Télécom-Nancy 2020-2021
Module MAP - Apprentissage

Variables aléatoires, feuille 4, corrections

Exercice 1 Une expérience aléatoire e a six résultats possibles $\omega_1, ..., \omega_6$ de probabilités respectives $P(\omega_1) = 0,1; P(\omega_2) = 0,1; P(\omega_3) = 0,2; P(\omega_4) = 0,1; P(\omega_5) = 0,3; P(\omega_6) = 0,2$.
On définit la variable aléatoire réelle X telle que $X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 2; X(\omega_3) = 1; X(\omega_4) = 2; X(\omega_5) = 3; X(\omega_6) = 1$ et la variable aléatoire réelle Y telle que $Y(\omega_1) = 2, Y(\omega_2) = 1; Y(\omega_3) = 3; Y(\omega_4) = 1; Y(\omega_5) = 1; Y(\omega_6) = 3$.

1.1 Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

$X(\omega) = \{1, 2, 3\}$.
$P(X = 1) = P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_6\} = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5$.
$P(X = 2) = P(\{\omega_2, \omega_4\} = 0,1 + 0,1 = 0,2$.
$P(X = 1) = P(\{\omega_5\} = 0,3$.
$\mathbb{E}(X) = 1 \times 0,5 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3 = 1,8$.
$\mathbb{E}(X^2) = 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,3 = 4$.
$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 4 - 1,8^2 = 0,76$.

1.2 Soit F la fonction de répartition de X, déterminer-la.

$F(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$ donc:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ P(X = 1) = 0,5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ P(X = 1 \cup X = 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5 + 0,2 = 0,7 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ P(X = 1 \cup X = 2 \cup X = 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1.3 Déterminer la loi de probabilité de Y. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

$X(\omega) = \{1, 2, 3\}$.
$P(Y = 1) = P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\} = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5$.
$P(Y = 2) = P(\{\omega_1\} = 0,1$.
$P(Y = 1) = P(\{\omega_3, \omega_6\} = 0,2 + 0,2 = 0,4$.
Par exemple, $P((X = 1) \cap (Y = 2)) = P(\omega_1) = 0,1$, alors que $P(X = 1) \times P(Y = 2) = 0,5 \times 0,1 = 0,05$.
On a donc: $P((X = 1) \cap (Y = 2)) \neq P(X = 1) \times P(Y = 2)$, donc les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

1.4 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$.

Soit $T = X + Y$. On a $T(\omega_1) = X(\omega_1) + Y(\omega_1) = 1 + 2 = 3, T(\omega_2) = X(\omega_2) + Y(\omega_2) = 3, T(\omega_3) = 4, T(\omega_4) = 3, T(\omega_5) = 4, T(\omega_6) = 4$, donc $T(\Omega) = \{3, 4\}$.
$P(T = 3) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\} = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$.
$P(T = 4) = P(\{\omega_3, \omega_5, \omega_6\} = 0,2 + 0,3 + 0,2 = 0,7$.

1.5 Soit Z une variable aléatoire qui a la même loi de probabilité que Y, mais qui est indépendante de la variable aléatoire X. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire$X + Z$.

Soit $U = X + Z$. On a $U(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
$(U = 2) = (X = 1) \cap (Z = 1)$. Les variables X et Z sont indépendantes, donc les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants ; donc $P(Z = 2) = P(X = 1).P(Z = 1) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$ (Z a la même loi que Y).
$(U = 3) = [(X = 1) \cap (Z = 2)] \cup [(X = 2) \cap (Z = 1)]$. Les événements $[(X = 1) \cap (Z = 2)]$ et $[(X = 2) \cap (Z = 1)]$ étant incompatibles, on a: $P(U = 3) = P((X = 1) \cap (Z = 2)) + P((X = 2) \cap (Z = 1)) = P(X = 1).P(Z = 2) + P(X = 2).P(Z = 1) = 0,5 \times 0,1 + 0,2 \times 0,5 = 0,15$;
De même, on a:
$P(U = 4) = P(X = 3).P(Z = 1) + P(X = 1).P(Z = 3) + P(X = 2).P(Z = 2) = 0,37$.
$P(U = 5) = P(X = 3).P(Z = 2) + P(X = 2).P(Z = 3) = 0,11$.
$P(U = 6) = P(X = 3).P(Z = 3) = 0,12$.

Exercice 2 L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire 3 sujets au hasard ; il en traite un au choix. Ce candidat a révisé seulement 12 sujets. Soit X le nombre de sujets révisés parmi les trois sujets tirés. Quelle est la loi de probabilité de X?

Expérience aléatoire: l'étudiant tire au hasard 3 sujets parmi l'ensemble des sujets

$S = \{12 sujets connus, 8 sujets inconnus\}$. Soit X la variable aléatoire du nombre de sujets révisés parmi les 3 tirés.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
Les tirages étant équiprobables, on applique la règle du nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles. Le dénominateur sera donc: $C_{20}^3 = \frac{20!}{17!3!} = \frac{20.19.18}{6} = 1140$.

$$P(X = 0) = \frac{C_8^3}{1140} = \frac{\frac{8!}{5!3!}}{1140} = \frac{\frac{8.7.6}{6}}{1140} = \frac{56}{1140} = 0,049$$
$$P(X = 1) = \frac{C_8^2\, C_{12}^1}{1140} = \frac{\frac{8!}{6!2!}.12}{1140} = \frac{\frac{8.7}{2}.12}{1140} = \frac{336}{1140} = 0,295$$
$$P(X = 2) = \frac{C_8^1\, C_{12}^2}{1140} = \frac{8.\frac{12!}{10!2!}}{1140} = \frac{8.\frac{12.11}{2}}{1140} = \frac{528}{1140} = 0,463$$
$$P(X = 3) = \frac{C_{12}^3}{1140} = \frac{\frac{12!}{9!3!}}{1140} = \frac{\frac{12.11.10}{6}}{1140} = \frac{220}{1140} = 0,193$$

Exercice 3 On jette deux dés distincts. Soit S la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation le plus grand des deux numéros obtenus.

3.1 Quel est l'ensemble des réalisations possibles de S?

L'ensemble Ω des résultats possibles de l'expérience aléatoire est l'ensemble des 36 couples (i, j) tels que $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 6$.
L'ensemble des réalisations possibles de S est $S(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3.2 Exprimer, en tant qu'ensemble de résultats possibles de l'expérience aléatoire, les événements $\{S = 2\}$, $\{S < 4\}$, $\{S \geq 1\}$.

{ S = 2 } = { (1,2), (2,1), (2,2) }
{ S ¡ 4 } = { S $\leq$ 3} $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
$\{S > 1\} = \Omega$

3.3 Déterminer la loi de probabilité de S. La représenter graphiquement.

Il y a équiprobabilité sur Ω (on suppose que les dés sont équilibrés). Donc la probabilité de tout événement E est $P(E) = \dfrac{card(E)}{card(\Omega)}$. On a donc:
$P(S = 1) = P(\{(1, 1)\} = \frac{1}{36}$
$P(S = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ d'après la question 2
$P(S = 3) = P(\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 3)\} = \frac{5}{36}$
$P(S = 4) = P(\{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\} = \frac{7}{36}$
$P(S = 5) = P(\{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
$P(S = 6) = P(\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\} = \frac{11}{36}$
Et la représentation graphique est un diagramme en batons.

3.4 Déterminer la fonction de répartition de S. Tracer son graphe.

La fonction de répartition F de la variable aléatoire S est définie pour tout réel t par $F(t) = P(S \leq t)$.
Pour $t \leq 1$, $F(t) = 0$,
pour $1 < t \leq 2$, $F(t) = P(S = 1) = \frac{1}{36}$,
pour $2 < t \leq 3$, $F(t) = P(S = 1) + P(S = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$,
pour $3 < t \leq 4$, $F(t) = P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$,
pour $4 < t \leq 5$, $F(t) = P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3) + P(S = 4) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$,
pour $5 < t \leq 6$, $F(t) = P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3) + P(S = 4) + P(S = 5) = \frac{25}{36}$,
pour $t \geq 6$, $F(t) = 1$.
On obtient une fonction constante par morceaux.

3.5 Calculer $P(5 < S < 8)$.

$P(5 < S < 8) = P(S = 6) = \frac{11}{36}$ ou $P(5 < S < 8) = F(8) - F(6) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

3.6 Calculer l'espérance mathématique de S.

$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4.47$

3.7 Déterminer la médiane de S, le mode de S.

La médiane de S est la borne inférieure de l'ensemble des réels t tels que $F(t) \geq 1/2$. D'aprés la fonction de répartition calculée en question 4, la médiane est égale é 5.
Le mode est la valeur en laquelle le diagramme en batons de la loi de probabilité admet un maximum. D'après la question 4, le mode est égal à 6.

3.8 Calculer la variance de S.

$E(S^2) = 1 \times \frac{1}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 9 \times \frac{5}{36} + 16 \times \frac{7}{36} + 25 \times \frac{9}{36} + 36 \times \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$
$Var(S) = \frac{791}{36} - (\frac{161}{36})^2 = \frac{2555}{1296} \simeq 1.97145$

Exercice 4 Des étudiants sont soumis à un test composé de trois questions indépendantes de type QCM. On propose trois réponses à la premiére question, quatre à la seconde, cinq à la troisiéme; à chaque question, seule une des réponses est correcte. Chaque étudiant doit choisir une réponse à chaque question. Si sa réponse à la premiére question est correcte, il obtient trois points; à la seconde, trois points; à la troisiéme, quatre points.

4.1 Soit X la variable aléatoire réelle de la note obtenue au test par un étudiant qui choisit les réponses au hasard. Déterminer la loi de probabilité de X. A quelle note l'étudiant peut-il aspirer (en moyenne) ?

Considérons les événements Q_i : "L'étudiant répond correctement à la question né i", pour $i = 1, 2, 3$. Ce sont des événements mutuellement indépendants et de probabilités respectives : $P(Q_1) = 1/3; P(Q_2) = 1/4; P(Q_3) = 1/5$.
Notons X la v.a.r. de la note obtenue à l'épreuve en répondant au hasard. Sa loi de probabilité est :

x_i	0	3	4	6	7	10
p_i	0.4	0.334	0.1	0.067	0.0834	0.0167

$P(X = 0) = P(\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2} \cap \overline{Q_3}) = P(\overline{Q_1}).P(\overline{Q_2}).P(\overline{Q_3}) = 2/3.3/4.4/5 = 2/5 = 0.4$ par l'indépendance mutuelle

$P(X = 3) = P((Q_1 \cap \overline{Q_2} \cap \overline{Q_3}) \cup (\overline{Q_1} \cap Q_2 \cap \overline{Q_3})) = P(Q_1 \cap \overline{Q_2} \cap \overline{Q_3}) + P(\overline{Q_1} \cap Q_2 \cap \overline{Q_3})$
car les événements entre parenthéses sont incompatibles
$= P(Q_1).P(\overline{Q_2}).P(\overline{Q_3}) + P(\overline{Q_1}).P(Q_2).P(\overline{Q_3}) = 1/3.3/4.4/5 + 2/3.1/4.4/5 = 1/3$

$P(X = 4) = P(\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2} \cap Q_3) = P(\overline{Q_1}).P(\overline{Q_2}).P(Q_3) = 2/3.3/4.1/5 = 1/10 = 0.1$
$P(X = 6) = P(Q_1 \cap Q_2 \cap \overline{Q_3}) = P(Q_1).P(Q_2).P(\overline{Q_3}) = 1/3.1/4.4/5 = 1/15 = 0.067$
$P(X = 7) = P((Q_1 \cap \overline{Q_2} \cap Q_3) \cup (\overline{Q_1} \cap Q_2 \cap Q_3)) = P(Q_1 \cap \overline{Q_2} \cap Q_3) + P(\overline{Q_1} \cap Q_2 \cap Q_3)$
car les événements entre parenthèses sont incompatibles
$= P(Q_1).P(\overline{Q_2}).P(Q_3) + P(\overline{Q_1}).P(Q_2).P(Q_3) = 1/3.3/4.1/5 + 2/3.1/4.1/5 = 1/12$

$P(X = 10) = P(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3) = P(Q_1).P(Q_2).P(\overline{Q_3}) = 1/3.1/4.1/5 = 1/60$
L'espérance de la v.a.r. X étant égale à 2.55, ce sera la note moyenne attendue par l'étudiant.

4.2 On soumet les étudiants à un second test indépendant du premier, dont les modalités sont les mêmes. On décide d'attribuer comme note finale la note maximale des deux notes obtenues aux deux tests. Même question pour la note finale Y.

Notons X la note obtenue à la premiére épreuve, Y la note obtenue à la seconde épreuve. Elles ont même loi, celle de la question 1, et sont indépendantes. Soit N la note finale, $N = Sup(X, Y)$. Sa loi de probabilité est :

n_i	0	3	4	6	7	10
p_i	0.16	0.378	0.157	0.116	0.157	0.033

$P(N = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0).P(Y = 0) = (0.4)^2 = 0.16$ par indépendance

$P(N = 3) = P((X = 0 \cap Y = 3) \cup (X = 3 \cap Y = 0) \cup (X = 3 \cap Y = 3))$ 3 événements incompatibles
$= P(X = 0 \cap Y = 3) + P(X = 3 \cap Y = 0) + P(X = 3 \cap Y = 3) = (0.4 \times 0.334) \times 2 + (0.334)^2 = 0.3787$

ainsi de suite... L'espérance de la v.a.r. N étant égale à 3.887, ce sera la note moyenne attendue par l'étudiant.

Exercice 5 Ecrire la loi de probabilité de la loi Uniforme sur l'ensemble: $\{1, ..., n\}$; puis déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une telle loi.

Notons X une v.a.r. de telle loi. $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ et $P(X = i) = p_i = 1/n$, pour $i \in X(\Omega)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i.p_i = \sum_{i=1}^{n} i/n = 1/n.\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2.p_i = 1/n \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$Var(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n-1)(n+1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Exercice 6 Dans une population de 10 millions d'électeurs, 3 millions ont l'intention de voter pour le candidat C. On extrait 40 individus de la population par un tirage au hasard. Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation le nombre d'individus, parmi les 40 tirés, qui ont l'intention de voter pour C.

6.1 Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.

L'expérience aléatoire est "on interroge un électeur par tirage au hasard". Soit il a l'intention de voter pour le candidat C, avec probabilité $p = 3/10$, soit il n'en a pas l'intention. On répéte cette expérience $n = 40$ fois de faéon indépendante. Si on note X la v.a. du nombre d'individus ayant l'intention de voter pour C parmi les 40 interrogés, alors elle suit une loi binomiale de paramètres 40 et 0.3 : $\mathcal{B}(40, 0.3)$.

6.2 Calculer la probabilité que X soit compris au sens large entre 6 et 17.

$P(6 \leq X \leq 17) = \sum_{k=0}^{17} p_k - \sum_{k=0}^{5} p_k = 0.9680 - 0.0086 = 0.9594$ si on utilise une table de la loi binomiale, ou un logiciel donnant la fonction de répartition ($\sum_{k=0}^{K} p_k = P(X \leq K)$).

Exercice 7

7.1 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 3 et 0,5. Une variable aléatoire Y, indépendante de X, suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,4. Calculer $P(X + Y = 2)$.

$P(X+Y = 2) = P((X = 0 \cap Y = 2) \cup (X = 1 \cap Y = 1) \cup (X = 2 \cap Y = 0))$, 3 événements incompatibles
$= P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 0))$
$= P(X = 0).P(Y = 2) + P(X = 1).P(Y = 1) + P(X = 2).P(Y = 0))$ car les v.a. X et Y sont indépendantes
$= 0.125 \times 0.16 + 0.375 \times 0.48 + 0.375 \times 0.36 = 0.335$

7.2 Même question que précédemment, si X suit la loi binomiale de paramètres 3 et 0,5 et Y suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,5, les deux variables étant toujours indépendantes.

Dans ce cas, puisque X et Y sont indépendantes, et le paramètre p est le même, alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $5 = 3 + 2$ et 0.5. Alors:
$P(X + Y = 2) = C_5^2(0.5)^2(0.5)^3 = 10.(0.5)^5 = 0.3125$.

Exercice 8 Un transporteur aérien a observé que 5 % en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. S'il accepte jusqu'à 240 réservations alors qu'il ne dispose que de 235 sièges pour ce vol, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?

Soit X le nombre de personnes qui ne se présentent pas au départ parmi les 240 ayant réservé un siége. La variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 240$ et $p = 0.05$. La probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siége est donc:
$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (P(X = 0) + ... + P(X = 4)) = 1 - (C_{240}^0(0.05)^0(0.95)^240 + ... + C_{240}^4(0.05)^4(0.95)^236)$
Si on dispose d'un ordinateur, le calcul donne $P(X \geq 5) = 1 - 0.006573464 = 0.9934$
Sinon on peut obtenir une valeur approchée de cette probabilité en approchant la loi de

X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n.p = 240 \times 0.05 = 12$.
D'après la table de la loi de Poisson, ou un calcul par logiciel, on a $P(X \leq 4) = 0.0076$ donc la probabilité cherchée est environ $1 - 0.0076 = 0.9924$.
Remarque: on pourrait également modéliser le problème en comptant les personnes se présentant au départ et obtenir une loi $\mathcal{B}(240; 0.95)$ et calculer $P(Y \leq 235)$.

Exercice 9 Supposons que le nombre d'œufs pondus par un insecte X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la probabilité qu'un œuf meurt soit égale à $1 - p$ ($p \in]0, 1[$) et ceci indépendamment des autres œufs. On note Y le nombre d'oeufs éclos.

9.1 Déterminer la loi de Y sachant $\{X = n\}$.

Sachant$\{X = n\}$, on fait indépendamment n fois une expérience de Bernoulli: notons, pour chaque oeuf né numéroté par i ($i = 1, ..., n$) la variable X_i du résultat de l'expérience aléatoire "l'oeuf survit", c'est donc une variable de Bernoulli de paramètre p. X_i vaut 1 si l'oeuf survit, et 0 s'il meurt.
Ainsi on peut écrire la probabilité conditionnelle:
$P(Y = k/X = n) = \dfrac{P(Y = k, X = n)}{P(X = n)} = \dfrac{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, X = n)}{P(X = n)}$
parce que l'on somme n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes
$P(Y = k/X = n) = P(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = k/X = n) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$
Ainsi sachant $\{X = n\}$, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

9.2 Démontrer que le nombre d'œufs qui survivent suit une loi de Poisson de paramètre λp.

$P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k \cap X = n)$ (il est né plus de k oeufs et seuls k ont survécu)
$P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k/X = n)P(X = n)$ (théorème des probabilités totales)
$P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n\, e^{-\lambda}}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k\, (1-p)^{n-k}$
$P(Y = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\, p^k}{k!} \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{(n-k)!}\, (1-p)^{n-k}$
$P(Y = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\, p^k\, \lambda^k}{k!} \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\, (1-p)^{n-k}$
On fait le changement de variable $u = n - k$ et on obtient :
$P(Y = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\, p^k\, \lambda^k}{k!} \displaystyle\sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\lambda.(1-p))^u}{u!}$
$P(Y = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\, p^k\, \lambda^k}{k!}\, e^{\lambda.(1-p)} = \dfrac{e^{-p.\lambda}\, p^k\, \lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-p.\lambda}\, (p.\lambda)^k}{k!}$

et donc Y suit une loi de Poisson de paramètre $p.\lambda$.

Exercice 10 La cave de Robert contient 1000 bouteilles dont 200 d'un excellent Bordeaux qu'il réserve pour les grandes occasions (par exemple les samedis et dimanches) et 800 de Côtes de Toul (un petit cru local) pour les autres jours (les bouteilles de bordeaux sont rangées au hasard parmi les autres de façon à ne pas trop les mettre en évidence). La cave est mal éclairée et Robert, en trébuchant, éclate 12 bouteilles!

10.1 Quelle est la loi du nombre de bouteilles de Bordeaux cassées?

La probabilité de casser une bouteille de Bordeaux vaut $200/1000 = 0.2$, notons la p.
Si on considére l'expérience aléatoire "Robert trébuche sur une bouteille et la casse", soit c'est une bouteille de Bordeaux (avec probabilité p), soit c'est un Côte de Toul (avec probabilité $1-p$). On recommence cette expérience $n = 12$ fois, de façon non indépendante (on ne peut en effet pas casser deux fois la même bouteille !). Si on note X la variable du nombre de bouteilles de Bordeaux cassées, elle suit une loi hypergéométrique de paramètres $N = 1000$, $n = 12$ et $p = 0.2$.

10.2 Quelle est la probabilité que 4 bouteilles de Bordeaux (et donc aussi de 8 Côtes de Toul, mais c'est moins grave) soient définitivement perdues pour son gosier? Comment obtenir une approximation de cette probabilité?

$$P(X=4) = \frac{C_{200}^4\, C_{800}^8}{C_{1000}^{12}} = \frac{200!\, 800!\, 12!\, 988!}{4!\, 196!\, 8!\, 792!\, 1000!} = 0.133$$

Sous certaines conditions, on peut approcher une loi hypergéométrique par une loi binomiale. N est grand devant n ($1000 \geq 10 \times 12 = 120$), donc les conditions sont satisfaites. On peut alors approcher la loi de X par une loi binomiale de paramètres n et p, donc $\mathcal{B}(12; 0.2)$. Alors la probabilité approchée sera:
$P(X=4) \simeq C_{12}^4\,(0.2)^4\,(0.8)^8 = 495\,(0.2)^4\,(0.8)^8 = 0.1329$

Exercice 11 On lance une pièce juste 3 fois. Soit X le nombre de *Face* obtenu lors des deux premiers lancers, et soit Y le nombre de *Face* obtenu lors des deux derniers lancers.

11.1 Trouver la loi de probabilité jointe de X et Y.

La loi jointe de (X, Y) est:

(X,Y)	0	1	2	x_i
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	2/8	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
y_i	1/4	1/2	1/4	1

On peut remarquer (dernière colonne et dernière ligne) que X et Y ont la même loi de probabilité.

11.2 Calculer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

On rappelle $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
Il suffit de calculer la moyenne et l'écart-type d'une des deux variables car elles ont même loi.
$E(X) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 = 1 = E(Y)$
$E(X^2) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 4 \times 1/4 = 3/2 = E(Y^2)$
$Var(X) = 3/2 - 1 = 1/2 = Var(Y)$ donc $\sigma(X) = \sigma(Y) = 1/\sqrt{2} = 0.7071$
$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = (0 + 1 \times 1 \times 2/8 + 1 \times 2 \times 1/8 + 2 \times 1 \times 1/8 + 2 \times 2 \times 1/8) - 1 \times 1 = 0.25$
Donc $\rho(X,Y) = \dfrac{0.25}{(0.7071)^2} = 1/2$. Ceci est représentatif d'une corrélation positive faible.

Exercice 12 On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie non truquée. Soient X le nombre de séquences *Pile-Face* (dans cet ordre) obtenues (par exemple, la séquence $PPFP$ donne $X = 1$; $FPPP$ donne $X = 0$, $PFPF$ donne $X = 2$; etc.) et Y le nombre de *Pile* obtenus.

12.1 Donner la loi du couple (X,Y).

La loi jointe de (X,Y) est:

(X,Y)	0	1	2	3	4	x_i
0	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	5/16
1	0	3/16	4/16	3/16	0	10/16
2	0	0	1/16	0	0	1/16
y_i	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1

12.2 Montrer que les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes.

Si les 2 variables étaient indépendantes, on aurait par exemple $P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0).P(Y = 0)$ or ici $P(X = 0, Y = 0) = 1/16$ et $P(X = 0).P(Y = 0) = 5/16 \times 1/16 = 0.019 \neq 0.0625$. Donc elles ne sont pas indépendantes.

12.3 Calculer Cov(X,Y). Que peut-on faire comme commentaire?

$E(X) = 0 \times 5/16 + 1 \times 10/16 + 2 \times 1/16 = 12/16 = 0.75$
$E(Y) = 0 \times 1/16 + 1 \times 4/16 + 2 \times 6/16 + 3 \times 4/16 + 4 \times 1/16 = 32/16 = 2$
$E(X^2) = 0 \times 5/16 + 1 \times 10/16 + 4 \times 1/16 = 14/16 = 0.875$
$E(Y^2) = 0 \times 1/16 + 1 \times 4/16 + 4 \times 6/16 + 9 \times 4/16 + 16 \times 1/16 = 80/16 = 5$
$Var(X) = 0.875 - (0.75)^2 = 0.3125$ donc $\sigma(X) = 0.559$
$Var(Y) = 5 - 2^2 = 1$ donc $\sigma(Y) = 1$
$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = 1.5 - 0.75 \times 2 = 0$
Remarquons que la covariance de X et Y est nulle, alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes !
Donc $\rho(X,Y) = 0$. Ceci est représentatif de deux variables aléatoires non corrélées, mais pas indépendantes.