29 Mars 2022 (2h)

OMG : Mathématiques Générales

La notation tiendra compte de la RIGUEUR, de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Algèbre linéaire

★ Exercice 1: m débute la vie... (4 Pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

▷ **Question 1: (2 Pts)** Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Pour quelles valeurs de m est-ce un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

▷ **Question 2: (2 Pts)** Nous posons $m = 1$, trouver une base du noyau de u

Rappel : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, soit B sa matrice associée, par rapport à la base canonique, soit X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors, nous pouvons écrire :

$$f(X) = Y \iff BX = Y$$

★ Exercice 2: La surjection du chef (2 Pts)

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

— **(1 Pts)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$

— **(1 Pts)** $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$

↳ entier relatif

★ Exercice 3: Pas court (5 Pts)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à n.

▷ **Question 1: (5 Pts)** Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$ (pour $i = 0, 1, \ldots, n$) forme une base de E

★ Exercice 4: L'image d'Épinal (4 Pts)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$;

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.
2. Donner un exemple très simple où $\operatorname{Im}(f+g) \neq \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

★ Exercice 5: Endo et Auto sur un bateau (4 Pts)

Soient f et g des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (2x - 4y, x - 2y) \qquad g(x,y) = (3x - 4y, x - y)$$

▷ **Question 1:** Monter que f est un endomorphisme

▷ **Question 2:** Déterminer Ker(f) et Im(f)

▷ **Question 3:** Montrer que g automorphisme