Télécom-Nancy 2020-2021
Module MAP - Apprentissage

Probabilités, feuille 3, correction

Exercice 1 A, B et C désignent 3 produits bancaires. Dans la population des clients d'une banque, 40 % des individus ont le produit A, 80 % B, 60 % C, 30 % A et B, 28 % A et C, 50 % B et C, 20 % A, B et C. On extrait au hasard un individu de la population.

1. Calculer la probabilité qu'il ait au moins un des produits.

   L'expérience aléatoire consiste à prélever au hasard un individu de la population des clients de la banque. On note A(resp. B, C) les événements "Le client tiré possède le produit A (resp. B, C)". Alors d'après l'énoncé, on a : $\mathbb{P}(A) = 0,40; \mathbb{P}(B) = 0,80; \mathbb{P}(C) = 0,60; \mathbb{P}(A \cap B) = 0,30; \mathbb{P}(A \cap C) = 0,28; \mathbb{P}(B \cap C) = 0,50; \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,20$.

   On cherche $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$. La formule de Poincaré nous permet d'écrire :
   $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
   $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0,4 + 0,8 + 0,60 - 0,30 - 0,50 - 0,28 + 0,20 = 0,92$

2. Y a-t-il indépendance entre les différents produits ?

   D'une part $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,30$. D'autre part $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = 0,40 \times 0,80 = 0,32$.
   $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

   D'une part $\mathbb{P}(A \cap C) = 0,28$. D'autre part $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = 0,40 \times 0,60 = 0,24$.
   $\mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(C)$ donc A et C ne sont pas indépendants.

   D'une part $\mathbb{P}(B \cap C) = 0,50$. D'autre part $\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C) = 0,80 \times 0,60 = 0,48$.
   $\mathbb{P}(B \cap C) \neq \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$ donc B et C ne sont pas indépendants.

   On conclue que les événements ne sont pas deux à deux indépendants, et donc ils ne sont pas non plus mutuellement indépendants.

Exercice 2 *Problème de rencontres (problème de Montmort)*

Lors d'un bal auquel participent n couples. Pour chaque cavalière, le choix du cavalier pour la première danse se fait au hasard (de manière uniforme parmi toutes les possibilités). On cherche à calculer la probabilité de l'événement A : "au moins un couple se retrouve pour la première danse".

1. Combien y a-t-il de possibilités pour l' épreuve qui consiste pour chaque cavalière à choisir un cavalier ?

   Si on numérote les couples de 1 à n, on pourra se rendre compte qu'un choix correspond au tirage d'une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$: la cavalière du couple k dansant la première danse avec le cavalier du couple $\sigma(k)$. Notons Ω l'ensemble des permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$. $Card(\Omega) = n!$

2. On note E_i l'événement "le couple i se retrouve pour la première danse", $i = 1, ..., n$. Que peut-on dire sur ces événements et leur lien avec A ?

On calcule facilement $\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, ..., n$ le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. On peut écrire l'événement A en fonction des E_i : $A = \cup_{i=1}^{n} E_i$.

3. D'une manière générale, soit $k \geq 1$, on note $E_{i_1,\dots,i_k} = E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}$ l'événement : "les k couples i_1, .., i_k se retrouvent pour la première danse". Montrer que $P(E_{i_1,\dots,i_k}) = (n-k)!/n!$.

   $P(E_{i_1,\dots,i_k}) = (n-k)!/n!$, car c'est le nombre de permutations sur les $(n-k)$ couples qui ne se retrouvent pas, sur le nombre de permutations totales.

4. Avec la formule de Poincaré et les questions précédentes, calculer $P(A)$ puis en trouver une approximation pour n grand en utilisant la série exponentielle ($e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$).

   Appliquons la formule de Poincaré : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\cdots,n\}} \mathbb{P}(E_{i_1,\dots,i_k})$

   Le nombre de sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_k\}$ extraits de $\{1, \cdots, n\}$ est égal à C_n^k à k fixé.

   $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} 1/k! = 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4!....$

   Pour simplifier les calculs, passons au complémentaire : $\overline{A}$ = "Aucun couple ne se retrouve pour la première danse" :

   $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} 1/k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k! \to_{n\to\infty} 1/e$ en utilisant le développement limité de l'exponentielle.

   Ainsi pour n suffisament grand, on peut procéder à l'approximation : $\mathbb{P}(A) \simeq 1 - 1/e \simeq 0.63$.

Exercice 3 En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football (les fameux *Diables rouges*) est composée de sept Flamands et quatre Wallons.
Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité qu'il soit flamand.

Notons l' événement suivant : T = "Les frites mangées par le joueur surpris sont traditionnelles", ainsi $\overline{T}$ sera "Les frites mangées par le joueur surpris sont new-look". On note aussi : F = "Le joueur surpris est flamand", ainsi $\overline{F}$ sera "Le joueur surpris est wallon".
On connait : $\mathbb{P}(T/F) = 0,65; \mathbb{P}(T/\overline{F}) = 0,75$. Donc $\mathbb{P}(\overline{T}/F) = 0,35; \mathbb{P}(\overline{T}/\overline{F}) = 0,25$.
De plus, $\mathbb{P}(F) = \dfrac{7}{11} \simeq 0,64$ et $\mathbb{P}(\overline{F}) = \dfrac{4}{11} \simeq 0,36$.

On cherche $\mathbb{P}(F/\overline{T})$.
$(F, \overline{F})$ formant un système complet d'événements, on peut écrire en appliquant le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}(F/\overline{T}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{T}/F).\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(\overline{T}/F).\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(\overline{T}/\overline{F}).\mathbb{P}(\overline{F})} = \frac{0,35.0,64}{0,35.0,64 + 0,25.0,36} = 0,71$$

Exercice 4

Quand on téléphone entre 18 heures et 19 heures chez Pierre-Yves, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des importuns. Quand il est absent, il l'utilise toujours.

1. Calculer la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là.

   L'expérience aléatoire est ici : "téléphoner à Pierre-Yves entre 18h et 19h". Considérons les événements A="tomber sur son répondeur", et B="Pierre-Yves est présent". Nous avons les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(A) = 0.9$; $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{2}{3}$; $\mathbb{P}(A/\overline{B}) = 1$.
   On peut décomposer $\mathbb{P}(A)$ de la façon suivante :

   $$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

   donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(A/B) + (1 - \mathbb{P}(B)).\mathbb{P}(A/\overline{B})$

   $0.9 = \dfrac{2}{3}\mathbb{P}(B) + 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(B)$

   donc $\mathbb{P}(B) = 0.3$
2. On tombe sur le répondeur, calculer la probabilité pour qu'il soit présent.

   $$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(A/B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2/3 \times 0.3}{0.9} = \frac{2}{9}$$

Exercice 5 Soit p la probabilité qu'un moteur d'avion tombe en panne lors d'un vol. On suppose qu'un avion vole encore si au moins la moitié de ses moteurs fonctionne. Pour quelles valeurs de p un avion bimoteur présente-t-il moins de risques qu'un avion quadrimoteur ?

On note B l'événement "un avion bimoteur tombe en panne", et Q l'événement "un avion quadrimoteur tombe en panne". On peut faire l'hypothèse d'indépendance des moteurs.

$\mathbb{P}(B) = p^2$ car 2 moteurs doivent être en panne simulatanément et il y a indépendance.
$\mathbb{P}(Q) = p^4 + 4p^3(1 - p)$ car il est possible que 4 moteurs soient en panne en même temps, ou 3 en panne, un fonctionnant, avec $C_4^3 = 4$ possibilités.

Alors l'avion bimoteur présente moins de risques que l'avion quadrimoteur si et seulement si
$\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(Q)$. Ceci est équivalent à : $p^2 < p^4 + 4p^3(1 - p) = 4p^3 - 3p^4$
$\Leftrightarrow -3p^4 + 4p^3 - p^2 > 0$
$\Leftrightarrow -3p^2 + 4p - 1 > 0$
on cherche les racines du trinôme : $\Delta = 4^2 - 4(-3)(-1) = 4$, donc il y a deux racines réelles :
$p_1 = \dfrac{-4+2}{2.(-3)} = 1/3$ et $p_2 = \dfrac{-4-2}{2.(-3)} = 1$, ainsi l'inégalité est vérifiée pour $1/3 < p < 1$.

Exercice 6 Dans un labyrinthe en forme de T, un cobaye peut tourner à gauche et obtenir de la nourriture, ou tourner à droite et recevoir une légère décharge électrique. On admet qu'au premier essai, le cobaye a la même probabilité d'aller à droite ou à gauche. Quant le cobaye vient de recevoir de la nourriture, on admet qu'à l'essai suivant, il tourne à gauche avec une probabilité de 0,7. En revanche, quand le cobaye vient de recevoir une décharge électrique, on admet qu'à l'essai suivant, il tourne à gauche avec une probabilité de 0,9.

1. Avec quelle probabilité P_1 le cobaye tourne-t-il à gauche au second essai ?
   Evénements : G_i= "aller à gauche à l'essai i" ; D_i= "aller à droite à l'essai i". Par hypothèse : $\mathbb{P}(G_{i+1}/G_i) = 0,7$; $\mathbb{P}(D_{i+1}/G_i) = 0,3$; $\mathbb{P}(G_{i+1}/D_i) = 0,9$; $\mathbb{P}(D_{i+1}/D_i) = 0,1$.

$G_2 = (G_1 \cap G_2) \cup (D_1 \cap G_2)$ et $(G_1 \cap G_2) \cap (D_1 \cap G_2) = (G_1 \cap D_1) \cap G_2 = \emptyset$

$P_1 = \mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(D_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2/G_1) + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(G_2/D_1) = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,9 = 0,8$
et donc $\mathbb{P}(D_2) = 0,2$.

2. Sachant que le cobaye tourne à gauche au second essai, quelle est la probabilité P_2 pour qu'il ait tourné à droite au premier essai ?
   $P_2 = \mathbb{P}(D_1/G_2) = \dfrac{\mathbb{P}(D_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)} = \dfrac{\mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(G_2/D_1)}{\mathbb{P}(G_2)} = \dfrac{0,5 \times 0,9}{0,8} = \dfrac{45}{80} = 0,56$
3. Avec quelle probabilité P_3 le cobaye tourne-t-il à gauche au troisième essai ? (on admettra que lors de ce troisième essai, le cobaye n'est influencé que par le résultat du deuxième essai).

   $G_3 = (G_2 \cap G_3) \cup (D_2 \cap G_3)$ et $(G_2 \cap G_3)$ et $(D_2 \cap G_3)$ sont incompatibles.

   $P_3 = \mathbb{P}(G_3) = \mathbb{P}(G_2 \cap G_3) + \mathbb{P}(D_2 \cap G_3) = \mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(G_3/G_2) + \mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(G_3/D_2) = 0,8 \times 0,7 + 0,2 \times 0,9 = 0,74$

Exercice 7 On a perdu une aiguille dans une botte de foin mesurant 70 cm par 30 cm par 30 cm et on souhaite la retrouver. Une personne fouille une section cubique de la botte ayant 20 cm de côté. Quelle est la probabilité que l'aiguille soit dans cette section ?

On peut assez facilement faire un dessin en dimension 3 : on note S la section, et B la botte de foin. Ainsi la représentation géométrique nous donne : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{V(S)}{V(B)} = \dfrac{20^3}{70.30.30} = \dfrac{8000}{63000} = 0,13$

Exercice supplémentaire non corrigé en T.D.

Exercice 8
Mme Durand est responsable du club de boxe féminin de son village et, souhaitant recruter en vue des championnats du canton qui auront lieu à la fin de l'année, elle s'est renseignée : ses nouveaux voisins, les Dupont ont dix enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'ils aient dix filles sachant que Mme Durand a déjà aperçu par la fenêtre neuf fillettes chantant en choeur ?
2. Après enquête approfondie, Mme Durand est sûre que les neuf enfants les plus agés des Dupont sont des filles ; quelle est la probabilité que les voisins aient dix filles ?