TELECOM Nancy 2A 2018-19

Graphes et Recherche Opérationnelle

Feuille 2 : Programmation linéaire - Propriétés des solutions

Rappel sur les solutions de base. On considère un programme linéaire sous forme standard :

$$(1) \quad \begin{cases} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$ avec $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$. Le vecteur $\mathbf{c}$ est donné dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La matrice A peut se décomposer, à une permutation près des colonnes, sous la forme :

$$A = (A_B \mid A_H)$$

où la matrice carrée A_B de taille $m \times m$ est *inversible*. Une *solution de base* $\mathbf{x}$ associée s'écrit alors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{x}_H = 0,$$

où $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m$ sont les *variables de base* et $\mathbf{x}_H \in \mathbb{R}^{n-m}$ sont les *variables hors-base.*

Exercice 1. *Solutions de base réalisables*

Soit le PL suivant : $\max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R} \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ avec $\mathcal{D}_R = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 5,\ x_2 \leq 5,\ \mathbf{x} \geq 0\right\}$ et $\mathbf{c} = (1, 3)^\top$.

1. Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}_R$.
2. Mettre ce PL sous la forme standard : $\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4} \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ avec $A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
3. Déterminer toutes les solutions de base ; dessiner la projection des solutions de base réalisables dans le plan (x_1, x_2).

Exercice 2. *Propriétés géométriques des solutions de base réalisables*

On note $\mathcal{D}_R$ l'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire (1) sous forme standard c-à-d l'ensemble des vecteurs vérifiant toutes les contraintes de (1) :

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}.$$

On dit qu'un point $\mathbf{x}$ de $\mathcal{D}_R$ est *sommet* (ou un *point extrême*) s'il n'existe pas de points $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ de $\mathcal{D}_R$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ avec $0 < \lambda < 1$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_R$ est convexe.
2. Montrer que toute solution de base réalisable est un sommet de $\mathcal{D}_R$ (raisonner par l'absurde).
3. (*Question subsidiaire*) Inversement, montrer que tout sommet de $\mathcal{D}_R$ est une solution de base réalisable.
4. On suppose que $\mathcal{D}_R$ est borné et que l'optimum de F existe. Montrer que l'optimum est atteint en un sommet de $\mathcal{D}_R$.

   On admettra le résultat suivant (Théorème de Minkowski) : *Si $\mathcal{D}_R$ est non-vide et borné, tout point de $\mathcal{D}_R$ est combinaison convexe des sommets.*

Exercice 3. *Un premier algorithme de résolution par exploration exhaustive*

L'exercice précédent indique que si le programme linéaire (1) possède une solution optimale finie, elle est atteinte en un sommet de $\mathcal{D}_R$. De plus, les sommets sont exactement les solutions de bases réalisables.

1. Combien $\mathcal{D}_R$ a-t-il au plus de sommets ?
2. Caractériser les sommets de $\mathcal{D}_R$ par un système linéaire à résoudre.

Un premier algorithme consiste alors à parcourir toutes les solutions de bases réalisables possibles. Pour chacune d'elles, il faut calculer la valeur de la fonction objectif F. On retient la solution optimale qui donne la valeur maximale de la fonction objectif.

3. Ecrire l'algorithme décrit ci-dessus.
4. Déterminer le coût de cet algorithme.

Exercice 4. *Condition suffisante d'optimalité*

Soit $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B^* \\ \mathbf{x}_H^* \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{x}_H^* = 0$ une solution de base réalisable du programme linéaire (PL).

1. Pour toute solution réalisable $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$, montrer que

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + \left(\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H\right) \mathbf{x}_H.$$

2. En déduire une condition suffisante - dite condition d'optimalité - pour que $\mathbf{x}^*$ soit une solution optimale.

Exercice 5. *Application de la condition d'optimalité*

On considère le problème de maximiser $F(x_1, x_2) = 18x_1 + 23x_2$ pour $x_1, x_2 \geq 0$ soumis à la condition $2x_1 + 3x_2 \leq 3$. On notera x_3 la variable d'écart associée à la contrainte.

Montrer à l'aide de l'Exercice 4 et *sans calculer aucune valeur de F*, que $(x_1, x_2, x_3) = (3/2, 0, 0)$ est une solution optimale.