$\max(F(x) = c^T x)$ ← obj

$$\begin{cases} Ax \le b & \leftarrow \text{contraintes} \\ x \ge 0 & \end{cases}$$

Forme cano. pure

$\min f = -\max(-f)$

Ensemble des contraintes = polynôme convexe.

-> max F. atteint sur un sommet du polynôme

Forme standard :

$\max [F(x) = c^T x]$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Hypothèse de rang plein :

$A\,(m \times n)$ avec $rg(A) = m \le n$

- $m < n$ -> infinité de sol
- $m = n$ -> $x = A^{-1} b$

. Solution de base :

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$ si $x_H = 0$

. Solution de base réalisable

si $x_H = 0$ et $x_B = A_B^{-1} b$.

Au plus C_n^m solutions de base

Coûts réduits :

$\forall x \in \mathcal{D}_R$: $F(x) = F(\underline{x}) + L_H^T x_H$

et $L_H^T = c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H$

Variable entrante :

$e = \arg\max \{ (L_H)_j > 0 \}$

si minimisation on prend le min

Variable sortante :

on utilise les contraintes de positivité et on prend celle correspondant à la valeur minimale positive.

Méthode des dictionnaires :

On exprime les variables de base x_B et F en fonction des variables hors-base x_H.

Finitude du simplexe :

1) $L_H < 0$ -> unique optimum.

2) $L_H \le 0$ -> deux cas

a) $(L_H)_e = 0$ et $x_e \ge 0$

l'optimum n'est pas unique

b) $(L_H)_e = 0$ et $x_e = 0$

-> base dégénérée (une variable de base est nulle).

3) $(L_H)_e > 0$ et x_e non borné

alors F n'est pas majorée.

Th : si au cours du simplexe on ne rencontre pas de solution dégénérée alors il possède un nombre fini d'étapes.

Règle de Bland :

on fait rentrer ou sortir en cas de choix la variable d'indice minimal

---

Initialisation du simplexe.

- $b > 0$ -> $Ax + e = b$

Solution : $x = 0$; $e = b \ge 0$

Problème auxiliaire :

$$\begin{cases} \min \sum_i a_i \\ Ax + a = b \\ x \ge 0 \\ a \ge 0 \end{cases}$$

a_i : variables artificielles

PL admet une solu° réalisable <=> PLA " avec $a = 0$.

Avec B^* base optimale.

$x_{B^*}^* = A_{B^*}^{-1} b - A_{B^*}^{-1} A_{H^*} x_{H^*}$

avec $A_{H^*}^* = A_B^{-1} A_{H^*}$

lecture des coefficients des variables hors-base dans le dictionnaire final en changeant le signe.

. Condition d'optimalité :

$L_{H^*}^T = c_{H^*}^T - c_{B^*}^T A_{H^*}^* \le 0$

. influence d'un coefficient de F qu'on remplace et on déduit la cond.

. Condition de faisabilité :

$x_{B^*} = A_{B^*}^{-1} b \ge 0$

. influence d'un coefficient du second membre des contraintes.

. Détermination de $A_{B^*}^{-1}$:

- si la j^e colonne de A_{H^*} est égale à e^i alors la i^e colonne de $A_{B^*}^{-1}$ est égale à la j^e colonne de $A_{H^*}^*$.
- si la j^e colonne de A_{B^*} est égale à e^i alors la i^e colonne de $A_{B^*}^{-1}$ est égale au j^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Soit :

- $(A_{H^*})^j = e^i \Rightarrow (A_{B^*}^{-1})^i = (A_{H^*}^*)^j$
- $(A_{B^*})^j = e^i \Rightarrow (A_{B^*}^{-1})^i = e^j$

Flot : $\sum f_{ij}$; réalisable si $\forall (i,j)$ $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$

$(i) \xrightarrow{f_{ij}} (j)$

$\underset{f,v}{\text{Max}} \, [F = v]$ $\begin{cases} Af + v = 0 \\ f \leq c \\ f \geq 0 \end{cases}$ A matrice d'incidence

$$f = \begin{pmatrix} (f_{sh})_{h \in S(s)} \\ \vdots \\ f_{ij} \\ (f_{it})_{i \in P(t)} \end{pmatrix} ; \; v = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{i \in P(t)} f_{it}$$

Coupe de $G = (E, \Gamma, c)$ possédant une seule source et un seul puit est une partition des sommets $(X, \bar{X})$,
$E = X \cup \bar{X}$; $X \cap \bar{X} = \emptyset$; $s \in X$; $t \in \bar{X}$ et $c(X, \bar{X}) = \sum c_{ij}$

Théorème de Ford-Fulkerson $G = (E, \Gamma, c)$ graphe valué
$\forall$ flot réalisable et toute coupe $(X, \bar{X})$: $v(f) \leq c(X, \bar{X})$

Arête (i,j) saturée $\Rightarrow c_{ij} = f_{ij}$ et insaturée si $f_{ij} = 0$

. Coupe minimale : pour f toute arête de X vers $\bar{X}$ est saturée et toute arête de $\bar{X}$ vers X est insaturée. Si la coupe est min le flot est max.

. Flot réalisable $\Leftrightarrow \nexists$ de chaine améliorante $\Rightarrow f(i_p, i_{p+1}) < c(i_p, i_{p+1})$ pour arête directe et $f(i_p, i_{p+1}) > 0$ si arête inverse.

. Avec des bornes : $(i) \xrightarrow{\boxed{b_{ij} \;\; B_{ij}}} (j)$

	directe	inverse
$\not A$	$f_{ij} < B_{ij}$	$f_{ij} > b_{ij}$
A	$\varepsilon_1 = B_{ij} - f_{ij} > 0$	$\varepsilon_2 = f_{ij} - b_{ij} > 0$

Graphe auxiliaire : $f'_{ij} = f_{ij} - b_{ij}$ et $c'_{ij} = B_{ij} - b_{ij}$

On ajoute s' et t' et arêtes s' à $j \neq s$ et $j \neq t$ à t'
Puis arc de capacité infini entre s et t

de s' à un sommet : $\sum b$ entrant
de un sommet à t' : $\sum b$ sortant

$f = \min(c_{ij})$ pour aller de s' au sommet

Heuristique :

$\max F(x) = 16x_1 + 18x_2 + 15x_3$
$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0; 1\} \end{cases}$

$\forall x \in \{0;1\}$; $F(x) \leq 49 = b_0$
$0 \leq e : 7 \ldots \leq 7 = e_0$

-	-	-
b_0		e_0

1	-	-
$b_1 = 43$		$e_1 = 6$

STOP si $e_1 < 0$ ou $b_1 \leq \bar{F}$

F particulier en prenant un critère d'ordre puis qui servira à effectuer les comparaisons.

* Avec une valeur négative :
on pose $y_i = 1 - x_i \in \{0; 1\}$

Méthode des coupes entières :

$$(P2) \begin{cases} \underset{x}{\max} (F(x)) \\ Ax \leq b \\ Cx \leq d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 = 1,5$	$x_2 = 5$
$F^*_{max} = 57,5$	

$x_1 \leq 1$ | $x_1 \geq 2$

* Penser à vérifier les contraintes en tenant compte des restrictions imposées sur x_1 et x_2.
* En descendant F^*_{max} diminue, on coupe la branche si on a plus d'amélioration possible.