Exercice 7. *Gestion de projet*

1) Soit $E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice des notes projets/élèves telle que e_{ij} est la note du projet i donné par l'élève j. On a $e_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$ et on remarque que le projet i est sélectionné par l'élève j si et seulement si $e_{ij} \neq 0$.

On introduit la variable binaire

$$x_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si le projet } i \text{ est attribué à l'élève } j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On cherche à maximiser la satisfaction générale : $\displaystyle\max_{x_{ij}} \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} x_{ij}$

Les contraintes sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall j = 1, \cdots, n, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \leftarrow \text{"chaque élève est affecté à un et un seul projet"} \\ \forall i = 1, \cdots, n, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \leftarrow \text{"chaque projet est attribué à un et un seul élève"} \\ \forall i, j = 1, \cdots, n, \ x_{ij} \in \{0, 1\}. & \end{array} \right.$$

2) Un exemple de matrice E avec $n = 4$: $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Forme matricielle du PL

Variables	$\mathbf{x} = (x_{11}, \cdots, x_{n1} \mid x_{12}, \cdots, x_{n2} \mid \cdots \mid x_{1n}, \cdots, x_{nn})^\top \in \mathbb{R}^{n^2}$
Vecteurs	$\mathbf{e} = (e_{11}, \cdots, e_{n1} \mid e_{12}, \cdots, e_{n2} \mid \cdots \mid e_{1n}, \cdots, e_{nn})^\top \in \mathbb{R}^{n^2}$
	$\mathbf{b} = (1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$

La matrice A est de taille $2n \times n^2$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 1 & \cdots & 1 & & 0 & & & & 0 & \\ & 0 & & 1 & \cdots & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & 0 & & & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\ & & 1 & & & 1 & & & & 1 \end{array} \right)$$

Le programme linéaire s'écrit alors

$$\begin{array}{l} \displaystyle\max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^\top \mathbf{x} \right] \\ \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n^2} \end{array} \right. \end{array} \tag{1}$$

3) **Contraintes supplémentaires** : $\forall j = 1, \cdots, n, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \geq 1$

Matriciellement, cette contrainte s'écrit $B\mathbf{x} \geq \mathbf{d}$ avec $\mathbf{d} = (1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ et B est la matrice $n \times n^2$ donnée par :

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} e_{11} & \cdots & e_{n1} & & 0 & & & & 0 & \\ & 0 & & e_{12} & \cdots & e_{n2} & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & 0 & & & e_{1n} & \cdots & e_{nn} \end{array} \right).$$

Exemple d'ensemble de solution réalisable vide : le projet 3 n'est demandé par personne.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$