

## Chapitre 1 : Programmation linéaire

J.-F. Scheid

v2.1

## 1) Modélisation

En Recherche Opérationnelle (RO), modéliser un problème consiste à identifier:

- les **variables** intrinsèques (inconnues)
- les différentes **contraintes** auxquelles sont soumises ces variables
- l'**objectif** visé (optimisation).

Dans un problème de programmation linéaire (**PL**) les contraintes et l'objectif sont des fonctions **linéaires** des variables. On parle aussi de *programme linéaire*.

Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits  $P_1$  et  $P_2$  nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	$P_1$	$P_2$	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

$P_1$  et  $P_2$  rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

*Quelles quantités (non entières) de produits  $P_1$  et  $P_2$  doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?*

- *Variables* :  $x_1$  et  $x_2$  sont les quantités des produits  $P_1$  et  $P_2$  fabriqués ( $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ).

- *Fonction objectif à maximiser* : La fonction objectif  $F$  correspond au bénéfice total :  $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ . On cherche donc

$$\max_{(x_1, x_2)} [F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2].$$

- *Contraintes* :

- Disponibilité de chacune des ressources :

$$3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

- Positivité des variables:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme d'un *programme linéaire* :

$$\max_{(x_1, x_2)} [F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2] .$$

*sous les contraintes:*

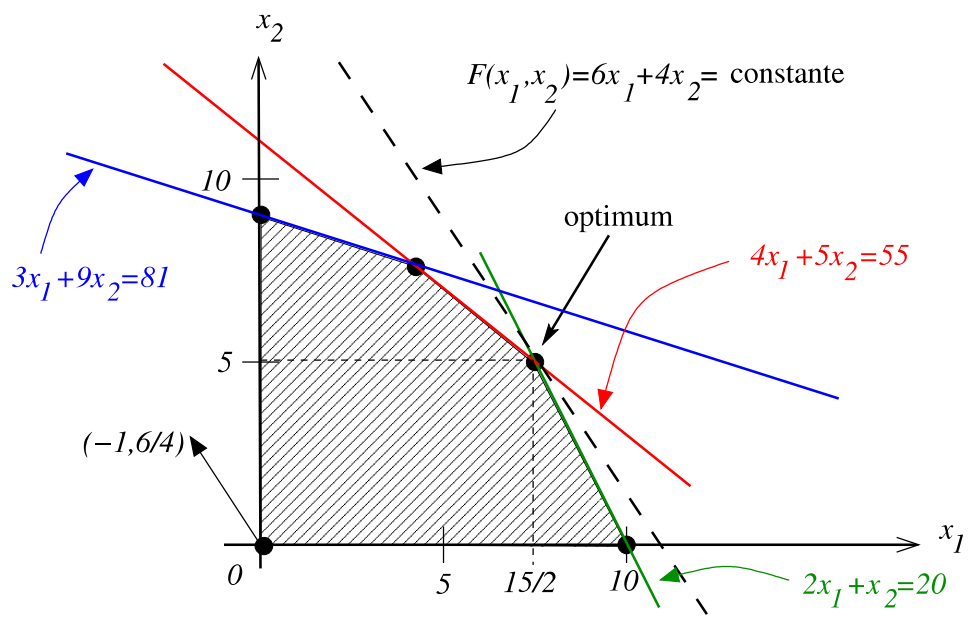
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## 2) Résolution graphique (PL à 2 variables)

Les contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des **demi-plans**.

Intersection de ces demi-plans = ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes.

L'ensemble des contraintes est un **polygône convexe**.



## Détermination du maximum de $F$

Fonction objectif  $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \Rightarrow$  droite de coefficient directeur  $(-1, 6/4)$ .

Pour déterminer  $\max F$ , on fait "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes  $\Rightarrow$  solution optimale  
 $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$  avec  $\max(F) = 65$ .

On remarque que le maximum de  $F$  est atteint en **un sommet** du **polygône convexe** des contraintes.



### 1) Forme canonique mixte

$$\max_{(x_1, \dots, x_n)} \left[ F(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \right] .$$

- contraintes inégalités :  $\forall i \in I_1, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$
- contraintes égalités :  $\forall i \in I_2, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$
- contraintes de signes :  $\forall j \in J_1, x_j \geq 0$
- $\forall j \in J_2, x_j$  de signe quelconque.

$I = I_1 \cup I_2$  : ens. des indices de contraintes,  $\text{card}(I) = m \Rightarrow \underline{m \text{ contraintes}}$

$J = J_1 \cup J_2$  : ens. des indices des variables,  $\text{card}(J) = n \Rightarrow \underline{n \text{ variables}}$

## Notations

Vecteurs :

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \text{ (les inconnues)}$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$$

Matrice  $A$  de taille  $m \times n$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

## 2) Forme canonique pure

Sous cette forme, pas de contraintes d'égalité  $I_2 = \emptyset$  et  $J_2 = \emptyset$ .

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme canonique pure s'il s'écrit:

$$\begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \left[ F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}$$

### 3) Forme standard

Sous cette forme,  $I_1 = \emptyset$  et  $J_2 = \emptyset$ .

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme standard s'il s'écrit:

$$\begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} [F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}$$

On dit de plus que le PL est sous forme standard simpliciale si  $A$  de taille  $m \times n$  avec  $m \leq n$ , se décompose en:

$$A = (I_m \mid H)$$

- $I_m$  matrice identité de taille  $m \times m$
- $H$  matrice de taille  $m \times (n - m)$

*Remarque sur la positivité des variables.*

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivité des variables  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . En fait, on peut toujours se ramener au cas  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  :

- Si la variable  $x$  a une borne inférieure non nulle  $x \geq l$ , il suffit de considérer la nouvelle variable  $y = x - l$  à la place de la variable  $x$  et alors on a  $y \geq 0$ .
- S'il n'y a pas de borne inférieure sur  $x$  (variable libre), on peut toujours poser  $x = y - z$  avec les nouvelles variables  $y \geq 0, z \geq 0$ .

## 4) Variables d'écart

### Proposition

Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

*Démonstration.* i) Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)^\top$  sont appelées variables d'écart.

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A \mid I_m) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

avec  $\tilde{A} = (A \mid I_m)$  matrice de taille  $m \times (n + m)$ .

ii) (Réciproque) Soit un PL sous forme standard. On a

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{x} = \mathbf{b} &\Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \tilde{A}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}}
 \end{aligned}$$

où  $\tilde{A}$  est une matrice de taille  $2m \times n$  et  $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{2m}$ .

□

**Exemple.** Problème de production de l'introduction.

PL sous forme standard. On introduit 3 variables d'écarts  $e_1, e_2, e_3$ .

$$\max_{(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)} [F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les inconnues sont désormais  $x_1, x_2, e_1, e_2, e_3$ .



### III. Solutions de base réalisables

PL sous *forme standard* ( $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ).

#### Hypothèse de rang plein

On suppose que la matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  avec  $\text{rang}(A) = m \leq n$ .

**Rappel** :  $\text{rang}(A)$  = nombre maximal de lignes de  $A$  linéairement indépendantes (=nombre max. de colonnes linéairement indépendantes).

**Remarques** : Sous l'hypothèse de rang plein :

- le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet toujours des solutions.
- si  $m < n$ , le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une infinité de solution.
- si  $m = n$ , la solution est unique et vaut  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ , dans ce cas, il n'y a rien à maximiser...
- **Hypothèse non restrictive** : si  $\text{rang}(A) < m$  le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  n'a pas de solution *en général*. Si  $\text{rang}(A) < m$  et  $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$ , il y a des équations redondantes qu'on peut supprimer.

Quelques définitions...

### Définition (solution réalisable)

On appelle solution réalisable tout vecteur  $\mathbf{x}$  qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  et  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

### Définition (variables de base)

Soit  $B \subset \{1, \dots, n\}$  un ensemble d'indices avec  $\text{card}(B) = m$  tel que les colonnes  $A^j, j \in B$ , de  $A$  sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée  $A_B$  formée des colonnes  $A^j, j \in B$ , est inversible. On dit que l'ensemble  $B$  des indices est une base.

- Les variables  $\mathbf{x}_B = (x_j, j \in B)$  sont appelées variables de base.
- Les variables  $\mathbf{x}_H = (x_j, j \notin B)$  sont appelées variables hors-base.

### Remarques.

- Sous l'hypothèse de rang plein, il existe toujours une base non vide.
- Quitte à renuméroter les indices, on peut toujours écrire les décompositions par blocs :

$A = (A_B | A_H)$  où  $A_H$  est la matrice formée des colonnes  $A^j$ ,  $j \notin B$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}.$$

Le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est équivalent à

$$A_B \mathbf{x}_B + A_H \mathbf{x}_H = \mathbf{b}.$$

$\Rightarrow$  on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors complètement déterminées (la matrice  $A_B$  est inversible)

### Définition (solution de base)

On dit que  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$  est solution de base associée à la base  $B$  si  $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$ .

### Propriétés des solutions de base réalisables

Si  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$  est une solution de base réalisable alors  $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ .

**Remarque.** Il y a *au plus*  $C_n^m$  solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

**Exemple.** Problème de production de l'introduction.

Sous forme standard, le PL s'écrit

$$\max_{(x_1, x_2)} [F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On a  $m = 3$ ,  $n = 5$ ,  $\text{rang}(A) = m = 3$ . **Une base** est donnée par

$B = \{3, 4, 5\}$  avec  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . **La solution de base réalisable**

correspondante est  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^\top = (\underbrace{0, 0}_{\mathbf{x}_H}, \underbrace{81, 55, 20}_{\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}})^\top$ .

## IV. Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

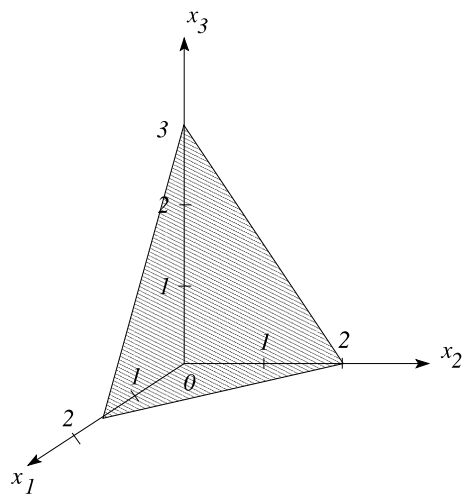
### Définitions (rappels)

- Un *polyèdre*  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  est défini par  $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid M\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$  où  $M$  est une matrice  $m \times n$ .
- Un ensemble  $E$  est dit *convexe* si  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in E$  pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

### Proposition

L'ensemble  $\mathcal{D}_R$  des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.

**Example.**  $\mathcal{D}_R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 3, \ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$



## Caractérisation de l'optimum

### Définition (sommet)

Un point  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$  est un sommet (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{D}_R$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$  tels que  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$  avec  $0 < \lambda < 1$ .

### Théorème

- $\mathbf{x}$  est une solution de base réalisable si et seulement si  $\mathbf{x}$  est un sommet de  $\mathcal{D}_R$ .
- L'optimum de la fonction objectif  $F$  sur  $\mathcal{D}_R$ , s'il existe, est atteint en au moins un sommet de  $\mathcal{D}_R$ .

Tout se passe donc avec les solutions de base : pour résoudre un PL sous forme standard, **il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables** (les sommets de  $\mathcal{D}_R$ ).



### 3 situations possibles :

- ❶  $\mathcal{D}_R = \emptyset$  : le PL n'a pas de solution.
- ❷  $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$  mais la fonction objectif  $F$  n'est pas majorée sur  $\mathcal{D}_R$  : le maximum de  $F$  vaut  $+\infty$  (cas exclu si  $\mathcal{D}_R$  est borné).
- ❸  $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$  et la fonction objectif  $F$  est majorée sur  $\mathcal{D}_R$  : le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

**Remarque.** Au plus  $C_n^m$  solutions de base réalisables. Pour déterminer une solution de base, on doit résoudre  $A_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ . Une méthode directe de type Gauss/LU requière de l'ordre de  $\mathcal{O}(m^3)$  opérations.

$\Rightarrow$  *Exploration exhaustive* de toutes les solutions de base (comparaison des coûts correspondants) :  $\mathcal{O}(m^3 C_n^m)$  opérations.

Ce nombre est vite très grand avec  $n$  et  $m$ . Par exemple, avec  $n = 20$  et  $m = 10$ , on a  $3 \cdot 10^8$  opérations.

**Méthode du simplexe** : on explore seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif  $\Rightarrow$  on réduit le nombre de solution de base à explorer.