TELECOM Nancy *(ESIAL)*
Maths Numériques

feuille 3 : sur la convergence des H-means

L'algorithme H-means peut s'écrire :

> $\Pi^{(0)}$ étant donnée
> **pour** $m = 1, 2, ...$
> $\mathcal{C}^{(m)}$ = barycentres des classes $\Pi^{(m-1)}$
> $\Pi^{(m)}$ = partition obtenue après la phase de réaffectation

On considère alors la suite des inerties suivantes :

$$I_1 = I(\mathcal{C}^{(1)}, \Pi^{(0)}), I_2 = I(\mathcal{C}^{(1)}, \Pi^{(1)}), I_3 = I(\mathcal{C}^{(2)}, \Pi^{(1)}), I_4 = I(\mathcal{C}^{(2)}, \Pi^{(2)}), \dots$$

où les inerties successives, $I_{2m-1} = I(\mathcal{C}^{(m)}, \Pi^{(m-1)})$ et $I_{2m} = I(\mathcal{C}^{(m)}, \Pi^{(m)})$ sont obtenues lors de l'itération m, suite, respectivement, au barycentrage puis à la réaffectation. Les deux exercices de cette feuille ont pour but de montrer que cette suite est décroissante.

Exercice 1 *H-means phase de réaffectation*

Montrer que, lors de la phase de réaffectation, l'inertie diminue strictement si au moins un point change de classe. En déduire que :

$$I(\mathcal{C}^{(m)}, \Pi^{(m)}) \leq I(\mathcal{C}^{(m)}, \Pi^{(m-1)})$$

Exercice 2 *Théorème de Huyghens*

Soient n vecteurs de $\mathbb{R}^p$ notés x_i, $i = 1, \cdots, n$. On désigne par $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ le barycentre de ces points et on note $I(y) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y\|^2$ l'inertie de ces points par rapport à un point $y \in \mathbb{R}^p$ donné.

1. Montrer que :
$$I(y) = I(g) + n\|y - g\|^2, \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^p.$$
   Aide, compléments, rappels :
   (a) $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}$ est la norme euclidienne du vecteur x ;
   (b) $\|x - y\|$ est la distance euclidienne entre x et y ;
   (c) $(x|y) := \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$ est le produit scalaire usuel entre les vecteurs x et y. Il possède les propriétés suivantes :
      i. $(x|y) = (y|x)$
      ii. $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$
      iii. $(x|x) = \|x\|^2$
      iv. $(x|y) = \|x\|\|y\| \cos(\widehat{x, y})$
   (d) Dans $I(y)$ on peut développer les termes $\|x_i - y\|^2$ en utilisant $\|x_i - y\|^2 = \|(x_i - g) - (y - g)\|^2$ puis en développant cette norme au carré comme un produit scalaire.
2. En déduire que l'inertie diminue dans la phase de barycentrage, c'est à dire que :
$$I(\mathcal{C}^{(m+1)}, \Pi^{(m)}) \leq I(\mathcal{C}^{(m)}, \Pi^{(m)})$$