Graphes et Recherche Opérationnelle – ESIAL 2A

Chapitre 3 : Analyse post-optimale

J.-F. Scheid

2011–2012

Plan du chapitre

I. Introduction

- L'analyse optimale permet de déterminer **la sensibilité** d'un PL **par rapport aux données** :

  Une faible variation des données entraine-t-elle un changement important de la solution optimale ?
- L'analyse optimale permet de déterminer **des intervalles de variations des données** pour lesquels la base optimale B^* n'est pas modifiée.

II. Analyse post-optimale de l'objectif

But : étudier l'influence des **coefficients** de la fonction objectif sur l'optimum.

PL sous forme standard qui admet une base optimale B^* (fin normale du simplexe). A une permutation près des colonnes,

$$A = (A_{B^*} \mid A_{H^*}).$$

On note $A^*_{H^*}$ la matrice hors-base obtenue à l'optimum dans le tableau du simplexe. La matrice $A^*_{H^*}$ est donnée par

$$\boxed{A^*_{H^*} = A_{B^*}^{-1} A_{H^*}}$$

Exemple de détermination de la matrice $A^*_{H^*}$.

La méthode des dictionnaires appliquée au problème de production de l'introduction fournit la solution optimale

$$\mathbf{x}^*_{B^*} = (x_2^*,\ x_1^*,\ e_1^*)^\top = \left(5,\ \tfrac{15}{2},\ \tfrac{27}{2}\right)^\top$$
$$\mathbf{x}^*_{H^*} = (e_2^*,\ e_3^*)^\top = (0,\ 0)^\top$$

Le dictionnaire de la dernière étape était

$$\begin{array}{|l|}\hline x_2 = 5 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\ x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6}e_2 - \frac{5}{6}e_3 \\ e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_3 \\ \hline F = 65 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{7}{3}e_3 \\ \hline \end{array}$$

La matrice $A^*_{H^*}$ vaut donc

$$A^*_{H^*} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & +\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{2} & +\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

5

Proposition (condition d'optimalité)

La condition d'optimalité

$$\boxed{\mathbf{L}^\top_{H^*} = \mathbf{c}^\top_{H^*} - \mathbf{c}^\top_{B^*} A^*_{H^*} \leq 0} \qquad (1)$$

est une condition suffisante pour qu'une solution de base réalisable soit optimale.

Preuve : Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + \mathbf{L}^\top_{H^*} \mathbf{x}^\top_{H^*}$$

où $\mathbf{x}^*$ est une solution de base réalisable associée à la base B^*.

6

Application. On utilise la condition d'optimalité pour déterminer l'influence d'un coefficient de la fonction objectif F :

- On remplace ce coefficient par un paramètre et on calcule la condition d'optimalité.
- On obtient alors une condition sur ce paramètre. Cette condition est une condition nécessaire pour que la solution de base optimale soit inchangée et une condition suffisante pour que la solution obtenue soit optimale.

7

Exemple. On reprend l'exemple du problème de production

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

On veut étudier la sensibilité de l'optimum par rapport au prix de vente unitaire du produit P_1 (variable x_1) qui vaut 6. De combien peut-on faire varier ce prix, sans changer le plan de production ?

On a trouvé la solution de base optimale

$$\mathbf{x}^*_{B^*} = (x_2^*,\ x_1^*,\ e_1^*)^\top = \left(5,\ \tfrac{15}{2},\ \tfrac{27}{2}\right)^\top$$
$$\mathbf{x}^*_{H^*} = (e_2^*,\ e_3^*)^\top = (0,\ 0)^\top$$
$$A^*_{H^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

8

On remplace le coefficient 6 dans F par un paramètre c_1 :

$$\mathbf{c}_{B^*}^\top = (4,\ c_1,\ 0), \quad \mathbf{c}_{H^*}^\top = (0,\ 0).$$

Les coûts réduits deviennent alors

$$\mathbf{L}_{H^*}^\top = \mathbf{c}_{H^*}^\top - \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{H^*}^* = \left(\frac{c_1}{6} - \frac{4}{3},\ \frac{8}{3} - \frac{5}{6}c_1\right).$$

La condition d'optimalité $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$ donne alors

$$\frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8.$$

Interprétation. Si on choisit $\frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8$, la solution de base optimale est inchangée c'est-à-dire que le plan de production ne change pas. On a $F^* = \frac{15}{2}c_1 + 20$. Avec $c_1 = 8$ (la valeur max. permise pour c_1), on obtient $F^* = 80$ soit un écart de $\Delta F = 15$.

II. Analyse post-optimale du second membre des contraintes

But : étudier l'influence du **second membre des contraintes** sur la solution de base optimale.

PL sous forme standard qui admet une base optimale B^* (fin normale du simplexe). A une permutation près des colonnes,

$$A = (A_{B^*} \mid A_{H^*}).$$

Proposition (condition de faisabilité)

A l'optimum, on a nécessairement la condition de faisabilité

$$\boxed{\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b} \geq 0.} \qquad (2)$$

Application. On utilise la condition de faisabilité pour déterminer l'influence d'un coefficient du second membre des contraintes sur la solution optimale.

- On remplace ce coefficient par un paramètre. On obtient ainsi un second membre $\mathbf{d}$.
- On calcule alors la condition de faisabilité sur la solution de base

$$\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{d} \geq 0.$$

On obtient de cette façon une condition sur le paramètre introduit. Cette condition est une condition nécessaire pour que la base optimale B^* soit inchangée.

Remarque. Les valeurs de la solution de base $\mathbf{x}_{B^*}$ changent, mais $\mathbf{x}_{B^*}$ est toujours une solution de base réalisable optimale car on maintient les coûts réduits $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$ inchangés.

Exemple. Avec l'exemple du problème de production, on étudie la sensibilité de la solution optimale par rapport à la quantité disponible de main d'oeuvre qui vaut 55 unités. On introduit donc un paramètre $d_2 \in \mathbb{R}$ avec le second membre

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 81 \\ d_2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

et on calcule $\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{d}$ avec $A_{B^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$.

On obtient

$$\mathbf{x}_{B^*} = \begin{pmatrix} e_1^* \\ x_2^* \\ x_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 - \frac{5}{2}d_2 \\ \frac{1}{3}(d_2 - 40) \\ \frac{1}{6}(-d_2 + 100) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

La condition de faisabilité $\mathbf{x}_{B^*} \geq 0$ donne alors :

$$40 \leq d_2 \leq 60.4$$

Interprétation. Si on choisit $40 \leq d_2 \leq 60.4$ alors la solution de base réalisable $\mathbf{x}_{B^*}$ donnée par (3) est optimale.