Télécom-Nancy
Module MAP - Apprentissage

Probabilités, feuille 2

Exercice 1 *Opérations sur les événements*
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ une famille d'événements d'un univers Ω. Décrire à l'aide des opérateurs ensemblistes usuels les situations ou les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A_1, A_2, A_3 est réalisé.
2. L'un seulement des événements A_1, A_2 est réalisé.
3. A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3.
4. A chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi.
5. A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble.
6. A_1 ou A_2 se produisent toujours.
7. Tous les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ se réalisent.
8. L'un au moins des A_i se réalise.
9. Comment interpréter l'événement $\displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{i=N}^{\infty} A_i$?
10. Comment interpréter l'événement $\displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i$?

Exercice 2 Parmi 10 ordinateurs portables, 5 sont en bon état et 5 ont des défauts. N'ayant pas cette information, un client achète 6 des ces ordinateurs.

1. Quelle est la probabilité qu'il achète exactement 2 ordinateurs défecteux ?
2. Quelle est la probabilité qu'il achète au moins 2 ordinateurs défectueux ?

Exercice 3 On organise une course entre trois voitures A, B et C. La voiture A a deux fois plus de chances de gagner que la voiture B ; et B a trois fois plus de chances de gagner que C. On admettra qu'il n'y a pas d ?ex-aequo.

1. Quelles sont les probabilités respectives de gagner de chacune des trois voitures ?
2. Quelle est la probabilité pour que A ou B gagne ?

Exercice 4 Le sang de tout être humain possède une caractéristique appelée rhésus. Pour chacun des deux sexes, la probabilité qu'un individu soit R+ est 0,85.

1. La formation d ?un couple est indépendante de ce facteur. Enumérer les différentes possibilités et leurs probabilités.
2. Dans les couples où l'homme est R+ et la femme R-, il se produit dans 8 % des naissances des accidents qui nécessitent un traitement spécial du nouveau-né. Déterminer la probabilité qu'un nouveau-né, de parents dont on ne connaît pas le facteur rhésus, doive subir ce traitement.

Exercice 5 A, B et C désignent 3 produits bancaires. Dans la population des clients d'une banque, 40 % des individus ont le produit A, 80 % B, 60 % C, 30 % A et B, 28 % A et C, 50 % B et C, 20 % A, B et C. On extrait au hasard un individu de la population.

1. Calculer la probabilité qu'il ait au moins un des produits.
2. Y a-t-il indépendance entre les différents produits ?

Exercice 6 *(Problème de rencontres ou problème de Montmort)*
Lors d'un bal auquel participent n couples, pour chaque cavalière, le choix du cavalier pour la première danse se fait au hasard (de manière uniforme parmi toutes les possibilités). On cherche Ã calculer la probabilité de l'événement A : "au moins un couple se retrouve pour la première danse".

1. Combien y a-t-il de possibilités pour l' épreuve qui consiste pour chaque cavalière à choisir un cavalier ?
2. On note E_i l'événement "le couple i se retrouve pour la première danse", $i = 1, ..., n$. Que peut-on dire sur ces événements et leur lien avec A ?
3. D'une manière générale, soit $k \geq 1$, on note $E_{i_1,...,i_k} = E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}$ l'événement : "les k couples i_1, .., i_k se retrouvent pour la première danse". Montrer que $P(E_{i_1,...,i_k}) = (n-k)!/n!$.
4. Avec la formule de Poincaré et les questions précédentes, calculer $P(A)$ puis en trouver une approximation en utilisant la série exponentielle ($e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$).

Exercice 7 En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football (les fameux *Diables rouges*) est composée de sept Flamands et quatre Wallons.
Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité qu'il soit flamand.

Exercice 8 Quand on téléphone entre 18 heures et 19 heures chez Pierre-Yves, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des importuns. Quand il est absent, il l'utilise toujours.

1. Calculer la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là.
2. On tombe sur le répondeur, calculer la probabilité pour qu'il soit présent.

Exercices supplémentaires non corrigés en T.D. : Devoir à la maison

Exercice 9 Soit p la probabilité qu'un moteur d'avion tombe en panne lors d'un vol. On suppose qu'un avion vole encore si au moins la moitié de ses moteurs fonctionne. Pour quelles valeurs de p un avion bimoteur présente-t-il moins de risques qu'un avion quadrimoteur ?

Exercice 10 Dans un labyrinthe en forme de T, un cobaye peut tourner à gauche et obtenir de la nourriture, ou tourner à droite et recevoir une légère décharge électrique. On admet qu'au premier essai, le cobaye a la même probabilité d'aller à droite ou à gauche. Quant le cobaye vient de recevoir de la nourriture, on admet qu'à l'essai suivant, il tourne à gauche avec une probabilité de 0,7. En revanche, quand le cobaye vient de recevoir une décharge électrique, on admet qu'à l'essai suivant, il tourne à gauche avec une probabilité de 0,9.

1. Avec quelle probabilité P_1 le cobaye tourne-t-il à gauche au second essai ?
2. Sachant que le cobaye tourne à gauche au second essai, quelle est la probabilité P_2 pour qu'il ait tourné à droite au premier essai ?
3. Avec quelle probabilité P_3 le cobaye tourne-t-il à gauche au troisième essai ? (on admettra que lors de ce troisième essai, le cobaye n'est influencé que par le résultat du deuxième essai).