Chapitre 2

Développement en série de Fourier

Magalie THOMASSIN

magalie.thomassin@univ-lorraine.fr

TELECOM Nancy
1re année

SICA1

Plan

Approx. de $x(t)$ par $f(t)$ au sens de la minimisation de l'EQM

Soient $x(t)$ un signal continu sur $[t_1, t_2]$ et $f(t)$ une fonction continue sur $[t_1, t_2]$.

On cherche une approximation de $x(t)$ par $f(t)$ sur $[t_1, t_2] \Rightarrow$ on cherche $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x(t) \approx C \cdot f(t)$$

au sens d'une certaine distance à minimiser $||x - Cf||$.

On choisit la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQM), notée ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - C.f(t)]^2 \, dt$$

ε est minimum pour $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial C} = 0$ et pour $\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C^2} \geqslant 0$ où :

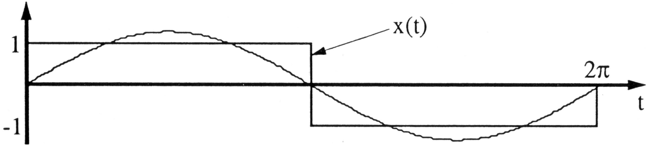
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[C \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t) f(t) dt \right]$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C^2} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$$

Ce qui implique :

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt} = \frac{< x, f >}{< f, f >} = \frac{< x, f >}{||f||^2}$$

Exemple



$$f(t) = \sin(t)$$

On a alors :

$$C = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)dt}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt} = \frac{4}{\pi}$$

et

$$x(t) \approx \frac{4}{\pi} \cdot \sin(t), \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi]$$

Approx. de $x(t)$ par une base de fonctions orthogonales

On souhaite approcher $x(t)$ sur $[t_1, t_2]$ par $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$

où les fonctions f_i forment une base de fonctions orthogonales $\Rightarrow < f_i, f_j >= 0, \quad i \neq j$

On a alors :

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \right]^2 dt$$

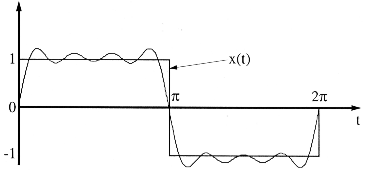
et :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_i} = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[C_i \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt \right] \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C_i^2} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t) dt$$

Ce qui implique $C_i = \frac{< x, f_i >}{||f_i||^2}$ et donc $x(t)$ peut être approché par :

$$x(t) \approx \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{< x, f_i >}{||f_i||^2} \cdot f_i(t)$$

Exemple



$$f_i(t) = \sin(i.t), \quad i = 1, 2, \ldots$$

On trouve :

$$C_i = \begin{cases} \dfrac{4}{i\pi} & \text{si } i \text{ impair} \\ 0 & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$$

Et, pour $n = 8$, $x(t)$ peut être approché par :

$$x(t) \approx \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t\right)$$

Plan

Développement en série de Fourier, temps continu

Soit $x_T(t)$ un signal à temps continu, périodique, de période T.
(il peut être obtenu par périodisation d'un signal non périodique à support borné)

On considère les fonctions orthogonales : $\cos\left(i\frac{2\pi}{T}t\right)$ et $\sin\left(i\frac{2\pi}{T}t\right)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

L'intervalle est de largeur T. On choisit : $I = [-T/2, T/2]$

On obtient alors : $\boxed{x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right)}$

avec :

- $a_0 = \frac{1}{T}\int_I x_T(t)dt$ et $b_0 = 0$
- $a_n = \frac{2}{T}\int_I x_T(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$
- $b_n = \frac{2}{T}\int_I x_T(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

TELECOM Nancy
Ingénieurs du numérique • Inspiring your digital future

Développement en série de Fourier avec coeff. complexes

Ce qui s'écrit aussi :

Développement en série de Fourier

$$\boxed{x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . e^{jn\frac{2\pi}{T}t}}$$

avec les coefficients de Fourier

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int_I x_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt}$$

Remarques

- La série de Fourier constitue un moyen d'analyse précieux.
- Elle permet d'obtenir une représentation fréquentielle discrète (spectre de raie) du signal, où chaque composante harmonique (raie) C_n est localisée à une fréquence $f_n = nf_0 = n/T$.

Relation de Parseval

$$\boxed{P_{x_T} = \frac{1}{T}\int_I x_T^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2}$$

La puissance moyenne de $x_T(t)$ est égale à la somme des carrés du module de toutes les raies (ou harmoniques) du spectre

Plan

Développement en série de Fourier, temps discret

Soit $x_K(k)$ un signal discret K-périodique. Par un raisonnement similaire, on obtient la relation :

$$\boxed{x_K(k) = \sum_{n=<K>} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k}}$$

où $< K >$ est tout intervalle de longueur K.

Remarque : chaque exponentielle complexe de la somme est K-périodique.

Calcul des c_n :
En multipliant la relation par $\exp(-jm(2\pi/K)k)$ et en sommant sur $< K >$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=<K>} x_K(k)e^{-jm(2\pi/K)k} &= \sum_{k=<K>}\sum_{n=<K>} c_n e^{j(n-m)(2\pi/K)k} \\ &= \sum_{n=<K>} c_n \underbrace{\sum_{k=<K>} e^{j(n-m)(2\pi/K)k}}_{=0 \text{ si } n\neq m}\end{aligned}$$

Or, la somme sur k du 2$^{\text{nd}}$ membre est nulle sauf si $(n-m)$ est nul ou un multiple de K (voir démo sur le "slide" suivant). Si on choisit m sur le même intervalle $< K >$ que n, la valeur correspondant au cas non-nul est $n = m$ et on obtient :

$$\sum_{k=<K>} e^{-jm(2\pi/K)k} x_K(k) = Kc_m$$

Développement en série de Fourier, temps discret (suite)

On en déduit :

$$\boxed{x_K(k) = \sum_{n=<K>} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{K}\sum_{k=<K>} x_K(k) e^{-jn\frac{2\pi}{K}k}}$$

Remarques

- L'interprétation spectrale est la même qu'en continu
- A temps discret, un nombre fini de coeff. suffit à décrire le signal
- Dualité temps/fréquence :
  - signal périodique $\Rightarrow$ spectre discret
  - signal discret $\Rightarrow$ spectre périodique

Propriété des exponentielles complexes

Soit $x_K(k)$ un signal discret K-périodique. On a alors la propriété suivante :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{K-1} e^{jn\frac{2\pi}{K}k} = \sum_{k=<K>} e^{jn\frac{2\pi}{K}k} = \begin{cases} K & \text{si } n = 0, \pm K, \pm 2K, \ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

En effet, on sait que :

$$\sum_{k=0}^{K-1} \alpha^k = \begin{cases} K & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^K}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Or, dans le cas présent, $\alpha^K = 1$.

De plus, chaque exponentielle complexe de la somme est K-périodique, on peut donc sommer sur tout intervalle de longueur K.