1A Apprentissage
M. Thomassin
E.-H. Djermoune
30 mars 2023

Examen SICA2

Durée 1 heure 50 min • Aide-mémoire autorisé

1 Équation différentielle

À l'aide de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = \mathbb{1}(t), \quad \text{avec } y(0) = 1.$$

Commentez les différents termes qui composent la réponse $y(t)$.

2 Transformée de Laplace inverse

Calculer l'original temporel $x(t)$ de la transformée de Laplace suivante :

$$X(s) = \frac{1}{2s^2 + s + 1}.$$

3 Transformée de Laplace et valeur initiale

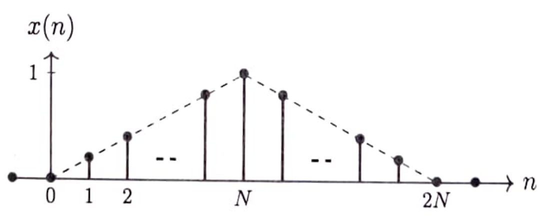
Soit un signal à temps continu $x(t)$ causal dont la transformée de Laplace est

$$X(s) = \frac{6s + 3}{s^2 + s + 1}.$$

1. En utilisant le théorème de la valeur initiale, déterminer la valeur initiale du signal, $x(0^+)$, **sans** passer par la transformée de Laplace inverse de $X(s)$.
2. Rappeler l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $x(t)$, $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$, en fonction de $X(s)$, puis répondre à la même question que précédemment pour déterminer maintenant la valeur initiale de la dérivée du signal, $\dot{x}(0^+)$, (toujours sans passer par la transformée de Laplace inverse de $X(s)$).
3. Vérifier les réponses précédentes en procédant à l'inversion de la transformée $X(s)$.
   Indice : il sera judicieux de voir que $s^2 + s + 1$ peut se réécrire sous la forme $(s + a)^2 + \omega^2$ (où a et ω sont des paramètres à déterminer).

4 Transformée en z

Déterminer la transformée en z du signal ci-dessous.



5 Transformée en z inverse

Déterminer l'original $x(n)$ de la transformée en z :

$$X(z) = \frac{z^2 + 6z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)}.$$

Rappel : si le numérateur comporte un facteur z, il est préférable de travailler sur $X(z)/z$.