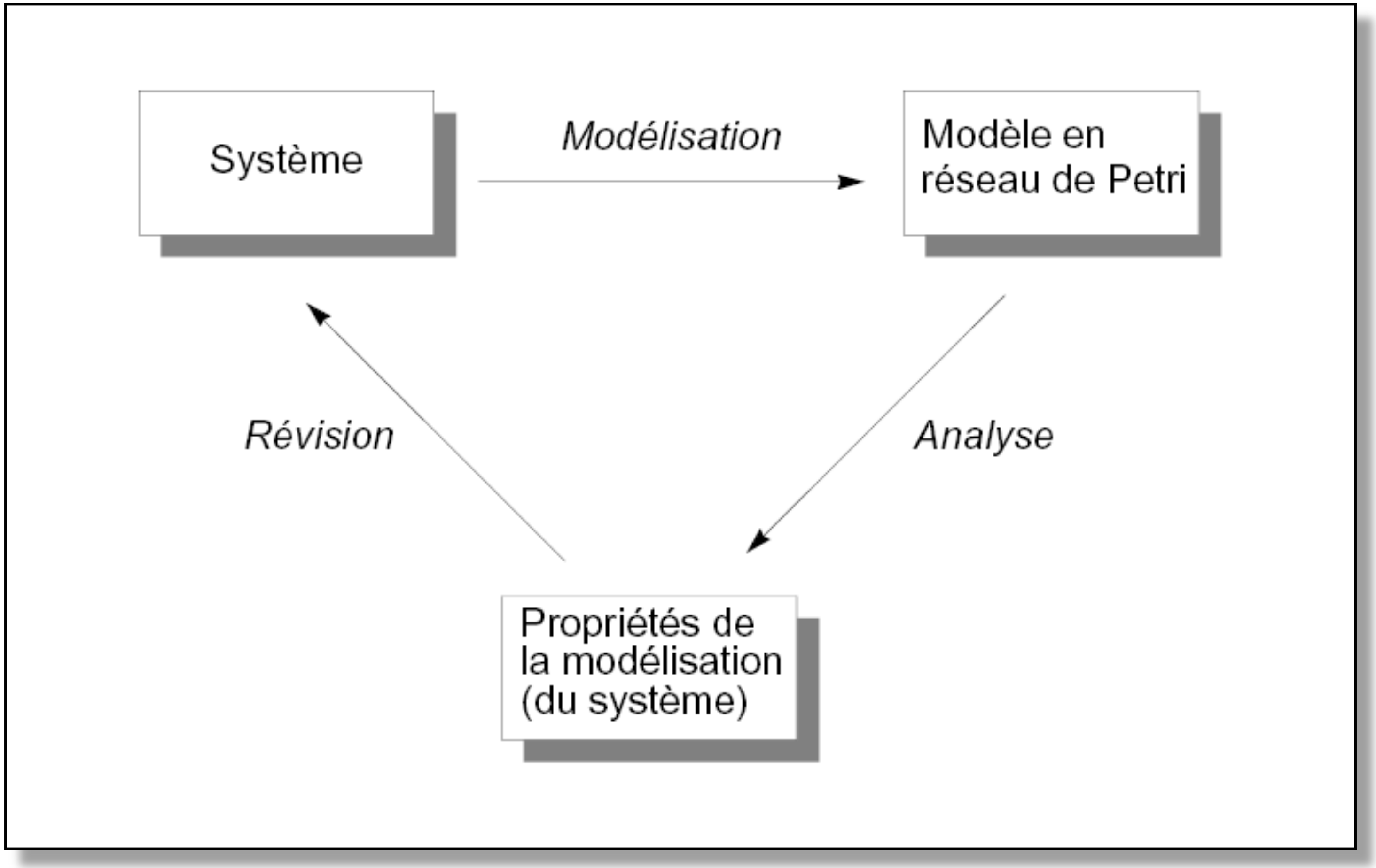
- Intérêt : Allie une syntaxe graphique simple et une sémantique fondée sur une représentation mathématique.

- L'analyse d'un RdP permet de révéler des propriétés importantes du système modélisé concernant sa structure (bonne conception) et son comportement dynamique (évolution attendue).

- Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration le cas échéant.

RdP : Généralités

Schéma de la démarche générale :



RdP : Généralités
Présentation Informelle

Condition :

- Une condition est un **prédicat** ou une **description logique** d'un état du système.
- Une condition est **vraie ou fausse**.
- Un **état du système** peut être décrit comme un **ensemble de conditions**.

Evènement :

- Les évènements sont les **actions** qui se déroulent dans le système
- Le déclenchement d'un évènement dépend de l'état du système.

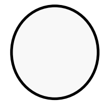
Déclenchement, Pré-condition, Post-Condition :

- Les conditions nécessaires au déclenchement d'un évènement sont les **pré-conditions** de l'évènement.
- Lorsqu'un évènement se produit, certaines de ces pré-conditions peuvent cesser d'être vraies alors que d'autres conditions, appelées **post-conditions** de l'évènement deviennent vraies

RdP : Généralités
Présentation Informelle

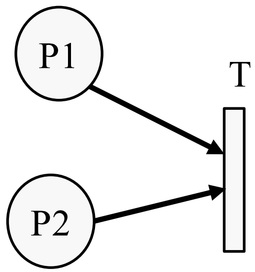
Modélisation d'un système Evènement-Condition en RdP

- **Condition** : modélisée par une PLACE

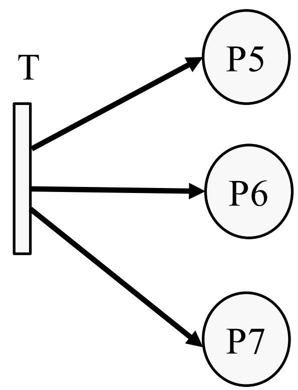


- **Evènement** : modélisé par une TRANSITION

- **Pré-conditions** d'une Transition : modélisé par des ARCS Place-Transition

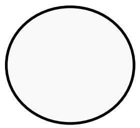


- **Post-Conditions** d'une Transition :modélisé par des ARCS Transition-Place

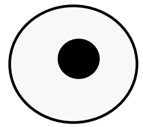


Modélisation d'un système Evènement-Condition en RdP

Satisfaction d'une Condition : modélisée par un JETON (ou Marque)

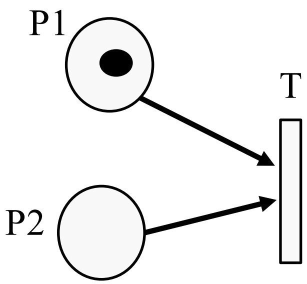


Condition Fausse
(Place non marquée)

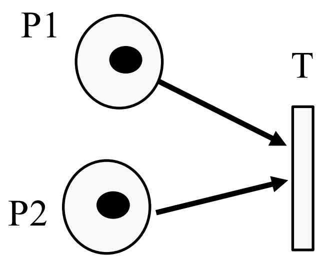


Condition Vraie
(Place marquée – 1 jeton)

Condition de déclenchement (de tir ou de franchissement) d'une transition :



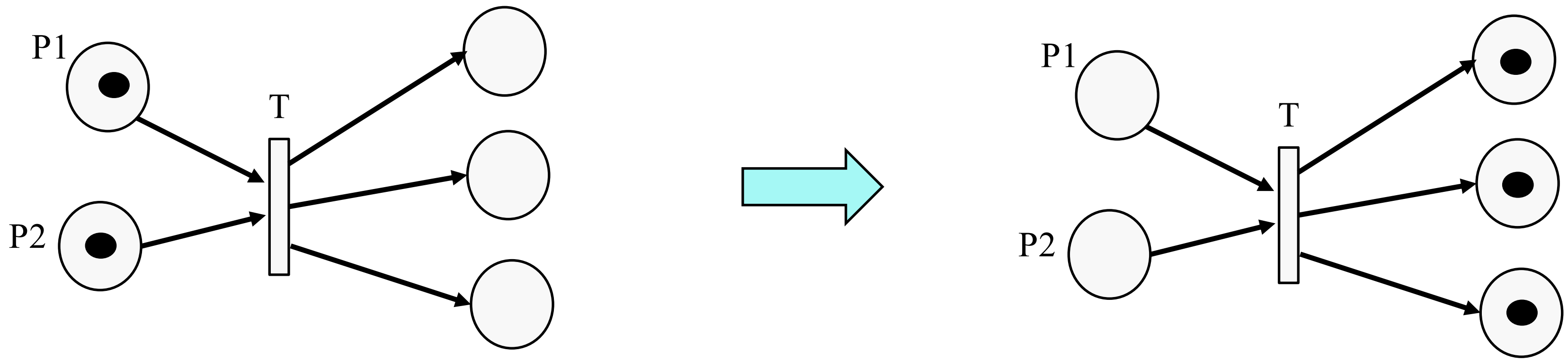
Transition T non franchissable



Transition T franchissable

Modélisation d'un système Evènement-Condition en RdP

Déclenchement (tir ou franchissement) d'une transition franchissable:



Situation avant franchissement *Situation après franchissement*

Une transition est validée, franchissable ou tirable lorsque toutes ses places d'entrée contiennent au moins une marque. Le franchissement (ou tir) d'une transition consiste à enlever une marque dans chaque place en amont d'une transition et à ajouter une marque dans chaque place en aval.

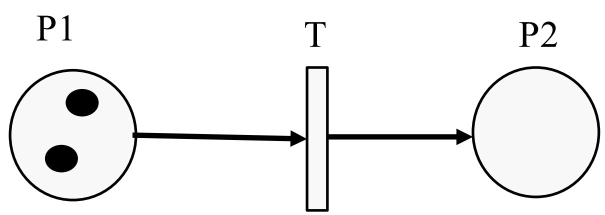
Modélisation d'un système avec RESSOURCES en RdP

Pour modéliser certains systèmes, il est plus logique de raisonner en terme d'ensemble de ressources (ou flux: données, tâches, requêtes, objets)

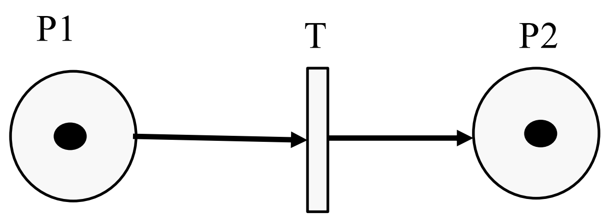
Les places peuvent contenir plusieurs plusieurs jetons. Le nombre de jetons contenus dans une place correspond au nombre de ressources qu'elle possède.

Les jetons d'une place sont indifférentiables

Ces ressources (jetons) sont consommées et produites par les évènements du système.



Situation avant franchissement de T



Situation après franchissement de T

RdP : Généralités

Classification des RdP

On distingue :

- Les RdP Autonomes/ Non Autonomes

- Un RdP Autonome décrit le fonctionnement d'un système qui **évolue de façon autonome**, c'est-à-dire dont les instants de franchissement ne sont pas connus ou pas indiqués.
- Un RdP Non Autonome décrit le fonctionnement d'un système dont **l'évolution est conditionnée par des évènements externes ou par le temps** (RdP temporisés, interprétés).

NB: Seuls les RdP Autonomes seront présentés dans ce cours.

- Les RdP Ordinaires / Généralisés

- Un RdP Ordinaire est un RdP dans lequel tous les arcs sont de poids 1.
- Un RdP Généralisé est un RdP dans lequel les poids des arcs ne sont pas tous forcément égaux à 1.

- Les RdP Non Marqué / Marqué

- Un RdP Non Marqué est un RdP dans lequel aucune place ne contient de marques (il sert principalement à étudier les propriétés structurelles du système modélisé).
- Un RdP Marqué est un RdP qui contient un marquage de certaines places.

RdP : Formalisme de base

- Définitions
- Représentation graphique
- Evolution du marquage
- Représentation matricielle
- Propriétés structurelles

Formalisme de base
Définitions

<u>Réseau de Petri (ORDINAIRE Non Marqué) </u>: R = {P, T, Pre, Post}

- P = ensemble fini non vide de places

- T = ensemble fini non vide de transitions

- Pre = $P \times T \rightarrow \{0,1\}$: application d'incidence avant (places d'entrée)
  - Pre(p, t) = 1 s'il existe un arc entre p et t, 0 sinon

- Post = $P \times T \rightarrow \{0,1\}$: application d'incidence arrière (places de sortie)
  - Post(p, t) = 1 s'il existe un arc entre t et p, 0 sinon

Formalisme de base
Définitions

<u>Réseau de Petri GENERALISE Non Marqué</u> : R = {P, T, Pre, Post}

- P = ensemble fini non vide de places
- T = ensemble fini non vide de transitions
- Pre = $P \times T \rightarrow N$: application d'incidence avant (places d'entrée)
  - Pre(p, t) = poids de l'arc entre p et t s'il existe (nombre de jetons ou marques nécessaires dans la place p pour le franchissement de la transition t)
- Post = $P \times T \rightarrow N$: application d'incidence arrière (places de sortie)
  - Post(p, t) = poids de l'arc entre t et p s'il existe (nombre de jetons ou marques produits dans la place p lors du franchissement de la transition)

Formalisme de base
Définitions

RdP Marqué : N = {R,M}

- Le marquage M d'un RdP R=(P, T, Pre, Post) définit son état.

Formellement, un marquage est une application:

$$M : P \rightarrow N$$

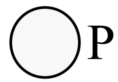
donnant pour chaque place Pi le nombre de jetons ou marques $M(Pi) = mi$ que la place contient.

- Le marquage d'un RdP est un vecteur colonne $M_i = (m1, m2, \ldots mp)^T$

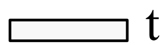
- Le marquage initial est généralement noté M_0.

Formalisme de base
Représentation Graphique

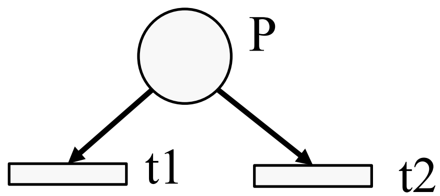
- Place (Condition) :



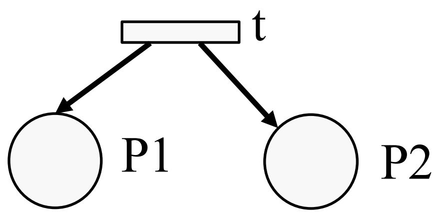
- Transition (Evénement) :



- Arc Place -> Transition (Précondition) :



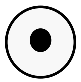
- Arc Transition -> Place (Postcondition) :



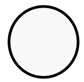
Formalisme de base
Représentation Graphique

Marquage :

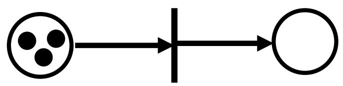
- Le marquage d'un RdP est précisé par la présence à l'intérieur des places d'un nombre fini (>=0) de marques ou de jetons :


P

Place marquée : Vrai


P

Place vide : Faux

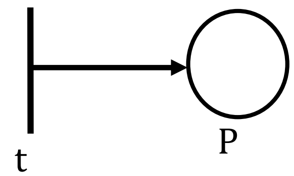


Marquage de la place : Nombre de ressources

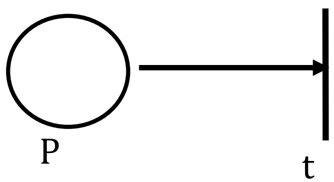
Remarque : on peut avoir un nombre quelconque non borné de jetons dans une place

Formalisme de base
Représentation Graphique

Transition source :
Une transition source est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée (elle est toujours validée)



Transition puits :
Une transition puits est une transition qui ne comporte aucune place de sortie



Formalisme de base
Représentation Graphique

<u>Exemple</u> : RdP Généralisé Marqué

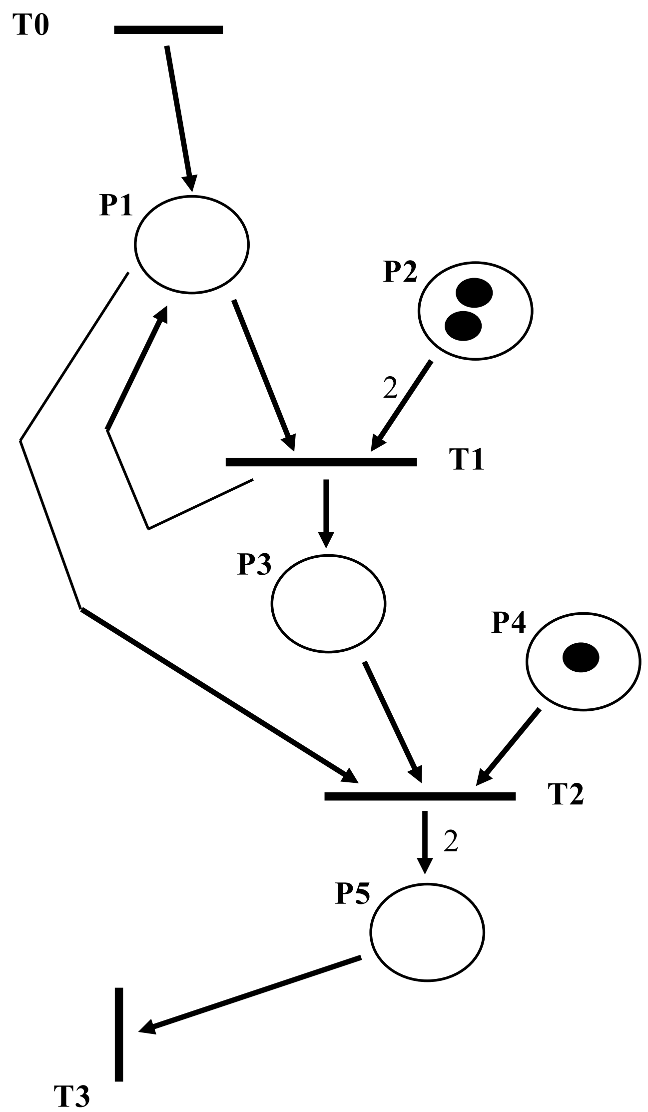
- 5 places P = {P1, P2, P3, P4, P5}
- 4 transitions T= {T0, T1, T2, T3}
- 10 arcs orientés

T0 : transition source

T3 : transition puits

-Marquage M = (m1, m2, ….) ici M=(0, 2, 0, 1, 0) ^{T}

À tout instant le marquage d'un RdP représente l'état du système modélisé



Formalisme de base
Evolution du marquage

- Validation d'une transition :

Une transition t est validée (ou franchissable ou tirable) si les places d'entrée de t possèdent chacune un nombre de marques supérieur ou égal au poids des arcs reliant ces places à la transition.

- Franchissement d'une transition :

Le franchissement (ou tir) d'une transition t consiste :

•à enlever dans chaque place d'entrée un nombre de marques égal au poids de l'arc reliant chaque place à la transition,

•et à ajouter dans chaque place de sortie, un nombre de marques égal au poids de l'arc reliant la transition à chacune de ces places.

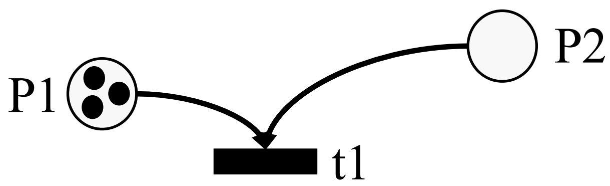
Remarque :

•Une transition validée n'implique pas qu'elle sera immédiatement franchie : un RdP ne peut évoluer que par franchissement d'une seule transition à la fois.

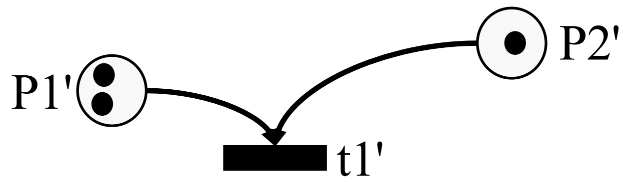
Formalisme de base
Evolution du marquage

Exemple pour un RdP Ordinaire :

- Validation d'une transition = satisfaction de toutes les places pré-conditions de la transition



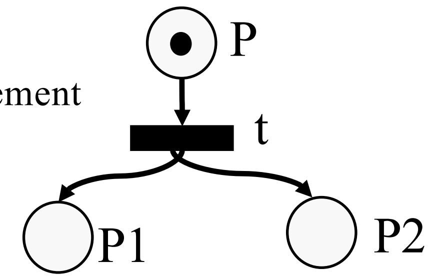
non franchissable



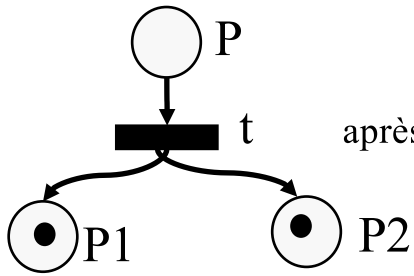
franchissable

- Franchissement d'une transition = satisfaction de toutes les places post-conditions de la transition

avant franchissement



M1=[1 0 0]



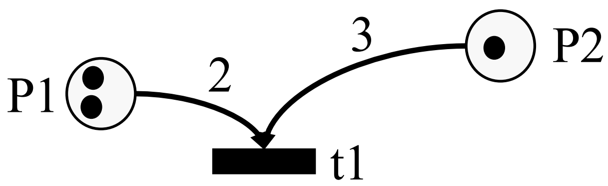
après franchissement

M2=[0 1 1]

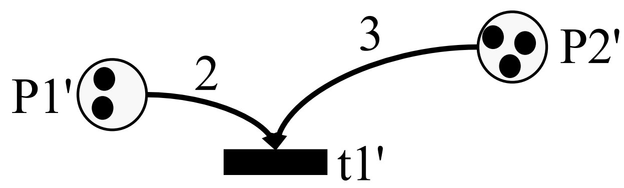
Formalisme de base
Evolution du marquage

<u>Exemple pour un RdP Généralisé :</u>

- Validation d'une transition = satisfaction de toutes les places pré-conditions de la transition



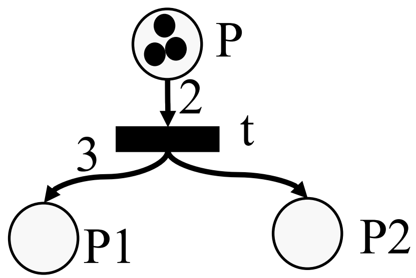
non franchissable



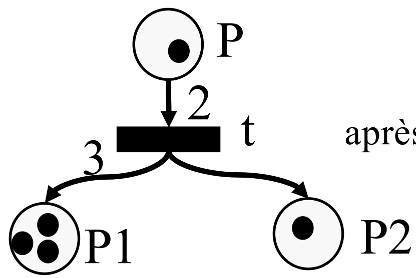
franchissable

- Franchissement d'une transition = satisfaction de toutes les places post-conditions de la transition

avant franchissement



M1=[3 0 0]



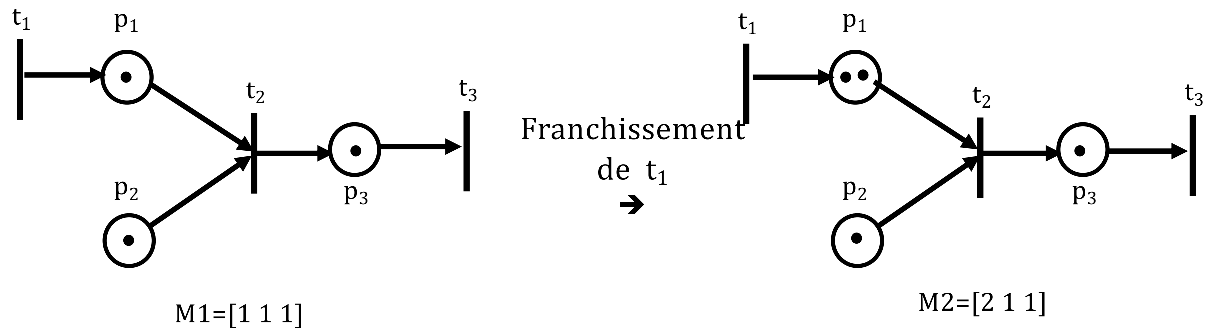
après franchissement

M2=[1 3 1]

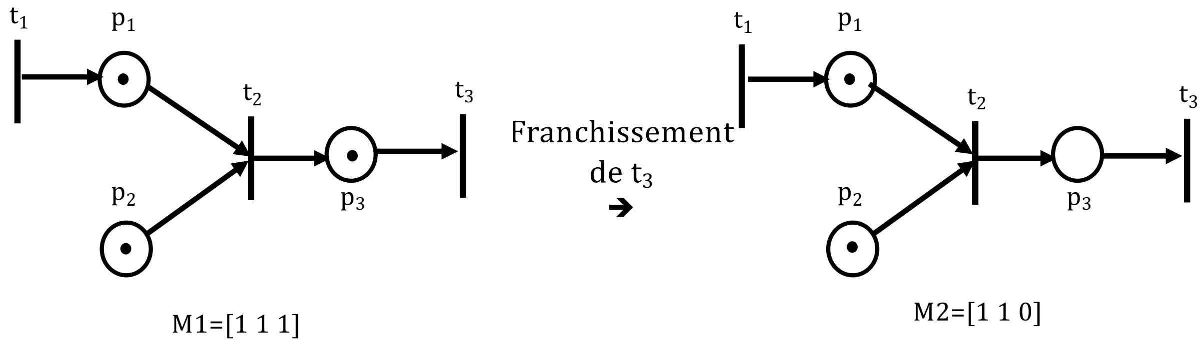
NB : Le nombre de marques ne se conserve pas au franchissement des transitions

Formalisme de base
Evolution du marquage

- Franchissement d'une transition source: une transition source est <u>toujours validée</u>. Son franchissement <u>ajoute des marques</u> dans chacune de ses places de sortie



- Franchissement d'une transition puits: le franchissement d'une transition puits <u>enlève des marques</u> dans chacune de ses places d'entrée.



Formalisme de base
Evolution du marquage

Définition formelle :

- **Validation d'une transition :**

Une transition t est validée si pour toute place d'entrée p de t :

$$\underline{M(p) > Pre(p,\ t)}$$

- **Franchissement d'une transition :**

Si une transition t est franchissable à partir du marquage M, alors le nouveau marquage de toute place p est :

$$\underline{M'(p) = M(p) - Pre(p,\ t) + Post(p,\ t)}$$
$$= M(p) + C(p,\ t)$$

avec $\underline{C = Post - Pre}$ (C est la matrice d'incidence)

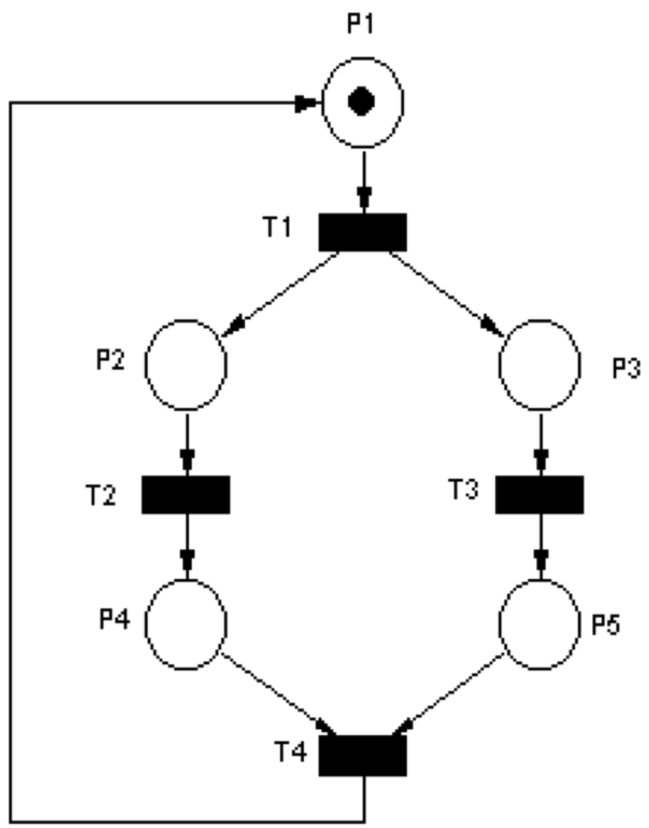
on note M(t > M' (tir de la transition t à partir du marquage M donne le marquage M')

Formalisme de base
Représentation matricielle

Les applications d'incidence avant (Pré) et arrière (Post) sont représentées par des matrices à p lignes (nombre de places) et n colonnes (nombre de transitions).

Les éléments de la matrice indique le poids de l' arc s'il existe et 0 sinon.

Exemple d'un RdP Ordinaire : **C= Post -Pré**



Etablir les matrices:

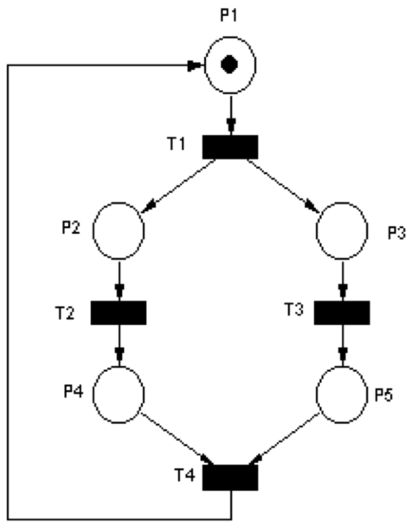
- *Pré:*

- *Post:*

- *C:*

Formalisme de base
Représentation matricielle

Exemple d'un RdP Ordinaire :



Règles de grammaire :

T1: P1 → P2P3

T2: P2 → P4

T3: P3 → P5

T4 : P4P5 → P1

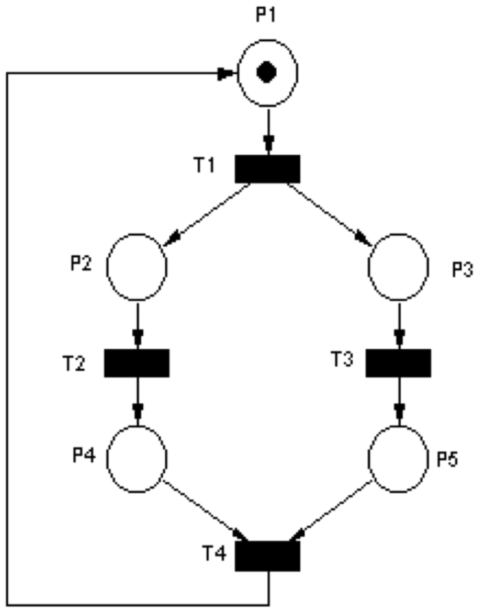
$$\text{Pré} = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Post} = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Formalisme de base
Représentation matricielle

La matrice d'incidence d'un RdP est la matrice :

C = Post - Pre



$$C = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

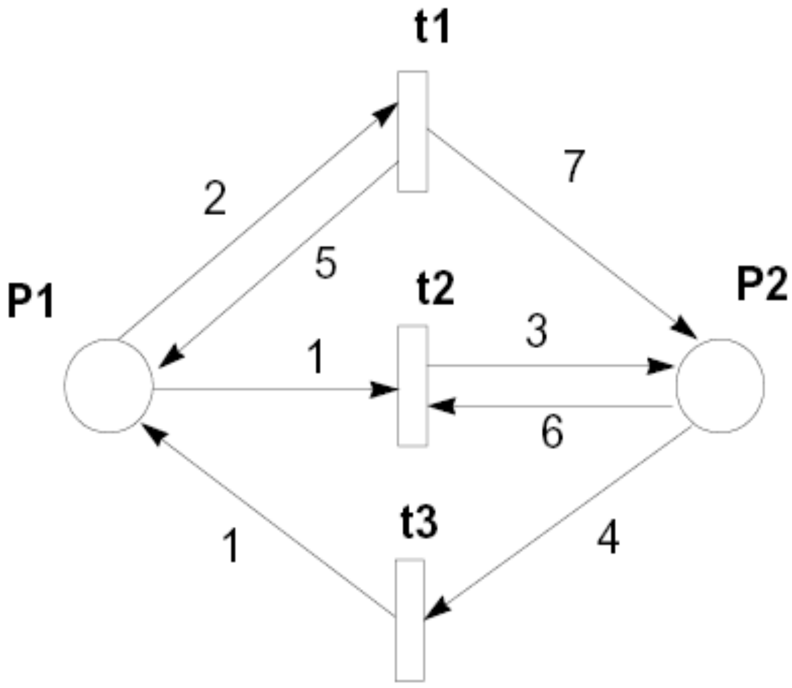
La matrice d'incidence est indépendante du marquage et indique sur chaque colonne la ***modification du marquage*** *apportée par le franchissement de la transition correspondante.*

Formalisme de base
Représentation matricielle

Les applications d'incidence avant (Pré) et arrière (Post) sont représentées par des matrices à p lignes (nombre de places) et n colonnes (nombre de transitions).

Les éléments de la matrice indique le poids de l'arc s'il existe et 0 sinon.

Exemple d'un RdP Généralisé: **C= Post -Pré**

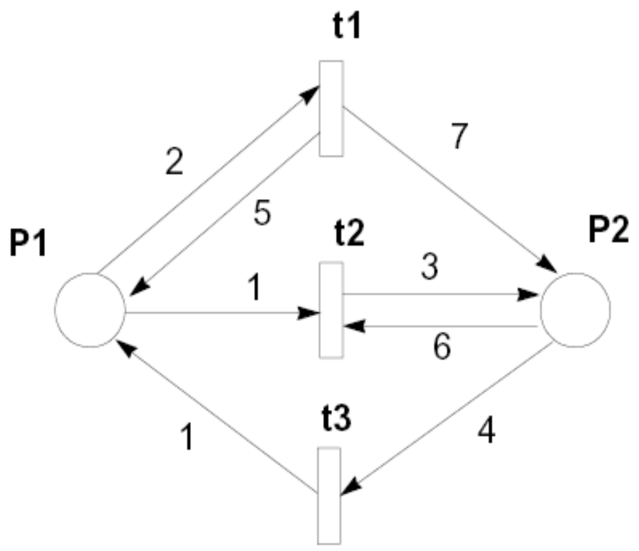


Etablir les matrices:

- *Pré:*
- *Post:*
- *C:*

Formalisme de base
Représentation matricielle

Exemple d'un RdP Généralisé: **C= Post -Pré**



Règles de grammaires :

t1: $P1^2 \rightarrow P1^5P2^7$

t2: $P1P2^6 \rightarrow P2^3$

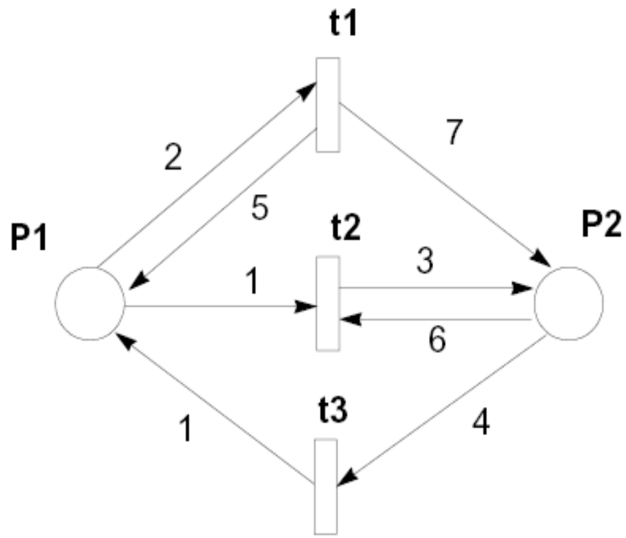
t3: $P2^4 \rightarrow P1$

$$\begin{array}{c|ccc} Pré & t1 & t2 & t3 \\ \hline P1 & 2 & 1 & 0 \\ P2 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} Post & t1 & t2 & t3 \\ \hline P1 & 5 & 0 & 1 \\ P2 & 7 & 3 & 0 \end{array}$$

Formalisme de base
Représentation matricielle

Exemple d'un RdP Généralisé: **C= Post -Pré**



$$
\begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \end{array}
\begin{array}{c} Post \quad t1 \quad t2 \quad t3 \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
-
\begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \end{array}
\begin{array}{c} Pré \quad t1 \quad t2 \quad t3 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \end{array}
\begin{array}{c} C \quad t1 \quad t2 \quad t3 \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \end{array}
$$

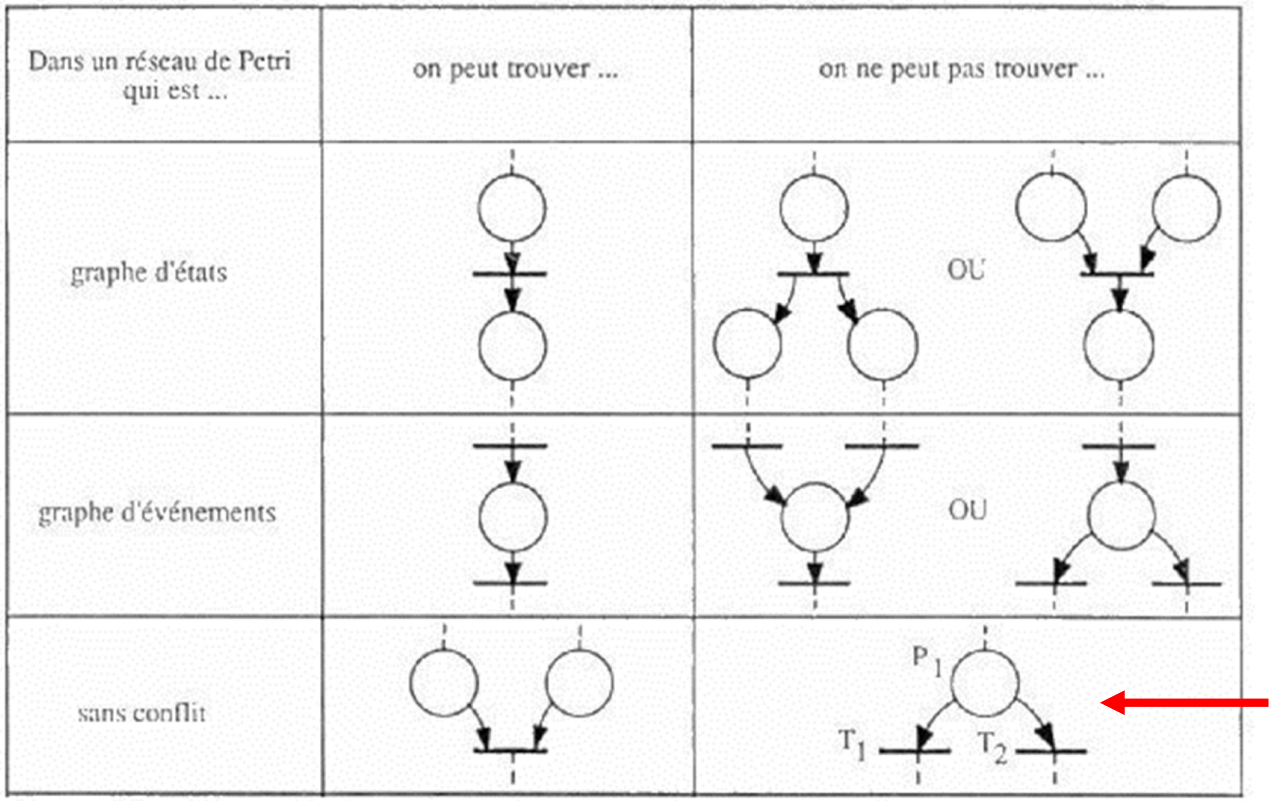
La matrice d'incidence est indépendante du marquage et indique sur chaque colonne la ***modification du marquage*** *apportée par le franchissement de la transition correspondante.*

Formalisme de base
Propriétés structurelles

- **Graphe d'état** : toute transition a **exactement 1 place d'entrée et 1 place de sortie.**

- **Graphe d'événement** : toute place a **exactement 1 transition d'entrée et 1 transition de sortie.**

- **RdP sans conflit** : chacune des places du RdP **a au plus une transition de sortie.**

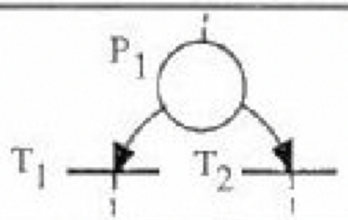
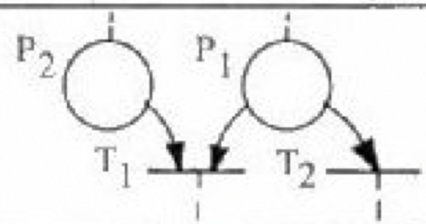
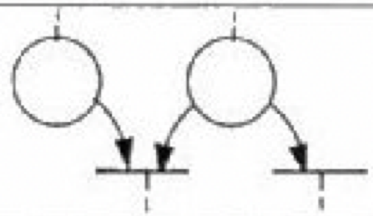
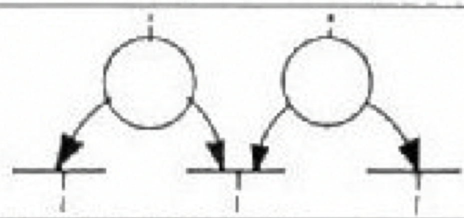


Conflit <P1, (T1, T2)>

Formalisme de base
Propriétés structurelles

- **RdP à choix libre :** pour tout conflit <Pi, (Tj, Tk)>, **ni Tj ni Tk n'a d'autre place d'entrée.**

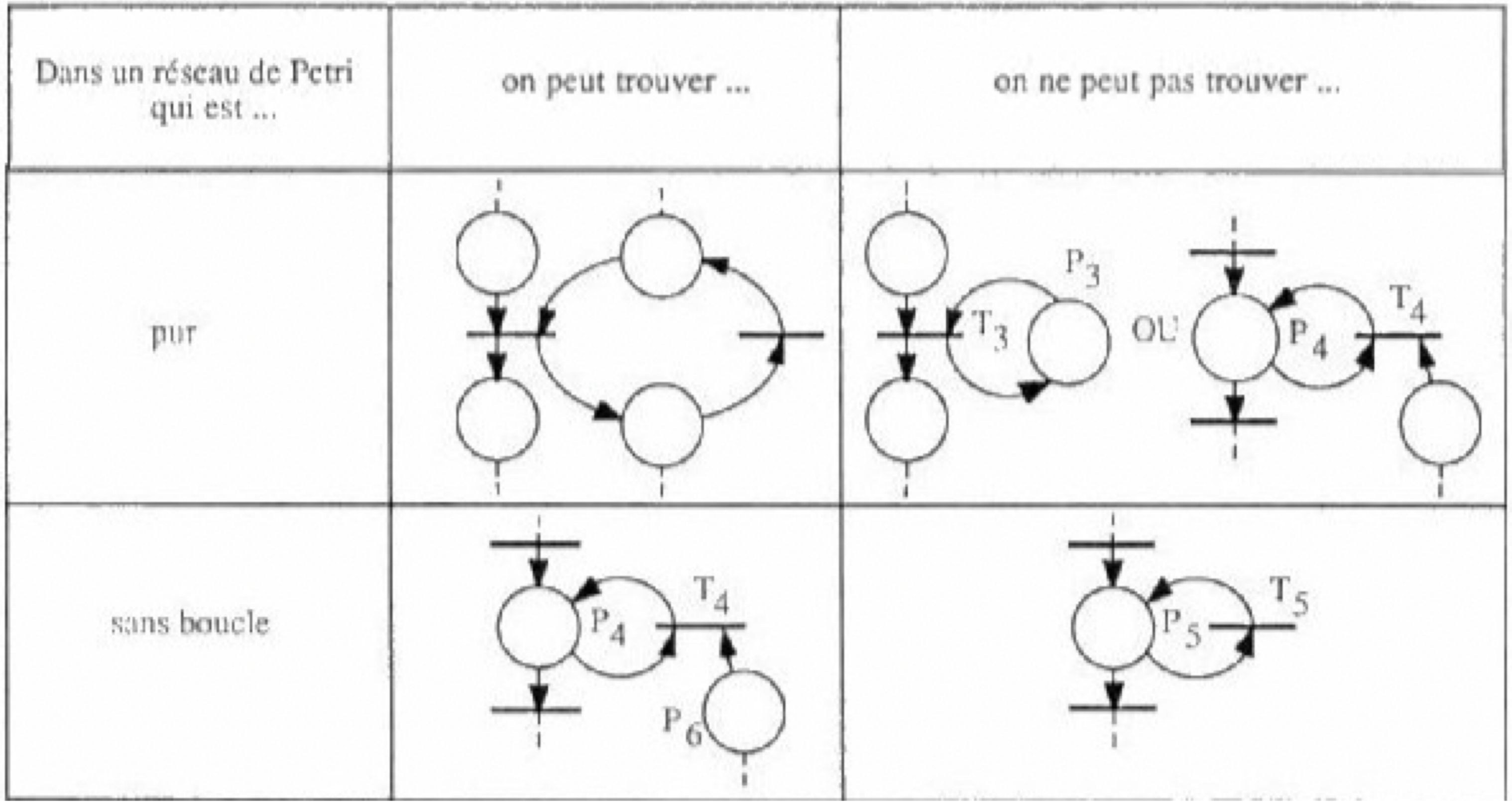
- **RdP simple :** chacune des transitions du RdP n'est concernée que par **au plus un conflit.**

Dans un réseau de Petri qui est ...	on peut trouver ...	on ne peut pas trouver ...
à choix libre		
simple		

Formalisme de base
Propriétés structurelles

- **RdP pur :** il n'existe pas de transition du RdP ayant **une place d'entrée qui soit aussi place de sortie** de cette même transition.

- **RdP sans boucle :** s'il existe une transition Tj et une place Pi qui est à la fois place d'entrée et place de sortie de Tj, alors Tj a **au moins une autre place d'entrée**



© R. David & H. Alla

Formalisme de base
Propriétés structurelles (Rappel)

- **Graphe d'état** : toute transition a **exactement 1 place d'entrée et 1 place de sortie.**
- **Graphe d'événement** : toute place a **exactement 1 transition d'entrée et 1 transition de sortie.**
- **RdP sans conflit** : chacune des places du RdP **a au plus une transition de sortie.**
- **RdP à choix libre** : pour tout conflit <Pi, (Tj, Tk)>, **ni Tj ni Tk n'a d'autre place d'entrée.**
- **RdP simple** : chacune des transitions du RdP n'est concernée que par **au plus un conflit.**
- **RdP pur** : il n'existe pas de transition du RdP ayant **une place d'entrée qui soit aussi place de sortie** de cette même transition.
- **RdP sans boucle** : s'il existe une transition Tj et une place Pi qui est à la fois place d'entrée et place de sortie de Tj, alors Tj a **au moins une autre place d'entrée**

III. Modèles dérivés :
Les Réseaux de Petri (RdP)

1. Généralités
2. Formalisme de base
3. Algèbre linéaire
4. Propriétés des RdP

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

- Séquence de franchissement :

Soit un RdP R=(P, T, Pre, Post) de marquage initial M_0,

Soit $t_1\ t_2 \ldots\ t_n$ des transitions de T telles que :

$$M_0\ (t_1 >\ M_1 (t_2 >\ M_2 \ldots\ \ t_n > M_n$$

alors, la séquence de transitions $t_1\ t_2 \ldots\ t_n$ est appelée séquence de franchissement à partir de M_0

- Equation fondamentale d'un RdP:

$$\underline{M_n = M_i + C\ .\ V_s}$$

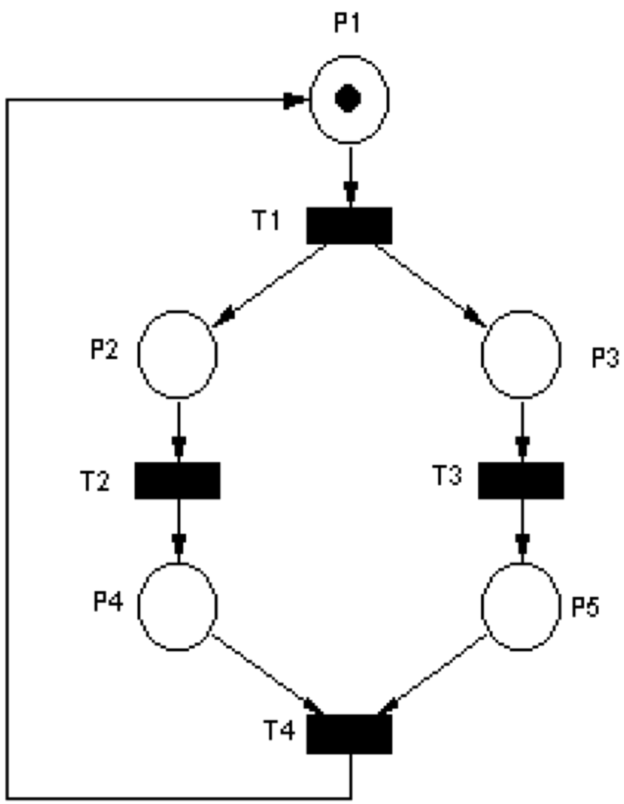
où V_s est le *vecteur caractéristique* de la séquence de franchissement $s = t_1\ t_2 \ldots\ t_n$ tel que $V_s(t_i)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t_i dans s

On note : $M_i\ (s > M_n$

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

- **Exemple 1: Séquence de franchissement s = T1T2T3**

Calcul de M0 (s>M1 : Marquage M1 atteint à partir du marquage M0 par franchissement de la séquence (T1 T2 T3)



$$C = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Vs = ?$$

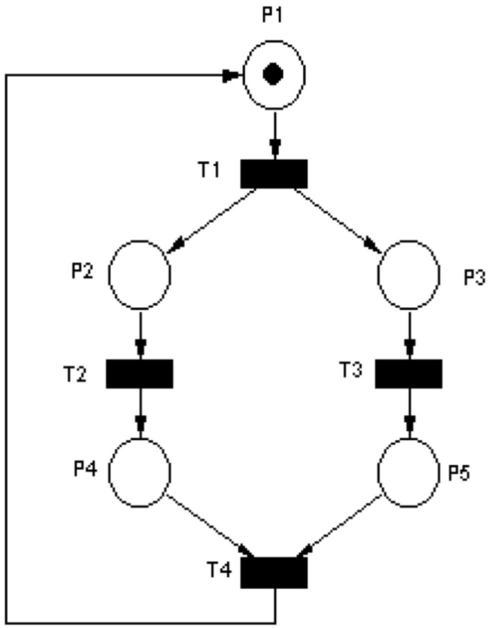
$$M_1 = ?$$

- **Equation fondamentale : $M_1 = M_0 + C \,.\, V_s^T$**

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

- **Exemple 1: Séquence de franchissement s = T1T2T3**

Calcul de M0 (s>M1



$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Vs} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = M_0 + C \, . \, V_s$$

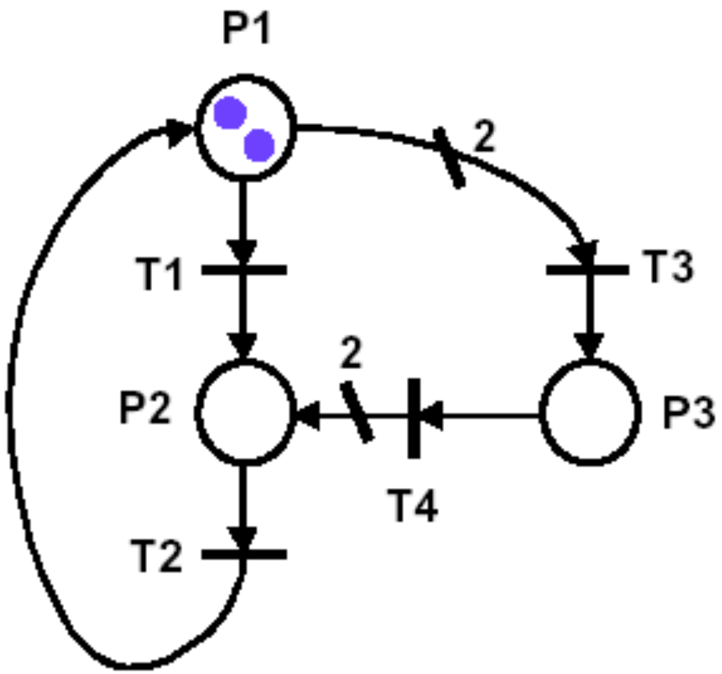
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

Exemple 2 : Séquence de franchissement s= T1T2T3T4T2

Calcul de M0 (s>M1

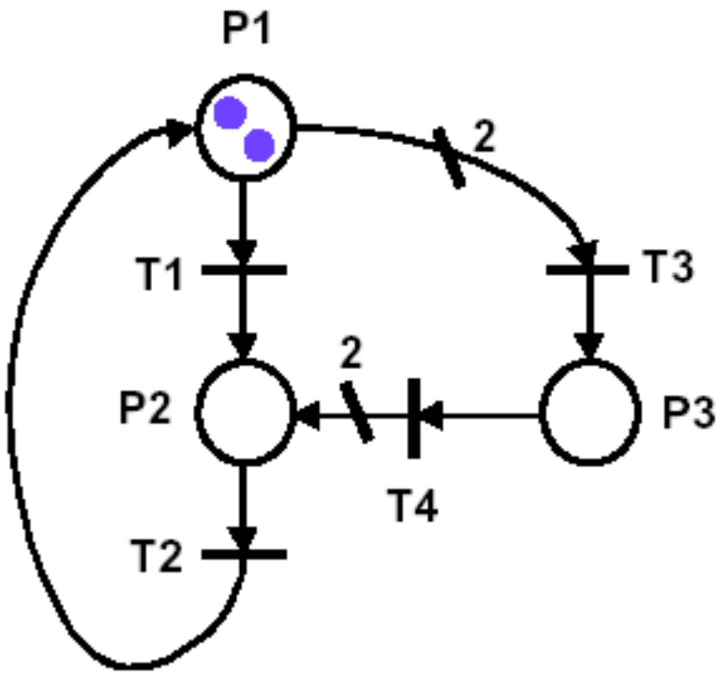


Calcul du marquage atteint à partir du marquage M0 = (2,0,0) par franchissement de la séquence (T1 T2 T3 T4 T2)

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

Exemple 2 : Séquence de franchissement s= T1T2T3T4T2

Calcul de M0 (s>M1



Marquage atteint à partir du marquage M0 = (2,0,0) par franchissement de la séquence (T1 T2 T3 T4 T2)

Vs=(1,2,1,1)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

Remarque importante :

- ATTENTION ! Le vecteur caractéristique ne fait que compter le nombre d'occurrences des transitions. Il ne donne pas, comme la séquence, l'ordre dans lequel celles-ci ont lieu.

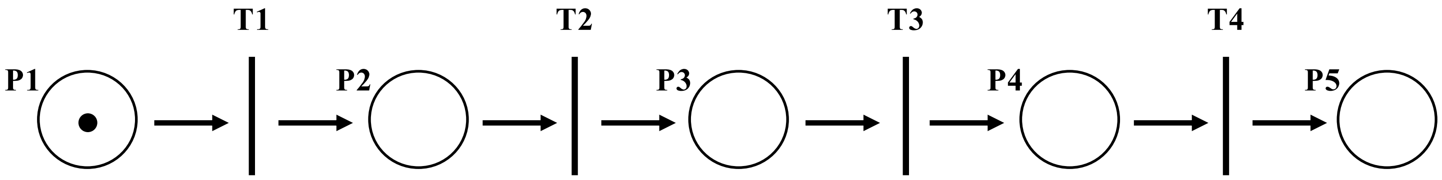
Exemple : pour $T = \{T1, T2, T3\}$, si $V_s = (1, 2, 1)^T$,
le vecteur V_s est le vecteur caractéristique de toutes les séquences de franchissement suivantes :

<T1, T2, T3, T2>, <T3, T1, T2, T2>, <T3, T2, T2, T1>,
<T1, T3, T2, T2>, <T1, T2, T2, T3>, …

Algèbre linéaire
Séquence de franchissement

Remarque importante :

- **<u>ATTENTION</u>** ! L'équation fondamentale permet de calculer le marquage atteint après franchissement d'une séquence de transitions. Elle ne permet pas de dire que la séquence est franchissable !!



La séquence <T1, T2, T3> est franchissable,

Les séquences <T2, T1, T3>, <T3, T2, T1>, <T2, T3, T1> ne le sont pas !

Elles ont pourtant le même vecteur caractéristique. L'équation fondamentale donnera donc le même résultat pour les quatre.

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Marquages accessibles et graphe des marquages:

- Marquages accessibles
  - Un marquage M_i est un *marquage accessible* à partir de M_0 s'il existe une séquence de transitions s tel que :

$$M_0 \ (s > M_i$$

  - L'ensemble des marquages accessibles depuis M_0 , noté $A(R,M_0)$ correspond à l'ensemble des marquages atteint après franchissement des transitions franchissables les unes après les autres

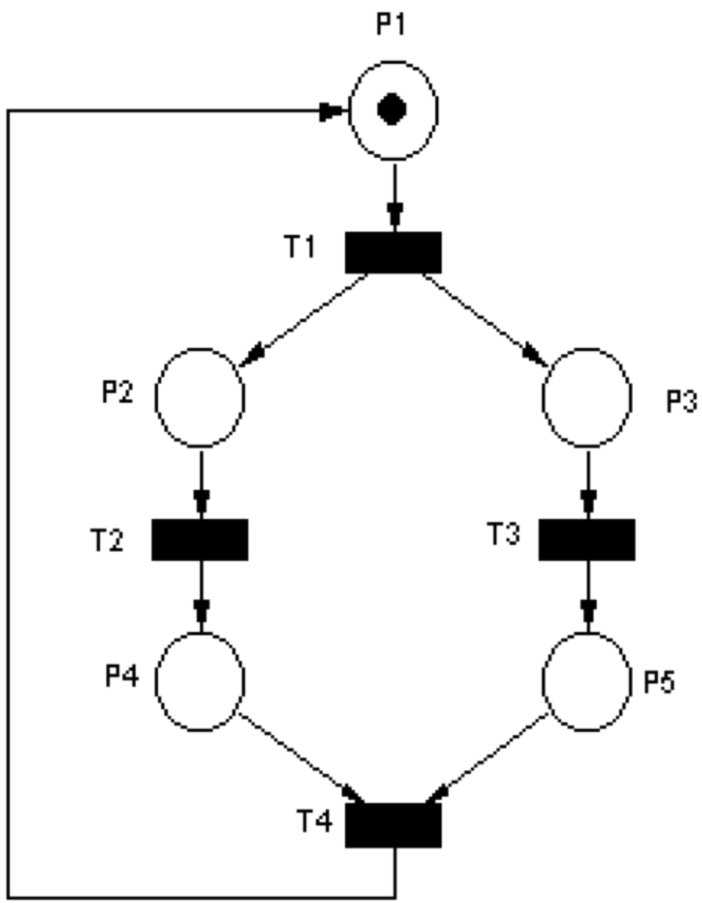
- Graphe des marquages accessibles
  - Le *graphe des marquages accessibles* est le graphe ayant comme sommets les marquages de $A(R,M_0)$ et tel qu'il existe un arc entre deux sommets M_1 et M_2 si et seulement si

$$M_1 \ (t > M_2$$

    où t est une transition du RdP

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Exemple : graphe des marquages accessibles

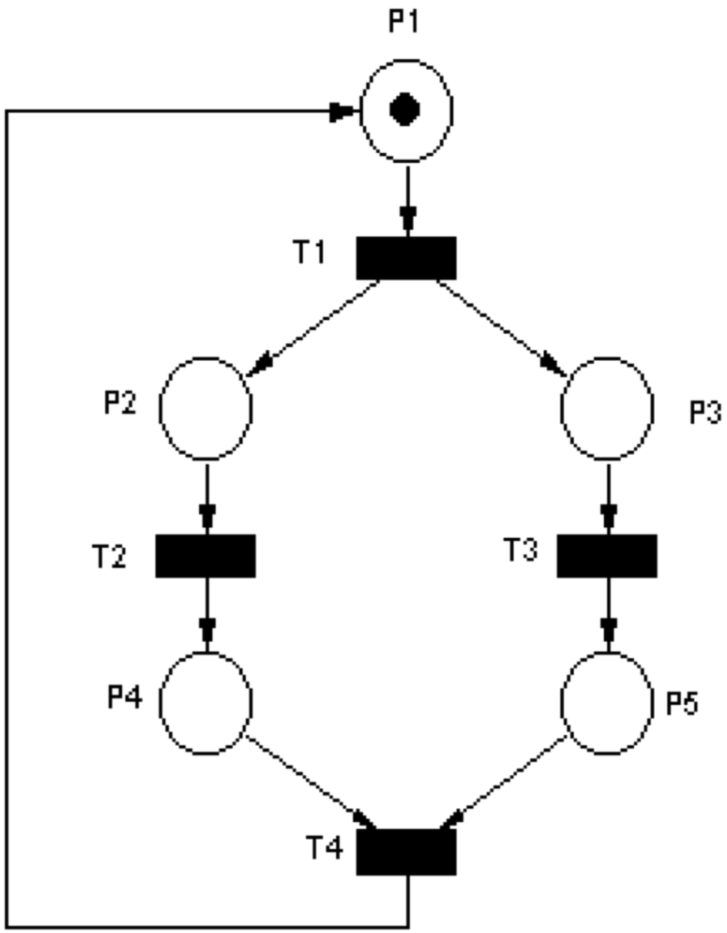


Graphe des marquages accessibles : graphe où les sommets sont tpus les marquages atteignables et les arcs, les transitions qui permettent de passer d'un marquage à un autre. Les marquages identiques sont « fusionnés ».

A partir du marquage initial : M0 = (1,0,0,0,0)
ce RdP peut atteindre les marquages :
M1 = (0,1,1,0,0) M2 = (0,0,1,1,0)
M3 = (0,1,0,0,1) M4 = (0,0,0,1,1)

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Exemple : représenter le graphe des marquages accessibles

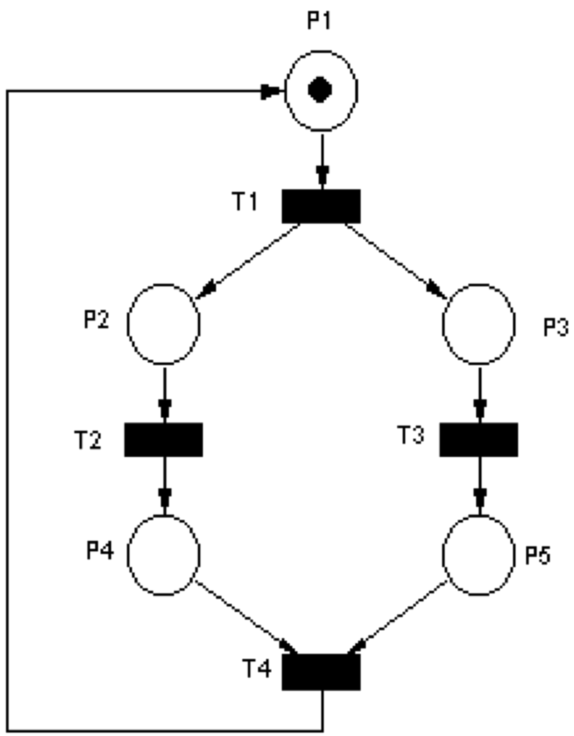


Règles de grammaire :

Graphe des marquages accessibles :

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Exemple : graphe des marquages accessibles



Règles de grammaire:

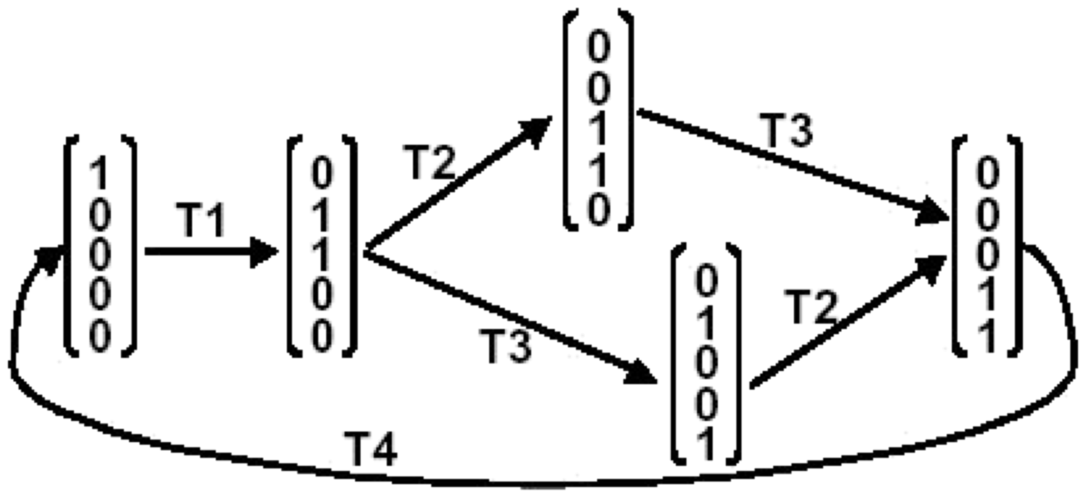
T1: P1 → P2P3

T2: P2 → P4

T3: P3 → P5

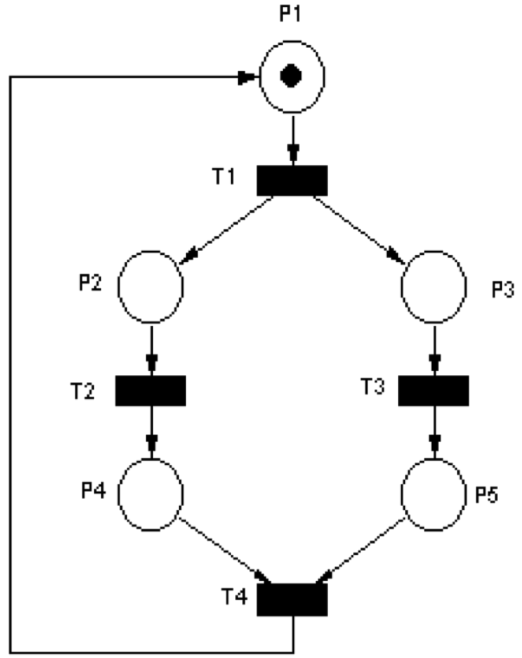
T4 : P4P5 → P1

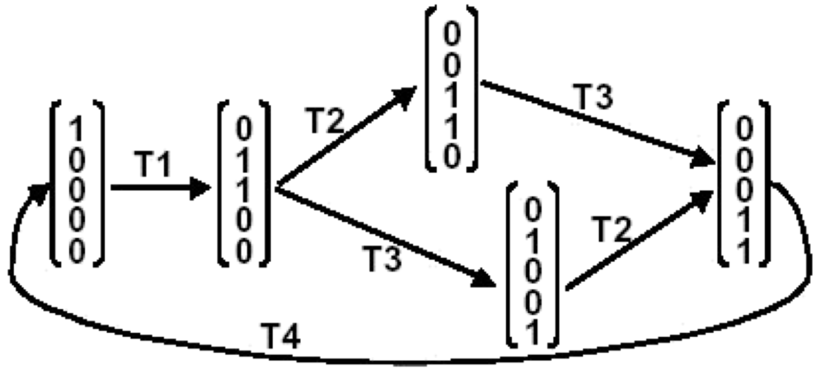
Graphe des marquages accessibles:



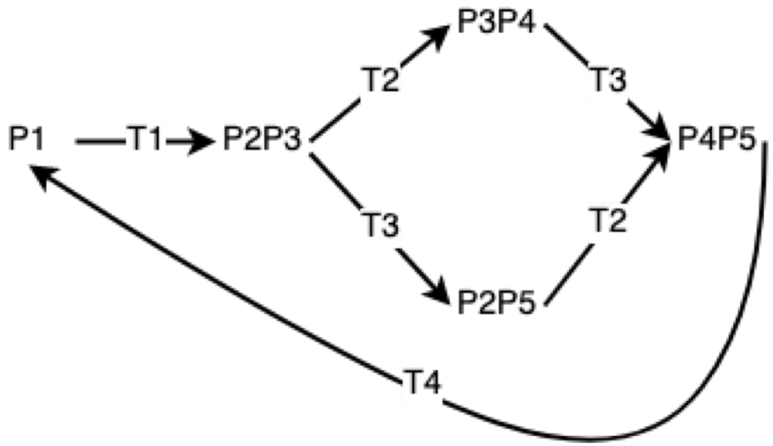
Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Exemple : graphe des marquages accessibles





Autre Notation :

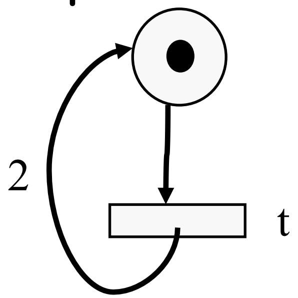


Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Arbre et graphe de couverture :

Le graphe des marquage d'un RdP peut être infini (RdP non Borné)

Exemple :



(1) —t→ (2) —t→ (3) —t→ (4) —t→ …

- Si l'ensemble des marquages accessibles pour le RdP R à partir de M_0 n'est pas un ensemble fini, on peut tracer un graphe de couverture.

- Le graphe de couverture est obtenu après construction de l'arbre de couverture d'un RdP non borné.

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles
Algorithme de construction de l'arbre de couverture :

Init:

-Créer les sommets M_i successeurs de M_0, indiquer les transitions franchissables.

- Si $M_i > M_0$, on note ω les composantes strictement supérieures aux composantes de M_0.

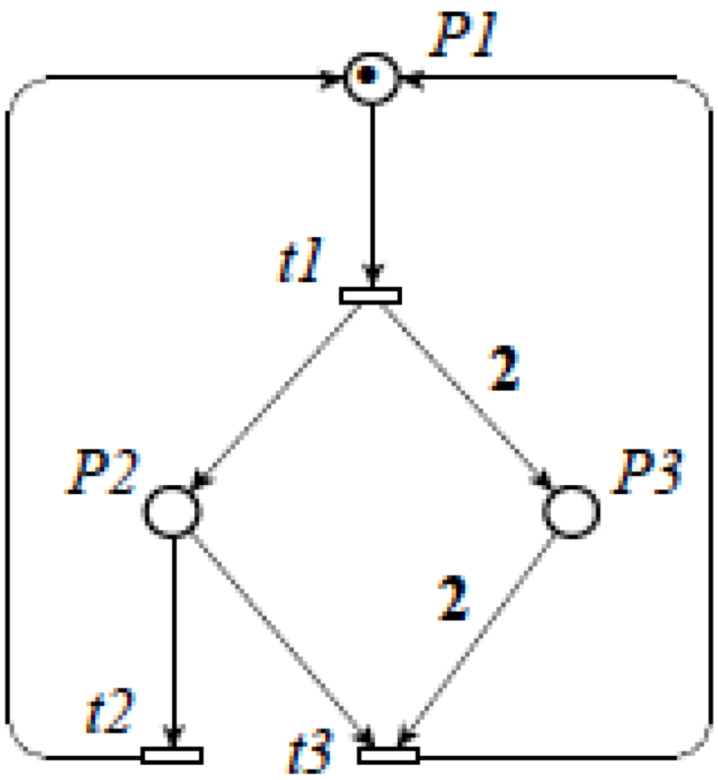
Pour chaque nouveau sommet M_i:

-Rechercher sur le chemin de M_0 à M_i s'il existe M_j avec i <>j tq $M_j = M_i$

- Si oui : M_i n'a pas de successeur.
- Sinon créer les successeurs M_k de M_i, indiquer les transitions franchissables.
  - Une composante ω de M_i reste une composante ω
  - S'il existe M_j sur le chemin de M_0 à M_k tq $M_k > M_j$ alors on note ω les composantes de M_k strictement supérieures à celles de M_j

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Exemple : représenter l'Arbre puis le Graphe de couverture



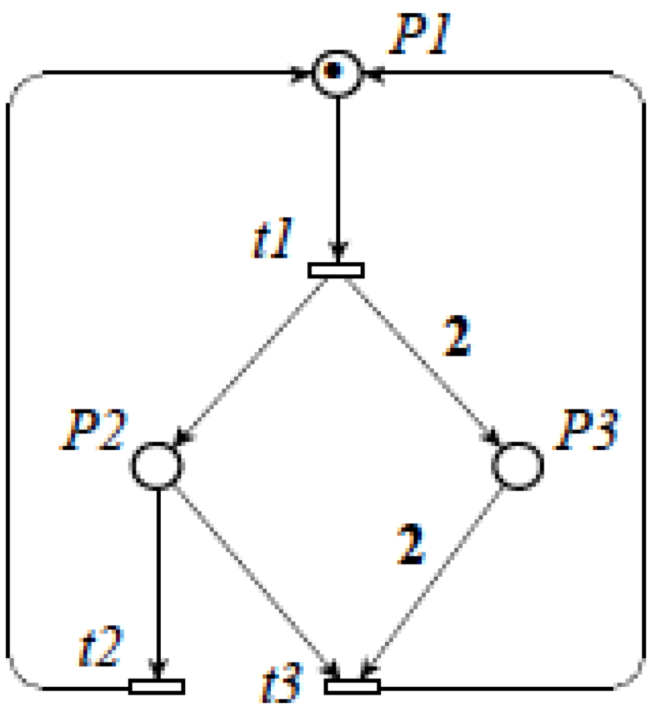
Règles de grammaire :

Arbre de couverture :

Graphe de couverture

Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

Exemple : représenter l'Arbre puis le Graphe de couverture



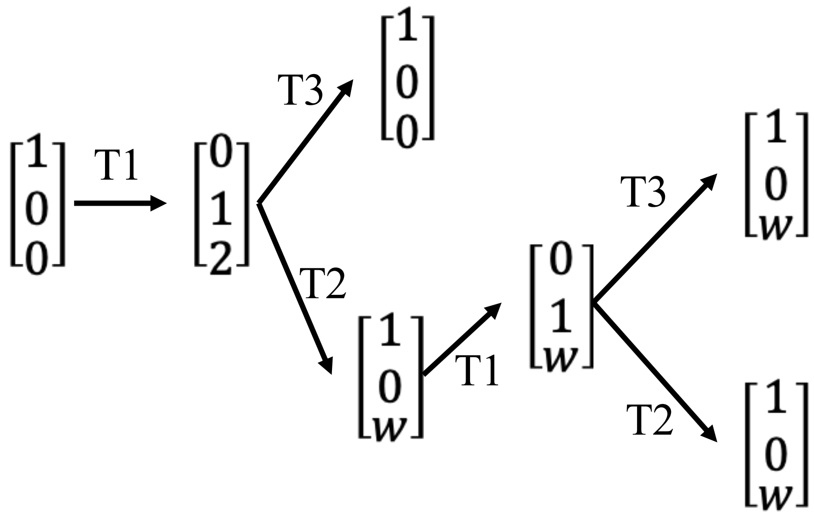
Règles de grammaire :

T1: P1 → P2P3^2

T2: P2 → P1

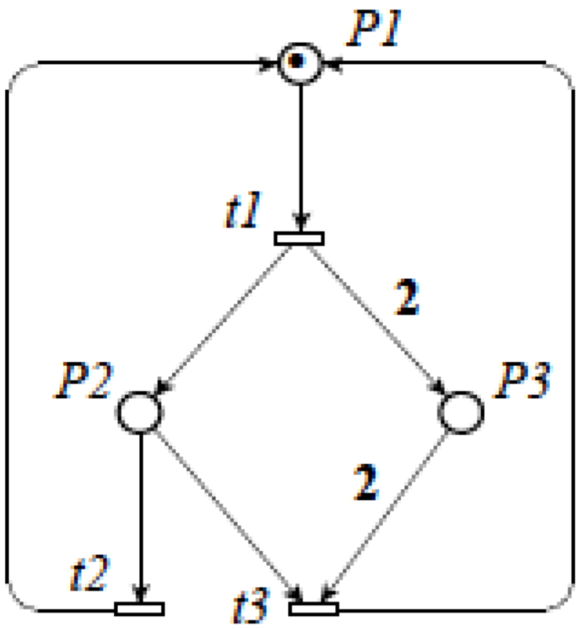
T3: P2P3^2 → P1

Arbre de couverture :

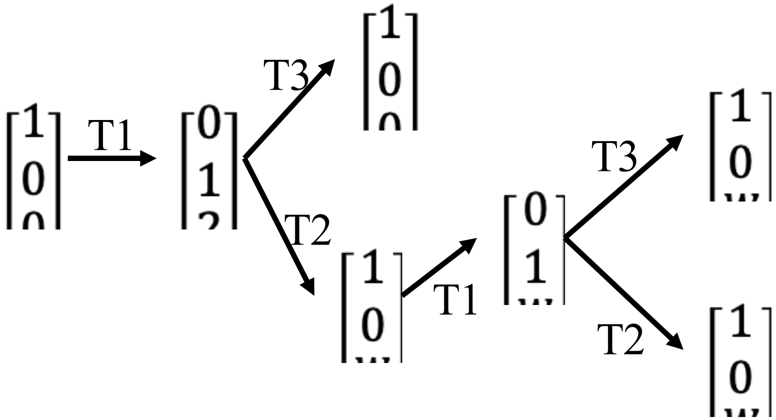


Algèbre linéaire
Graphe des marquages accessibles

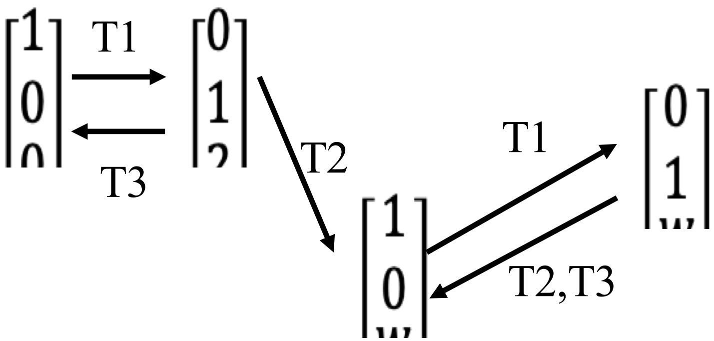
Exemple : représenter l'Arbre puis le Graphe de couverture



Arbre de couverture :



Graphe de couverture :



III. Modèles dérivés :
Les Réseaux de Petri (RdP)

1. Généralités
2. Formalisme de base
3. Algèbre linéaire
4. Propriétés dynamiques des RdP

Propriétés Dynamiques des RdP

- Places et RdP k-bornés
- Places et RdP saufs
- Transitions et RdP vivants
- Transitions et RdP quasi-vivants
- Etats de Blocage
- RdP propres / réinitialisables

- Conflits structurels / effectifs
- Persistance, …

Etude de ces propriétés à partir du :

- graphe des marquages (pour les réseaux bornés)
- graphe de couverture (pour les réseaux non bornés)

Propriétés Dynamiques des RdP

Un RdP est BORNÉ pour un marquage initial M0 si toutes ses places sont bornées (pour tout marquage accessible le nombre de marques de chaque place est fini)

Un RdP est SAUF pour un marquage initial M0 si pour tout marquage accessible chaque place contient au plus une marque

Un RdP est VIVANT pour un marquage initial M0 si toutes ses transitions sont vivantes (quelle que soit l'évolution, il existe toujours une possibilité de franchir la transition)

Un RdP est QUASI-VIVANT pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont quasi-vivantes. Une transition T_j est quasi-vivante ssi $\exists\ s \in T^*$ contenant T_j depuis M0

Propriétés Dynamiques des RdP

Un CONFLIT EFFECTIF est un conflit structurel pour lequel le marquage Mi est inférieur au nombre de transitions franchissables pour Mi.

Un BLOCAGE (ou *état puits*) est un marquage tel qu'aucune transition n'est validée

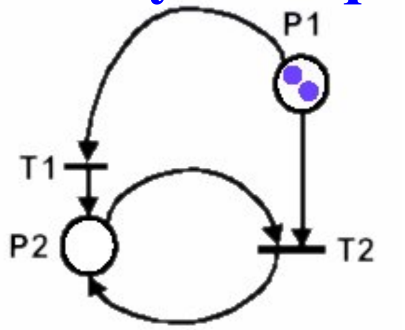
Un RdP est dit SANS BLOCAGE pour un marquage initial M0 si aucun de ses marquages accessibles n'est un blocage

Un RdP est RÉINITIALISABLE (ou PROPRE) pour un marquage initial M0 si depuis tout marquage accessible il existe une séquence conduisant à M0

Un RdP est PERSISTANT pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible on a T_j et T_k franchissable, alors T_kT_j est franchissable ainsi que T_jT_k

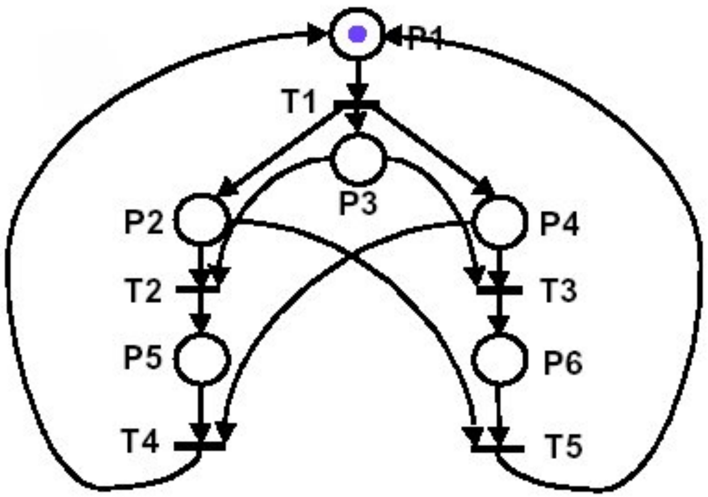
Propriétés Dynamiques des RdP

Exemples : Donner le graphe des marquages et en déduire les propriétés dynamiques



Graphe des marquages :

Propriétés dynamiques :

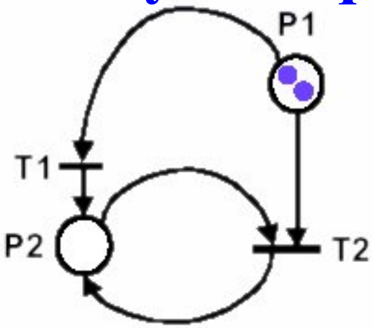


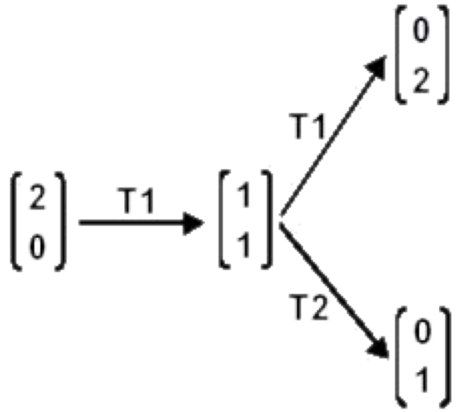
Graphe des marquages :

Propriétés dynamiques :

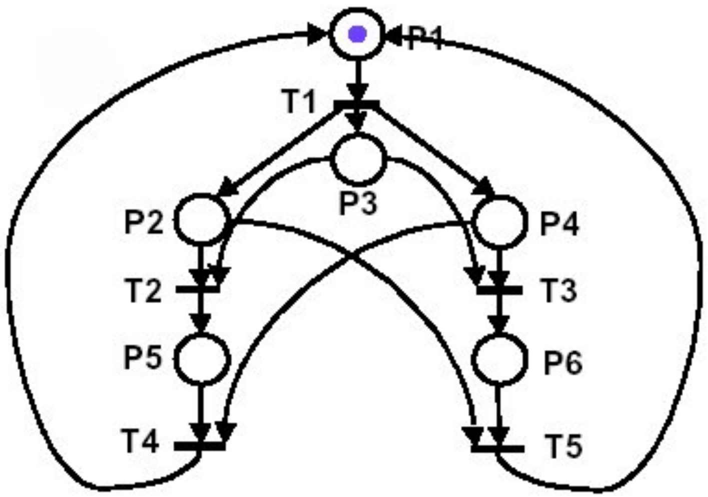
Propriétés Dynamiques des RdP

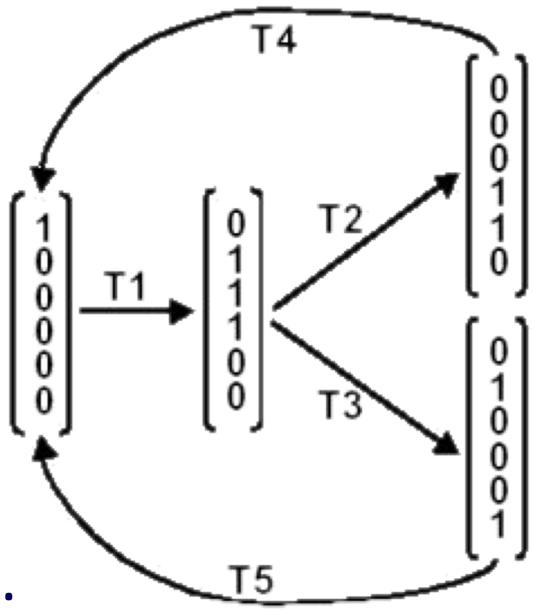
Exemples : Donner le graphe des marquages et en déduire le propriétés dynamiques





RdP : 2-borné, non vivant, 2 états de blocage et non réinitialisable.





RdP : 1-borné (sauf), vivant et réinitialisable.

Propriétés Dynamiques des RdP

Invariant de marquage – Composante conservative :

Une composante conservatrice est un ensemble de places dans lesquelles le nombre de jetons est borné (se conserve) quelque soit les transitions franchies

- Si une place appartient à une composante conservatrice, alors cette place est k-bornée

- Si toutes les places d'un RdP appartiennent à une composante conservatrice, alors le réseau est k-borné

- Le nombre de jetons circulant dans une composante conservatrice est déterminé par le marquage initial

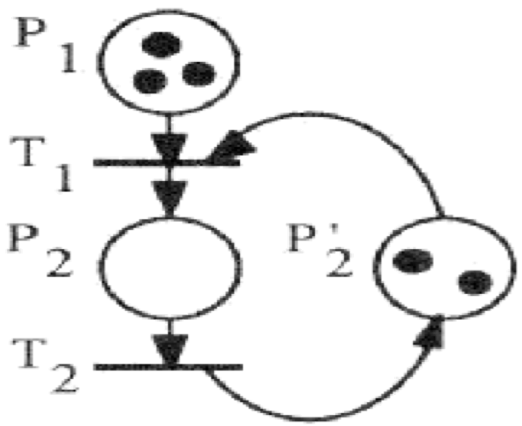
Propriétés Dynamiques des RdP

INVARIANT DE PLACES et COMPOSANTE CONSERVATIVE

Soit un Réseau de Petri R et P l'ensemble de ses places. Le RdP R aura un **invariant de places** s'il existe un **sous-ensemble de places** $P' = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ inclus dans P et un **vecteur de pondération** $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ dont tous les poids q_i sont des nombres entiers positifs tels que :

$$q_1.M(P_1)+q_2.M(P_2)+\ldots+q_r.M(P_r) = \text{constante}, \text{ pour tout } M \in {}^*M_0$$

En général, une composante conservative a une **signification physique** : par exemple, un système est dans ***un et un seul état à la fois***, ou encore, un ***nombre d'entités se conserve***, …



$M(P_2) + M(P'_2) = 2$
mais si le marquage initial était
$M_0(P_2) + M_0(P'_2) = N$,
on aurait $M(P_2) + M(P'_2) = N$

Propriétés Dynamiques des RdP

Algorithme de recherche d'invariant de marquage :

Init : Construire la matrice [Id|C]

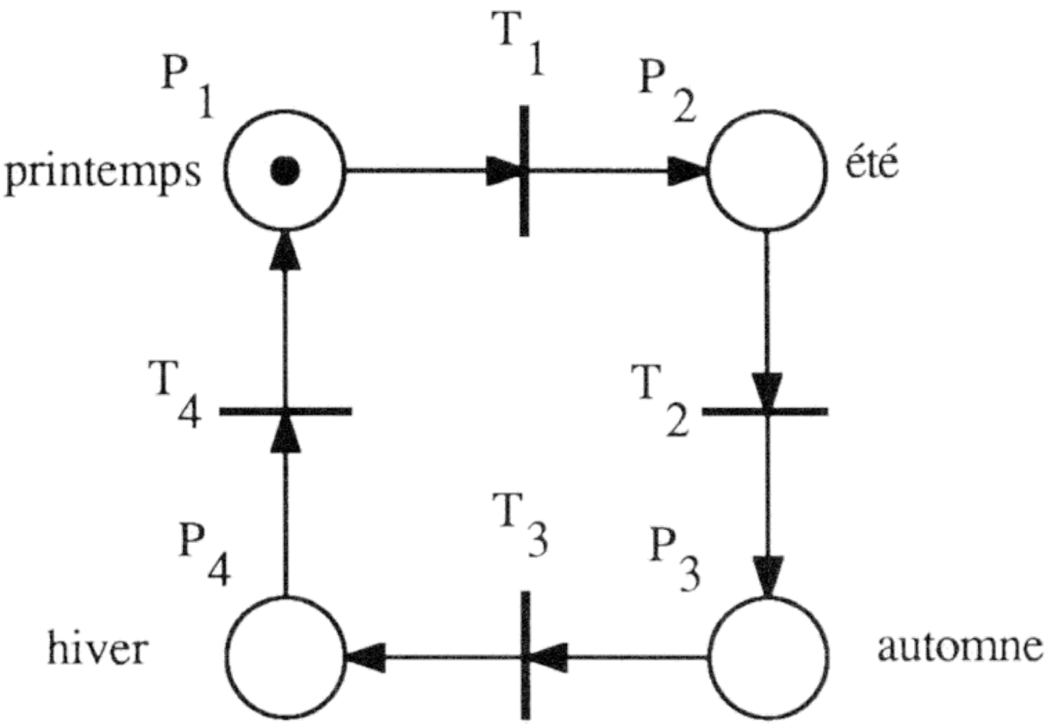
Pour chaque indice j (transition Tj) :
-Ajouter à la matrice [Id|C] autant de lignes i qu'il y a de combinaisons linéaires de 2 lignes à coefficients positifs, annulant l'élément (i,j)

-Eliminer de la matrice [Id|C] les lignes i dont les coefficients (i,j) ne sont pas nuls

Les invariants de marquage correspondent aux lignes non nulles de Id

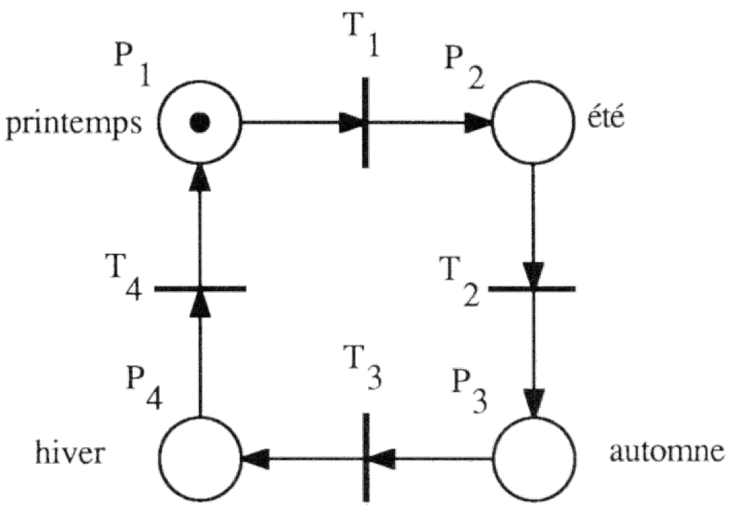
Propriétés Dynamiques des RdP

Exemple : Composante conservative



Propriétés Dynamiques des RdP

Exemple : Composante conservative



Id				C				
				T1	T2	T3	T4	
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~P1~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~-1~~	~~0~~	~~0~~	~~P2~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~-1~~	~~0~~	~~P3~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~-1~~	~~P4~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~0~~	~~1~~	~~P1+P2~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~1~~	~~P3 + (P1+P2)~~
1	1	1	1	0	0	0	0	P4+ (P1+P2+P3)

1 invariant de marquage : m1+ m2 + m3 + m4 = 1

Algo:
- T1 : Ajouter la ligne P1+P2, Supprimer les lignes P1 et P2
- T2 : Ajouter la ligne P3 + (P1+P2), Supprimer P3 et P1+P2
- T3 : Ajouter la ligne P4 + (P1+P2+P3), Supprimer P4 et P1+P2+P3
- T4: fin

Quelques extensions…

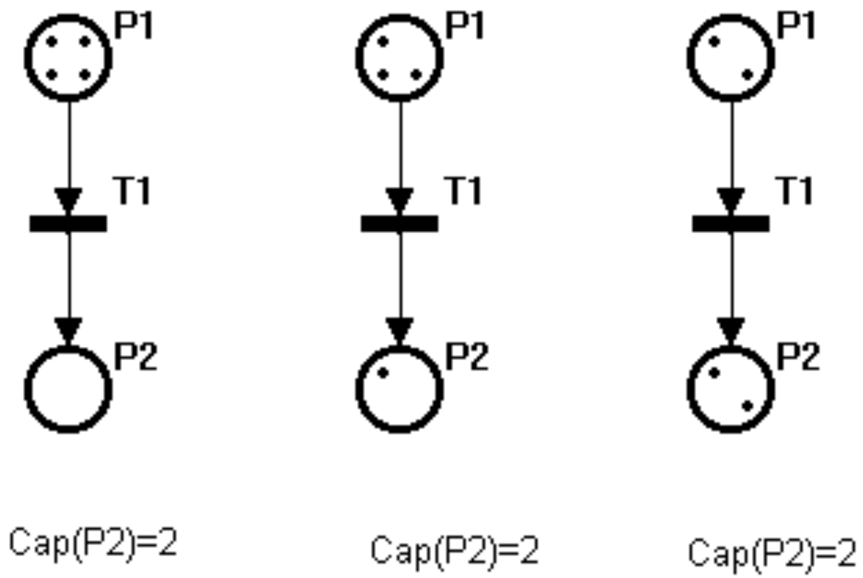
- Les réseaux à capacité
- Les réseaux à arcs inhibiteurs
- Les réseaux non autonomes (Interprétés, temporisés, …)
- Les réseaux colorés

Quelques extensions…

Les réseaux à capacité

- Un RdP à capacité est un RdP dans lequel des capacités (nombres entiers strictement positifs) sont associées aux places.

- Le franchissement d'une transition d'entrée d'une place Pi dont la capacité est cap(Pi) n'est possible que si le franchissement ne conduit pas à un nombre de jetons dans Pi plus grand que Cap(Pi).



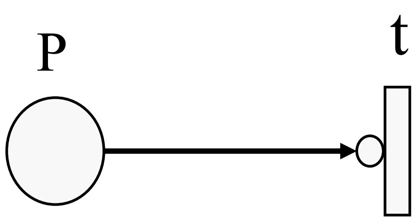
La transition T1 ne peut être franchie lorsque le nombre de jetons dans P2 atteint 2.

Quelques extensions…
Les réseaux à arcs inhibiteurs

- Un arc inhibiteur (test à zéro) est un arc orienté entre une place P et une transition t. Son extrémité est marquée par un petit cercle.

- L'arc inhibiteur entre la place P et la transition t signifie que la transition t n'est validée que si la place P ne contient aucune marque.

- Le franchissement de t consiste à retirer une marque dans chaque place d'entrée de t à l'exception de P, et à ajouter une marque dans chaque place de sortie de t.



t est franchissable si et seulement si P est vide.