Le modèle probabiliste

2017-2018

Definition (Expérience aléatoire)

On nomme aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard (*ensemble des causes que l'on ne connait pas ou que l'on ne peut pas maîtriser*).

Exemple : On lance trois fois une pièce

Modélisation :

- e.a.
- un résultat possible ω
- Ensemble fondamental (ensemble de tous les résultats possibles) Ω

Exemple : $\Omega = \{P, F\}^3$.

L'ensemble Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable. *Dans l'exemple :* $Card(\Omega) = 2^3$

Evénement associé à l'e.a.

Pour répondre à la question usuelle : notre résultat satisfait-il une propriété donnée, ou appartient-il à un ensemble défini ?

Definition (Evénement)

Un événement est une *proposition* dont la vérification est déterminée par le résultat de l'e.a.

Exemple : A="On a obtenu au moins deux faces" ; B="On a obtenu face au premier coup"...

Un événement peut être assimilé à un ensemble de résultats de l'e.a. réalisant l'événement, i.e. un sous-ensemble de Ω (notations confondues).
Exemple : $A = \{FFP, FPF, PFF, FFF\} \subset \Omega$. *A est réalisé : FPF* $\in A$.
B={FFF, FFP, FPF, FPP}

L'ensemble des événements peut être assimilé à l'ensemble des parties de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$ ($Card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{Card(\Omega)}$).

Espace probabilisable : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Définitions

- Evénement élémentaire = un résultat possible de l'e.a. $\{\omega\} \subset \Omega$
- Evénement certain Ω
- Evénement impossible $\emptyset$
- A implique B : $A \Rightarrow B$: si A est réalisé, B l'est aussi ; $A \subset B$
- Evénement contraire ; $\overline{A}$: A n'est pas réalisé ; $\overline{A} = \Omega / A$
- Intersection/conjonction de deux événements = C est réalisé si A et B le sont simultanément ; $C = A \cap B$
- Union (non exclusive)/disjonction de deux événements = C est réalisé si A l'est, ou B, ou les deux ; $C = A \cup B$

Extensions :

- $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ signifie : Au moins un des E_i est vérifié
- $\bigcap_{n\geq 1} E_n$ signifie : Tous les E_i sont vérifiés.

Propriétés des opérations sur les événements

Identiques à celles des opérations sur les ensembles

- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
- Associativité : $\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \end{array}$
- Distributivité de l'une par rapport à l'autre :
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Notion d'incompatibilité

Definition (Incompatibilité)

Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément (A et B sont disjoints, $A \cap B = \emptyset$).

Exemples triviaux : $(A, \overline{A}); (\omega_i, \omega_j)$.

Definition (Système complet d'événements)

n événements $A_1, ..., A_n$ associés à une même expérience aléatoire forment un système complet d'événements lorsque deux d'entre eux ne peuvent être réalisés simultanément, et, à chaque répétition de l'e.a., l'un d'entre eux est réalisé (partition de Ω).

- $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\forall \omega, \exists i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\omega \in A_i, \iff \Omega = A_1 \cup ... \cup A_n$

Que signifie "probabilisable" (cas particulier de la notion de mesurabilité) ?

Definition (Probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable associé à une e.a. Une probabilité est une application notée $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui, à chaque événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ associe un nombre réel $\mathbb{P}(A)$ appelé probabilité de l'événement A, telle que :

(a1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;

(a2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(a3) pour toute suite finie ou infinie d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i=1,\dots,n}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n(\text{ou } \infty)} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n(\text{ou } \infty)} \mathbb{P}(A_i)$$

(Axiome des probabilités totales ou propriété de σ-additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé un espace de probabilité.

Cas particulier : espace fondamental fini muni de l'équiprobabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$

Definition (Equiprobabilité)

$\mathbb{P}(\omega_1) = ... = \mathbb{P}(\omega_N)$

Alors : $\forall i = 1, ..., N,\ \mathbb{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$

et pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: $\mathbb{P}(A) = \dfrac{Card\ A}{N}$.

Exemple : $\mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{8},\ \forall \omega \in \Omega$ *car* $Card(\Omega) = 2^3 = 8$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Propriétés I

Pour des événements $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ associés à $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$:

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Pour un système complet d'événements $(A_1, ..., A_n)$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) = 1$$

- Si A implique B, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

- **Théorème des probabilités totales**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ si } A, B \text{ incompatibles*} \end{aligned}$$

* Attention ! Ce n'est pas une équivalence (contre-exemple).

Propriétés II

- Généralisation : formule de Poincaré
  Soit $n \geq 2$ et soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite d'événements. Alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

ou

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k<k'} \mathbb{P}(A_k \cap A_{k'}) + \dots$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{i_1<\dots<i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

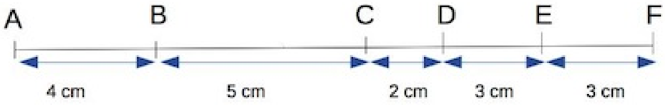
- Soit B un événement et $(A_1, ..., A_n)$ un système complet d'événements, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Probabilité géométrique

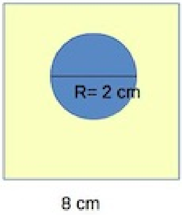
Une probabilité géométrique est liée à la réalisation d'un résultat d'une expérience aléatoire dans un contexte géométrique.

Un exemple en dimension 1 :
Ce calcul de probabilité utilise les mesures de longueurs. On choisit au hasard un point sur le segment AF ci-dessous. Quelle est la probabilité que le point se situe sur le segment BC ?



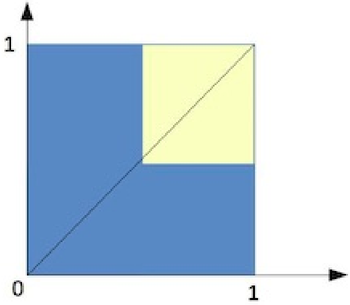
$$\mathbb{P}(\text{"point sur le segment BC"}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AF}} = \frac{5}{17} \simeq 0,294.$$

Un exemple en dimension 2 :
Quelle est la probabilité qu'un point lancé au hasard dans le carré atteigne le cercle ?



Aire du cercle : $A_{\text{cercle}} = \pi \times 2^2 = 15,5664 cm^2$
Aire du carré :$A_{\text{carré}} = 8^2 = 64 cm^2$
$\mathbb{P}(\text{"atteindre le cercle"}) = \dfrac{A_{\text{cercle}}}{A_{\text{carré}}} \simeq 0,196.$

Un exemple dans le plan cartésien :
Tirer 2 nombres au hasard dans $[0,1]$ revient à tirer un point au hasard dans le carré unité $[0,1]^2$. Quelle est la probabilité que le minimum des deux nombres soit inférieur à 1/2 ?



$\mathbb{P}(inf(x,y) \leq 1/2) = 3/4$

Généralement :
Si $\mathcal{E}$ est une partie régulière bornée de $\mathbb{R}^n$ (en pratique pour n= 1, 2, 3), alors on peut calculer la probabilité de tout événement A par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \mathcal{E} \mid}$$

où $|\ .\ |$ représente la longueur si n=1, la surface si n=2, le volume si n=3.

Type de problème rencontré : lorsque la connaissance de la réalisation d'un événement a un impact sur la probabilité de réalisation d'un autre événement.
Dans notre exemple, savoir que B est réalisé modifie intuitivement la probabilité de A.

Definition (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B (ou de A sachant B) la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé. On la note :$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A/B)$ et elle est définie par : $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Vérifions notre intuition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\sharp\{FFP, FPF, FFF\}}{8} = \frac{3}{8}$ *donc*
$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)$

Propriétés I

- C'est bien une probabilité
- Cas particulier d'un espace fondamental fini muni de l'équiprobabilité : $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\sharp A \cap B}{\sharp total}$; $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\sharp A \cap B}{\sharp B}$
- Attention ! On ne parle pas de conditionnel pour un événement !
- $\mathbb{P}(\overline{A}/B) = 1 - \mathbb{P}(A/B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B/C) = \mathbb{P}(A/C) + \mathbb{P}(B/C) - \mathbb{P}(A \cap B/C)$

Théorème des probabilités composées

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B/A)$

Propriétés II

- Formule du double conditionnement : soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. Alors pour tout événement C, on a : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C/A \cap B) \times \mathbb{P}(B/A) \times \mathbb{P}(A)$.

Théorème de Bayès

Soit $(A_1, ..., A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ associé à la même e.a. Alors, pour $j = 1, 2, ..., n$, on a

$$\mathbb{P}(A_j/B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)}$$

- Si $(A_1, ..., A_n)$ est un système complet d'événements, alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Indépendance I

Definition (Indépendance)

Soient deux événements A et B de probabilité non nulle associés à une même e.a. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$.
Interprétation : le fait se savoir que l'un est réalisé ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.
Notation : $A \perp\!\!\!\perp B$.

Théorème

A et B indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Indépendance II

- A et B indépendants équivaut à : A et $\overline{B}$ indépendants, et à : $\overline{A}$ et B indépendants, et à : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.
- Ne pas confondre incompatibilité et indépendance !
- Incompatible $\Rightarrow$ non indépendant.
- $\forall A$ événement, $A \perp\!\!\!\perp \emptyset$; $A \perp\!\!\!\perp \Omega$.

Indépendance de plus de deux événements

Definition (Indépendance deux à deux)

Soient n événements $A_1, ..., A_n$ de probabilité non nulle associés à une même e.a. On dit qu'ils sont deux à deux indépendants si et seulement si pour tout couple de deux événements choisis parmi les n, il y a indépendance.

Definition (Indépendance mutuelle)

On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si et seulement si ils sont deux à deux indépendants et si, pour toute partie $I = \{i_1, ..., i_r\}$ de $\{1, ..., n\}$, on a : $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times ... \times \mathbb{P}(A_{i_r})$.