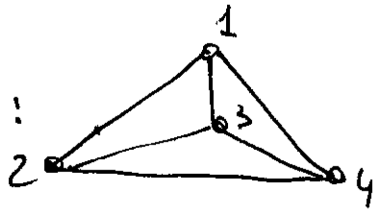
TD1 Théorie des graphes
MSED

Exo1 Classement des graphes :

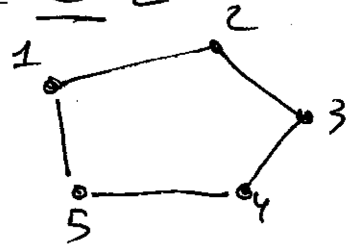
- ordre – 4 : G_2 et G_3 –
  5 : G_4 et G_5 –
  6 : G_6, G_7, G_8 –

- G_2 / G_3 : 4 sommets tous de d° 3 (graphes complets)
  G_2 et G_3 identiques.
  Représentation planaire :



$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
d° : 3 3 3 3

- G_4 et G_5 : 5 sommets tous de d° 2
  G_4 et G_5 identiques
  Représentation planaire :

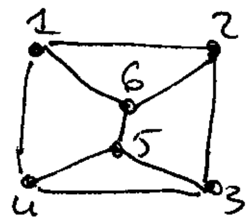


$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
d° : 2 2 2 2 2

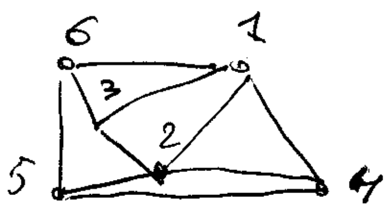
- $G_6 / G_7 / G_8$: 6 sommets tous de d° 3
  - G_6 et G_8 identiques : dans G_8, il suffit de rapprocher les 2 sommets haut et bas.
  - G_6 et G_7 ne sont pas identiques :

dans G_6 (et G_8) et G_7, si on fixe un sommet, il y a exactement 2 sommets qui ne lui sont pas adjacents ; mais dans G_6 (et G_8), ces 2 sommets sont reliés par une arête alors que dans G_7 ils ne sont reliés par aucune arête

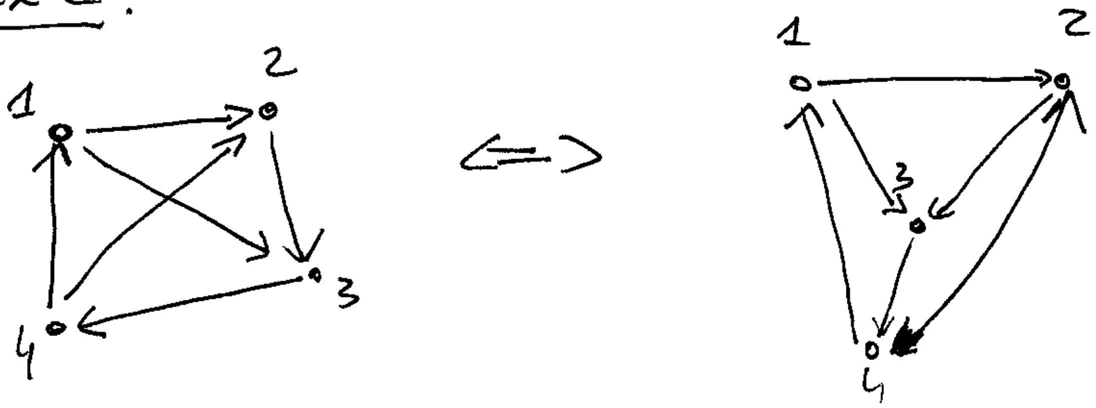
- Représentation planaire G_6 / G_8 :



- Représentation planaire G_7 :



Ex 2 :



M^2 donne les chemins de longueur 2
M^3 donne les chemins de longueur 3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

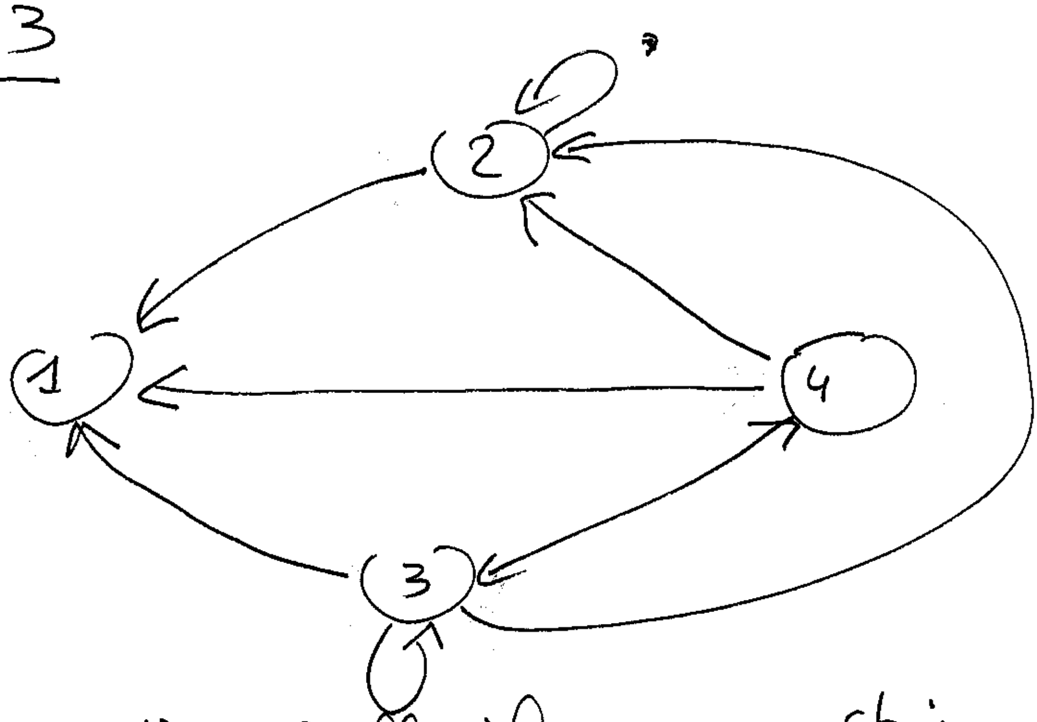
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{8 chemins de long. 2}$$

exple : 4-1-3 et 4-2-3.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{11 chemins de long. 3}$$

exple : 4-1-2-3

Ex 3



Graphe Non Reflexif, non symétrique, non transitif.

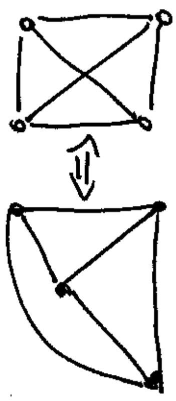
- Graphe reflexif : Ajout Boucles (1,1) et (4,4)
- – Anti-symétrique : Supprimer 1 arc entre 3 et 4
- – symétrique : Ajout Arcs : (1,2), (1,4), (1,3), (2,4), (2,3)
- – Transitif : Ajout Boucle (4,4)

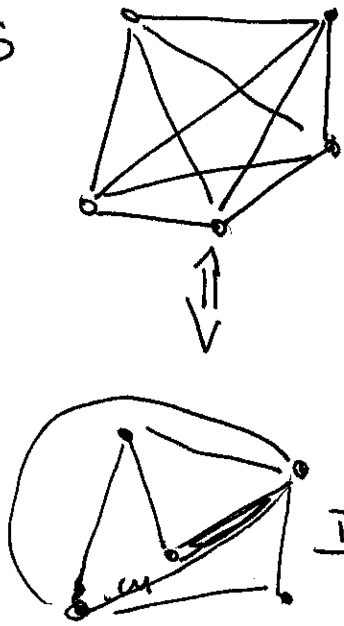
Ex4

K_2 

K_3 

$d = n-1$

K_4 

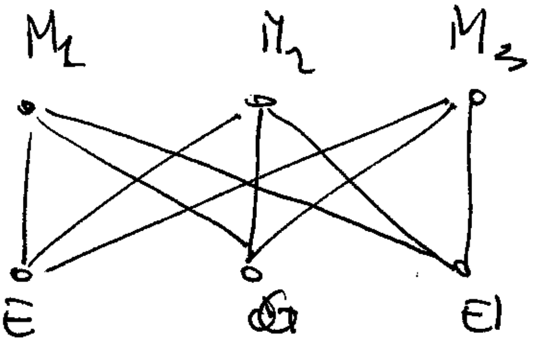
K_5 

Impossible
$\Rightarrow$
Non planaire

~~K_3~~

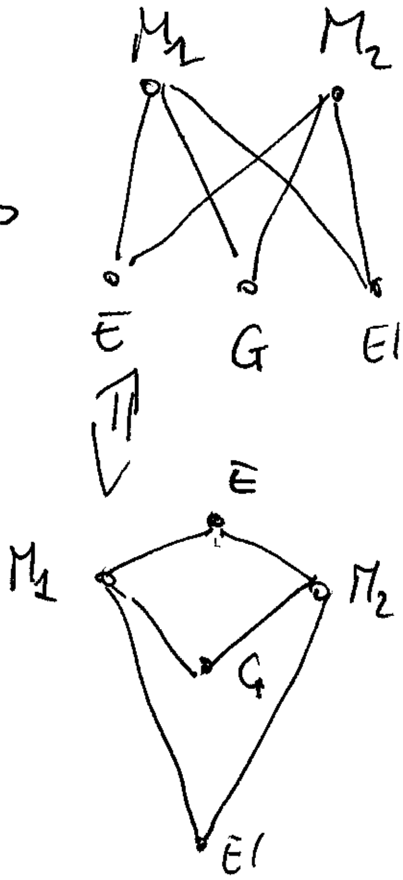
Ex5

$K_{3,3}$

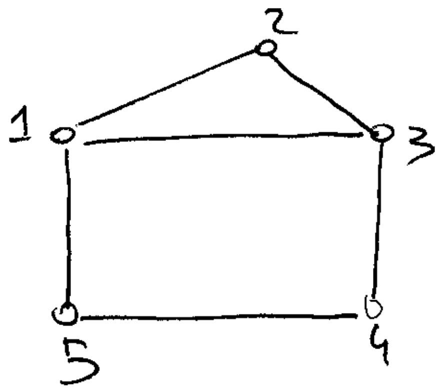


Non planaire

$K_{2,3}$

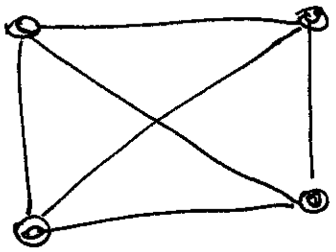


Ex 6   Problème Eulérien

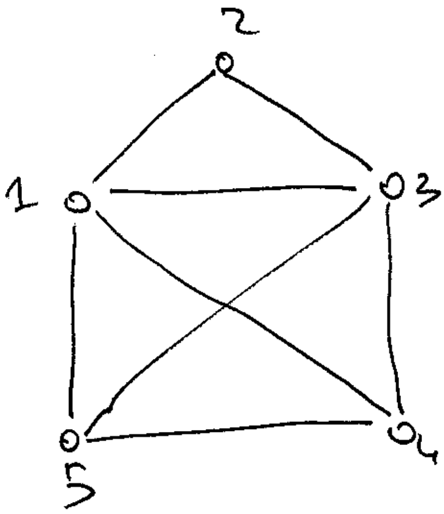


le graphe contient une chaîne Eulérienne.
extrémité : 1 - 3

Oui si on part et on arrive sur les 2 extrémités



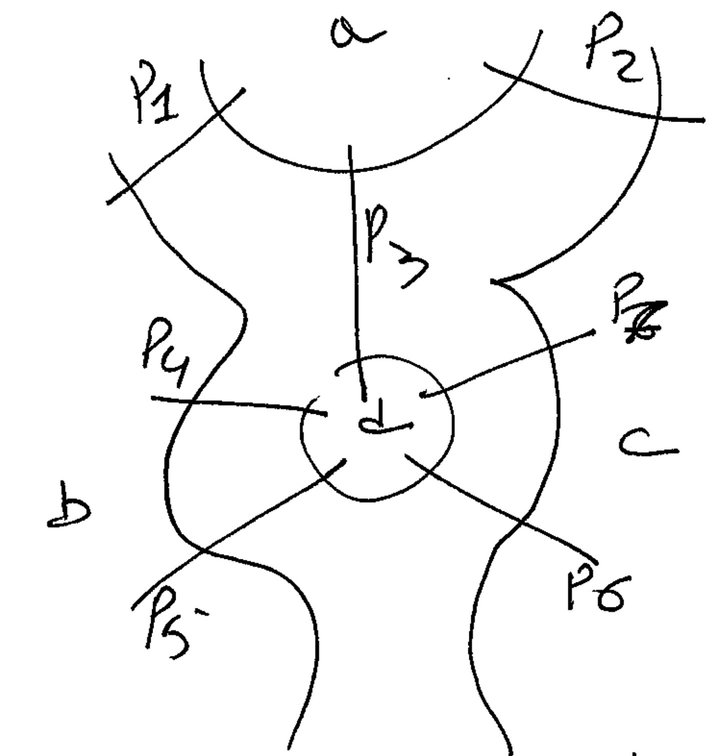
tous les sommets sont de degré impair ⇒
le graphe n'est pas Eulérien
NON



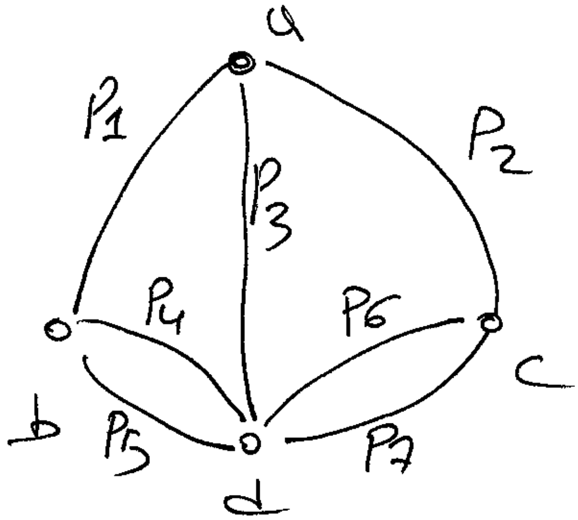
le graphe contient une chaîne Eulérienne d'extrémité 4 - 5

oui si on part et on arrive sur les 2 extrémités.

Ex 7 - Ponts de Königsberg :

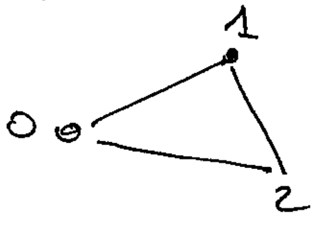


$\Leftrightarrow$



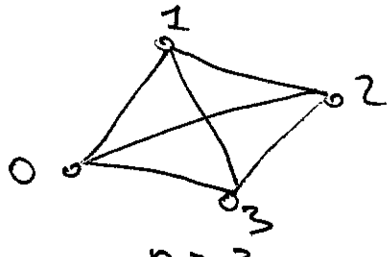
Le graphe admet plus de 2 sommets de degré impair $\Rightarrow$
il n'admet ni circuit Eulérien (on revient au point de départ) ni chaine Eulerienne

Ex 8 Jeu du domino.



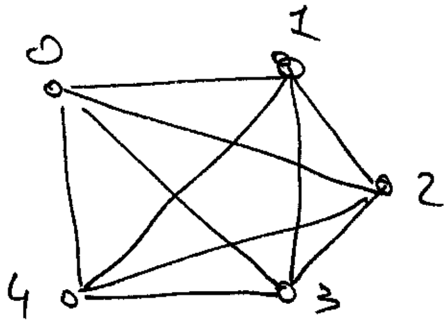
$n=2$

d° des sommets tous pairs : Oui



$n=3$

d° des sommets non tous pairs : Non



$n=4$

d° des sommets tous pairs : Oui

$n=i \Rightarrow$ ordre du graphe $= i+1$

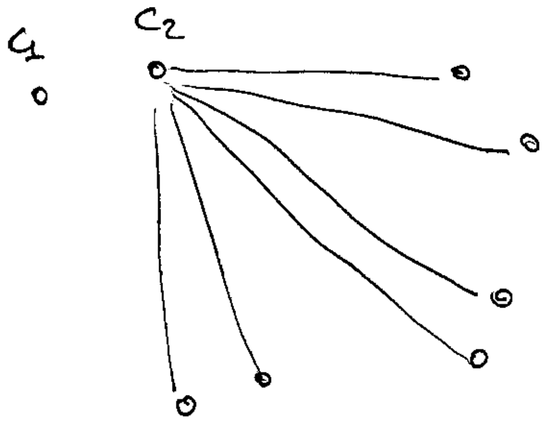
graphe complet $\Rightarrow d^\circ$ des sommets $=(i+1)-1=i$

pour $n=6$, d° des sommets $=6 \Rightarrow$ tous pairs : Oui

Ex 9 Poignées de mains.

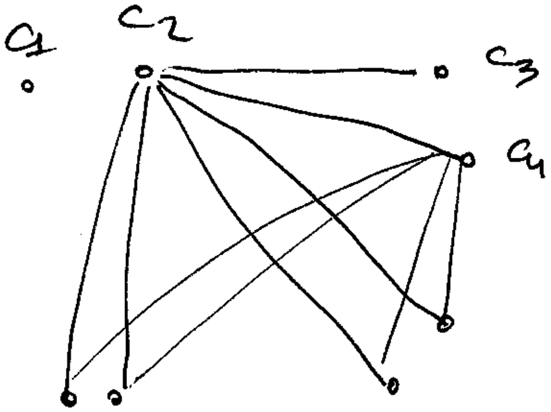
- une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes (pas elle-m, pas son conjoint)
pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il faut nécessairement les nombres : 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

- une personne échange 6 poignées de main :



$\Rightarrow$ c'est nécessairement son conjoint qui en échange 0.

- une personne échange 5 poignées de main :



$\Rightarrow$ c'est nécessairement son conjoint qui en échange 1.

... on a les couples : (6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3)

la seule personne qui peut échanger un nombre non distinct de poignées de main est M. Euler
$\Rightarrow$ (3, 3)