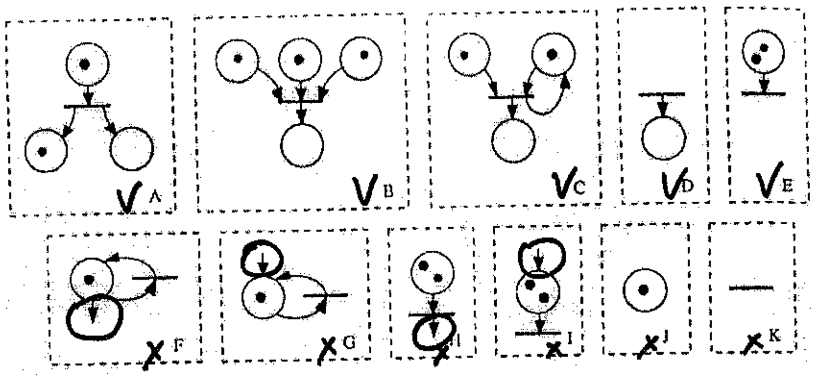
Correction TD1 sur les Réseaux de Pétri

Propriétés structurelles – algèbre linaire

Exercice 1 :

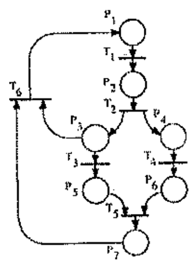
- Les réseaux ci-dessous sont-ils des Réseaux de Petri ? Pourquoi ?
- Pour ceux qui sont des RdP, indiquer : les transitions franchissables, les marquages après franchissement ainsi que les transitions encore franchissables après franchissement.



F : Non RdP 1 Arc non relié	G : Non RdP 1 Arc non relié	H : Non RdP 1 Arc non relié	I : Non RdP 1 Arc non relié	J et K : Non RdP- Il Manque 1 Transition (J) ou 1 Place (K)
A : RdP T Validée (1,1,0) → (0,2,1)	B : RdP T Validée (1,1,1,0) → (0,0,0,1)	C : RdP T Validée (1,1,0) → (0,1,1)	D : RdP T Validée (0) → (1) T encore validée	E : RdP T Validée (2) → (1) T validée encore 1 fois

Exercice 2 :

Les RdP de la figure suivante sont-ils :
des graphes d'états ? des graphes d'événements ? sans conflit ? à choix libre ? pur ? sans boucle ?
Justifier par un exemple ou un contre-exemple.



1) Non Graphe d'Etat :
- T2 possède 2 places de sortie ;
- T5 et T6 possèdent 2 places dentrée

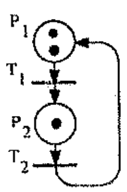
2) Non Graphe d'Evènement :
- P3 a 2 transitions de sortie

3) Avec Conflit :
- <P3, (T3, T6) >

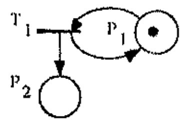
4) Sans choix libre :
- T6 qui participe au conflit <P3, (T3, T6)> a une autre place d'entrée P7

5) Est pur :
- Aucune transition n'a de place d'entrée qui soit également place de sortie

6) Pur donc sans boucle



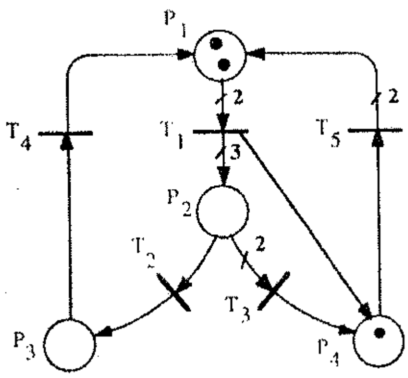
1) Graphe d'état
2) Graphe d'évènement
3) Sans conflit
4) (A choix libre)
5) Pur
6) Sans boucle



1) Non graphe d'état (T1 a 2 places de sorties)
2) Non graphe d'évènement (P2 n'a pas de transition de sortie)
3) Sans conflit
4) (A choix libre)
5) Non Pur (T1 a P1 à la fois comme place de sortie et d'entrée)
6) Avec boucle (T1 impure n'a pas d'autre place d'entrée que P1)

Exercice 3 :

Pour le RdP généralisé de la figure suivante, avec le marquage $M_0 = [2, 0, 0, 1]^T$, établir les matrices d'incidence (Pré, Post et C). Indiquer les transitions validées par M_0 et les marquages atteints après le franchissement de chacune de ces transitions.



1) Matrices Pré, Post et C
Règles de grammaire :
T1 : $P1^2 \rightarrow P2^3P4$
T2 : $P2 \rightarrow P3$
T3 : $P2^2 \rightarrow P4$
T4 : $P3 \rightarrow P1$
T5 : $P4 \rightarrow P1^2$

$M_0=P1^2P4$

Pré :

$$\begin{array}{c|ccccc} & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ \hline P1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ P3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Post :

$$\begin{array}{c|ccccc} & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ \hline P1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ P2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

C :

$$\begin{array}{c|ccccc} & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ \hline P1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ P2 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ P3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ P4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

2) Le marquage initial $P1^2P4$ valide les transitions T1 et T5

3) – A partir de M_0 le franchissement de T1 donne $M_1=(0,3,0,2)$
- A partir de M_0 le franchissement de T5 donne $M_2=(4,0,0,0)$

$$M_1 = M_0 + C \times V_{T1} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + C \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$M_2 = M_0 + C \times V_{T5} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + C \times \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ex 4 – TD1 RdP

1) Règles de grammaire

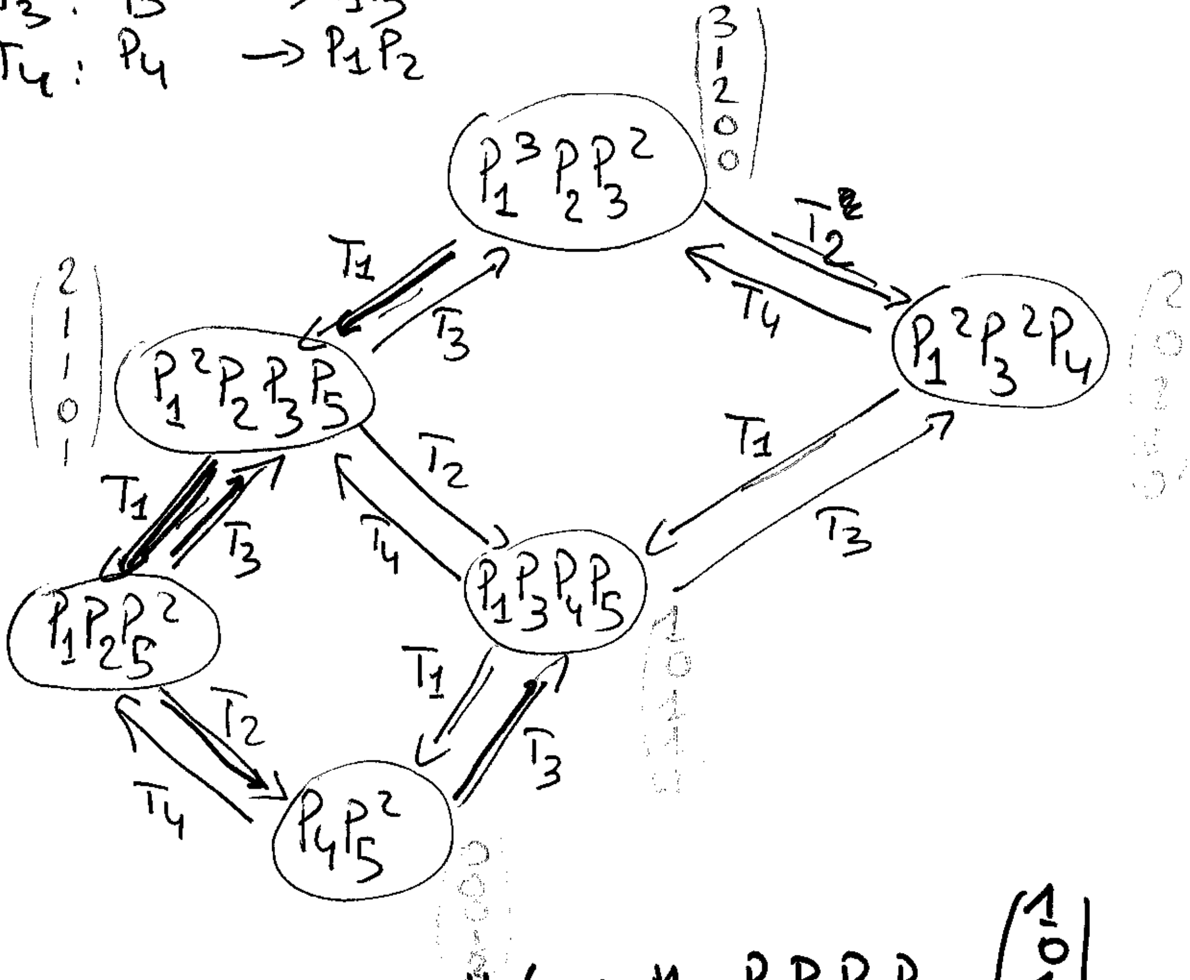
$T_1 : P_1 P_3 \longrightarrow P_5$

$T_2 : P_1 P_2 \longrightarrow P_4$

$T_3 : P_5 \longrightarrow P_1 P_3$

$T_4 : P_4 \longrightarrow P_1 P_2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1^3 P_2 P_3^2$$



$s_b = T_1 T_1 T_3 T_1 T_2 T_3 \qquad M_0 (s_b > M_1 = P_1 P_3 P_4 P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

s_b : seq. franchissable depuis M_0.

$s_a = T_2 T_1 T_1 \underbrace{T_2}_{non} \qquad s_a$: seq. non franchissable depuis M_0.

3) .

$$Pré = \begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \hline P_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$Post = \begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \hline P_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$C = Post - Pré = \begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \hline P_1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ P_2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ P_3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ P_4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ P_5 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\sigma_b = T_1 T_1 T_3 T_1 T_2 T_3 \qquad V_{\sigma b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = M_0 + C \cdot V_{\sigma b} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_{\sigma b}}$$

$$M_{\sigma b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\sigma b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (P_1 P_3 P_4 P_5)$$

$\underline{s_a = T_2 T_1 T_1 T_2}$

$$V_{s_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{s_a} = M_0 + C \cdot V_{s_a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{s_a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Impossible}$$

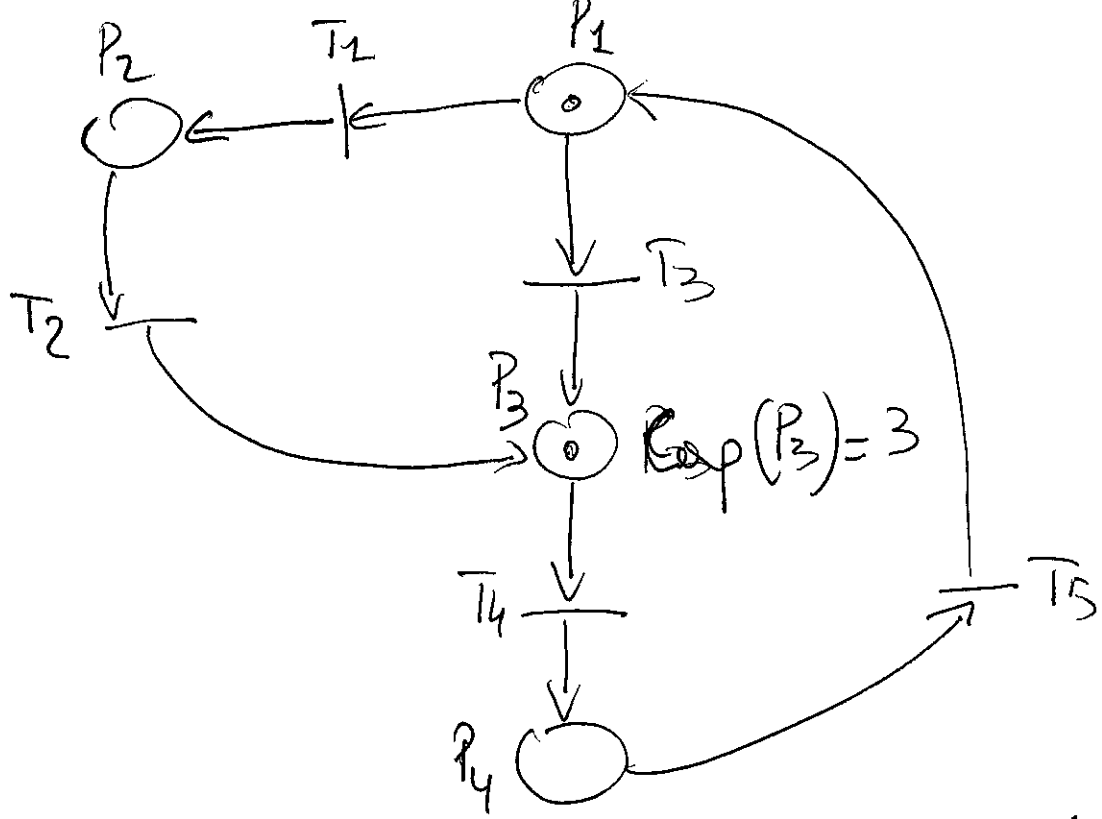
$\Rightarrow s_a$ non franchissable.

4) M_{0min} pour $s_a = T_2 T_1 T_1 T_2$.

$$C \times V_{s_a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{0min} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 5 TD1RdP

RdP à capacité :



On ajoute une place P'_3 complémentaire à P_3 telle que : $M(P'_3) = cap(P_3) - M(P_3)$

$(M(P_3) + M(P'_3) = cap(P_3))$

P'_3 a pour transition de sorties les transitions d'entrée de P_3 (soit T_2 et T_3). Elle a pour transition d'entrée, la transition de sortie de P_3 (soit T_4)