

## Polynômes et fractions rationnelles

### Polynômes

**Exercice 1.** Effectuer la division euclidienne de

1.  $X^3 - 2X + 1$  par  $X + i$
2.  $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$  par  $X^2 - 1$ .

**Exercice 2.** On considère le polynôme  $P(X) = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$ .

1. Vérifier que  $-1$  et  $2$  sont racines de  $P$  et déterminer l'ordre de multiplicité de chacune.
2. Factoriser le polynôme  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Vérifier que  $1 + i$  est une racine du polynôme  $P(X) = X^3 - (4 + i)X^2 + (6 + 2i)X - (4 + 2i)$  puis factoriser  $P$  sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 4.** Factoriser les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}[X]$  :

1.  $X^4 + X^2 + 1$
2.  $X^4 + 1$
3.  $X^6 + 1$
4.  $X^8 + X^4 + 1$

### Fractions rationnelles

**Exercice 5.** Donner la forme générale des décompositions en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  des fractions suivantes (on ne demande pas un calcul explicite des coefficients) :

1.  $\frac{X^3}{(X+1)^2(X+2)(X^2+X+1)}$
2.  $\frac{X^{17}+X^{12}+1}{(X+1)^{11}(X+2)^{12}}$
3.  $\frac{X^{2013}}{(X^2+1)^7(X+1)^4}$
4.  $\frac{X^3+1}{X^3-1}$

**Exercice 6.** Décomposer les fractions rationnelles suivantes sur  $\mathbb{C}$  puis sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $\frac{3}{X^3+1}$
2.  $\frac{1}{X^{2n}+1}$

**Exercice 7.** Décomposer sur  $\mathbb{R}$  les fractions rationnelles suivantes :

1.  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$
2.  $\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1}$
3.  $\frac{X+5}{9X^2+6X+17}$
4.  $\frac{3X^5-4X^4+4X^3-10X^2-8}{(X^2-2X+1)(X^2+X+1)}$

**Exercice 8.** Décomposer sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  les fractions rationnelles :

1.  $\frac{X}{X^4+1}$
2.  $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$
3.  $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$
4.  $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$

**Exercice 9.** Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1.  $\frac{5X-12}{X(X-4)}$
2.  $\frac{37-11X}{(X+1)(X-2)(X-3)}$
3.  $\frac{6X-11}{(X-1)^2}$
4.  $\frac{-19X^2+50X-25}{X^2(3X-5)}$
5.  $\frac{2X^2-15X+33}{(X+1)(X-5)}$

**Exercice 10.** Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes (pour simplifier la décomposition on utilisera le fait qu'elles sont paires ou impaires) :

1.  $\frac{X^2-1}{(X^2-2)(X^2+2)}$
2.  $\frac{X^3}{(X^2-2)(X^2+2)}$
3.  $\frac{X^6}{(X-3)(X+3)(X^2+4)}$

4.  $\frac{X}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-1)}$
5.  $\frac{X^2+2}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^4-1)}$

---

**Voici quelques fractions et leurs décompositions pour vous entraîner**

---

**Exercice 11.** Décomposer  $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 12.** Décomposer  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 13.** Décomposer  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14.** Décomposer  $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 15.** Décomposer  $\frac{X}{X^2-4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 16.** Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 17.** Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 18.** Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19.** Décomposer  $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 20.** Décomposer  $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 21.** Décomposer  $\frac{X+i}{X^2+i}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 22.** Décomposer  $\frac{X}{(X+i)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 23.** Décomposer  $\frac{X^2+1}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 24.** Décomposer  $\frac{X}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 25.** Décomposer  $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 26.** Décomposer  $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 27.** Décomposer  $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 28.** Décomposer  $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 29.** Décomposer  $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 30.** Décomposer  $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Correction 7.**

$$\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}.$$

**Correction 8.**

$$\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}.$$

**Correction 9.**

$$\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}.$$

**Correction 10.**

$$\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}.$$

**Correction 11.**

$$\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}.$$

**Correction 12.**

$$\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}.$$

**Correction 13.**

$$\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}.$$

**Correction 14.**

$$\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}.$$

**Correction 15.**

$$\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 + \frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3} - \frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{X^2+X+2}.$$

**Correction 16.**

$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}.$$

**Correction 17.**

$$\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}.$$

**Correction 18.**

$$\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}.$$

**Correction 19.**

$$\begin{aligned} \frac{X^2+1}{X^4+1} &= \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \\ &\frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \\ &\frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}. \end{aligned}$$

**Correction 20.**

$$\begin{aligned} \frac{X}{X^4+1} &= -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \\ &\frac{\frac{-1}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{-1}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \\ &\frac{\frac{1}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}. \end{aligned}$$

**Correction 21.**

$$\begin{aligned} \frac{X^2+X+1}{X^4+1} &= \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \\ &\frac{\frac{-1+\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{-1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \\ &\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}.$$

**Correction 22.**

$$\begin{aligned} \frac{X^5+X+1}{X^4-1} &= X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X + \\ &\frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}. \end{aligned}$$

**Correction 23.**

$$\begin{aligned} \frac{X^5+X+1}{X^6-1} &= \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \\ &\frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}. \end{aligned}$$

**Correction 24.**

$$\begin{aligned} \frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} &= -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \\ &\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} = \\ &-\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \\ &\frac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}. \end{aligned}$$

**Correction 25.**

$$\begin{aligned} \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} &= \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \\ &\frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}. \end{aligned}$$

**Correction 26.**

$$\begin{aligned} \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} &= -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \\ &\frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}. \end{aligned}$$