Equations différentielles
Résumé de cours

E.-H. Djermoune – M. Thomassin

Une équation différentielle est une équation dont **l'inconnue est une fonction**. Cette fonction, en général notée y (parfois f, ou encore x), est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ (son domaine de définition $\mathcal{D}$) et est à valeurs réelles ou complexes. La variable de la fonction est souvent notée t (ou x) :

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ t & \mapsto & y(t) \end{array} \right.$$

Définition 1. On appelle **équation différentielle** (ordinaire) d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) toute relation de la forme :

$$\mathcal{F}\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n y}{dt^n}(t)\right) = 0$$

entre la variable t, la fonction $y(t)$ et de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n. □

Remarques.
- Par simplification d'écriture la variable t de la fonction y peut être omise.
- Les dérivées successives peuvent aussi être notées : $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}$ ou $y', y'', \ldots, y^{(n)}$

Exemples.
1. $y' = t \iff y' - t = 0$ (les solutions sont $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante)
2. $y'' + 2y' = \cos(t) \iff y'' + 2y' - \cos(t) = 0$ (eq. diff. d'ordre 2) ■

On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation.

Les solutions peuvent ne pas avoir toutes le même ensemble de définition, un problème classique (et pas forcément facile) consiste à rechercher le plus grand domaine dans lequel on puisse trouver une solution, un autre problème est de trouver toutes les solutions.

Résoudre une équation différentielle dans un intervalle choisi, c'est trouver toutes les solutions de cette équation qui sont définies dans cet intervalle.

Une solution d'un equation différentielle d'ordre n comporte n paramètres libres, qui sont des constantes d'intégration. Par conséquent, elle admet une infinité de solutions.

Exemples.
- $y' = 0$ a pour solution $y(t) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- $y' = t$ a pour solution $y(t) = t^2/2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- $y'' = t$ a pour solution $y(t) = t^3/6 + C_1 t + C_2$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ■

LA solution du problème physique se trouve parmi cette infinité de solution. Elle est obtenue en déterminant les n constantes d'intégration. Elle dépend des conditions du problème physique (conditions initiales). Il doit y en avoir autant que de constantes d'intégration.

Définition 2. On appelle **terme perturbateur** $p(t)$ de l'équation différentielle l'ensembles des termes qui ne contiennent ni y, ni aucune de ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. □

Remarques.

- $p(t)$ peut être une fonction du temps ou un terme constant.
- lorsque $p(t) = 0$ (pas de terme perturbateur) alors l'équation est dite **homogène** ou encore **sans second membre**

La Transformée de Laplace permet la résolution d'équations différentielles **linéaires à coefficients constants**, c'est à dire sous la forme :

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_n y^{(n)} = p(t)$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes (pouvant être nulles) et $p(t)$ est un terme perturbateur.

Exemple de résolution d'une équation différentielle avec la TL.

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$3y' + 2y = 3.\mathtt{1}(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale $y(0) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ est une constante) et où $\mathtt{1}(t)$ est la fonction échelon unitaire.

Méthodologie.

1. **Transformée de Laplace de l'équation**
   L'application de la TL à l'eq. (1), en utilisant les propriétés de linéarité et de transformée d'une dérivée, conduit à :

$$3.\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2.\mathcal{L}\{y(t)\} = 3.\mathcal{L}\{\mathtt{1}(t)\} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)\right) + 2.\mathcal{L}\{y(t)\} = 3.\mathcal{L}\{\mathtt{1}(t)\} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 3\frac{1}{s} \tag{4}$$

2. **Détermination de $Y(s)$**
   A partir de l'éq. (4), on peut en déduire :

$$(3s+2)Y(s) = \frac{3}{s} + 3a \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{s(3s+2)} + \frac{3a}{3s+2} \tag{6}$$

3. **Transformée de Laplace inverse de $Y(s)$**
   Cette étape nécessite l'utilisation des tables de TL indiquées dans l'aide-mémoire. Ceci necessite souvent une nouvelle mise en forme de l'expression, voire parfois une décomposition en éléments simples.
   On peut remarquer que $Y(s)$ peut se réécrire sous la forme :

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+\frac{2}{3})} + \frac{a}{s+\frac{2}{3}} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{2}\frac{\frac{2}{3}}{s(s+\frac{2}{3})} + a\frac{1}{s+\frac{2}{3}} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

   dont la TL inverse est :

$$y(t) = \frac{3}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}).\mathtt{1}(t) + a\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}.\mathtt{1}(t) \tag{10}$$

La solution est donc :

$$y(t) = \left[\frac{3}{2} + \left(a - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}\right].\mathtt{1}(t) \tag{11}$$