Examen du 12 Octobre 2021 (90 min)

OMG : Mathématiques Générales

La notation tiendra compte de la RIGUEUR, de la présentation et de la clarté de la rédaction.

★ Exercice 1: Limites, Limites...

▷ **Question 1:** Calculer deux limites parmi les limites suivantes

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$ 2) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 3) $\lim_{x\to e} \frac{x^e - e^x}{(x-e)^2}$

4) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2+x+3}{x^2+x+1}\right)^{x^2}$ 5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(x^2)}{x-1}$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x}$

★ Exercice 2: L'ensemble ϵ des notes

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}$ qui s'annulent au moins une fois dans $\mathbb{R}$

▷ **Question 1:** Montrer que la fonction cos() est dans $\mathcal{F}$ et que cosh() : $x \to \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est dans $\mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$

▷ **Question 2:** Soient $f \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, montrer que $f_\alpha : x \to f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$

▷ **Question 3:** Soit $f \in \mathcal{E}$ montrer que :

1. $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
2. Si $f(0) = 0$ alors f est l'application nulle
3. Si $f(0) = 1$ alors f est paire

★ Exercice 3: (Facultatif ;) Comme un air de déjà vu

Nous définissons f par $f(x) = \arctan\left(\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\right)$

▷ **Question 1:** Simplifier l'écriture de f pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

▷ **Question 2:** Étudier et représenter f sur son ensemble de définition

★ Exercice 4: Le Démon Stration

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à un intervalle J. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle J. Soit g la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, g(x) = f(u(x))$$

Montrer que la fonction g est dérivable sur I et que $\forall x \in I, g'(x) = u'(x) * f'(u(x))$