Examen du 18 Novembre 2022 (1h30)

OMG : Mathématiques Générales

La notation tiendra compte de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Partie I - Nombres Complexes

★ **Exercice 1: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'une des équations suivantes**

$$2z^2 - (20+9i)z + 50 = 0 \quad \text{ou} \quad z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2i)z + 3 - 2iz = 0 \quad \text{ou} \quad iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0$$

<u>*Indication :*</u> Pour la deuxième, il existe une racine imaginaire pure et une racine réelle. Pour la troisième, il existe une racine réelle.

★ **Exercice 2: Racine n-ième V1 (au choix avec V2)**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{R}$, nous considérons l'équation (E) : $(z+1)^n - e^{2ina} = 0$

▷ **Question 1:** Résoudre (E). Nous noterons $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ les solutions

▷ **Question 2:** Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$

▷ **Question 3:** Calculer $A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n})$

★ **Exercice 3: Racine n-ième V2 (au choix avec V1)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'une des équations suivantes :

$$z^3 = (z-1)^3 i \quad ; \quad z^8 = \bar{z}$$

★ **Exercice 4: Écrire les nombre suivant sous forme algébrique**

$$z_1 = \frac{\cos x - i \sin x}{\sin x - i \cos x}, \quad z_2 = \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4}{(1-i)^3}.$$

Partie II - Raisonnement

★ **Exercice 5: Identité de Brahmagupta (mathématicien indien, 628 ap. J.C.)**

Les nombres a, b, c, d, u sont des complexes

▷ **Question 1:** Montrer que $\left(a^2 + ub^2\right)\left(c^2 + ud^2\right) = (ac + ubd)^2 + u\,(ad - bc)^2$ à l'aide des complexes (introduire v tel que son carré soit égal à u).

▷ **Question 2:** Décomposer 561 en la somme d'un carré et du double d'un carré en utilisant cette identité.