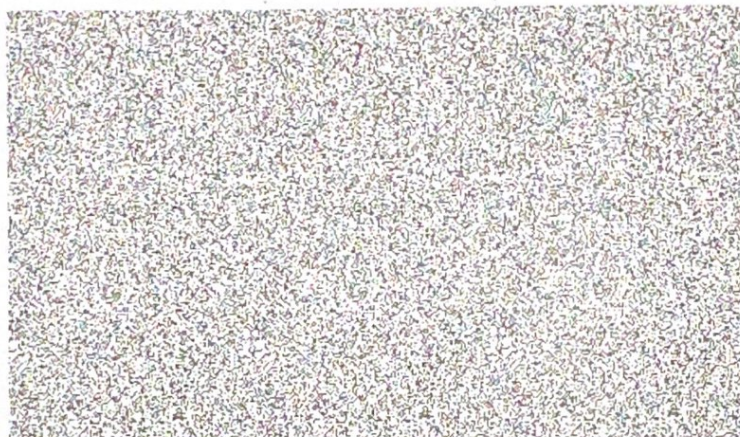


Stéréogrammes

1. Introduction et objectif. Le but de ce projet est de concevoir des images stéréographiques appelées aussi *stéréogrammes*, contenant des motifs cachés qui apparaissent en relief après un certain temps passé à regarder l'image et aussi avec un peu d'entraînement.



π comme vous ne l'avez peut-être jamais vu.

Le principe de la vision stéréo est basé sur la projection d'un objet de l'espace sur un plan de coupe positionné entre les yeux et l'objet. Ce plan de coupe constitue l'image 2D de l'objet. La projection est réalisée de façon à ce que le cerveau puisse reconstruire l'objet dans l'espace en 3D et donner ainsi l'impression de "voir" l'objet en relief. Deux transformations \mathcal{T}_G , \mathcal{T}_D sont associées à chacun des deux yeux. Pour un point $P = (x, y, z)$ de l'espace ($z \neq 0$), on définit

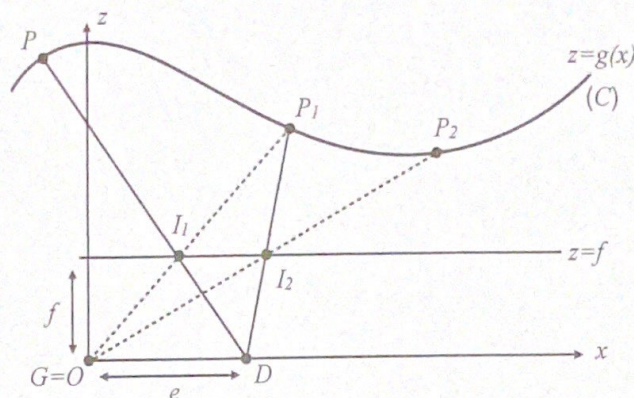
$$\mathcal{T}_G(P) = \begin{pmatrix} fx/z \\ fy/z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_D(P) = \begin{pmatrix} f(x-e)/z + e \\ fy/z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Les deux yeux sont disposés sur l'axe Ox , l'oeil gauche se situant à l'origine $O = (0, 0, 0)$ du repère $Oxyz$ et l'oeil droit à une distance e de l'oeil gauche en $D = (e, 0, 0)$. Le plan de projection $z = f$ est parallèle au plan Oxy . Ces transformations seront utilisées pour construire des paires stéréoscopiques et aussi pour des objets définis par des surfaces (cf. travail demandé).

2. Cas d'une surface : quand Thalès rencontre Newton... On suppose que l'objet dont on veut faire un stéréogramme est défini par une surface $z = h(x, y)$. On peut engendrer aléatoirement des points sur cette surface (S) et utiliser directement les transformations (1). L'effet stéréoscopique n'est plus garanti si la surface de départ est trop grande par rapport à e . Vous le vérifierez dans le travail demandé. Cependant, on peut s'affranchir de cette limitation en choisissant astucieusement les points sur la surface (S). Cette construction est rappelée ci-dessous.

Détermination des points de (S). On se place dans le plan Oxz avec un plan de coupe $y = y_0$ donné. On note (C) la courbe résultant de l'intersection de ce plan avec la surface (S). A partir d'un point P choisi sur la courbe (C), on construit une suite de points I_1, I_2, \dots dans le plan $z = f$ et une suite de points P_1, P_2, \dots sur (C) à partir des transformations (1) et de l'inverse \mathcal{T}_G^{-1} de \mathcal{T}_G :

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{T}_D(P), & P_1 &= \mathcal{T}_G^{-1}(I_1) \\ I_2 &= \mathcal{T}_D(P_1), & P_2 &= \mathcal{T}_G^{-1}(I_2) \\ &\vdots & & \end{aligned}$$



La difficulté est alors de déterminer les points P_1, P_2, \dots (et donc aussi les points I_2, I_3, \dots) avec la transformation inverse \mathcal{T}_G^{-1} . En fait, ce sont essentiellement les points I_1, I_2, I_3, \dots qui nous intéressent car ce sont eux qui vont constituer le stéréogramme.

Calcul de I_2 . Une fois $I_1 = \mathcal{T}_D(P)$ déterminé, on doit d'abord trouver P_1 . La courbe (C) a pour équation $z = g(x) = h(x, y_0)$ où la coupe $y = y_0$ est fixée. Le point P_1 vérifie

$$g(x_{P_1}) - \frac{x_{P_1}}{x_{I_1}} f = 0 \quad (2)$$

C'est une équation non-linéaire en x_{P_1} l'abscisse de P_1 . À partir de P_1 , on peut alors calculer I_2 avec $I_1 I_2 = s$ et s est déterminé par le Théorème de Thalès,

$$s = \left(1 - \frac{f}{g(x_{P_1})}\right) e = \left(1 - \frac{x_{I_1}}{x_{P_1}}\right) e. \quad (3)$$

La difficulté est de résoudre l'équation non-linéaire (2). Plusieurs procédures seront testées et comparées.

i) *Approximation directe.* On calcule directement I_2 par une approximation de (3) :

$$I_1 I_2 \simeq \tilde{s} = \left(1 - \frac{f}{g(x_{I_1} + \delta/2)}\right) e \quad (4)$$

où $\delta > 0$ est un paramètre fixé. On peut choisir $\delta = I_0 I_1$ avec $I_0 = \mathcal{T}_G(P)$ et par le Théorème de Thalès, on obtient

$$\delta = \left(1 - \frac{f}{g(x_P)}\right) e \quad (5)$$

ii) *Point fixe.* L'équation (2) s'écrit encore $\frac{x_{I_1}}{f} g(x_{P_1}) = x_{P_1}$ c'est-à-dire que x_{P_1} est un point fixe de la fonction $\frac{x_{I_1}}{f} g$. On introduit alors une suite de points $(x^k)_{k \geq 0}$, définie par la relation de récurrence

$$x^{k+1} = \frac{x_{I_1}}{f} g(x^k) \quad k \geq 0 \quad (6)$$

avec la donnée initiale $x^0 = x_{I_1}$. Cette suite doit converger vers x_{P_1} solution de (2). On arrête les itérations (test d'arrêt) quand $|x^{k+1} - x^k| \leq \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ choisi suffisamment petit.

iii) *Méthodes de la sécante.* L'équation (2) s'écrit aussi $F(x_{P_1}) = 0$. On est donc amené à rechercher un zéro de la fonction F définie par $F(x) = g(x) - x f / x_{I_1}$. On introduit une suite de points $(x^k)_{k \geq 0}$, avec la relation de récurrence (méthode de Newton approchée)

$$x^{k+1} = x^k - \left(\frac{x^k - x^{k-1}}{F(x^k) - F(x^{k-1})} \right) F(x^k), \quad k \geq 1 \quad (7)$$

avec les données initiales $x^0 = x_{I_1}$ et $x^1 = x_{\tilde{I}_2}$ où \tilde{I}_2 est le point du plan $z = f$ tel que $I_1 \tilde{I}_2 = \tilde{s}$ avec \tilde{s} donné par l'approximation (4). Cette suite doit converger (plus rapidement que la méthode de la sécante) vers x_{P_1} solution de (2). On arrête les itérations (test d'arrêt) quand $|F(x^k)| \leq \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ choisi suffisamment petit.