Module Mathématiques Appliquées: Probabilités
Telecom Nancy Apprentissage

Liste d'exercices 4 - Variables aléatoires et lois de probabilités, suite

Exercice 1 c étant une constante positive ou nulle, on considère la variable aléatoire continue X de densité:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ cx & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{c}{x^4} & \text{pour } t \geq 1 \end{cases}$$

1.1 Déterminer la valeur de la constante c.

1.2 Calculer l'espérance et la variance de X.

1.3 Déterminer la fonction de répartition.

Exercice 2 On considère une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \dfrac{\cos x}{2} & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

2.1 Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

2.2 Déterminer la fonction de répartition de X.

2.3 Calculer l'espérance de X.

Exercice 3 On admet que la durée de vie d'une ampoule électrique suit une loi exponentielle et que sa durée moyenne de vie est de un an. Sachant qu'une ampoule fonctionne depuis un an, calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à deux ans.

Exercice 4 Lors de la fabrication en série de billes, on admet que le diamètre X d'une bille est réparti suivant une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. A l'aide de deux cribles, l'un avec des trous de diamètre 11 mm et l'autre avec des trous de diamètre 13 mm, on peut évaluer les probabilités suivantes $P(X \geq 11) = 0,2148$ et $P(X \geq 13) = 0,1151$. Calculer les paramètres μ et σ de la distribution de X.

Exercice 5 Supposons qu'un procédé automatique produit des boules dont le diamètre est une v.a. de loi normale de moyenne $\mu = 20$ mm et de variance $\sigma^2 = 0.25\text{mm}^2$. Une boule satisfait aux exigences de qualité si son diamètre est contenu dans l'intervalle $[19.5, 22]$.

5.1 Quelle est la probabilité qu'une boule choisie au hasard satisfasse aux exigences de qualité?

5.2 Quelle est la probabilité que, parmi 1000 boules, au plus 2 boules soient de diamètre inférieur à 18.5 mm ?

Exercice 6 Soit $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire vectorielle de $\mathbb{R}^2$ suivant la loi uniforme sur le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

6.1 Donner la densité de la loi de Z.

6.2 Déterminer les lois marginales de Z.

6.3 Les v.a. marginales X et Y sont-elles indépendantes?

6.4 Calculer la covariance entre X et Y.

Exercice 7 La densité conjointe des variables aléatoires continues X et Y est:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} + c\,y & \text{pour } 0 < x < 1,\ 1 < y < 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante.

7.1 Quelle est la valeur de c ?

7.2 X et Y sont-elles indépendantes ?

7.3 Trouver $P(X + Y > 3)$.