Telecom Nancy
1A – Apprentissage
M. Thomassin
E.-H. Djermoune
9 décembre 2022

Examen SICA

Durée : 2 heures

Calculatrice interdite.
Document autorisé : aide-mémoire SIC 1A.
Les exercices sont indépendants.
Le barème est seulement indicatif.

Exercice 1 Energie d'un signal à temps continu (3 points)

Soit le signal à temps continu défini par :

$$x(t) = -1(t) + 4 \cdot 1(t-2) - 4 \cdot 1(t-5) + 1(t-7)$$

où $1(t)$ est le signal échelon.

1. Représenter le signal $x(t)$.
2. Calculer son énergie.

Exercice 2 Convolution discrète (3,5 points)

Soient deux signaux causaux à temps discret $x(k)$ et $y(k)$ dont les valeurs numériques sont :

$$x: \quad \ldots, 0, 0, \underset{\uparrow}{-3}, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, \ldots$$
$$y: \quad \ldots, 0, 0, \underset{\uparrow}{3}, 0, -2, 0, 0, \ldots$$

où le symbole $\uparrow$ indique l'instant $k = 0$.

1. Représenter $x(k)$ et $y(k)$.
2. A partir de la définition du produit de convolution discret ou à partir de la méthode du tableau, calculer le signal $z(k)$ correspondant au produit de convolution discret de $x(k)$ et $y(k)$.
3. Représenter $z(k)$.

Exercice 3 Développement en série de Fourier (8 points)

Soit le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1$Hz.

1. Représenter le signal $x(t)$ sur 2 périodes en indiquant sur le graphe les grandeurs caractéristiques (amplitude, période).
2. Déterminer le développement en série de Fourier **complexe** de $x(t)$.
3. En déduire les spectres d'amplitude et de phase de $x(t)$.

On considère maintenant le signal $y(t) = -2 + 3\cos(2\pi f_0 t)$, toujours avec $f_0 = 1$Hz.

4. Par identification entre $y(t)$ et la formule du développement en série de Fourier :

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t),$$

   déterminer les coefficients de Fourier réels (a_n et b_n).
5. En déduire les coefficients de Fourier complexes (C_n) et tracer les spectres d'amplitude et de phase du développement en série de Fourier de $y(t)$.
6. Connaissant les spectres de $x(t)$, les spectres de $y(t)$ étaient-ils prévisibles ?
7. Enfin, à l'aide de la relation de Parseval, calculer la puissance P_y de y.

Exercice 4 Transformée de Fourier (5,5 points)

Soit le signal continu $x(t)$ en figure 1(a). On rappelle que la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}, \tag{1}$$

où f est la fréquence.

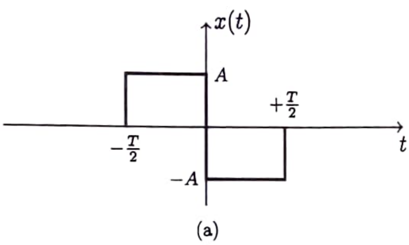
1. En utilisant la formule 1, calculer la transformée de Fourier $X(f)$.
2. Donner l'expression du signal $x(t)$ en utilisant la fonction rectangulaire $\mathrm{rect}_T(t)$ représentée en figure 1(b).
3. On donne la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire de durée T :

$$\mathcal{F}\{\mathrm{rect}_T(t)\} = T\mathrm{sinc}(Tf).$$

En utilisant les propriétés d'une transformée de Fourier (cf. page 13 de l'aide mémoire), retrouver la transformée de Fourier de la question (1).

Rappel :

- angle moitié : $1 - e^{-j\theta} = e^{-j\frac{\theta}{2}}(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}})$



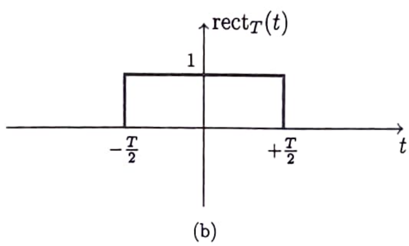


FIGURE 1 – Représentation des signaux continus $x(t)$ et $\mathrm{rect}_T(t)$