TELECOM Nancy 2A 2019-20

Graphes et Recherche Opérationnelle

Feuille 5 : Programmation linéaire en nombres entiers

Exercice 1. *Théorème des valeurs entières – matrice totalement unimodulaire*

On considère le programme linéaire suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$ avec $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$. Soit $B \subset \{1, \cdots, n\}$ un ensemble de base. La matrice A peut s'écrire, à une permutation près des colonnes :

$$A = (A_B \mid A_H)$$

où la matrice carrée A_B de taille $m \times m$ est **inversible**. On rappelle qu'une *solution de base* $\mathbf{x}$ de (P) s'écrit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_H = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

On suppose que toutes les données de (P) sont **entières**, i.e. les coefficients de A et les composantes de b et de c sont des nombres entiers. L'objectif de cet exercice est d'établir sous certaines conditions sur la matrice A, que (P) possède une solution optimale **entière**.

1. Montrer que les 3 propositions suivantes sont équivalentes
   (a) Le déterminant de toute matrice de base A_B est égale à ± 1.
   (b) Pour tout vecteur $\mathbf{b}$ entier, toute solution de base est entière.
   (c) Pour toute matrice de base A_B, la matrice inverse A_B^{-1} est entière.

   Indications : on pourra montrer que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$. Par ailleurs, on rappelle la règle de Cramer : la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $x_i = \det(A_i)/\det(A)$ où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ième colonne de A par le vecteur $\mathbf{b}$.
2. Une matrice de taille $m \times n$ est dite **totalement unimodulaire** si toute sous-matrice carrée a un déterminant égal à 0, +1 ou −1. Déduire de la question précédente que si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est totalement unimodulaire et si (P) admet une solution optimale alors il admet une solution optimale *entière.*
3. *Théorème de Heller-Tompkins-Gale (1956).* Dans cette question, on établit une condition suffisante pour qu'une matrice soit totalement unimodulaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice dont l'ensemble des lignes peut être partitionné en deux ensembles disjoints I_1 et I_2 avec les propriétés suivantes :
   (a) Chaque colonne de A contient au plus 2 termes non nuls ;
   (b) Chaque terme de A vaut 0, +1 ou −1 ;
   (c) Si 2 termes non nuls dans une colonne de A ont le même signe, alors l'un des termes est dans une ligne de I_1 et l'autre dans une ligne de I_2.
   (d) Si 2 termes non nuls dans une colonne de A ont des signes opposés, alors ils sont tous les deux dans I_1 ou tous les deux dans I_2.

   Montrer que la matrice A est totalement unimodulaire : procéder par récurrence sur la taille des sous-matrices carrées de A et distinguer trois cas selon qu'une sous-matrice carrée possède 0, 1 ou 2 éléments nuls par colonne.

4. *Application à un problème d'affectation.* On considère le problème d'affectation suivant

$$(PA) \quad \begin{cases} \max\limits_{(t_{ij})} \left[F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\right] \\ \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} \leq 1, \quad \forall\, 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^{m} t_{i,j} \leq 1, \quad \forall\, 1 \leq j \leq n \\ t_{i,j} \geq 0, \quad \forall\, 1 \leq i \leq m, \forall\, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Ecrire ce problème sous forme matricielle en faisant apparaître des contraintes sous la forme $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Ecrire ces contraintes sous une forme standard avec des contraintes égalités, en introduisant des variables d'écarts. Montrer que la matrice ainsi obtenue est totalement unimodulaire. En déduire que le problème (PA) admet une solution optimale entière et qui prend seulement deux valeurs possibles 0 et 1 (variables binaires).

Exercice 2. *Programmation linéaire en variables* $\{0,1\}$ *– Problème de sac à dos.*

Soit le problème de "sac-à-dos" suivant :

$$\begin{cases} \max\left[F(\mathbf{x}) = 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4\right] \\ \quad 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 8 \\ \quad 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Résoudre ce problème par une procédure de Branch-and-Bound.

Exercice 3. *Programmation linéaire en nombres entiers – Problème de sac à dos généralisé.*

Soit le problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \max\left[F(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 2x_5\right] \\ \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 9 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 10 \\ \quad x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 \leq 8 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\};\ x_4 \in \{0,1,2\};\ x_5 \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Résoudre ce problème par une procédure de Branch-and-Bound.

Exercice 4. *Programmation linéaire en variables* $\{0,1\}$ *– cas général.*

1. Résoudre le problème suivant par une procédure de Branch-and-Bound :

$$(P_1) \begin{cases} \max\left[F(\mathbf{x}) = 10x_1 + 8x_2 - 5x_3\right] \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

Vous appliquerez la procédure sur le problème obtenu en faisant disparaître les coefficients négatifs de la fonction objectif, à l'aide d'un ou plusieurs changements de variables. Vous obtenez ainsi un nouveau problème linéaire où tous les coefficients de la fonction objectif sont désormais positifs. On notera encore x_i les variables de ce problème. Pour mettre à jour, les majorants e_k (estimations) des variables d'écarts, il faut tenir compte du signe des coefficients a_i dans les contraintes :

$$\text{Si } x_i = 1, \text{ alors } e_{k+1} = \begin{cases} e_k - a_i & \text{si } a_i > 0, \\ e_k & \text{si } a_i \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si } x_i = 0, \text{ alors } e_{k+2} = \begin{cases} e_k & \text{si } a_i > 0, \\ e_k + a_i & \text{si } a_i \leq 0 \end{cases}.$$

2. Résoudre par Branch-and-Bound le problème

$$(P_2) \begin{cases} \max\,[F(\mathbf{x}) = 6x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 4x_4] \\ \quad 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 \leq 2 \\ \quad 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Exercice 5. *Méthode des coupes entières*

On considère le programme linéaire en nombres entiers (PLNE) suivant

$$\text{(PLNE)} \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}=(x_1,x_2)} [F(x) = x_1 + 10x_2] \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ x_1,\ x_2 \textbf{ entiers} \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 18 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 93 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Utiliser une procédure de séparation avec des coupes entières (Branch-and-Cut) pour résoudre (PLNE). Vous utiliserez les indications ci-dessous qui fournissent les solutions optimales des programmes linéaires (sans contrainte d'intégrité sur les variables) de la forme

$$\text{(PL)} \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} [F(\mathbf{x}) = x_1 + 10x_2] \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ C\mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

où des contraintes supplémentaires (les coupes entières) ont été rajoutées avec la matrice C et le vecteur $\mathbf{d}$. Les indications sont données pour certaines valeurs de C et $\mathbf{d}$.
Indications :

1. La solution optimale de (PLNE) **sans contrainte d'intégrité** sur les variables est donnée par $x_1^* = 3/2,\ x_2^* = 5$ et $F^*_{\max} = 51,5$.
2. Avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = 1$, la solution optimale de (P) est $x_1^* = 1,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 41$.
3. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = -2$, la solution optimale de (P) est $x_1^* = 2,\ x_2^* = 89/18 \simeq 4,944$ et $F^*_{\max} = 463/9 \simeq 51,444$.
4. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (P) est $x_1^* = 10,5,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 50,5$.
5. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (P) est $x_1^* = 10,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 50$.
6. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (P) est $x_1^* = 11,\ x_2^* \simeq 3,944$ et $F^*_{\max} = 50,444$.

7. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (P) est $x_1^* = 12,5\,,\ x_2^* = 3$ et $F^*_{\max} = 42,5$.