Les Nombres Complexes

1 Trigonométrie

1. Calculer les quantités suivantes :

$$\sin(15\pi/2);\quad \cos(9\pi/2);\quad \sin(7\pi/4);\quad \cos(-7\pi/4);$$

$$\sin(-7\pi/6);\quad \cos(11\pi/6);\quad \sin(14\pi/3);\quad \cos(-5\pi/3).$$

2. écrire en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :

$$\sin(7\pi - x),\quad \sin(x + 5\pi),\quad \cos(x + 11\pi/2)$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $\cos(x) = \pi$
   (b) $\cos(x) = \sin(x)$
   (c) $\cos(x) = \sin(x - \pi/2)$
   (d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   (e) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
   (f) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. Résoudre l'équation $\sin(2x) = \sin(5x)$.

2 Écriture algébrique et exponentielle d'un nombre complexe

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (3 + 2i)(1 - i) - (2 + i)^2 + (3 + i)^3,\quad z_2 = \frac{1}{i},\quad z_3 = \frac{3 + 5i}{4 - i},$$

$$z_4 = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{1 - 7i}{4 + 3i},\quad z_5 = \frac{1 - 5i}{2 + i} + \frac{1 + 5i}{2 - i}$$

$$z_6 = (1 - i)^2,\quad z_7 = (1 - i)^3,\quad z_8 = (1 - i)^4.$$

2. Calculer

$$\left|\frac{2 + 5i}{3 + 4i}\right|,\quad \left|(3 - 2i)^4\right|,\quad |\cos t + i \sin t|\ \ (t \in \mathbb{R}).$$

3. Représenter géométriquement les nombres complexes suivants et donner leur forme algébrique

$$e^{\frac{i\pi}{3}},\quad e^{\frac{i\pi}{4}},\quad e^{\frac{i\pi}{2}},\quad e^{\frac{i2\pi}{3}},\quad e^{i\pi},\quad \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},\quad 2e^{\frac{i5\pi}{6}},\quad 3e^{-\frac{i3\pi}{4}},\quad 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

4. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

$$z_1 = -3,\quad z_2 = -2i,\quad z_3 = 1 + i,\quad z_4 = 1 - i,\quad z_5 = 1 + i\sqrt{3},\quad z_6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}.$$

5. Établir que pour tout n entier non nul, le nombre $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ est réel et $(1 + i)^n - (1 - i)^n$ est imaginaire pur.

6. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)^{21}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.
8. Déterminer les nombres entiers n tels que $(\sqrt{3}-i)^n$ soit réel.
9. Calculer de deux façons différentes le nombre complexe $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.
10. Soient θ et θ' deux nombres réels. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.
11. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1.$$

12. Soit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0,\pi[$. Déterminer le module et un argument de $1+z$ et $1+z+z^2$.
13. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq 1$. Démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel et préciser son module.
14. Soient a et b deux nombres dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et de module 1. Montrer que

$$2\arg\left(\frac{a-1}{b-1}\right) = \arg\frac{a}{b}[2\pi].$$

15. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes
    (a) $(1+i)z + 1 - i = 0$.
    (b) $(1+ia)z + 1 - i = 0$, où a est un nombre complexe donné .
    (c) $(1-i)\overline{z} + 1 + i = 0$.
    (d) $i\overline{z} + 5 = z$.
    (e) $a\overline{z} = z$, suivant les valeurs du paramètre complexe a.
    (f) $z + \bar{z}^2 = 0$.
16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

---

3 Équations du second degré

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 = 4, \quad z^2 = -9, \quad z^2 = -8+6i, \quad z^2 = 5-12i, \quad (1+i)z^2 + 1 - i = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - z + 7 = 0, \quad z^2 - z - 7 = 0, \quad z^2 + 2\sqrt{2}i\, z - 2(1+i) = 0,$$

$$z^2 - (5-14i)z - 24 - 10i = 0, \quad iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0.$$

3. Soit ω un nombre complexe fixé. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (2+i\omega)z + 2 + i\omega - \omega = 0, \quad z^2 - (2+i\omega^2)z + 1 - \omega^4 = 0$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$.

5. Soit a un nombre complexe donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2(1-i)z + a^2 - 2i = 0 \ .$$

Pour quelles valeurs de a cette équation possède-t-elle au moins une racine réelle ?

6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0.$$

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

---

4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter les solutions :
   (a) $z^3 = 1.$
   (b) $z^3 = -1.$
   (c) $z^4 = -i.$
   (d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i.$
   (e) $z^6 + 1 = 0.$
   (f) $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}.$

2. Calculer $1 + j + j^2$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2013} j^k.$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 15z^4 - 16 = 0.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
   (a) $z^7 = \bar{z}.$
   (b) $(z-1)^5 = (z+1)^5.$
   (c) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0.$
   (d) $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$

5 Applications des nombres complexes à la trigonométrie

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire $e^{i3\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$. En déduire l'expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et celle de $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$. Calculer de même $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
2. Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^4 x \sin^3 x$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π, mettre sous forme algébrique le nombre complexe

   $$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{i4\theta} + e^{i5\theta}.$$

   En déduire le calcul de

   $$S_5 := 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta\ ,$$

   et de

   $$\Sigma_5 := \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta\ .$$

6 Exercices d'approfondissement

1. On se propose de déterminer les nombres complexes $z \neq 0$ satisfaisant la condition (H) :

   (H) $$z + \frac{1}{z} \text{ est un nombre réel.}$$

2. Première méthode : en écrivant z sous la forme $z = x + iy$, exprimer la partie imaginaire du nombre complexe $z + \frac{1}{z}$, et trouver la condition sur x et y pour que la condition (H) soit satisfaite. Terminer alors la détermination de l'ensemble des solutions. [Attention à bien obtenir des conditions *nécessaires et suffisantes.*]
3. Deuxième méthode : utiliser z et $\overline{z}$ pour traiter ce même problème.
4. Troisième méthode : utiliser la forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ pour traiter ce même problème.

5. Voici une méthode pour trouver la valeur du nombre réel $c = \cos\frac{2\pi}{5}$. On s'efforcera de faire le moins de calculs possibles.
   On pose $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
6. Calculer α^5, puis $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$.
7. Montrer (sans calcul !) que $\beta = \alpha + \alpha^4$ est un nombre réel, puis l'exprimer en fonction de c.
8. Montrer que $\beta^2 + \beta - 1 = 0$.
9. Donner la valeur de c.
10. Application : construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.
    Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2. Soient O' et A les points de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(0,2)$. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O' et de rayon 1. On note M le point d'intersection du segment $[AO']$ avec le cercle $\mathcal{C}'$. Enfin, soient B et C les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM avec le cercle $\mathcal{C}$.
11. Calculer la longueur AM .
12. Calculer la valeur de $\cos\widehat{AOB}$ (on pourra utiliser la formule dite d'Al-Kashi ou de Pythagore généralisée).

13. En utilisant la première partie de l'exercice, calculer $\cos \dfrac{\pi}{5}$ et montrer que $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{5}$ rad.
14. En déduire une construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

15. Existe-t-il des nombres entiers a et b tels que $29 = a^2 + b^2$? Même question pour 59 et 61.
16. Soient a, b, c, d quatre nombres entiers. Montrer qu'il existe des nombres entiers A et B tels que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = A^2 + B^2.$$

    [Indication : utiliser les nombres complexes !]
17. Application : trouver des nombres entiers m et n tels que

$$1769 = m^2 + n^2$$

18. Résoudre l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.