Étude de fonctions

Domaine de définition, parité, périodicité, limites, dérivation

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{4+x}$
2. $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x+4}\right)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}}$
5. $f(x) = \ln(x^2+3x+1)$
6. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\pi\right)$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles sont paires, impaires, périodiques (et, dans ce dernier cas, en déterminer la période).

1. $f(x) = \cos(3x)$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = e^{\sin(2x)}$
4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2-1}{x^2+x+2}$
4. $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x+1)-\ln(x-1))$
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x^4+1}$
6. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^{x+3}}{e^x}$
7. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-3x)$
8. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^a}$ pour $a \in \mathbb{R}$
10. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant le domaine de dérivation :

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = x-7$
3. $f(x) = 2x^4+3x^3-x^2+x+1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
5. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$
6. $f(x) = e^x\ln(x)$
7. $f(x) = (x^2+1)e^x+(x+1)\ln(x)$
8. $f(x) = e^{x^2+2x+1}$
9. $f(x) = \ln(3x^2+2)$
10. $f(x) = \ln(\ln(x))$
11. $f(x) = \sqrt{x^3+\ln(x)}$
12. $f(x) = \sin(2x)$
13. $f(x) = \cos(x^2+2x)$
14. $f(x) = \cos^2(x)$
15. $f(x) = \cos(\ln(x))$
16. $f(x) = \ln(\cos(x))$
17. $f(x) = \sin(x)\ln(2x+3)+\cos(x^2+1)e^x$
18. $f(x) = e^{\cos(\ln(x))}$
19. $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{\cos(x)}$
20. $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$
21. $f(x) = \sin(x^{\cos(x)})$
22. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Études de fonctions

Exercice 5. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition. La fonction f possède-t-elle des asymptotes à l'infini ?
3. Résoudre l'équation $f(x) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$.
4. Calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de f.
5. Tracer le graphe de la fonction f.

Exercice 6. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.
2. La fonction f est-elle paire/impaire ?
3. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
4. La fonction f est-elle croissante/décroissante ?
5. Tracer le graphe de la fonction f.

Exercice 7. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. La fonction f admet-elle des asymptotes horizontales/obliques à l'infini ? Si oui, les déterminer.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction f. La fonction f admet-elle des extrèmes locaux ?
5. Tracer le graphe la fonction f.

Exercice 8. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^4-4}{x^2-1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.
2. La fonction f est-elle paire/impaire ?
3. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
4. La fonction f admet-elle des asymptotes horizontales/obliques à l'infini ? Si oui, les déterminer.
5. Dresser le tableau des variations de la fonction f. La fonction f admet-elle des extrèmes locaux ?
6. Tracer le graphe la fonction f.

Exercice 9. Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$
2. $f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x^2-4}\right)$
3. $f(x) = e^{x^2-3x+1} - e^{-2}$

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2-ax+a^2}.$$

1. Pour quelles valeurs de a le domaine de définition de f est-il $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeurs de a la fonction est paire/impaire ?
3. Pour quelles valeurs de a la fonction f est continue et dérivable ? Dans ces cas, calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de f.
4. Pour quelles valeurs de a la fonction f admet des asymptotes obliques ?

Exercice 11. Une population isolée disposant d'un territoire donné commence à se developper, tout en détruisant son environnement par la pollution qu'elle engendre. Pour modéliser cette évolution en fonction du temps t on utilise la fonction $P : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(t) = 1000e^{t-\frac{t^2}{10}}$, où $P(t)$ designe le nombre d'individus de la population à la date t.

1. Calculer $P(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} P(t)$.
2. Étudier les variations de P et préciser son extremum.
3. Déterminer la valeur τ à laquelle la population retrouve son effectif initial $P(0)$.
4. La population s'éteint quand $P(t) < 1$. Déterminer la valeur T à partir de laquelle cela se produit.
5. Tracer le graphe de la fonction P.