Evaluation de performances

Chaîne de Markov à temps continu

Phuc Do

TELECOM Nancy – Université de Lorraine

Chaîne de Markov à temps continu

- Rappel de la loi exponentielle
- Chaîne de Markov à temps continu (CMTC)
- Calcul de performances
- Processus de naissance et de mort
- Processus de Poisson

Rappel de la loi exponentielle

Rappel de la loi exponentielle

- La loi exponentielle de paramètre λ est une v.a. T dont:
  - Sa fonction de densité: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$
  - Sa fonction de réparation: $F(t) = P[T \leq t\,] = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$
  - Sa moyenne: $$E[T] = \frac{1}{\lambda}$$
- Propriété: La loi exponentielle est sans mémoire

☞ $$\boxed{P[T \leq t + t_0 | T > t_0] = P[T \leq t]}$$

Rappel de la loi exponentielle (suite)

Soit un événement aléatoire E dont l'instant de réalisation est une variable aléatoire *T* qui suit une loi exponentielle de paramètre *λ*

- Probabilité de non réalisation de l'événement pendant l'intervalle

]t, t + Δt], sachant qu'il ne s'est pas encore réalisé à l'instant t:

$$P[T > t + \Delta t | T > t]$$

$$= 1 - \lambda\Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t) \text{ avec } \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

- Probabilité de réalisation de l'événement pendant l'intervalle *]t, t+Δt],* sachant qu'il ne s'est pas encore réalisé à l'instant *t:*

$$P[T \leq t + \Delta t | T > t]$$

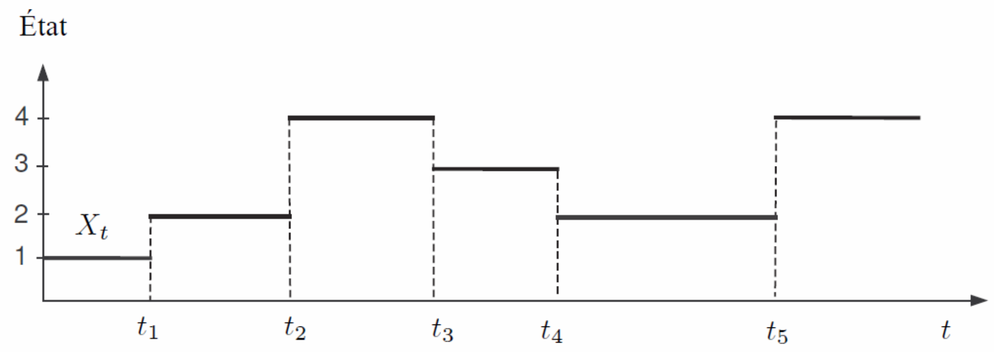
$$= \lambda\Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t) \text{ avec } \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

Chaîne de Markov à temps continu

Chaîne de Markov à temps continu

- Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus stochastique à espace d'état discret et à temps continu. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu (CMTC) ssi:

$$P(X(t) = j | X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, ...X(t_0) = i_0) \\ = P(X(t) = j | X(t_n) = i) \quad \forall\, t_0 < t_1 < ....t_n < t$$



Trajectoire d'un processus de Markov

Chaîne de Markov à temps continu

- CMTC homogène est telle que les probabilités $P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\}$ ne dépendent pas de *s*.

- Probabilité de transition:

$$p_{ij}(t) = P[X(t+s) = j | X(s) = i] \quad \forall\ s \geq 0$$

  - *Condition à vérifier:*

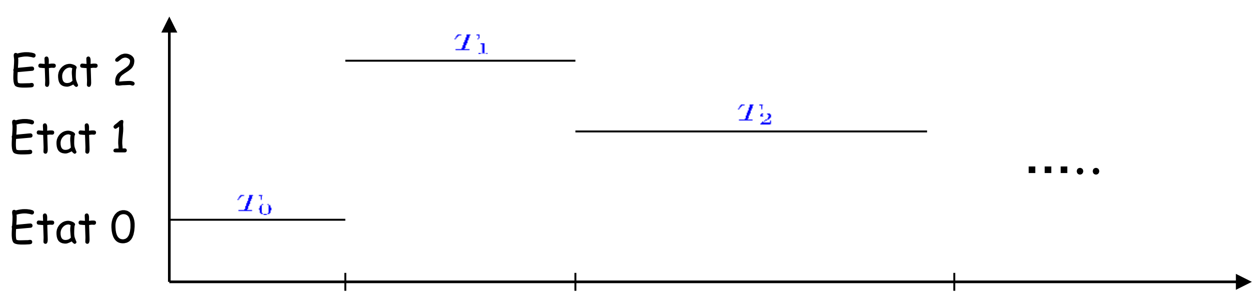
Temps de séjour

- Le temps passé dans un état d'une CMTC est une v.a. qui suit une loi exponentielle
- Soit T_i le temps passé dans l'état i. T_i suit la loi exponentielle de paramètre λ_i:

$$p_{ii}(\Delta t) = P[X(t+\Delta t) = i | X(t) = i]$$

☞

- On a $$\lambda_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}$$



Chaîne de Markov à temps continu

- Autre définition d'une CMTC: Un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu est une CMTC ssi :
  - le temps passé dans chaque état est une variable aléatoire dont la distribution est **exponentielle**
  - les transitions de chacun des états vers les autres états sont **probabilistes**

- Processus semi markovien: Un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu est un processus semi markovien ssi :
  - le temps passé dans chaque état est une variable aléatoire dont la distribution n'est pas exponentielle
  - les transitions de chacun des états vers les autres états sont probabilistes

Matrice des taux de transition

- Probabilité de transition de l'état *i* vers *j*:

$$p_{ij}(\Delta t) = P[X(t+\Delta t) = j | X(t) = i]$$

☞

- Taux de transition: $$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad (i \neq j)$$

- Remarque:

- Matrice des taux de transition (ou matrice génératrice): À une CMTC est associée une matrice *M* matrice génératrice

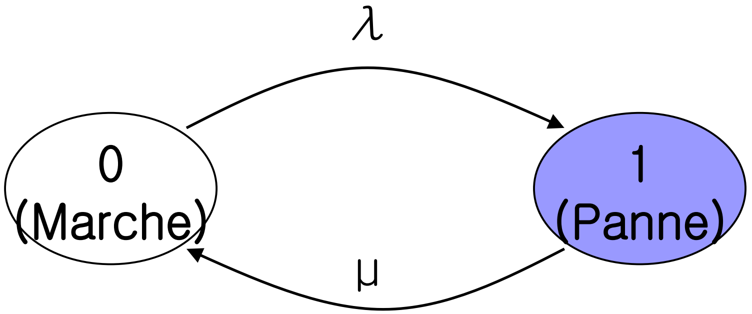
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

Exemple

- Considérons un composant de taux de défaillance λ et de taux de réparation μ constants et dont toutes les durées de fonctionnement et de réparation sont indépendantes entre elles.

- Le comportement de ce composant est décrit par une CMTC X_t à valeur dans E = {1, 0} de matrice génératrice

☞ Son graphe de transition

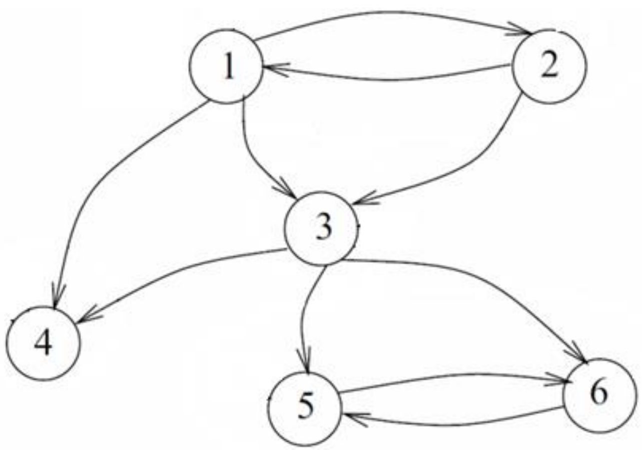


Décomposition d'une chaîne en classes

- Deux états i, j sont communicants si l'on peut passer de i à j et de j à i avec des probabilités non nulles
- Répartition de E en classes disjointes ($E = C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_r$) telle que:
  - tous les états d'une classe soient communicants entre eux
  - et que deux états de classes différentes ne soient pas communicants

Exemple: Cette CMTC est irréductible ?

Quelles sont ses classes ?



Classification d'une CMTC

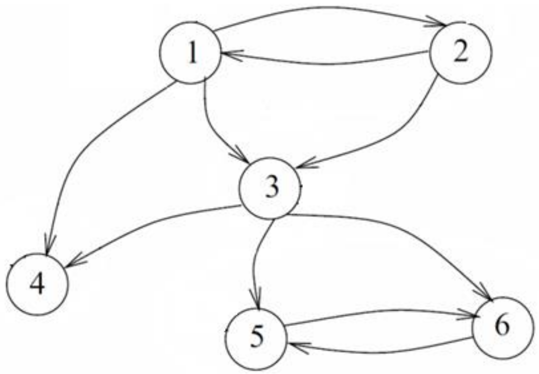
- Etat transitoire / récurrent
  - un état transitoire: il n'y a pas certitude de repasser par l'état après l'avoir quitté
  - un état récurrent: il y a certitude de repasser par l'état après l'avoir quitté; cet état soit
    - ✓ récurrent non nul, si le temps moyen de retour est fini
    - ✓ récurrent nul, si le temps de moyen de retour est infini (cela peut exister que dans une chaîne infinite)

Classification d'une CMTC

- Classe transitoire / récurrente
  - une classe transitoire: il est impossible de retourner dans la classe après en sorti
  - une classe récurrente (ou dit aussi finale): il est impossible de sortir de la classe

☞ ***Tous les états d'une même classe sont de même nature, ils ont les même propriétés que la classe***

Exemple: Quelles sont les classes transitoires/récurrentes pour cette CMTC ?



Vecteur de probabilité des états

1. Régime transitoire

- Equations différentielles

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\mathrm{M},$$

Où $\boldsymbol{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \ldots)$: vecteur de probabilité d'occupation des états.

- Résolution ?
  - Résoudre le système d'équations différentielles: *pas facile !!!*
  - Calcul numérique

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0).e^{-\mathrm{M}.t}$$

Où:

- $\boldsymbol{P}(0) = (P_1(0), P_2(0), \ldots)$: vecteur de probabilité d'occupation des états à l'instant initial
- e^M est fonction exponentielle d'une matrice

$$e^M = I + M + M^2/(2!) + \cdots = \sum_{n=0}^{1} M^n/(n!)$$

2. Régime permanent

- Lorsque *t* tend vers l'infini, la limite du vecteur des probabilités *P*(t) ?
- Propriété:
  - Il existe un régime permanent ssi la chaîne comprend une seule ***classe récurrente*** (il peut y avoir plusieurs classes, mais une seule récurrente) dont ***tous les états sont récurrents non nuls***
- Soit $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ vecteur de probabilité d'occupation des états en régime permanent. On a

$$\begin{cases} \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_{ij} = 0 \; \forall j \in E \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle: ☞

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}.M = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

2. Régime permanent

- Résolution
  - Analytique: résoudre le système d'équations linéaires
  - Calcul numérique

- Soit I une matrice carrée dont leur éléments sont égales à 1
- Soit $\mathrm{V} = [1,1,\ldots]'$ => on a: $\boldsymbol{\pi}.Q = V$
- Donc $\boldsymbol{\pi}.(M + I) = V$ => $\pi = V.(M + I)^{-1}$ car (*M*+*I*) est inversible (à savoir: *M* n'est pas inversible !!!)

Calcul de performances

Si l'état *i* signifie qu'il y a *i* clients (requêtes) dans le système

- **Nombre moyen de clients dans le système**:

$$L =$$

- **Débit du système**:

$$X = \sum_{1}^{i=n_{max}} \pi_i \sum_{j=0}^{j=i-1} (i-j).\lambda_{ij}$$

- **Temps moyen de réponse:**

$$R = \frac{L}{X}$$

- **Taux d'occupation:**

$$u = 1 - \pi_0$$

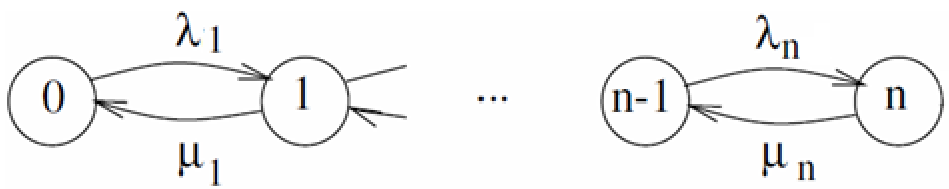
Cas particuliers de CMTC

- Processus de naissance et de mort
- Processus de Poisson

Processus de naissance et de mort

- **Définition:** Les processus de naissance et de mort sont des processus tels que à partir d'un état donné *i*, les seules transitions possibles sont vers l'un ou l'autre des **états voisins** *i* + 1 et *i* − 1 (pour *i* ≥ 1).

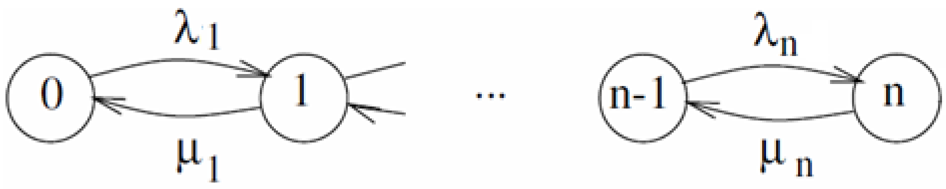
- Graphe de transition:



- Matrice de taux de transition

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \ \ \lambda_1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots..\dots\dots..0 \\ \mu_1 \ -(\mu_1+\lambda_1) \ \ \lambda_1 \ \ 0 \ \ \dots\dots\dots\dots\dots..0 \\ 0 \ \ \mu_2 \ -(\mu_2+\lambda_2) \ \ \lambda_2 \ \ 0 \ \ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ 0\ 0 \ \ \dots 0 \ \ \mu_{n-1} \ -(\mu_{n-1}+\lambda_n) \ \ \lambda_n \\ 0\ 0 \ \ \dots..\dots\dots\dots..\dots\dots \ \ \dots 0 \ \ \mu_n \ \ -\mu_n \end{bmatrix}$$

Processus de naissance et de mort



- **Régime permanent:** il existe toujours un régime permanent

- Probabilité d'occupation des états en régime permanent:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}$$

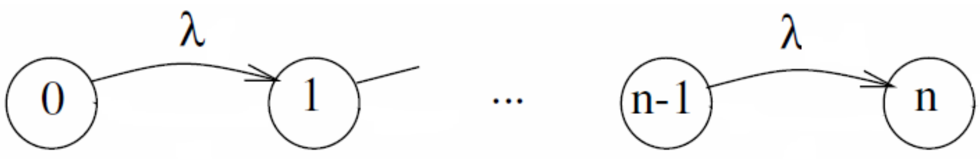
pour $i = 1 \ldots n$

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}$$

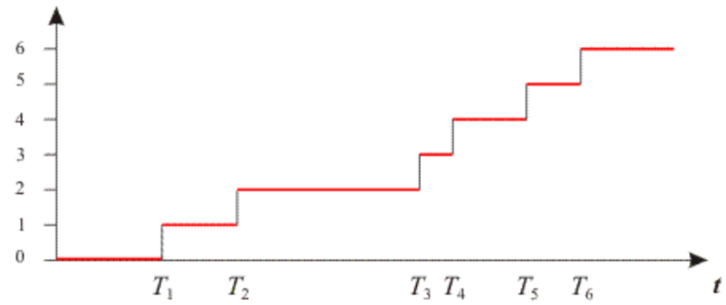
Processus de Poisson

- Le processus de Poisson un cas particulier de processus de naissance et de mort. C'est un processus de naissance pur dont les seules transitions possibles sont **de *i* à *i* + 1**.

- Graphe de transition:

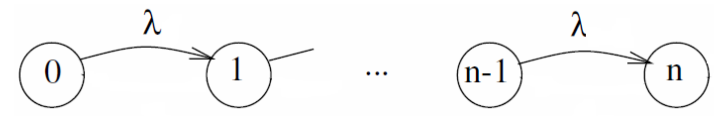


- Un processus de Poisson est un processus de comptage qui compte le nombre d'événements (client, tâches, requêtes, ..) réalisés dans l'intervalle [0,t]



Processus de Poisson

- Matrice de taux de transition



$$M = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots..0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. & & \\ 0\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & -\lambda & \lambda & \\ 0\ 0 & \ldots..\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Propriété:** tous les états sont transitoires donc pas de régime permanent !

- Probabilité d'occupation des états en régime transitoire:
  - Equations de Chapman-Kolmogorov $\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\mathbf{M},$
  - On a: $\frac{P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$\frac{P_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) \Rightarrow \frac{P_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t) P_0(t) \Rightarrow P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

… …

$$\boxed{P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ pour } \forall\, k = 0{,}1, \ldots}$$

Evaluation de performances

Files d'attente

à suivre…