

Examen de Mathématiques numériques - 1A apprentissage

Télécom Nancy (Esial)

Mai 2022

Durée : 1H40

Barème : exercice 1 : 8 points, exercice 2 : 6 points, exercice 3 : 6 points.

Remarque : documents (sauf antisèche), téléphones portables, interdits !

1. Arithmétique flottante (8 points)

- (a) Soit x et y deux réels proches et $z = x - y$. Soit X une approximation de x , Y une approximation de y (X et Y sont des flottants) et $Z = X \ominus Y$. On note $r_x = x/(x - y)$, $r_y = y/(x - y)$ et e_x, e_y les erreurs relatives signées sur x et y ($e_x = \frac{X-x}{x}$ et $e_y = \frac{Y-y}{y}$). Montrer que :

$$e_z := \frac{Z - z}{z} = r_x e_x - r_y e_y$$

(on supposera que X et Y sont suffisamment proches de sorte que $X \ominus Y = X - Y$). A.N. en utilisant $x = 10001$ $y = 10000$ et en supposant que $e_x = 10^{-4}$, $e_y = 0.5 \cdot 10^{-4}$, calculez e_z . Comment interpréter la formule obtenue pour e_z (en termes d'erreur relative du résultat par rapport aux erreurs relatives initiales) et que nous indique-t-elle pour les calculs en flottants ?

- (b) On cherche à calculer la fonction :

$$\phi(x) = \frac{2x}{(3+x)(3-x)} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x}$$

pour un nombre flottant x tel que $|x|$ est assez petit (on suppose qu'on utilise un système flottant en base 2).

- i. Montrer que l'erreur relative e_r obtenue par "l'algorithme" qui utilise la première formule :

$$y_c := (2 \otimes x) \oslash ((3 \oplus x) \otimes (3 \ominus x))$$

vérifie :

$$|e_r| \leq \frac{4u}{1-4u}$$

- ii. Quelles difficultés peut-on rencontrer si on utilise la seconde formule ?

2. Système linéaire (6 points)

- (a) Effectuer une factorisation LU (sans échange d'équations) sur la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ -4 & 12 & -3 \end{bmatrix}.$$

Donner le détail des 2 étapes de Gauss. Vérifier votre factorisation en effectuant le produit matriciel $L \times U$.

- (b) Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, où $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$.