# Variables aléatoires absolument continues

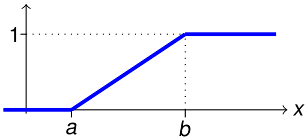
Module MAP en Apprentissage - Telecom nancy

## Definition

Soit un espace de probabilité $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ et une v.a.r. $X$ définie sur cet espace. On dit que $X$ est absolument continue (ou continue à densité) s'il existe une fonction $f_x$ positive et intégrable, appelée fonction de densité, telle que

$$\forall A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx.$$

Cette intégrale est définit au sens de Lebesgue.
On peut obtenir également une caractérisation de la v.a. par la fonction de répartition, qui est maintenant continue. *Exemple : loi uniforme sur* $[a, b]$



On dit qu'une v.a. est à densité si sa fonction de répartition vérifie :
(i) $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$,
(ii) $F_X$ est $C^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points [a].
Sa dérivée est alors égale presque partout à la fonction de densité : une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, et telle que

$$f_X = F'_X$$

sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

---
*a*. presque partout dérivable

Pour montrer qu'une fonction est une fonction de répartition, il faut montrer qu'elle est croissante avec pour limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ valant 0 et 1.

- La densité caractérise la loi de la variable $X$.

## Caractérisation de la densité $f_X$ d'une v.a. $X$ continue

1. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $f_X$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx = 1$

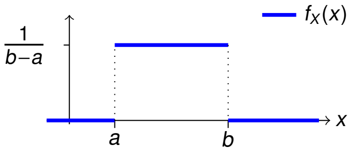
- Réciproque : Pour qu'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^n$ soit une densité de probabilité, il faut et il suffit que $f$ soit positive et d'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ égale à 1.
- Remarque : une v.a. admet une infinité de densités de probabilité puisque l'on peut modifier sa valeur en un nombre fini de points (toutes les densités produiront la même fonction de répartition). On parle usuellement "abusivement" de la densité d'une v.a.r.

Nous nous plaçons pour le moment sur $\mathbb{R}$, nous verrons les vecteurs aléatoires plus loin.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

*Exemple de la loi uniforme* : Soient $a, b$ deux réels tels que $-\infty < a < b < +\infty$. La variable $X$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ ($\mathcal{L}(X) = \mathcal{U}_{(a,b)}$) lorsque la densité de probabilité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$



*Vérifions que la fonction $f$ donnée est bien une densité de probabilité :*

*Vérifions que la fonction f donnée est bien une densité de probabilité :*

$f(x) = \frac{1}{b-a} \geq 0$ *si* $x \in [a,b]$*, et* $f(x) = 0 \geq 0$ *si* $x \notin [a,b]$ *donc* $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$*.*

$f/]-\infty, a[$*,* $f/[a,b]$*,* $f/]b,+\infty[$ *sont constantes donc continues, donc* $f$ *est continue sur* $\mathbb{R}/\{a,b\}$*.*

*Sous réserve de convergence,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} 0dx.$$

*La première intégrale est impropre en* $-\infty$ *mais converge en 0* ($\int_z^a 0dx = 0 \to_{z\to-\infty} 0$)*. De même pour la dernière. Donc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$$

*Fonction de répartition :*

*Fonction de répartition :* $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ *donc on va dissocier les cas en fonction des différentes expressions de la densité.*

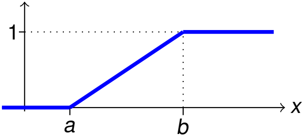
Si $x < a$ : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$

Si $a \leq x \leq b$ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Si $x > b$ : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{0}^{x} 0dt = 1.$

Donc : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a < x \leq b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$



# Qu'est-ce que le cas continu change pour les calculs ?

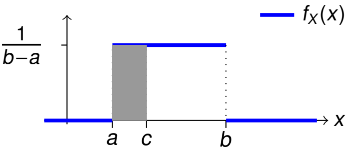
Soit $X$ une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, absolument continue de densité $f_X$, de fonction de répartition $F_X$.

- Probabilité ponctuelle : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$
  En effet, on rappelle que : $F_X(x-) = F_X(x) - \mathbb{P}(X = x)$ (cf. chapitre 2-1). Puisque la fonction de répartition $F_X$ est ici continue, $F_X(x-) = F_X(x)$ et donc $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- Probabilité sur un sous-espace : $\mathbb{P}(X \in S) = \displaystyle\int_S f_X(x)dx$
  en particulier dans $\mathbb{R}$ si $S = (a; b)$ alors

$$\mathbb{P}(a \leq (<) X \leq (<) b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$$

*Calcul pour la loi uniforme de la probabilité de $a \leq X \leq c$ avec $a < c < b$ :*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq c) = \frac{c-a}{b-a}$$



# Caractéristiques pour les v.a. absolument continues I

Soit une v.a.r. $X$ définie sur un espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ et intégrable de densité $f_X$.

## Espérance

On dit que $X$ admet une espérance si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ converge absolument, i.e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)\, dx < +\infty$.

Alors : $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$

Sous condition d'existence, les autres moments s'écrivent :

# Caractéristiques pour les v.a. absolument continues II

1. Variance : $\mathrm{Var}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)\, dx$

   Remarque : le Théorème de Huygens-Koenig est encore vrai car l'intégrale est linéaire : $\mathrm{Var}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \mathbb{E}(X)^2$

2. Moment d'ordre $k$ : $m_k(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, dx$

3. Moment centré d'ordre $k$ : $\mu_k(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k f_X(x)\, dx$

# Caractéristiques pour les v.a. absolument continues III

Plus généralement, la proposition suivante constitue le théorème de transfert :

## Théorème de transfert

Soit une v.a.r. $X$ définie sur un espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ et intégrable de densité $f_X$. Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable[a], si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$ est absolument convergente, on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

a. dans $\mathbb{R}$ on suppose souvent $g$ continue et bornée

Application du Théorème de transfert : Soit $X$ variable absolument continue de densité $f_X$. On pose $Y = h(X)$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On cherche à déterminer la densité de $Y$.
Pour $g$ définie dans le théorème, sous condition d'existence, on a :

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(h(x))\, f_X(x)\, dx$$

Le changement de variable : $y = h(x)$ donne

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f_Y(y)\, dy$$

$f_Y$ sera la densité de la variable $Y$.

## *Calcul des caractéristiques pour la loi uniforme : soit $X$ de loi $\mathcal{U}_{[a,b]}$*

*Calcul des caractéristiques pour la loi uniforme : soit X de loi $\mathcal{U}_{[a,b]}$*

- *Espérance :* $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_a^b x f_x(x) dx$ *et la fonction* $x \to x f_X(x)$ *est continue par morceaux sur* $[a, b]$ *donc l'intégrale est bien définie.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

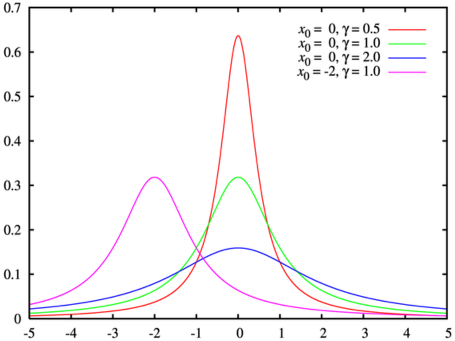
*Calcul des caractéristiques pour la loi uniforme : soit X de loi $\mathcal{U}_{[a,b]}$*

- *Espérance :* $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b x f_x(x)dx$ *et la fonction* $x \to x f_X(x)$ *est continue par morceaux sur* $[a,b]$ *donc l'intégrale est bien définie.*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$
- *Variance : de la même manière, on voit que* $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$ *est bien définie.*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$
*Et enfin* $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}$

*Exemple de variable aléatoire à densité n'admettant pas de moments* : loi de Cauchy de paramètres de position $x_0 \in \mathbb{R}$ et d'échelle $\gamma > 0, \gamma \in \mathbb{R}$.

La variable $X$ prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{R}$. Elle admet comme fonction de densité :

$$f(x; x_0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{x}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}$$



On connait sa médiane ($x_0$) mais la loi n'admet ni espérance, ni variance, ni aucun moment d'ordre supérieur.
En effet $x \rightarrow \frac{\gamma}{\pi} \frac{x}{(x-x_0)^2+\gamma^2}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue car

$$\left|\frac{x}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right| \sim \left|\frac{1}{x}\right| \text{ à l'infini.}$$

# Lois usuelles continues

## Loi uniforme

Soient $a, b$ deux réels tels que $-\infty < a < b < +\infty$. La variable $X$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ lorsque la densité de probabilité est : $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$.

Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{U}_{(a,b)}$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ ; $s_X^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a < x \leq b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$

- On peut l'utiliser pour retrouver d'autres lois...[1]
- Toute transformation affine d'une v.a. suivant une loi uniforme, suit encore une loi uniforme : si $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, pour des réels $a, b$ tels que $a < b$, alors $Y = a + (b - a)X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.

1. utile en programmation : *rand() en Scilab, Matlab, unif() en R, random() en Python*

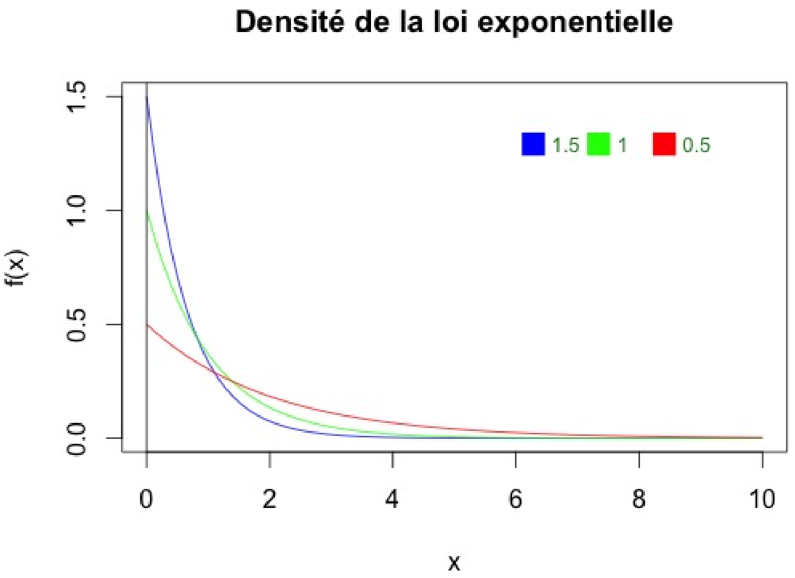
## Loi exponentielle

Soit un réel $\lambda > 0$. La variable $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et sa densité de probabilité est : $f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{E}xp(\lambda)$

On vérifie aisément que $f$ est bien une densité de probabilité : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{N\to+\infty} \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^N = \lim_{N\to+\infty} (-e^{-\lambda N} + e^{\lambda 0}) = \lim_{N\to+\infty} (1 - e^{-\lambda N}) = 1$$

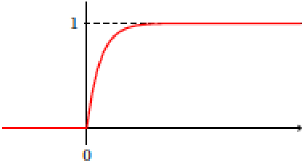
- Exemple : durée de fonctionnement d'un équipement technique, temps séparant les arrivées de deux clients successifs dans une file d'attente...
- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$; $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$


Densité de la loi exponentielle
1.5
1
0.5
f(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
0
2
4
6
8
10
x

- C'est une loi sans mémoire[2] :
  $\forall(s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}(X > s+t \backslash X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

Nous aurons besoin de la fonction de répartition de $X$ :

$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ (d'après la preuve précédente).




Alors : $\forall(s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$\mathbb{P}(X > s+t \backslash X > s) = \dfrac{\mathbb{P}(X > s+t \cap X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \dfrac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)}$ car $\{X > s+t\} \subset \{X > s\}$.

Et $\mathbb{P}(X > s) = 1 - F_X(s) = e^{-\lambda s}$, donc

$\mathbb{P}(X > s+t \backslash X > s) = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)$.

2. la seule absolument continue !

Revenons à une loi uniforme sur $[0;1]$.

## Théorème

Soit $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ une fonction croissante, continue à droite, vérifiant $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{\infty} F = 1$.
On note $F^{-1} : ]0;1[ \to \mathbb{R}$ sa fonction inverse :
$F^{-1}(y) = \inf\{x; F(x) \geq y\}, \forall y \in ]0;1[$.
Soit $U$ une variable de loi uniforme sur $[0;1]$. Alors la variable $X = F^{-1}(U)$ admet $F$ comme fonction de répartition.

La fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$ est : $F_U(u) = u$, pour $u \in [0,1]$.
Alors
$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F_U(F(x)) = F(x)$ car $F(x) \in [0;1]$.
Ainsi $X$ a pour fonction de répartition $F$.

On pourra ainsi utiliser la loi uniforme sur $[0;1]$ pour simuler d'autres lois de probabilités continues.

Application : Si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, sa fonction de répartition est :
$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ car

$$x > 0,\ F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} F(x) = y = 1 - e^{-\lambda x} \quad &\Leftrightarrow 1 - y = e^{-\lambda x} \\ &\Leftrightarrow \ln(1 - y) = -\lambda x \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - y) = F^{-1}(y) \end{aligned}$$

Si on simule des observations $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$ de la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$, alors les $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ définis par $x_i = F^{-1}(y_i) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - y_i)$ sont des observations de la loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

## Loi normale (gaussienne/de Laplace-Gauss)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La variable $X$ suit une loi normale de moyenne $m$ et d'écart-type $\sigma$ si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et elle admet pour densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m, \sigma)$

- Loi résultant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets se cumulent et aucun n'est prépondérant (conditions de Borel), décrite par Gauss (1809) et Laplace (1812).
- Une des lois les plus utilisées ! modélisation de phénomènes naturels, sociaux dont on ne connait pas la distribution mais une valeur moyenne, par exemple les erreurs de mesure...
- Attention au second paramètre (ici notation probabiliste), les physiciens notent la variance !

Vérifions que c'est une densité : clairement $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma\, dy$ en posant $y = \frac{x-m}{\sigma}, dy = \frac{dx}{\sigma}$.

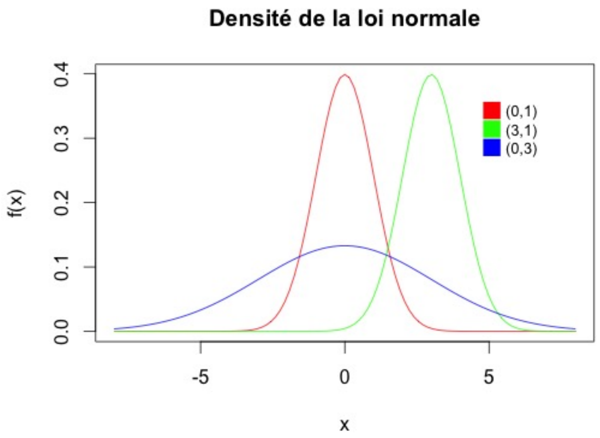
Il reste à établir $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$ [3]

Pour cela $I^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dydx =$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta$ en passant à un système de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \qquad dxdy = rdrd\theta$$

$I^2 = 2\pi \displaystyle\int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2\pi(\lim_{R\to+\infty} -e^{-\frac{R^2}{2}} + e^0) = 2\pi$. Donc $I = \sqrt{2\pi}$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

3. On pourra l'utiliser dans la suite.




- Courbe en "cloche", symétrique autour de l'axe $x = m$, de valeur maximale $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ en $x = m$.
- Translation avec la moyenne
- Applatissement lorsque $\sigma$ grandit

- Stabilité : soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2, (\sigma_1, \sigma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Si $X_1$ et $X_2$ sont deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $\mathcal{L}(X_1 + X_2) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.
  Ceci est une application du produit de convolution :

### Definition

Soient $X$ et $Y$ deux variables absolument continues de densités respectives $f_X$ et $f_Y$. Si les variables sont indépendantes, la loi de la variable somme $X + Y$ est le produit de convolution des densités :

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x) dx$$

D'où cela vient-il ?

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(a) &= \mathbb{P}(X+Y \leq a) = \int\int_{x+y\leq a} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) dx \, f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(a-y) \, f_Y(y) dy
\end{aligned}$$

C'est la convolution des fonctions de répartition, et il suffit de dériver pour obtenir la densité de $X+Y$ :

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(a) &= \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(a-y) \, f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{da} F_X(a-y) \, f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(a-y) \, f_Y(y) dy
\end{aligned}$$

Appliquons le sur un exemple simple : soient $X$ et $Y$ 2 v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
(f * g)(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{z}{2})^2} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \text{ en posant } u = y - \frac{z}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} (*) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}$$

(*) car $I = \sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \frac{dv}{\sqrt{2}}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Ainsi $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$, on retrouve bien $m_1 + m_2 = 0 + 0 = 0$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1 + 1 = 2$.

# Loi normale centrée réduite

On appelle loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Sa fonction de densité est : $f_Y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.
Par transformation affine d'une v.a.r. de loi normale :

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma) \iff Y = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$\Rightarrow$ Par définition de la fonction de répartition :
$F_Y(y) = \mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sigma y + m)$ (car $\sigma > 0$)
$F_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma y + m} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] \sigma du$
en posant $u = \frac{x-m}{\sigma}$.
$F_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{u} \exp\left[-\dfrac{u^2}{2\sigma^2}\right] du$
C'est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

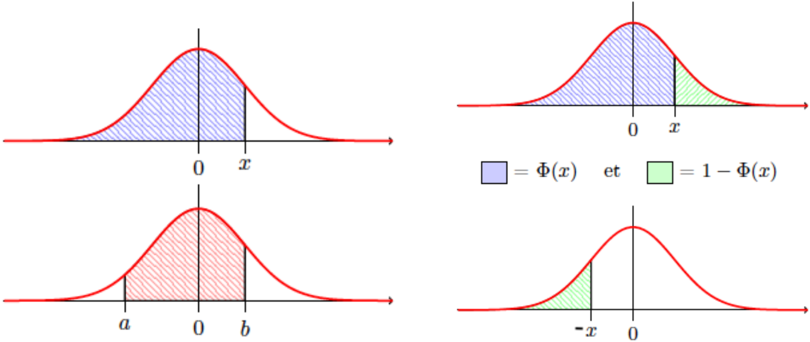
$\Leftarrow$ soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. On pose $X = \sigma Y + m$ et on utilise le théorème de transfert, avec $g$ une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(\sigma Y + m)) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma y + m)\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Et en posant $x = \sigma y + m$ :

$\mathbb{E}(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\frac{x-m}{\sigma})^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$ avec $f_X$ densité d'une loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$. Donc $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$.

On dit que $Y$ est la variable centrée réduite associée à $X$. On rappelle sa densité : $f_Y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Nous noterons $\Phi$ sa fonction de répartition : $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(y) dy$. Celle-ci n'admet pas d'expression simple (primitive non directement calculable) mais nous pouvons la représenter sur la courbe représentative de la densité $f_Y$ : c'est l'aire sous la courbe sur la partie $]-\infty; x]$.




■ $= \Phi(x)$ et ■ $= \Phi(b) - \Phi(a)$     ■ $= \Phi(x)$ et ■ $= 1 - \Phi(x)$     ■ $= \Phi(-x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(y)dy \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), x > 0$$

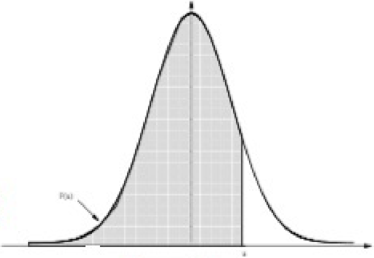
$$P(a \leq (<)X \leq (<)b) = \int_a^b f_Y(y)dy$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\,\Phi(x) - 1$$

Pour les calculs : utiliser un logiciel ou une table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (on s'y ramène si besoin).

Lecture dans la table :



$\Phi(0.24) = 0.5948$

| u | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.527 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.567 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.606 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.644 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.680 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.715 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.748 |

# Vecteur aléatoire

## Definition

- Soient $n$ variables aléatoires $X_i : \Omega \to E_i$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et absolument continues. On appelle vecteur aléatoire l'application mesurable :

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & X(\Omega) \subset E_1 \times ... \times E_n \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \end{array}$$

- Loi de probabilité (con)jointe de $X$ : la fonction de répartition est définie par $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$F_X(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ... X_n \leq x_n)$; $x_i \in E_i \, \forall i$.
- $X$ admet une densité $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ si

$$F_X(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, ..., t_n) \, dt_1 ... dt_n$$

Pour être la densité d'un vecteur continu, la fonction $f_X$ doit vérifier :
$\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t_1, ..., t_n)\, dt_1...dt_n = 1$.

## Definition

- Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire continu défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, la loi marginale de $X_i$ est donnée par :

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(t_1, ..., t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, ..., t_n)\, dt_1...dt_{i-1}dt_{i+1}...dt_n$$

- Les variables $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$f_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i),\ \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

*Exemple : on considère un couple de v.a. continues* $(X, Y)$ *de densité jointe donnée par :*

$$f(x, y) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Pour quelles valeurs de* $k$ *la fonction* $f$ *est-elle bien une densité ?*

*Exemple : on considère un couple de v.a. continues $(X, Y)$ de densité jointe donnée par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,(\frac{1}{x^2} + y^2) & si\ 1 \leq x \leq 5\ et\ -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*Pour quelles valeurs de $k$ la fonction $f$ est-elle bien une densité ?*

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_1^5 \int_{-1}^1 k\,(\frac{1}{x^2} + y^2)\,dxdy \\ &= \int_1^5 \int_{-1}^1 \frac{k}{x^2}\,dxdy + \int_1^5 \int_{-1}^1 k\,y^2\,dxdy \\ &= k\left(\int_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx\right)\left(\int_{-1}^1 dy\right) + k\,\left(\int_1^5 dx\right)\left(\int_{-1}^1 y^2\,dy\right) \\ &= k\left[\frac{-1}{x}\right]_1^5 [y]_{-1}^1 + k\,[x]_1^5 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 \\ &= k(\frac{-1}{5} + 1)(1 - (-1)) + k(5-1)(\frac{1}{3} - (\frac{-1}{3})) \\ &= \frac{64}{15}k \end{aligned}$$

*donc l'intégrale vaut 1 si et seulement si $k = \frac{15}{64}$.*

*La loi marginale de $X$ est donnée par :*

*La loi marginale de $X$ est donnée par :*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & si\ x < 1\ ou\ x > 5 \\ \int_{-1}^{1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right) dy & si\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right) dy = \frac{15}{64}\left[\left(\frac{y}{x^2} + \frac{y^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{15}{64}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\right)$$

*Donc :*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & si\ x < 1\ ou\ x > 5 \\ \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\right) & si\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

*De la même façon la loi marginale de $Y$ est donnée par :*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & si\ y < -1\ ou\ y > 1 \\ \frac{15}{16}\left(y^2 + \frac{1}{5}\right) & si\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

*Puisque la densité jointe $f(x,y)$ n'est pas de la forme $g(x).h(y)$, les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.*

## Definition

La densité conditionnelle de $X$ sachant $X_j = x_j$, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, s'écrit : $f_{X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_n}(x/X_j = x_j) = \dfrac{f_X(x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_j}(x_j)}$, $\forall x_i \in E_i$, $\forall i$

*Poursuivons l'exemple :*

*La densité conditionnelle de $X$ sachant $Y = 0$ est donnée par :*

$$f_{X\backslash Y=0}(x) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} = \frac{\frac{15}{64}\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{16}} = \begin{cases} \frac{5}{4}\frac{1}{x^2} & si\ 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

## Definition

La covariance d'un couple aléatoire continu $(X, Y)$ défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'écrit :

$$Cov(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))\,(y - \mathbb{E}(Y))\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X.Y) - \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xyf(x, y)dxdy - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ainsi on peut définir la matrice de covariance d'un vecteur $X$ :

$$\begin{pmatrix} Var(X_1) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cov(X_1, X_n) & \dots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

*Poursuivons l'exemple :*

*Poursuivons l'exemple :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \frac{15}{32} \int_1^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right) dx = \frac{15}{32} \left[\ln|x| + \frac{x^2}{6}\right]_1^5 =$$

$$\frac{15}{32}(\ln 5 + 4)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \frac{15}{16} \int_{-1}^1 \left(y^3 + \frac{y}{5}\right) dy = \frac{15}{32} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{10}\right]_{-1}^1 = 0$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f(x,y) dx dy = \frac{15}{64} \int_1^5 xy \int_{-1}^1 (\frac{1}{x^2} + y^2)\, dx dy$$

$$= \frac{15}{64} \int_1^5 \int_{-1}^1 \frac{y}{x}\, dx dy + \frac{15}{64} \int_1^5 \int_{-1}^1 xy^3\, dx dy$$

$$= \frac{15}{64} \left(\int_1^5 \frac{dx}{x}\right)\left(\int_{-1}^1 y dy\right) + \frac{15}{64} \left(\int_1^5 x dx\right)\left(\int_{-1}^1 y^3 dy\right)$$

$$= \frac{15}{64} [\ln|x|]_1^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^1 + \frac{15}{64} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 \left[\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^1 = 0$$

*Donc* $Cov(X, Y) = 0$. *Les variables* $X$ *et* $Y$*, bien que non indépendantes, ont une covariance nulle.*