Chapitre ? : Introduction au calcul matriciel

Encore une fois, dans ce qui suit l'ensemble de nombres considérés sera soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Sauf lorsque la situation l'exige, nous ne préciserons pas la nature des nombres utilisés et nous noterons par $\mathbb{K}$ cet ensemble (i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Définitions et notations

Une **matrice de format** (m, n) à coefficients dans K est un tableau de $m \times n$ éléments de $\mathbb{K}$ organisés en m lignes et n colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

La matrice précédente est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'élément $a_{i,j}$ est le **coefficient** ou le **terme** de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice A.

Une matrice de format $(m, 1)$ est une **matrice colonne** d'ordre m ou encore un **vecteur colonne** d'ordre m.

Exemple :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de format $(1, n)$ est une **matrice ligne** d'ordre n ou encore un **vecteur ligne** d'ordre n.

Exemple :

$$w = (1, 3, 1).$$

On appelle **matrice nulle** et on note 0 la matrice dont tout les coefficients sont nuls.

L'ensemble des matrices de format (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice de format (n,n) (n lignes et n colonnes).

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$.

Les éléments $a_{i,i}$ d'une matrice carrée A d'ordre n sont appelés **termes diagonaux** de A.

Une **matrice diagonale d'ordre** n est une matrice carrée d'ordre n dont tous les termes sont nuls sauf éventuellement les termes diagonaux.

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix}$$

On appelle **matrice identité d'ordre** n et on note I_n la matrice diagonale d'ordre n dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Opérations matricielles

2.1 Egalité de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de même format(m,n). Nous dirons que ces deux matrices sont **égales** et on notera $A = B$ si et seulement si

$$a_{i,j} = b_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!].$$

2.2 Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de même format (m,n). On appelle **matrice somme** de A et B et on note $A + B$, la matrice de format (m,n) et de coefficients $a_{i,j} + b_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La somme des matrices satisifaît aux règles habituelles du calcul.

Propriétés de l'addition

associativité

$$\text{pour tout } (A, B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})^3, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

commutativité

$$\text{pour tout } (A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})^2, \quad A + B = B + A.$$

0 est élément neutre

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad A + 0 = 0 + A = A.$$

existence d'un opposé : pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe un unique élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ noté $-A$ (appelé **opposé** de A) tel que

$$A + (-A) = 0.$$

De plus si $A = (a_{i,j})$, alors nous vérifions immédiatement que $-A = (-a_{i,j})$.

2.3 Produit d'un scalaire et d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de format (m, n) et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note λA la matrice de format (m, n) et de coefficients $\lambda a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 4\lambda \\ 3\lambda & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

2.4 Produit matriciel

Soient A et B deux matrices. Nous dirons que A et B sont **compatibles pour le produit de** A **par** B si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de ligne de B.

Remarque : Deux matrices compatibles pour le produit de A par B ne sont pas nécessairement compatibles pour le produit de B par A.

Soient $A = (a_{i,j})$ de format (m, n) et $B = (b_{i,j})$ de format (n, p) deux matrices compatibles pour le produit de A par B. On appelle **matrice produit de A par B** et on note AB, la matrice de format (m, p) et de coefficients $(c_{i,j})$ définis par

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}, \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, p]\!].}$$

règle de multiplication "ligne par colonne"

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont de formats respectifs $(2, 3)$ et $(3, 2)$. Par conséquent, elles sont compatibles pour le produit de A par B et la matrice AB est de format $(2, 2)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} \\
&= 1 \times 2 + 2 \times 6 + 4 \times (-1) = 10 \\
c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\
&= 1 \times 4 + 2 \times (-2) + 4 \times 0 = 0 \\
c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} \\
&= 3 \times 2 + 1 \times 6 + (-1) \times (-1) = 13 \\
c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} \\
&= 3 \times 4 + 1 \times (-2) + (-1) \times 0 = 10
\end{aligned}$$

D'où

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Dans l'exemple précédent, nous pouvons nous apercevoir que les matrices A et$B$ sont aussi compatibles pour le produit de B par A. Calculer la matrice BA.

Remarque : Une matrice A de profil (m, n) et un vecteur colonne v d'ordre n sont compatibles pour le produit de A par v. Le produit Av de A est un vecteur colonne d'ordre m. Nous dirons que Av est **le produit matrice vecteur** de A par v.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Un système linéaire peut toujours se réécrire comme une égalité de matrice. Par exemple le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 2 \\ x - y + 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

peut s'écrire

$$Av = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés du produit

associativité
pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$(AB)C = A(BC).$$

distributivité
pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Remarque importante : nous avons déjà remarqué que deux matrices A et B compatibles pour le produit de A par B ne sont pas nécessairement compatibles pour le produit de B par A. Néanmoins, même si le produit matriciel BA est défini nous n'avons pas (en général) $AB = BA$. En effet, comme nous le montre l'exemple précédent, ces deux matrices peuvent être de formats différents. **Le produit matriciel n'est donc pas commutatif !**

Proposition 1 Le produit matriciel de deux matrices carrées d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n.

Remarque : Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors les produits AB et BA sont bien définis et ce sont aussi des matrices carrées d'ordre n. Mais le produit matriciel n'est toujours pas commutatif dans $\mathcal{M}_n(K)$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2 Le produit matriciel de deux matrices diagonales est une matrice diagonale du même ordre.

Démonstration
Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices diagonales d'ordre n. Puisque A et B diagonales, nous avons

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad b_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Par définition, les coefficients de la matrice AB sont

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Or $a_{i,k} = 0$ si $k \neq i$, par conséquent

$$d_{i,j} = a_{i,i} b_{i,j}.$$

De plus, nous avons aussi $b_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, d'où

$$d_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

et

$$d_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i} \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

Proposition 3 Soit A une matrice de format (m, n), alors

$$I_m A = A \quad \text{et} \quad A I_n = A.$$

En particulier, si $n = m$

$$A I_n = I_n A = A.$$

Démonstration
La démonstration est laissée à titre d'exercice au lecteur.

Soit A une matrice carrée. On convient de noter A^2 le produit de A par A.

Plus généralement, la **puissance k-ième d'une matrice carrée** est définie par récurrence sur l'entier k par la formule $A^k = AA^{k-1} = A^{k-1}A$.

Par convention $A^0 = I_n$.

Soient A une matrice carrée d'ordre n et $P(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients dans K. On note $P(A)$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$P(A) = a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Proposition 4 (Formule du binôme) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent i.e. telles que

$$AB = BA.$$

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

2.5 Inverse d'une matrice

Une matrice A carrée d'ordre n est **inversible** si et seulement s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$.

Si A est inversible, la matrice B est appelée **matrice inverse** de A et elle est notée A^{-1}.

Proposition 5 Si A est inversible alors A^{-1} est unique.

Démonstration
Soit B une matrice inverse de A. Alors nous avons

$$AB = I_n.$$

En effectuant le produit matriciel à gauche par A^{-1}, nous obtenons

$$A^{-1}AB = A^{-1}I_n,$$

soit

$$B = A^{-1}$$

Remarque : Tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas inversibles.

Proposition 6 Soit D une matrice diagonale d'ordre n, de coefficients diagonaux $d_1, d_2, \ldots, d_n$. La matrice D est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. De plus, si D est inversible alors D^{-1} est la matrice diagonale d'ordre n de coefficients diagonaux $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}$.

Démonstration
Montrons en premier lieu que si un au moins des termes diagonaux est nul alors la matrice D n'est pas inversible. Supposons par exemple que $d_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Remarquons alors que la i-iËme ligne de la matrice D ne comporte que des termes nuls. Par conséquent, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$, la i-ème ligne de la matrice produit DM comporte aussi que des termes nuls. En particulier, le coefficient de la i-ème ligne et de la i-ème colonne de la matrice DM sera toujours nul et ne pourra donc être égal à 1.

Si tous les coefficients d_i sont non nuls, la matrice D^{-1} est bien définie. Montrons maintenant que D^{-1} est bien la matrice inverse de D. D'après la proposition 2, la matrice DD^{-1} est une matrice diagonale dont les termes diagonaux valent $d_i \times \frac{1}{d_i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc $DD^{-1} = I_n$.

Exemple :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre et inversibles, alors la matrice produit AB est inversible et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.}$$

<u>Démonstration</u>
Il suffit de vérifier que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$