Module Mathématiques Appliquées: Probabilités
Telecom Nancy Apprentissage

Liste d'exercices 4 - Variables aléatoires et lois de probabilités

Exercice 1 Une expérience aléatoire e a six résultats possibles $\omega_1, ..., \omega_6$ de probabilités respectives $P(\omega_1) = 0,1; P(\omega_2) = 0,1; P(\omega_3) = 0,2; P(\omega_4) = 0,1; P(\omega_5) = 0,3; P(\omega_6) = 0,2$.
On définit la variable aléatoire réelle X telle que $X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 2; X(\omega_3) = 1; X(\omega_4) = 2; X(\omega_5) = 3; X(\omega_6) = 1$ et la variable aléatoire réelle Y telle que $Y(\omega_1) = 2, Y(\omega_2) = 1; Y(\omega_3) = 3; Y(\omega_4) = 1; Y(\omega_5) = 1; Y(\omega_6) = 3$.

1.1 Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

1.2 Soit F la fonction de répartition de X, déterminer-la.

1.3 Déterminer la loi de probabilité de Y. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

1.4 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$.

1.5 Soit Z une variable aléatoire qui a la même loi de probabilité que Y, mais qui est indépendante de la variable aléatoire X. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire$X + Z$.

Exercice 2 L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire 3 sujets au hasard ; il en traite un au choix. Ce candidat a révisé seulement 12 sujets. Soit X le nombre de sujets révisés parmi les trois sujets tirés. Quelle est la loi de probabilité de X? A quelle note peut-il s'attendre en moyenne ?

Exercice 3 On jette deux dés distincts. Soit S la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation le plus grand des deux numéros obtenus.

3.1 Quel est l'ensemble des réalisations possibles de S?

3.2 Exprimer, en tant qu'ensemble de résultats possibles de l'expérience aléatoire, les événements $\{S = 2\}$, $\{S < 4\}$, $\{S \geq 1\}$.

3.3 Déterminer la loi de probabilité de S. La représenter graphiquement.

3.4 Déterminer la fonction de répartition de S. Tracer son graphe.

3.5 Calculer $P(5 < S < 8)$.

3.6 Calculer l'espérance mathématique de S.

3.7 Déterminer la médiane de S, le mode de S.

3.8 Calculer la variance de S.

Exercice 4 Des étudiants sont soumis à un test composé de trois questions indépendantes de type QCM. On propose trois réponses à la première question, quatre à la seconde, cinq à la troisième; à chaque question, seule une des réponses est correcte. Chaque étudiant doit choisir une réponse à chaque question. Si sa réponse à la première question est correcte, il obtient trois points; à la seconde, trois points; à la troisième, quatre points.

4.1 Soit X la variable aléatoire réelle de la note obtenue au test par un étudiant qui choisit les réponses au hasard. Déterminer la loi de probabilité de X. A quelle note l'étudiant peut-il aspirer (en moyenne) ?

4.2 On soumet les étudiants à un second test indépendant du premier, dont les modalités sont les mêmes. On décide d'attribuer comme note finale la note maximale des deux notes obtenues aux deux tests. Même question pour la note finale Y.

Exercice 5 Ecrire la loi de probabilité de la loi Uniforme sur l'ensemble: $\{1, ..., n\}$; puis déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une telle loi.

Exercice 6 Dans une population de 10 millions d'électeurs, 3 millions ont l'intention de voter pour le candidat C. On extrait 40 individus de la population par un tirage au hasard. Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation le nombre d'individus, parmi les 40 tirés, qui ont l'intention de voter pour C.

6.1 Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.

6.2 Calculer la probabilité que X soit compris au sens large entre 6 et 17.

Exercice 7

7.1 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 3 et 0,5. Une variable aléatoire Y, indépendante de X, suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,4. Calculer $P(X + Y = 2)$.

7.2 Même question que précédemment, si X suit la loi binomiale de paramètres 3 et 0,5 et Y suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,5, les deux variables étant toujours indépendantes.

Exercice 8 Un livre de 350 pages contient 450 erreurs d'impression réparties au hasard. Soit X la variable aléatoire du nombre d'erreurs dans une page déterminée.

8.1 Quelle est la loi de X?

8.2 Donner une expression de la probabilité qu'il y ait au moins 3 erreurs dans une page déterminée.

Exercice 9 Supposons que le nombre d'œufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la probabilité qu'un œuf meurt soit égale à $1 - p$ ($p \in]0, 1[$) et ceci indépendamment des autres œufs. Démontrer que le nombre d'œufs qui survivent suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 10 Ma 104 a du mal à démarrer le matin. A chaque tentative, j'ai une probabilité $p \in]0, 1[$ de réussir à la démarrer (une tentative prend un temps de τ secondes). Ces différentes tentatives sont indépendantes. Afin de laisser ma batterie reprendre son souffle, j'attends 30 secondes après un essai infructueux avant de retenter ma chance. Pour les applications numériques, on pourra prendre les valeurs $\tau = 5$ et (i) $p = 1/3$ (nuit très froide) (ii) $p = 1/2$ (autres nuits).

10.1 Quelle est la loi du nombre de tentatives nécessaires pour faire démarrer ma voiture?

10.2 Déterminer le nombre minimal de tentatives nécessaires pour pouvoir démarrer ma voiture avec une probabilité de 0.9.

10.3 Définir une variable aléatoire T qui donne le temps que je mets le matin pour démarrer ma voiture. Donner sa moyenne et sa variance.

10.4 Ma batterie, après un tel traitement, donne des signes de faiblesse. Elle se vide après trois tentatives de démarrage. Quelle est la probabilité que je prenne le bus?

Exercice 11 La cave de Robert contient 1000 bouteilles dont 200 d'un excellent Bordeaux qu'il réserve pour les grandes occasions (par exemple les samedis et dimanches) et 800 de Côtes de Toul (un petit cru local) pour les autres jours (les bouteilles de bordeaux sont rangées au hasard parmi les autres de façon à ne pas trop les mettre en évidence). La cave est mal éclairée et Robert, en trébuchant, éclate 12 bouteilles!

11.1 Quelle est la loi du nombre de bouteilles de Bordeaux cassées?

11.2 Quelle est la probabilité que 4 bouteilles de Bordeaux (et donc aussi de 8 Côtes de Toul, mais c'est moins grave) soient définitivement perdues pour son gosier? Comment obtenir une approximation de cette probabilité?

Exercice 12 On lance une pièce juste 3 fois. Soit X le nombre de face obtenu lors des deux premiers lancers, et soit Y le nombre de face obtenu lors des deux derniers lancers.

12.1 Trouver la loi de probabilité jointe de X et Y.

12.2 Calculer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

Exercice 13 On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie non truquée. Soient X le nombre de séquences *Pile-Face* (dans cet ordre) obtenues (par exemple, la séquence $PPFP$ donne $X = 1$; $FPPP$ donne $X = 0$, $PFPF$ donne $X = 2$; etc.) et Y le nombre de Piles obtenus.

13.1 Donner la loi du couple (X, Y).

13.2 Montrer que les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes.

13.3 Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Que peut-on faire comme commentaire?

Exercice 14 La loi conjointe de probabilités $P(X = i, Y = j) = p(i, j)$ de deux variables X et Y est donnée ainsi:
$p(0, 0) = 0.4$; $p(0, 1) = 0.2$; $p(1, 0) = 0, 1$; $p(1, 1) = 0.3$.
Quelle est la loi conditionnelle de X lorsque $Y = 1$?

Exercice 15 Le loi de probabilité conjointe des variables aléatoires X, Y et Z est:
$p(1, 2, 3) = p(2, 1, 1) = p(2, 2, 1) = p(2, 3, 2) = \frac{1}{4}$.

15.1 Trouver $E(XYZ)$.

15.2 Trouver $E(XY + YZ + ZX)$.