Chapitre : Arithmétique flottante

Introduction I

La représentation en *virgule flottante* (appelée aussi *notation scientifique* et *floating point representation* en anglais) est naturelle pour écrire un nombre grand ou petit en valeur absolue. Exemples :

$A = 6,02252\ 10^{23}$ (le nombre d'Avogadro)
$h = 6,625\ 10^{-34}$ [*joule seconde*] (la constante de Planck)

Elle comporte deux parties :

- la mantisse (ici $6,02252$ et $6,625$) ;
- la partie exposant (23 et -34), le 10 est ici obligatoire car c'est la base choisie pour écrire la mantisse et l'exposant.

Introduction II

La représentation est *normalisée* si [a] : $c_0, c_1 c_2 c_2 c_3 \ldots$ avec $c_0 \neq 0$

a. Autre convention $0, c_1 c_2 c_2 c_3 \ldots$ avec $c_1 \neq 0$

Remarques :

1. Tout nombre réel (sauf zéro) peut s'écrire avec cette notation en virgule flottante normalisée avec en général un nombre de chiffres infini pour la mantisse (résultat provenant de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) ; on peut aussi remarquer que certains nombres peuvent s'écrire de deux façons, par exemple $0,999\cdots = 1$.
2. Un changement de base peut introduire quelques bizarreries dans l'écriture d'un nombre alors que celle-ci est anodine dans la base initiale, par exemple (cf TD) :

$$(0,2)_{10} = (0,\ 0011\ 0011\ 0011\ \ldots)_2.$$

Introduction III

3. La mantisse d'un nombre rationnel écrit en virgule flottante est soit finie, soit infinie mais dans ce cas avec un pattern périodique de chiffres, cf exemple précédent ou encore :

$$\frac{1}{3} = (0, 33333.....)_{10}, \ \frac{1}{7} = (0, \underline{142857}\,142857\,142857.....)_{10}$$

Définition des ensembles de flottants I

Dans un ordinateur on est obligé de restreindre le nombre de chiffres pour les mantisses et de limiter l'étendue des exposants ! On obtient alors des ensembles notés $\mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, e_{max})$ définis à partir de 4 entiers :

- β l'entier ($\beta \geq 2$) définissant la base ;
- p le nombre de chiffres de la mantisse ;
- e_{min} l'exposant minimum et e_{max} l'exposant maximum.

correspondant à tous les nombres réels x s'écrivant :

$$x = s \left(\sum_{i=0}^{p-1} c_i \beta^{-i} \right) \beta^e, \text{ où } \begin{cases} s = \pm 1 \text{ le signe} \\ 0 \leq c_i \leq \beta - 1, \forall i \\ e_{min} \leq e \leq e_{max} \end{cases}$$

la représentation étant normalisée si $c_0 \neq 0$. Rmq : la partie mantisse pourra s'écrire $(c_0, c_1 \dots c_{p-1})_\beta$.

Définition des ensembles de flottants II

Pour représenter 0 on utilise une écriture spéciale en ne mettant que des 0 dans la mantisse (ce qui est logique) et un exposant de $e_{min} - 1$.

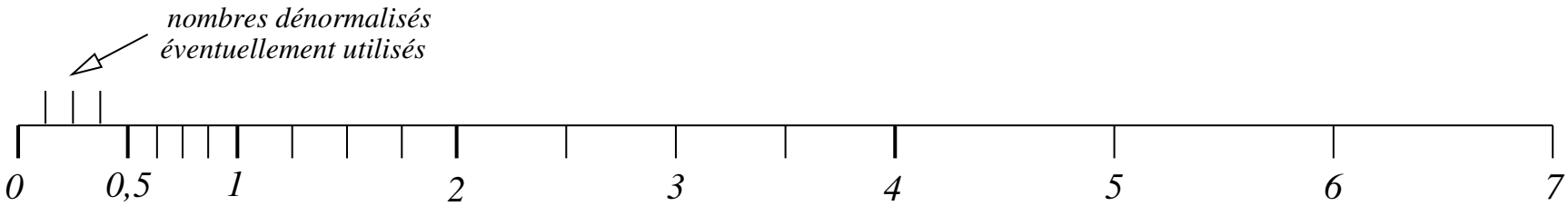
exercice : l'ensemble de flottants "jouets" $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$

1. Trouver tous les nombres normalisés positifs (plus zéro) de $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$
2. Les dessiner comme les traits d'une règle graduée.
3. Rajouter les (3) nombres dénormalisés positifs **non redondants**. Exemple d'un nombre dénormalisé redondant : $(0, 10)_2 \times 2^1$ est une écriture (non normalisée) de 1 (avec notre convention l'écriture normalisée de 1 est $(1, 00) \times 2^0$).

Définition des ensembles de flottants III

Solution :

0		
$1,00\ 2^{-1}$	$=$	$(0,5)_{10}$
$1,01\ 2^{-1}$	$=$	$(0,625)_{10}$
$1,10\ 2^{-1}$	$=$	$(0,750)_{10}$
$1,11\ 2^{-1}$	$=$	$(0.875)_{10}$
$1,00\ 2^{0}$	$=$	1
$1,01\ 2^{0}$	$=$	$(1,25)_{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1,11\ 2^{2}$	$=$	$(7)_{10}$



Nombres dénormalisés non redondants : $(0,11)_2 \times 2^{-1} = (0,375)_{10}$,
$(0,10)_2 \times 2^{-1} = (0,25)_{10}$, $(0,01)_2 \times 2^{-1} = (0,125)_{10}$,

Définition des ensembles de flottants IV

Remarques et notations :

- Dans les intervalles $[\beta^e, \beta^{e+1}]$ et $[-\beta^{e+1}, -\beta^e]$ l'incrément entre deux nombres flottants est constant et égal à β^{1-p+e} : pour obtenir le nombre suivant ou précédent, on ajoute/retranche

$$(0,0\ldots01)_\beta \times \beta^e = \beta^{1-p} \times \beta^e = \beta^{1-p+e}$$

- Pendant assez longtemps on a utilisé uniquement les nombres normalisés (plus zéro) de ces ensembles. Cependant, comme la figure précédente le montre, il en résulte un "vide" entre le plus petit nombre normalisé et le zéro. L'utilisation des nombres dénormalisés non redondants (cf figure précédente) permet d'aller vers zéro plus graduellement.

Définition des ensembles de flottants V

- On notera M le plus grand nombre positif de $\mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, e_{max})$:

$$M = \left(\sum_{i=0}^{p-1} (\beta - 1)\beta^{-i} \right) \beta^{e_{max}} = (1 - \beta^{-p})\beta^{e_{max}+1},$$

m le plus petit nombre normalisé positif :

$$m = (1, 00..0)_\beta \beta^{e_{min}} = \beta^{e_{min}},$$

et μ le plus petit nombre dénormalisé (> 0) :

$$\mu = (0, 00..1)_\beta \beta^{e_{min}} = \beta^{1-p+e_{min}}.$$

- On notera $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$, $\oslash$ les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, effectuées par l'ordinateur.

Définition des ensembles de flottants VI

- Dans les systèmes flottants actuels on rajoute des nombres spéciaux comme $+inf$, $-inf$ (inf comme infini) et NaN (pour Not a Number) qui ont une représentation spéciale (utilisant en particulier un exposant de $e_{max}+1$). Enfin, on notera que, du fait du bit de signe, le zéro a deux représentations [1] qui conduisent à des résultats différents sur quelques calculs (par exemple $1 \oslash +0$ donnera $+inf$ alors que $1 \oslash -0$ donnera $-inf$).

exercice

Démontrer la formule pour M :

$$M = \left(\sum_{i=0}^{p-1} (\beta - 1)\beta^{-i} \right) \beta^{e_{max}} = (1 - \beta^{-p})\beta^{e_{max}+1}$$

1. que l'on notera $+0$ et -0 : si mathématiquement c'est le même nombre, informatiquement non !

Approximation d'un réel par un flottant I

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, en général $x \notin \mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, e_{max})$ et on associe à x une approximation $fl(x) \in \mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, e_{max})$ avec le critère suivant :

$fl(x)$ est le flottant le plus proche de x et si x est à égale distance de deux flottants celui dont le dernier chiffre est pair est choisi (à partir de maintenant on suppose que β est pair).

Attention cependant cette règle ne fonctionne pas pour les nombres de magnitude supérieure à M : en toute rigueur il faut considérer d'abord $\widetilde{fl}(x)$ comme étant la même opération mais à valeur dans $\mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, +\infty)$ et si :

- $|\widetilde{fl}(x)| > M$ alors $fl(x)$ est le nombre flottant spécial $sign(x)inf$: on dit qu'il y a **"overflow"** !
- et sinon $fl(x) = \widetilde{fl}(x)$.

Approximation d'un réel par un flottant II

Seuil d'overflow : avec cette règle M ne correspond pas exactement au seuil d'overflow. Dans $\mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, +\infty)$ le nombre flottant juste après M est $\beta^{e_{max}+1}$, dont le dernier chiffre de la mantisse est pair. Ainsi le seuil d'overflow est exactement :

$$\tilde{M} := \frac{M + \beta^{e_{max}+1}}{2}$$

mais du fait de la règle d'arrondi $\tilde{fl}(\tilde{M}) = \beta^{e_{max}+1}$ (et pas M) et donc $fl(\tilde{M}) = Inf$. Ainsi tout nombre réel x tel que $|x| < \tilde{M}$ doit être codé par un flottant "usuel" (cad qui n'est pas un nombre flottant spécial comme $\pm Inf$ ou Nan).

Approximation d'un réel par un flottant III

exercice

On se place dans l'ensemble de flottants $\mathcal{F} = \mathbb{F}(10, 4, -2, 2)$.

1. Calculer les nombres caractéristiques [a] sera M, m, μ et $\mathbf{u}$ de cet ensemble ainsi que le seuil d'overflow $\tilde{M}$.
2. Donner la valeur des quantités suivantes :
   $fl(1,2346)$, $fl(1.2345)$, $fl(999,95)$, $fl(999,94999999)$, $fl(10.24\ .10^{-1})$, $fl(1,155\ .10^{-3})$.

---

a. Rmq : $\mathbf{u} := \frac{1}{2}\beta^{1-p}$ est le "epsilon machine" quantité définie ci-après.

Approximation d'un réel par un flottant IV

Epsilon machine : On montre que si $|x| \in [m, \tilde{M}[$ alors l'erreur relative est bornée par un nombre appelé epsilon machine :

$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \mathbf{u} := \frac{\beta^{1-p}}{2}.$$

Preuve : Soit donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \in [m, \tilde{M}[$. Il existe $e \in [\![e_{min}, e_{max}]\!]$ tel que $|x| \in [\beta^e, \beta^{e+1}[$. Nous avons vu que l'incrément entre deux flottants dans la plage $[\beta^e, \beta^{e+1}]$ est égal à β^{1-p+e}, ainsi l'erreur absolue est bornée par la moitié de cette quantité (approximation par le flottant le plus proche) :

$$ea = |x - fl(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-p+e}$$

Approximation d'un réel par un flottant V

On peut alors borner l'erreur relative en divisant par le plus petit nombre de la plage, d'où :

$$er = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{ea}{\beta^e} = \frac{1}{2}\beta^{1-p} \quad \square$$

Une façon plus pratique de noter cette erreur relative est d'écrire que (cf TD) :

$$fl(x) = x(1+\epsilon), \text{ avec } |\epsilon| \leq \mathbf{u}$$

Lorsque $|x| \in [0, m[$ avec $fl(x) \neq x$ on dit qu'il y a **"underflow"**. Dans ce cas l'erreur relative n'est plus maîtrisée (l'erreur absolue est, par contre, bornée par $\mu/2$). On passe d'une erreur relative quasi bornée par $\mathbf{u}$ au voisinage de $|m|$ à une erreur relative de 1 (pour les nombres non nuls très proches de 0 et qui seront codés par 0, c'est à dire tous les nombres réels dans $[-\mu/2, \mu/2]$), excepté 0).

Règles des 4 opérations usuelles

Les 4 opérations usuelles sur les flottants doivent respecter le critère suivant : tout se passe comme si le calcul était exact puis arrondi au flottant le plus proche, c'est à dire que si $\cdot$ est l'une des 4 opérations élémentaires $(+,-,\times,/)$ et $\odot$ l'opération machine correspondante, et x et y sont deux nombres flottants alors :

$$x \odot y = fl(x \cdot y)$$

et donc en l'absence d'overflow et d'underflow on a :

$$x \odot y = (x \cdot y)(1+\epsilon), \text{ avec } |\epsilon| \leq \mathbf{u}$$

Remarque : la norme sur les flottants impose aussi cette même règle pour la racine carrée : si x est un flottant et *sqrt* la racine carrée en machine, on doit obtenir :

$$sqrt(x) = fl(\sqrt{x}) \quad \text{d'où : } sqrt(x) = \sqrt{x}(1+\epsilon) \text{ avec } |\epsilon| \leq \mathbf{u}$$

Le théorème de Sterbenz I

On peut montrer que la soustraction entre deux flottants x et y de même signe est exacte s'ils sont de magnitude voisine, plus exactement on a le :

théorème de Sterbenz

Soit $\mathbb{F}(\beta, p, e_{min}, e_{max})$ un ensemble de flottants et $x \in \mathbb{F}$, $y \in \mathbb{F}$ de même signe tels que $x/2 \leq y \leq 2x$ (s'ils sont positifs) ou tels que $2x \leq y \leq x/2$ (s'ils sont négatifs) alors [a] :

$$x \ominus y = x - y$$

a. En toute rigueur cette relation est vraie si les nombres dénormalisés non redondants sont utilisés sinon il faut rajouter l'hypothèse qu'il n'y a pas d'underflow.

Le théorème de Sterbenz II

Preuve : en utilisant le fait que certaines propriétés restent vraies en arithmétique flottante :

- l'addition $\oplus$ est toujours commutative ($x \oplus y = y \oplus x$)
- le moins "unaire" exact : $\ominus x = -x$,
- $\ominus(\ominus y) = \oplus y = y$,

on peut se restreindre (exercice) au cas où les deux flottants x et y sont positifs et tels que $x/2 \leq y \leq x$.

x et y étant des flottants ils s'écrivent $x = (x_0, x_1 \ldots x_{p-1})_\beta \beta^e$ et $y = (y_0, y_1 \ldots y_{p-1})_\beta \beta^{e'}$ avec $e' \leq e$ (puisque $y \leq x$).

- Si les exposants e et e' sont égaux, il est clair que $x \ominus y = x - y$ puisque le resultat de la soustraction exacte tient sur p chiffres (ou moins).

Le théorème de Sterbenz III

- Si x n'est pas un flottant normalisé alors $e = e' = e_{min}$ et de même on se trouve dans le cas où les exposants sont égaux.
- Si x est un flottant normalisé alors nécessairement $e' = e$ ou $e' = e - 1$. En effet si $e' < e - 1$ alors :

$$y < \beta^{e-1} = \frac{\beta^e}{\beta} \leq \frac{\beta^e}{2} \text{ car } \beta \geq 2$$

or on a $x \geq \beta^e$ ce qui contredit $y \geq x/2$. Le seul cas à examiner est donc lorsque $e' = e - 1$ (ce qui implique $y < \beta^e$). **Par l'absurde :** supposons donc que le résultat de la soustraction tienne sur $p + 1$ chiffres, alors :

$$x - y \geq (\underbrace{1, 0 \ldots 01}_{p+1 \text{ chiffres}})_\beta \beta^e = \beta^e + \beta^{e-p}$$

Le théorème de Sterbenz IV

Comme $x/2 \leq y$, il vient :

$$x \geq y + \beta^e + \beta^{e-p} \Rightarrow x \geq \frac{x}{2} + \beta^e + \beta^{e-p} \iff \frac{x}{2} \geq \beta^e + \beta^{e-p}$$

soit finalement $y \geq \beta^e + \beta^{e-p}$ contradiction avec $y < \beta^e$ $\square$.

Remarque : si la soustraction de deux flottants voisins est exacte, elle est quand même à l'origine de certains problèmes de perte de précision car les nombres x et y résultent le plus souvent de calculs qui comporteront des erreurs et la soustraction amplifiera ces mêmes erreurs (cf TD).

Flottants utilisés sur ordinateurs I

Les deux ensembles de flottants les plus utilisés sur ordinateurs sont :

1. $\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$ appelés flottants "simple précision" dont le codage tient sur 4 octets,
2. $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$ appelés flottants "double précision" tenant sur 8 octets.

et voici leurs nombres caractéristiques (valeurs approchées) :

ensembles de flottants	$\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$	$\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$
$\mathbf{u} \simeq$	$5.96\ 10^{-8}$	$1.11\ 10^{-16}$
$m \simeq$	$1.17\ 10^{-38}$	$2.225\ 10^{-308}$
$M \simeq$	$3.40\ 10^{38}$	$1.79\ 10^{308}$

Remarque : sauf problème d'overflow ou d'underflow toute multiplication/division par une puissance de 2 est exacte avec ces nombres flottants.

Un exemple de calcul d'erreur I

Pour faire une analyse de précision de calculs menés avec les flottants, on fait l'hypothèse *qu'il n'y a pas eu d'overflow ni d'underflow*.
Exemple : on considère a, b et c des flottants et on veut analyser la précision de $x_c := (a \otimes b) \oslash (c \otimes d)$. Si on fait cette hypothèse alors :

$$\begin{aligned} a \otimes b &= (a \times b)(1+\epsilon_1), \quad |\epsilon_1| \leq \mathbf{u} \\ c \otimes d &= (c \times d)(1+\epsilon_2), \quad |\epsilon_2| \leq \mathbf{u} \\ (a \otimes b) \oslash (c \otimes d) &= \frac{(a \otimes b)}{(c \otimes d)}(1+\epsilon_3), \quad |\epsilon_3| \leq \mathbf{u} \end{aligned}$$

soit finalement :

$$x_c = \underbrace{\frac{a \times b}{c \times d}}_{x} \underbrace{\frac{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}{(1+\epsilon_2)}}_{(1+\delta)}$$

Un exemple de calcul d'erreur II

où, comme $\mathbf{u} << 1$, l'erreur relative $|\delta|$ est "quasi-bornée" par $3\mathbf{u}$. Une manière élégante de traiter ce problème est d'utiliser le résultat suivant :

lemme de simplification

Si $|\epsilon_k| \leq \mathbf{u}$, $s_k = \pm 1$ pour $k = 1, \ldots n$ et si $n\mathbf{u} < 1$ alors :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k)^{s_k} = 1 + \delta_n \quad \text{avec} \quad |\delta_n| \leq \frac{n\mathbf{u}}{1-n\mathbf{u}}$$

Preuve : cf TD 1.

En utilisant ce lemme dans l'exemple précédent, on obtient donc que :

$$|\delta| \leq \frac{3\mathbf{u}}{1-3\mathbf{u}} \simeq 3\mathbf{u}$$

Un exemple de calcul d'erreur III

Rmq : En général les bornes ainsi obtenues sont (bien) plus grandes que l'erreur relative "exacte" (il faut pour s'en approcher que chaque opération soit réalisée avec l'erreur maximale et qu'il n'y ait aucune compensation dans les termes en ϵ_k).