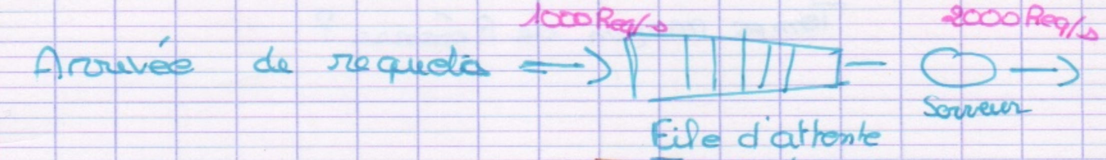
EP

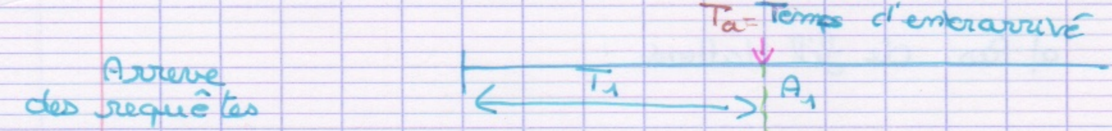
1

TD 4 - Chaîne de Markov à temps continu

Exercice n°1

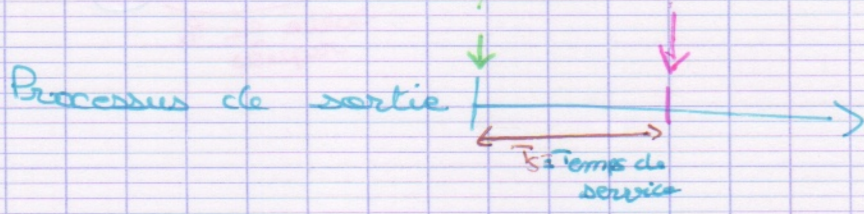
1.





T_a ~ suit une loi exponentielle de paramètre λ

$\lambda = 1000$ (Req/s)



T_S ~ loi exponentielle de paramètre μ

$$\mu = 2000 \text{ (Req/s)}$$

$$E(T_S) = \frac{1}{2000} = 0{,}5 \text{ (ms/Req)}$$

$$E(T_S) = \frac{1}{\lambda}$$

$$P(T > 2\,ms) = P(T_S > 0{,}002)$$

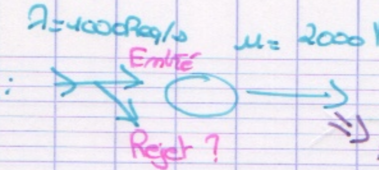
$$= 1 - P(T_S < 0{,}002) = 1 - (1 - e^{-\lambda\, 0{,}002})$$

$$= 1 - (1 - e^{2000 \times 0{,}002})$$

$$= e^{-4}$$

$$= 0{,}018$$

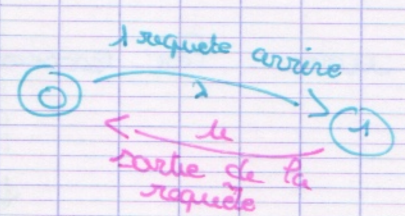
2

2. SYS 1: 

⇒ Nombre de requêtes dans le système {0; 1}

↳ Taux de Rejet ?
Taux d'occupation ?
Débit en sortie ? =
Temps moyen de Réponse ?

a) Pas de fil d'attente :

↳ 

Taux d'occupation = P(SYS à 1 req) = $\boxed{\Pi_S}$ → Probabilité d'être à l'état 1

Debit en sortie $X = \Pi_1 \cdot \mu (1 \cdot 0) = \boxed{\Pi_1 \cdot \mu}$

Nombre moyen de requête dans le système :

$L = 0 \cdot \Pi_0 + 1 \cdot \Pi_1 \boxed{= \Pi_1}$

Temps moyen $R = \frac{L}{X} = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 \cdot \mu} = \boxed{\frac{1}{\mu}}$

Taux de perte = $\frac{\text{Nombre total des requêtes perdues}}{\text{Nombre total de requêtes arrivant}} = \frac{T \cdot \lambda - T \cdot \Pi_0 \cdot \lambda}{T \cdot \lambda}$

↑ durée d'observation

$\boxed{= 1 - \Pi_0}$

↑ Π_1

⇒ on perd une requête quand le système est à l'état 1

EP

3

TD4 - chaîne de Markov à temps continu

Nombre totale de requête perdue = $\underbrace{\text{Nb total de requêtes}}_{T.\lambda}$ - $\underbrace{\text{Nb totales req entrants}}_{T.\pi_0.\lambda}$

$\boxed{\text{* Calcul de } \pi_0, \pi_1}$

$\pi.M = 0$ avec $\pi = (\pi_0, \pi_1)$

$\pi_0 + \pi_1 = 1$

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda M_0 + \mu M_1 = 0 \\ \lambda M_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \pi_0 = 1 - \pi_1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \lambda(1-\pi_1) + \mu \pi_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

$$\pi_1 = \frac{1000}{1000+2000} = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$$

$$\pi_2 = \frac{2000}{1000+2000} = \frac{2}{3}$$

Taux de Rejet : $S = \pi_1 = \frac{1}{3}$

Taux d'occupation $U = \frac{1}{3} = 0,33$

4

Debit en sortie $X = \pi_1 \mu = \frac{2000}{3} = 666,667$ (Req/s)

Temps moyen $= R = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2000} = 0,5$

Nombre moyen de requêtes dans le SYS: $L = \pi_1 = \frac{1}{3}$

Etude freq : $\begin{cases} \lambda = 1000 \text{ Req/s} \\ \mu = 2000 \text{ Req/s} \end{cases}$

Configuration	Taux d'occupation	Taux perte	Debit	Temps de reponse
1 servers, 0 fil d'attente: $\lambda \to \bigcirc \xrightarrow{\mu}$ (perte)	33,33%	33,3%	666,67 (Req/s)	0,5 ms
1 file d'attente: $\lambda \to \boxed{1} \xrightarrow{\mu} \bigcirc \to$ (perte)	42,85%	14,28%	857 (Req/s)	0,66 ms
2 files d'attentes: $\to \boxed{2} \to \bigcirc \to$ (perte)	66,67%	6,67%	933 (Req/s)	0,78 ms
$\lambda \to$ 2 serveurs $\bigcirc$ (perte)	38,5%	7,7%	925 (Req/s)	0,5 ms

IFP

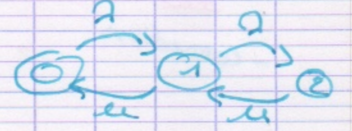
5

1 file d'attente

TD 4 - Chaîne de Markov à temps continu

* Modelisation :

→ Nombre de requêtes dans le système : $\{0; 1; 2\}$



* Formulation

1) Taux de perte $= \boxed{\pi_2} = 14,28\%$

2) Taux d'occupation $U = \pi_1 + \pi_2 = 1 - \pi_0 = 42,85\%$

3) Débit : $X = \pi_1 \cdot \mu(1-0) + \pi_2 \cdot \mu(2-1) = (\pi_1 + \pi_2) \cdot \mu = \frac{6000}{7}$ $\boxed{\pi_1 + \pi_2}$

4) Nombre de requête ds système : $L = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \pi_2 =$

5) Tps moyen de réponse : $R = \frac{L}{X} = \boxed{\frac{\pi_1 + 2\pi_2}{(\pi_1 + \pi_2)\mu}} = \frac{4/7}{3/7 \cdot 2000} = \frac{4}{6000} = 0,667$ (ms)

Débit à l'entrée : $\Lambda = \pi_0 \cdot \lambda \cdot (1-0) + \pi_1 \, \lambda \cdot (2-1)$
$= (\pi_0 + \pi_1) \cdot \lambda$

* calcul π_0, π_1, π_2

$\pi = (\pi_0 \;\; \pi_1 \;\; \pi_2)$

car aucun lien entre 0 et 2 ⚠

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi \cdot M = 0 \\ \Sigma \, \pi = 0 \end{cases}$$

Jusque ici
au partiel,
pas de calcul

$$\begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_0 - (\lambda + \mu)\pi_1 + \mu \pi_2 = 0 \\ \lambda \pi_1 - \mu \pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{4}{7} \qquad \pi_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{1}{7}$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{2}{7}$$

⑥

- fait seul
- correction

* Modélisation

Nombre de requêtes dans le système : $\{0; 1; 2; 3\}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

* Formulation

+) Taux de perte : π_3

+) Taux d'occupation: $U = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 - \pi_0$

+) Débit : $X = \pi_1 \cdot \mu\,(1-0) + \pi_2 \cdot \mu\,(2-1) + \pi_3 \cdot \mu\,(3-2) = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\mu$

+) Nb req dans système : $L = 0.\pi_0 + 1\pi_1 + 2.\pi_2 + 3\pi_3 = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3$

+) temps moyen de réponse: $R = \frac{L}{X} = \frac{\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3}{(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\mu}$

* calcul de π_0 π_1 π_2 π_3

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi \cdot M = 0 \\ \sum \pi = 1 \end{cases}$$

calcul de matrice $\boxed{\pi . M}$

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \\ \lambda\pi_2 - \mu\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0 \end{cases}$$

EP 7

TD4 - chaîne de Markov à tps continu

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{8}{15}$$

$\pi_1 = \frac{4}{15}$

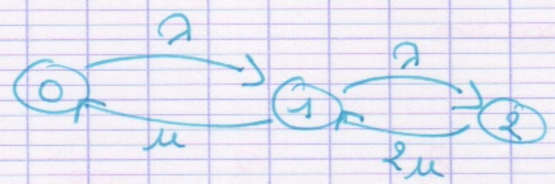
$\pi_2 = \frac{2}{15}$

$\pi_3 = \frac{1}{15}$

2 serveurs
$\emptyset$ file d'attente

* Modelisation

Nb requête dans système : {0; 1; 2; }



* Formulation

Taux perte $= \pi_2$ = 7,7%

Taux d'occupation : $1 - \pi_0$ = 38,5

Debit : $X = \pi_2 \cdot \mu + \pi_2 \cdot 2\mu$ = 923 (Req/s)

Nb req ds sys : $L = \pi_1 + 2\pi_2$

Temps de reponse : $R = \frac{L}{X} = \frac{\pi_1 + 2\pi_2}{\pi_1 \cdot \mu + \pi_2 \cdot 2\mu}$ = 0,5 (ms)

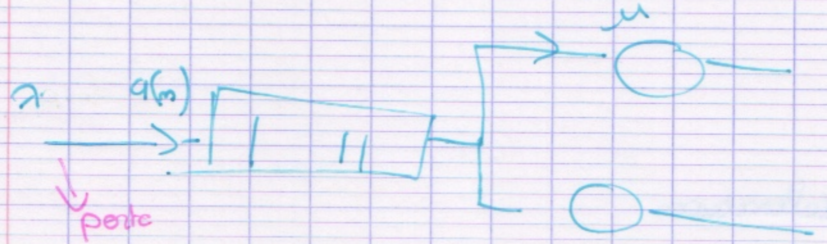
* calcul de π_0, π_1, π_2

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{8}{13}$$

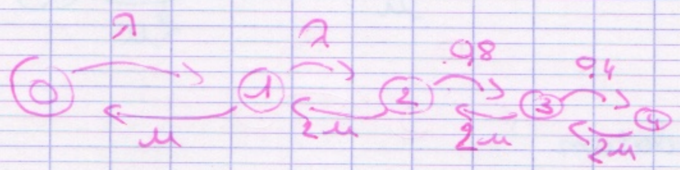
$$\pi_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{4}{13}$$

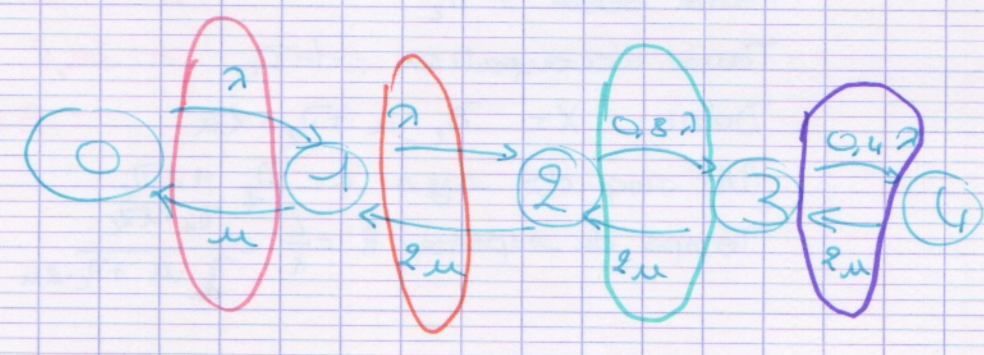
$$\pi_2 = \frac{\lambda/\mu \cdot \lambda/2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{1}{13}$$

Exercice n° 2



Modelisation





EP

② TD 4 - Chaîne de Markov à tps continu

2) calcul $\lambda = \mu \Rightarrow$ Determinée $\pi(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\mu & -(0{,}8\lambda+2\mu) & 0{,}8\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2\mu & -(2\mu+0{,}4\lambda) & 0{,}4\lambda \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{array}$$

$$-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \qquad = 0$$
$$\lambda\pi_0 - (\lambda+2\mu)\pi_1 + 2\mu\pi_2 = 0$$
$$\lambda\pi_1 - (0{,}8\lambda + 2\mu)\pi_2 + 2\mu\cdot\pi_3 = 0$$
$$0{,}8\lambda\pi_2 - (2\mu + 0{,}4\lambda)\pi_3 + 2\pi_4 = 0$$
$$0{,}4\lambda\pi_3 - 2\mu\pi_4 \qquad = 0$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{2\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{2\mu}\frac{0{,}8\lambda}{2\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{2\mu}\frac{0{,}8\lambda}{2\mu}\frac{0{,}4\lambda}{2\mu}} = \frac{1}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{0{,}8}{4}+\frac{0{,}32}{8}}$$

$$= \frac{1}{2{,}74} = 0{,}365$$

$$\pi_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{} = \frac{1}{2{,}74} = 0{,}365$$

$$\pi_2 = \frac{1/2}{2{,}74} = 0{,}182$$

$$\pi_3 = \frac{0{,}2}{2{,}74} = 0{,}073$$

$$\pi_4 = \frac{0{,}04}{2{,}74} = 0{,}014$$

3) $\cancel{\pi_0 \cdot \lambda + \pi_1 \cdot 0{,}8\lambda}$

ceux qui entrent

$$\frac{\pi_0 \cdot \lambda + \pi_1 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot 0{,}8 + \pi_3 \cdot 0{,}4\lambda}{\pi_2 \cdot 0{,}2\lambda + \pi_3 \cdot 0{,}6\lambda + \pi_4 \lambda}$$

ceux qui sortent

$$= \frac{\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}8 + \pi_3 \, 0{,}4}{\pi_2 \cdot 0{,}2 + \pi_3 \cdot 0{,}6 + \pi_4}$$

$$= \frac{0{,}365 + 0{,}365 + 0{,}146 + 0{,}029}{0{,}036 + 0{,}044 + 0{,}014}$$

$$= \frac{0{,}905}{0{,}094} = 9{,}63$$

(4) Nb vehicule dans la station

$$L = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 = 1, \ldots$$

Débit :

$$X = \pi_1 \cdot \mu + \pi_2 \cdot 2\mu + \pi_3 \cdot 2\mu + \pi_4 \cdot 2\mu$$

$$= \mu(\pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_3 + 2\pi_4) = 0{,}9\mu$$ (vehicule / unité de tps)

Temps de réponse :

$$R = \frac{L}{X} = \frac{1}{0{,}9\mu}$$