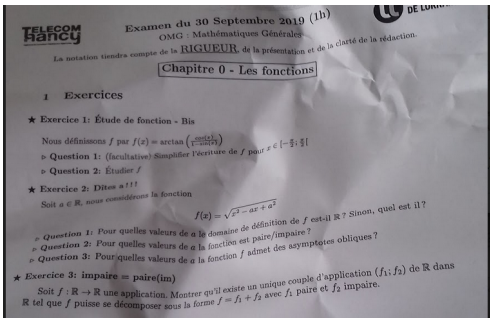


dimanche 15 décembre 2019 19:12



$$\arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

Question 4: Tracer C_f et Γ ainsi que la tangente à C_f en $(0,0)$

Partie II - Nombres Complexes

★ Exercice 2: Résoudre dans \mathbb{C} l'une des équations suivantes

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + 3 - 2i \quad \text{ou} \quad iz^3 - (1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 6 + 8i = 0$$

Indication : Pour la première, il existe une racine imaginaire pure et une racine réelle. Pour la seconde, il existe une racine réelle.

★ Exercice 3: Problème complexe...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, nous considérons l'équation (E) : $(z + 1)^n - e^{2ina} = 0$

▷ Question 1: Résoudre (E). Nous noterons z_1, z_2, \dots, z_{n-1} les solutions

▷ Question 2: Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$

▷ Question 3: Calculer $A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n})$

★ Exercice 4: Racine n-ième

Résoudre dans \mathbb{C} l'une des équations suivantes :

$$z^3 = (z - 1)^3 i \quad ; \quad z^8 = \bar{z}$$

★ Exercice 5: Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants

$$1 + e^{i\theta} \quad ; \quad 1 + \sin \theta + i \sin \theta \quad ; \quad \sin 2\theta + 2i \sin^2 \theta$$

La notation tiendra compte de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Partie I - Nombres Complexes

★ Exercice 1: Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante (2 Pts)

$$3z - (3 - i)z = 1 - 2i$$

★ Exercice 2: Imaginaire ou non (4 Pts)

Pour tout complexe $z \neq 1$, on pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$. Déterminer l'ensemble des éléments z de \mathbb{C} tel que :

a) $Z \in \mathbb{R}$ b) $Z \in i\mathbb{R}$ c) $|Z| = 1$

★ Exercice 3: Problème complexe... (5 Pts)

On pose $C_1 = \mathbb{C} \setminus (-i, i)$ et $f: C_1 \rightarrow \mathbb{C}$ avec $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$

▷ Question 1: Résoudre l'équation $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

▷ Question 2: Montrer que

$$\forall (z, z') \in C_1^2 \quad (f(z) = f(z')) \Leftrightarrow (z = z' \text{ ou } zz' = 1)$$

▷ Question 3: On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, montrer que

$$\forall (z, z') \in D \quad (f(z) = f(z')) \Leftrightarrow (z = z')$$

▷ Question 4: Déterminer l'ensemble des complexes tel que $z \in C_1$ et $f(z) \in \mathbb{R}$

▷ Question 5: On pose z tel que $|z| = 1$ et on choisit θ tel que $\theta = \arg(z)$ et $\theta \in [-\pi; \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\}$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ et calculer $f(z)$ en fonction de θ

Partie II - Les fonctions

★ Exercice 4: C'est plutôt limite... (3 Pts)