Liste d'exercices 1 - Analyse combinatoire - Corrections

Module Mathématiques Appliquées : Probabilités
Telecom Nancy Apprentissage 2020-2021

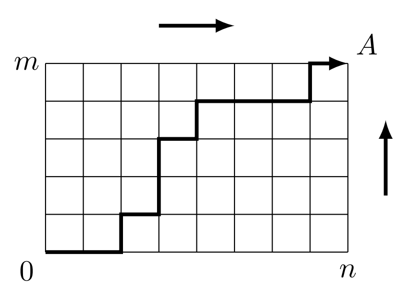
Exercice 1 *Dénombrements élémentaires*

1. On se place sous l'hypothèse $n, r \in \mathbb{N}\,;\, n \leq r$. Combien y a-t-il de façons de ranger n boules numérotés dans r boîtes ?

   Pour chacune des n boules, il y a r boîtes possibles, donc : r^n.
2. Même question sous la même hypothèse si on ne peut mettre qu'une boule par boîte au maximum.

   Sous cette hypothèse, on a alors : r choix de boîtes pour la première boule, $r-1$ pour la seconde, ..., jusqu'à $r-n+1$ pour la boule numéro n. On obtient ainsi A_r^n possibilités.
3. On se place sous l'hypothèse $n, k \in \mathbb{N}\,;\, k \leq n$. Combien y a-t-il de façons de ranger n boules numérotés dans 2 boîtes de telle façon qu'il y en ait k dans l'une et $n-k$ dans l'autre ?

   Il y a C_n^k possibilités pour placer k boules choisies parmi les n dans la première boîte, puis on place les $n-k$ boules restantes dans l'autre boîte. Le résultat final est donc : C_n^k.
4. Calculer le nombre de chemins allant de O à A qui empruntent uniquement les arêtes du quadrillage ceci sans pouvoir redescendre vers le bas ou retourner sur la gauche (à chaque noeud les deux seules possibilités sont de se déplacer d'une arête vers le haut ou vers la droite). Le dessin montre un tel chemin. Le quadrillage est constitué d'arêtes de longueur 1 et est inscrit dans un rectangle de taille $n \times m$.

   Il y a en tout $n+m$ déplacements. Parmi ceux-ci, il y aura nécessairement n déplacements vers la droite, et m déplacements vers le haut. La question revient alors à chercher le nombre de combinaisons possibles de n déplacements à droite et m déplacements vers le haut parmi les $n+m$ déplacements.
   Le contexte est donc identique à la question précédente où les déplacements sont de deux types, comme les deux boîtes ; $n = k$ et $m = n-k$. Alors le résultat est : $C_{n+m}^n = \dfrac{(n+m)!}{n!\,m!}$ (ou C_{n+m}^m qui est égal).
   On peut de façon équivalente parler de codage d'un chemin, en notant par exemple "h" pour un

déplacement vers le haut, et "d" pour un déplacement vers la droite. Un chemin donné est donc un $m+n$ uplet contenant m "h" et n "d", par exemple pour $m=3$ et $n=4$, un chemin possible est (d,d,d,d,h,h,h) (tout vers la droite puis tout vers le haut). Le nombre de chemins possibles est alors égal au nombre de codages, et celui-ci s'obtient en choisissant les m places où on positionne "d" (ou les n places où on positionne "h").

Exercice 2 Pour la création d'un nouvel atelier dans une usine, on recrute un chef d'atelier et deux adjoints. Six personnes, de même qualification, se présentent.

1. Si les postes d'adjoints sont différents, combien de solutions différentes a-t-on ?

   Il y a 3 postes différents à fournir. Ce sera donc un arrangement de 3 parmi 6 : $A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 6\times5\times4 = 120$.

2. Combien en a-t-on si les deux postes d'adjoints sont identiques ?

   Le choix étant indifférent pour les deux postes d'adjoints, on choisira une combinaison. Il y a donc 6 possibilités pour le poste de chef d'atelier, et $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = 5\times2 = 10$ possibilités pour les adjoints. D'où 60 solutions possibles.

Exercice 3 Combien existe-t-il de nombres de 5 chiffres (de 1 à 9) tels qu'un même chiffre n'apparaisse pas plus de 2 fois ?

Notons E l'ensemble de tels nombres de 5 chiffres. Si on note F_i les ensembles de nombres de 5 chiffres avec respectivement i chiffres répétés une fois ($i=0,1,2$), on peut noter : $E = F_0 \cup F_1 \cup F_2$.
Calculons respectivement les cardinaux de ces 3 ensembles.
$Card(F_0) = A_9^5 = 15120$
$Card(F_1) = 9 \times C_5^2 \times A_8^3 = 30240$ (9 pour le choix du chiffre répété ; la combinaison pour le choix des emplacements pour les chiffres identiques et l'arrangement pour le choix des 3 autres chiffres parmi les 8 restants), ou $Card(F_1) = C_9^1 \times C_8^3 \times \dfrac{5!}{2!}$ (encore 9 pour le choix du chiffre répété ; le choix des 3 autres parmi les 8, et la fraction pour éviter les redondances car on a 2 objets indiscernables parmi les 5).
$Card(F_2) = C_9^2 \times C_7^1 \times \dfrac{5!}{2!2!} = 7560$ (choix des 2 chiffres, choix du cinquième chiffre différent et les deux couples d'objets indiscernables parmi les 5).
D'après le principe 2 du dénombrement, on obtient :
$Card(E) = Card(F_0) + Card(F_1) + Card(F_2) = 52920$.

Exercice 4 On doit asseoir sur un rang 4 Américains, 3 Français et 3 Anglais. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?

Les membres de chaque groupe national peuvent être permutés : 4! pour les américans, 3! pour les français, idem pour les anglais. L'ordre des groupes aussi peut être permuté. Donc on multiplie tout cela par 3!. Cela donne au final : $4!3!3!3! = 5184$.

Exercice 5

1. Une compagnie d'aviation dessert n villes. Tous les trajets entre les villes sont possibles. Combien de billets différents doit-elle éditer ?

   Les billets sont des couples (ou 2-uplets) de 2 villes distinctes : la ville de départ et la ville d'arrivée, qui ne sont pas interchangeables. Il y a donc $n(n-1)$ billets différents : n villes de départ et $n-1$ villes d'arrivée.

2. Dans une soirée, n personnes se serrent la main. Combien de poignées de main sont échangées ?

   Une poignée de main peut être considérée comme une combinaison, ou un couple non ordonné, car les 2 personnes sont interchangeables. Il y a donc $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ poignées de main échangées.

Exercice 6 Au tarot à 4, les 78 cartes sont partagées en 18 cartes pour chacun des 4 joueurs et 6 cartes pour le "chien". Combien de donnes différentes existe-t-il ?
Dans cette question on se place du point de vue d'un joueur, si A, B, C, D et E forment une partition de l'ensemble des 78 cartes, avec $\#A = \#B = \#C = \#D = 18$ (et donc $\#E = 6$) alors on considère, par exemple, que (A, B, C, D, E) et (B, A, C, D, E) sont deux donnes différentes.

Pour ce dénombrement il est plus naturel d'utiliser le principe 1 du dénombrement avec des combinaisons mais on peut aussi le voir comme permutation d'objets partiellement indiscernables.
Première solution : on choisit les 18 cartes de chacun des 4 joueurs, puis les 6 cartes restantes seront celles du chien, d'où

$$C_{78}^{18}.C_{60}^{18}.C_{42}^{18}.C_{24}^{18}.C_6^6 = \frac{78!}{18!60!}.\frac{60!}{18!42!}.\frac{42!}{18!24!}.\frac{24!}{18!6!}.1 = \frac{78!}{18!18!18!18!6!}$$

Seconde solution : on peut aussi le voir comme permutation d'objets partiellement indiscernables. En effet, soit σ une permutation de $[\![1, 78]\!]$, (ces nombres représentant les 78 cartes) on peut attribuer au joueur 1 les cartes $\sigma(1), \ldots, \sigma(18)$, au joueur 2 les cartes $\sigma(19), \ldots, \sigma(36)$, au joueur 3 les cartes $\sigma(37), \ldots, \sigma(54)$, au joueur 4 les cartes $\sigma(55), \ldots, \sigma(72)$, les cartes $\sigma(73), \ldots, \sigma(78)$ allant au "chien". Cependant il y a une certaine redondance en procédant de cette façon, comment la supprimer ? Aide : penser aux permutations qui laissent invariants les 5 sous-ensembles ainsi formés.

En appliquant la formule du cours sur les groupes d'éléments indiscernables (la donne de chaque joueur et celle du chien), on obtient directement : $\dfrac{78!}{18!18!18!18!6!}$.

D'une manière générale, si l'ensemble comporte n éléments, le nombre de partitions en p groupes (sous-ensembles) comportant n_1, n_2, ..., n_p éléments ($n_1 + n_2 + \ldots n_p = n$) est égal à :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!} \quad \text{parfois noté} \quad \begin{pmatrix} n \\ n_1\, n_2\, \ldots\, n_p \end{pmatrix}$$

Ces nombres sont appelés coefficients multinomiaux (pour $p = 2$ on retrouve bien les coefficients binomiaux).