Convergence de v.a.r. et Théorèmes limites

Module MAP - Telecom nancy

Exemple introductif :
Dans un jeu de Pile ou Face, un joueur gagne 1 Euro s'il obtient Pile, et perd 0,75 Euro s'il obtient Face. Soit p la probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancé. On suppose de plus que les lancés sont indépendants.
Notons X_0 la fortune initiale du joueur, et X_n la fortune du joueur après le $n$ième lancé. Le joueur a le droit de jouer tant qu'il n'est pas ruiné. On construit ainsi une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un même espace probabilisable $(]0;+\infty[, \mathcal{B}(]0;+\infty[))$.
La question naturelle est la convergence de cette suite. Mais en quel sens ?

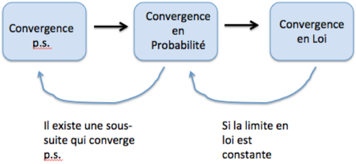
Soit une suite de variables $X_1, ..., X_n$ et X toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition

La suite $(X_n)_n$ converge vers la variable X de fonction de répartition F_X quand $n \to \infty$

- en loi si la suite des fonctions de répartition $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ tend vers F_X pour tout x pour lequel F_X est continue. On note : $X_n \overset{\text{Loi}}{\to} X$
- en probabilité si pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| < \epsilon) \to 1$ quand $n \to \infty$. On note : $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$
- presque sûrement si $X_n(\omega) \to X(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$ quand $n \to \infty$ sauf sur un ensemble de probabilité nulle. On note : $X_n \overset{p.s.}{\to} X$

Liens entre les types de convergence ;



Exemple : soit une suite de v.a. $(X_n)_{n>0}$ de lois continues définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$.

Convergence en loi : on détermine la fonction de répartition $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \frac{1}{\pi}[arctan(nt)]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}(arctan(nx) + \frac{\pi}{2})$.

Pour $x < 0$, $arctan(nx) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} -\frac{\pi}{2}$, donc $F_n(x) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 0$
Pour $x > 0$, $arctan(nx) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \frac{\pi}{2}$, donc $F_n(x) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 1$

Soit la v.a.r. constante $X \equiv 0$, sa fonction de répartition est
$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
donc $F_n(.) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} F_X(.)$ en tout point de continuité de F_X ;
$(X_n)_{n>0}$converge en loi vers X.

Convergence en probabilité : soit $\epsilon > 0$
$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = \int_{]-\infty;-\epsilon] \cup [\epsilon;+\infty[} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx = 2\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx =$
$2\int_{n\epsilon}^{+\infty} \frac{du}{\pi(1+u^2)} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ (changement de variable $u = nx$)
Donc $(X_n)_{n>0}$ converge en probabilité vers X.

1 Convergence de suites de v.a.r.

2 Théorèmes Limites

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ; soit un réel $a > 0$.

Alors $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{1}{a}\,\mathbb{E}(X)$.

Soit $I = \mathbb{I}_{\{X \geq a\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq a \Leftrightarrow \frac{X}{a} \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Puisque $X \geq 0$, $I \leq \frac{X}{a}$ et le passage à l'espérance nous donne :
$\mathbb{E}(I) \leq \mathbb{E}(\frac{X}{a})$. On calcule facilement $\mathbb{E}(I) = \mathbb{P}(X \geq a)$ et ainsi on obtient :
$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{1}{a}\,\mathbb{E}(X)$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire de moyenne $\mathbb{E}(X)$ et d'écart-type $\sigma > 0$. Pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{t^2}$.

On applique l'inégalité de Markov avec $a = t^2 > 0$ et $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ v.a. à valeurs positives. Alors :

$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2) \leq \dfrac{1}{t^2}\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \dfrac{1}{t^2} Var(X)$. Comme

$\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2\} \Leftrightarrow \{|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\}$, on obtient : $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{t^2}$.

Elle sert à borner certaines probabilités quand seuls les moments sont connus. C'est une borne très large mais valable pour toute loi !

Par exemple, pour une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, avec $t = 2\sigma$:

$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq 2\sigma\right) \leq 1/4$ alors que le calcul exact donne :

$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq 2\sigma\right) = 2(1 - \Phi(2)) \simeq 0,0456$.

Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et intégrables. Alors, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\overline{X_n} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1) \text{ en probabilité}$$

On peut établir $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\mu = \mu$ et $Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ grâce à l'indépendance. On applique l'inégalité de B-T :

$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to_{n\to+\infty} 0$. On a bien établi la convergence en probabilité.

Par exemple, si on jette indéfinininiment une pièce de monnaie équilibrée, la fréquence du nombre de Piles obtenus "se stabilise" vers 1/2.

Théorème Central Limite

Soit une suite de n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ indépendantes et de même loi (i.i.d.), d'espérance m et de variance σ^2. Soit la variable définie comme la moyenne $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors lorsque $n \to \infty$, avec Z variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \to_{n\to\infty} Z \text{ en loi}$$

Remarque : reécriture du TCL avec une somme de v.a.r. indépendantes de même loi $X_1, X_2, ..., X_n$.

On a : $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} n \times m = m$ (linéarité de l'espérance)

$Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n} n \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ (indépendance des v.a.r.)

$\sigma(\overline{X_n}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

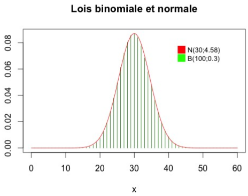
Alors $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - m}{\sigma} = \sqrt{n}\,\dfrac{\frac{X_1+...+X_n}{n} - m}{\sigma} = \sqrt{n}\,\dfrac{\frac{X_1+...+X_n - n.m}{n}}{\sigma} = \dfrac{X_1 + ... + X_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}}$

et le TCL peut s'écrire :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow_{n\to\infty} Z \text{ en loi}$$

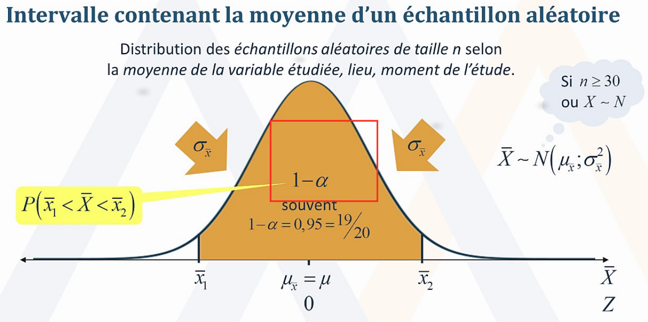
- Etabli par De Moivre, puis Laplace, version finale dûe à Lindenberg en 1922.
- Une v.a.r. résultant de la somme de plusieurs v.a.r. de même loi et mêmes paramètres, est distribuée selon une loi normale centrée réduite lorsque le nombre d'épreuves n tend vers l'infini.
- S'applique quelle que soit la loi des variables X_n !
- Première conséquence : grande importance de la loi normale ! de plus, les phénomènes dont la variation est engendrée par un nombre important de causes indépendantes sont susceptibles d'être modélisés par une loi normale.

- Seconde conséquence : approximation de certaines lois de probabilité par d'autres.
  Exemple : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite i.i.d. de loi $\mathcal{B}e(p)$; rappels :
  $\mathbb{E}(X_n) = p$; $\text{Var}(X_n) = p(1-p)$.
  Alors $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - p}{\sqrt{p(1-p)}} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} = Z_n \to_{n\to\infty} Z$ en loi
  On remarque que $X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, donc on approchera une loi binomiale par une loi normale centrée réduite quand n est grand et p éloigné de 0 et 1.
  En pratique dès que $n\,p > 15$, on approche la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale de paramètres $n.p$ et $\sqrt{n.p.(1-p)}$.



- Approximation d'une loi binomiale $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{L}(X) = \mathbb{N}(n \times p, \sqrt{n \times p \times (1-p)})$ si n est grand et p éloigné de 0 et 1 : $n \geq 30$, $n \times p \times (1-p) \geq 3$
- avec la correction de continuité : $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$.
- Approximation d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda \geq 16$.

- Troisième conséquence : grande utilité en estimation !
  On cherche à estimer une moyenne inconnue, on prélève un échantillon de taille n. Soit on a des informations sur la loi dans la population ($X \sim \mathcal{N}$?), soit on n'en a pas. Dans ce cas, seul le TCL peut nous permettre d'inférer les informations données par l'échantillon dans la population globale : si n suffisamment grand, on pourra faire l'approximation de loi normale.



Exemple : dans une file d'attente 10 personnes sont devant vous. Par observation vous savez que le temps de service T d'une personne est en moyenne d'une minute et que l'écart type est aussi d'une minute. Quelle est la probabilité (approchée au moyen du TCL) que vous attendiez plus de 15 mn dans la queue ?

Votre temps d'attente est donc $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} T_k$. On suppose aussi que les T_k sont indépendantes. On cherche $P(S_{10} > 15)$, il faut se ramener à la variable Z_{10} où :

$$Z_{10} = \sqrt{10}\frac{\overline{T}_{10} - E(T)}{\sigma(T)}, \ \overline{T}_{10} = \frac{1}{10}S_{10}$$

$$\begin{aligned}
P(S_{10} > 15) &= P\left(\overline{T}_{10} > 1.5\right) \\
&= P(\overline{T}_{10} - E(T) > 0.5) = P(\frac{\overline{T}_{10} - E(T)}{\sigma(T)} > 0.5) \\
&= P(\sqrt{10}\frac{\overline{T}_{10} - E(T)}{\sigma(T)} > 0.5\sqrt{10}) = P(Z_{10} > 0.5\sqrt{10}) \\
&\simeq P(Z > 0.5\sqrt{10}), \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&\simeq 1 - P(Z \leq 0.5\sqrt{10}) = 1 - \Phi(0.5\sqrt{10}) \simeq 1 - 0.943 = 0.057
\end{aligned}$$