

La notation tiendra compte de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Partie I - Polynômes et fractions rationnelles

- ★ Exercice 1: Effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$ de :

$$P = \frac{1}{(X-1)^3(X^3+1)}$$

- ★ Exercice 2: Factoriser les polynômes en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$

$$P = X^9 + X^6 + X^3 + 1 \quad ; \quad Q = X^6 + 1 \quad ; \quad R = X^4 + X^2 + 1$$

Partie II - Raisonnement

- ★ Exercice 3: Théorème : Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) a est racine de multiplicité m du polynôme P .
- ii) $P(a) = 0$, $P'(a) = 0, \dots, P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- iii) $P(a) = 0$ et a est racine de multiplicité $m-1$ du polynôme P' .

> Question 1: Démontrer le Théorème de caractérisation de la multiplicité d'une racine