

# Module Mathématiques Appliquées: Probabilités

## Telecom Nancy Apprentissage

### Liste d'exercices 2 - Le modèle probabiliste

**Exercice 1** Un nouveau virus peut entrer dans votre système par e-mail ou via l'internet. Il y a 30% de chances qu'il entre par e-mail, et 40% de chances de le recevoir via l'internet. Ce virus peut aussi entrer simultanément par e-mail et internet avec probabilité 0.15. Quelle est la probabilité que votre système ne soit pas infecté?

**Exercice 2** A, B et C désignent 3 produits bancaires. Dans la population des clients d'une banque, 40 % des individus ont le produit A, 80 % B, 60 % C, 30 % A et B, 28 % A et C, 50 % B et C, 20 % A, B et C. On extrait au hasard un individu de la population.

**2.1** Calculer la probabilité qu'il ait au moins un des produits.

**2.2** Y a-t-il indépendance entre les différents produits ?

**Exercice 3** On considère deux événements A et B tels que:  $P(A) = 0,5$ ;  $P(B) = 0,7$  et  $P(A \cup B) = 0,8$ .

**3.1** Calculer  $P(A/B)$  et  $P(B/A)$ .

**3.2** Les valeurs de  $P(A)$  et  $P(B)$  restant inchangées, serait-il possible d'avoir  $P(A \cup B) = 0,4$  ?

**Exercice 4** On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc. Soit A l'événement « le chiffre du dé noir est pair », B l'événement « le chiffre du dé blanc est impair », C l'événement « les deux chiffres ont la même parité ». Montrer que A et C, A et B, B et C sont indépendants, mais que les trois événements A, B et C ne le sont pas.

**Exercice 5** Un examen n'exige que des réponses "oui ou non". Un étudiant ne connaît que 50 % du programme ; quand il ne sait pas, il répond au hasard. Quelle est la probabilité qu'une réponse soit exacte ?

**Exercice 6** Dans un laboratoire, on teste deux types d'anticorps sur des souris, et on a fait les constats suivants: si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B; si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B. De plus, la moitié de la population porte l'anticorps A.

**6.1** Calculer la probabilité qu'une souris possède l'anticorps B.

**6.2** Calculer la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A.

**6.3** Calculer la probabilité que, si une souris ne porte pas l'anticorps B, alors elle ne porte pas l'anticorps A.

**Exercice 7** Quand on téléphone entre 18 heures et 19 heures chez Pierre-Yves, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des importuns. Quand il est absent, il l'utilise toujours.

**7.1** Calculer la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là.

**7.2** On tombe sur le répondeur, calculer la probabilité pour qu'il soit présent.

**Exercice 8** Soit  $p$  la probabilité qu'un moteur d'avion tombe en panne lors d'un vol. On suppose qu'un avion vole encore si au moins la moitié de ses moteurs fonctionne. Pour quelles valeurs de  $p$  un avion bimoteur présente-t-il moins de risques qu'un avion quadrimoteur?

**Exercice 9** On considère une classe de  $n$  élèves.

**9.1** Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. On considèrera une année de 365 jours. (Indication: passer par la probabilité de l'événement contraire).

**9.2** On donne le graphe de cette probabilité en fonction de  $n$ . A partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5? 0.8? On appelle cet exercice le paradoxe des anniversaires.

**Exercice 10** Soit  $X$  et  $Y$  deux points choisis au hasard uniformément dans le segment  $[0, 1]$ , indépendamment l'un de l'autre. Il est équivalent de dire que le couple  $(X, Y)$  est choisi au hasard uniformément dans le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**10.1** Quelle est la probabilité que  $X + Y \leq 1$ ?

**10.2** Quelle est la probabilité que  $X + Y \leq \frac{1}{2}$ ?

**Exercice 11** Mr A et Mlle B ont décidé de se donner rendez-vous entre 17 et 18h. Chacun arrivera au hasard, uniformément et indépendamment l'un de l'autre, dans l'intervalle  $[17, 18]$ . Mlle B attendra 5 minutes avant de partir, Mr A 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent?

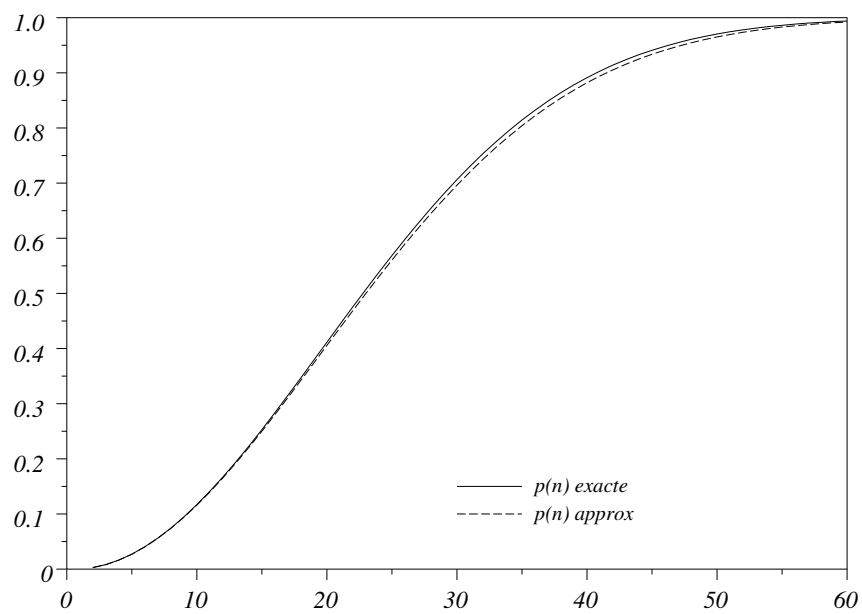


Figure 1: Anniversaires : probabilité en fonction de  $n$