

TELECOM Nancy (1A) — Mathématiques Appliquées pour l'Informatique

Logique des propositions : syntaxe et sémantique

Exercice 1

On considère l'ensemble $P = \{p, q, r, s, t\}$ de variables propositionnelles. Pour chacune des formules suivantes donner

- l'arbre abstrait de la formule si la formule appartient à $Prop(P)$, c'est-à-dire si la formule est bien formée
- une expression infixée, débarrassée des parenthèses superflues en tenant compte des priorités des connecteurs logiques (par ordre de priorité décroissante $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ et \Leftrightarrow et "parenthésage" gauche-droite)

1. $\neg((q \Rightarrow r) \vee p)$
2. $((p \wedge q) \neg r) \Rightarrow p$
3. $((\neg p \Rightarrow (\neg r \vee q)) \Rightarrow p)$
4. $(\neg \neg(q \Rightarrow r) \vee (\neg q \Rightarrow \neg r))$
5. $(p \vee (\neg q \wedge (r \wedge s)))$
6. $((p \wedge (\neg q)) \vee r) \Rightarrow (s \wedge t)$

Exercice 2

Cet exercice a seulement pour but de rappeler la terminologie relative à la logique des propositions. On considère la formule α suivante : $\alpha = [(a \Rightarrow b) \wedge ((c \vee \neg b) \Rightarrow a)] \Rightarrow (b \wedge c)$

1. Quelles sont les variables propositionnelles intervenant dans α ? Sur quelles variables propositionnelles doit-on connaître la valeur d'une valuation pour connaître la valeur correspondante de α ?
2. Donner la sémantique de cette formule α .
3. Cette formule admet-elle un modèle? Donner un exemple de modèle de cette formule. Cette formule est-elle une tautologie? Est-elle contradictoire?

Exercice 3

La logique des propositions est couramment utilisée pour modéliser des énoncés exprimés dans les langages naturels (français, anglais, ...). Dans le contexte des langages naturels, une *proposition* est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse.

Par exemple :

Les affirmations suivantes sont des propositions :

"2 plus 3 font 5"

" π est compris entre 4 et 5"

alors que les affirmations suivantes ne le sont pas :

"la présente affirmation est fausse"

"tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré"

La première affirmation conduit à un paradoxe, la seconde est une phrase trop imprécise, il faudrait préciser à quel ensemble appartient le nombre dont on prend le carré (\mathbb{R} ou \mathbb{C} ...).

1. En notant p et q les affirmations suivantes :

p = "Jean est fort en maths"

q = "Jean est fort en chimie"

Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres p et q et des connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$.

- (a) "Jean est fort en maths mais faible en chimie"
- (b) "Jean n'est fort ni en maths ni en chimie"
- (c) "Jean est fort en maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en maths"
- (d) "Jean est fort en maths s'il est fort en chimie"
- (e) "Jean est fort en chimie et en maths ou il est fort en chimie et faible en maths"

2. En notant p, q et r les affirmations suivantes :

p = "Pierre fait des maths"
 q = "Pierre fait de la chimie"
 r = "Pierre fait de l'anglais"

représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres p, q, r et des connecteurs usuels.

- (a) "Pierre fait des maths et de l'anglais mais pas de la chimie"
- (b) "Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'anglais"
- (c) "il est faux que Pierre fasse de l'anglais sans faire de maths"
- (d) "il est faux que Pierre ne fasse pas des maths et fasse quand même de la chimie"
- (e) "il est faux que Pierre fasse de l'anglais ou de la chimie sans faire de maths"
- (f) "Pierre ne fait ni anglais ni chimie mais il fait des maths"

3. Enoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d'employer l'expression : "...il est faux ..."

- (a) "si demain il pleut ou il fait froid je ne sortirai pas"
- (b) "le nombre 522 n'est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7"
- (c) "ce quadrilatère n'est ni un rectangle ni un losange"
- (d) "si Paul ne va pas travailler ce matin il va perdre son emploi"

Exercice 4

Dans les formules suivantes sélectionner les tautologies et examiner les raisonnements logiques sous-jacents.

$$\begin{aligned}
 &\neg\neg x \Leftrightarrow x, \quad x \Rightarrow x, \quad (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (y \Rightarrow x), \quad (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x), \\
 &(\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y), \quad \neg x \Rightarrow (x \Rightarrow y), \quad \neg x \vee x, \quad \neg(\neg x \wedge x), \\
 &[x \Rightarrow (y \Rightarrow (z \Rightarrow t))] \Rightarrow [(y \Rightarrow x) \Rightarrow ((x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow t))], \\
 &(x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y) \Rightarrow z), \quad (x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \Rightarrow \mathcal{F}), \\
 &(x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((\neg y \wedge \neg z) \Rightarrow \neg x)
 \end{aligned}$$

Exercice 5

Soit \mathcal{A} un ensemble de formules de la logique des propositions et α une formule de la logique des propositions, on rappelle que $\mathcal{A} \models \alpha$ signifie que α est une conséquence logique de \mathcal{A} , c'est-à-dire que tout modèle de l'ensemble de formules \mathcal{A} est un modèle de α .

Pour chacun des ensembles de formules \mathcal{A} et des formules α suivants déterminer si $\mathcal{A} \models \alpha$.

- 1. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b, b \Rightarrow a, a \vee b\}, \alpha = a \wedge b$
- 2. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}, \alpha = b \Rightarrow a$
- 3. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}, \alpha = a \vee \neg a$
- 4. $\mathcal{A} = \{a \wedge \neg b, \neg a \wedge b\}, \alpha = a$

Exercice 6

Soit \mathcal{A} un ensemble de formules et α et β deux formules.

- 1. Montrer que $\mathcal{A} \models \alpha$ si et seulement si $\mathcal{A} \cup \{\neg\alpha\}$ est contradictoire.
- 2. Montrer que $\mathcal{A} \cup \{\alpha\} \models \beta$ si et seulement si $\mathcal{A} \models \alpha \Rightarrow \beta$

Exercice 7

Soient f_1, \dots, f_n et g des formules, montrer que $\{f_1, \dots, f_n\} \models g$ si et seulement si la formule $f_1 \wedge \dots \wedge f_n \Rightarrow g$ est une tautologie.