Chapitre 7 : Séries entières

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Séries entières

Définition :
Nous appelons **série entière** de la variable complexe z, toute série dont le terme général est de la forme $a_n z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), où les a_n sont des nombres complexes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Le terme a_0 est appelé **terme constant.**
Par extension, nous appelons aussi **série entière** une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

où z_0 est fixé dans $\mathbb{C}$.

1.2 Convergence de séries entières

Pour toute série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, il existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, un unique élément $R \geq 0$ tel que :

— si $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument
— si $|z| > R$, la série diverge et son terme général n'est pas borné.

Définition :
Le nombre R est appelé **rayon de convergence** de la série entière et le disque ouvert $|z| < R$ est appelé **disque de convergence**.

Remarque : ATTENTION
Si $|z| = R$ alors la convergence peut avoir lieu ou ne pas avoir lieu. Une étude en chaque point du cercle est nécessaire.

Lorsqu'il y a convergence, nous notons $S(z)$ la somme de la série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

1.3 Calcul du rayon de convergence

Proposition :
Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite finie ou infinie quand n tend vers ∞, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Proposition :
Si $\sqrt[n]{a_n}$ admet une limite finie ou infinie quand n tend vers ∞, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

2 Propriétés de la somme d'une série entière

Définition :
Nous appelons **série entière dérivée** de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ obtenue en dérivant terme à terme.

Proposition :
Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.

Proposition :
Dans le disque de convergence, la somme de la série dérivée est la dérivée de la somme de la série donnée.
Pour $|z| < R$ et $|z_0| < R$, nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0}.$$

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +$

Proposition :
La somme d'une série entière est une fonction continue dans le disque de convergence.

3 Séries entières d'une variable réelle

Définition :

Nous appelons **intervalle de convergence** de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la variable réelle x l'intervalle ouvert $]-R;R[$ où R désigne le rayon de convergence de la série entière.

Dans l'intervalle de convergence, la somme d'une série entière d'une variable réelle est une fonction continue, indéfiniment dérivable et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. De même, dans l'intervalle de convergence, nous pouvons intégrer terme à terme une série entière d'une variable réelle, nous obtenons alors :

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} \quad \forall\, x \in]-R;R[.$$

Si une série entière d'une variable réelle converge pour $x_0 = R$ où R désigne le rayon de convergence, alors sa somme est une fonction continue à gauche au point $x_0 = R$ (même résultat à droite du point $-R$).

4 Développement en série entière d'une fonction

Définition :

Nous disons qu'une **fonction** f **est développable en série entière de la variable réelle** x, s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall\, x \in]-R;R[.$$

Proposition :

Si une fonction f est développable en série entière, alors son développement est unique.

Remarque :

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction :

Dérivation ou intégration terme à terme d'un développement en série entière connu.

— Utilisation d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par f.

Séries entières

Exercice 1 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière et étudier la nature de la série sur le cercle qui limite le disque de convergence.*

1. $\sum \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} z^{2n}$
2. $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z+3)^n$
3. $\sum \frac{4^n}{2n+1} z^{2n}$

Exercice 2

1. *Du développement en série entière de* $x \mapsto \ln(1+x)$*, déduire* $\ln(2)$ *sous forme d'une série numérique.*
2. *Même question à partir du développement en série entière de* $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 3

1. *Donner le développement en série entière de la fonction*

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt.$$

2. *En déduire la valeur de*

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt.$$

Exercice 4 *Déterminer une série entière* $\sum a_n x^n$ *solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} xy''(x) - 2y' = 2x^2 + 2 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$