Le modèle probabiliste

Module MAP - Telecom nancy

Apprentissage 2020-2021

1. Modélisation d'une expérience aléatoire

2. Notion de Probabilité

3. Notion de conditionnement et d'indépendance

Definition (Expérience aléatoire)

On nomme aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard (*ensemble des causes que l'on ne connait pas ou que l'on ne peut pas maîtriser*).

Modélisation :

- e.a.
- un résultat possible ω
- Ensemble fondamental ou univers (ensemble de tous les résultats possibles) Ω

Exemple : e.a. = On lance trois fois une pièce[1]*.*
$\omega = (P, P, P), (P, P, F)$... *c'est un triplet*
$\omega \in \Omega = \{P, F\}^3 = \{(a, b, c); a, b, c \in \{P, F\}\}$.
Ici l'ensemble fondamental est fini et dénombrable : $Card(\Omega) = 2^3$.

1. On se souviendra de cette e.a. simple que nous suivrons sur tout le chapitre

L'ensemble Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Autres exemples :

- *Jet d'un dé :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [\![1; 6]\!]$
- *Jet de 2 dés discernables :* $\Omega = [\![1; 6]\!]^2$
- *Jets successifs d'une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Face :* $\Omega = \{(F), (P, F), (P, P, F), (P, P, P, F), ...\}$ *(l'ensemble des listes de taille quelconque constituées de P, et de dernier élément F)*
- *Durée de vie d'une ampoule :* $\Omega = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
- *Jet d'une fléchette sur une cible de rayon R :* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Evénement associé à l'e.a.

Pour répondre à la question usuelle : notre résultat satisfait-il une propriété donnée ? ce qui est équivalent à poser la question : appartient-il à un sous-ensemble défini de Ω ?[2]

Definition (Evénement)

Un événement est une *proposition* dont la vérification est déterminée par le résultat de l'e.a.

Premier exemple : a-t-on obtenu au moins 2 faces ?
L'événement A="On a obtenu au moins deux faces" répond à cette question par Oui ou Non (l'événement est vérifié ou pas).
Un autre exemple d'événement : B="On a obtenu face au premier coup"...

2. Cette expression ensembliste, notée en bleu cyan, sera équivalente à l'expression probabiliste en terme d'événements

Un événement peut être assimilé à un ensemble de résultats de l'e.a. réalisant l'événement, i.e. un sous-ensemble de Ω (notations confondues).
Exemple : $A = \{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F),(F,F,F)\} \subset \Omega$.
Il est équivalent de dire : A est réalisé lorsque l'on obtient le résultat (F,P,F) et d'écrire : $(F,P,F) \in A$.
B= {(F,F,F), (F,F,P), (F,P,F), (F,P,P)}

L'ensemble des événements peut être assimilé à l'ensemble des parties de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$ lorsque celui-ci se définit facilement.
Ils sont au nombre de $Card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{Card(\Omega)}$ [3].

On appelle espace probabilisable [4] le couple : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Remarque : attention au cas où Ω est infini non dénombrable !

3. potentiellement de grand cardinal
4. on pourra définir une probabilité sur cet espace

Autres exemples d'événements :

- *Jet d'un dé :* $A = \{2, 4, 6\}$ *correspond à la question : "Obtient-on un nombre pair ?"*
- *Jet de 2 dés discernables :* $A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$ *correspond à la question : "Obtient-on un doublon ?"*
- *Jets successifs d'une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Face :* $A = \{(F), (P, F), (P, P, F)\}$ *correspond à la question : "Obtient-on Face en au plus 3 lancers ?"*
- *Durée de vie d'une ampoule :* $A = [100, +\infty[$ *correspond à la question : "L'ampoule fonctionne-t-elle au moins 100 h ?"*
- *Jet d'une fléchette sur une cible de rayon R :* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r_1^2\}$ *correspond à la question : "La fléchette tombe-t-elle dans la case 50 points (disque central de rayon* r_1*) ?"*

Opérations sur les événements

Dans ce qui suit, on fera l'hypothèse d'une e.a. à laquelle on associe des événements A, B, $(E_i)_{i\geq 1}$ bien définis.

- Evénement élémentaire = un résultat possible de l'e.a. $\{\omega\} \subset \Omega$
- Evénement certain Ω
- Evénement impossible $\emptyset$
- A implique B : $A \Rightarrow B$: si A est réalisé, B l'est aussi ; $A \subset B$
- Evénement contraire : $\overline{A}$: A n'est pas réalisé ; $\overline{A} = \Omega \backslash A$
- Intersection/conjonction de deux événements = C est réalisé si A et B le sont simultanément ; $C = A \cap B$

- Union (non exclusive)/disjonction de deux événements = C est réalisé si A l'est, ou B, ou les deux ; $C = A \cup B$

  Extensions :
- $\bigcup_{n \geq 1} E_n$ signifie : Au moins un des E_i est vérifié
- $\bigcap_{n \geq 1} E_n$ signifie : Tous les E_i sont vérifiés.

Revenons à l'e.a. simple du début pour illustrer ces définitions : nous avons besoin de quelques événements supplémentaires

- ▷ C = *"On obtient au moins 1 Pile ou 1 Face"*
- ▷ D = *"On obtient exactement le même nombre de Pile et de Face"*
- ▷ E = *"On a obtenu une Face"*
- ▷ F_i = *"On obtient exactement i Pile"*, $i = 0, 1, 2, 3$.

Alors on observe : Un événement élémentaire $\omega = \{(P, F, F)\}$; $C = \Omega$ *est toujours vérifié ;* $D = \emptyset$ *n'est jamais réalisé*
$A \subset E$ *attention à ne pas confondre avec l'événement "on obtient exactement une Face" ; il faut définir précisément les événements.*
$\overline{A}$ = *"On obtient 0 ou 1 Face" = "On obtient au plus une Face".*
$A \cap B = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F)\}$;
$A \cup B = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (P, F, F), (F, P, P)\}$

$$\bigcup_{i=0}^{3} F_i = \Omega \; ; \; \bigcap_{i=0}^{3} F_i = \emptyset$$

Propriétés des opérations sur les événements

Rappels (non démontrées), identiques à celles des opérations sur les ensembles [5]

- Idempotence : $A \cap A = A$; Elément absorbant : $A \cap \emptyset = \emptyset$; Elément neutre : $A \cap \Omega = A$
- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
- Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- Distributivité de l'une par rapport à l'autre :
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Lois de *De* Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Généralisation : $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$; $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

5. si besoin, vous pouvez les retrouver grâce à un diagramme de Venn

Notion d'incompatibilité

Dans ce qui suit, on fera l'hypothèse d'une e.a. à laquelle on associe des événements A, B, $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ ou $(E_i)_{i\geq 1}$ ou $(E_i)_{i\in I}$ bien définis.

Definition (Incompatibilité)

Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément (A et B sont disjoints, $A \cap B = \emptyset$).

Exemples triviaux : $(A, \overline{A})$; (ω_i, ω_j).
Retour à l'exemple suivi : soit G = "On obtient Pile au premier coup". Clairement B et G sont incompatibles, de même que F_i *et* F_j, *pour* $i, j = 0, 1, 2, 3; i \neq j$.

Definition (Système complet d'événements)

Une suite d'événements $(E_i)_{i \in I}$ associés à une même expérience aléatoire forme un système complet d'événements lorsque deux d'entre eux ne peuvent être réalisés simultanément, et, à chaque répétition de l'e.a., l'un d'entre eux est réalisé (partition de Ω).

- $\forall i, j \in I, i \neq j, E_i \cap E_j = \emptyset$
- $\forall \omega, \exists i \in I$ tel que $\omega \in E_i, \iff \Omega = \bigcup_{i \in I} E_i$

Exemple trivial : $(A, \overline{A})$.
Retour à l'exemple des 3 lancers successifs d'une pièce de monnaie : (F_0, F_1, F_2, F_3) *est un système complet d'événements.*

Que signifie "probabilisable" (cas particulier de la notion de mesurabilité) ?

Soit Ω, un espace fondamental (associé à une e.a.), et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ non vide.

- (C_1) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire)
- (C_2) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ (stabilité par union finie)
- (C_3) Si $(A_n; n \geq 0)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par union dénombrable) [6]

Les résultats de ces opérations sont encore des événements

Definition

Un ensemble $\mathcal{A}$ vérifiant (C_1) et (C_2) est une algèbre de parties de Ω. S'il vérifie de plus (C_3), c'est une tribu ou σ-algèbre de parties de Ω.

6. ceci renforce la propriété de fermeture, ceci est utile car certaines e.a. peuvent se dérouler en théorie jusqu'à l'infini, ex : jet de la pièce de monnaie jusqu'à obtenir Face.

Remarques/propriétés :

- $\Omega \in \mathcal{A}$

  Soit un élément quelconque A de $\mathcal{A}$. On peut écrire $\Omega = A \cup \overline{A}$.
  $A \in \mathcal{A}$, donc $\overline{A}$ aussi par (C_1), et $A \cup \overline{A}$ par (C_2). Ainsi $\Omega \in \mathcal{A}$.

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  On peut appliquer le point précédent et (C_1) sachant que $\overline{\Omega} = \emptyset$.

- $(C_2) \Leftrightarrow (C_2')$: stabilité par intersection : $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$ sous (C_1).

  Si (C_1) et (C_2) sont vérifiées, $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ appartiennent à $\mathcal{A}$, l'union aussi par (C_2), ainsi que le complémentaire de celle-ci par (C_1). Donc $A \cap B \in \mathcal{A}$.
  Pour obtenir l'implication dans l'autre sens, on procède de même avec $A \cup B$. On aura donc l'équivalence.

- $(C_3) \Leftrightarrow$ stabilité par intersection dénombrable : si $(A_n; n \geq 0)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

  On peut le montrer par récurrence. Le rang $n = 1$ est (C_2).

  Supposons la propriété vraie au rang n : $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

  $\bigcap_{i=0}^{n+1} A_i = \bigcap_{i=0}^{n} A_i \cap A_{n+1} \in \mathcal{A}$ d'après (C_2'). On a donc établi la propriété au rang $n + 1$. Ce qui établit la propriété par récurrence.

- La stabilité par union finie est une conséquence simple de la stabilité par union dénombrable :

  $$A_j \in \mathcal{A}, \forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$$

- De même pour l'intersection : $A_j \in \mathcal{A}, \forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$

  On peut l'obtenir en passant au complémentaire.

Quelques exemples :

- $\{\emptyset, \Omega\}$ *tribu grossière*
- $\mathcal{P}(\Omega)$ *tribu discrète (la plus complète dans les cas simples : Ω fini ou infini dénombrable)*
- *soit $A \in \mathcal{A}$, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\} = \sigma(A)$. On l'appelle σ-algèbre engendrée par A, c'est la plus petite tribu contenant A (tribu contenant A et la plus petite au sens où si $\mathcal{B}$ est une tribu contenant A, alors $\sigma(A) \subset \mathcal{B}$). C'est aussi l'intersection[7] de toutes les tribus contenant A.*
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tribu engendrée par tous les intervalles ouverts $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, appelée tribu borélienne. Elle contient tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ "raisonnables".*

Definition

On appelle ensemble probabilisable un ensemble $(\Omega, \mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω.

7. On admettra que toute intersection de tribus est encore une tribu, ce qui n'est pas vrai pour l'union de tribus

Definition (Probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable associé à une e.a. Une probabilité est une application notée $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ qui, à chaque événement $A \in \mathcal{A}$ associe un nombre réel $\mathbb{P}(A)$ appelé probabilité de l'événement A, telle que :

(a1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;

(a2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(a3) pour toute suite finie ou infinie d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i \in I}$ ($I = \{1, ..., n\}$ ou $I = \mathbb{N}$) , on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

(Axiome des probabilités totales ou propriété de σ-additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé un espace de probabilité. Le plus souvent : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Ω fini ou dénombrable

Remarque : il n'est pas toujours facile de définir une probabilité "convenable" pour une e.a.

Définir une probabilité correspond à se donner un poids $p_i \geq 0$ pour chaque éventualité ω_i avec $\sum_i p_i = 1$. Une probabilité sur un ensemble fini est entièrement caractérisé par sa valeur sur les événements élémentaires.[8]

8. Gemme de probabilité

Un petit exercice d'application :
Les fonctions suivantes, définies sur les singletons, se prolongent-elles en une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

1. $\Omega = [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = C_n^k (-1)^k 2^{n-k}$
2. $\Omega = [\![1; 2n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n} |1 - \frac{k}{n}|$

Solution : d'après le gemme de probabilité, il suffit de montrer que ces réels sont positifs et que leur somme vaut 1.

1. $\Omega = [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = C_n^k(-1)^k 2^{n-k}$
   $\mathbb{P}(\{1\}) = -n2^{n-1} < 0$, donc ce n'est pas une probabilité.
2. $\Omega = [\![1; 2n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}|1 - \frac{k}{n}|$
   Pour $k \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$, et
   $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n}|1 - \frac{k}{n}| = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n}) + \sum_{k=n+1}^{2n}(\frac{k}{n} - 1)\right) =$$
   $$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n} + \frac{n+k}{n} - 1)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = 1$$
   donc c'est une probabilité.

Ω fini muni de l'équiprobabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $Card(\Omega) = N$

Definition (Equiprobabilité)

Chaque résultat de l'e.a. a la même probabilité de se réaliser :
$\mathbb{P}(\omega_1) = ... = \mathbb{P}(\omega_N)$

Alors : $\forall i = 1, ..., N$, $\mathbb{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$
et pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card\ A}{N} = \frac{\text{nb cas favorables}^{9}}{\text{nb cas possibles}}$$

Exemple de l'e.a. "on lance 3 fois une pièce" : $\mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{8}$, $\forall \omega \in \Omega$ *car*
$Card(\Omega) = 2^3 = 8$
On en déduit : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

9. appel à l'analyse combinatoire

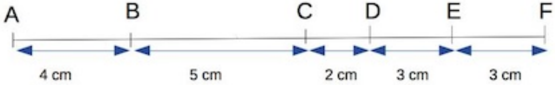
Autre cas particulier : probabilité géométrique

Une probabilité géométrique est liée à la réalisation d'un résultat d'une expérience aléatoire dans un contexte géométrique simple : un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie muni de la loi uniforme.

On remarque que dans les exemples déjà évoqués, certains événements s'expriment géométriquement comme des sous-ensembles de l'univers Ω :

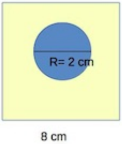
- Durée de vie d'une ampoule : A = "L'ampoule fonctionne au moins 100 h" = $[100, +\infty[\subset \Omega = \mathbb{R}^+$
- Jet d'une fléchette sur une cible de rayon R : A = "La fléchette tombe dans la case 50 points (disque central de rayon r_1)" $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r_1^2\} \subset \Omega$

Un exemple en dimension 1 :
Ce calcul de probabilité utilise les mesures de longueurs. On choisit au hasard un point sur le segment AF ci-dessous. Quelle est la probabilité que le point se situe sur le segment BC ?



$$\mathbb{P}(\text{"point sur le segment BC"}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AF}} = \frac{5}{17} \simeq 0,294.$$

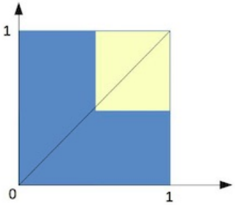
Un exemple en dimension 2 :
Quelle est la probabilité qu'un point lancé au hasard dans le carré atteigne le cercle ?



Aire du cercle : $A_{\text{cercle}} = \pi \times 2^2 = 15,5664cm^2$
Aire du carré :$A_{\text{carré}} = 8^2 = 64cm^2$

$$\mathbb{P}(\text{"atteindre le cercle"}) = \frac{A_{\text{cercle}}}{A_{\text{carré}}} \simeq 0,196.$$

Un exemple dans le plan cartésien :
Tirer 2 nombres au hasard dans $[0,1]$ revient à tirer un point au hasard dans le carré unité $[0,1]^2$. Quelle est la probabilité que le minimum des deux nombres soit inférieur à 1/2 ?



$\mathbb{P}(inf(x,y) \leq 1/2) = 3/4$

Formule générale :
Si Ω est une partie régulière bornée de $\mathbb{R}^n$ (en pratique pour n= 1, 2, 3), alors on peut calculer la probabilité de tout événement A par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid}$$

où $\mid . \mid$ représente la mesure : la longueur si n=1, la surface si n=2, le volume si n=3.

Propriétés I

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ associé à une e.a. Soient des événements $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ et A, B associés à celui-ci. Alors :

- Généralisation : formule de Poincaré [10]
  Soit $n \geq 2$ et soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite d'événements. Alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \qquad (\mathcal{P}_n)$$

ou

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k<k'} \mathbb{P}(A_k \cap A_{k'}) + \dots$$

$$+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1<\dots<i_r} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

10. formule du crible

On peut la démontrer par récurrence. Connu pour 2 événements ; pour 3 événements :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = \ldots\ldots \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\
&\qquad - \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&\qquad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\
&\qquad + \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) \\
&= (\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)) \\
&\quad - (\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \qquad\qquad \Rightarrow (\mathcal{P}_3)
\end{aligned}
$$

Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vérifiée. Au rang $n+1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) &= \mathbb{P}((A_1 \cup ... \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) - \mathbb{P}((\cup_{i=1}^n A_i) \cap A_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})) \text{ (distributivité)} \\
&\text{ on applique deux fois la propriété au rang n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,...,i_k\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$
- \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,...,i_k\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}((A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap ... \cap (A_{i_k} \cap A_{n+1}))
$$

On a deux sommes sur toutes les suites strictement croissantes $(i_1, ..., i_k)$ de k entiers de $[\![1; n]\!]$: la première se compose de toutes les suites de la forme $\cap A_i$ ne contenant pas A_{n+1}, la seconde de toutes les suites de la même forme contenant A_{n+1} à l'exception de A_{n+1} seule. On peut alors regrouper tout dans une seule somme, le terme $(-1)^{k+1}$ venant compléter le bon signe. $\Rightarrow (\mathcal{P}_n)$. Ceci achève la preuve par récurrence.

- Pour un système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$, on a :

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Par définition, les A_i sont deux à deux incompatibles. On applique (a3) : $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ et d'autre part $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

- Soit B un événement et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Les événements $B \cap A_i$ sont clairement incompatibles deux à deux. Donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i)) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$

- Une probabilité (ou mesure de probabilité) est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

- *Continuité* : soit une suite monotone d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associés à $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors $\mathbb{P}(\text{"}\lim\text{"}_n$ [11] $A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.
  En particulier : Si la suite est strictement croissante $(A_n \subset A_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N})$, alors $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
  Si la suite est strictement décroissante $(A_n \supset A_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N})$, alors $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

11. Attention, il ne s'agit pas de la limite au sens usuel ! qui n'a pas de sens ici ; c'est une notation un peu abusive pour résumer... On retiendra les cas particuliers croissant (union) et décroissant (intersection).

1. Modélisation d'une expérience aléatoire

2. Notion de Probabilité

3. Notion de conditionnement et d'indépendance

Type de problème rencontré : lorsque la connaissance de la réalisation d'un événement a un impact sur la probabilité de réalisation d'un autre événement.

Dans notre exemple, savoir que B est réalisé modifie intuitivement la probabilité de A.

Definition (Probabilité conditionnelle)

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ associé à une e.a. Soient A et B deux événements associés, tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B (ou de A sachant B) la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé. On la note :$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A/B)$ et elle est définie par : $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Vérifions notre intuition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\sharp\{FFP, FPF, FFF\}}{8} = \frac{3}{8}$ *donc* $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)$

Montrons que $\mathbb{P}(./B) = \mathbb{P}_B$ définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: il faut vérifier les trois axiomes (a1), (a2) et (a3).

- (a1) Est-ce que $\mathbb{P}_B(A) \in [0,1], \forall A \in \mathcal{A}$?
  Comme $(A \cap B) \subset B$, $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ et l'axiome (a1) pour $\mathbb{P}$ nous dit que $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ d'où :
  $$0 = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} \leq (\mathbb{P}_B(A) =) \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$
- (a2) Est-ce que $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$? $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
- (a3) Pour toute suite $(A_i)_{i \in I}$ d'événements disjoints, a-t-on $\mathbb{P}_B(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_B(A_i)$?
  $$\mathbb{P}_B(\cup_{i\in I} A_i) = \frac{\mathbb{P}((\cup_{i\in I} A_i) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_{i\in I}(A_i \cap B))}{\mathbb{P}(B)}.$$
  Les $A_i \cap B$ étant disjoints (pour $i \neq j, (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$), on peut appliquer l'axiome (a3) vérifié par $\mathbb{P}$ d'où :
  $$\mathbb{P}_B(\cup_{i\in I} A_i) = \frac{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_B(A_i) \ \square$$

Propriétés

Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse d'événements $A, B, C, (A_i)_{i\in I}$ de probabilité non nulle, définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ associé à une e.a.

Comme c'est une probabilité, elle en vérifie les propriétés, et en particulier :

- $\mathbb{P}(\overline{A}/B) = 1 - \mathbb{P}(A/B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B/C) = \mathbb{P}(A/C) + \mathbb{P}(B/C) - \mathbb{P}(A \cap B/C)$
  Attention ! On ne parle pas de conditionnel pour un événement !
- Cas particulier d'un espace fondamental fini muni de l'équiprobabilité : $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\sharp A \cap B}{\sharp total}$; $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\sharp A \cap B}{\sharp B}$

On dit que la probabilité conditionnelle est portée par B :
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}_B(A) = 0$ et $B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}_B(A) = 1$.

Formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2/A_1)...\mathbb{P}(A_{n-1}/A_1 \cap ... \cap A_{n-2}).\mathbb{P}(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$.

Exercice : retrouver rapidement les formules au rang 2 :
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B/A)$,
puis 3 : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C/A \cap B)\, P(A \cap B) = \mathbb{P}(C/A \cap B)\,\mathbb{P}(B/A)\,\mathbb{P}(A)$.

L'hypothèse est suffisante pour assurer que toutes les probabilités conditionnelles apparaissant dans la formule ont un sens. En effet, pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, $(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \subset (A_1 \cap ... \cap A_k)$, donc
$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_k)$, ainsi
$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_k) > 0, \forall k \in [\![1; n-1]\!]$ et toutes les probabilités conditionnelles seront bien définies.
La formule est alors facile à démontrer en partant du membre de droite et en appliquant la définition.

Exemple : 10 garçons et 15 filles descendent de manière désordonnée d'un bus. Quelle est la probabilité que les 3 premiers à descendre soient des garçons et la quatrième soit une fille ?

Notons G_i l'événement "la iième personne descendant du bus est un garçon". On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \overline{G_4})$. Cette probabilité étant non nulle, on utilisera la formule des probabilités composées. Considérons la première personne descendant du bus, comme il y en a 25 en tout, $\mathbb{P}(G_1) = \frac{10}{25}$. Considérons la seconde personne sachant qu'un garçon est déjà descendu : $\mathbb{P}(G_2/G_1) = \frac{9}{24}$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir :

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \overline{G_4}) = \mathbb{P}(G_1).\mathbb{P}(G_2/G_1).\mathbb{P}(G_3/G_2 \cap G_1).\mathbb{P}(\overline{G_4}/G_3 \cap G_2 \cap G_1)$$

$$= \frac{10}{25}.\frac{9}{24}.\frac{8}{23}.\frac{15}{22} = \frac{9}{253} \simeq 0.035$$

Théorème des Probabilités Totales

Soit $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Supposons que $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors

$$\forall B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Nous avons vu précédemment (diapo 34) que sous ces hypothèses : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$. Il suffit de se souvenir de la définition de la probabilité conditionnelle pour obtenir le résultat.

C'est ce Théorème que l'on utilise lorsque l'on représente les calculs par un arbre.

En particulier : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B/\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$

Exemple : Dans une urne se trouvent 10 boules blanches, 20 boules rouges et 30 boules noires. On effectue 2 tirages ***sans remise****. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit rouge.*

Notons les événements suivants : R_i *= "La boule numéro i tirée est rouge",* B_i *= "La boule numéro i tirée est blanche",* N_i *= "La boule numéro i tirée est noire", pour* $i = 1, 2$*. On notera que* $\{R_1, B_1, N_1\}$ *constitue un s.c.e. de* Ω*.*
On cherche R_2*, que l'on peut alors décomposer comme :*
$R_2 = (R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap R_2)$*, d'où :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_2/R_1).\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2/B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(R_2/N_1).\mathbb{P}(N_1) \\ &= \frac{19}{59}.\frac{20}{60} + \frac{20}{59}.\frac{10}{60} + \frac{20}{59}.\frac{30}{60} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Théorème de Bayès

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ associé au même espace de probabilité. Alors, $\forall j \in I$, on a

$$\mathbb{P}(A_j/B) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(B/A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B/A_i)}$$

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un s.c.e., le Théorème des Probabilités Totales nous donne : $\forall B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$. Il suffit alors d'écrire la probabilité conditionnelle cherchée : $\mathbb{P}(A_j/B) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(B/A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B/A_i)}$

Exemple : On effectue un test de détection d'une maladie. Une analyse statistique de qualité du test a donné les résultats suivants :
- si le test est effectué sur une personne effectivement atteinte par la maladie, le test sera positif dans 95 % des cas (c'est le pourcentage de Vrais Positifs),
- si le test est effectué sur une personne saine, le test sera positif dans 1 % des cas (pourcentage de Faux Positifs).
On sait également que 0,1 % de la population est porteuse de cette maladie.
Si vous vous rendez au laboratoire pour effectuer le test et qu'il est positif, quelle est la probabilité que vous soyiez effectivement porteur de la maladie ?

Soient les événements associés à l'e.a. "Prélever au hasard un individu de la population" : M = "L'individu est malade", P= " Le test est positif".
L'énoncé nous donne : $\mathbb{P}(P/M) = 0.95$ *;* $\mathbb{P}(P/\overline{M}) = 0.01$ *;*
$\mathbb{P}(M) = 0.001$.
Nous pouvons appliquer le Théorème de Bayès sur le s.c.e. $\{M, \overline{M}\}$ *pour obtenir :*

$$\mathbb{P}(M/P) = \frac{\mathbb{P}(P/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P/M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P/\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999}$$

$\mathbb{P}(M/P) = 0.0868$
Le test semble inutile ! Néanmoins s'il est peu coûteux, il peut être utile pour sélectionner les personnes qui subiront un test plus cher et plus précis.

Indépendance I

Definition (Indépendance)

Soient deux événements A et B associés à un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si A est de probabilité non nulle, on dit que A et B sont indépendants[a] si et seulement si $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$.
Si B est de probabilité non nulle, on dit que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$.

a. pour la probabilité $\mathbb{P}$

Interprétation : le fait se savoir que l'un est réalisé ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.
Notation : $A \perp\!\!\!\perp B$[12].
Exemple suivi : $\mathbb{P}(A/B) = 3/4 > \mathbb{P}(A) = 1/2$ *donc A et B ne sont pas indépendants !*

12. relation symétrique

Théorème

A et B indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Preuve : $\Rightarrow$ supposons $A \perp\!\!\!\perp B$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Or $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A).\mathbb{P}(B)$ (formule des Probabilités Composées) et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$.

$\Leftarrow$ Réciproque : supposons que l'on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$. Alors appliquons la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \text{ et donc } A \perp\!\!\!\perp B.$$

- A et B indépendants équivaut à : A et $\overline{B}$ indépendants, et à : $\overline{A}$ et B indépendants, et à : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.
- Attention à ne pas confondre incompatibilité et indépendance ! la notion d'incompatibilité est intrinsèque aux événements, la notion d'indépendance dépend de la probabilité choisie.

- On peut montrer que deux événements incompatibles ne peuvent pas être indépendants.
  Soient 2 événements A et B incompatibles de probabilité non nulle. On a : $A \cap B = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Mais puisque A et B sont tous deux de probabilité non nulle, $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$! A et B ne peuvent pas être indépendants s'ils sont incompatibles ! (cela ne sera possible que si l'un au moins d'entre eux est de probabilité nulle).
- $\forall A$ événement, $A \perp\!\!\!\perp \emptyset$; $A \perp\!\!\!\perp \Omega$.

Indépendance de plus de deux événements

Il faut distinguer deux notions d'indépendance.

Definition (Indépendance deux à deux)

Soit une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit qu'ils sont deux à deux indépendants si et seulement si pour tout couple de deux événements, il y a indépendance entre les événements : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j,\ A_i \perp\!\!\!\perp A_j$.

Definition (Indépendance mutuelle)

- Une famille finie $(A_i)_{i \in I}$ (typiquement $I = \{1, ..., n\}$) d'événements est dite **mutuellement indépendante** si pour toute partie non vide $J \subset I$, on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

- Une famille infinie $(A_i)_{i \in I}$ (typiquement $I = \mathbb{N}$) d'événements est dite **mutuellement indépendante** si toute sous-famille finie est mutuellement indépendante.

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. Mais la réciproque est fausse !

Retour à l'exemple du jet de 3 pièces... en considérant à présent les événements C = "Obtenir Pile au premier lancer", D = "Obtenir Face au second lancer", E = "Obtenir le même résultat aux deux premiers lancers".
Rappel ou calcul : $\mathbb{P}(C) = 1/2; \mathbb{P}(D) = 1/2;$
P(E) = 1/2 (= { (P,P,P), (P,P, F), (F,F,P), (F,F,F) })

puis : $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(\{(P, F, P), (P, F, F)\}) = 1/4$
$\mathbb{P}(C \cap E) = \mathbb{P}(\{(P, P, P), (P, P, F)\}) = 1/4$
$\mathbb{P}(D \cap E) = \mathbb{P}(\{(F, F, P), (F, F, F)\}) = 1/4$

On voit clairement que les événements sont deux indépendants. Par contre, ils ne sont pas mutuellement indépendants puisque :
$\mathbb{P}(C \cap D \cap E) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(C).\mathbb{P}(D).\mathbb{P}(E) = 1/8$ *!*