

**Mathématiques numériques (FISA 1A)**  
*examen - mai 2023*

Durée : 1H30

Remarque : documents (sauf antisèche), téléphones portables, interdits!

**1. Système linéaire** (8 points)

- (a) Effectuer une factorisation  $LU$  (sans échange d'équations) sur la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -10 & 2 \\ 15 & 28 & -5 \end{bmatrix}$$

Donner le détail des 2 étapes de Gauss. Vérifier votre factorisation en effectuant le produit matriciel  $L \times U$  (détailler ce calcul).

- (b) Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire  $Ax = b$ , où  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix}$ .

**2. Arithmétique flottante et système linéaire : importance du pivotage dans la méthode de Gauss** (12 points)

- (a) On considère l'ensemble de flottants  $\mathbb{F}(10, 4, -10, 10)$ .
- Calculer les nombres caractéristiques  $M$ ,  $m$  et  $u$ .
  - Que valent (justifier)  $a = fl(5 \cdot 10^{-5})$ ,  $b = fl(1 \oslash a)$ ,  $c = fl(-1 \ominus b)$ ,  $d = 1 \ominus a$
- (b) "Montrer" que la solution (exacte) du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 5 \cdot 10^{-5}x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

est  $x = y = \frac{1}{1+5 \cdot 10^{-5}} \simeq 1 - 5 \cdot 10^{-5} + 25 \cdot 10^{-10} = 0.9999500025$ . Quelle est la série très connue permettant de calculer cette approximation ? Si on veut être un peu plus précis quel terme faudrait-t-il additionner ou retrancher au résultat déjà obtenu (ne pas faire l'opération, la précision actuelle suffit pour les besoins de cet exercice) ?

- (c) Résoudre  $(S)$  dans  $\mathbb{F}(10, 4, \dots)$  avec la méthode de Gauss **sans** échange d'équation (il faut donc éliminer le coefficient 1 de  $x$  dans la deuxième équation à l'aide de la transformation  $equ_2^{(1)} := equ_2 - coef \times equ_1$ ). Aide : les calculs (non triviaux) dans  $\mathbb{F}(10, 4, -10, 10)$  ont été faits dans la question 1.
- (d) La méthode de Gauss standard (appelée "pivot partiel") consiste à rechercher le pivot le plus grand en valeur absolue (dans la colonne  $k$  à l'étape  $k$ ). Dans le cas du système  $(S)$  cela revient à le résoudre en intervertissant les deux équations :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5 \cdot 10^{-5}x + y = 1 \end{cases}$$

De même que précédemment résoudre avec la méthode de Gauss dans  $\mathbb{F}(10, 4, -10, 10)$  (même remarque : les calculs non triviaux ont été faits dans la question 1).

- (e) Conclure.