$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix} \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad z^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Etape 1: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 24 & 60 & 42 \\ 0 & 14 & 78 & 252 & 188 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{array}$ Etape 2: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 18 \\ 0 & 0 & 36 & 168 & 132 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3-3L_2 \\ L_4-7L_2 \end{array}$ Etape 3: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4-6L_3 \end{array}$

$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{z^{(m)}} \quad U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}}_{\text{matrice augmentée échelonnée}} \Rightarrow \underbrace{LU = A}_{\text{factorisat}^\circ}$

$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$
On pose $Ux = y \longrightarrow$ i) $Ly = b$ ii) $Ux = y$

$M^{(k)} = I - z^{(k)}(e^{(k)})^T$ avec $z^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a^{(k-1)}_{k+1,k} / a^{(k-1)}_{kk} \end{pmatrix}$

Si $z_k = 0$, alors $L = (M^{-1}) = I + z(e^k)^T$

Algo : $LU \leftarrow A$
pour k de 1 à $m-1$
  si $LU_{k,k} = 0$
    stop
  pour i de $k+1$ à m
    $LU_{i,k} \leftarrow LU_{i,k} / LU_{k,k}$
    pour j de $k+1$ à m
      $LU_{i,j} \leftarrow LU_{i,j} - LU_{i,k} \times LU_{k,j}$

(*) score pour chaque point x_i de classe k $(x_i \in C_k)$
$m_k = \mathrm{Card}(C_k)$, $m_{k'} = \mathrm{Card}(C_{k'})$

Classification :

m individus, p caractères par individu, répartis en K groupes (classes)
pour classer les individus, on considère la distance euclidienne
$\Rightarrow d(x_i, x_k) = \|x_i - x_k\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (x_i^j - x_k^j)^2}$

- g_k : **barycentre** de la classe C_k : $g_k = \frac{1}{m_k} \sum_{x \in C_k} x$ avec m_k le nb d'éléments de C_k
- I_k : **inertie** de la classe C_k par rapport à g_k : $I_k = \sum_{x \in C_k} d(x, g_k)^2$, ainsi **inertie totale** de la partition Π : $I(\Pi) = \sum_{k=1}^{K} I_k$
- Préparation des données : 1 possibilité est de centrer réduire :

① Moyenne : $\bar{c}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^j$ Ecart-type : $\hat{\sigma}_j = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i^j - \bar{c}_j)^2}$

② Centre réduit : $\tilde{x}_i^j = \frac{x_i^j - \bar{c}_j}{\hat{\sigma}_j}$

- Algorithme K-means : (classe = classes, I = inertie, me = nb éléments, G = barycentre)

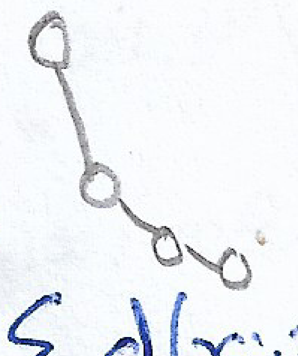
① Choix de la partit° initiale :
pour k de 1 à K
  répéter
    $u \leftarrow U(1, m)$ = rand
  jusqu'à ce que $u \notin \{m_1, \dots, m_{k-1}\}$
  $m_k \leftarrow u$

② Calcul barycentres
pour k de 1 à K
  $g_k \leftarrow [0, \dots, 0]$
  $me_k \leftarrow 0$
pour i de 1 à m
  $k \leftarrow$ classe$_i$
  $g_k \leftarrow g_k + x_i$
  $me_k \leftarrow me_k + 1$
pour k de 1 à K
  si $me_k = 0$
    stop
  $g_k \leftarrow g_k / me_k$

③ Affectat° points
nbcht $\leftarrow 0$
$I_k \leftarrow 0$ pour $k = 1, 2, \dots, K$
pour i de 1 à m
  d2min $\leftarrow +\mathrm{Inf}$
  pour k de 1 à K
    tmp $\leftarrow \|x_i - g_k\|^2$
    si tmp < d2min
      d2min $\leftarrow$ tmp
      kmin $\leftarrow k$
  si kmin $\neq$ classe$_i$
    classe$_i \leftarrow$ kmin
    nbcht ++
  $I_{kmin} \leftarrow I_{kmin}$ + d2min

Algo général : choix partit° initiale
  répéter
    calcul barycentres
    affectat° des points
  jusqu'à stabilisat°

- Choix de K :
  - Méthode du coude : calcul de $I(1), I(2) \dots$ jusqu'à ce que l'inertie diminue moins qu'avant :
  - Méthode du score silhouette : coeff entre -1 (nul) et 1 (top) pour chaque partit°



$S_\Pi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} s_i \;\Big|\; S_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i : x_i \in C_k}^{m} s_i \;\Big|\; s_i = \frac{b_i - a_i}{\max\{a_i, b_i\}} \;\Big|\; a_i = \frac{1}{m_k - 1} \sum_{x \in C_k \setminus \{x_i\}} d(x_i, x) \;\Big|\; b_{i,k'} = \frac{1}{m_{k'}} \sum_{x \in C_{k'}} d(x_i, x)$ (*)