II. Fondements théoriques des SED :

THEORIE DES GRAPHES

- **Pourquoi?**
  - Un graphe permet de **modéliser simplement** la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe représentant **un grand nombre de situations**.
  - Plusieurs problèmes dans différentes disciplines (chimie, sciences sociales, réseaux, applications industrielles, …).

II. Fondements théoriques des SED :

THEORIE DES GRAPHES

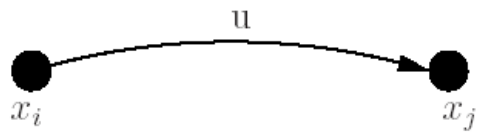
1. Concepts généraux
2. Coloration d'un graphe
3. Parcours dans un graphe
4. Etude de la connexité d'un graphe

Concepts généraux en théorie des graphes

- Définitions
- Représentations d'un graphe
- Connexité dans les graphes

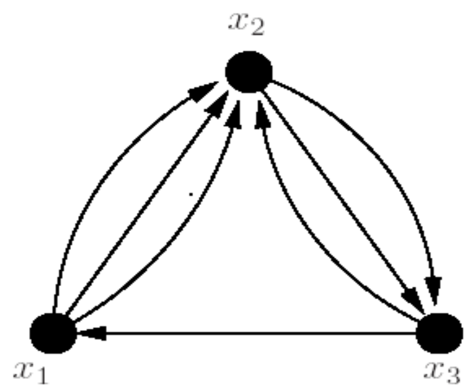
Définitions

- **Graphes orientés (GO):**
  - Un graphe G(X,U) est déterminé par:
    - Un ensemble $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ de **sommets**
    - Un ensemble $U=\{u_1, \ldots, u_m\}$ du produit cartésien $X \times X$ d'**arcs**.
  - Un ***p-graphe*** : pas plus que *p* arcs (x_i,x_j)



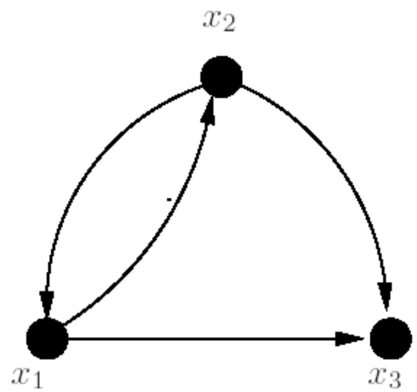
Arc u=(xi,xj)

boucle



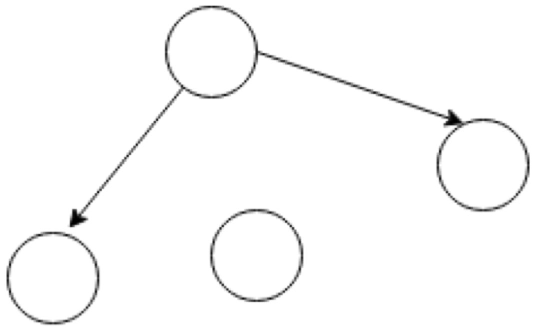
3-graphe

1-graphe = graphe



Définitions

- **Graphes et applications multivoques:**
  - x_j est successeur de x_i si $(x_i,x_j) \in U$
  - L'ensemble des successeurs de x_i est noté $\Gamma(x_i)$
  - L'ensemble des prédécesseurs de x_i est noté $\Gamma^{-1}(x_i)$
  - Γ est appelée une application multivoque sur X notée : **$G = (X,\Gamma)$**
- **L'ordre** du graphe G, noté |G|, est le nombre de sommets du graphe ($|G| = |X|$)



Graphe d'ordre 4

Définitions

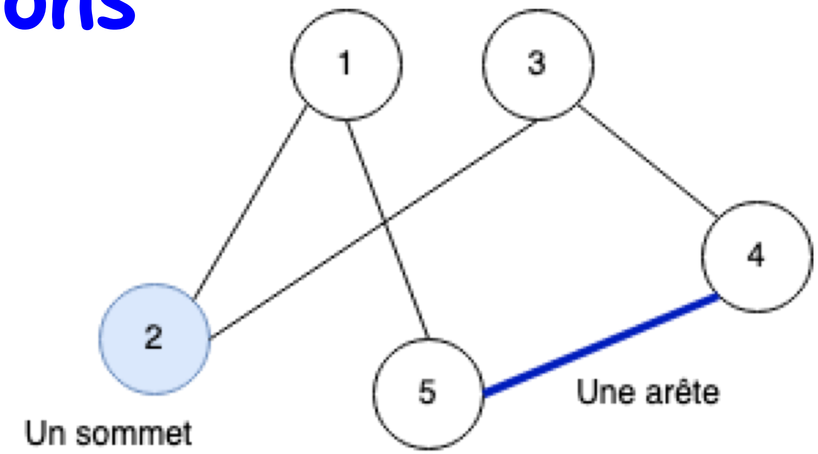
- **Graphes non orientés (GNO):**
  - On s'intéresse à l'existence d'arcs entre deux sommets *sans en préciser le sens*
  - Arc = ***arête***
  - U est constitué de *paires* non pas de couples de sommets (U ≡ A)
  - *Multigraphe* : plusieurs arêtes entre deux sommets
  - *Graphe simple* = non multigraphe + pas de boucles

Concepts généraux en théorie des graphes

Définitions

Un graphe non orienté est déterminé par:

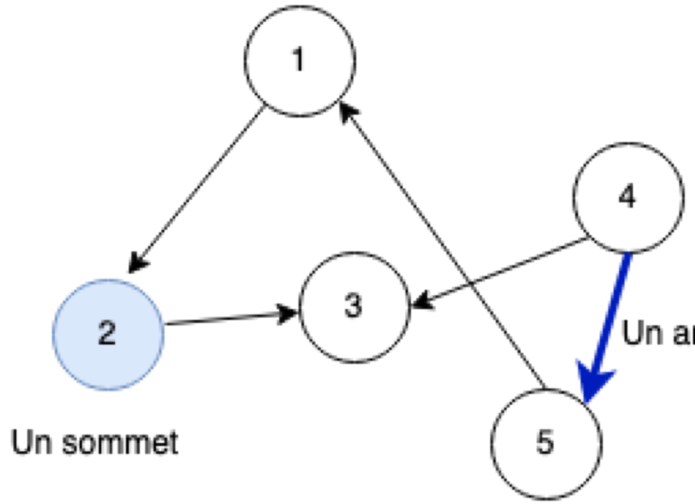
- Un ensemble X de **sommets**
- Un ensemble A d'**arêtes**.



Graphe Non Orienté (GNO)

Un graphe orienté est déterminé par:

- Un ensemble X de **sommets**
- Un ensemble U d'**arcs**.



Graphe Orienté (GO)

Définitions

- **Adjacence de sommets:**

Deux sommets x_i et x_k de X sont **adjacents** si x_i est un successeur de x_k ou si x_k est un successeur de x_i:

$$x_i \text{ adjacent à } x_k \equiv x_i \in \Gamma(x_k) \text{ ou } x_k \in \Gamma(x_i)$$

-Dans un graphe non orienté : $\exists\, a \in A : a = \{x_i , x_k\}$

-Dans un graphe orienté : $\exists\, u \in U : u = (x_i , x_k)$ ou $u = (x_k , x_i)$

Définitions

• Degré d'un sommet dans un graphe orienté:

Un arc $u \in U$ est un **arc incident à x vers l'extérieur** si l'extrémité initiale de u coïncide avec le sommet $x \in X$. On note U_x+ l'ensemble des arcs incidents à x vers l'extérieur.

Un arc $u \in U$ est un **arc incident à x vers l'intérieur** si l'extrémité terminale de u coïncide avec le sommet $x \in X$. On note U_x- l'ensemble des arcs incidents à x vers l'intérieur.

Le **demi-degré extérieur** (ou degré sortant) de x, noté d+(x), est le nombre d'arcs incidents à x vers l'extérieur: $d+(x) = |U_x+|$.

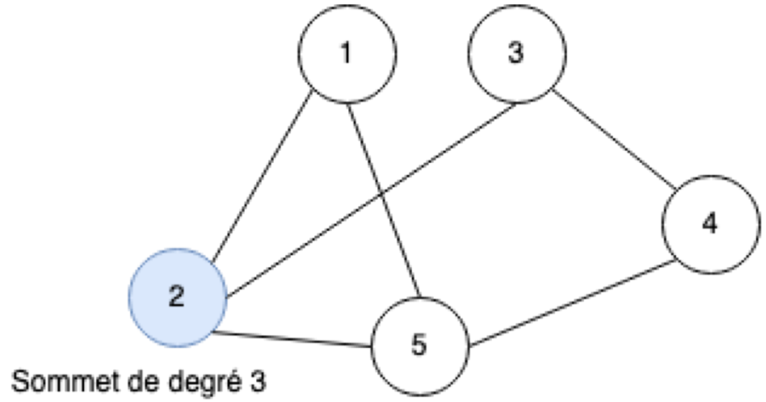
Le **demi-degré intérieur** (ou degré entrant) de x, noté d-(x), est le nombre d'arcs incidents à x vers l'intérieur: $d-(x) = |U_x-|$.

Le degré de x, noté d(x), est le nombre d'arcs ayant une extrémité coïncidant avec x: $d(x) = d-(x) + d+(x)$.

Définitions

Degré d'un sommet dans un graphe non orienté:

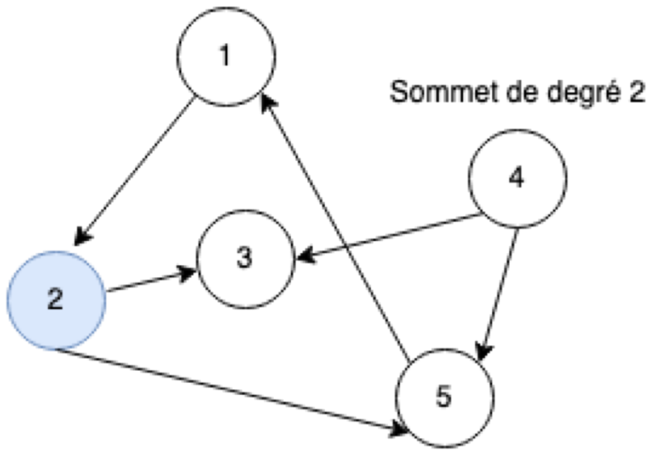
Nombre d'arêtes issues d'un sommet



Graphe Non Orienté (GNO)

Degré d'un sommet dans un graphe orienté:

Nombre d'arcs arrivant et partant d'un sommet



Graphe Orienté (GO)

Définitions

- **Graphe réflexif**: $\forall\, x_i \in X, (x_i, x_i) \in U$

- **Graphe symétrique**: $\forall\, x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \in U \rightarrow (x_j, x_i) \in U$

- **Graphe transitif**: $\forall\, x_i, x_j, x_k \in X, (x_i, x_j) \in U, (x_j, x_k) \in U \rightarrow (x_i, x_k) \in U$

- **Graphe complet**: $\forall\, x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \notin U \rightarrow (x_j, x_i) \in U$
  Un graphe complet d'ordre n est noté Kn

- **Clique**: ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.

- **Sous-ensemble stable**: sous-ensemble de sommets non adjacents 2 à 2

- **Graphe partiel**: graphe obtenu en supprimant certains arcs ou arêtes.

- **Sous-graphe**: graphe obtenu en supprimant certains sommets et tous les arcs ou arêtes incidents aux sommets supprimés.

Définitions

- **Graphe biparti :**

Soit le graphe G(X, U) :

G est un **graphe biparti ou bipartite** si l'ensemble de ses sommets X peut être divisé en deux ensembles A et B, de sorte que :

- les éléments de A ne sont pas reliés entre eux
- les éléments de B ne sont pas reliés entre eux

Les arêtes (ou arcs) relient uniquement des éléments de A à des éléments de B.

Un **graphe biparti complet** noté $K_{p,q}$ est un graphe biparti où chacun des p sommets de A est relié à chacun des q sommets de B.

Définitions

- Graphe planaire :

Soit le graphe G(X, U) :

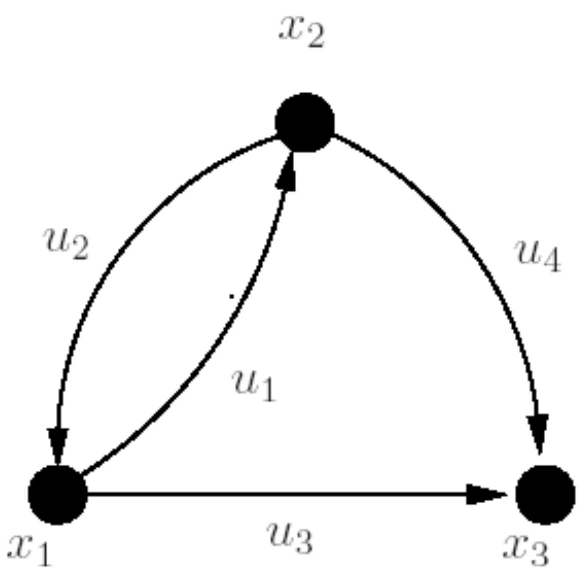
- Une représentation planaire du graphe G est la donnée, dans le plan, d'un ensemble de points de même cardinal que X, reliés deux à deux par des courbes continues du plan lorsque les sommets correspondant du graphe sont reliés, et tels que ces **courbes ne se croisent pas**.

- Un graphe G est dit **planaire** si et seulement si il admet une représentation planaire.

K_5 et $K_{3,3}$ sont les plus petits graphes non planaires

Représentations d'un graphe

1. Matrice d'adjacence



	x_1	x_2	x_3	$\leftarrow$ destination
x_1	0	1	1	
x_2	1	0	1	
x_3	0	0	0	
$\uparrow$ origine				

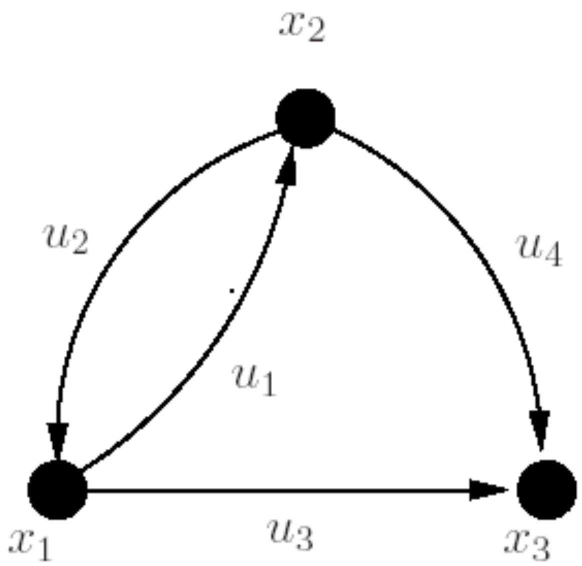
Taille: n^2

Pour un graphe valué: remplacer 1 par le poids de l'arc

Concepts généraux en théorie des graphes

Représentations d'un graphe

2. Matrice d'incidence sommets-arcs



	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	-1	1	0
x_2	-1	1	0	1
x_3	0	0	-1	-1

Taille: n x m

Connexité dans les graphes

- Une **chaîne** est une séquence (u_1 , u_2 , … , u_m) d'arêtes telle que u_k est adjacente à u_{k+1}.
  - Une **chaîne simple** est une chaîne dont les arêtes sont toutes distinctes.
  - Un **cycle** est une chaîne fermée.

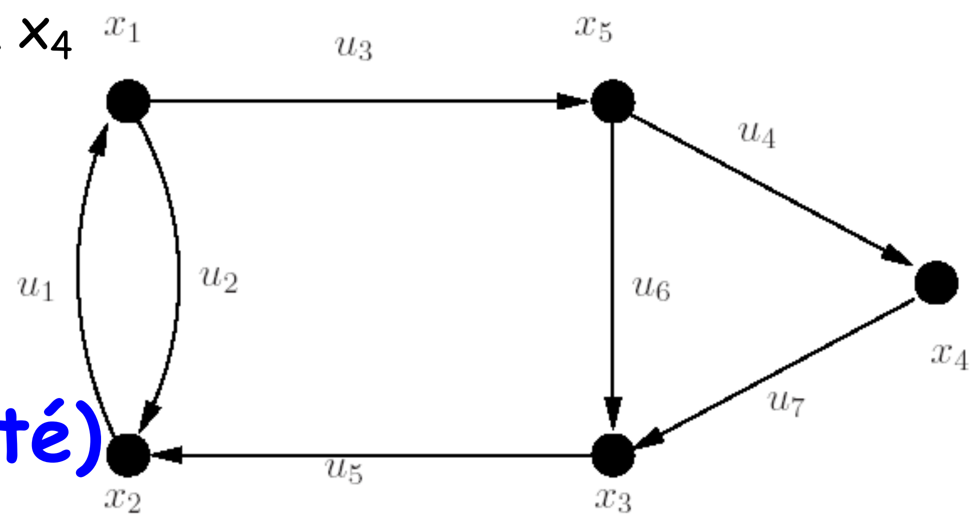
- Un **chemin** est une séquence (u_1 , u_2 , … , u_m) d'arcs telle que : u_k est adjacente à u_{k+1}.
  - Un **chemin simple** est un chemin dont les arcs sont tous distincts.
  - Un **circuit** est un chemin fermé.

Connexité dans les graphes

- ## Chaîne – Cycle (non orienté)

<u_2, u_5, u_6, u_4> est une chaîne de x_1 à x_4

<u_4, u_7, u_6> est un cycle



- ## Chemin – Circuit (orienté)

<u_1, u_3, u_4, u_7> est un chemin de x_2 à x_3

<u_1, u_3, u_6, u_5> est un circuit

Connexité dans les graphes

La **longueur** d'une chaîne (resp. chemin) est le nombre d'arêtes (resp. arcs) qui la composent.

Propriété :

Soit **M la matrice associée** à un graphe G non orienté (resp. orienté) et p un nombre entier naturel, le coefficient de M^p situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal au nombre de chaînes (resp. chemins) de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Connexité dans les graphes

- Le terme ***parcours*** regroupe les chemins, les chaînes, les circuits et les cycles

- Un parcours peut être
  - élémentaire : tous les sommets sont distincts
  - simple : tous les arcs (ou arêtes) sont distincts
  - hamiltonien : passe une fois et une seule par chaque sommet
  - eulérien : passe une fois et une seule par chaque arc (ou arête)

Connexité dans les graphes

- **Connexité (GNO)**

Un graphe $G = (X, U)$ est **connexe** si $\forall\ x_i, x_j \in X$, il existe une chaîne entre x_i et x_j

On appelle **composante connexe** le plus grand sous-ensemble de sommets tels qu'il existe une chaîne entre 2 sommets quelconques.

Un graphe est connexe s'il comporte une seule composante connexe formée de tous ses sommets. Chaque composante connexe est un graphe connexe.

Connexité dans les graphes

- ## Forte connexité (GO)

Un graphe $G = (X, U)$ est **fortement connexe** si $\forall\ x_i, x_j \in X$, il existe un chemin entre x_i et x_j

On appelle **composante fortement connexe (CFC)** le plus grand sous-ensemble de sommets tels qu'il existe un chemin entre 2 sommets quelconques.

Un graphe est fortement connexe s'il comporte une seule composante fortement connexe formée de tous ses sommets.

Les différentes CFC d'un graphe définissent une partition du graphe.

- ## Recherche de CFC : Méthode de Malgrange

Connexité dans les graphes

Propriété : Un **graphe non orienté est eulérien** si et seulement si il contient une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

Théorème d'Euler :

1. Un graphe admet un **cycle eulérien** si et seulement si il est connexe et si tous ses sommets sont de degré pair.

2. Un graphe admet une **chaîne eulérienne** entre les sommets x et y si et seulement si il est connexe et si x et y sont les deux seuls sommets de degré impair.

Connexité dans les graphes

Propriété : Un **graphe orienté est eulérien** si et seulement si il contient un chemin eulérien ou un circuit eulérien.

Théorème d'Euler :

1. Un graphe admet un **circuit eulérien** si et seulement si il est connexe et si $\forall x \in U$, $d_+(x)=d_-(x)$

2. Un graphe admet un **chemin eulérien** entre les sommets x et y si et seulement si il est connexe et si $d_+=d_-$ pour tout sommet, sauf (x,y): $d_-(x)=d_+(x) - 1$ et $d_-(y)= d_+(y) + 1$