Chapitre 2

Espace vectoriel

2.1 Introduction au groupe

Définition 2.1. *Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.*

Exemple 2.2. *(1) L'addition ou la multiplication sont des lois de composition internes sur* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

(2) la soustraction définit une loi de composition interne sur $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, *ou* $\mathbf{C}$ *mais sur* $\mathbf{N}$.

(3) Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbf{R}^d$ *n'est pas une loi de composition interne si* $d \geq 2$.

(4) On note $\mathcal{F}(E, E)$ *l'ensemble des applications de E dans E, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,E) \times \mathcal{F}(E,E) & \to & \mathcal{F}(E,E) \\ (f,g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

($f \circ g$ est défini par $\forall x \in E$, $f \circ g(x) = f(g(x))$) est une loi de composition interne.

Définition 2.3. *Un groupe est la donnée d'un ensemble G et d'une loi de composition interne notée $*$ suivante :*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x * y \end{array}$$

telle que $(G, *)$ vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) (Elément neutre) Il existe $e \in G$ tel que $\forall x \in G$, $e * x = x * e = x$.

(2) (Associativité) Pour tout $x, , y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.

(3) (Elément inverse) Pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

Si de plus, $\forall x, y \in G$, on a $x * y = y * x$,on dit que $*$ est commutative et $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Remarque 2.4. *On emploie aussi parfois le terme de symétrique au lieu de l'inverse.*

Exemple 2.5. *(1)* $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont des groupes abéliens :* 0 *est l'élément neutre, l'inverse de* x *est* $-x$*. Notons que* $(\mathbf{N}, +)$ *n'est pas un groupe car la condition* (3) *de la définition 2.3 n'est pas vérifié.*

(2) $Q^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{C}^*$ *munis de la multiplication sont des groupes :* 1 *est l'élément neutre. Il en est de même pour* $\mathbf{T}$*, l'ensemble des nombres complexe de module* 1*. Si* x *est réel, alors l'inverse de* x *est* $\frac{1}{x}$*. Tout élément de* $\mathbf{C}^*$ *possède un inverse pour la loi* $\times$ *:*

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists z' \in \mathbf{C}^* \mid z \times z' = z' \times z = 1$$

(Si $z = x + iy$ *alors* $z' = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z} = z^{-1}$*).*

(3) Soit E *un ensemble et soit* $\mathcal{S}(E)$ *l'ensemble des bijections de* E *sur* E*, soit* $\circ$ *la loi de composition interne définie par la composition de deux bijections. Montrer à titre d'exercice que* $(\mathcal{S}(E), \circ)$ *est un groupe et qu'il est non abélien et* E *a au moins trois éléments.*
En particulier, pour $n \in \mathbf{N}$*, soit* $E = \{1, \ldots, n\}$*. Alors* $\mathcal{S}(E)$ *est noté* S_n*.* S_n *est un groupe de cardinal* $n!$*. On l'appelle le groupe des permutations sur* n *éléments.*

Proposition 2.6. *(1) L'élément neutre est unique.*

(2) L'inverse x' *d'un élément* $x \in G$ *est unique.*

(3) L'inverse de l'inverese de $x \in G$ *est* x*, i.e* $(x')' = x$*.*

(4) Pour tout $x, y \in G$*,* $(x * y)' = y' * x'$*.*

(5) Pour tout $x, y, z \in G$*, si* $x * y = x * z$ *alors* $y = z$*.*

Preuve:

(1) Soient $e', e \in G$ deux éléments neutres de G. En appliquant la propriété d'un élément neutre à e et e', on obtient :

$$\begin{cases} e' * e = e * e' = e, \\ e * e' = e' * e = e'. \end{cases}$$

Par conséquant $e = e'$.

(2) Soit $x'' \in G$ tel que $x'' * x = x * x'' = e$. on a alors $x" * x * x' = x'$ ce qui implique que $x'' = x'$ (puisque $x * x' = e$).

(3) Soit $(x')'$ l'inverse de l'inverse de x', on a $(x')' * x' = e$. Puisque $x * x' = e$ et d'aprés la deuxième propriété de cette proposition, on a $x = (x')'$.

(4) On a

$$(x * y) * (y' * x') = x * y * y' * x' = x * x' = e$$

donc $(x * y)' = y' * x'$.

(5) On a

$$x' * (x * y) = x' * (x * z) \Longrightarrow (x * x') * y = (x * x') * z \Longrightarrow y = z.$$

□

Notation : Soit $(G, *)$ un groupe, on note souvent xy au lieu de $x * y$, 1 au lieu de e et x^{-1} l'inverse de x, pour tout $x \in G$.

2.2 Espace vectoriel

L'ensemble $\mathbf{K}$ désigne toujours $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 2.7. *On appelle* $\mathbf{K}$-espace vectoriel *(ou* espace vectoriel seu $\mathbf{K}$*) tout ensemble non vide E muni d'une loi de comoposition interne notée +*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

telles que :

(1) $(E, +)$ *est un groupe abélien.*
(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
(3) $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
(5) $\forall x \in E$, *on a* $1x = x$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs *; et les éléments de* $\mathbf{K}$ *sont appelés* scalaires.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de $\mathbf{K}$ espace vectoriel.

Exemple 2.8. *(1) L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*

(2) $\mathbf{K}$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel.*

(3) Soient E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et X un ensemble non vide quelconque. Considérons $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des applications de X dans E. Pour $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit $f + g$, $\lambda f \in \mathcal{F}(X, E)$ par :

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$$

alors $\mathcal{F}(X, E)$ muni de ces lois est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel.

(4) Sur $\mathbf{R}^2$, on définit les deux lois suivantes : pour $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \text{ et } \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$

alors $\mathbf{R}^2$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

(5) Plus généralement : Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n espaces vectoriels, alors l'espace produit $E := E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un espace vectoriel pour les lois suivantes : Pour tous $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

(6) L'ensemble $\mathbf{P}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n additionné du polynôme nul est un espace vectoriel.

Proposition 2.9. *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et pour tout $x, y \in E$, on a :*

(1) $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.
(2) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.
(3) $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.
(4) $(-\lambda)(-x) = \lambda x$.

2.3 Sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l'ensemble E désignera un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

2.3.1 Définition

Définition 2.10. *Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F possède les propriétés suivantes :*

(1) $0 \in F$ *;*

(2) $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$. *Autrement dit F est stable par l'addition ;*

(3) $\forall x \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda x \in F$. *Autrement dit, F est stable par la multiplication par scalaire.*

Remarque 2.11. *Tout sous-espace vectoriel de E, est un espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Exemple 2.12. *(1) Si E est un espace vectoriel, alors $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E.*

(2) Si $E = \mathbf{R}^2$, alors $F = \{(x, 0); x \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. De même, si $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, alors $F\{(\lambda x_0, \lambda y_0); \lambda \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(3) L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$ est un sous-esapce vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

(4) $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. En effet $\mathbf{R}_n$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de vecteur nul $0 = (0, \ldots, 0)$. $H \subset \mathbf{R}_n$ et $0 = (0, \ldots, 0) \in H$ car $0 + \cdots + 0 = 0$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in H$. On a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$. Or $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + \mu(y_1 + \cdots + y_n) = 0$ car $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 0$ puisque $x, y \in H$ donc $\lambda x + \mu y \in H$.

Corollaire 2.13. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E $(F \subset E)$. Si F vérifie les propriétés* (1) *et* (2) *suivantes alors F est un sous-espace vectoriel de E :*

(1) F est non vide (F contient l'élément neutre de E).

(2) $\forall (x, y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, *alors* $\lambda x + \mu y \in F$.

Exemple 2.14. *Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$:*

- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul ;*
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition ;*
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \in \mathbf{Z}\}$ *car non stable par produit extérieur.*

Proposition 2.15. *Soient E un espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve:

Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors pour tout i, on a $\lambda x + \mu y \in E_i$ donc $\lambda x + \mu y$ est dans l'intersection de tout les E_i. $\square$

Remarque 2.16. *La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel. En effet, si* $E = \mathbf{R}^2$*, les sous-ensembles* $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 0\}$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^2$ *mais* $E_1 \cup E_2$ *n'est pas un sous-espace vectoriel (par exemple, soient* $x, y \in \mathbf{R}^*$*, on a* $(x, -x) \in E_1$ *et* $(y, y) \in E_2$ *mais* $(x, -x) + (y, y)$ *n'appartient ni à* E_1 *ni à* E_2*).*

2.3.2 Combinaisons linéaires

Soit $\{x_1, \ldots, x_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme $a_1x_1 + \ldots a_px_p = \sum_{k=1}^{p} a_kx_k$, où les $a_k \in \mathbf{R}$ est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $x_k, k = 1 \ldots, p$.

Remarque 2.17. *On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini.*

2.3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel E. On note $\mathrm{vect}(A)$, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. On a donc

$$\mathrm{vect}(A) = \{\textstyle\sum_{a\in A} \lambda_a a \mid (\lambda a) \text{ est une famille de scalaires à support fini}\}.$$

Donc un élément x de E appartient à $\mathrm{vect}(A)$, si et seulement si, il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que : $x = \lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n$.

Théorème 2.18. *Soit* A *une partie d'un espace vectoriel* E*.* $\mathrm{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de* E *vérifiant :*

(1) $A \subset \mathrm{vect}(A)$*,*

(2) $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espaces vectoriels contenant* A*.*

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(A)$ *se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant* A*, on l'appelle espace vectoriel engendré par* A*.*

Corollaire 2.19. $\mathrm{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriel de* E *contenant* A*.*

Corollaire 2.20. A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\mathrm{vect}(A) = A$*.*

Exemple 2.21. *(1)* $\mathrm{vect}\{\textit{ensemble vide}\} = \{0\}$ *car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de* E*.*

(2) $\mathrm{vect}(E) = E$ *car* $vectE$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant* E*.*

(3) Soit $A = \{u\}$*. Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$*.*
Puisque $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et puisque* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel on a* $\lambda u \in \mathrm{vect}(A)$*, pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$*. Ainsi* $\mathbf{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$*. Par double inclusion on obtient* $\mathbf{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$*.*

(4) Soit $A = \{u, v\}$*. Par double inclusion, on montre comme ci-desus que* $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$*.*

Proposition 2.22. *Si A et B deux parties de E alors* $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(B) \subset \mathrm{vect}(A)$.

Preuve:
Supposons que $A \subset B$. On a alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$ or $\mathrm{vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$. □

Proposition 2.23. *Si A et B sont deux parties de E alors* $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Exemple 2.24. *Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.* $\mathrm{vect}(F \cup G) = F + G$. *Ainsi $F + G$ apparait comme étant le plus patit sous-espace vectoriel contenant F et G.*

2.4 Feuille d'exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E\times E$ de l'addition usuelle : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ et de la multiplication externe $*$ par les complexes définie par : $(a+i.b)*(x,y)=(a.x-b.y,a.y+b.x)$.
Montrer que $E\times E$ est alors un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
Celui-ci est appelé complexifié de E.
Exercice 2. Soit $\mathbf{R}_+^*$ muni de la loi interne définie par $a\oplus b=a.b, \forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que : $\lambda\otimes a=a^\lambda, \forall a\in\mathbf{R}_+^*, \forall\lambda\in R$.
Montrer que $(\mathbf{R}_+^*,\oplus,\otimes)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
Exercice 3. Sur $\mathbf{R}^2$, on définit les deux lois suivantes : pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathbf{R}^2$ et $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, on pose

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \qquad \text{et} \qquad \lambda\star(x,y)=(\lambda x,0).$$

Le triplet $(\mathbf{R}^2,+,\star)$ est-il un espace vectorielsur $\mathbf{R}$?
Exercice 4. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$?

(a) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\leqslant y\}$;

(b) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy=0\}$;

(c) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=y\}$;

(d) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1\}$.

Exercice 5. Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ et $G=\{(a-b,a+b,a-3b) \mid a,b\in\mathbf{R}\}$.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

(b) Déterminer $F\cap G$.

Exercice 6. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

(a) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n)$ bornée$\}$;

(b) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n)$ monotone$\}$;

(c) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n)$ convergente$\}$;

(d) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n)$ arithmétique$\}$.

Exercice 7. Soient $u_1,\ldots,u_n$ des vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que l'ensemble $F=\{\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de $E=\mathrm{vect}(u_1,\ldots,u_n)$.
Exercice 8. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F\cap G=F+G\Leftrightarrow F=G$.
Exercice 9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si, $F\subset G$ ou $G\subset F$.
Exercice 10. Comparer $\mathrm{vect}(A\cap B)$ et $\mathrm{vect}(A)\cap\mathrm{vect}(B)$.
Exercice 11. Soient A et B deux parties d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $\mathrm{vect}(A\cup B)=\mathrm{vect}(A)+\mathrm{vect}(B)$.

2.5 Applications linéaires

2.5.1 Définitions

Définition 2.25. *Soient* $(E, +, .)$ *et* $(F, .+)$ *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels. On dit que* $f : E \to F$ *est linéaire (ou est un morphisme d'espace vectoriel) si :*

(1) $\forall x, y \in E$, *on a* $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *;*

(2) $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E$, *on a* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble des applications de* E *dans* F.

Proposition 2.26. [Caractérisation usuelle des applications linéaires] : *Soit* $f : E \to F$. *L'application* f *est linéaire, si et seulement si ,* $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Exemple 2.27. *Soit* $f : E \to F$ *définie par* $f : x \mapsto 0_F$. *L'application* f *est linéaire.*

Proposition 2.28. *Soient* $E, E_1, \dots E_n$, $(n \in \mathbf{N}^*)$ *des* κ *espaces vectoriels. L'application*

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & E & \to & E_1 \times \cdots \times E_n \\ & & x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{array}$$

f *est linéaire de* E *dans* $E_1 \times \cdots \times E_n$, *si et seulement si,* $f_1, \dots, f_n$ *sont des applications linéaires de respectivement de* E *dans* $E_1, \dots,$ *de* E *dans* E_n.

Exemple 2.29. *Montrons que* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *définie par* $f(x, y) = (x + y, x - y, 2y)$ *est une application linéaire. Soient* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, *et* $a = (x, y), b = (x', y') \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y + \mu y', 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(x + y, x - y, 2y) + \mu(x' + y', x' - y', 2y') \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

Proposition 2.30. *Soient* $(E, +, .)$, $(F, +, .)$, $(G, +, .)$ *des* $\mathbf{K}$*- espaces vectoriels.*

(1) Si l'application $f : E \to F$ *est linéaire alors* $f(0_E) = 0_F$ *;*

(2) Si $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont linéaires alors* $g \circ f : E \to G$ *est linéaire.*

(3) Si $e_1, \dots e_n$ *sont des vecteurs de* E *alors* $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $f(\sum_{k=1}^n a_k e_k) = \sum_{k=1}^n a_k f(e_k)$.

2.5.2 Applications linéaires particulières

Formes linéaires

Définition 2.31. *On appelle forme linéaire sur un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E, *toute application linéaire de* E *dans* $\mathbf{K}$. *On note* E^*, *au lieu de* $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, *l'ensemble des formes linéaires sur* E.

Exemple 2.32. *Pour* $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$ *fixé, l'application* $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ *définie par* $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ *est une forme linéaire sur* $\mathbf{K}^n$. *En effet, c'est une application de* $\mathbf{K}^n$ *vers* $\mathbf{K}$ *et c'est aussi une application linéaire car on vérifie aisement que* $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x, y \in \mathbf{K}^n$, *on a* $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Endomorphisme

Définition 2.33. *On appelle endomorphisme de E, toute applicatin linéaire de E dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$, l'ensemble des endomorphismes de E.*

Exemple 2.34. *L'application identité $Id_E : E \to E$ est un endomorphisme de E.*

Proposition 2.35. *Si f et g deux endomorphismes de E, alors $f \circ g$ est aussi un endomorphisme de E.*

Isomorphisme

Définition 2.36. *On appelle isomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E vers un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F toute application linéaire bijective de E vers F. On note $\mathrm{Iso}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.*

Exemple 2.37. *L'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ définie par $f(a,b) = a + ib$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}$-espace vectoriel. En effet, cette application est $\mathbf{R}$-linéaire et bijective.*

Proposition 2.38. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes alors la composée $g \circ f : f \to G$ est un isomorphisme.*

Proposition 2.39. *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.*

Exemple 2.40. *L'application $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ définie par $g : z \mapsto (\Re(z), \mathrm{Im}(z))$ est l'isomorphisme réciproque de l'application $f : (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mapsto a + ib \in \mathbf{C}$.*

Automorphisme

Définition 2.41. *On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijective de E. On note $\mathrm{Gl}(E)$ l'ensemble d'automorphisme de E.*

Proposition 2.42. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des automorphismes alors la composée $g \circ f : f \to G$ est un automorphisme.*

Proposition 2.43. *Si $f : E \to F$ est un automorphisme alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est un automorphisme.*

2.5.3 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 2.44. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si V est une sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.*
Si W est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.45. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(1) On appelle image de f *l'espace* $\mathrm{Im}\, f = f(E)$.

(2) On appelle noyau de f *l'espace* $\ker f = f^{-1}(\{0\})$.

Proposition 2.46. *(1)* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

(2) $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Remarque 2.47. *(1) Pour déterminer l'image d'une application linéaire* f*, on détermine les valeurs prises par* f*, i.e., les* $y \in F$ *tels qu'il existe* $x \in E$ *pour lequel* $y = f(x)$.

(2) Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f*, on résout l'equation* $f(x) = 0_F$ *d'inconnue* $x \in E$.

Exemple 2.48. *Déterminons le noyau et l'image de l'aaplication linéaire* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *définie par* $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$*. Soit* $a = (x, y) \in \mathbf{R}^2$*. .....* $\ker f = \{x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$
$\operatorname{Im} f = \{(x, -x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Théorème 2.49. *Si* $f : E \to F$ *est une application linéaire alors*

(1) f *est surjective, si et seulement si,* $\operatorname{Im} f = F$

(2) f *est injective, si et seulement si,* $\ker f = \{0_E\}$.

Preuve:

□

2.6 Famille de vecteurs

2.6.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition 2.50. *On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *tout vecteurs* x *de* E *pouvant s'écrire* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ *avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *des scalaires de* $\mathbf{K}$ *bien choisis.*

Définition 2.51. *On appelle espace vectoriel engendré par la famille* $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$*, le sous-espace vectoriel engendré par la partie* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*. On le note* $\operatorname{vect} \mathcal{F}, \operatorname{vect}(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *ou* $\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

Exemple 2.52. *Le sous-espace vectoriel engendré par la famille vide est l'espace nul* $\{0\}$.

Théorème 2.53. *Si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille de vecteurs de* E *alors* $\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$*, c'est-à-dire :*

$$\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_n) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

Exemple 2.54. *(1) Cas* $n = 1$, $\mathfrak{X}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$.

(2) Cas $n = 2$, $\mathfrak{X}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$.

(3) Dans $\mathbf{R}^3$*, considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$.
$\operatorname{vect}(u, v) = \{(\lambda, \lambda + \mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}$.

Remarque 2.55. *Il est efficace d'établir qu'une partie est un sous-espace vectoriel en observant que celle-ci est engendrés par une famille de vecteurs.*

Exemple 2.56. *(1) Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Puisque $P = \mathrm{vect}(u, v)$, avec $u = (1,1,0)$ et $v = (1,-1,2)$, P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.*

(2) Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $P = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$. Puisque $x + y - z = 0 \leftrightarrow z = x + y$, on a $P = \mathrm{vect}((1,0,1),(0,1,1))$. ainsi P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2.6.2 Famille génératrice

Définition 2.57. *On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est génératrice de E, si tout vecteur x de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Remarque 2.58. *La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E, si et seulement si, $\mathrm{vect}(\mathcal{F}) = E$.*

Exemple 2.59. *(1) Dans $E = \mathbf{R}^n$, on pose $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ où 1 se situe en ième position. La famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathbf{R}^n$. En effet $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on peut écrire $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.*

(2) Dans $E = \mathbf{R}$, la famille (1) est génératrice. En effet, $x \in \mathbf{R}$, $x = x.1$.

(3) Dans $E = \mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel, la famille $\mathcal{F} = (1, i)$ est génératrice. En effet, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on peut écrire $z = a.1 + b.i$, avec $a = \Re(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Proposition 2.60. *Si $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est une famille génératrice et si $e_{n+1} \in \mathfrak{X}(e_1, \ldots, e_n)$ alors la sous-famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.*

2.6.3 Famille libre, famille liée

Définition 2.61. *Un vecteur u est dit colinéaire à un vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $u = \alpha v$. Deux vecteurs u et v sont dits colinéaires si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Attension

u est colinéaire à v n'équivaut pas à v est colinéaire à v. En effet, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteurs mais tout vecetuers n'est pas colinéaire au vecetur nul.

Définition 2.62. *(1) On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est libre si elle vérifie $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \to \lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$. On dit que les vecetuers $e_1, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants*

(2) On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée si elle n'est pas libre ce qui signifie $\exists \lambda_1, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Une égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls est appelée relation linéaire sur les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.

Exemple 2.63. *Soit $u \in E$, étudions la liberté de la famille (u). Si $u \neq 0$ alors $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Par suite, la famille (u) est libre.*
Si $u = 0$ alors on peut écrire $\lambda u = 0$ avec $\lambda = 1 \neq 0$. Par suite, la famillle (0) est liée.

Proposition 2.64. *Soient $n \geq 2$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :*

(i) $(e_1, \ldots, e_n)$ *est liée ;*

(ii) *L'un des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ est combinaison linéaire des autres.*

Exemple 2.65. *(1) Soient $u, u \in E$.*
(u, v) est liée, si et seulement si, $(\exists \alpha \in \mathbf{K}, u = \alpha v)$ ou $(\exists \beta \in \mathbf{K}, v = \beta u)$. Ansi, la famille (u, v) est liée, si et seulement si, u et v sont colinéaires.

(2) Dans $E = \mathbf{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. Etudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \begin{cases} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Aprés résolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

(3) Dans $E = \mathbf{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. Etudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Aprés rsolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = -\beta. \end{cases}$
On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est liée car on a notament la relation linéaire $-2u + v - w = 0$.

(4) Dans $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, considérons les fonctions $f : x \mapsto 1, g : x \mapsto cosx, h : x \mapsto sinx$ et montrons que la famille (f, g, h) est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$. Pour $x = 0$, on obtient l'équation $\alpha + \beta = 0(1)$. Pour $x = \Pi/2$, on obtient l'équation $\alpha + \gamma = 0(2)$. Pour $x = \Pi$, on obtient l'équation $\alpha_\beta = 0(3)$. On a (1) et (3) donnent $\alpha = \beta = 0$ et par (2) on obtient $\gamma = 0$. Finalement la famille (f, g, h) est libre.

Remarque 2.66. *(1) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

(2) Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.

(3) Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition 2.67. *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille libre et si* $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n)$ *alors la sur-famille* $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ *est libre.*

2.6.4 Base d'un espace vectoriel

Définition 2.68. *On dit qu'une famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n} = (e_1, \dots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est une base de* E *si celle-ci est libre et génératrice.*

Exemple 2.69. *(1) Dans* $E = \mathbf{K}^n$*, on pose* $e_i = (1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{K}^n$ *où 1 se situe en ième position. On a déja vu que* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbf{K}^n$ *; montrons qu'elle est libre. Soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$*. Supposons que* $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$*. On a* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ *et donc* $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$*. Finalement , la famille* $\mathcal{B}$ *est libre et génératrice de* $\mathbf{K}^n$*, c'est une base de* $\mathbf{K}^n$*.*

(2) Considérons la famille $(1, i)$ *déléments du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*. On a déja vu que cette famille est génratrice ; montrons qu'elle est libre. Soient* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$*. Supposons que* $\lambda.1 + \mu.i = 0$*. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient* $\lambda = \mu = 0$*. Finalement, la base* $\mathcal{B}$ *est libre est génératrice du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*, c'est une base de* $\mathbf{C}$*.*

Remarque 2.70. *La famille* $(1, i)$ *est liée dans le* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*. Elle n'est pas donc une base du* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*.*

2.6.5 Composante dans une base

Théorème 2.71. *Si* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une base d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de* E *alors* $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n$*.*

Définition 2.72. *Avec les notations ci-dessous, les scalaires* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont appelés les composants de* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *(ou encore les composantes de* x*).*

Remarque 2.73. *Les composantes d'un vecteur dépendant de la base dans laquelle on travaille.*

Exemple 2.74. *(1) Dans* $E = \mathbf{K}^n$*, considérons la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *et le vecteur* $x = (x_1, \dots, x_n)$*. Puisque* $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$*, les composantes du vecteurs* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *sont les saclaires* $x_1, \dots, x_n$*.*

(2) Dans le $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*, les composantes de* $z \in \mathbf{C}$ *dans la base canonique* $(1, i)$ *sont* $\Re(z)$ *et* $\mathrm{Im}(z)$

Théorème 2.75. *Si* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une base de* E *alors pour tout vecteur* x *et* y *de composantes* $x_1, \dots, x_n$ *et* $y_1, \dots, y_n$ *dans* $\mathcal{B}$*, les composantes de* $x + y$ *sont* $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ *et celle de* λx *sont* $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$*. Ainsi l'application* $x \in E \mapsto x_i \in \mathbf{K}$ *est une forme linéaire sur* E*.*

2.7 Feuille d'exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base

2.7.1 Applications linéaires

Exercice 1 **:** Les applications entre **R**-espace vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

(1) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$;

(2) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$;

[3) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = xy$;

(4) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$;

Exercice 2 **:** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) \to (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3 **:** Soit $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ définie par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f = 0$.
Montrer que Φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 4 **:** Soit E l'espace vectoriel des applications indéfinement dérivables sur **R**. Soient $\Phi : E \to E$ et $\Psi : E \to E$ les applications définies par :
$\Phi(f) = f'$ et $\Psi(f)$ est donnée par : $\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(a) Montrer que Φ et Ψ sont des endomorphismes de E.

(b) Exprimer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

(c) Déterminer les images et les noyaux de Φ et de Ψ.

Exercice 5 **:** Soit f l'application linéaire d'un **K**-espace vectoriel E vers un **K**-espace vectoriel F.
Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(\text{vect}(A)) = \text{vect}(f(A))$.

Exercice 6 **:** Soie E un **K**-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent, c'est-à-dire il existe $n \in \mathbf{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 7 **:** Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + \ker f \subset B + ker f$.

2.7.2 Image et noyau d'un endomorphisme

Exercice 8 **:** Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$, si et seulement si, $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Exercice 9 **:** Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E.

(a) Comparer $\ker(f) \cap \ker(g)$ et $\ker(f + g)$;

(b) Comparer $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f + g)$;

(c) Comparer $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$;

(d) Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 10 **:** Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E. Montrer que

(a) $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) \Longleftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$;

(b) $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

2.7.3 Sous-espace engendré par une famille finie

Exercice 11 **:** On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants $u = (1,1,1)$ et $v = (1,0,-1)$.
Montrer que $\text{vect}(u,v) = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.
Exercice 12 **:** Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $x = (1,-1,1)$ et $y = (0,1,a)$ où $a \in \mathbf{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffissante sur a pour que $u = (1,1,2)$ appartiennent à $\text{vect}(x,y)$. Comparer alors $\text{vect}(x,y)$, $\text{vect}(u,x)$ et $\text{vect}(u,y)$.

2.7.4 Famille libre

Exercice 13 **:** Les familles suivantes de $\mathbf{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'ai pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

(a) (x_1,x_2) avec $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$;

(b) (x_1,x_2,x_3) avec $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$;

(c) (x_1,x_2,x_3) avec $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$;

(d) (x_1,x_2,x_3) avec $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$;

Exercice 14 **:** On pose f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions définies par : $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x\cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
Exercice 15 **:** Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par : $f_k(x) = e^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Exercice 16 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient x, y, z trois vecteurs de E tel que la famille $x, y, z)$ soit libre.
On pose : $u = y + z$, $v = z + x$ et $w = x + y$.
Montrer que la famille (u, v, w) est libre.
Exercice 17 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Etablir :

(a) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre ;

(b) Si $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} in\, \text{vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice.

Exercice 18 **:** Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K}$.
On pose $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ et $\forall 1 \leq i \leq n, y_i = x_i + u$.
A quelle condition sur les α_i, la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ est-elle libre ?
Exercice 19 **:** Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto sin(x+a), x \mapsto sin(x+b), x \mapsto sin(x+c)$ sont-elles indépendantes ?

2.7.5 Obtention de base

Exercice 20 **:** On pose $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,0), e_3 = (0,1,1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.
Exercice 21 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $v = e_2 + e_3$.

Montrer que la famille (u, v) est libre et compléter celle-ci en une base de E.
Exercice 22 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $u = e_1 + 2e_3$ et $v = e_3 - e_1$ et $w = e_1 + 2e_2$.
Montrer que (u, v, w) est une base de E.
Exercice 23 **:** soi E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $u_i = e_1 + \ldots, e_i$.

(a) Montrer que $B' = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ;

(b) Exprimer les composantes dans B' d'un vecteur de E en fonction de ces comoposantes dans B.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Opérations sur les matrices

3.1.1 Définition

Définition 3.1. *Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$. On appelle* matrice *à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$, un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbf{K}$. On note une telle matrice*

$$M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- *On dit que M est une* matrice colonne *si $p = 1$.*
- *On dit que M est une* matrice ligne *si $n = 1$.*
- *On dit que M est une* matrice carrée *si $n = p$.*

Notations :

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- Si $p = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et à n colonnes.
- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite matrice carrée de taille n.
- Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$, alors a_{ij} est le coefficient situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M.

Définition 3.2. *Soit $M = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que :*

(1) M est une matrice triangulaire supérieure *(resp.* strictement supérieure*) si*

$a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$ *(resp.* $i \geq j$*). C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, (resp. M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}).$$

(2) M *est une* matrice inférieure *(resp.* strictement inférieure*) si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i < j$ *(resp.* $i \leq j$*). C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, (resp. M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}).$$

(3) M *est une* matrice diagonale *si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \neq j$*. C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(4) M *est symétrique (resp. antisymétrique) si* $a_{ij} = a_{ji}$ *(resp.* $a_{ij} = -a_{ji}$*) pour tout* $1 \leq i, j \leq n$*. C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, (\text{ resp. } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}).$$

Définition 3.3. *Soit* $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*. On appelle* transposée *de* M *la matrice* ${}^tM = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ *où* $b_{ij} = a_{ij}$*. C'est-à-dire :*

$${}^tM == \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les n *lignes de* M *sont les* n *colonnes de* ${}^tM$ *et les* p *colonnes de* M *sont les* p *lignes de* ${}^tM$*.*

Remarque 3.4. *(1) Une matrice carrée* M *est symétrique, si et seulement si,* $M =^t M$*.*

(2) Une matrice carrée M *est antisymétrique, si et seulement si,* $M = -^tM$*.*

3.1.2 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.)$ est un K-espace vectoriel

Opérations

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $A+B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de la façon suivante : $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Ainsi

$$\begin{aligned}A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1P}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1P}+b_{1p}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Remarque 3.5. *On ne somme que des matrices de même types.*

Définition 3.6. *Soit $M=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et soit $\lambda\in\mathbf{K}$. On définit la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. Ainsi*

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1P}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np}\end{pmatrix}.$$

Théorème 3.7. *$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel d'élément nul $0=0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}=$ $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \cdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$.*

Dimension

Définition 3.8. *Soit $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$. On appelle matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice E_{ij}, dont tous les coefficients sont nuls sauf à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1.*

Exemple 3.9. *(1) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, les matrices élémentaires sont $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.*

(2) Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ les matrices élémentaires sont :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{n1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.10. *La famille $B = (E_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le p)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

Preuve:
$\forall X = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a $X = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_{ij}E_{ij}$. Donc B est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Montrons maintenant que B est libre. Soient $\lambda_{ij} \in \mathbf{K}$, $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$, tel que $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ et montrons que $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$. On a $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par identification on obtient $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \le i \le n, 1 \le j \le p$. □

Corollaire 3.11. *La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est mp. En particulier* $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$ *et* $\dim \mathcal{M}_{n,1}(K) = \dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K}) = n$.

Exemple 3.12. *(1) Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Nous remarquons que $\mathrm{card}(B) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Donc pour que B soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ il suffi que B soit libre sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbf{R}$, tel que $\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + \lambda_4A_4 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_4 = 0$. On a $\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + \lambda_4A_4 = 0$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & l_3 - \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On déduit facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

(2) Montrons que :

$$\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ 2a+b & -a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. *On a*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ b & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K}\} \\ &= \{a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K}\} \\ &= \operatorname{vect}(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Par suite $\mathcal{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

(3) Soit $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d = 0, \forall a, b, c, d \in \mathbf{K}$. *Montrons que* H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. *Soit* f *l'application suivante*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\kappa) & \to & \mathbf{K} \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+b+c+d. \end{array}$$

Il est facile à vérifier que f *est une application linéaire, c'est-à-dire, pour tous* $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ *on a* $f(\lambda A + \beta B) = \lambda f(A) + \beta f(B)$. *On a*

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in \mathcal{M}_2(K) \mid f(M) = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d = 0\} \end{aligned}$$

On remarque que $\ker f = H$ *et on sait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On déduit alors que* H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

3.1.3 Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires

Proposition 3.13. $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ *l'ensemble des matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* n.

Remarque 3.14. *Une base de* $\mathcal{D}_n(\mathbf{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbf{K}\}$ *est* $B_1 = (E_{11}, \ldots, E_{nn})$.

Proposition 3.15. *(1)* $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K})$ *(resp.* $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K})$*) est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $\mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K})$ *(resp.* $\mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K})$*) est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque 3.16. *(1)* $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K}) = \mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i \leq j \leq n)$;

(2) $\mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K}) = \mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i < j \leq n)$;

(3) $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K}) = \mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j \leq i \leq n)$;

(4) $\mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K})\,\mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j < i \leq n)$.

Exercice Montrer que :

(1) $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$;

(2) $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

3.1.4 Propriétés du produit matriciel

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $C = A \times B = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$, par $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq q$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.
Exemple Vérifier que pour tous $E_{ij}, E_{kl} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
Attention : Pour une cette multiplication matricielle soit possible il est necessaire que le nombre de colonnes de A soit egal au nombre de ligne de B. On peut retirer type(n,p)× type(p,q)=type(n,q).

Exemple 3.17.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 0 + 2\times 1 & 0 + 2\times -1 \\ -1\times 1 + 1\times 2 & 0 + 1\times 1 & 0 + 1\times -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.18. *Si les types de A et B permettent de calculer AB et BA, alors en général on n'a pas $AB = BA$. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.19. *(1) Pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K}), C \in \mathcal{M}_{q,m}$, *on a* $(AB)C = A(CB)$ *;*

(2) pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K})$, *on a* $(A + B)C = AC + BC$ *;*

(3) pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $B, C \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K})$, *on a* $A(B + C) = AB + AC$ *;*

(4) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K})$, *et pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$, *on a* $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Remarque 3.20. *Dans l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées, la multilplications est une loi de composition interne. Elle admet comme élément neutre la matrice diagonale*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Puissance d'une matrice

Définition 3.21. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \times A, \ldots, A^m = A \times \cdots \times A$ (m termes).*

Attension : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + Ba^2 + AB^2 + BAB + B^2$.

Matrices inversibles

Définition 3.22. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$. Cette matrice B est alors unique, c'est l'inverse de A noté A^{-1}.*

Exemple 3.23. *La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.*

Proposition 3.24. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

(1) Si A et B sont inversibles alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Définition 3.25. *On note $\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 3.26. $(\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K}), \times)$ *est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.*

Exemple 3.27. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On vérifie par le calcul que $A^2 - 5A = 2I_2$. Par suite $A(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2) = I_2$. On conclut alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$.*

Remarque 3.28. *La somme de deux matrices inversibles n'est pas toujours une matrice inversible. Par example :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Détermination pratique de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Lemme 3.29. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ si $AX = BX$, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ alors $A = B$.*

Comment chercher l'inverse d'une matrice carrée $A \in \mathrm{Gl}\, n(\mathbf{K})$: Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$. On introduit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Si cela est possible, on résout ce système dont les inconnus sont $x_1, \ldots, x_n$ et on obtient :

$$\begin{cases} x_1 & = & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + b_{nn}y_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Soit $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$. Le système (3.1) est équivalent à $X = BY$. Ainsi $I_nX = BAX, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, d'après le lemme 3.29 on a $I_n = BA$ donc $A^{-1} = B$.

Exemple 3.30. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. *Déterminons* A^{-1} *? Soient* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, *tel que* $Y = AX$. *On a :*

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 - x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3 + y_1) \\ x_1 = y_3 - y_1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ x_1 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

On déduit alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2 Représentations matricielles

3.2.1 Matrice colonne des composantes d'un vecteur

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n), \forall x \in E, \exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{K}$, tel que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Définition 3.31. *On appelle matrice des composantes dans B du vecteur x la matrice colonne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ telles que ses coefficients sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, qui sont les composantes de x dans la base B. On la note* $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}n, 1(\mathbf{K})$.

Remarque 3.32. *Puisque les composantes d'un vecteur dépend de la base choisie, il est necessaire de préciser la base.*

Exemple 3.33. *Soit le* $\mathbf{R}$ *espace vectoriel* $\mathbf{R}^n$ *muni de sa base canonique* $(e_1, \ldots, e_n)$.

On a : $\mathrm{Mat}_B(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots 0 \end{pmatrix}$. *Soit* $x = (1, 2, 3, \ldots, n) \in \mathbf{R}^n$, *on a* $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

3.2.2 Matrice des composantes d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $1 \leq i \leq p$ notons c_i la colonne des composantes dans B du vecteur x_i.

Définition 3.34. *On appelle matrice des composantes dans la base B de la famille des vecteurs $\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les colonnes sont $c_1, \ldots, c_p$, on la note* $\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_B(x_1, \ldots, x_p)$.

Remarque 3.35. *Si $p = 1$, on retrouve la définition de la matrice des composantes du vecteur x_1 dans la base B.*

Exemple 3.36. *(1) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$. On a*

$$\mathrm{Mat}_B(B) = \mathrm{Mat}_B(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Soit $E = \mathbf{K}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et soient $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (-1, 5, 6)$, $x_3 = (4, 7, 9)$, $x_4 = (4, -6, -7)$.

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -6 \\ 3 & 6 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$. Soient $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, $P_0 = (1 + X)^0 = 1, P_1 = (1 + X)^1 = 1 + X, P_2 = (1 + X)^2 =$

$1 + 2X + X^2, P_3 = (1+X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$. *On a*

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels muni respectivement des bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_p)$.

Définition 3.37. *On appelle matrice representative dans les bases B et C d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ la matrices des composantes dans C de la famille image $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$, on la note* $\mathrm{Mat}_{B,C} u = \mathrm{Mat}_C(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Remarque 3.38. *La matrice représentative de u dépend du choix des bases B et C, il est donc necessaire de préciser ces derniers.*

Exemple 3.39. *(1) Soit u l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rccl} u & : & \mathbf{R}^3 & \rightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z, x-y). \end{array}$$

On muni $\mathbf{R}^3$ de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ $(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ et soit $C = (v_1, v_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ $(v_1 = (1,0), v_2 = (0,1))$. Déterminons la matrice représentative de u dans les bases B et C. On a

$$\begin{array}{rcl} u(e_1) & = & (1,1) = v_1 + v_2, \\ u(e_2) & = & (2,-1) = 2v_1 - v_2, \\ u(e_3) & = & (-1,0) = -v_1 + 0v_2. \end{array}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Soient $a, b \in \mathbf{R}$ (fixés) et u l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccl} u & : & \mathbf{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & & P & \mapsto & (P(a), P(b), P(c)). \end{array}$$

On muni $\mathbf{R}_3[X]$ de sa base canonique $B = (P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2, P_3 = X^3)$ et on muni $\mathbf{R}^3$ de sa base canonique $C = (e_1, e_2 e_3)$. Déterminons la matrice représentative de u dans les bases B et C. On a

$$\begin{array}{rcl} u(P_0) & = & (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3, \\ u(P_1) & = & (a,b,c) = ae_1 + be_2 + ce_3, \\ u(P_3) & = & (a^2,b^2,c^2) = a^2e_1 + b^2e_2 + c^2e_3, \\ u(P_3) & = & (a^3,b^3,c^3) = a^3e_1 + b^3e_2 + c^3e_3. \end{array}$$

On déduit que

$$\mathrm{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 Matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et muni de la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$.

Définition 3.40. *On appelle matrice représentative dans la base B d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ la matrice représentative dans la base B au départ et à l'arrivée de u, on la note* $\mathrm{Mat}_{B,B}u = \mathrm{Mat}_B u \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Exemple 3.41. *(1) Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $u = \mathrm{Id}_E$ l'identité de E. On a $\mathrm{Mat}_B u = I_n$.*

(2) Soit $B = (e_1, e_1, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et soit u l'endomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+z, z+x, x+y). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= (0,1,1) = e_2 + e_3, \\ u(e_2) &= (1,0,1) = e_1 + e_3, \\ u(e_3) &= (1,1,0) = e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$, vérifions que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, pour cela il suffit de montrer que B' est libre, car $\mathrm{card}(B') = \dim \mathbf{R}^3 = 3$. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, tel que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ et montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ est équivalent à*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc B' est libre. Déterminons $\mathrm{Mat}_{B'}u$. *On a*

$$\begin{aligned} u(v_1) &= (2,2,2) = 2v_1, \\ u(v_2) &= (1,1,2) = 2v_1 - v_2, \\ u(v_3) &= (0,1,1) = v_1 + v_3. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.2.5 Image d'un vecteur

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis des bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_p)$. Pour $x \in E$ et $y \in F$, par convention on note X et Y les deux colonnes de x et y dans les bases B et C.

Théorème 3.42. *Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, la matrice de u dans les bases B et C est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ vérifiant $\forall x \in E, \forall y \in F$, $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$.*

Exemple 3.43. *Soirt E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u un endomorphisme de E dont la matrice dans B est*

$$\mathrm{Mat}_B u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$. On peut calculer le vecteur $u(x)$ par produit matriciel.

$$\mathrm{Mat}_B u(x) = AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors étudier le noyau de u en réslovant l'équation matricielle $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$.

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$$

Ainsi $\ker u = \{x_1(e_1 + e_2 - e_3) \mid x_1 \in \mathbf{K}\} = \mathrm{vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.
On peut aussi facilement déterminer l'image de u.
En effet, par le théorème du rang, on a $\mathrm{Rg}\, u = \dim E - \dim \ker u = 2$. *On peut donc déterminer une base de* $\mathrm{Im}\, u$*.en considérant deux vecteurs libres de l'image de u. Or les colonnes de A sont formées par les composantes des vecteurs $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$, qui sont des éléments de l'image et puisque $u(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$ et $u(e_2) = e_1 - e_2$ sont libres alors* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), u(e_2))$.

3.2.6 Isomorphisme de représentation matricielle

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis de bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_p)$.

Théorème 3.44. *L'application*

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{M}_{B,C} & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ & & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{B,C}u \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels.*

Corollaire 3.45. *Soient E et F deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F \times \dim F$. *En particulier,* $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ *et* $\dim E^* = \dim \mathbf{K} \times \dim E = \dim E$.

Remarque 3.46. *Par l'isomorphisme de représentation matricielle, introduire une application linéaire u de E vers F équivaut à introduire sa représentation matricielle relative à des bases données de E et F. C'est trés souvent ainsi que sont introduit des applications linéaires en dimension finie.*

3.2.7 Composition d'une application linéaire

Soient E, F et G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis des bases $B = (e_1, \ldots, e_p)$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ et $D = (w_1, \ldots, w_m)$.

Théorème 3.47. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a :* $\mathrm{Mat}_{B,D}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{C,D}v \times \mathrm{Mat}_{B,C}u$.

3.2.8 Isomorphisme et matrice inversible

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis dew bases $B = (e_1, \ldots, e_p)$ et $C = (v_1, \ldots, v_n)$.

Théorème 3.48. *Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{B,C}u$ on a équivalence entre*

(1) u est un isomorphisme ;

(2) A est inversible.

De plus, $\mathrm{Mat}_{C,B}(u^{-1}) = A^{-1}$.

3.3 Formule de changement de base

3.3.1 Matrice de passage

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

Définition 3.49. *On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice* $P = \mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_B(e'_1, \ldots, e'_n)$.

Exemple 3.50. *soit le* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{R}^3$ *muni de la base canonique* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *et de la base* $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$*, où* $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$*,* $e'_2 = e_2 - e_3$ *et* $e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3$*. La matrice de passage de la Base* B *à la base* B' *est*

$$\mathrm{Mat}_B B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.51. *Si* P *est la matrice de passage de la base* B *à la base* B' *alors* $P = \mathrm{Mat}_B(\mathrm{Id}_E(B'))$*.*

Attension : Ici la matrice de l'endomorphisme Id_E n'est pas l'identité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est a priori la même au départ.

Proposition 3.52. *Si* P *est la matrice de passage de la base* B *à la base* B' *alors* P *est inversible et* P^{-1} *est la matrice de passage* B' *à la base* B*.*

Exemple 3.53. *Reprenons les notations de l'exemple précident.*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad \text{et } P = \mathrm{Mat}_B B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour former la matrice de passage inverse P^{-1}*, il suffit d'exprimer les vecteurs de la base* B *en fonction de ceux de la base* B'*. A l'aide du système précédent on obtient :*

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 \\ e_2 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 + e'_3 \end{cases} \quad \text{et donc } P^{-1} = \mathrm{Mat}_{B'} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Nouvelle composante de vecteur

Théorème 3.54. *Soient* B *et* B' *deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n *si* x *est un vecteur de* E *dont on note* X *et* X' *les colonnes des composantes dans* B *et* B' *de* x *alors on a* $X = Mat_B B' X'$*.*

Remarque 3.55. *On retient la formule suivante* $\mathrm{Mat}_B x = \mathrm{Mat}_B B' \times \mathrm{Mat}_{B'} x$*.*

Corollaire 3.56. $X' = \mathrm{Mat}_{B'} B X$*.*

3.3.3 Nouvelle représenatation d'une application linéaire

Théorème 3.57. *Soient* B *et* B' *deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *et* C *et* C' *deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* F*. Si* f *est une application linéaire de* E *vers* F *dont on note* $A = \mathrm{Mat}_C(fB))$ *et* $A' = \mathrm{Mat}_{C'}(f(B'))$ *alors on a* $A' = Q^{-1}AP$*, où* P *est la matrice de passage de la base* B *à la base* B' *et* Q *est la matrice de passage de la base* C *à la base* C'*.*

Remarque 3.58. *On peut retrouver la formule du théorème 3.57 à l'aide du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"] & (F,C) \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"] \\
(E,B') \arrow[r, "f"] & (F,C')
\end{tikzcd}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{C'}\,\mathrm{Id}_F(C)A = A'\mathrm{Mat}_{B'}\,\mathrm{Id}_E(B) \\
&\Leftrightarrow \quad A' = \mathrm{Mat}_{C'}\,\mathrm{Id}_f(C)A\mathrm{Mat}_B\,\mathrm{Id}_E(B') \\
&\Leftrightarrow \quad A' = Q^{-1}AP.
\end{aligned}$$

3.4 Rang d'une matrice

3.4.1 Definition

Rappel : Si $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E alors on appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace engendré par $\mathcal{F}$. $\mathrm{Rg}\,\mathcal{F} = \dim \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors on appelle rang de l'application linéaire u la dimension de $\mathrm{Im}\,u$. C'est à dire : $\mathrm{Rg}\,u = \dim \mathrm{Im}\,u$.
Ces deux concepts sont liés puisque si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{Rg}\,u = \mathrm{Rg}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

Définition 3.59. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$. On appelle rang de A le rang de la famille $(C_1, \ldots, C_P)$. On note* $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(C_1, \ldots, C_p)$.

Théorème 3.60. *Si $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et si A est la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans une certaine bese B de E alors* $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(x_1, \ldots, x_p)$.

Théorème 3.61. *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si A est la matrice de u relative à des bases B de E et C de F alors* $\mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}(A)$.

3.4.2 Propriétés du rang d'une matrice

Proposition 3.62. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$,* $\mathrm{Rg}(A) \le \min(n,p)$.

Proposition 3.63. *pour tous $A \in n,p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on a* $\mathrm{Rg}(AB) \le \min(\mathrm{Rg}(A), \mathrm{Rg}(B))$. *De plus*

(a) Si A est une matrice carrée inversible alors $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(B)$ *;*

(b) Si B est une matrice carrée inversible alors $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(A)$.

Remarque 3.64. *On ne modifie pas le rang d'une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.*

Théorème 3.65. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a équivalence entre :*

(i) *A est inversible ;*

(ii) $\mathrm{Rg}(A) = n$.

Remarque 3.66. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a* $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}({}^tA)$.

3.5 Série d'exercices

Exercice 0 **:** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^tA ou ${}^tAA$.

(b) En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

Exercice 1 **:** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = A - I_3$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbf{N}$ et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 2 **:** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

(b) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

(c) En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 3 **:** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Observer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.
A quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

Exercice 4 **:** Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 **:** Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

(a)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-2x+z). \end{array}$$

(b)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, z+x, x+y). \end{array}$$

(c)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1). \end{array}$$

(d)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)). \end{array}$$

Exercice 6 **:** On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$.
On note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(a) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

(b) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Exercice 7 **:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

(a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E.

(b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans cette base.

(c) En déduire que

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 9 **:** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
On pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \varepsilon_2 = (1, -1, 0), \varepsilon_3 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbf{R}^3$.

(b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

(c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?

(b) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.

(c) Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$?

Exercice 11 **:** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.

(a) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

(b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1), \varepsilon_2 = (-1, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.

(b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

(c) Calculer la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + e_2 - e_3; \\ \varepsilon_2 &= e_1 - e_3; \\ \varepsilon_3 &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.

(b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 **:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : $1, 2$ et 3.

(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 **:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathbf{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathbf{C}$ soit D.

(b) Déterminer la matrice P de $\mathbf{GL}(3)(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

(c) Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$, A^n.

(d) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases} \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n), \\ y_{n+1} = x_n - z_n, \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

Exercice 16 **:** Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^3$:

(a) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (0, 1, 1)$.

(b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (2, 1, 1), x_2 = (1, 2, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 2)$.

(c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1), x_2 = (1, 0, 3)$ et $x_3 = (1, 1, 2)$.

Exercice 17 **:** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$, définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.

(b) $f : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

(c) $f : \mathbf{K}^4 \to \mathbf{K}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$.

Exercice 18 **:** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère les vecteurs $v_1 = -\, e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - \lambda e_2 - e_3$ et $v_3 = e_1 - e_2 - \lambda e_3$.

(a) Soit f_λ l'application linéaire de E dans E, définie par

$$f_\lambda(e_1) = v_1, \qquad f_\lambda(e_2) = v_2, \qquad f_\lambda(e_3) = v_3.$$

Déterminer la matrice A_λ de f_λ dans la base B.

(b) Déterminer suivant les valeurs de λ le rang de f_λ.

(c) Calculer, suivant les valeurs de λ, le noyau de f_λ.

(d) Montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

(e) Monter que $A_0 = PBP^{-1}$, où

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En déduire que $f_0^3 = f_0$.