II. Fondements théoriques des SED :

THEORIE DES GRAPHES

1. Concepts généraux
2. **Coloration d'un graphe**
3. **Parcours dans un graphe**
4. **Etude de la connexité d'un graphe**

2. Coloration d'un graphe

- La **coloration des sommets** d'un graphe G consiste à affecter une couleur (numéro, emplacement, fréquence, …) à chacun des sommets du graphe de telle sorte que 2 sommets adjacents ne soient pas porteur de la même couleur.

- Une coloration de G avec k couleurs est une partition de l'ensemble des sommets de G en k sous-ensembles stables.

- On appelle **nombre chromatique** $\gamma(G)$ le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration des sommets de G.

*On utilise le nombre chromatique avec des graphes dont les **arêtes** illustrent une situation d'incompatibilité ou de conflit.*

2. Coloration d'un graphe

- Il n'existe pas d'algorithme de coloration de graphes qui donne forcément le nombre chromatique.

1ère étape avant la coloration:

- Encadrement du nombre chromatique :
  - Bornes mini:

    $\gamma(G) \geq \omega(G)$, où $\omega(G)$ est le cardinal de la plus grande clique de G

    $\gamma(G) \geq n/(n-d_{min})$, où d_{min} est le degré minimum des sommets de G

    $\gamma(G) \geq n^2/(n^2-2m)$, où m est le nombre d'arêtes de G

    $\gamma(G) \geq n/\alpha(G)$, où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité (cardinal du plus grand sous-ensemble stable)

  - Bornes maxi:

    $\gamma(G) \leq n+1-\alpha(G)$

    $\gamma(G) \leq d_{max} + 1$, où d_{max} est le degré maximum des sommets de G

2. Coloration d'un graphe

- **Algorithme de Welsh et Powell**
  - Etape 0 : Initialisation

    M : matrice d'adjacence du graphe dont les sommets sont rangés par ordre de degré décroissants

    $k = 1$
  - Etape 1

    $N = M$
  - Etape 2

    Colorer par la couleur c_k la première ligne non encore colorée de N ainsi que la colonne correspondante

    N = ensemble des lignes non encore colorées ayant un zéro dans les colonnes de couleur c_k

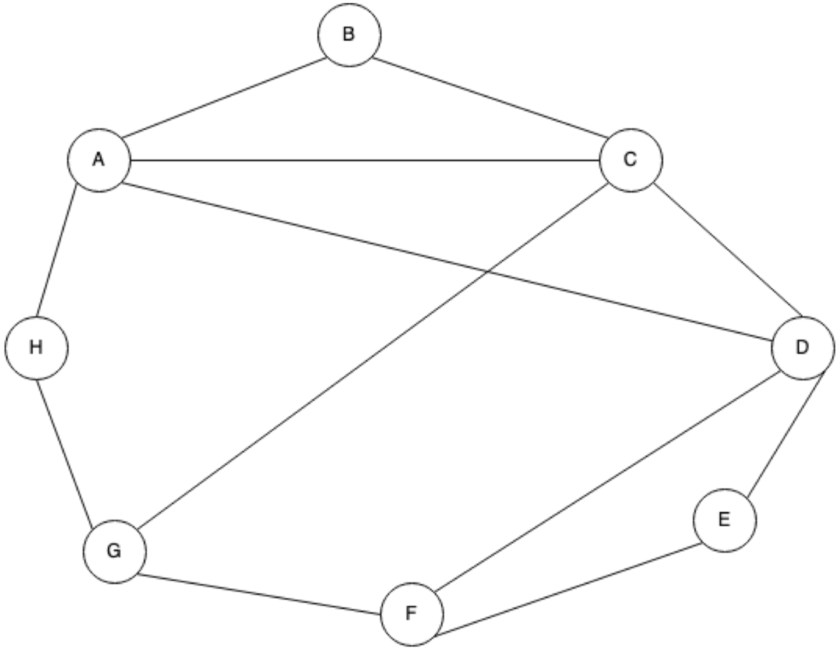
    si N $\neq \varnothing$ aller à l'étape 2 sinon aller à l'étape 3
  - Etape 3

    Si toutes les lignes sont colorées alors STOP (on a une k-coloration)

    $k = k + 1$; (changer de couleur)

    aller à l'étape 1

2. Coloration d'un graphe



Bornes Maxi de $\gamma(G)$:

- $\gamma(G) \leq n+1-\alpha(G)$

  $\gamma(G) \leq 8+1-3$

- $\gamma(G) \leq d_{max} + 1$

  $d_{max} = 4$

  $\gamma(G) \leq 5$

➔ $\gamma(G) \leq 5$

Bornes Mini de $\gamma(G)$:

- $\gamma(G) \geq \omega(G)$

$\omega(G)$=card(A,B,C)= card(A,C,D)...= 3

$\gamma(G) \geq 3$

- $\gamma(G) \geq n/(n-d_{min})$

$n=8;\ d_{min} = 2$

$\gamma(G) \geq 4/3$

- $\gamma(G) \geq n^2/(n^2-2m)$

$m=12$

$\gamma(G) \geq 8/5$

- $\gamma(G) \geq n/\alpha(G)$

$\alpha(G)$=card(B,D,H)=card(B,E,H)=3

$\gamma(G) \geq 8/3$

➔ $\gamma(G) \geq 3$

$3 \leq \gamma(G) \leq 5$

2. Coloration d'un graphe

Algorithme Welsch et Powell:

	A	C	D	F	G	H	B	E
A	0	1	1	0	0	1	1	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
D	1	1	0	1	0	0	0	1
F	0	0	1	0	1	0	0	1
G	0	1	0	1	0	1	0	0
H	1	0	0	0	1	0	0	0
B	1	1	0	0	0	0	0	0
E	0	0	1	1	0	0	0	0

k=1 N=M

C1 pour A, N=(F,G,E)

C1 pour F, N=()

k=2 N=M/(A,F)

C2 pour C, N=(H,E)

C2 pour H, N=E

C2 pour E, N=()

k=3 N=M/(A,F,C,H,E)

C3 pour D, N=(G,B)

C3 pour G, N=(B)

C3 pour B, N=()

fin

- $\gamma=3$

- C1 pour (A,F)
- C2 pour (C,H,E)
- C3 pour (D,G,B)

3. Parcours dans un graphe

Soit $G=(X, U)$ un **graphe valué** : on associe à chaque arc $u = (i, j)$ une longueur (poids) $l(u)$ ou l_{ij}.

Le problème du **plus court chemin** entre i et j est de trouver un chemin $c(i, j)$ de i à j tel que :

$\pi_c = \sum l(u)$ pour $u \in c$, soit minimale

3. Parcours dans un graphe

- **Algorithme de Dijkstra** : recherche du plus court chemin de l'origine à tous les autres sommets
  - Utilise des labels pour les sommets
    - Les labels définitifs représentent la valeur du pcc de l'origine jusqu'au sommet correspondant
    - Les labels temporaires représentent une borne supérieure de ce pcc
  - A chaque itération un label temporaire est transformé en label définitif

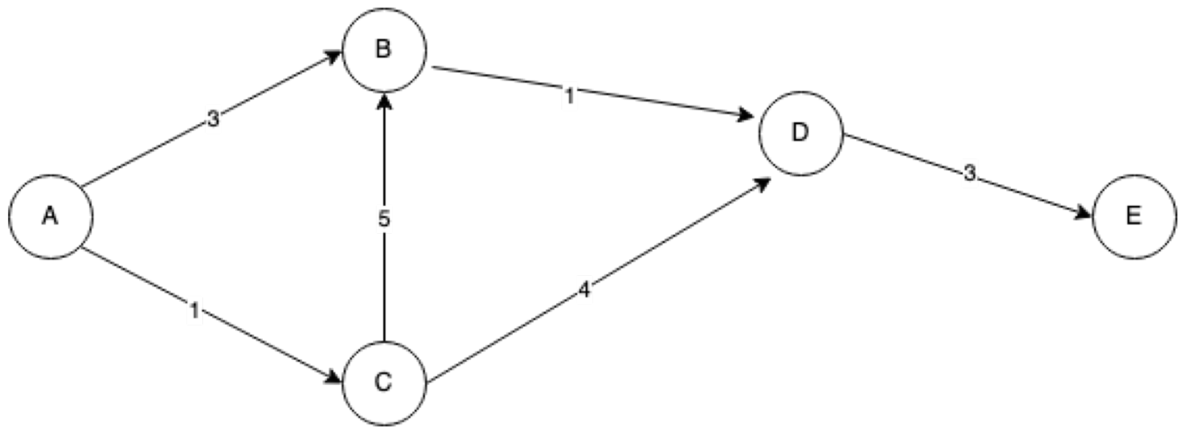
3. Parcours dans un graphe

Algorithme de Dijkstra

- Init
  - D={1}, T={2, …, n}
  - $\pi_1 = 0$;
  - $\pi_j = l_{1j}$ si $j \in \Gamma(1)$, $\pi_j = +\infty$ sinon
- Etape 1 (Désignation du label permanent)
  - Sélectionner $j \in T$, tq $\pi_j = \min\{k \in T, \pi_k\}$
  - $T = T \setminus \{j\}$ et $D = D \cup \{j\}$
  - Si T=vide alors Fin
- Etape 2 (Révision des labels temporaires)
  - pour tout $i \in T \cap \Gamma(j)$, $\pi_i = \min\{\pi_i, \pi_j + l_{ji}\}$
  - Aller à l'étape 1

Algorithme de Dijkstra

PCC de A à E:



π, pre	A	B	C	D	E	Ens. D	Ens. T
A	0, -	3, A	1,A	+∞	+∞	A	B,C,D,E
C		Min(3A; 6C)	1,A	5,C		A,C	B,D,E
B		3, A		4,B		A,C,B	D,E
D				4,B	7,D	A,C,B,D	E
E					7,D	A,B,C,D,E	-

l=7

Chemin : A-B-D-E

4. Etude de la connexité d'un graphe

- **Décomposition en CFC :**
  - 1 CFC (Graphe F.C.)
  - Plusieurs CFC

- **Etude des CFC :**
  - Si boucle : graphe non périodique avec boucle
  - Sinon: étude de la périodicité

- **Etude de la périodicité :**
  - Si périodicité : décomposer en sous-graphes
  - Sinon: graphe non périodique sans boucle

4. Etude de la connexité d'un graphe

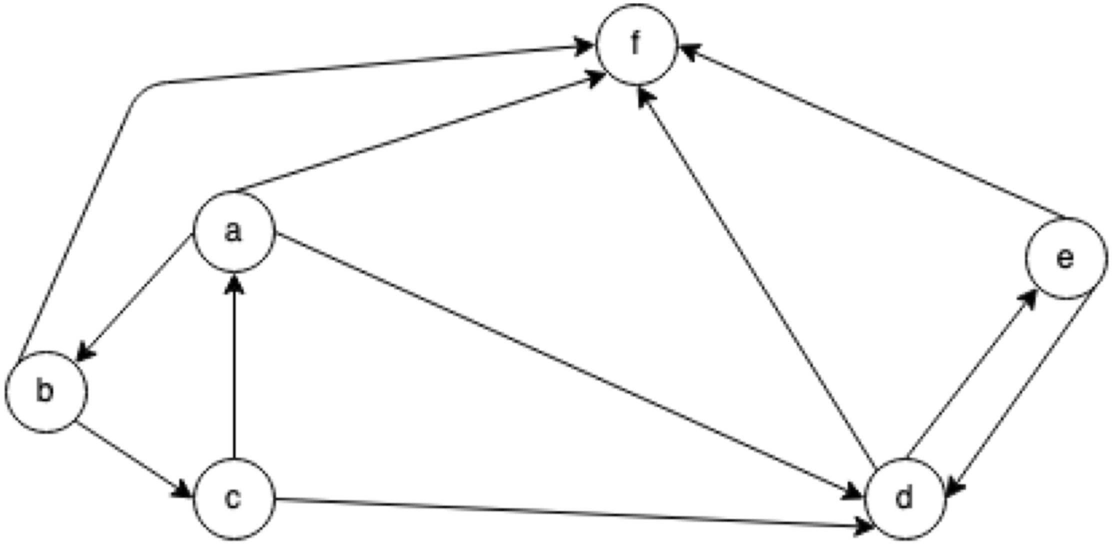
- **Décomposition en CFC : Méthode de Malgrange**
  - (1) Fixer un sommet i
  - (2) Établir la liste des descendants de i, puis des descendants des descendants, … (i fait partie de la liste)
  - (3) Établir la liste des ascendants de i, puis des ascendants des ascendants, … (i fait partie de la liste)
  - (4) L'intersection des 2 listes forme une CFC
  - (5) Supprimer les sommets de la CFC et retour en (1)

- **Périodicité :**

Un graphe est périodique s'il peut être décomposé en sous classes telles que :

- Aucun arc ne lie les sommets d'une même sous classe.
- Tout sommet est transitoire : $\forall\ x_i,\ d_+(x_i) \neq 0,\ d_-(x_i) \neq 0$
- Les sous classes sont disposées de façon cyclique.

Méthode de Malgrange



	descendants	ascendants	CFC	
a	a, f, b,d, c,e	a,c,b	a,c,b	CFC1
d	d,e,f	d,e	d,e	CFC2
f	f	f	f	CF3