Maths Num

1

Mettre tous les nombres en binaire puis en decimal : $F(2, 3, -1, 2)$

$1,00 \times 2^{-1}$	$(0,5)_{10}$ ✓
0,125 ↓ $1,01 \times 2^{-1}$	$(0,625)_{10}$ ✓
↓ $1,10 \times 2^{-1}$	$(0,750)_{10}$ ✓
↓ $1,11 \times 2^{-1}$	$(0,825)_{10}$ ✓
↓ $1,00 \times 2^{0}$	$(1)_{10}$
0,250 ↓ $1,01 \times 2^{0}$	$(1,250)_{10}$
↓ $1,10 \times 2^{0}$	$(1,5)_{10}$
↓ $1,11 \times 2^{0}$	$(1,750)_{10}$
↓ $1,00 \times 2^{1}$	$(2)_{10}$
0,5 ↓ $1,01 \times 2^{1}$	$(2,5)_{10}$
↓ $1,10 \times 2^{1}$	$(3)_{10}$
↓ $1,11 \times 2^{1}$	$(3,5)_{10}$
↓ $1,00 \times 2^{2}$	$(4)_{10}$
1 ↓ $1,01 \times 2^{2}$	$(5)_{10}$
↓ $1,10 \times 2^{2}$	$(6)_{10}$
↓ $1,11 \times 2^{2}$	$(7)_{10}$

TD 1 - nombres flottants

Exercice 1 :

$$M = (1-10^{-4})10^{4+1} = 10^{5} - 10^{1} = 99990$$

$$m = \beta^{e_{min}} = 10^{-4}$$

$$u = \frac{1}{2} 10^{1-4} = \frac{1}{2} 10^{-3} = \frac{10^{-3}}{2}$$

(le gras est là exprès)

⚠

2

Formules

$M = (1-\beta^{-p})\beta^{e_{max}+1}$

$m = \beta^{e_{min}}$

$u = \frac{1}{2}\beta^{1-p}$

$\tilde{M} = \frac{M + \beta^{e_{max}+1}}{2} = \frac{9,999\ 10^4 + 10^5}{2} = 9,995 \times 10^4$

$fl(1,0015) = 1,002$ règle de l'arrondi au flottant dont le dernier chiffre est paire

$fl(1,234 \times 10^{-3}) = 1,234\ 10^{-3}$

$fl(1,234\ 10^{-5}) = 0,1234\ 10^{-4}$

$\hookrightarrow 0,123 . 10^{-4}$

$fl(9,9995\ 10^4) = Inf$ car $\tilde{M}$

+Inf par défaut

$fl(9,99949\ 10^4) = 9,99\ 10^4$

$fl(1,234\ 10^5) = Inf$

Exercice n° 2

Maths Num ③

1) $u = \frac{1}{2}\ 10^{1-8} = \frac{10^{-7}}{2} = 5\ 10^{-8}$

2) $(11111113 \oplus -11111111) \oplus 7{,}511111$

$$= \begin{array}{r} 11111113 \\ -11111111 \\ \hline 00000002 \end{array}$$

$2 + 7{,}511111 = 9{,}511111$

2e méthode :

$11111113 \oplus (-11111111 \oplus 7{,}511111)$

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ 7{,}511111 \\ \hline - 11111103\ 488889 \end{array}$$

Resultat exact :

$-11111103{,}488889$

Resultat machine : $fl(\text{———}) = -11111103$

Formules :

$$er = \frac{ra - re}{re}$$

(4)

1111113(7) − 1111103 = 10

$x \neq 0$

"y une approximation" de x

$|x-y|$ → erreur absolue $\left(\begin{array}{l} x-y \\ y-x \end{array}\right)$

$\left|\frac{x-y}{x}\right|$ → erreur relative.

$\frac{x-y}{x}$ → erreur relative signée

$$\left|\frac{x-y}{x}\right| \leq E$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x(1+\varepsilon)$$

avec $|\varepsilon| \leq E$

Exercice n°3

On pose $e = \frac{x-y}{x}$ | $|e| \leq E$

$xe = x - y$

$y = x + xe$

$y = x(1+e)$ $|e| \leq E$

Maths Num

5

Exercice n°4

1) $(0,2)_{10} = (\ldots\ldots)_2$

$$(0,2)_{10} = d_1\, 2^{-1} + d_2\, 2^{-2} + d_3\, 2^{-3} + \cdots$$

$$= \sum_{k \geq 1} d_k\, 2^{-k}$$

But : trouver d_1, d_2, d_3

Comment ?

on multiplie par 2 et on prend la partie entière

$0,2 \times 2 = 0,4$

$0 = \lfloor 0,4 \rfloor \rightarrow$ floor

$\lceil \quad \rceil \rightarrow$ ceil

$\Rightarrow d_1 = 0$

~~$d_2 = 0$~~

~~$d_3 = 1$~~

$$(0,4)_{10} = d_2\, 2^{-1} + d_3\, 2^{-2} + \ldots$$

$0,4 \times 2 = 0,8$ ~~$\rightarrow d$~~ et $\lfloor 0,8 \rfloor = 0 \rightarrow d_2 = 0$

$0,8 \times 2 = 1,6$ et $\lfloor 1,6 \rfloor = 1 \rightarrow d_3 = 1$

$0,6 \times 2 = 1,2$ et $\lfloor 1,2 \rfloor = 1 \rightarrow d_4 = 1$

$0,2 \times 2 = 0,4$ et $\lfloor 0,4 \rfloor = 0 \rightarrow d_5 = 0$

si on a un un nombre >1, on lui retire 1
sinon on le reprend tel quel

6

On obtient ainsi :

$$(0,2)_{10} = (0,0011001100110011\ldots)_2$$

2) $(0,1)_{10} = (\ldots\ldots)_2$

Boucle

$0,1 \times 2 = 0,2$ $[0,2] = 0$ $\to d_1 = 0$

$0,2 \times 2 = 0,4$ $[0,4] = 0$ $\to d_2 = 0$

$0,4 \times 2 = 0,8$ $[0,8] = 0$ $\to d_3 = 0$

$0,8 \times 2 = 1,6$ $[1,6] = 1$ $\to d_4 = 1$

$0,6 \times 2 = 1,2$ $[1,2] = 1$ $\to d_5 = 1.$

$0,2 \times 2 = 0,4$ $[0,4] = 0$ $d_6 = 0$

$$(0,1)_{10} = (0,000110011\ldots)_2 \to b_1 b_2 b_3 b_4$$

$$(0,4)_{10} = (0,0110011\ldots)_2 \to b_1 b_2 b_3 b_4$$

3) $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$

$$(0,2)_2 = (\underbrace{1,100}_{1}\underbrace{1100}_{2}\underbrace{1100}_{3}\underbrace{1100}_{4}11\ldots)_2 \times 2^{-3}$$

$\underset{13}{1100}$ ~~1100~~

$$53 = 13 \times 4 + 1$$

$\in$ "double"

$$m_p = (1,100\ldots\ldots 11001)_2\, 2^{-3}$$

$$m_s = (1,100\ldots\ldots 11010)_2\, 2^{-3}$$

$\hookrightarrow$ on aura m_s qui est nombre flottant le plus proche

~~SIGA~~ Maths Num

7

Exercice n°5

1) $x = ((a * b) * c) / (d * e)$

$$x_c = ((a \circledast b) \otimes c) \oslash (d \oplus e))$$

on suppose que tous les resultats ne donnent pas d'overflow [redacted] et pas d'underflow

overflow : $|\text{resultat}| \geq \tilde{M}$

underflow : $|\text{resultat}| < m$

et resultat $\notin \mathbb{F}(\beta, p, \dots)$

$a \otimes b = fl(a \times b) = a \times b\,(1+\varepsilon_1)$ avec $|\varepsilon_1| \leq u$

on pose $r = a \otimes b$

$\cancel{r \otimes c = fl(r \times c)(1+\varepsilon_2)}$

$\cancel{((r \otimes c) \otimes d = (r \times c)(\times d)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}$

$\cancel{((r \otimes c) \otimes d}$

$$r \otimes c = r \times c\,(1+\varepsilon_2)$$

$$((a \otimes b) \otimes c) = a \times b \times c\,(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$$

$$s = d \circledast e = d * e\,(1+\varepsilon_3)$$

$$((a \otimes b) \otimes c) / (d \otimes e) = a \times b \times c / d \times e * \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_3)}(1+\varepsilon$$

$$x_c = \cancel{x} \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_d)}{(1+\varepsilon_3)}$$

$= x$

$x_e = x(1+\delta)$

↳ erreur relative signée

$q = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$ avec $|\varepsilon_1| \leq u$

$= 1 + \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\delta}$ $\quad |\varepsilon_2| \leq u$

δ (delta)

$= 1 +$

$|\delta| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2|$

$\leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_1 \varepsilon_2| = 2u + u^2$

Exercice 6

$$\frac{(1+\varepsilon_1) \cdots (1+\varepsilon_k)}{(1+\varepsilon_{k+1}) \cdots (1+\varepsilon_m)}$$

$mu < 1 \quad = 1+\delta$ avec $|\delta| \leq \frac{mu}{1-mu}$

Exo 5 (suite

$x_c = x(1+\delta)$

$|\delta| \leq \frac{4u}{1-4u}$

Maths Num

9

Ex05 (suite)

2) $S = \sum_{k=1}^{m} x_k$

$S \leftarrow 0$
Pour k de 1 à m
  $S \leftarrow S + x_k$
fpour

$S_c = ((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \oplus x_4$

$$S_c = (x_1 + x_2)(1+\varepsilon_1) \cdots (1+\varepsilon_{m-1})$$
$$\cancel{+ x_3 (1+}$$
$$+ x_3 (1+\varepsilon_2) \cdots (1+\varepsilon_{m-1})$$
$$+ x_4 (1+\varepsilon_3) \cdots (1+\varepsilon_{m-1})$$
$$\vdots$$
$$+ x_m (1+\varepsilon_{m-1})$$

$$x_1 \oplus x_2 = fl(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(1+\varepsilon_i)$$

avec $|\varepsilon_m| \leq u$

ε_i = erreur relative signée introduite lors de la $i^{ème}$ operation

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = fl(fl(x_1 + x_2) + x_3) =$$
$$= ((x_1 + x_2)(1+\varepsilon_1) + x_3)(1+\varepsilon_2)$$
$$= (x_1 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 + x_2 \varepsilon_1 + x_3)(1+\varepsilon_2)$$

10

$$\underbrace{(x_1 \oplus x_2)}_{t} \oplus x_3 = fl(t + x_3) = (t + x_3)(1+\varepsilon_2)$$

avec $|\varepsilon_2| \leq u$

$$= ((x_1 + x_2)(1+\varepsilon_1) + x_3)(1+\varepsilon_2)$$

$$= (x_1 + x_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) + x_3(1+\varepsilon_2)$$

$$((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \oplus x_4 = fl(q + x_4) = (q + x_4)(1+\varepsilon_3)$$

$|\varepsilon_3| \leq u$

$$= ((x_1+x_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) + x_3(1+\varepsilon_2) + x_4)(1+\varepsilon_3)$$

$$= (x_1+x_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + x_3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + x_4(1+\varepsilon_3)$$

$$\begin{aligned}
\hat{S} = \; & (x_1+x_2)(1+\delta_{n-1}) && = (x_1+x_2) + \delta_{n-1}(x_1+x_2) \\
& + x_3(1+\delta_{n-2}) && + x_3 + \delta_{n-2}\, x_3 \\
& + x_4(1+\delta_{n-3}) && + x_4 + \delta_{n-3}\, x_4 \\
& \vdots && \vdots \\
& + x_n(1+\delta_1) && + x_n + \delta_1\, x_n
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme de simplification avec $|\delta_i| = \dfrac{iu}{1-iu}$

$$\hat{S} - S = \delta_{n-1}(x_1+x_2) + \delta_{n-2}\, x_3 + \dots + \delta_1\, x_n$$

Maths Num (11)

$|S_c - S| = |$ ——————— $|$ erreur absolue

b) $S \neq 0$

$$\frac{|S_c - S|}{|S|} \leq \frac{?(|x_1| + \dots + |x_n|)?}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}$$

$$|S_c - S| \leq |\delta_{n-1} x_1| + |\delta_{n-1} x_2| + |\delta_{n-2} x_3| + \dots + |\delta_1 x_n|$$

$\leq$

$$|\delta_i| \leq \frac{iu}{1-iu}$$

$$|\delta_i| \leq \frac{(n-1)u}{1-(n-1)u} \quad \forall i$$

$$\leq \frac{(n-1)u}{1-(n-1)u} \left(|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|\right)$$

$$\boxed{\frac{|S_c - S|}{|S|} \leq \underbrace{\frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{|x_1 + \dots + x_n|}}_{K_x} \frac{(n-1)u}{1-(n-1)u}}$$

Si tous les x sont de même signe alors $K_x = 1$

12

$$\frac{|S_c - S|}{S} \leq \frac{(n-1)u}{1-(n-1)u}$$

3) resultat final $x - y$

avec x et y prôches

$x \to X = x + \delta x$ $\quad e_x = \frac{\delta x}{x}$

$y \to Y = y + \delta y$ $\quad e_y = \frac{\delta y}{y}$

$X \ominus Y = X \ominus Y$ car on considère que X et Y restent proches

$$\boxed{e_r = \frac{|X \ominus Y| - |x - y|}{x - y}}$$

écrire e_r en fonction de e_x et e_y

$$e_r = \frac{|X \ominus Y| - (x-y)}{x-y} = \frac{(x + \delta x) - (y + \delta y) - (x - y)}{x - y}$$

$r_x = \frac{x}{x-y}$

$r_y = \frac{y}{x-y}$

$$e_r = \frac{(x-y) + (\delta x - \delta y) - (x-y)}{x-y}$$

$$e_r = \frac{\delta x - \delta y}{x-y}$$

$$e_r = \frac{e_x \times x + e_y \times y}{x-y}$$

donc $e_r = r_x e_x - r_y e_y$

Maths Num (13)

$\cancel{e_x = 5x}$ exemple : $x = 1000\,1$
$y = 1000\,0$

$e_x = 5u$
$e_y = -3u$

$e_{\Sigma} = 1000\,1 \times 5u \pm 1000\,3u$

$= 20005\,u \simeq 80\,000\,u$

⚠ l'écriture en rose est avec un moins 3u et donc applique les modifications uniquement aux elements ajouté en rose

4) $\Phi(x) = (1 \oslash (1 \oplus x)) \ominus (1 \oslash (1 \ominus x))$

On veut évaluer $\Phi(x)$ avec $|x|$ petit $|x| < 10^{-1}$

$y_1 = (1 \oslash (1 \oplus x)) \ominus (1 \oslash (1 \ominus x))$

$y_2 = -(2 \otimes x) \oslash ((1 \oplus x) \otimes (1 \ominus x))$

$\underbrace{(1 \oplus x)}_{t} = fl(1+x) = (1+x)(1+\varepsilon_1)$

$\underbrace{1 \oslash (t)}_{J} = f(1 / t) = (1/t)(1+\varepsilon_2)$
$= (1 / (1+x)(1+\varepsilon_1))(1+\varepsilon_2)$
$= \frac{(1)}{(1+x)} \frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)}$

14

$$\underbrace{1 \ominus x}_{v} = fl(1-x) = (1-x)(1+\varepsilon_3)$$

$$\underbrace{(1 \oslash v)}_{w} = fl(1/v) = (1/v)(1+\varepsilon_4)$$

$$= \frac{1}{1-x} \frac{1+\varepsilon_3}{1+\varepsilon_4}$$

$$(y \ominus w) = \underbrace{fl(y-w)}_{} = \frac{1}{1+x}\frac{(1+\varepsilon_1)}{1+\varepsilon_2} - \frac{1}{1-x}\frac{1+\varepsilon_3}{1+\varepsilon_4}$$

A voir plus loin mais erreur trop petite

$$= \frac{1}{1+x}(1+\delta') - \frac{1}{1-x}(1+\delta'')$$

$$|\delta'|, |\delta''| \leq \frac{2u}{1-2u}$$

$y_2)$ $(1 \oplus x) = (1+x)(1+\varepsilon_1)$

$$(1 \ominus x) = (1-x)(1+\varepsilon_2)$$

$$(1 \oplus x) \otimes (1 \ominus x) = (1 \oplus x)(1 \ominus x)(1+\varepsilon_3)$$

$$y_2 = \frac{-2x \quad (1+\varepsilon_4)}{(1 \oplus x)(1 \ominus x)(1+\varepsilon_3)}$$

$$= \frac{-2x(1+\varepsilon_4)}{(1+x)(1-x)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}$$

$$y^2 = y(1+\delta)$$

avec $|\delta| \leq \frac{4u}{1-4u}$

Maths Numériques (15)

<u>Remarque</u> : Pour l'algorithme avec $|x| \leq 0,1$,

la dernière soustraction sera exacte, donc

$y_1 = (1 \oslash (1 \oplus x) - (1 \oslash (1 \ominus x))$

$$y_1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-y} + \frac{\delta'}{1+x} - \frac{\delta''}{1-x}$$

$$= \Phi(x)\left(1 + \frac{\frac{\delta'}{1+x} - \frac{\delta''}{1-x}}{\Phi(x)}\right)$$

$$\Phi(x) = \frac{-2x}{(1+x)(1-x)} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{(1+x)(1-x)}{-2x}$$

$$y_1 = \Phi(x)\left(1 + \left(\frac{1-x}{-2x}\right)\delta' - \left(\frac{1+x}{-2x}\right)\delta''\right)$$

Exercice 15 :

1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

flottants 4 octets alias float alias simple précision

$\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$

$m \simeq 1,2 \cdot 10^{-38}$

$M \simeq 1,2 \cdot 10^{38}$

16

exemple

$x = y = 10^{20}$

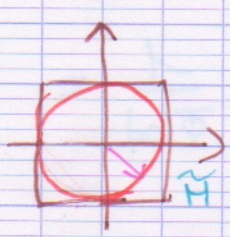
$\text{sqrt}(x \otimes x \oplus y \otimes y) \to \text{Inf}$

$\sqrt{(10^{20})^2 + (10^{20})^2}$

résultat calculable $\leftarrow$ $= \sqrt{2}\, 10^{20} \in [\bar{m} ; \tilde{M}[$

$\Rightarrow$ overflow parasite

2) underflow : $|x| \in]0 ; \bar{m}[$ et pas un nombre dénormalisé



Normalisation

$\sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a^2(1+\frac{b^2}{a^2})}$

si $|x| \geq |y|$

 $a \leftarrow |x|$; $b \leftarrow |y|$

Sinon

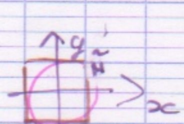
 $a \leftarrow |y|$; $b \leftarrow |x|$

Si $a = 0$ alors

 retourner 0

Sinon

 retourner $a * \text{sqrt}(1 + (b/a)^2)$



Maths Num

~~17~~

17

TD1

Autre methode:

$$\sqrt{x^2+y^2}$$
$$= |c| \sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

On peut prendre pour c : 2^k

tel que $2^{k-1} < \text{Max} \{ |x|, |y| \leq 2^k \}$

TD 2

Exercice 1:

$$e^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \to j$$

$$(e^j)_{i,1} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$Ae^j = A^j$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,j} \end{bmatrix}$$

18

(A, e^j)

$(m,n)(n,1)$

$(m,1)$

Montrons que:

$\forall i \in [\![1, m]\!]$

$(Ae^j)_{i,1} = a_{i,j}$

Produit matriciel:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} \,,\ \forall (i,j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, p]\!]$$

$$(Ae^j)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} (e^j)_{k,1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (e^j)_{k,1}$$

symbole de Kronecker

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \underbrace{\delta_{j,k}}_{\substack{=0 \text{ pour } k \neq j \\ =1 \text{ pour } k = j}}$$

$$= a_{i,j}$$

Maths Num (19)

Soit e^i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$

$(e^i)^T A = A_i$

$(1, m)$ e^i $(m, 1)$ $(e^i)^T$

$$\boxed{\left((e^i)^T\right)_{i,j} = \delta_{i,j}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & & a_{i,j} & & a_{i,m} \\ a_{m,1} & & a_{m,j} & & a_{m,m} \end{bmatrix}$$

$[0 \dots 010 \dots 0]$ $[a_{i,1} \dots a_{i,j} \dots a_{i,m}]$

$(1, m)$ (m, m) $\longrightarrow (1, m)$

$\forall j \in [1, m] \left((e^i)^T\right) \overset{?}{=} a_{i,j}$

$\sum_{k=1}^{m} \left((e^i)^T\right)_k (A)_{\cdot, j}$: formule du produit matriciel

$(1, i)$

$(i, 1)$ $A_{1,j}$

$\underbrace{\delta_{i,k}}_{=0} a_{k,j}$

Sauf pour $k = i$

2) $A(m, m)$ $AB(m, p)$ ~~BA~~ $(\cancel{m,m})$ pas possible sauf si $(m = p)$

$B(m, p)$

20

on veut montrer $(AB)_i = A_i B$ et $(AB)^j = AB^j$ | utilisation de 1) et pas la formule du ~~produit~~ matriciel

$(B \times C) \times D = B \times (C \times D)$

$(n_1, n_2)\,(n_2, n_3)\,(n_3, n_4) = (n_1, n_4)$

$(AB)_i = (e^i)^T (AB) = ((e^i)^T A) B$

$= A_i B$

$(1, n)(n, p)$

$(1, p)$

$(AB)^j = (AB)(e^j) = A(B(e^j))$ → $j$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$

$= AB^j$

$(1, n)(n, p)$

$(1, p)$

3) Lorsque $\det A \neq 0$, $\exists!$ matrice inverse notée A^{-1} tel que $\begin{cases} AA^{-1} = I \\ A^{-1}A = I \end{cases}$

$A\,(n, n)$

$(AA^{-1}) = I \iff$ les matrices sont egales "colonnes par colonnes"

$A(A^{-1})^j = (AA^{-1})^j = I^j$ pour $j = 1, \dots, n$

$\underbrace{A\boxed{(A^{-1})^j}}_{x^{(j)}} = e^j \quad j = 1, \dots, n$

Maths Num

21

TD 2

$A\, x^{(1)} = e^{1}$ $\quad (A^{-1})^{1}$

$A\, x^{(2)} = e^{2}$ $\quad (A^{-1})^{2}$

4)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$(n,1) \qquad (n,1)$

$y^T \; (1,n)$

Au
$(n,n)(n,1) = (n,1)$

On définie $A = x\,y^T$

quelles dimensions de A ? (n,n)

$$(A)_{i,j} = x_i y_j$$

$$\text{Ker}(A) = \{u \in \mathbb{R}^n \cdot Au = 0\}$$

On cherche donc les vecteurs tel que $A_n = 0$
(Remarque $u = 0$, vérifie bien $Au = 0$)

$$Au = 0 \iff (x y^T) u = 0$$
$$\iff x (y^T u) = 0$$

$\Downarrow$

? dimension

qu'est ce que c'est ?

$\iff (u|y)\,x = 0$

$\iff (u|y) = 0$ car $x \neq 0$

$u \in \mathrm{Ker}\, A \iff (u|y) = 0$

$\iff u$ est orthogonale à y

$$\underset{E}{x} \xrightarrow{f} \underset{F}{f(x)}$$

$\{y \in F : \exists\, x \in E$ avec $y = f(x)\}$

$\mathrm{Im}\, A = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists\, u \in \mathbb{R}$ avec $v = Au\}$

Ici $Au = \overbrace{(u|y)}^{\in \mathbb{R}}\, x \quad \in \mathrm{Vect}\{x\}$

$\downarrow$

ensemble des vecteurs qui s'écrivent de x $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Vect}\{x\}$

$\mathrm{Vec}\{x\} \subset \mathrm{Im}\, A$? $\rightarrow$ oui !

Soit $v \in \mathrm{Vect}\{x\}$, $v = \alpha x$ avec $\alpha = \mathbb{R}$

$\exists\, u$ tel que $Au = v \iff (u|y)\,x = \alpha x$

en choisissant $u = \dfrac{\alpha y}{(y|y)}$

$$(u|u) = \frac{\alpha (y|y)}{(y|y)} = \alpha$$

Maths
Naem
(E.D)

$n \leftarrow 2$

$n = b_n$

$t_{i,i} x_i + t_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + t_{i,n} x_n = b_i$

$\vdots$

$t_{n-1,n} x_{n-1} + t_{n-1,n} x_{n} = b_{n-1}$ $\quad x_{n-1} = (b_{n-1} - t_{n-1,n} x_n)/t_{n-1,n}$

$t_{n,n} x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n / t_{n,n}$

$x_i = b_i - (t_{i,i+1} x_{i+1} + t_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + t_{i,n} x_n))/t_{i,i}$

$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} t_{i,j} x_j\right)/t_{i,i}$

$t_{i,j} \neq 0 \quad \forall i$

$LU \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$a - 2b - 3c$ $\quad 7a - 8b - 6c$

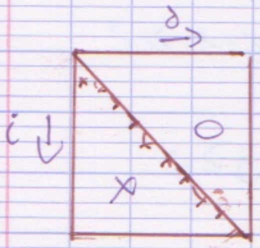
$y = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$

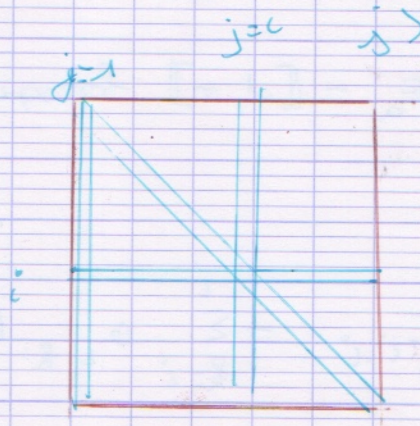
$4a - 5b - 6c$

Maths Num 23 Bis

Exercice n°2:

1) Soit A et B, deux matrices tri inf

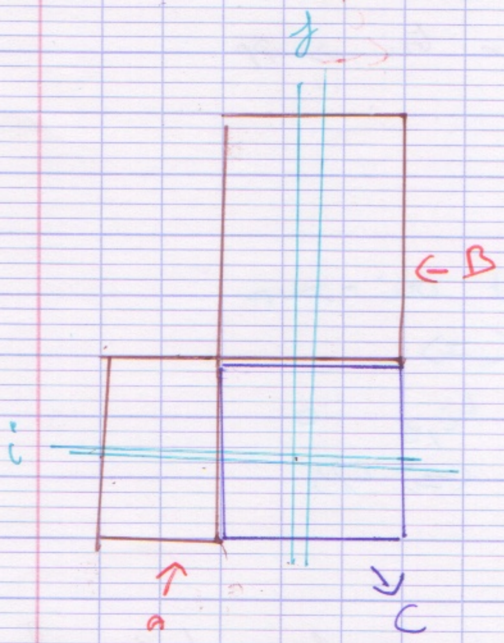




$a_{i,j} = 0 \ \forall j > i$

idem pour B

$b_{i,j} = 0, \forall j > i$



$c_{i,j} = A_i \, B_j$

$(1,n)(n,1)$

$c_{i,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots$

$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

Si $E_a \cup F_b = [\![1,n]\!]$ $E_a = \{k : a_{i,k} = 0\}$ $F_b = \{k : b_{k,j} = 0\}$

C tri Inf $\Leftrightarrow$ $c_{i,j} = 0$ pour $j > i$

pour $j \leq i$ $c_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} a_{i,k} b_{k,j}$

Maths Num

24

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \, b_{k,j}$$

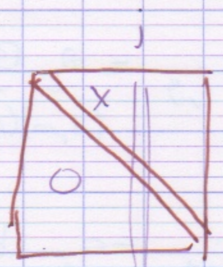
$$E_a = [\![i+1, n]\!] \,,\; E_b [\![1, 1-j]\!]$$

$$E_b \cup E_a = [\![1, n]\!] \text{ lorsque } j-1 \geq i$$

$$j \geq i$$

$$C_{i,i} = \sum_{k=i}^{i} a_{i,k} \, b_{k,i}$$

Idem, le produit de 2 matrices tri-sup est une matrice tri supp



T est tri-sup

$\iff$

$t_{i,j} = 0$

$\iff i > j$

2)a) Soit T, une matrice triangulaire. Montrer que $\det T = \prod_{k=1}^{n} t_{k,k}$

T tri inf $\quad \det T = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+4} \, t_{i,n} \det([T]_{l(i,4)})$

$$= \underbrace{-t_{1,4}}_{0} \times \begin{bmatrix} t_{2,1} & t_{2,2} & 0 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} \end{bmatrix} + \dots$$

(voir vidéo la suite)

Maths Ucem

25

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 & 0 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & 0 \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{t_{2,4}}_{=0} \times \begin{bmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} \end{bmatrix}$$

$$- \underbrace{t_{3,4}}_{=0} \begin{bmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} \end{bmatrix}$$

$$+ t_{4,4} \begin{bmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} t_{i,3} \det(T'_{/(-i,-3)})$$

$$= (-1)^{6} t_{3,3} \begin{vmatrix} t_{1,1} & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$= t_{4,4}\, t_{3,3}\, t_{2,2}\, t_{1,1}$$

26

$$\det T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n}\, t_{i,4}\, \det\left([T]_{/(i,n)}\right)$$

$$\det\left(\underbrace{[T]_n}_{}\right) = t_{n,n} \det\left([T]_{n-1}\right) = \prod_{k=1}^{n} t_{k,k}$$

sous matrice principale d'ordre n

$$[T]_1 = t_{1,1}$$

$$[T]_2 = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$[T]_3 = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{etc}$$

Remarque : il semble "naturel" que le determinant soit constitué du produit des elements diagonaux

Exo : retrouver l'algo pour resoudre un systeme tri-sup

$Tx = b$ avec T tri-sup

ecrire les equations de resup

$n, n-1, 1, i, \zeta_1$

Maths num

27

TDL

Exercice 3

$\boxed{\text{Etape 1}}$

$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Bon →

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 24 & 60 \\ 1 & 14 & 78 & 252 \end{pmatrix} \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 42 \\ 188 \end{pmatrix}$$

$$g^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$
$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 10$
$x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 44$
$x_1 + 14x_2 + 78x_3 + 252x_4 = 190$

$$M^{(1)} = I - g^{(1)}(e^1)^T$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

28

ligne de M_1
* colone de A

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$M^{(1)} A =$

etape 2

enleve la dependance en x_2 des etapes 3 à 5

$$equ_i^{(2)} : equ_i^{(1)} - coef_i^{(2)} \, equ_2^{(1)}$$

60 - 12x3

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 8 \\ 6x_2 + 24x_3 + 60x_4 = 42 \\ 14x_2 + 78x_3 + 262x_4 = 188 \end{cases}$$

24 - 3x = 6

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 7 & 36 & 168 \end{bmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 134 \end{bmatrix}$$

8 16 24

$$M^{(2)} = I - y^{2}(e^{2})^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maths Num 29

Verification

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 24 & 60 \\ 0 & 14 & 78 & 252 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 168 \end{matrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & -3 & 6 & 24 \\ 1 & -7 & 36 & 168 \end{bmatrix}$$

$J^{(1)}$ $J^{(2)}$

Etape 3

$$J^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 7 & 36 & 168 \end{bmatrix} \; , \; b^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 132 \end{bmatrix}$$

idée de la 3e etape

$$6x_3 + 24x_4 = 18$$
$$36x_3 + 168x_4 = 132$$

$$equ_4^{(3)} = equ_4^{(2)} - coef_4 \; equ_3^{(2)}$$

$$A^{(3)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 2 & 6 & 12 \\ 1 & \boxed{3} & 6 & 24 \\ 1 & 7 & \boxed{6} & 24 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} g^{(1)} & g^{(2)} & g^{(3)} & \end{array} \end{array}, \quad b^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 24 \end{bmatrix}$$

⚠ On prend toujours celui au dessus de la diagonale pour le calcul ⚠

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 &= 8 \\ 6x_3 + 24x_4 &= 18 \\ 24x_4 &= 24 \end{aligned}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$

$x_4 = 1$

$$x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supposons que l'on ait pas conduit les opérations de gausse en b

Mais on connait <u>la factorisation</u>

$$\text{avec } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$

$LUx = b$

$Ly = b$

Maths Num

3-1

Tri Inf

$$Ly = b \iff \begin{cases} y_1 & = 2 \\ y_1 + y_2 & = 10 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 & = 44 \\ y_1 + 7y_2 + 6y_3 + y_4 & = 190 \end{cases}$$

$y_1 = 2$

$y_2 = 10 - 2 = 8$

$y_3 = 44 - 3\times 8 - 2 = 44 - 26 = 18$

$y_4 = 190 - 6\times 18 - 7\times 8 - 2 = 190 - 48 - 56 - 2$

$= 190 - 166$

$= 24$

$8\times 5 = 40$ $\quad$ 10 6

$8\times 6 = 48$

$7\times 8 = 56$

$6\times 18 = 6\times 10 + 6\times 8 = 60 + 48 = 108$

$108 + 56 + 2 = 166$

Tri sup

Voir les equations avant tri Inf

$Ux = y$

32

TD2- Exercice n°5

$Ly = b$

pour i de 1 à n

$y_i \leftarrow b_i$

pour j de 1 à $i-1$

$y_i \leftarrow y_i - l_{i,j} y_j$ 1⊖ 1⊗

nb d'itérations ? → $i-1$ itérations

→ $i-1$ ⊖

$i-1$ ⊗

on pose $i' = i-1$

$$C_{\otimes} = C_{\ominus} = \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \sum_{i'=0}^{n-1} i'$$

$$= \sum_{i'=1}^{n-1} i' = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$Ux = y$

pour i de n à 1 (pas de -1)

$x_i \leftarrow y_i$

pour j de $i+1$ à n → $n-(i+1)+1 = n-i$

$x_i \leftarrow x_i - U_{i,j} x_j$

$x_i \leftarrow x_i / U_{i,i}$

$n-i$ ⊗

$n-i$ ⊖

1 ⊘

$$C_{\otimes} = C_{\ominus} = \sum_{i=1}^{n} (n-i) \qquad i' = n-i$$

$C_{\oslash} = n$

$i \in [1, n]$

$i' \in [\![0, n-1]\!]$

Maths Num

33

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

1) Pour k de 1 à n-1

si $LU_{k,k} = 0$

erreur à gérer

pour i de k+1 à n

$LU_{i,k} \leftarrow LU_{i,k} / LU_{k,k}$ ①

pour j de k+1 à n

$LU_{i,j} \leftarrow LU_{i,j} - LU_{i,k} * LU_{k,j}$ ⊖ ⊗

$(n-k)$ itération

$n-(k+1)+1$
$= n-k$ itération

$$C_{\ominus} = C_{\otimes} = (n-k)^2$$

$$C_{\oslash} = n-k$$

donc $C_{\ominus} = C_{\otimes} = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n-k)}_{i=n-k}^2$

$k \in [1, n-1]$

$i \in [1, n-1]$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + o(n^3)$$

34

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n-1} n-k = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$

Test: Revoir question 1 TD 2

Matrices Triangulaires

Revoir comptage d'opération

Maths Num 35

TD 4

Exercice 1 (voir début dans cours p 16)

$p(x) = (-1)\mathcal{L}_0(x) + 2\mathcal{L}_1(x) + 1\mathcal{L}_2(x)$

$= (-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + 2\dfrac{(x+1)(x-1)}{-1} + 1 \times \dfrac{(x+1)x}{2}$

Exercice 2:

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (\cdot, \cdot) \dots (x_n, y_n)$

$\exists!\ p \in \mathcal{P}_n$ tq

$p(x_i) = y_i$

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x)$

$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\dfrac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) =$

1) evaluation la + simple possible.

Eval_poly_Lagrange $(t, x = [x_0, \dots, x_n], y = [y_0, \dots, y_n])$

$p \leftarrow 0$

pour i de 0 à n

calcul de L_i — $L_i \leftarrow 1$ # initialisa

$p \leftarrow p + y_i * L_i$

retourner p

36

calcul de L_i

$L_i \leftarrow 1$
Pour j de 0 à m
  si $j \neq i$ alors
    $L_i \leftarrow L_i * (t - x_j) / (x_i - x_j)$

eval_poly_lagrange(t, $[x_0, \dots, x_m]$, $[y_0, \dots, y_m]$)
  $p \leftarrow 0$
  pour i de 0 à m → $m+1$ itérations
    $L_i \leftarrow 1$
    pour j de 0 à m → m exécution de la multiplication
      si $j \neq i$
        $L_i \leftarrow L_i * ((t - x_j) / (x_i - x_j))$ 1⊗ 1⊘ 2⊖
    $p \leftarrow p + y_i * L_i$ 1⊕ 1⊗
  retourner p

$(m+1)^2$ ⊗
$(m+1)\, m$ ⊘
$2(m+1)\, m$ ⊖
$m+1$ ⊕ → défaut de Lagrange mais stable

$O(m^2)$ opération

2. (a) $\Phi(t) = \prod_{i=0}^{m} (t - x_i) = \prod_{i=0}^{m} \varphi_i(t)$ avec $\varphi_i(t) = t - x_i$

Montrer que $\Phi'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} (x_k - x_i)$

Maths Num 37

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$((uv)w)' = (uv)'w + (uv)w'$$

$$= u'v\,w + uv'w + uvw'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i' \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} u_j$$

$$\begin{aligned}(u_1 \cdots u_n)' = {} & u_1' u_2 \cdots u_n \\ & + u_1 u_2' \cdots u_n \\ & \vdots \\ & + u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n'\end{aligned}$$

$$\Phi'(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i'(t) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \varphi_j(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (t - x_j)$$

$$\Phi'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)$$

En déduire que $\mathcal{L}_k(t) = \dfrac{\Phi(t)}{(t-x_k)\,\Phi'(x_k)}$ si $t \neq x_k$

1 si $t = x_k$

(38)

$$\mathcal{L}_k(x_j) = \mathcal{L}_{k,j}$$

$$\mathcal{L}_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{t-x_j}{x_k-x_j}\right)$$

$$= \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (t-x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k-x_j)} \quad \leftarrow \Phi'(x_k) \qquad \frac{(t-x_k)}{(t-x_k)}$$

$t = x_k$

$$\Phi(t) = \prod_{j=0}^{n} (t-x_j)$$

Soit $t \neq x_j \quad \forall j \in [\![0, n]\!]$

$$\boxed{p(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i \Phi(t)}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}} =$$

$$= \Phi(t) \sum \frac{y_i}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}$$

b) Montrez que $\forall t \in \mathbb{R}, \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(t)}_{q(t)} = 1$

$$q(t) = \sum_{i=0}^{n} 1 \times \mathcal{L}_i(t)$$

Il est l'unique polynome de degré $\leq n$ tel que $q(x_i) = 1 \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$

Maths Numérique 39

on en déduit que $q(t) = \Phi(t) = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}\right)$

$\Phi(t) = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}}$

$= \dfrac{\sum_{i=0}^{m} \frac{y_i \, 1}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}}$ Si on pose $\lambda_1(t) = \dfrac{1}{\Phi'(x_i)(t-x_i)}$

c) ① calcul des $\Phi'(x_k) = w_k$ $[w_0, \dots, w_m]$

$\Phi(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m} (x_k - x_j)$

calculprefactorisation_lagrange $([x_0, \dots, x_m])$

Pour i de 0 à m

$w_i \leftarrow 1$

Pour j de 0 à m

si $j \neq i$ alors

$w_i \leftarrow w_i \times (x_i - x_j)$

retourner $[w_0, \dots, w_m]$

② evaluation Lagrange barycentrique.

Maths
Num

40

eval_lagrange_barycentrique $(t, [x_0, \dots, x_n], [y_0, \dots, y_n], [w_0, \dots, w_n])$

Si $\exists\, i \in [\![0, n]\!]$ tq $t = x_i$
retourner y_i
Sinon

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{w_i(t-x_i)}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{w_i(t-x_i)}}$$

num $\leftarrow 0$
Pour j de 0 à n
num $\leftarrow$ num $+ y_j / (w_j (t-x_j))$

eval_lagrange_barycentrique (t, x, y, w)

Pour i de 0 à n
  si $t = x_i$ alors
    retourner y_i
num $\leftarrow 0$
denom $\leftarrow 0$
pour i de 0 à n
  temp $\leftarrow W_i * (t - x_i)$
  num $\leftarrow$ num $+ y_i$ / temp
  denom $\leftarrow$ denom $+ 1$ / temp
retourner num / denom