Chapitre 1

Introduction à la théorie du signal

Magalie THOMASSIN

magalie.thomassin@univ-lorraine.fr

TELECOM Nancy
1re année

SICA1

Plan

Classification dimensionnelle

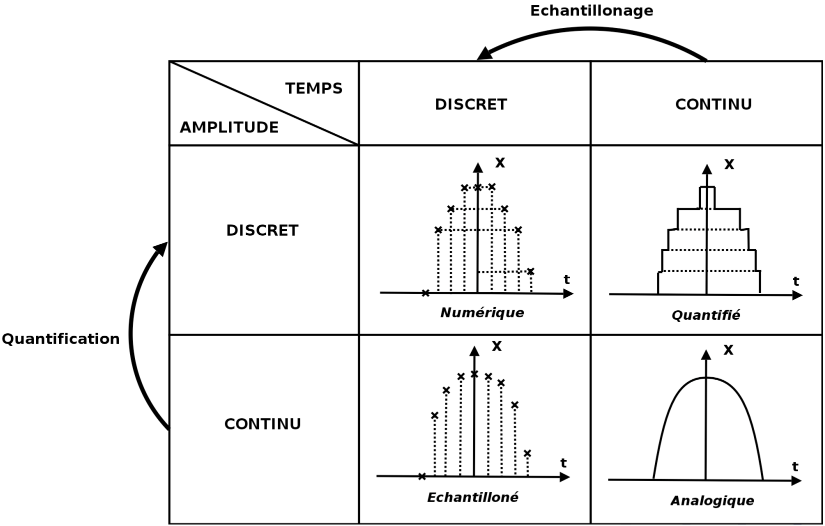
- Signal scalaire (ou monodimensionnel 1D)
  Fonction d'1 seul paramètre (pas forcément le temps) $\Rightarrow s(x)$
- Signal vectoriel (ou multidimensionnel nD)
  Signal à plusieurs dimensions
  - Signal bidimensionnel 2D
    Fonction de 2 paramètres. Ex : une image $\Rightarrow I(x, y)$
  - Signal tridimensionnel 3D
    Fonction de 3 paramètres. Ex : un film $\Rightarrow F(x, y, t)$

Dans ce cours, on s'intéresse essentiellement aux signaux scalaires temporels

Signal à temps continu
$x(t)$

Signal à temps discret
$x(k)$

Continu/Discret



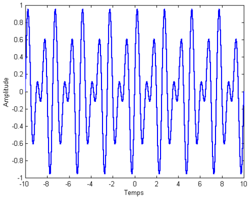
Classification phénoménologique

Signal déterministe ou aléatoire

- **Signaux déterministes**

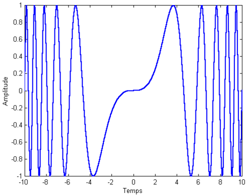
  Signaux dont l'évolution peut être parfaitement décrite par une description mathématique ou graphique

  - périodiques

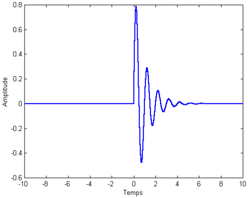


$$\exists T \in \mathbb{R}, \forall t, x(t) = x(t+T)$$

  - apériodiques



  - transitoires



Signal à durée limitée
= Signal à support borné

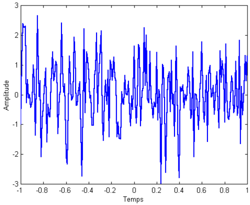
Classification phénoménologique (suite)

Signal déterministe ou aléatoire

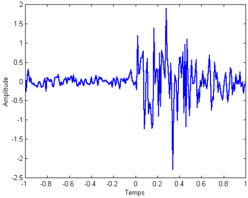
- Signaux aléatoires (ou stochastiques)
  Signaux dont l'évolution est imprévisible : on ne peut pas prédire la valeur à un temps t.
  La description est fondée sur les propriétés statistiques des signaux (moyenne, variance, etc.)

Stationnarité : ses propriétés statistiques sont indépendantes du temps

- stationnaires



- non stationnaires



Un signal aléatoire particulier : le bruit

- Définition : perturbation pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal.
  En général, il s'agit d'une fluctuation imprévisible due à l'environnement.
- La notion de bruit est relative. Elle dépend du contexte.
  exemple du technicien en télécom et de l'astronome :
  - pour le technicien télécom :
    - signal = ondes d'un satellite
    - bruit = signaux d'une source astrophysique
  - pour l'astronome :
    - signal = signaux d'une source astrophysique
    - bruit = ondes d'un satellite
- Tout signal physique comporte du bruit ! !
  Signal = composante déterministe + composante aléatoire (le bruit)
- Rapport Signal sur Bruit (RSB) :
  détermine la qualité du signal déterministe ou aléatoire / quantifie l'effet du bruit

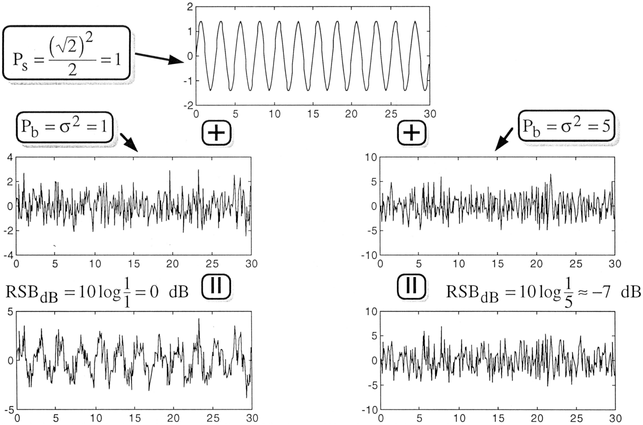
$$\boxed{\text{RSB} = \frac{P_s}{P_b} \qquad \text{RSB}_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_b}\right)}$$

où P_s et P_b sont les puissances respectives du signal et du bruit

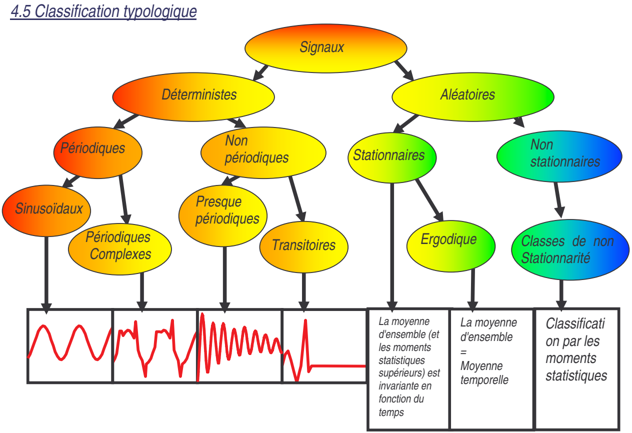
Un signal aléatoire particulier : le bruit (suite)

Signal : sinusoïde pure ($P_s = \frac{A^2}{2}$)

Bruit : bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 ($P_b = \sigma^2$)



Classification – récapitulatif



Energie et puissance d'un signal

- Cas d'un signal continu $x(t)$
  - Energie totale
    $$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$
  - Puissance moyenne totale
    $$\boxed{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt}$$
- Cas d'un signal discret $x(k)$
  - Energie totale
    $$\boxed{E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2}$$
  - Puissance moyenne totale
    $$\boxed{P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2} |x(k)|^2}$$

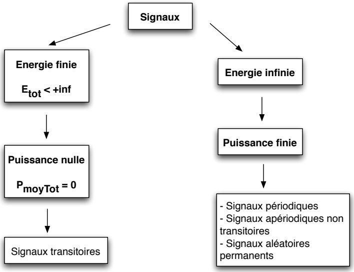
Remarques

- $\boxed{E_x < \infty \quad \Rightarrow \quad P_x = 0}$
- la puissance moyenne totale d'un signal périodique est égale à celle sur une période

Classification énergétique

On distingue alors :

- les signaux à énergie finie ($\Rightarrow P_x = 0$) :
  tous les transitoires, déterministes ou aléatoire : cas de tous les signaux physiques
- les signaux à puissance moyenne finie non-nulle ($\Rightarrow E_x = \infty$) :
  tous les signaux permanents, déterministes (périodiques ou quasi-périodiques) ou aléatoires



- Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces catégories
  Ex. :$x(t) = \exp(at)$ pour $-\infty < t < \infty$, iimpulsion de Dirac, peigne de Dirac,etc.

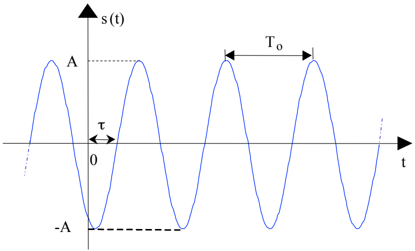
Plan

Signal sinusoïdal

$$\boxed{s(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi_0) = A\sin(\omega_0(t+\tau))}$$

avec :

- A : amplitude du signal
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$: pulsation (en rad/s)
- T_0 : période du signal (en s)
- f_0 fréquence fondamentale (en Hz)
- $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$: phase instantanée
- $\phi_0 = \omega_0\tau$: phase à l'origine (pour $t = 0$) (en rad)
- τ : décalage (en s) de $s(t)$ par rapport à 0 (retard si $\tau < 0$; avance si $\tau > 0$)

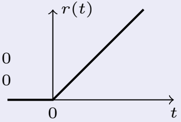


Remarque : lien avec exponentielle complexe $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$

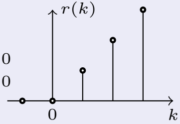
les signaux échelon et rampe

- La rampe unitaire

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

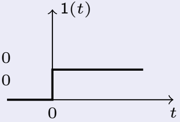


$$r(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ k & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

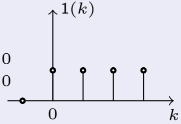


- L'échelon unitaire

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$1(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

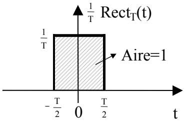


- L'échelon $1(t)$ est la dérivée (discontinue à l'origine) de $r(t)$. Il n'est pas défini en $t = 0$.
- Signal causal : signal qui est nul pour $t < 0$ (origine des temps).
  L'échelon permet d'écrire ceci de façon compacte :

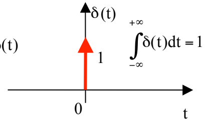
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ Ce^{at} & \text{pour } t \leqslant 0 \end{cases} = Ce^{at}.1(t)$$

Impulsion de Dirac

- Définition pratique



$$\lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \mathrm{Rect}_T(t) = \delta(t)$$



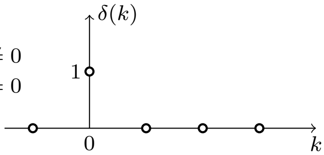
- Représentation par un flèche verticale en $t = 0$ d'amplitude égale à l'aire (ici 1)
- Ce n'est pas une fonction, mais se définit rigoureusement grâce à la théorie des distributions
- Propriétés de l'impulsion de Dirac :
  - $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - t_0)dt = s(t_0)$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ (pour $s(t) = 1$, $t_0 = 0$)
  - Produit d'un signal par une impulsion de Dirac

    $s(t)\delta(t - t_0) = s(t_0)\delta(t - t_0)$ $\qquad$ $s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$ (pour $t_0 = 0$)
  - Changement de variable $\qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
- Autres propriétés :
  - $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$
  - $1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau$

Impulsion unitaire discrète

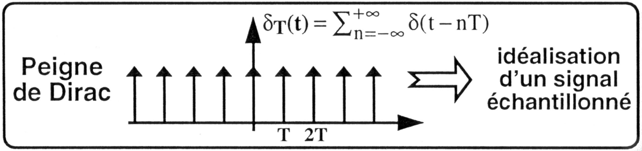
- L'impulsion unitaire discrète

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$



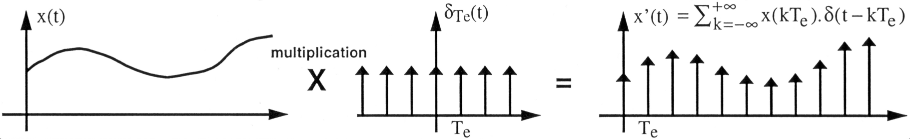
- Propriétés :
  - $\delta(k) = \Delta \mathbb{1}(k) = \mathbb{1}(k) - \mathbb{1}(k-1)$
  - $\mathbb{1}(k) = \sum_{n=0}^{k} \delta(n) = \sum_{n=-\infty}^{k} \delta(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$

Le peigne de Dirac et Signal échantillonné (échantillonnage idéal)



Signal échantillonné (échantillonnage idéal)

Un signal échantillonné résulte du **produit d'un signal continu par un peigne de Dirac**. La période du peigne est appelée **période d'échantillonnage** et notée T_e. On obtient alors un **train d'impulsions modulées** en amplitude par les valeurs du signal continu aux instants kT_e, dits "**instants d'échantillonnage**". Dans la réalité, les impulsions sont de durée petite par rapport à T_e.



Plan

Produit de convolution

Définition

On appelle produit de convolution de deux signaux x et g :

temps continu

$$y(t) = [x * g](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

temps discret

$$y(k) = [x * g](k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)g(k-n)$$

Propriétés

- Commutativité : $g * x = x * g$
- Associativité : $(x * g_1) * g_2 = x * (g_1 * g_2)$
- Distributivité : $(g_1 + g_2) * x = (g_1 * x) + (g_2 * x)$

Produit de convolution avec impulsion de Dirac

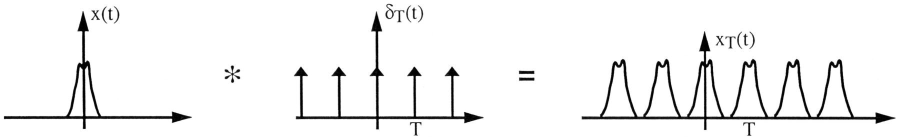
Par abus de notation, on peut écrire le produit de convolution : $x(t) * g(t)$.

Propriétés

- $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- $x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$
- $x(t-t_1) * \delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2)$
  cas particulier : $\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$

Périodisation du signal $x(t)$

$$x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT) = x_T(t)$$



Plan

Produit de scalaire de 2 signaux

Définition

- Cas de signaux complexes :

$$< x_1, x_2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2^*(t) dt$$

où * représente la conjugaison complexe

- Cas de signaux réels :

$$< x_1, x_2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2(t) dt$$

Dans le cas complexe, on remarque que $< x, y > \neq < y, x >$.
En revanche, cette définition possède la symétrie hermitienne : $< x, y >= < y, x >^*$

Propriétés de l'impulsion de Dirac

- $$< f, \delta >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

- $$< g\delta, f >=< \delta, gf >$$

Plan

Encore quelques propriétés de l'impulsion de Dirac

- Changement de variable : $\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t)$

  En particulier : $\delta(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\delta(f)$

- Dérivation

$$(\dot{\delta f}) = \dot{\delta} f + \dot{f}\delta$$
$$< \dot{\delta}, f >= - < \delta, \dot{f} >= -\dot{f}(0)$$
$$< \delta^{(n)}, f >= (-1)^n < \delta, f^{(n)} >$$
$$(\delta \dot{*} f) = \dot{\delta} * f = \delta * \dot{f}$$

- De plus, on verra, dans la suite, que la transformée de Fourier peut être étendue au cas des distributions