3. **Algorithmique, système triangulaire** (6 points)
   On considère le système linéaire $Tx = b$ où $b \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et T à la structure triangulaire suivante $t_{i,j} = 0$ pour $j < n + 1 - i$. De plus $t_{i,n+1-i} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ (on admettra qu'une telle matrice est inversible sous cette condition).

   (a) Pour se rendre compte de la structure de T, dessiner une telle matrice dans le cas $n = 4$ (mettre une croix pour désigner un coefficient quelconque (a priori non nul mais éventuellement nul) et un point noir pour un coefficient non nul et bien sûr des 0 pour les coefficients nuls).

   (b) Écrire un algorithme pour résoudre un tel système linéaire directement (i.e. sans passer par une factorisation ou tout autre manipulation prélable). On écrira cet algorithme en pseudo-code et on comptera le nombre d'opérations arithmétiques utilisées. Aide : écrire la première équation qui permet de déterminer x_n, puis la deuxième qui ne dépend que de x_{n-1} et x_n et permet donc de déterminer x_{n-1}. Écrire alors l'équation i qui ne dépend que de $x_{n+1-i}, x_{n+2-i}, \ldots, x_n$ et faire la bonne hypothèse (à cette étape de l'algorithme $x_{n+2-i}, \ldots, x_n$ seront déjà calculés)... Pour compter le nombre d'opérations, on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.