1A – Apprentissage
M. Thomassin & E.-H. Djermoune
12 décembre 2019

Examen SICA1

Durée 2 heures • Aide mémoire autorisé • Exercices indépendants • Barème indicatif

---

Exercice 1. Série de Fourier (6 points)

Soit le signal continu :

$$x(t) = \sin^2(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{4}.$$

1. Représenter $x(t)$ dans l'intervalle $t \in [0, 8]$ secondes.
2. Quelle est la période T du signal ?
3. En utilisant les règles de simplification trigonométriques, linéariser l'expression de $x(t)$.
4. En déduire la valeur des coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier réelle.
5. Calculer les coefficients complexes C_n et représenter le spectre d'amplitude.

Exercice 2. Convolution discrète (4 points)

On considère les deux signaux discrets et causaux suivants :

$$x(k) = \{1, -1, 1\}$$
$$y(k) = \{1, 2, 3, -2, -1\}.$$

1. Représenter $x(k)$ et $y(k)$.
2. En utilisant la définition du produit de convolution entre 2 signaux discrets ou avec la méthode du tableau, calculer le produit de convolution $z(k)$ entre $x(k)$ et $y(k)$.
3. Représenter $z(k)$.

Exercice 3. Transformée de Fourier (6 points)

Soit le signal $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 0,5 \\ 0, & |t| > 0,5 \end{cases}$ dont la transformée de Fourier est $\mathrm{sinc}(f)$.

1. Soit le signal $x(t) = \mathrm{rect}(2t)$. Représenter graphiquement $x(t)$.
2. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, donner l'expression de $X(f)$, la transformée de Fourier de $x(t)$.
3. Soit le signal $y(t) = \mathrm{rect}(2(t-2)) + \mathrm{rect}(2(t+1))$. Représenter graphiquement $y(t)$.
4. Exprimer $y(t)$ sous la forme d'un produit de convolution entre $x(t)$ et une somme de diracs.
5. En déduire l'expression de $Y(f)$, la transformée de Fourier de $y(t)$.
6. Montrer que $Y(f) = e^{-j\pi f}\cos(3\pi f)\,\mathrm{sinc}(\frac{f}{2})$.

Tournez la page...

Exercice 4. Intercorrélation (4 points)

Le principe du radar consiste à émettre une onde électromagnétique sinusoïdale de courte durée $x(t)$ qui, réfléchie par une cible, revient à l'émetteur après une durée t_0 proportionnelle à la distance entre l'émetteur et la cible. Soit $y(t)$ le signal observé en retour (appelé *écho radar*). Ce dernier est généralement une version atténuée de $x(t)$ et perturbé par le bruit ambiant.

Pour simplifier, on suppose que $y(t) = ax(t - t_0) + b(t)$, avec $a < 1$, $t_0 > 0$ et $b(t)$ est un bruit blanc. On note $\phi_{xx}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ et $\phi_{xy}(\tau)$ la fonction d'intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$.

1. À partir de la définition, exprimer $\phi_{xy}(\tau)$ en fonction de $\phi_{xx}(\tau)$, $\phi_{xb}(\tau)$ et t_0.
2. On suppose que l'intercorrélation entre $x(t)$ et $b(t)$ est négligeable. Pour quelle valeur τ_0 la fonction $\phi_{xy}(\tau)$ atteint-elle son maximum ?
3. On note d la distance de la cible du radar et V la vitesse de propagation des ondes dans l'air. En déduire le principe d'un récepteur radar donnant la distance de la cible en fonction de τ_0 et V.
4. Application numérique : calculer τ_0 pour $d = 10$ km et $V = 3 \cdot 10^8$ m/s.