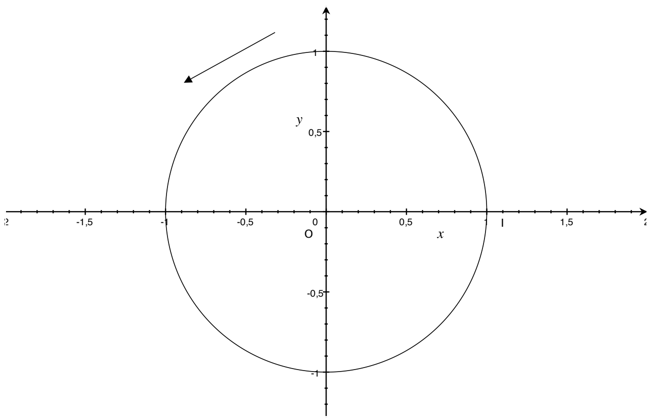
Chapitre 2 : Les nombres complexes

1 Rappels de trigonométrie

Cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

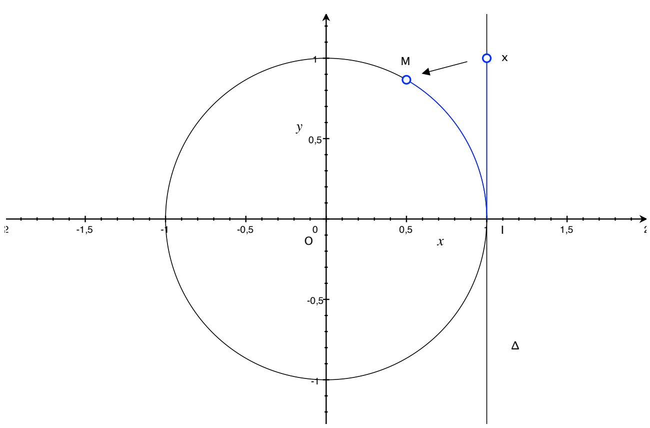
On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on définit un sens de parcours appelé **sens trigonométrique** et qui correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque :

le périmètre du cercle est 2π

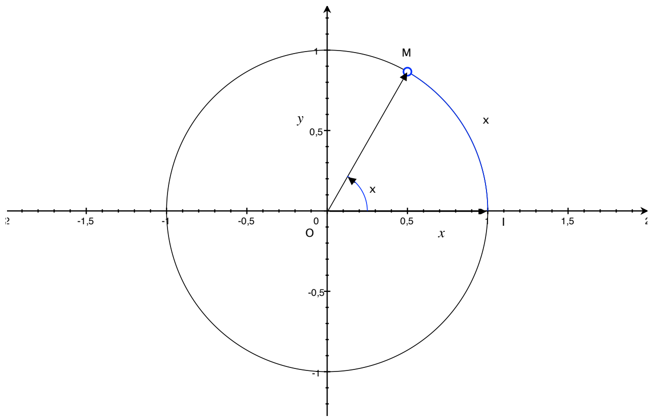
On considère maintenant la droite Δ tangente au cercle au point i (1,0). Pour un réel x repéré sur Δ, on considère le point M que l'on obtiendrait sur le cercle par "enroulement" de Δ sur le cercle. On dit que M est **l'image** du réel x sur le cercle.



Exemple :

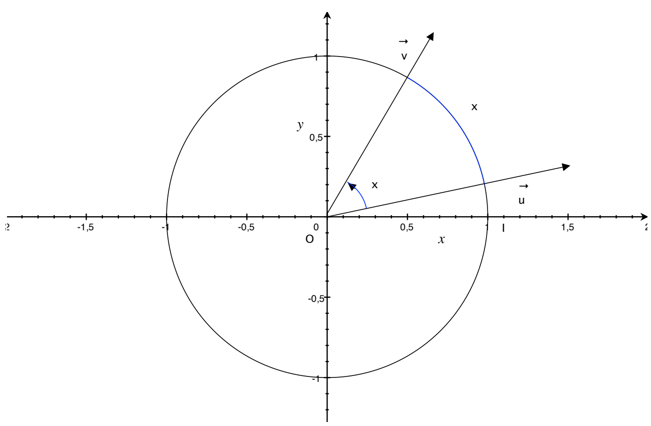
Placer sur le cercle les points correspondant à π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $-\pi/4$ en partant de la remarque que le périmètre est 2π.

Définition
On considère sur le cercle trigonométrique le point M image du réel x



On dit que x est une **mesure en radians** de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$

Définition
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls définissent un angle orienté noté $(\vec{u}, \vec{v})$.



En utilisant le cercle trigonométrique, on définit une **mesure** x **en radians de l'angle orienté** $(\vec{u}, \vec{v})$.

Proposition
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté et x une mesure de cet angle.
L'ensemble des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des réels $x + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Deux réels x et y sont des mesures du même angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $y - x$ est un multiple de 2π i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - x = k \times 2\pi$.
On écrit

$$y - x \equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv x[2\pi]$$

Propriétés

- pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, on a

$$(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0 \ [2\pi], \quad (\vec{u}, -\vec{u}) \equiv \pi \ [2\pi]$$

- pour tout les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls, on a

$$(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi], \quad (-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi], \quad (\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$$

- pour tout les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls et pour tout réels k, k' strictement positifs, on a

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$$

- pour tout les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

  (Relation de Chasles)

Propriétés

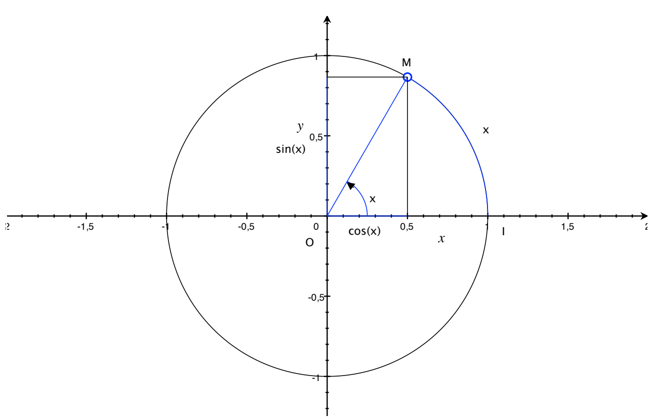
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 \ [2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi \ [2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 \ [\pi]$

Cosinus et sinus d'un nombre réel

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, si M est l'image sur le cercle trigonométrique du réel x alors

- l'abscisse de M est appelée **cosinus de** x et elle est notée $\cos(x)$
- l'ordonnée de M est appelée **sinus de** x et elle est notée $\text{bfsin}(x)$



Propriétés

Pour tout réel x, on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Fonction cosinus et fonction sinus

On appelle fonction cosinus la fonction

$$\begin{array}{rcl} \cos : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

On appelle fonction sinus la fonction

$$\begin{array}{rcl} \sin : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Propriétés

- les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \cos(x+2k\pi) = \cos(x), \quad \sin(x+2k\pi) = \sin(x)$$

- la fonction cosinus est paire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

- la fonction sinus est impaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x), \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi-x) = \sin(x), \quad \cos(\pi-) = -\cos(x)$$

Formules d'addition

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Résolutions d'équations

- pour tout réel a fixé, l'équation d'inconnue x

  $$\cos(x) = \cos(a)$$

  a pour solutions

  $$a + 2k\pi, \quad -a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

- pour tout réel a fixé, l'équation d'inconnue x

  $$\sin(x) = \sin(a)$$

  a pour solutions

  $$a + 2k\pi, \quad \pi - a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensembles des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

- l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$
- l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$
- tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** $z = a + ib$ avec a et b des réels.

Définition

- l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est **la forme algébrique** du nombre complexe z
- a est **la partie réelle** de z, notée $Re(z)$
- b est **la partie imaginaire** de z, notée $IM(z)$
- lorsque $b = 0$, z est un réel
- lorsque $a = 0$, $z = ib$ est un **imaginaire pur**

Opérations dans $\mathbb{C}$

Pour effectuer des calculs dans $\mathbb{C}$, il suffit d'utiliser $i^2 = -1$ et les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$. Soit deux nombres complexes écrits sous forme algébrique :

$$z = a + ib, \quad z' = a' + ib', \quad (a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$$

- somme de deux nombres complexes

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

- produit de deux nombres complexes

$$zz' = (a + ib) \times ((a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

- inverse d'un nombre complexe non nul

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}\ quad(z \neq 0)$$

Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire

Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$. Le nombre complexe $a - ib$ est appelé **conjugué de** z et noté $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriétés

- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

Conjugaison et opérations

Soient z et z' deux nombres complexes.

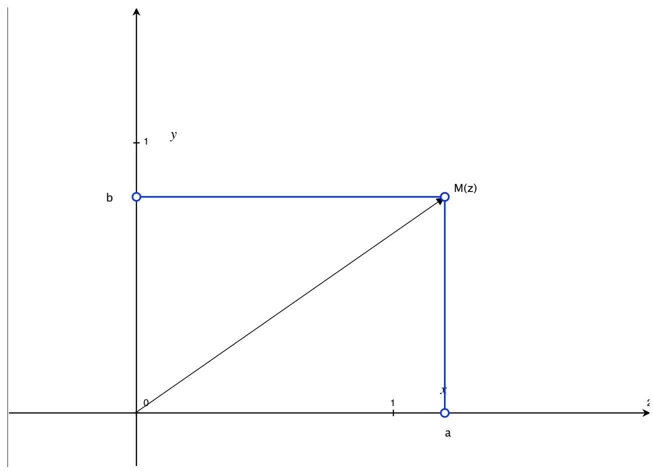
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- si z est non nul, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$; donc $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$

3 Affixe, module et arguement

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ appelé **plan complexe**

- à tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe dans le plan complexe un point M, et un seul, de coordonnées (a, b).
- réciproquement, à tout point M de coordonnées (a, b) du plan complexe, on associe le nombre complexe unique $z = a + ib$
- on définit ainsi une bijection entre l'ensemble des nombres complexes et le plan complexe
- z est appelé **l'affixe** du point M et M est appelé **le point image** de z



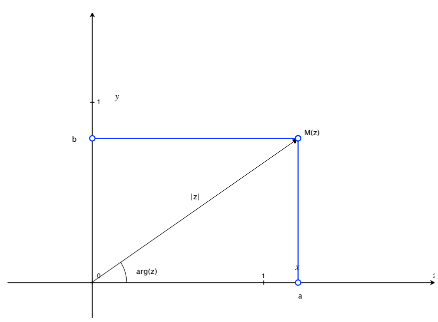
Module et argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M le point d'affixe z

- le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Un **argument** du complexe non nul z, noté $arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$



Remarques

- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$
- le réel 0 n'a pas d'argument car l'angle n'est pas défini si $M = O$

Propriétés

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- z est un réel strictement positif si et seulement si $arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- z est un réel strictement négatif si et seulement si $arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
- z est un réel non nul si et seulement si $arg(z) \equiv [\pi]$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$

Propriétés du module

Pour tous nombres complexes z et z'

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ (z non nul)

Propriétés de l'argument

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls

- $arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$
- $arg(-z) \equiv arg(z) + \pi[2\pi]$
- $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$
- $arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv arg(z') - arg(z)[2\pi]$

Notation exponentielle - exponentielle d'un nombre complexe

Pour faciliter l'utilisation de la forme trigonométrique et avoir une forme plus concise, nous convenons de noter $e^{i\theta}$ l'unique nombre complexe de module 1 et d'argument θ, c'est-à-dire

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Ainsi la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ devient

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

Justication de cette notation

Avec cette notation, nous avons pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')} \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}, \quad \text{pour tout } (\theta, \theta') \in (\mathbb{R})^2}$$

C'est cette formule qui justifie le recours à la notation exponentielle, puisque formellement nous retrouvons la propriété fondamentale de la fonction exponentielle $e^{a+b} = e^a e^b$.

Formule de Moivre - Formules d'Euler

Une conséquence directe de cette formule est la **formule de Moivre**

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, \quad \text{pour tout } (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}.$$

ce qui peut se réécrire

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad \text{pour tout } (\theta, n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}}$$

Nous obtenons aussi sans peine à partir de la définition les **formules d'Euler**

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}}$$

Propriétés

Nous pouvons réécrire à l'aide de cette notation certaines propriétés déjà vues

$$\boxed{\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}}$$

4 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Une équation du second degré particulière

Commençons par résoudre le problème suivant : étant donné un nombre complexe Z, chercher un (les) nombre(s) complexe(s) z tels que

$$z^2 = Z.$$

Si $Z = 0$, il y a une unique solution $z = 0$

Si $Z \neq 0$, nous utiliserons la **forme algébrique** des nombres complexes : en supposant que $Z = X + iY$ et en posant $z = a + ib$, l'équation devient

$$(a^2 - b^2) + i(2ab) = X + iY$$

et par conséquent

$$a^2 - b^2 = X \quad \text{et} \quad 2ab = Y$$

Pour faciliter la résolution de ce système on ajoute la relation $|Z| = |z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$. Par conséquent nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & X \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{X^2+Y^2} \\ 2ab & = & Y \end{array}\right.$$

Les deux premières équations permettent d'obtenir a et b au signe près, la dernière permet alors de déterminer si a et b sont de même signe ou de signes opposés.

Conclusion si $Z \neq 0$ alors l'équation admet deux solutions opposées l'une de l'autre ω et $-\omega$

Les équations générales du second degré
Venons-en à l'équation générale de degré 2 d'inconnue z

$$az^2 + bz + c = 0$$

où les coefficients a, b, c sont des nombres complexes, avec $a \neq 0$.

La méthode de résolution est essentiellement la même pour que le cas d'une équation du second degré à coefficients réels. On met le trinôme sous forme canonique, grâce à l'identité

$$az^2 + bz + c = a\Big((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big)$$

et donc l'équation est équivalente à

$$\Big((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big) = 0$$

- si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors l'équation admet une racine double $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, alors, d'après le paragraphe précédent, il existe deux nombres complexes, notés ω et $-\omega$ tels que $(\pm\omega)^2 = \Delta$, et donc l'équation admet deux racines complexes distinctes
$$z_1 = \frac{-b + \omega}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \omega}{2a}.$$

5 Racines n-ièmes d'un nombre complexes

Le problème
Etant donnés un nombre complexe Z et un entier positif n, nous souhaitons déterminer un (les) nombre(s) complexe(s) z tels que

$$z^n = Z.$$

- remarquons que le cas $n = 2$ a déjà été traité précédemment.
- si $Z = 0$, il n'y a qu'une seule possibilité pour z, à savoir $z = 0$
- si $Z \neq 0$ alors nous utiliserons la forme exponentielle des nombres complexes.
  Nous pouvons écrire $Z = Re^{i\Theta}$, où $R > 0$ désigne le module et Θ un argument du nombre complexe Z.
  Un nombre complexe z tel que $z^n = Z$ est certainement différent de 0, et peut donc être écrit sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$.

- nous avons

$$\begin{aligned} z^n = Z &\iff \rho^n e^{in\theta} = Re^{i\Theta} \\ &\iff \rho^n = R \quad \text{et} \quad n\theta \equiv \Theta[2\pi] \end{aligned}$$

- la relation $n\theta \equiv \Theta\,[2\pi]$ signifie qu'il existe un entier p tel que

$$n\theta = \Theta + 2p\pi,$$

soit encore

$$\theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2p\pi}{n}.$$

- en effectuant la division euclidienne de p par n, nous obtenons qu'il existe un entier q et un entier k tel que $p = qn+k$ avec $0 \leq k \leq n-1$ (k est le reste de la division euclidienne de p par n).

  Nous avons donc

$$\theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2q\pi \quad \text{avec } 0 \leq k \leq n-1$$

Par conséquent,

$$z^n = Z \iff \rho = R^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \theta \equiv \frac{\Theta + 2k\pi}{n}[2\pi], \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Nous obtenons donc, dans le cas où Z est non nul, n solutions distinctes, à savoir

$$z_k = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\Theta+2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

6 Nombres complexes et formules trigonométriques

Partons de la formule $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et élevons chacun des deux membres au carré. On obtient la formule $e^{2i\theta} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta)$. Si maintenant nous séparons la partie réelle et la partie imaginaire, nous obtenons les formules

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta\ .$$

Ce sont les formules de duplication pour les fonctions sinus et cosinus.

Plus généralement, l'utilisation de la formule de Moivre permet de (re)trouver facilement des formules trigonométriques.

Exercice résolu : Calculer $\cos 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

D'après la formule de Moivre, nous avons

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (cos\theta + i\sin\theta)^3\,.$$

En développant le membre de droite de cette égalité à l'aide de la formule du binôme, nous obtenons

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - 3i \sin^3 \theta.$$

En séparant maintenant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta, \quad \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \sin^3 \theta.$$

Nous pouvons aussi être intéressé par l'opération inverse appelée **technique de linéarisation**. Dans ce cas, nous utiliserons les formules d'Euler.

Exercice résolu : Exprimer $\cos^3 \theta$ en fonction de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$.

Nous avons successivement

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})$$

d'après la formule du binôme. D'où, en utilisant de nouveau les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^3 \theta &= \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \frac{3}{8}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta.
\end{aligned}$$