

Vidéo ■ partie 1. Famille libre

Vidéo ■ partie 2. Famille génératrice

Vidéo ■ partie 3. Base

Vidéo ■ partie 4. Dimension d'un espace vectoriel

Vidéo ■ partie 5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Exercices ♦ Espaces vectoriels de dimension finie

Les espaces vectoriels qui sont engendrés par un nombre fini de vecteurs sont appelés espaces vectoriels de dimension finie. Pour ces espaces, nous allons voir comment calculer une base, c'est-à-dire une famille minimale de vecteurs qui engendrent tout l'espace. Le nombre de vecteurs dans une base s'appelle la dimension et nous verrons comment calculer la dimension des espaces et des sous-espaces.

## 1. Famille libre

### 1.1. Combinaison linéaire (rappel)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

#### Définition 1

Soient  $v_1, v_2, \dots, v_p$ ,  $p \geq 1$  vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$$

(où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$ ) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Les scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

### 1.2. Définition

#### Définition 2

Une famille  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  de  $E$  est une **famille libre** ou **linéairement indépendante** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \dots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une **relation de dépendance linéaire** entre les  $v_j$ .

### 1.3. Premiers exemples

Pour des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , décider si une famille  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est libre ou liée revient à résoudre un système linéaire.

#### Exemple 1

Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , considérons la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On souhaite déterminer si elle est libre ou liée. On cherche des scalaires  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On calcule (voir un peu plus bas) que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple  $\lambda_3 = 1$  on obtient  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = -1$ , ce qui fait que

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est donc une famille liée.

Voici les calculs de la réduction de Gauss sur la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Exemple 2

Soient  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Est-ce que la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre ou liée ? Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ . La famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est donc une famille libre.

### Exemple 3

Soient  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Alors  $\{v_1, v_2, v_3\}$  forme une famille liée, car

$$3v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

## 1.4. Autres exemples

### Exemple 4

Les polynômes  $P_1(X) = 1 - X$ ,  $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$  et  $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$  forment une famille liée dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ , car

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

### Exemple 5

Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on considère la famille  $\{\cos, \sin\}$ . Montrons que c'est une famille libre. Supposons que l'on ait  $\lambda \cos + \mu \sin = 0$ . Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

En particulier, pour  $x = 0$ , cette égalité donne  $\lambda = 0$ . Et pour  $x = \frac{\pi}{2}$ , elle donne  $\mu = 0$ . Donc la famille  $\{\cos, \sin\}$  est libre. En revanche la famille  $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$  est liée car on a la relation de dépendance linéaire  $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$ . Les coefficients de dépendance linéaire sont  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ .

## 1.5. Famille liée

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si  $v \neq 0$ , la famille à un seul vecteur  $\{v\}$  est libre (et liée si  $v = 0$ ). Considérons le cas particulier d'une famille de deux vecteurs.

### Proposition 1

La famille  $\{v_1, v_2\}$  est liée si et seulement si  $v_1$  est un multiple de  $v_2$  ou  $v_2$  est un multiple de  $v_1$ .

Ce qui se reformule ainsi par contraposition : « La famille  $\{v_1, v_2\}$  est libre si et seulement si  $v_1$  n'est pas un multiple de  $v_2$  et  $v_2$  n'est pas un multiple de  $v_1$ . »

### Démonstration

- Supposons la famille  $\{v_1, v_2\}$  liée, alors il existe  $\lambda_1, \lambda_2$  non tous les deux nuls tels que  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ . Si c'est  $\lambda_1$  qui n'est pas nul, on peut diviser par  $\lambda_1$ , ce qui donne  $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$  et  $v_1$  est un multiple de  $v_2$ . Si c'est  $\lambda_2$  qui n'est pas nul, alors de même  $v_2$  est un multiple de  $v_1$ .
- Réciproquement, si  $v_1$  est un multiple de  $v_2$ , alors il existe un scalaire  $\mu$  tel que  $v_1 = \mu v_2$ , soit  $1v_1 + (-\mu)v_2 = 0$ , ce qui est une relation de dépendance linéaire entre  $v_1$  et  $v_2$  puisque  $1 \neq 0$  : la famille  $\{v_1, v_2\}$  est alors liée. Même conclusion si c'est  $v_2$  qui est un multiple de  $v_1$ .

Généralisons tout de suite cette proposition à une famille d'un nombre quelconque de vecteurs.

### Théorème 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  de  $p \geq 2$  vecteurs de  $E$  est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de  $\mathcal{F}$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{F}$ .

### Démonstration

C'est essentiellement la même démonstration que ci-dessus.

- Supposons d'abord  $\mathcal{F}$  liée. Il existe donc une relation de dépendance linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0,$$

avec  $\lambda_k \neq 0$  pour au moins un indice  $k$ . Passons tous les autres termes à droite du signe égal. Il vient

$$\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_p v_p,$$

où  $v_k$  ne figure pas au second membre. Comme  $\lambda_k \neq 0$ , on peut diviser cette égalité par  $\lambda_k$  et l'on obtient

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_k} v_p,$$

c'est-à-dire que  $v_k$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{F}$ , ce qui peut encore s'écrire  $v_k \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{v_k\})$  (avec la notation ensembliste  $A \setminus B$  pour l'ensemble des éléments de  $A$  qui n'appartiennent pas à  $B$ ).

- Réciproquement, supposons que pour un certain  $k$ , on ait  $v_k \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{v_k\})$ . Ceci signifie que l'on peut écrire

$$v_k = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_p v_p,$$

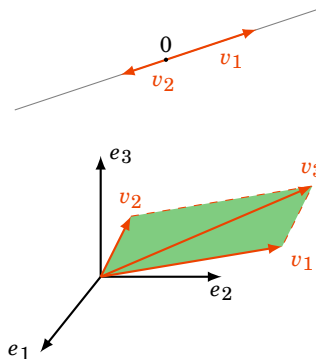
où  $v_k$  ne figure pas au second membre. Passant  $v_k$  au second membre, il vient

$$0 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots - v_k + \dots + \mu_p v_p,$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire pour  $\mathcal{F}$  (puisque  $-1 \neq 0$ ) et ainsi la famille  $\mathcal{F}$  est liée.

## 1.6. Interprétation géométrique de la dépendance linéaire

- Dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.
- Dans  $\mathbb{R}^3$ , trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires. Ils sont donc dans un même plan vectoriel.



### Proposition 2

Soit  $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathcal{F}$  contient plus de  $n$  éléments (c'est-à-dire  $p > n$ ), alors  $\mathcal{F}$  est une famille liée.

### Démonstration

Supposons que

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_p = \begin{pmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{pmatrix}.$$

L'équation

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$$

donne alors le système suivant

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \dots + v_{1p}x_p &= 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \dots + v_{2p}x_p &= 0 \\ \vdots & \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \dots + v_{np}x_p &= 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Lorsque  $p > n$ , ce système a des solutions non triviales (voir le chapitre « Systèmes linéaires », dernier théorème) ce qui montre que la famille  $\mathcal{F}$  est une famille liée.

### Mini-exercices

1. Pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \right\}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^2$ ? Même question avec la famille  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que toute famille contenant une famille liée est liée.
3. Montrer que toute famille incluse dans une famille libre est libre.
4. Montrer que si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire et que  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une famille liée de  $E$ , alors  $\{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$  est une famille liée de  $F$ .
5. Montrer que si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire *injective* et que  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une famille libre de  $E$ , alors  $\{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$  est une famille libre de  $F$ .

## 2. Famille génératrice

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ .

### 2.1. Définition

**Définition 3**

Soient  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs de  $E$ . La famille  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une **famille génératrice** de l'espace vectoriel  $E$  si tout vecteur de  $E$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, \dots, v_p$ .

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille  $\{v_1, \dots, v_p\}$  **engendre** l'espace vectoriel  $E$ .

Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs  $\{v_1, \dots, v_p\}$  forment une famille génératrice de  $E$  si et seulement si  $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ .

**2.2. Exemples****Exemple 6**

Considérons par exemple les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $E = \mathbb{R}^3$ . La famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est génératrice car tout vecteur  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^3$  peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sont ici  $\lambda_1 = x$ ,  $\lambda_2 = y$ ,  $\lambda_3 = z$ .

**Exemple 7**

Soient maintenant les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  de  $E = \mathbb{R}^3$ . Les vecteurs  $\{v_1, v_2\}$  ne forment pas une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Par exemple, le vecteur  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas dans  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ . En effet, si c'était le cas, alors il existerait  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ . Ce qui s'écrirait aussi  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , d'où le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. (La première et la dernière ligne impliquent  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ , ce qui est incompatible avec la deuxième.)

**Exemple 8**

Soit  $E = \mathbb{R}^2$ .

- Soient  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La famille  $\{v_1, v_2\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^2$  car tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  se décompose comme  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- Soient maintenant  $v'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $\{v'_1, v'_2\}$  est aussi une famille génératrice. En effet, soit  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un élément quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $v$  est combinaison linéaire de  $v'_1$  et  $v'_2$  revient à démontrer l'existence de deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $v = \lambda v'_1 + \mu v'_2$ . Il s'agit donc d'étudier l'existence de solutions au système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= x \\ \lambda + \mu &= y \end{cases}$$

Il a pour solution  $\lambda = x - y$  et  $\mu = -x + 2y$ , et ceci, quels que soient les réels  $x$  et  $y$ . Ceci prouve qu'il peut exister plusieurs familles finies différentes, non incluses les unes dans les autres, engendrant le même espace vectoriel.

### Exemple 9

Soit  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ . Alors les polynômes  $\{1, X, \dots, X^n\}$  forment une famille génératrice. Par contre, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  de tous les polynômes ne possède pas de famille finie génératrice.

## 2.3. Liens entre familles génératrices

La proposition suivante est souvent utile :

### Proposition 3

Soit  $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  une famille génératrice de  $E$ . Alors  $\mathcal{F}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_q\}$  est aussi une famille génératrice de  $E$  si et seulement si tout vecteur de  $\mathcal{F}$  est une combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{F}'$ .

### Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la définition de  $\text{Vect } \mathcal{F}$  et de  $\text{Vect } \mathcal{F}'$ .

Nous chercherons bientôt à avoir un nombre minimal de générateurs. Voici une proposition sur la réduction d'une famille génératrice.

### Proposition 4

Si la famille de vecteurs  $\{v_1, \dots, v_p\}$  engendre  $E$  et si l'un des vecteurs, par exemple  $v_p$ , est combinaison linéaire des autres, alors la famille  $\{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_p\} = \{v_1, \dots, v_{p-1}\}$  est encore une famille génératrice de  $E$ .

### Démonstration

En effet, comme les vecteurs  $v_1, \dots, v_p$  engendrent  $E$ , alors pour tout élément  $v$  de  $E$ , il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p.$$

Or l'hypothèse  $v_p$  est combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, \dots, v_{p-1}$  se traduit par l'existence de scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  tels que

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Alors, le vecteur  $v$  s'écrit :

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + \lambda_p (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1}).$$

Donc

$$v = (\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}) v_{p-1},$$

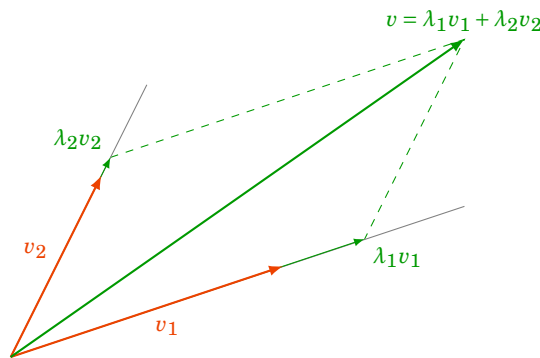
ce qui prouve que  $v$  est combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, \dots, v_{p-1}$ . Ceci achève la démonstration. Il est clair que si l'on remplace  $v_p$  par n'importe lequel des vecteurs  $v_i$ , la démonstration est la même.

### Mini-exercices

1. À quelle condition sur  $t \in \mathbb{R}$ , la famille  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix} \right\}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$  ?
2. Même question avec la famille  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Montrer qu'une famille de vecteurs contenant une famille génératrice est encore une famille génératrice de  $E$ .
4. Montrer que si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire *surjective* et que  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $\{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$  est une famille génératrice de  $F$ .

## 3. Base

La notion de base généralise la notion de repère. Dans  $\mathbb{R}^2$ , un repère est donné par un couple de vecteurs non colinéaires. Dans  $\mathbb{R}^3$ , un repère est donné par un triplet de vecteurs non coplanaires. Dans un repère, un vecteur se décompose suivant les vecteurs d'une base. Il en sera de même pour une base d'un espace vectoriel.



### 3.1. Définition

#### Définition 4. Base d'un espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de vecteurs de  $E$  est une **base** de  $E$  si  $\mathcal{B}$  est une famille libre **et** génératrice.

#### Théorème 2

Soit  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de l'espace vectoriel  $E$ . Tout vecteur  $v \in E$  s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{B}$ . Autrement dit, il **existe** des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  **uniques** tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$



### Remarque

1.  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  s'appellent les **coordonnées** du vecteur  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. Il faut observer que pour une base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  on introduit un **ordre** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permute les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.
3. Notez que l'application

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{K}^n \rightarrow E \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &\mapsto \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$  vers l'espace vectoriel  $E$ .

### Démonstration Preuve du théorème 2

- Par définition,  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $E$ , donc pour tout  $v \in E$  il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

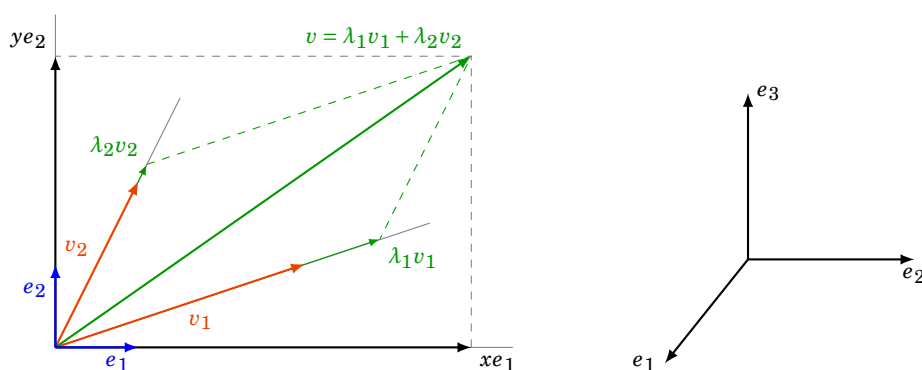
Cela prouve la partie existence.

- Il reste à montrer l'unicité des  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Soient  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  d'autres scalaires tels que  $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$ . Alors, par différence on a :  $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$ . Comme  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  est une famille libre, ceci implique  $\lambda_1 - \mu_1 = 0$ ,  $\lambda_2 - \mu_2 = 0$ , ...,  $\lambda_n - \mu_n = 0$  et donc  $\lambda_1 = \mu_1$ ,  $\lambda_2 = \mu_2$ , ...,  $\lambda_n = \mu_n$ .

## 3.2. Exemples

### Exemple 10

1. Soient les vecteurs  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , appelée **base canonique** de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soient les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Alors  $(v_1, v_2)$  forment aussi une base de  $\mathbb{R}^2$ .



3. De même dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , alors  $(e_1, e_2, e_3)$  forment la **base canonique** de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 11**

Soient  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Montrons que la famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Dans les deux premiers points, nous ramenons le problème à l'étude d'un système linéaire.

1. Montrons d'abord que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . On cherche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Ceci se reformule comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_1 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_2 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = a_3. \end{cases} \quad (\text{S})$$

Il nous restera à montrer que ce système a une solution  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

2. Pour montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille libre, il faut montrer que l'unique solution de

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ceci équivaut à montrer que le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{S}')$$

a une unique solution

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

3. Nous pouvons maintenant répondre à la question sans explicitement résoudre les systèmes.

Remarquons que les deux systèmes ont la même matrice de coefficients. On peut donc montrer simultanément que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice et une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  en montrant que la matrice des coefficients est inversible. En effet, si la matrice des coefficients est inversible, alors (S) admet une solution  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  quel que soit  $(a_1, a_2, a_3)$  et d'autre part (S') admet la seule solution  $(0, 0, 0)$ .

Cette matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer qu'elle est inversible, on peut calculer son inverse ou seulement son déterminant qui vaut  $\det A = -1$  (le déterminant étant non nul la matrice est inversible).

Conclusion :  $\mathcal{B}$  est une famille libre et génératrice ; c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exemple 12

Les vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de  $\mathbb{K}^n$ , appelée la **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ .

### Remarque

L'exemple 11 se généralise de la façon suivante. Pour montrer que  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ , il suffit de montrer la chose suivante : la matrice  $A$  constituée des composantes de ces vecteurs (chaque vecteur formant une colonne de  $A$ ) est inversible.

Application : montrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

forment aussi une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Voici quelques autres exemples :

### Exemple 13

1. La base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ . Attention, il y a  $n+1$  vecteurs !
2. Voici une autre base de  $\mathbb{R}_n[X]$  :  $(1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\dots+X^n)$ .
3. L'espace vectoriel  $M_2(\mathbb{R})$  des matrices  $2 \times 2$  admet une base formée des vecteurs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, n'importe quelle matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $M_2(\mathbb{R})$  se décompose de manière unique en

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4.$$

4. C'est un bon exercice de prouver que les quatre matrices suivantes forment aussi une base de  $M_2(\mathbb{R})$  :

$$M'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 3.3. Existence d'une base

Voyons maintenant un théorème d'existence d'une base finie. Dans la suite, les espaces vectoriels sont supposés non réduits à  $\{0\}$ .

#### **Théorème 3. Théorème d'existence d'une base**

Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base.

### 3.4. Théorème de la base incomplète

Une version importante et plus générale de ce qui précède est le théorème suivant :

#### **Théorème 4. Théorème de la base incomplète**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.

1. *Toute famille libre  $\mathcal{L}$  peut être complétée en une base. C'est-à-dire qu'il existe une famille  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$  soit une famille libre et génératrice de  $E$ .*
2. *De toute famille génératrice  $\mathcal{G}$  on peut extraire une base de  $E$ . C'est-à-dire qu'il existe une famille  $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$  telle que  $\mathcal{B}$  soit une famille libre et génératrice de  $E$ .*

### 3.5. Preuves

Les deux théorèmes précédents sont la conséquence d'un résultat encore plus général :

#### **Théorème 5**

Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie de  $E$  et  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ . Alors il existe une famille  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{G}$  telle que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$  soit une base de  $E$ .

Le théorème 4 de la base incomplète se déduit du théorème 5 ainsi :

1. On sait qu'il existe une famille génératrice de  $E$  : notons-la  $\mathcal{G}$ . On applique le théorème 5 avec ce  $\mathcal{L}$  et ce  $\mathcal{G}$ .
2. On applique le théorème 5 avec  $\mathcal{L} = \emptyset$  et la famille  $\mathcal{G}$  de l'énoncé.

En particulier, le théorème 3 d'existence d'une base se démontre comme le point (2) ci-dessus avec  $\mathcal{L} = \emptyset$  et  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$ .

### 3.6. Preuves (suite)

Nous avons : Théorème 5  $\implies$  Théorème 4  $\implies$  Théorème 3.

Il nous reste donc à prouver le théorème 5. La démonstration que nous en donnons est un algorithme.

#### **Démonstration**

- Étape 0. Si  $\mathcal{L}$  est une famille génératrice de  $E$ , on pose  $\mathcal{F} = \emptyset$  et c'est fini puisque  $\mathcal{L}$  est une famille génératrice et libre, donc une base. Sinon on passe à l'étape suivante.
- Étape 1. Comme  $\mathcal{L}$  n'est pas une famille génératrice, alors il existe au moins un élément  $g_1$  de  $\mathcal{G}$  qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{L}$ . (En effet, par l'absurde, si tous les éléments de  $\mathcal{G}$  sont dans  $\text{Vect } \mathcal{L}$ , alors  $\mathcal{L}$  serait aussi une famille génératrice.) On pose  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{g_1\}$ . Alors la famille  $\mathcal{L}_1$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_1 \subset E$  : la famille  $\mathcal{L}_1$  est strictement plus grande que  $\mathcal{L}$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_1$  est une famille libre. (En effet, si  $\mathcal{L}_1$  n'était pas une famille libre, alors une combinaison linéaire nulle impliquerait que  $g_1 \in \text{Vect } \mathcal{L}$ .)

On recommence le même raisonnement à partir de  $\mathcal{L}_1$  : si  $\mathcal{L}_1$  est une famille génératrice de  $E$ , alors on pose  $\mathcal{F} = \{g_1\}$  et on s'arrête. Sinon on passe à l'étape suivante.

- Étape 2. Il existe au moins un élément  $g_2$  de  $\mathcal{G}$  qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{L}_1$ . Alors la famille  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{g_2\} = \mathcal{L} \cup \{g_1, g_2\}$  est strictement plus grande que  $\mathcal{L}_1$  et est encore une famille libre.

Si  $\mathcal{L}_2$  est une famille génératrice, on pose  $\mathcal{F} = \{g_1, g_2\}$  et c'est fini. Sinon on passe à l'étape d'après.

- ...

L'algorithme consiste donc à construire une suite, strictement croissante pour l'inclusion, de familles libres, où, si  $\mathcal{L}_{k-1}$  n'engendre pas  $E$ , alors  $\mathcal{L}_k$  est construite à partir de  $\mathcal{L}_{k-1}$  en lui ajoutant un vecteur  $g_k$  de  $\mathcal{G}$ , de sorte que  $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_{k-1} \cup \{g_k\}$  reste une famille libre.

- L'algorithme se termine. Comme la famille  $\mathcal{G}$  est finie, le processus s'arrête en moins d'étapes qu'il y a d'éléments dans  $\mathcal{G}$ . Notez que, comme  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice, dans le pire des cas on peut être amené à prendre  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ .
- L'algorithme est correct. Lorsque l'algorithme s'arrête, disons à l'étape  $s$  : on a  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L} \cup \mathcal{F}$  où  $\mathcal{F} = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Par construction,  $\mathcal{L}_s$  est une famille finie, libre et aussi génératrice (car c'est la condition d'arrêt). Donc  $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

### Exemple 14

Soit  $\mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes réels et  $E$  le sous-espace de  $\mathbb{R}[X]$  engendré par la famille  $\mathcal{G} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$  définie par :

$$P_1(X) = 1 \quad P_2(X) = X \quad P_3(X) = X + 1 \quad P_4(X) = 1 + X^3 \quad P_5(X) = X - X^3$$

Partons de  $\mathcal{L} = \emptyset$  et cherchons  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  telle que  $\mathcal{F}$  soit une base de  $E$ .

- Étape 0. Comme  $\mathcal{L}$  n'est pas génératrice (vu que  $\mathcal{L} = \emptyset$ ), on passe à l'étape suivante.
- Étape 1. On pose  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{P_1\} = \{P_1\}$ . Comme  $P_1$  est non nul,  $\mathcal{L}_1$  est une famille libre.
- Étape 2. Considérons  $P_2$ . Comme les éléments  $P_1$  et  $P_2$  sont linéairement indépendants,  $\mathcal{L}_2 = \{P_1, P_2\}$  est une famille libre.
- Étape 3. Considérons  $P_3$  : ce vecteur est combinaison linéaire des vecteurs  $P_1$  et  $P_2$  car  $P_3(X) = X + 1 = P_1(X) + P_2(X)$  donc  $\{P_1, P_2, P_3\}$  est une famille liée. Considérons alors  $P_4$ . Un calcul rapide prouve que les vecteurs  $P_1, P_2$  et  $P_4$  sont linéairement indépendants. Alors  $\mathcal{L}_3 = \{P_1, P_2, P_4\}$  est une famille libre.

Il ne reste que le vecteur  $P_5$  à considérer. Il s'agit, pour pouvoir conclure, d'étudier l'indépendance linéaire des vecteurs  $P_1, P_2, P_4, P_5$ . Or un calcul rapide montre l'égalité

$$P_1 + P_2 - P_4 - P_5 = 0,$$

ce qui prouve que la famille  $\{P_1, P_2, P_4, P_5\}$  est liée. Donc avec les notations de l'algorithme,  $s = 3$  et  $\mathcal{L}_3 = \{P_1, P_2, P_4\}$  est une base de  $E$ .

### Mini-exercices

1. Trouver toutes les façons d'obtenir une base de  $\mathbb{R}^2$  avec les vecteurs suivants :  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ .
2. Montrer que la famille  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  des vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est une famille génératrice du sous-espace vectoriel d'équation  $2x - y + z = 0$  de  $\mathbb{R}^3$ . En extraire une base.

3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel  $E_1$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + 3y - 2z = 0$ . Compléter cette base en une base de  $\mathbb{R}^3$ . Idem avec  $E_2$  vérifiant les deux équations  $x + 3y - 2z = 0$  et  $y = z$ .
4. Donner une base de l'espace vectoriel des matrices  $3 \times 3$  ayant une diagonale nulle. Idem avec l'espace vectoriel des polynômes  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant  $P(0) = 0$ ,  $P'(0) = 0$ .

## 4. Dimension d'un espace vectoriel

### 4.1. Définition

#### Définition 5

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de **dimension finie**.

Par le théorème 3 d'existence d'une base, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.

On va pouvoir parler de **la** dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

#### Théorème 6. Théorème de la dimension

Toutes les bases d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Nous détaillerons la preuve un peu plus loin.

#### Définition 6

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , notée  $\dim E$ , est par définition le nombre d'éléments d'une base de  $E$ .

**Méthodologie.** Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de trouver une base de  $E$  (une famille à la fois libre et génératrice) : le cardinal (nombre d'éléments) de cette famille donne la dimension de  $E$ . Le théorème 6 de la dimension prouve que même si on choisissait une base différente alors ces deux bases auraient le même nombre d'éléments.

**Convention.** On convient d'attribuer à l'espace vectoriel  $\{0\}$  la dimension 0.

### 4.2. Exemples

#### Exemple 15

1. La base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . La dimension de  $\mathbb{R}^2$  est donc 2.
2. Les vecteurs  $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  forment aussi une base de  $\mathbb{R}^2$ , et illustrent qu'une autre base contient le même nombre d'éléments.
3. Plus généralement,  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ , car par exemple sa base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  contient  $n$  éléments.
4.  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$  car une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ , qui contient  $n + 1$  éléments.

**Exemple 16**

Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :

- $\mathbb{R}[X]$  : l'espace vectoriel de tous les polynômes,
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  : l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,
- $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  : l'espace vectoriel des suites réelles.

**Exemple 17**

Nous avons vu que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires *homogène* est un espace vectoriel. On considère par exemple le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

On vérifie que la solution générale de ce système est

$$x_1 = -s - t \quad x_2 = s \quad x_3 = -t \quad x_4 = 0 \quad x_5 = t.$$

Donc les vecteurs solutions s'écrivent sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

engendrent l'espace des solutions du système. D'autre part, on vérifie que  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement indépendants. Donc  $(v_1, v_2)$  est une base de l'espace des solutions du système. Ceci montre que cet espace vectoriel est de dimension 2.

**4.3. Compléments**

Lorsqu'un espace vectoriel est de dimension finie, le fait de connaître sa dimension est une information très riche ; les propriétés suivantes montrent comment exploiter cette information.

Le schéma de preuve sera : Lemme 1  $\Rightarrow$  Proposition 5  $\Rightarrow$  Théorème 6.

**Lemme 1**

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre et soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie de  $E$ . Alors  $\text{Card } \mathcal{L} \leq \text{Card } \mathcal{G}$ .

Ce lemme implique le résultat important :

**Proposition 5**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une base ayant  $n$  éléments. Alors :

1. Toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments.
2. Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments.

En effet, soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  telle que  $\text{Card } \mathcal{B} = n$ .

1. On applique le lemme 1 à la famille  $\mathcal{B}$  considérée génératrice ; alors une famille libre  $\mathcal{L}$  vérifie  $\text{Card } \mathcal{L} \leq \text{Card } \mathcal{B} = n$ .
2. On applique le lemme 1 à la famille  $\mathcal{B}$  considérée maintenant comme une famille libre, alors une famille génératrice  $\mathcal{G}$  vérifie  $n = \text{Card } \mathcal{B} \leq \text{Card } \mathcal{G}$ .

Cette proposition impliquera bien le théorème 6 de la dimension :

**Corollaire 1**

Si  $E$  est un espace vectoriel admettant une base ayant  $n$  éléments, alors toute base de  $E$  possède  $n$  éléments.

La preuve du corollaire (et donc du théorème 6 de la dimension) est la suivante : par la proposition 5, si  $\mathcal{B}$  est une base quelconque de  $E$ , alors  $\mathcal{B}$  est à la fois une famille libre et génératrice, donc possède à la fois au plus  $n$  éléments et au moins  $n$  éléments, donc exactement  $n$  éléments.

Il reste à énoncer un résultat important et très utile :

**Théorème 7**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Il y a équivalence entre :

- (i)  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ ,
- (ii)  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $E$ ,
- (iii)  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$ .

La preuve sera une conséquence du théorème 6 de la dimension et du théorème 4 de la base incomplète.

Autrement dit, lorsque le nombre de vecteurs considéré est exactement égal à la dimension de l'espace vectoriel, l'une des deux conditions – être libre ou bien génératrice – suffit pour que ces vecteurs déterminent une base de  $E$ .

**Démonstration**

- Les implications (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (i)  $\Rightarrow$  (iii) découlent de la définition d'une base.
- Voici la preuve de (ii)  $\Rightarrow$  (i).  
Si  $\mathcal{F}$  est une famille libre ayant  $n$  éléments, alors par le théorème de la base incomplète (théorème 4) il existe une famille  $\mathcal{F}'$  telle que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$  soit une base de  $E$ . D'une part  $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$  est une base de  $E$  qui est de dimension  $n$ , donc par le théorème 6,  $\text{Card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') = n$ . Mais d'autre part  $\text{Card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') = \text{Card } \mathcal{F} + \text{Card } \mathcal{F}'$  (par l'algorithme du théorème 4) et par hypothèse  $\text{Card } \mathcal{F} = n$ . Donc  $\text{Card } \mathcal{F}' = 0$ , ce qui implique que  $\mathcal{F}' = \emptyset$  et donc que  $\mathcal{F}$  est déjà une base de  $E$ .
- Voici la preuve de (iii)  $\Rightarrow$  (i).  
Par hypothèse,  $\mathcal{F}$  est cette fois une famille génératrice. Toujours par le théorème 4, on peut



extraire de cette famille une base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ . Puis par le théorème 6,  $\text{Card } \mathcal{B} = n$ , donc  $n = \text{Card } \mathcal{B} \leq \text{Card } \mathcal{F} = n$ . Donc  $\mathcal{B} = \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}$  est bien une base.

### Exemple 18

Pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  les vecteurs  $(v_1, v_2, v_3)$  suivants forment une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

- Nous avons une famille de 3 vecteurs dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  de dimension 3. Donc pour montrer que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base, par le théorème 7, il suffit de montrer que la famille est libre ou bien de montrer qu'elle est génératrice. Dans la pratique, il est souvent plus facile de vérifier qu'une famille est libre.
- À quelle condition la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre ? Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ . Cela implique le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ (t-4)\lambda_2 + (t-4)\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ (t-4)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

- Il est clair que si  $t \neq 4$ , alors la seule solution est  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$  et donc  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une famille libre. Si  $t = 4$ , alors par exemple  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -1)$  est une solution non nulle, donc la famille n'est pas libre.
- Conclusion : si  $t \neq 4$  la famille est libre, donc par le théorème 7 la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est en plus génératrice, donc c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $t = 4$ , la famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

## 4.4. Preuve

Il nous reste la preuve du lemme 1. La démonstration est délicate et hors-programme.

### Démonstration

La preuve de ce lemme se fait en raisonnant par récurrence.

On démontre par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ , la propriété suivante est vraie : « Dans un espace vectoriel engendré par  $n$  vecteurs, toute famille ayant  $n+1$  éléments est liée. »

**Initialisation.** On vérifie que la propriété est vraie pour  $n = 1$ . Soit  $E$  un espace vectoriel engendré par un vecteur noté  $g_1$ , et soit  $\{v_1, v_2\}$  une famille de  $E$  ayant deux éléments. Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires du vecteur  $g_1$  ; autrement dit, il existe des scalaires  $\alpha_1, \alpha_2$  tels que  $v_1 = \alpha_1 g_1$  et  $v_2 = \alpha_2 g_1$ , ce qui donne la relation :  $\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2 = 0_E$ . En supposant  $v_2$  non nul (sinon il est évident que  $\{v_1, v_2\}$  est liée), le scalaire  $\alpha_2$  est donc non nul. On a trouvé une combinaison linéaire nulle des vecteurs  $v_1, v_2$ , avec des coefficients non tous nuls. Donc la famille  $\{v_1, v_2\}$  est liée.

**Hérédité.** On démontre maintenant que si la propriété est vraie au rang  $n-1$  ( $n \geq 2$ ), alors elle est vraie au rang  $n$ . Soit  $E$  un espace vectoriel engendré par  $n$  vecteurs notés  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , et soit

$\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$  une famille de  $E$  ayant  $n+1$  éléments. Tout vecteur  $v_j$ , pour  $j = 1, 2, \dots, n+1$ , est combinaison linéaire de  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , donc il existe des scalaires  $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_n^j$  tels que :

$$v_j = \alpha_1^j g_1 + \alpha_2^j g_2 + \dots + \alpha_n^j g_n.$$

*Remarque.* On est contraint d'utiliser ici deux indices  $i, j$  pour les scalaires (attention !  $j$  n'est pas un exposant) car deux informations sont nécessaires : l'indice  $j$  indique qu'il s'agit de la décomposition du vecteur  $v_j$ , et  $i$  indique à quel vecteur de la famille génératrice est associé ce coefficient.

En particulier, pour  $j = n+1$ , le vecteur  $v_{n+1}$  s'écrit :

$$v_{n+1} = \alpha_1^{n+1} g_1 + \alpha_2^{n+1} g_2 + \dots + \alpha_n^{n+1} g_n.$$

Si  $v_{n+1}$  est nul, c'est terminé, la famille est liée ; sinon,  $v_{n+1}$  est non nul, et au moins un des coefficients  $\alpha_j^{n+1}$  est non nul. On suppose, pour alléger l'écriture, que  $\alpha_n^{n+1}$  est non nul (sinon il suffit de changer l'ordre des vecteurs). On construit une nouvelle famille de  $n$  vecteurs de  $E$  de telle sorte que ces vecteurs soient combinaisons linéaires de  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ , c'est-à-dire appartiennent au sous-espace engendré par  $\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$ . Pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , on définit  $w_j$  par :

$$w_j = \alpha_n^{n+1} v_j - \alpha_n^j v_{n+1} = \sum_{k=1}^n (\alpha_n^{n+1} \alpha_k^j - \alpha_n^j \alpha_k^{n+1}) g_k.$$

Le coefficient de  $g_n$  est nul. Donc  $w_j$  est bien combinaison linéaire de  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ . On a  $n$  vecteurs qui appartiennent à un espace vectoriel engendré par  $n-1$  vecteurs ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : la famille  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  est liée. Par conséquent, il existe des scalaires non tous nuls  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0.$$

En remplaçant les  $w_j$  par leur expression en fonction des vecteurs  $v_i$ , on obtient :

$$\alpha_n^{n+1} \lambda_1 v_1 + \alpha_n^{n+1} \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_n^{n+1} \lambda_n v_n - (\lambda_1 \alpha_n^1 + \dots + \lambda_n \alpha_n^n) v_{n+1} = 0_E$$

Le coefficient  $\alpha_n^{n+1}$  a été supposé non nul et au moins un des scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  est non nul ; on a donc une combinaison linéaire nulle des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$  avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls, ce qui prouve que ces vecteurs forment une famille liée.

**Conclusion.** La démonstration par récurrence est ainsi achevée.

### Mini-exercices

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse par un résultat du cours ou un contre-exemple :

1. Une famille de  $p \geq n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$  est génératrice.
2. Une famille de  $p > n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$  est liée.
3. Une famille de  $p < n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$  est libre.
4. Une famille génératrice de  $p \leq n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$  est libre.
5. Une famille de  $p \neq n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$  n'est pas une base.
6. Toute famille libre à  $p$  éléments d'un espace vectoriel de dimension  $n$  se complète par une famille ayant exactement  $n - p$  éléments en une base de  $E$ .

## 5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Tout sous-espace vectoriel  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  étant lui même un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, la question est de savoir s'il est de dimension finie ou s'il ne l'est pas.

Prenons l'exemple de l'espace vectoriel  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

- il contient le sous-espace vectoriel  $F_1 = \mathbb{R}_n[X]$  des (fonctions) polynômes de degré  $\leq n$ , qui est de dimension finie ;
- et aussi le sous-espace vectoriel  $F_2 = \mathbb{R}[X]$  de l'ensemble des (fonctions) polynômes, qui lui est de dimension infinie.

### 5.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Nous allons voir par contre que lorsque  $E$  est de dimension finie alors  $F$  aussi.

#### Théorème 8

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Alors tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est de dimension finie ;
2.  $\dim F \leq \dim E$  ;
3.  $F = E \iff \dim F = \dim E$ .

#### Démonstration

- Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F = \{0\}$  il n'y a rien à montrer. On suppose donc  $F \neq \{0\}$  et soit  $v$  un élément non nul de  $F$ . La famille  $\{v\}$  est une famille libre de  $F$ , donc  $F$  contient des familles libres. Toute famille libre d'éléments de  $F$  étant une famille libre d'éléments de  $E$  (voir la définition des familles libres), alors comme  $E$  est de dimension  $n$ , toutes les familles libres de  $F$  ont au plus  $n$  éléments.
- On considère l'ensemble  $K$  des entiers  $k$  tels qu'il existe une famille libre de  $F$  ayant  $k$  éléments :

$$K = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset F \text{ et } \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ est une famille libre de } F \right\}$$

Cet ensemble  $K$  est non vide (car  $1 \in K$ ) ;  $K$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{N}$  (puisque tout élément de  $K$  est compris entre 1 et  $n$ ) donc  $K$  admet un maximum. Notons  $p$  ce maximum et soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  une famille libre de  $F$  ayant  $p$  éléments.

- Montrons que  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  est aussi génératrice de  $F$ . Par l'absurde, s'il existe  $w$  un élément de  $F$  qui n'est pas dans  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ , alors la famille  $\{v_1, \dots, v_p, w\}$  ne peut pas être libre (sinon  $p$  ne serait pas le maximum de  $K$ ). La famille  $\{v_1, \dots, v_p, w\}$  est donc liée, mais alors la relation de dépendance linéaire implique que  $w \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ , ce qui est une contradiction.

Conclusion :  $(v_1, \dots, v_p)$  est une famille libre et génératrice, donc est une base de  $F$ .

- On a ainsi démontré simultanément que :
  - $F$  est de dimension finie (puisque  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  est une base de  $F$ ).
  - Ainsi  $\dim F = p$ , donc  $\dim F \leq \dim E$  (puisque toute famille libre de  $F$  a au plus  $n$  éléments).
  - De plus, lorsque  $p = n$ , le  $p$ -uplet  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ , qui est une base de  $F$ , est aussi une base de  $E$  (car  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  est alors une famille libre de  $E$  ayant exactement  $n$  éléments, donc est une base de  $E$ ). Tout élément de  $E$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , d'où  $E = F$ .

### 5.2. Exemples

**Exemple 19**

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces vectoriels de  $E$  sont :

- soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace  $\{0\}$  ;
- soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces  $\mathbb{K}u = \text{Vect}\{u\}$  engendrés par les vecteurs non nuls  $u$  de  $E$  ;
- soit de dimension 2 : c'est alors l'espace  $E$  tout entier.

**Vocabulaire.** Plus généralement, dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1 est appelé **droite vectorielle** de  $E$  et tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 est appelé **plan vectoriel** de  $E$ . Tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$  est appelé **hyperplan** de  $E$ . Pour  $n = 3$ , un hyperplan est un plan vectoriel ; pour  $n = 2$ , un hyperplan est une droite vectorielle.

Le théorème 8 précédent permet de déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 2**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $F$  est de dimension finie et que  $G \subset F$ . Alors :

$$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

**Exemple 20**

Deux droites vectorielles  $F$  et  $G$  sont soit égales, soit d'intersection réduite au vecteur nul.

**Exemple 21**

Soient les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u, v) \quad \text{où} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que  $F = G$  ?

1. On remarque que les vecteurs  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires, donc  $G$  est de dimension 2, et de plus ils appartiennent à  $F$ , donc  $G$  est contenu dans  $F$ .
2. Pour trouver la dimension de  $F$ , on pourrait déterminer une base de  $F$  et on montrerait alors que la dimension de  $F$  est 2. Mais il est plus judicieux ici de remarquer que  $F$  est contenu strictement dans  $\mathbb{R}^3$  (par exemple le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^3$  n'est pas dans  $F$ ), donc  $\dim F < \dim \mathbb{R}^3 = 3$  ; mais puisque  $F$  contient  $G$  alors  $\dim F \geq \dim G = 2$ , donc la dimension de  $F$  ne peut être que 2.
3. On a donc démontré que  $G \subset F$  et que  $\dim G = \dim F$ , ce qui entraîne  $G = F$ .

## 5.3. Théorème des quatre dimensions

### Théorème 9. Théorème des quatre dimensions

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

### Corollaire 3

Si  $E = F \oplus G$ , alors  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

### Exemple 22

Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension 6, on considère deux sous-espaces  $F$  et  $G$  avec  $\dim F = 3$  et  $\dim G = 4$ . Que peut-on dire de  $F \cap G$  ? de  $F + G$  ? Peut-on avoir  $F \oplus G = E$  ?

- $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel inclus dans  $F$ , donc  $\dim(F \cap G) \leq \dim F = 3$ . Donc les dimensions possibles pour  $F \cap G$  sont pour l'instant 0, 1, 2, 3.
- $F + G$  est un sous-espace vectoriel contenant  $G$  et inclus dans  $E$ , donc  $4 = \dim G \leq \dim(F + G) \leq \dim E = 6$ . Donc les dimensions possibles pour  $F + G$  sont 4, 5, 6.
- Le théorème 9 des quatre dimensions nous donne la relation :  $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 4 - \dim(F + G) = 7 - \dim(F + G)$ . Comme  $F + G$  est de dimension 4, 5 ou 6, alors la dimension de  $F \cap G$  est 3, 2 ou 1.
- Conclusion : les dimensions possibles pour  $F + G$  sont 4, 5 ou 6 ; les dimensions correspondantes pour  $F \cap G$  sont alors 3, 2 ou 1. Dans tous les cas,  $F \cap G \neq \{0\}$  et en particulier  $F$  et  $G$  ne sont jamais en somme directe dans  $E$ .

La méthode de la preuve du théorème 9 des quatre dimensions implique aussi :

### Corollaire 4

Tout sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie admet un supplémentaire.

### Démonstration Preuve du théorème 9

- Notez l'analogie de la formule avec la formule pour les ensembles finis :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card} A + \text{Card} B - \text{Card}(A \cap B).$$

- Nous allons partir d'une base  $\mathcal{B}_{F \cap G} = \{u_1, \dots, u_p\}$  de  $F \cap G$ . On commence par compléter  $\mathcal{B}_{F \cap G}$  en une base  $\mathcal{B}_F = \{u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q\}$  de  $F$ . On complète ensuite  $\mathcal{B}_{F \cap G}$  en une base  $\mathcal{B}_G = \{u_1, \dots, u_p, w_{p+1}, \dots, w_r\}$  de  $G$ .
- Nous allons maintenant montrer que la famille  $\{u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q, w_{p+1}, \dots, w_r\}$  est une base de  $F + G$ . Il est tout d'abord clair que c'est une famille génératrice de  $F + G$  (car  $\mathcal{B}_F$  est une famille génératrice de  $F$  et  $\mathcal{B}_G$  est une famille génératrice de  $G$ ).
- Montrons que cette famille est libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=p+1}^q \beta_j v_j + \sum_{k=p+1}^r \gamma_k w_k = 0 \quad (1)$$

On pose  $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ ,  $v = \sum_{j=p+1}^q \beta_j v_j$ ,  $w = \sum_{k=p+1}^r \gamma_k w_k$ . Alors d'une part  $u + v \in F$  (car  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$ ) mais comme l'équation (1) équivaut à  $u + v + w = 0$ , alors  $u + v = -w \in G$  (car

$w \in G$ ). Maintenant  $u + v \in F \cap G$  et aussi bien sûr  $u \in F \cap G$ , donc  $v = \sum_{j=p+1}^q \beta_j v_j \in F \cap G$ . Cela implique  $\beta_j = 0$  pour tout  $j$  (car les  $\{v_j\}$  complètent la base de  $F \cap G$ ).

La combinaison linéaire nulle (1) devient  $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{k=p+1}^r \gamma_k w_k = 0$ . Or  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$ , donc  $\alpha_i = 0$  et  $\gamma_k = 0$  pour tout  $i, k$ . Ainsi  $\mathcal{B}_{F+G} = \{u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q, w_{p+1}, \dots, w_r\}$  est une base de  $F + G$ .

- Il ne reste plus qu'à compter le nombre de vecteurs de chaque base :  $\dim F \cap G = \text{Card } \mathcal{B}_{F \cap G} = p$ ,  $\dim F = \text{Card } \mathcal{B}_F = q$ ,  $\dim G = \text{Card } \mathcal{B}_G = r$ ,  $\dim(F + G) = \text{Card } \mathcal{B}_{F+G} = q + r - p$ . Ce qui prouve bien  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ .

### Mini-exercices

1. Soient  $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$  et  $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}\right)$ . Montrer que  $F = G$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère  $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . Calculer les dimensions de  $F, G, F \cap G, F + G$  en fonction de  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Dans un espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces  $F$  et  $G$  vérifiant  $\dim F = 3$  et  $\dim G \leq 2$ . Que peut-on dire pour  $\dim(F \cap G)$ ? Et pour  $\dim(F + G)$ ?
4. Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, montrer l'équivalence entre : (i)  $F \oplus G = E$  ; (ii)  $F + G = E$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$  ; (iii)  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$ .
5. Soit  $H$  un hyperplan dans un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Soit  $v \in E \setminus H$ . Montrer que  $H$  et  $\text{Vect}(v)$  sont des sous-espaces supplémentaires dans  $E$ .

### Auteurs

- D'après un cours de Sophie Chemla de l'université Pierre et Marie Curie, reprenant des parties d'un cours de H. Ledret et d'une équipe de l'université de Bordeaux animée par J. Queyruet,
- et un cours de Eva Bayer-Fluckiger, Philippe Chabloz, Lara Thomas de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
- mixé, révisé et complété par Arnaud Bodin. Relu par Vianney Combet.