Module Mathématiques Appliquées: Probabilités Telecom Nancy Apprentissage

S. Mézières (I.E.C.L.) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr*

2017 -2018

Module MAP

Enseignements : CM/TD 44h

Evaluation :

- 1 test de 1h (t, noté sur 20)
- 1 examen de 2 heures (e, noté sur 20)
- 1 note de participation en TD (p, entre 0 et 1 point)

Note finale :

$$N = (t + 2 \times e)/3 + p$$

Plan du cours

Chapitres :

1. Analyse combinatoire
2. Le modèle probabiliste
3. Les variables aléatoires et lois de probabilités
4. Premiers pas en statistique : statistique inférentielle et estimation de paramètres

Rudiments d'analyse combinatoire

Principe de dénombrement : Si une expérience peut avoir m résultats, une seconde expérience peut en avoir n, alors les deux expériences ensemble auront nm résultats.

Exemple : # plaques minéralogiques de 7 caractères ; les 3 premiers étant des lettres, les 4 derniers des chiffres.

Considérons un ensemble E de cardinal n.

Question 1 : De combien de façons peut-on ordonner les éléments de E ?

Definition

Une **permutation** est une suite ordonnée des n éléments d'un ensemble.

Nombre de permutations : $P_n = n!$

Rappel : factorielle $n = n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$; convention : $0\,! = 1$

C'est aussi le nombre d'applications bijectives d'un ensemble de cardinal n dans un autre ensemble de cardinal n.

Exemple : un cours est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un classement est établi selon la note obtenue à l'examen (on suppose toutes les notes différentes).
 # classements possibles :
 # classements possibles par sexe :

Application : nombre de permutations d'objets partiellement indiscernables
n objets tels que $n_1, \ldots, n_r$ sont indiscernables entre eux

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$$

Dans l'exemple si on souhaite simplement connaître le classement des sexes sans se soucier du nom des élèves :

Question 2 : De combien de façons peut-on extraire un sous-groupe de p éléments de E ?

▷ soit on tient compte de l'ordre :

Definition

Un **arrangement** de p éléments parmi n est une suite ordonnée des p éléments choisis.

Nombre d'arrangements :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

Exemple : #nombres de 3 chiffres (de 1 à 9) différents =

▷ soit on ne tient pas compte de l'ordre :

Definition

Une **combinaison** de p éléments parmi n est un sous-ensemble de p éléments choisis.

Nombre de combinaisons : $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Quelques propriétés : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^p = C_n^{n-p}$; $(1 \leq p \leq n-1) C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Exemple : Dans un groupe de 20 personnes, on veut former un comité de 3 personnes. # comités possibles =

Formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, y^{n-k}$

Exemple d'application : combien existe-t-il de nombres de 5 chiffres (de 1 à 9) tels qu'un même chiffre n'apparaisse pas plus de 2 fois ?

Application : nombre de parties d'un ensemble de n éléments.