# Examen

GRO : Graphes et Recherche Opérationnelle

La notation tiendra compte de la présentation et de la clarté de la rédaction.

★ **Exercice 1: ConTRôLe Continu, c'est PLUS Variable**

On dispose de $m$ clefs USB sur lesquelles on veut stocker $n$ fichiers de taille $c_1, \cdots, c_n$. Les clefs USB n'ont pas toutes la même capacité de stockage, la clef $i$ peut contenir $S_i$ GigaOctets. Tous les fichiers doivent être stockés. Pour qu'un stockage soit admissible il faut que la somme des tailles des fichiers stockés sur une clef $i$ soit inférieure ou égale à $S_i$ (on ne peut pas dépasser la capacité d'une clef...). De plus, un fichier n'est stocké qu'une seule fois sur une seule clef.

Déterminer un stockage consiste alors à déterminer sur quelle clef $j$ est stocké le fichier $i$ donné. On cherche à déterminer le stockage (admissible) des fichiers sur les clefs USB de façon à minimiser le nombre de clefs utilisées.

▷ **Question 1:** Ecrire le problème $(P)$ sous la forme suivante

$$(PL)\begin{cases}\min\limits_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^\top\mathbf{x}\\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\\ B\mathbf{x} = \mathbf{d}\\ \mathbf{x} \in \{0,\,1\}\end{cases}$$

en explicitant les matrices $A$ et $B$ ainsi que les vecteurs $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$.

★ **Exercice 2: Simplement Simple**

Résoudre par la méthode des dictionnaires le problème 1 :

$$\min_{\mathbf{x}}\,[F(\mathbf{x}) = -4x_1 - 8x_2]$$
$$\begin{cases}-x_1 + 3x_2 \le 9\\ x_1 + x_2 \le 7\\ 2x_1 + x_2 \le 12\\ \mathbf{x} \ge 0\end{cases} \tag{1}$$

★ **Exercice 3: De cours**

▷ **Question 1:** On considère le problème suivant : trouver $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ solution de 2

$$\min_{\mathbf{x}}\,[F(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2]$$
$$\begin{cases}x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 5\\ -2x_1 + 4x_3 \le -4\\ \mathbf{x} \ge 0\end{cases} \tag{2}$$

Pour l'ensemble des bases possibles, déterminer si les solutions associées sont des solutions de bases ou non et si elles sont réalisables ou non

★ **Exercice 4: En court**

Répondez aux questions suivantes :

▷ **Question 1:** Donnez la définition de : solution réalisable, solution de base et solution de base réalisable

▷ **Question 2:** Donnez les situations possibles pour $\mathcal{D}_R$ et $F$ pour la résolution d'un programme linéaire standard, précisez les solutions correspondantes

▷ **Question 3:** Pourquoi doit on déterminer la solution associée à la base choisie lors de l'initialisation du simplexe ?

▷ **Question 4:** Quels sont les cas remarquables dans la finitude du simplexe ?

▷ **Question 5:** Donnez les cas possibles lors de la fin du simplexe du programme auxiliaire

▷ **Question 6:** Soit $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_B^*\\ \mathbf{x}_H^*\end{pmatrix}$ avec $\mathbf{x}_H^* = 0$ une solution de base réalisable du programme linéaire (PL).

1. Pour toute solution réalisable $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$, montrer que
$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + \left(\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H\right)\mathbf{x}_H.$$
2. En déduire une condition suffisante - dite condition d'optimalité - pour que $\mathbf{x}^*$ soit une solution optimale.