Variables aléatoires - généralités

Module MAP - Telecom nancy

Apprentissage

Introduction

Considérons une expérience aléatoire, et $(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace probabilisable associé.

Exemple 1 : reprenons l'expérience aléatoire = jet de 3 pièces non biaisées
$\Omega = \{P, F\}^3$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{8}$, $\forall \omega \in \Omega$
On s'intéresse au nombre de "Pile" obtenu ; la question doit donc être posée différemment. On définira une variable aléatoire X qui à un événement élémentaire associe le nombre de "Pile" correspondant (au lieu de définir 4 événements, ce qui est plus lourd... même si c'est possible ici[1]).

1. Ce n'est pas toujours le cas....

$$\begin{array}{lcll} \Omega & \rightarrow & X(\Omega) & : \textit{c'est l'image de l'application } X \\ \omega & \rightarrow & X(\omega) & \end{array}$$

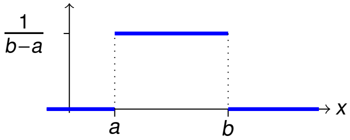
$$X : \begin{array}{lcc} (F,F,F) & \rightarrow & 0 \\ (F,F,P) & \searrow & \\ (F,P,F) & \rightarrow & 1 \\ (P,F,F) & \nearrow & \\ (P,F,P) & \searrow & \\ (P,P,F) & \rightarrow & 2 \\ (F,P,P) & \nearrow & \\ (P,P,P) & \rightarrow & 3 \end{array}$$

$X((F,F,F)) = 0,\ X^{-1}(0) = (F,F,F)$

Ici $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. $Card(X(\Omega)) = 4$ est fini, on parle de variable aléatoire discrète.

Exemple 2 (de v.a. continue) : Si la v.a. X suit la loi uniforme[2] *($X \sim U_{[a,b]}$), on définira sa densité (plus loin dans le cours) :*

$$f_X(x) = 1_{[a,b]}(x)\frac{1}{b-a}$$



De façon générale, une variable aléatoire sera définie lorsque l'on s'intéresse à une fonction du résultat plutôt qu'au résultat lui-même.

2. si on tire au hasard un point sur l'axe réel et qu'il ne peut "tomber" que sur l'intervalle $[a, b]$

1. Variable aléatoire

2. Vecteur aléatoire

Definition

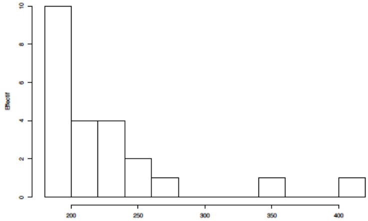
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable associé à une e.a. e. On appelle variable aléatoire toute application mesurable de Ω dans un espace E mesurable : $\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & X(\Omega) \subset E \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$

- Une v.a. est dite discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou infini dénombrable (i.e. $E = \mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n ou \, \mathbb{Q}^n$). Notons que si Ω est dénombrable, toute v.a.r. est discrète.
- Une v.a. est dite continue si $X(\Omega)$ est un ensemble infini non dénombrable, i.e. $\mathbb{R}^n$, un intervalle de $\mathbb{R}^n$, ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ...

Exemples de variables aléatoires :

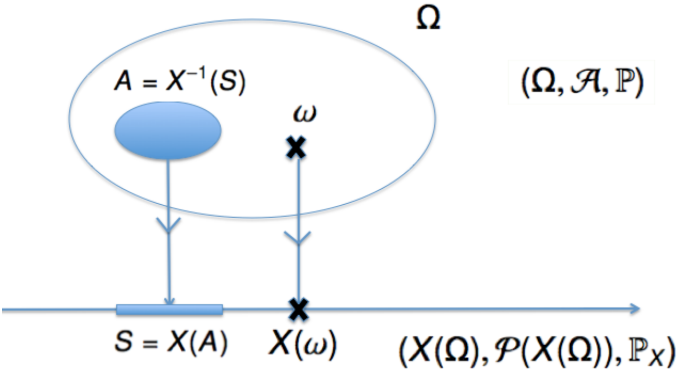
- variable discrète, souvent une variable de comptable, par exemple : nombre de piles dans notre e.a., nombre d'enfants dans une famille, nombre de bactéries dans une boîte de Petri, ...
- autres exemples de variable continue : masse corporelle des individus dans une espèce animale donnée, taux de glucose dans le sang, ...
- Dans une substance radioactive, la désintegration des noyaux se fait de façon spontanée. Le nombre de désintegration sur un intervalle de temps fixé suit une loi de Poisson (discrète). Par contre le temps d'attente entre deux désintégrations est modélisé par une loi exponentielle (continue).

- Parfois on connait comment la v.a. se comporte (c'est-à-dire sa loi) par construction, exemple : on jette un dé (bien équilibré), on sait que le résultat est une "loi uniforme" sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Parfois on ne le sait pas, dans ce cas, on cherche à déterminer sa loi empirique par des expériences renouvelées, exemple([extrait de Bérard] : Jojo mesure le temps de transmission d'un message de son ordinateur à un autre par le réseau internet, à divers moments. Il recueille les donnés suivantes (en millisecondes) : 188,9 ; 188,7 ; ... ; 195,6. Représentation par un histogramme de la loi empirique associée à cet échantillon :



- Si $n = 1$, on parle de variable aléatoire réelle.
- Si $n > 1$, on parle de vecteur aléatoire.
- Notation : X, Y, Z... variables aléatoires ; x, y, z une valeur de X, Y, Z respectivement.
- On est souvent conduit à calculer : $\mathbb{P}(\{\omega; X(\omega) \in S\})$ pour $S \subset X(\Omega)$. Nous allons définir cette mesure image de X. Remarque : en pratique, on connait souvent $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ plutôt que $(\Omega, \mathbb{P})$ que l'on peut "oublier".

Dans le cas réel :



Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $X : \Omega \to X(\Omega)$ une variable aléatoire. La loi de probabilité (ou mesure image) de X est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : X(\Omega) &\to [0, 1] \\ S &\mapsto \mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S)) = \mathbb{P}(\{\omega; X(\omega) \in S\}) \end{aligned}$$

- C'est une probabilité sur l'espace mesurable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.
- Connaissance de la loi de probabilité $\Rightarrow$ connaissance de X
- Loi de probabilité s'exprime par la fonction de répartition dans le cas réel.

Retour à l'exemple 1 :

$$P_X(\{0\}) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{(F,F,F)\}) = \frac{1}{8}$$
$$P_X(\{1\}) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\}) = \frac{3}{8}$$
$$P_X(\{2\}) = P(X^{-1}(\{2\})) = P(\{(F,P,P),(P,F,P),(P,P,F)\}) = \frac{3}{8}$$
$$P_X(\{3\}) = P(X^{-1}(\{3\})) = P(\{(P,P,P)\}) = \frac{1}{8}$$

Finalement, la loi de X peut être condensée dans le tableau avec $p_i = P_x(\{x_i\})$ *:*

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

D'une manière générale (valable pour toute v.a. discrète), en notant x_i *les éléments de* $X(\Omega)$ *:*

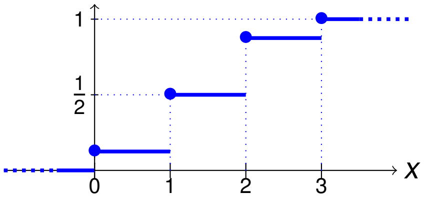
$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X^{-1}(\cup_{x_i \in A}\{x_i\})) = \sum_{x_i \in A} P_X(\{x_i\})$$

Definition

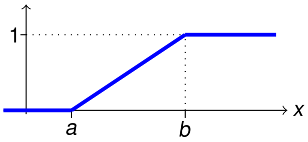
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de X la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) \end{array}$$

Pour l'exemple 1 :



Fonction de répartition pour la v.a. de loi uniforme sur $[a, b]$ *:*



Nous voyons la différence entre variable discrète (fonction de répartition constante par morceaux dite "en escalier") et variable continue à densité (fonction de répartition constante). Mais les principales propriétés sont les mêmes.

Propriétés des fonctions de répartition I

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sa fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq F_X(x) \leq 1$
- F_X est croissante : soient deux réels $a < b$, alors $F_X(a) \leq F_X(b)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- F_X est une fonction continue à droite avec des limites à gauche (on dit “càdlàg”), pour tout $a \in \mathbb{R}$:
  - F_X continue à droite en a :
    $\lim_{x \to a+} F_X(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} F_X(x) = F_X(a)$
  - F_X a une limite à gauche en a :
    on notera $F_X(a-) = \lim\limits_{x \to a-} F_X(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F_X(x)$

- On peut utiliser la fonction de répartition pour calculer diverses probabilités : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a alors :
  - $\mathbb{P}(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a),\ \forall a < b$ deux réels
    On remarque tout d'abord que $\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} \backslash \{X \leq a\}$.
    On en déduit que
    $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}((X \leq a) \cap (X \leq b)) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$ puisque $a < b$.
  - $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-)$
  - $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$
  - $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{a}) = \mathrm{F}_X(a) - F_X(a-)$

1 Variable aléatoire

2 Vecteur aléatoire

Vecteur aléatoire

Definition

Soient n variables aléatoires X_1, ..., X_n définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; $X_i : \Omega \rightarrow E_i$. On appelle X vecteur aléatoire de dimension n : $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ pour $\omega \in \Omega$.

Definition

La loi de probabilité conjointe de X est $\{\mathbb{P}(X \in S; S \subset E_1 \times \ldots \times E_n)\}$.

Si la loi de probabilité conjointe est connue, alors on peut déterminer les lois marginales, mais la réciproque n'est pas vraie !

Cas particulier dans lequel la réciproque est vraie :

Definition

Les variables aléatoires X_i sont dites (mutuellement) indépendantes si pour $S_1, ..., S_n \in \mathcal{A}$, les événements $\{X_i \in S_i\}_{i=1,...,n}$ sont indépendants : $\forall (S_1, ... S_n) \subset E_1 \times ... \times E_n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\} \cap ... \cap \{X_n \in S_n\}) &= \mathbb{P}(\{X_1 \in S_1, ..., X_n \in S_n\}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \in S_i\})\end{aligned}$$

- Si les v.a. $(X_i)_{i=1,...,n}$ sont indépendantes, la réciproque est vraie.
- Soient $X_1, ...X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes, et $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}, ...f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions. Alors $f_1(X_1), ...f_n(X_n)$ sont des v.a.r. mutuellement indépendantes.

Exemples de vecteurs aléatoires :

- Couple aléatoire discret : on dispose d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4, et on tire au sort successivement deux jetons sans remise. On note (X, Y) les résultats des deux tirages. On a : $\mathbb{P}(X = i, Y = i) = 0$ pour tout i entre 1 et 4 et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1/12$ si $1 \leq i, j \leq 4$ et $i \neq j$.

- Couple aléatoire continu : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \mathbb{I}_D(x, y)$. f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$: c'est la densité de la loi uniforme sur D, c'est-à-dire la loi que l'on obtient en jetant un point au hasard et uniformément sur D.