UNIVERSITÉ de LORRAINE
TELECOM Nancy

TELECOM Nancy	Durée du sujet : 2h
Mathématiques Appliquées pour l'Informatique	$1^{ère}$ année formation par apprentissage
Date : 19 décembre 2017	**Corrigé**
Horaire : 14h à 16h	

Exercice 1 (Théorie des langages : automates et langages réguliers)

1. Nous exprimons le système associé à l'automate :
$$\begin{cases} (1)\ L_0 = aL_1 + bL_2 \\ (2)\ L_1 = aL_2 + bL_1 \\ (3)\ L_2 = aL_0 + bL_3 + \varepsilon \quad (car\ L_r\ est\ terminal) \\ (4)\ L_3 = aL_2 + bL_3 \end{cases}$$
Comme l'état 0 est le seul état initial de l'automate $\mathcal{A}_1$, le langage $L(\mathcal{A}_1)$, reconnu par $\mathcal{A}_1$ est le langage L_0.
On applique le lemme de Arden aux équations (2) et (4), avec des solutions uniques car $\varepsilon \notin \{b\}$.
$$\begin{cases} (1)\ L_0 = aL_1 + bL_2 \\ (2)\ L_1 = b^*aL_2 \\ (3)\ L_2 = aL_0 + bL_3 + \varepsilon \\ (4)\ L_3 = b^*aL_2 \end{cases}$$
On substitue dans (1) et (3), la valeur de L_1 et L_3 prise dans (2) et (4).
$$\begin{cases} (1)\ L_0 = ab^*aL_2 + bL_2 = (ab^*a + b)L_2 \\ (2)\ L_1 = b^*aL_2 \\ (3)\ L_2 = aL_0 + bb^*aL_2 + \varepsilon \\ (4)\ L_3 = b^*aL_2 \end{cases}$$
On substitue la valeur de L_0 prise dans (1), dans l'équation (3).
$$\begin{cases} (1)\ L_0 = (ab^*a + b)L_2 \\ (2)\ L_1 = b^*aL_2 \\ (3)\ L_2 = a(ab^*a + b)L_2 + bb^*aL_2 + \varepsilon = (aab^*a + ab + bb^*a)L_2 + \varepsilon \\ (4)\ L_3 = b^*aL_2 \end{cases}$$
On applique enfin le lemme d'Arden à l'équation (3) (cas $\varepsilon \notin (aab^*a + ab + bb^*a)$).
$$\begin{cases} (1)\ L_0 = (ab^*a + b)L_2 \\ (2)\ L_1 = b^*aL_2 \\ (3)\ L_2 = (aab^*a + ab + bb^*a)^*\varepsilon \\ (4)\ L_3 = b^*aL_2 \end{cases}$$
On substitue la valeur de L_2 prise dans (3), dans l'équation (1).
$$\begin{cases} (1)\ L_0 = (ab^*a + b)(aab^*a + ab + bb^*a)^* \\ (2)\ L_1 = b^*aL_2 \\ (3)\ L_2 = (aab^*a + ab + bb^*a)^* \\ (4)\ L_3 = b^*aL_2 \end{cases}$$
$(ab^*a + b)(aab^*a + ab + bb^*a)^*$ est une expression rationnelle dénotant le langage $L(\mathcal{A}_1)$.

2. Les éléments permettant d'affirmer que $\mathcal{A}_2$ est indéterministe sont les suivants :
   — $\mathcal{A}_2$ a deux états initiaux 0 et 1.
   — une transition sur ϵ : $(3,\ \epsilon,\ 2)$
   — les transition suivantes :
      — $(2,\ b,\ 2)$ et $(2,\ b,\ 3)$
      — $(3,\ a,\ 3)$ et $(3,\ a,\ 0)$

   Déterminisation.

   L'état initial de l'automate déterministe obtenu est l'état constitué de l'ensemble des états atteignables à partir des états initiaux de l'automate indéterministe sans consommer de lettres de l'alphabet $\{a,\ b\}$ (c'est-à-dire les états initiaux de $\mathcal{A}_2$ et ceux qui peuvent être atteints à partir de $\mathcal{A}_2$ par des $\varepsilon-$ *transitions*). Ici l'état initial est $\{0,\ 1\}$.

Construction de la table intermédiaire :

	a	b
0	$\{2\}$	$\{1\}$
1	$\{2\}$	$\{2,\ 3\}$
2	$-$	$\{2,\ 3\}$
3	$\{0,\ 2,\ 3\}$	$\{2,\ 3\}$

Déroulement de l'algorithme : détermination de δ la fonction de transitions de l'automate déterministe. On exécute l'algorithme en partant de l'état initial de l'automate déterministe, c'est-à-dire $\{0,\ 1\}$ et en utilisant la table intermédiaire. Chaque nouvel état généré est mis en entrée (dans la colonne δ de la table).

δ	a	b
$\{0,\ 1\}$	$\{\mathbf{2}\}$	$\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$
$\{2\}$	$-$	$\{\mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$
$\{1,\ 2,\ 3\}$	$\{\mathbf{0},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$	$\{2,\ 3\}$
$\{2,\ 3\}$	$\{0,\ 2,\ 3\}$	$\{2,\ 3\}$
$\{0,\ 2,\ 3\}$	$\{0,\ 2,\ 3\}$	$\{1,\ 2,\ 3\}$

L'automate déterministe obtenu est $\mathcal{A}_{d2}$ tel que

$$\mathcal{A}_{d2} = (\{a,\ b\},\ \{\{0,\ 1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2,\ 3\},\ \{2,\ 3\}\},\ \delta,\ \{\{2\},\ \{1,\ 2,\ 3\},\ \{2,\ 3\}\})$$

où δ est la fonction de transition définie dans la table ci-dessus.

3. Minimisation. Déterminons les états accessibles à partir de l'état initial 0, en utilisant l'algorithme vu en TD, on obtient dans l'ordre : $0,\ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 6$, donc 1 est un état inaccessible.

On exécute l'algorithme :

2	0					
3	1	0				
4		0	1			
5	3	0	1	3		
6	0		0	0	0	
7	1	0		1	2	0
	0	2	3	4	5	6

Donc $0 \sim 4$, $2 \sim 6$ et $3 \sim 7$.

Les quatre classes obtenues sont les quatre états de l'automate obtenu, $\mathcal{A}_m$, qui est formellement défini comme suit :

$$\mathcal{A}_m = (\{a,\ b,\ c\},\ \{\{0,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 7\},\ \{5\}\},\ \{0,\ 4\},\ \delta_m,\ \{\{2,\ 6\}\})$$

où δ_m est la table de transition suivante :

δ_m	$\{0, 4\}$	$\{2, 6\}$	$\{3, 7\}$	$\{5\}$
a	$\{3, 7\}$	$\{2, 6\}$	$\{3, 7\}$	$\{5\}$
b	$\{5\}$	$\{2, 6\}$	$\{2, 6\}$	$\{5\}$
c	$\{0, 4\}$	$\{2, 6\}$	$\{3, 7\}$	$\{5\}$

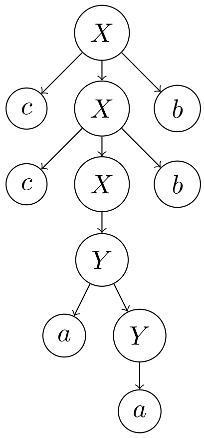
Exercice 2 (Théorie des langages : grammaires et langages algébriques, langages réguliers)

Soit la grammaire $G = (\{X,\ Y\}, \{a,\ b,\ c\},\ \rightarrow,\ X)$ où la relation $\rightarrow$ est définie par les règles suivantes :

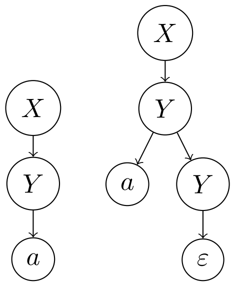
$$\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & cXb \mid Y \\ Y & \rightarrow & aY \mid a \mid \varepsilon \end{array}$$

$L(G)$ est le langage des mots engendrés par G.

1. $L(G) = \{c^n a^m b^n, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$.
2. L'arbre syntaxique suivant prouve que le mot $u = ccaabb$ appartient à $L(G)$.



3. Le mot a a par exemple les deux arbres syntaxiques suivants :



La grammaire G est donc ambiguë.

Exercice 3 (Analyse syntaxique descendante)

1. Soit la grammaire $G_1 = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{a,\ b,\ c\}, \rightarrow,\ A)$ dont les règles sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} A \rightarrow & aBcDa \\ B \rightarrow & CE \mid a \\ C \rightarrow & bC \mid \varepsilon \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} D \rightarrow & bD \mid F \\ E \rightarrow & aE \mid \varepsilon \\ F \rightarrow & cFb \mid \varepsilon \end{array}\right.$$

(a) $P_\varepsilon = \{B,\ C,\ D,\ E,\ F\}$ à cause des règles $C \rightarrow \varepsilon$, $E \rightarrow \varepsilon$, $F \rightarrow \varepsilon$ et $D \rightarrow F$ et $B \rightarrow CE$.

On calcule les premiers et les suivants grâce aux algorithmes vu en cours, ils sont définis dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F
Premier	$\{a\}$	$\{a,\ b\}$	$\{b\}$	$\{b,\ c\}$	$\{a\}$	$\{c\}$
Suivant	$\{\$\}$	$\{c\}$	$\{a,\ c\}$	$\{a\}$	$\{c\}$	$\{a,\ b\}$

Les symboles directeurs des règles se calculent directement en utilisant la définition, ils sont donnés comme suit :

$SD(A \rightarrow\ aBcDa) = \{a\}$

$\left.\begin{array}{l} SD(B \rightarrow\ CE) = \{a,\ b,\ c\} \\ SD(B \rightarrow\ a) = \{a\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est **non** vide car les deux contiennent a.

$\left.\begin{array}{l} SD(C \rightarrow\ \varepsilon) = \{a,\ c\} \\ SD(C \rightarrow\ bC) = \{b\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

$\left.\begin{array}{l} SD(D \rightarrow\ \ F) = \{a,\ b,\ c\} \\ SD(D \rightarrow\ \ bD) = \{b\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est **non** vide car les deux contiennent b.

$\left.\begin{array}{l} SD(E \rightarrow\ \ \varepsilon) = \{c\} \\ SD(E \rightarrow\ \ aE) = \{a\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

$\left.\begin{array}{l} SD(F \rightarrow\ \ \varepsilon) = \{a,\ b\} \\ SD(F \rightarrow\ \ cFb) = \{c\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

En conclusion il existe deux règles de la forme $A \rightarrow \alpha$ et $A \rightarrow \beta$ où $\alpha \neq \beta$ pour lesquelles on a $SD(A \rightarrow \alpha) \cap SD(A \rightarrow \beta) \neq \emptyset$, la grammaire G_1 **n**'est donc **pas** LL(1).

(b) Calcul des symboles directeurs des règles :

$SD(S \rightarrow\ \ V = EI) = \{a,\ b\}$

$\left.\begin{array}{l} SD(I \rightarrow ; S) = \{;\} \\ SD(I \rightarrow \varepsilon) = \{\$\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

$SD(E \rightarrow TF) = \{(\ ,a,\ b,\ f,\ g,\ 0,\ 1\}$

$\left.\begin{array}{l} SD(F \rightarrow +TF) = \{+\} \\ SD(F \rightarrow -TF) = \{-\} \\ SD(F \rightarrow \varepsilon) = \{\$,\ ;\ ,\ )\} \end{array}\right\}$ Les intersections des ensembles pris deux à deux sont vides.

$\left.\begin{array}{l} SD(T \rightarrow G) = \{f,\ g\} \\ SD(T \rightarrow V) = \{a,\ b\} \\ SD(T \rightarrow N) = \{0,\ 1\} \\ SD(T \rightarrow (E)) = \{(\} \end{array}\right\}$ Les intersections des ensembles pris deux à deux sont vides.

$\left.\begin{array}{l} SD(G \rightarrow f(E;E)) = \{f\} \\ SD(G \rightarrow g(E)) = \{g\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

$\left.\begin{array}{l} SD(V \rightarrow a) = \{a\} \\ SD(V \rightarrow b) = \{b\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

$\left.\begin{array}{l} SD(N \rightarrow 0) = \{0\} \\ SD(N \rightarrow 1) = \{1\} \end{array}\right\}$ L'intersection des deux ensembles est vide.

Pour deux règles quelconques de la forme $A \rightarrow \alpha$ et $A \rightarrow \beta$ où $\alpha \neq \beta$ on a $SD(A \rightarrow \alpha)\ \cap\ SD(A \rightarrow \beta) = \emptyset$, la grammaire G_2 est donc LL(1).

Table de la grammaire G_2 :

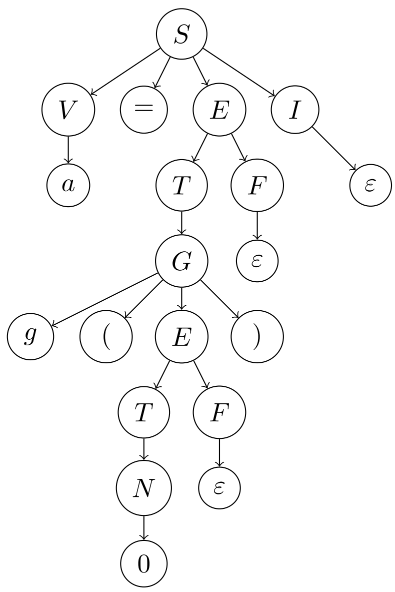
		0	1	a	b	f	g
S				$S \rightarrow V = EI$	$S \rightarrow V = EI$		
I							
E		$E \rightarrow TF$	$E \rightarrow TF$	$E \rightarrow TF$	$E \rightarrow TF$	$E \rightarrow TF$	$E \rightarrow TF$
F							
T		$T \rightarrow N$	$T \rightarrow N$	$T \rightarrow V$	$T \rightarrow V$	$T \rightarrow G$	$T \rightarrow G$
G						$G \rightarrow f(E;E)$	$G \rightarrow g(E)$
V				$V \rightarrow a$	$V \rightarrow b$		
N		$N \rightarrow 0$	$N \rightarrow 1$				

	(	)	;	=	\$	+	−
S							
I			$I \rightarrow ; S$		$I \rightarrow \varepsilon$		
E	$E \rightarrow TF$						
F		$F \rightarrow \varepsilon$	$F \rightarrow \varepsilon$		$F \rightarrow \varepsilon$	$F \rightarrow +TF$	$F \rightarrow -TF$
T	$T \rightarrow (E)$						
G							
V							
N							

Exécution de l'analyseur pour le mot $\alpha_1 \;=\; a = g(0)$.

PILE	*Entrée*	*Sortie*
$\$S$	$a = g(0)\$$	$S \to V = EI$
$\$IE = V$	$a = g(0)\$$	$V \to a$
$\$IE = a$	$a = g(0)\$$	
$\$IE =$	$= g(0)\$$	
$\$IE$	$g(0)\$$	$E \to TF$
$\$IFT$	$g(0)\$$	$T \to G$
$\$IFG$	$g(0)\$$	$G \to g(E)$
$\$IF)E(g$	$g(0)\$$	
$\$IF)E($	$(0)\$$	
$\$IF)E$	$0)\$$	$E \to TF$
$\$IF)FT$	$0)\$$	$T \to N$
$\$IF)FN$	$0)\$$	$N \to 0$
$\$IF)F0$	$0)\$$	
$\$IF)F$	$)\$$	$F \to \varepsilon$
$\$IF)$	$)\$$	
$\$IF$	$\$$	$F \to \varepsilon$
$\$I$	$\$$	$I \to \varepsilon$
$\$$	$\$$	*succes*

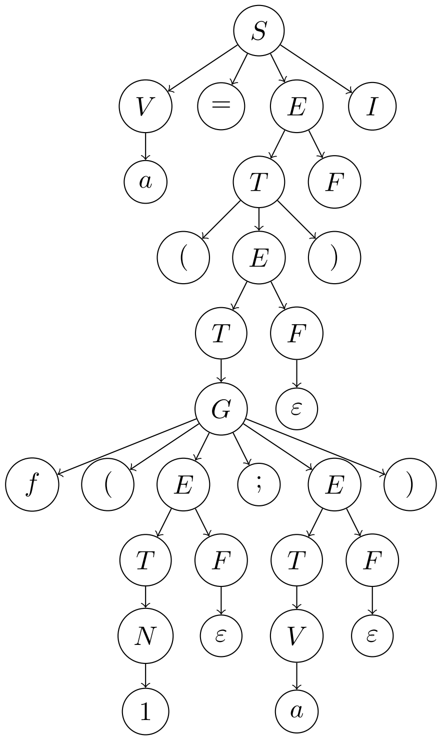
Conclusion : le mot $\alpha_1 \;=\; a = g(0)$ appartient à $L(G_2)$.
La dérivation à gauche du mot α_1 est la suivante : $S \rightarrowtail V = EI \rightarrowtail a = EI \rightarrowtail a = TFI \rightarrowtail a = GFI \rightarrowtail a = g(E)FI \rightarrowtail a = g(TF)FI \rightarrowtail a = g(NF)FI \rightarrowtail a = g(0F)FI \rightarrowtail a = g(0)FI \rightarrowtail a = g(0)I \rightarrowtail a = g(0)$
Arbre syntaxique :



Exécution de l'analyseur pour le mot $\alpha_2 = a = (f(1; a); b = 0)$.

$PILE$	$Entrée$	$Sortie$
$\$S$	$a=(f(1;a);b=0)\$$	$S\to V=EI$
$\$IE=V$	$a=(f(1;a);b=0)\$$	$V\to a$
$\$IE=a$	$a=(f(1;a);b=0)\$$	
$\$IE=$	$=(f(1;a);b=0)\$$	
$\$IE$	$(f(1;a);b=0)\$$	$E\to TF$
$\$IFT$	$(f(1;a);b=0)\$$	$T\to (E)$
$\$IF)E($	$(f(1;a);b=0)\$$	
$\$IF)E$	$f(1;a);b=0)\$$	$E\to TF$
$\$IF)FT$	$f(1;a);b=0)\$$	$T\to G$
$\$IF)FG$	$f(1;a);b=0)\$$	$G\to f(E;E)$
$\$IF)F)E;E(f$	$f(1;a);b=0)\$$	
$\$IF)F)E;E($	$(1;a);b=0)\$$	
$\$IF)F)E;E$	$1;a);b=0)\$$	$E\to TF$
$\$IF)F)E;FT$	$1;a);b=0)\$$	$T\to N$
$\$IF)F)E;FN$	$1;a);b=0)\$$	$N\to 1$
$\$IF)F)E;F1$	$1;a);b=0)\$$	
$\$IF)F)E;F$	$;a);b=0)\$$	$F\to\varepsilon$
$\$IF)F)E;$	$;a);b=0)\$$	
$\$IF)F)E$	$a);b=0)\$$	$E\to TF$
$\$IF)F)FT$	$a);b=0)\$$	$T\to V$
$\$IF)F)FV$	$a);b=0)\$$	$V\to a$
$\$IF)F)Fa$	$a);b=0)\$$	
$\$IF)F)F$	$);b=0)\$$	$F\to\varepsilon$
$\$IF)F)$	$);b=0)\$$	
$\$IF)F$	$;b=0)\$$	$F\to\varepsilon$
$\$IF)$	$;b=0)\$$	*erreur*

Conclusion : le mot $\alpha_2 = a = (f(1;a);b=0)$ n'appartient pas à $L(G_2)$.
Le début de la dérivation à gauche du mot α_2 est la suivante :
$S \rightarrowtail V=EI \rightarrowtail a=EI \rightarrowtail a=TFI \rightarrowtail a=(E)FI \rightarrowtail a=(TF)FI \rightarrowtail a=(GF)FI \rightarrowtail a=(f(E;E)F)FI \rightarrowtail a=(f(TF;E)F)FI \rightarrowtail a=(f(NF;E)F)FI \rightarrowtail a=(f(1F;E)F)FI \rightarrowtail a=(f(1;E)F)FI \rightarrowtail a=(f(1;TF)F)FI \rightarrowtail a=(f(1;VF)F)FI \rightarrowtail a=(f(1;aF)F)FI \rightarrowtail a=(f(1;a)F)FI \rightarrowtail a=(f(1;a))FI$ arrêt.
Arbre syntaxique incomplet :


S
V
=
E
I
a
T
F
(
E
)
T
F
G
ε
f
(
E
;
E
)
T
F
T
F
N
ε
V
ε
1
a