Evaluation de performances

Chaîne de Markov à temps continu

Phuc Do

TELECOM Nancy – Université de Lorraine

Introduction

Chaîne de Markov à temps continu

- Rappel de la loi exponentielle
- Chaîne de Markov à temps continu (CMTC)
- Processus de naissance et de mort
- Processus de Poisson
- Estimation de la matrice génératrice
- Simulation d'une CMTC

Rappel de la loi exponentielle

Rappel de la loi exponentielle

- La loi exponentielle de paramètre *λ* est une v.a. *T* dont:
  - Sa fonction de densité: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$
  - Sa fonction de réparation: $F(t) = P[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$
  - Sa moyenne: $E[T] = \dfrac{1}{\lambda}$
- **Propriété:** La loi exponentielle est sans mémoire

$$P[T \leq t + t_0 | T > t_0] = \frac{P[t_0 < T \leq t + t_0]}{P[T > t_0]} = \frac{P[T \leq t + t_0] - P[T \leq t_0]}{P[T > t_0]}$$

$$= \frac{F(t + t_0) - F(t_0)}{F(t_0)} = 1 - e^{-\lambda t} = P[T \leq t]$$

☞ $\boxed{P[T \leq t + t_0 | T > t_0] = P[T \leq t]}$

Rappel de la loi exponentielle (suite)

Soit un événement aléatoire E dont l'instant de réalisation est une variable aléatoire *T* qui suit une loi exponentielle de paramètre *λ*

- Probabilité de non réalisation de l'événement pendant l'intervalle

]t, t + Δt], sachant qu'il ne s'est pas encore réalisé à l'instant t:

$$P[T > t + \Delta t | T > t] = P[T > \Delta t] = e^{-\lambda \Delta t}$$

$$= 1 - \lambda \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t) \text{ avec } \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

- Probabilité de réalisation de l'événement pendant l'intervalle *]t, t+Δt],* sachant qu'il ne s'est pas encore réalisé à l'instant *t:*

$$P[T \leq t + \Delta t | T > t] = P[T \leq \Delta t] = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

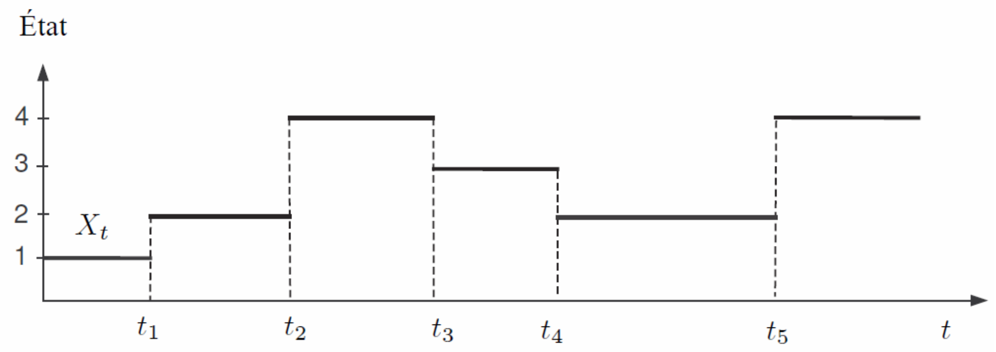
$$= \lambda \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t) \text{ avec } \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

Chaîne de Markov à temps continu

Chaîne de Markov à temps continu

- Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus stochastique à espace d'état discret et à temps continu. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu (CMTC) ssi:

$$
\begin{aligned}
P(X(t) = j | X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots X(t_0) = i_0) \\
= P(X(t) = j | X(t_n) = i) \quad \forall\ t_0 < t_1 < \ldots . t_n < t
\end{aligned}
$$



Trajectoire d'un processus de Markov

Chaîne de Markov à temps continu

- CMTC homogène est telle que les probabilités $P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\}$ ne dépendent pas de s.

- Probabilité de transition:

$$p_{ij}(t) = P[X(t+s) = j | X(s) = i] \quad \forall\ s \geq 0$$

  - *Condition à vérifier:*
    - $p_{ij}(t) \geq 0$
    - $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$

Chaîne de Markov à temps continu

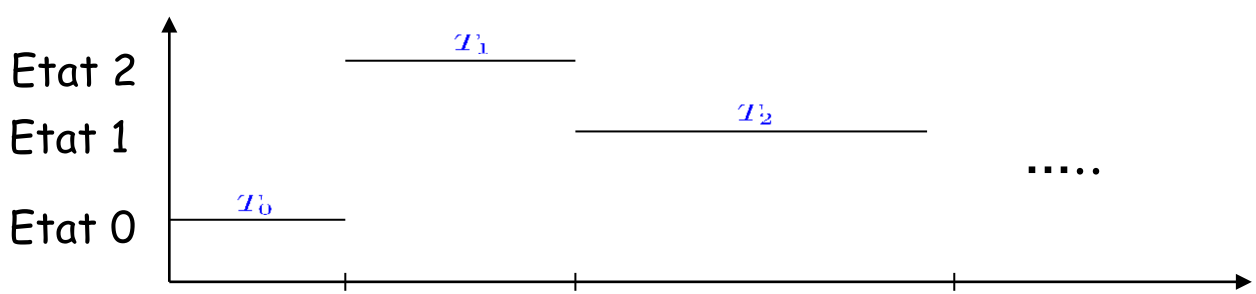
Temps de séjour

- Le temps passé dans un état d'une CMTC est une v.a. qui suit une loi exponentielle
- Soit T_i le temps passé dans l'état *i*. T_i suit la loi exponentielle de paramètre λ_i:

$$p_{ii}(\Delta t) = P[X(t+\Delta t) = i | X(t) = i]$$

☞ $$p_{ii}(\Delta t) = P[T_i > \Delta t] = 1 - \lambda_i \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t)$$

- On a $$\lambda_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}$$



Chaîne de Markov à temps continu

- Autre définition d'une CMTC: Un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu est une CMTC ssi :
  - le temps passé dans chaque état est une variable aléatoire dont la distribution est **exponentielle**
  - les transitions de chacun des états vers les autres états sont **probabilistes**

- Processus semi markovien: Un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu est un processus semi markovien ssi :
  - le temps passé dans chaque état est une variable aléatoire dont la distribution n'est pas exponentielle
  - les transitions de chacun des états vers les autres états sont probabilistes

Matrice des taux de transition

- Probabilité de transition de l'état *i* vers *j*:

$$p_{ij}(\Delta t) = P[X(t+\Delta t) = j \,|\, X(t) = i]$$

☞ $$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\,\Delta t + \Delta t\varepsilon(\Delta t)$$

- Taux de transition: $$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad (i \neq j)$$

- Remarque: $$\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$$

- Matrice des taux de transition (ou matrice génératrice): À une CMTC est associée une matrice *M* matrice génératrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

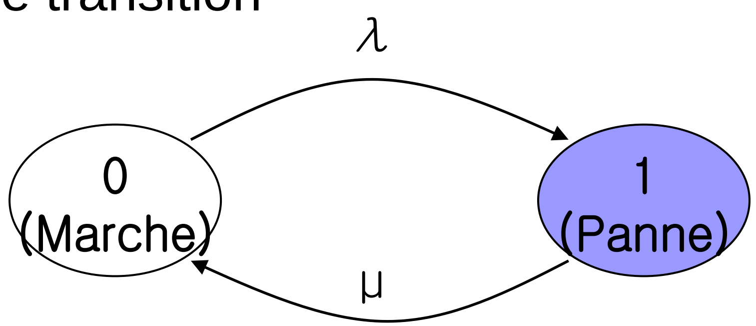
Exemple 1

- Considérons un composant de taux de défaillance λ et de taux de réparation μ constants et dont toutes les durées de fonctionnement et de réparation sont indépendantes entre elles.

- Le comportement de ce composant est décrit par une CMTC X_t à valeur dans E = {1, 0} de matrice génératrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

☞ Son graphe de transition



Exemple 2

Un système client-serveur reçoit en moyenne λ requêtes par seconde, arrivant selon un processus de Poisson. Il dispose d'un unique serveur pouvant traiter (une seule requête à la fois) en moyenne μ requêtes par seconde. Modéliser l'évolution du nombre de requêtes dans le système pour les cas suivants:

- Le comportant une file d'attente de 1 place ?
- Le comportant une file d'attente de 2 place ?

Chaîne de Markov à temps continu

Vecteur de probabilité des états

1. Régime transitoire

- Equations différentielles

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\mathbf{M},$$

Où $\boldsymbol{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), ...)$: vecteur de probabilité d'occupation des états.

- Résolution ?
  - Résoudre le système d'équations différentielles: *pas facile !!!*
  - Calcul numérique

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0).e^{\bar{\mathbf{M}}.t}$$

Où:

- $\boldsymbol{P}(0) = (P_1(0), P_2(0), ...)$: vecteur de probabilité d'occupation des états à l'instant initial
- e^M est fonction exponentielle d'une matrice

$$e^M = I + M + M^2/(2!) + \cdots = \sum_{n=0}^{1} M^n/(n!)$$

2. Régime permanent

- Lorsque *t* tend vers l'infini, la limite du vecteur des probabilités *P*(t) ?
- Propriété:
  - Il existe un régime permanent ssi la chaîne comprend une seule ***classe récurrente*** (il peut y avoir plusieurs classes, mais une seule récurrente) dont ***tous les états sont récurrents non nuls***
- Soit $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ vecteur de probabilité d'occupation des états en régime permanent. On a

$$\begin{cases} \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_{ij} = 0 \ \forall\, j \in E \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle: ☞

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}.M = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

2. Régime permanent

- Résolution
  - Analytique: résoudre le système d'équations linéaires
  - Calcul numérique

- Soit I une matrice carrée dont leur éléments sont égales à 1
- Soit $\mathrm{V} = [1,1,\ldots]'$ => on a: $\boldsymbol{\pi}.Q = V$
- Donc $\boldsymbol{\pi}.(M + I) = V$ => $\pi = V.(M + I)^{-1}$ car (*M*+*I*) est inversible (à savoir: *M* n'est pas inversible !!!)

Calcul d'indicateurs de performance

Si l'état *i* signifie qu'il y a *i* clients (requêtes) dans le système

- **Nombre moyen de clients dans le système**:

$$L = \sum_{i=0}^{n_{max}} i.\pi_i$$

- **Débit du système**:

$$X = \sum_{1}^{i=n_{max}} \pi_i \sum_{j=0}^{j=i-1} (i-j).\lambda_{ij}$$

- **Temps moyen de réponse:**

$$R = \frac{L}{X}$$

- **Taux d'occupation:**

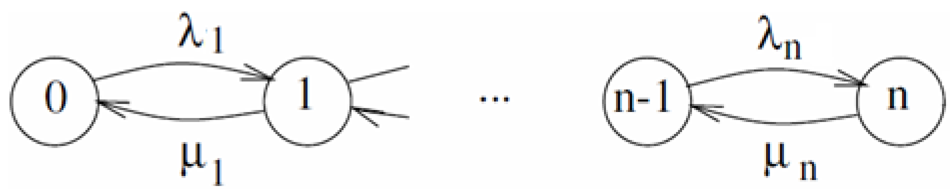
$$u = 1 - \pi_0$$

Cas particuliers de CMTC

- Processus de naissance et de mort
- Processus de Poisson

Processus de naissance et de mort

- **Définition:** Les processus de naissance et de mort sont des processus tels que à partir d'un état donné *i*, les seules transitions possibles sont vers l'un ou l'autre des **états voisins** $i + 1$ et $i - 1$ (pour $i \geq 1$).
- Graphe de transition:



- Matrice de taux de transition

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \;\; \lambda_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots..0 \\ \mu_1 \; -(\mu_1+\lambda_1) \;\; \lambda_1 \;\; 0 \;\;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0 \\ 0 \;\; \mu_2 \; -(\mu_2+\lambda_2) \;\; \lambda_2 \;\; 0 \;\;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ 0\;0 \;\; \ldots 0 \;\; \mu_{n-1} \; -(\mu_{n-1}+\lambda_n) \;\; \lambda_n \\ 0\;0 \;\; \ldots..\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots \;\;\; \ldots 0 \;\; \mu_n \;\; -\mu_n \end{bmatrix}$$

Processus de naissance et de mort

- **Régime permanent:** il existe toujours un régime permanent

- Probabilité d'occupation des états en régime permanent:

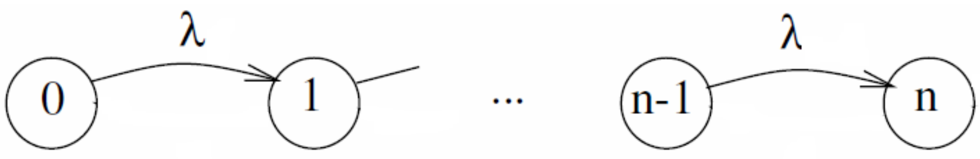
$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}$$

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j}} \qquad \text{pour } i = 1 \ldots n$$

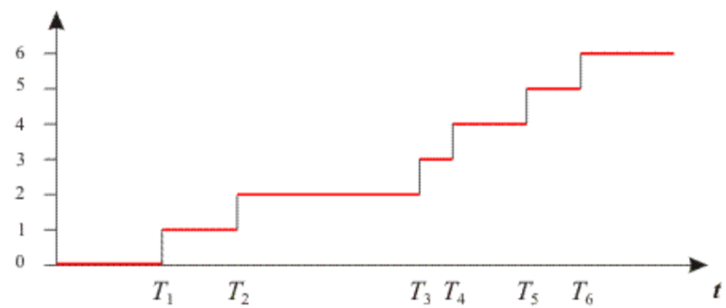
Processus de Poisson

- Le processus de Poisson un cas particulier de processus de naissance et de mort. C'est un processus de naissance pur dont les seules transitions possibles sont **de *i* à *i* + 1**.

- Graphe de transition:

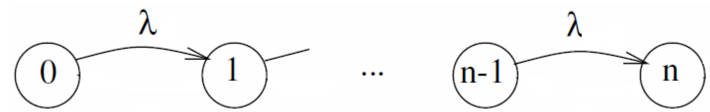


- Un processus de Poisson est un processus de comptage qui compte le nombre d'événements (client, tâches, requêtes, ..) réalisés dans l'intervalle [0,t]



- Matrice de taux de transition

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \; 0 \; \dots \dots \dots \dots .. \dots .. 0 \\ 0 \; -\lambda & \lambda & 0 \; \dots \dots \dots \dots \dots .. 0 \\ 0 \;\; 0 & -\lambda & \lambda \;\; 0 \;\; \dots \dots \dots \dots 0 \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . & \\ 0 \; 0 \; \dots \dots \dots \dots \dots \dots 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 \; 0 \; \dots .. \dots \dots \dots .. \dots \dots \dots 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- **Propriété:** tous les états sont transitoires donc pas de régime permanent !

- Probabilité d'occupation des états en régime transitoire:
  - Equations de Chapman-Kolmogorov $\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\mathbf{M},$
  - On a: $\frac{P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \Rightarrow \; P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$\frac{P_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) \Rightarrow \frac{P_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t) P_0(t) \Rightarrow P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$\dots \dots$

☞ $$\boxed{P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ pour } \forall\, k = 0,1, \dots}$$

Estimation de la matrice des taux de transition

Estimation de la matrice des taux de transition

- Soit un échantillon $\{X_t\} = \{X_0, X_{t_1}, \dots X_T\}$
  - $\{X_t\}$ est une CMTC
  - *T* est suffisamment grand

- Estimation de la matrice génératrice

$$\hat{\mathbf{M}} = [\hat{m}_{ij}(T)]_{i,j \in E}$$

avec

$$\hat{m}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{T_i(T)}$$

  - $N_{ij}(T)$ est le nombre de transitions de l'état *i* à l'état *j* sur l'intervalle de temps [0, *T*]
  - $T_i(T)$ est le temps passé dans l'état *i* durant l'intervalle de temps [0, *T*]

Simulation d’une CMTC

Simulation d’une CMTC

- Soit une CMTC ayant la matrice de taux de transition

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

- Son état initial: soit connu soit distribué selon une loi empirique

Comment simuler la chaîne ?

- Idée principale: à chaque état *i*, on simule
  - Le temps de séjour de l’état qui suit la loi exponentiel de paramètre λ_i
  - L’état suivant

Simulation d'une CMTC

- Déterminer la loi empirique pour le passage de l'un vers l'autre état

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} \ \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} \ \dots \dots \dots \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_1} \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_2} \ 0 \ \frac{\lambda_{23}}{\lambda_2} \ \dots \dots \dots \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\lambda_{n1}}{\lambda_n} \ \frac{\lambda_{n2}}{\lambda_n} \ \dots \dots \frac{\lambda_{n(n-1)}}{\lambda_n} \ 0 \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots n}$$

❖ *L'état suivant d'un état donné X_i est une V.A discrète* qui suit une loi empirique avec la distribution empirique *$Q(X_i,:)$*

Simulation d'une CMTC

Algo.

1. Simuler l'état initial (s'il n'est pas connu) et son temps de séjour: X_1 et $t(1)$
2. Simuler la trajectoire pour l'intervalle [0 T]:

    i=1;

    Tant que t(i) ≤ T faire

    Générer l'état suivant X_{i+1} par simulation d'une V.A. qui suit une loi empirique avec la distribution empirique $\mathrm{Q}(X_i,:)$

    Générer S_{i+1} le temps de séjour du l'état X_{i+1} :

    u ~U(0,1); $S_{i+1} = -\frac{\ln(u)}{-M(X_{i+1},X_{i+1})}$

    $t(i+1)=t(i)+S_{i+1}$

    $i=i+1$

    FinTQ

Evaluation de performances

Théorie des files d'attente

à suivre…