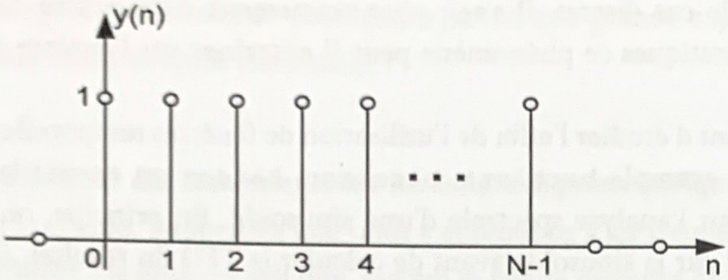

Montrer que sa transformée de Fourier est donnée par : $Y(f) = e^{-j\pi f(N-1)} \dfrac{\sin \pi f N}{\sin \pi f}$. Cette forme est appelée *noyau de Dirichlet*, pour quelles valeurs de f s'annule-t-il ?

2 : Analyse spectrale, cas d'une sinusoïde pure

Soit la séquence d'instructions suivante :

```
» N=64;                     % nombre d'échantillons du signal
» Te=1/128;                 % fréquence d'échantillonnage = 128 Hz
» k=0:N-1;
» x=sin(2*pi*20*k*Te);      % signal sinusoïdal
» plot(k,x)
```

a) Quelle est la fréquence de ce signal sinusoïdal ? Le théorème d'échantillonnage a-t-il été respecté ? Quel est a priori l'allure du spectre de ce signal ? (envisager d'abord le cas théorique d'une sinusoïde pure continue et à support illimité, puis le cas d'une sinusoïde à temps continu et à support borné, et enfin considérer le cas discret).

b)
```
»X=fft(x);
»magX=abs(X);
»plot(k,magX),title('module de la TF'),xlabel('k'),grid
```
Expliquer le résultat obtenu. Essayer également en remplaçant la commande `plot` par la commande `stem`. Que vaut l'intervalle de fréquence entre 2 points consécutifs du spectre (résolution fréquentielle apparente) ? Vérifier la position des raies fréquentielles. Étudier et utiliser la commande `fftshift`. Quel est son intérêt ? Effectuer les modifications nécessaires pour n'afficher que les fréquences positives et pour graduer l'axe des fréquences en Hz. Pourquoi n'observe-t-on pas la forme caractéristique d'un sinus cardinal ?

c) Refaire les manipulations précédentes avec une sinusoïde à 19 Hz. Expliquer à nouveau le résultat observé. Tenter de faire apparaître la forme sinus cardinal en jouant sur les différents paramètres (fréquence d'échantillonnage, nombre d'échantillons, etc.), conclusion ?

d) Reprendre les questions b) et c) précédentes mais en prenant soin de compléter les signaux avec des valeurs nulles (commencer avec 64 zéros, puis essayer avec 448 zéros ou plus) avant de calculer la TFD (opération dite de "*zero padding*"). Conclusion ?

e) Remarquer qu'un résultat similaire peut être obtenu sans modifier le signal de départ mais en spécifiant le nombre d'échantillons *nfft* sur lequel calculer la TFD (`fft(x,nfft)`), avec *nfft* > *N*. Quel est l'effet du *zero padding* sur la résolution fréquentielle apparente ?

f) Dans ce qui précède, le fenêtrage appliqué implicitement au signal est de type rectangulaire. On a vu qu'en raison de ce fenêtrage apparaissaient dans le spectre des formes de type sinus cardinal (en fait, dans le cas discret, il s'agit plus exactement d'un *noyau de Dirichlet*). Quelles conséquences pratiques ce phénomène peut-il entraîner sur l'analyse spectrale de sinusoïdes ?

g) On se propose maintenant d'étudier l'effet de l'utilisation de fenêtres temporelles autres que celle rectangulaire (par exemple `bartlett`, `blackman`, `kaiser` ou encore la fenêtre de Chebychev `chebwin`) sur l'analyse spectrale d'une sinusoïde. En principe, on devrait les tester en les multipliant par la sinusoïde avant de calculer la TFD du résultat. En fait, c'est inutile et on peut directement étudier les TFD de chaque fenêtre, puisque cette multiplication correspond dans le domaine fréquentiel à une convolution avec des impulsions.

Créer, et représenter sur un même graphe, les 4 fenêtres précédentes f1, f2, f3 et f4, avec un nombre de points $N = 32$. On prendra comme paramètres additionnels 5 pour la fenêtre de Kaiser et 20 pour la fenêtre de Chebychev. Créer également une fenêtre rectangulaire f (commande `boxcar` ou `rectwin`). Obtenir les spectres d'amplitude F, F1, F2, F3 et F4, correspondant aux 5 fenêtres, entre les fréquences normalisées -0,5 et 0,5 (on pourra utiliser la commande `fftshift`). À l'aide de la commande `subplot`, représenter simultanément les 5 spectres.

Procéder de même que précédemment, mais en calculant les TFD sur 1024 points (ce qui revient à rajouter 992 zéros). Pour mieux mettre en évidence la forme du spectre de chaque fenêtre, on peut utiliser une échelle logarithmique en ordonnée (commande `semilogy`). Quelles conclusions peut-on tirer ?

Exercice 6 : filtrage - décimation, exemple d'un signal musical

Introduction :

Le traitement numérique du signal prend une place de plus en plus importante dans le monde industriel particulièrement dans le domaine du traitement des signaux musicaux. Les applications musicales du traitement de signal ont longtemps été le domaine réservé de spécialistes en lien avec la création artistique contemporaine et l'essor industriel des télécommunications. Ces développements extraordinaires, au cours des 20 dernières années, sont liés à la généralisation et la « démocratisation » des techniques de production et à la diffusion de données musicales par internet.

Il existe une grande variété de fonctions de traitement sonore dans les applications existantes, allant du filtrage au débruitage en passant par différents types d'effets. Nous nous concentrerons ici sur des traitements élémentaires très répandus, à savoir, le filtrage et la décimation.

L'objectif pédagogique de ce TD est de donner une formation essentiellement pratique dans le domaine du traitement numérique du signal en faisant la liaison entre les fondements théoriques et les applications. L'idée consiste à mettre en application les outils mathématiques étudiés dans le module SIC à un signal musical. On se propose donc de manipuler un signal audio pour présenter les concepts de traitement du signal 1D, notamment les propriétés fréquentielles, les notions de filtrage. Dans ce contexte, des résultats rapides peuvent être