Module Mathématiques Appliquées: Probabilités Telecom Nancy

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne)
sophie.mezieres@univ-lorraine.fr

2020-2021

Organisation du Module MAP

Enseignements prévus :

- CM/TD 42 h
- Supports de cours sur ARCHE

Evaluation :

- 1 test de 1h (t, noté sur 20) le 18/03/21
- 1 examen de 2 heures (e, noté sur 20) le 01/06/21
- 1 note de participation en TD (p, entre 0 et 1 point)

Note finale :

$$N = (t + 2 \times e)/3 + p$$

Plan du cours

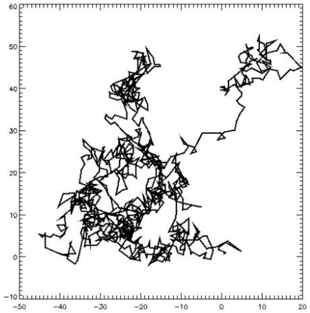
Chapitres :

1. Analyse combinatoire
2. Le modèle probabiliste
3. Les variables aléatoires et lois de probabilités
4. Eventuellement : Premiers pas en statistique : statistique inférentielle et estimation de paramètres

Introduction

Observation de phénomènes aléatoires dans la nature
$\Rightarrow$ notion de "probabilité" (latin *probabilitas* : opposé de certitude)

Exemple : le mouvement brownien décrit le mouvement erratique de très petites particules en suspension dans un liquide (botaniste R. Brown 1827, grains de pollen) $\Rightarrow$ processus stochastique ; les accroissements entre deux instants de temps peuvent être décrits par des variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne

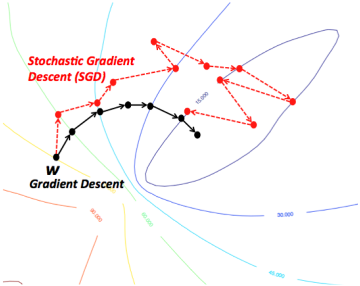


(hors programme)
(au programme)

Utilité en informatique I

1. Analyse des phénomènes aléatoires (sensibilité aux perturbations, aux conditions initiales...), tests de fiabilité et qualité
2. Enquêtes (opinion, sondage...), analyse des marchés financiers
3. Analyse des données, big data, data-mining, Intelligence Artificielle
4. Analyse de la complexité d'algorithmes
5. "randomisation" de certains algorithmes (exemple basique : choix aléatoire du pivot dans l'algorithme de tri rapide) : algorithmes stochastiques (exemple de la descente du gradient)

Utilité en informatique II



6. Prévision de la croissance de structures de données (dimensionnement)
7. Simulations stochastiques (générateur de nombres aléatoires...)

Module Mathématiques Appliquées : Probabilités
Telecom Nancy

Principes fondamentaux d'analyse combinatoire

Rudiments d'analyse combinatoire

Principe de dénombrement 1 : Si une expérience peut avoir m résultats, une seconde expérience peut en avoir n, alors les deux expériences ensemble auront nm résultats.

Exemple : # plaques minéralogiques de 7 caractères ; les 3 premiers étant des lettres, les 4 derniers des chiffres.

Rudiments d'analyse combinatoire

Principe de dénombrement 1 : Si une expérience peut avoir m résultats, une seconde expérience peut en avoir n, alors les deux expériences ensemble auront nm résultats.

Exemple : # plaques minéralogiques de 7 caractères ; les 3 premiers étant des lettres, les 4 derniers des chiffres.
$\hookrightarrow 26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$ *plaques (nombre d'arrangements avec répétition)*

Ce principe se généralise à toute expérience pouvant se décomposer en k épreuves élémentaires successives. Attention toutefois à éviter la redondance !

Exemple : dans un jeu de 32 cartes, quel est le nombre de mains de 8 cartes comprenant au moins un roi ?

La première idée peut être la suivante :

- Nombre de choix pour le roi : 4
- puis choix des 7 autres cartes parmi les 31 restantes : nombre de combinaisons de 7 parmi 31 $= C_{31}^{7}$ (on reviendra sur la formule...)

Attention ! les redondances dans ce cas sont possibles ! par exemple :

$$\{\text{roi de } \heartsuit, \text{roi de } \spadesuit, 2\spadesuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 7\diamondsuit, \text{valet de } \diamondsuit, 10\clubsuit\}$$
$$\{\underbrace{\text{roi de } \spadesuit}_{op1}, \underbrace{\text{roi de } \heartsuit, 2\spadesuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 7\diamondsuit, \text{valet de } \diamondsuit, 10\clubsuit}_{op2}\}$$

Principe de dénombrement 2 :

Soit E l'ensemble fini des résultats d'une expérience. Si on peut le décomposer de la façon suivante : $E = F \cup G; F \cap G = \emptyset$, alors $Card(E) = Card(F) + Card(G)$.

Ce principe se généralise à toute décomposition en n ensembles disjoints.

Principe de dénombrement 2 :

Soit E l'ensemble fini des résultats d'une expérience. Si on peut le décomposer de la façon suivante : $E = F \cup G; F \cap G = \emptyset$, alors $Card(E) = Card(F) + Card(G)$.

Ce principe se généralise à toute décomposition en n ensembles disjoints.

On peut finir l'exemple précédent en utilisant ce principe : soit E l'événement "au moins un roi" et soient E_i les événements "i roi(s)", $i = 1, 2, 3, 4$.

$Card(E_1) = 4 \times C_{28}^7$ (choix du roi + choix des 7 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)

$Card(E_2) = C_4^2 \times C_{28}^6$ (choix des 2 rois + choix des 6 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)

$Card(E_3) = C_4^3 \times C_{28}^5$ (choix des 3 rois + choix des 5 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)

$Card(E_4) = 1 \times C_{28}^4$ (les 4 rois + choix des 4 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)

Calcul final :

$Card(E) = Card(E_1) + Card(E_2) + Card(E_3) + Card(E_4)$
$= 4 \times 1184040 + 6 \times 376740 + 4 \times 98280 + 20475 = 7410195$

Considérons un ensemble E de cardinal n ($\text{Card(E)} = \#\ \text{E} = n$) .
Question 1 : De combien de façons peut-on ordonner les éléments de E ?

Definition

Une **permutation** est une suite ordonnée des n éléments d'un ensemble.

Nombre de permutations : $P_n = n!$

Démonstration : n choix pour le premier élément, $n - 1$ pour le second, ... jusqu'à 1 pour le dernier. D'où : $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.
Rappel : c'est exactement la définition de la factorielle avec la convention : $0\,! = 1$

Exemple : un cours est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un classement est établi selon la note obtenue à l'examen (on suppose toutes les notes différentes).
 # classements possibles : $10\,! = 3\;628\;800$
 # classements possibles par sexe : $6\,!\,4\,! = 720 \times 24 = 17\;280$ *(principe du dénombrement)*
Comment faire si on souhaite juste connaitre le classement des sexes ?

Exemple : un cours est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un classement est établi selon la note obtenue à l'examen (on suppose toutes les notes différentes).
 # classements possibles : 10 ! = 3 628 800
 # classements possibles par sexe : 6 ! 4 ! = 720 × 24 = 17 280 (principe du dénombrement)
Comment faire si on souhaite juste connaitre le classement des sexes ?

Application : nombre de permutations d'objets partiellement indiscernables
n objets tels que $n_1, \ldots, n_r$ sont indiscernables entre eux

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$$

Dans l'exemple on souhaite simplement connaître le classement des sexes sans se soucier du nom des élèves : $\frac{10!}{6!\,4!} = 210$ *classements possibles*

Question 2 :

De combien de façons peut-on extraire un sous-groupe de p éléments de E ?

▷ soit on tient compte de l'ordre :

Definition

Un **arrangement** de p éléments parmi n est une suite ordonnée des p éléments choisis.

Nombre d'arrangements :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$$

Démonstration : même raisonnement que précédemment mais on s'arrête au $p$ième élément.

Exemple : # nombres de 3 chiffres (de 1 à 9) différents = $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

▷ soit on ne tient pas compte de l'ordre :

Definition

Une **combinaison** de p éléments parmi n est un sous-ensemble de p éléments choisis.

Nombre de combinaisons : $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Attention à l'écriture..

Démonstration : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$, car toutes les permutations de p éléments ne forment qu'une seule combinaison.

Exemple : Dans un groupe de 20 personnes, on veut former un comité de 3 personnes. # comités possibles $= C_{20}^3 = 1140$

Quelques propriétés :

1. $C_n^0 = C_n^n = 1\,;\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
2. $C_n^p = C_n^{n-p}$
3. $(1 \leq p \leq n-1) C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k\, y^{n-k}$

Démonstration :

- par récurrence sur n (exercice) ;
- par dénombrement : il est clair qu'on obtient bien toutes les puissances $x^k y^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$ mais avec quel coefficient pour chacune d'elles ? Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé. Pour obtenir un terme de ce type (avec coefficient 1), il suffit de choisir dans les n facteurs $(x+y)$: $\underbrace{(x+y)}_{1}\underbrace{(x+y)}_{2}\ldots\underbrace{(x+y)}_{n}$
  k d'entre-eux où l'on choisit "x" (et bien sûr "y" dans les $n-k$ autres) et on a C_n^k possibilités pour ce choix .

Application : trouver le nombre de parties (sous-ensembles de toutes tailles) d'un ensemble de n éléments.

Application : trouver le nombre de parties (sous-ensembles de toutes tailles) d'un ensemble de n éléments.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Si on note F_i les sous-ensembles de parties de E de taille i, pour $i = 0, ..., n$; ces ensembles sont incompatibles et forment une partition de $\mathcal{P}(E)$: $\mathcal{P}(E) = F_0 \cup F_1 \cup ... \cup F_n$.
Pour obtenir les parties de taille i de F_i, on doit choisir i éléments parmi n, donc $Card(F_i) = C_n^i$.
Ainsi :
$Card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = (1+1)^n = 2^n$ d'après la formule du binôme.