Exercice 3. Développement en série de Fourier d'un signal périodique à temps discret (6 points)

On considère le signal périodique à temps discret $x(n)$ tel que :

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 3m, m \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } k = 1 + 3m, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } k = 2 + 3m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Représenter le signal et déterminer sa période K.
2. Montrer que les coefficients de la série de Fourier ont pour expression :

$$C_n = \frac{2}{3}\, j\, e^{-j\frac{n\pi}{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

   Pour cela, on pourra utiliser la formule de l'angle moitié :

$$1 - e^{-j\theta} = e^{-j\frac{\theta}{2}}\left(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}\right) = 2\, j\, e^{-j\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

   On remarquera la périodicité $C_n = C_{n+K}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire les spectres de raies en amplitude et en phase. (*Justifiez bien votre réponse en indiquant les détails des calculs.*)
4. Calculer la puissance moyenne P_x du signal $x(k)$.
5. Enfin, montrer que P_x est bien égale à $\sum_{n=<K>} |C_n|^2$ (aussi apellée relation de Parseval).

Exercice 4. Transformée de Fourier (5 points)

Soit le signal suivant (fenêtre de von Hann) :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t/T) & \text{si } -T/2 \leqslant t \leqslant T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T > 0$ est une constante.

1. Représenter graphiquement $x(t)$.
2. Montrer que la transformée de Fourier de $x(t)$ est :

$$X(f) = \frac{T}{2}\text{sinc}\,(fT) + \frac{T}{4}\left[\text{sinc}\left((f - \tfrac{1}{T})T\right) + \text{sinc}\left((f + \tfrac{1}{T})T\right)\right]$$

   où sinc$(\cdot)$ est la fonction sinus cardinal définie par :

$$\text{sinc}(u) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} & u \neq 0 \\ 1 & u = 0 \end{cases}$$

   On rappelle que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$.