*Graphes et RO* – TELECOM Nancy 2A

Chapitre 1 : Programmation lin´eaire

J.-F. Scheid

v2.1

1

I. Introduction

1) Mod´elisation

En Recherche Op´erationnelle (RO), mod´eliser un probl`eme consiste `a identifier:

les variables intrins`eques (inconnues)

les diff´erentes contraintes auquelles sont soumises ces variables l’objectif vis´e (optimisation).

Dans un probl`eme de programmation lin´eaire (PL) les contraintes et l’objectif sont des fonctions lin´eaires des variables. On parle aussi de *programme lin´eaire*.

2

*Exemple d’un probl`eme de production*.

Une usine fabrique 2 produits *P*1 et *P*2 n´ecessitant des ressources d’´equipement, de main d’oeuvre et de mati`eres premi`eres disponibles en quantit´e limit´ee.

|  | *P*1 | *P*2 | disponibilit´e |
| --- | --- | --- | --- |
| ´equipement | 3 | 9 | 81 |
| main d’œuvre | 4 | 5 | 55 |
| mati`ere premi`ere | 2 | 1 | 20 |

*P*1 et *P*2 rapportent `a la vente 6 euros et 4 euros par unit´e. 3

*Exemple d’un probl`eme de production*.

Une usine fabrique 2 produits *P*1 et *P*2 n´ecessitant des ressources d’´equipement, de main d’oeuvre et de mati`eres premi`eres disponibles en quantit´e limit´ee.

|  | *P*1 | *P*2 | disponibilit´e |
| --- | --- | --- | --- |
| ´equipement | 3 | 9 | 81 |
| main d’œuvre | 4 | 5 | 55 |
| mati`ere premi`ere | 2 | 1 | 20 |

*P*1 et *P*2 rapportent `a la vente 6 euros et 4 euros par unit´e.

*Quelles quantit´es (non enti`eres) de produits P*1 *et P*2 *doit produire l’usine pour maximiser le b´en´efice total venant de la vente des 2 produits ?*

3

*Variables* : *x*1 et *x*2 sont les quantit´es des produits *P*1 et *P*2 fabriqu´es (*x*1*, x*2 *∈* R).

4

*Variables* : *x*1 et *x*2 sont les quantit´es des produits *P*1 et *P*2 fabriqu´es (*x*1*, x*2 *∈* R).

*Fonction objectif `a maximiser* : La fonction objectif *F* correspond au b´en´efice total : *F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2. On cherche donc

(*x*1*,x*2)[*F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2] *.*

max

4

*Variables* : *x*1 et *x*2 sont les quantit´es des produits *P*1 et *P*2 fabriqu´es (*x*1*, x*2 *∈* R).

*Fonction objectif `a maximiser* : La fonction objectif *F* correspond au b´en´efice total : *F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2. On cherche donc

(*x*1*,x*2)[*F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2] *.*

max

*Contraintes* :

Disponibilit´e de chacune des ressources :

3*x*1 + 9*x*2 *≤* 81

4*x*1 + 5*x*2 *≤* 55

2*x*1 + *x*2 *≤* 20

Positivit´e des variables: *x*1*, x*2 *≥* 0.

4

En r´esum´e, le probl`eme de production se mod´elise sous la forme d’un *programme lin´eaire* :

(*x*1*,x*2)[*F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2] *.*

max

*sous les contraintes:*



3*x*1 + 9*x*2 *≤* 81

4*x*1 + 5*x*2 *≤* 55



2*x*1 + *x*2 *≤* 20

*x*1*, x*2 *≥* 0

5

I. Introduction

2) R´esolution graphique (PL `a 2 variables)

Les contraintes o`u apparaissent des in´egalit´es correspondent g´eom´etriquement `a des demi-plans.

Intersection de ces demi-plans = ensemble des variables satisfaisant `a toutes les contraintes.

L’ensemble des contraintes est un polygˆone convexe.

6

*x2*

*10*

constante

*F(x ,x )=6x +4x =*

*1 1 2*

*2*

*3x +9x =81 1 2 (−1,6/4)*

*5*

*0*

optimum

*4x +5x =55 1 2*

*x1*

*5 15/2 10*

*2x +x =20 1 2* 7

D´etermination du maximum de *F*

Fonction objectif *F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2 *⇒* droite de coefficient directeur (*−*1*,* 6*/*4).

Pour d´eterminer max *F*, on fait ”glisser” la droite (translation parall`ele `a la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu’`a rencontrer l’ensemble des variables satisfaisant les contraintes *⇒ solution optimale* (*x*1*, x*2) = (15*/*2*,* 5) avec max(*F*) = 65.

On remarque que le maximum de *F* est atteint en un sommet du polygˆone convexe des contraintes.

8

II. Formes g´en´erales d’un programme lin´eaire

1) Forme canonique mixte





max

(*x*1*,··· ,xn*)

*F*(*x*1*, ..., xn*) = *c*1*x*1 + *· · · cnxn* =X*n j*=1

*cjxj*

 *.*



*•* contraintes in´egalit´es : *∀i ∈ I*1*,*X*n*

*j*=1

*•* contraintes ´egalit´es : *∀i ∈ I*2*,*X*n* 

*j*=1

*aijxj* = *ai*1*x*1 + *· · ·* + *ainxn ≤ bi aijxj* = *bi*

*•* contraintes de signes : *∀j ∈ J*1*, xj ≥* 0

*• ∀j ∈ J*2*, xj* de signe quelconque*.*

*I* = *I*1 *∪ I*2 : ens. des indices de contraintes, card(*I*) = *m ⇒m* contraintes *J* = *J*1 *∪ J*2 : ens. des indices des variables, card(*J*) = *n ⇒ n* variables 9

*Notations*

Vecteurs :x = (*x*1*, · · · , xn*)*> ∈* R*n*(les inconnues) c = (*c*1*, · · · , cn*)*> ∈* R*n,*

b = (*b*1*, · · · , bm*)*> ∈* R*m*

Matrice *A* de taille *m × n* :

*A* =



*a*11 *a*12 *· · · a*1*n*

...... *am*1 *am*2 *· · · amn*



 *.*

10

2) Forme canonique pure

Sous cette forme, pas de contraintes d’´egalit´e *I*2 = *∅* et *J*2 = *∅*. Un programme lin´eaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s’il s’´ecrit:

hi

| *F*(x) = c*>*x = *c*1*x*1 + *· · · cnxn*  max  x  sous les contraintes :  *A*x *≤* b  x *≥* 0 |
| --- |

11

3) Forme standard

Sous cette forme, *I*1 = *∅* et *J*2 = *∅*.

Un programme lin´eaire (PL) est dit sous forme *standard* s’il s’´ecrit: hi

| *F*(x) = c*>*x  max  x  sous les contraintes : *A*x = b  x *≥* 0 |
| --- |

12

3) Forme standard

Sous cette forme, *I*1 = *∅* et *J*2 = *∅*.

Un programme lin´eaire (PL) est dit sous forme *standard* s’il s’´ecrit: hi

| *F*(x) = c*>*x  max  x  sous les contraintes : *A*x = b  x *≥* 0 |
| --- |

On dit de plus que le PL est sous forme standard *simpliciale* si *A* de taille *m × n* avec *m ≤ n*, se d´ecompose en:

*A* =

*Im | H*

*Im* matrice identit´e de taille *m × m*

*H* matrice de taille *m ×* (*n − m*)

12

*Remarque sur la positivit´e des variables*.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivit´e des variables x *≥* 0. En fait, on peut toujours se ramener au cas x *≥* 0 :

13

*Remarque sur la positivit´e des variables*.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivit´e des variables x *≥* 0. En fait, on peut toujours se ramener au cas x *≥* 0 : Si la variable *x* a une borne inf´erieure non nulle *x ≥ l*, il suffit de consid´erer la nouvelle variable *y* = *x − l* `a la place de la variable *x* et alors on a *y ≥* 0.

13

*Remarque sur la positivit´e des variables*.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivit´e des variables x *≥* 0. En fait, on peut toujours se ramener au cas x *≥* 0 : Si la variable *x* a une borne inf´erieure non nulle *x ≥ l*, il suffit de consid´erer la nouvelle variable *y* = *x − l* `a la place de la variable *x* et alors on a *y ≥* 0.

S’il n’y a pas de borne inf´erieure sur *x* (variable libre), on peut toujours poser *x* = *y − z* avec les nouvelles variables *y ≥* 0, *z ≥* 0.

13

4) Variables d’´ecarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s’´ecrit de fa¸con ´equivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

14

4) Variables d’´ecarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s’´ecrit de fa¸con ´equivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

*D´emonstration*. *i)* Soit un PL sous forme canonique pure. On a *A*x *≤* b *⇔ A*x + e = b*,* e *≥* 0

o`u e = (*e*1*, · · · , em*)*>* sont appel´ees *variables d’´ecart*.

*A*x *≤* b



*A | Im*

x e

= b

*A*˜˜x = b

Ainsi*,*

x *≥* 0*⇔*



x e

*≥* 0

*⇔*

˜x *≥* 0

avec *A*˜ =*A | Im*matrice de taille *m ×* (*n* + *m*).

14

*ii)* (R´eciproque) Soit un PL sous forme standard. On a

*A*x = b *⇔*

*A*x *≤* b

*A*x *≥* b*⇔*

*A*x *≤* b

*−A*x *≤ −*b

*⇔*

*A −A*

x *≤*

b *−*b

*⇔ A*˜˜x *≤* b˜

o`u *A*˜˜ est une matrice de taille 2*m × n* et b˜ *∈* R2*m*. 15

Exemple. Probl`eme de production de l’introduction. PL sous forme standard. On introduit 3 variables d’´ecarts *e*1*, e*2*, e*3.

(*x*1*,x*2*,e*1*,e*2*,e*3)[*F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2] *.*

max

sous les contraintes:

 

3*x*1 + 9*x*2 + *e*1 = 81 4*x*1 + 5*x*2 + *e*2 = 55 2*x*1 + *x*2 + *e*3 = 20

*x*1*, x*2 *≥* 0

*e*1*, e*2*, e*3 *≥* 0

Les inconnues sont d´esormais *x*1*, x*2*, e*1*, e*2*, e*3.

16

III. Solutions de base r´ealisables

PL sous *forme standard* (*A*x = b).

*Hypoth`ese de rang plein*

| rang(*A*) = *m ≤ n* |
| --- |

On suppose que la matrice *A* est de taille *m × n* avec.

*Rappel* : rang(*A*) = nombre maximal de lignes de *A* lin´eairement ind´ependantes (=nombre max. de colonnes lin´eairement ind´ependantes).

17

III. Solutions de base r´ealisables

PL sous *forme standard* (*A*x = b).

*Hypoth`ese de rang plein*

| rang(*A*) = *m ≤ n* |
| --- |

On suppose que la matrice *A* est de taille *m × n* avec.

*Rappel* : rang(*A*) = nombre maximal de lignes de *A* lin´eairement ind´ependantes (=nombre max. de colonnes lin´eairement ind´ependantes).

*Remarques* : Sous l’hypoth`ese de rang plein :

le syst`eme *A*x = b admet toujours des solutions.

si *m < n*, le syst`eme *A*x = b admet une infinit´e de solution. si *m* = *n*, la solution est unique et vaut x = *A−*1b, dans ce cas, il n’y a rien `a maximiser...

Hypoth`ese non restrictive : si rang(*A*) *< m* le syst`eme *A*x = b n’a pas de solution *en g´en´eral*. Si rang(*A*) *< m* et b *∈* Im(*A*), il y a des ´equations redondantes qu’on peut supprimer.

17

Quelques d´efinitions...

D´efinition (solution r´ealisable)

On appelle solution r´ealisable tout vecteur x qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que *A*x = b et x *≥* 0*.*

18

Quelques d´efinitions...

D´efinition (solution r´ealisable)

On appelle solution r´ealisable tout vecteur x qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que *A*x = b et x *≥* 0*.*

D´efinition (variables de base)

Soit *B ⊂ {*1*, · · · , n}* un ensemble d’indices avec card(*B*) = *m* tel que les colonnes *Aj*, *j ∈ B*, de *A* sont lin´eairement ind´ependantes. Autrement dit, la matrice carr´ee *AB* form´ee des colonnes *Aj*, *j ∈ B*, est inversible. On dit que l’ensemble *B* des indices est une base.

*•* Les variables x*B* = (*xj, j ∈ B*) sont appel´ees variables de base. *•* Les variables x*H* = (*xj, j ∈/ B*) sont appel´ees variables hors-base.

18

Remarques.

Sous l’hypoth`ese de rang plein, il existe toujours une base non vide. Quitte `a renum´eroter les indices, on peut toujours ´ecrire les d´ecompositions par blocs :

*A* = (*AB | AH*) o`u *AH* est la matrice form´ee des colonnes *Aj, j ∈/ B*

x =

x*B* x*H*

*.*

Le syst`eme *A*x = b est ´equivalent `a

*AB* x*B* + *AH*x*H* = b*.*

*⇒* on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors compl`etement d´etermin´ees (la matrice *AB* est inversible)

19

D´efinition (solution de base)

On dit que x =

x*B* x*H*

est solution de base associ´ee `a la base *B* si

x*H* = 0*.* On a alors n´ecessairement x*B* = *A−*1

*B*b.

20

D´efinition (solution de base)

On dit que x =

x*B* x*H*

est solution de base associ´ee `a la base *B* si

x*H* = 0*.* On a alors n´ecessairement x*B* = *A−*1 *B*b.

D´efinition : solution de base r´ealisable

x =

x*B* x*H*

est une solution de base r´ealisable ssi x*H* = 0 et

x*B* = *A−*1

*B*b *≥* 0.

Remarque. Il y a *au plus Cmn*solutions de base (exactement *Cmn*si toutes les sous-matrices carr´ees sont inversibles) mais elles ne sont pas forc´ement r´ealisables (il faut x*B* = *A−*1

*B*b *≥* 0).

20

Exemple. Probl`eme de production de l’introduction. Sous forme standard, le PL s’´ecrit

(*x*1*,x*2)[*F*(*x*1*, x*2) = 6*x*1 + 4*x*2] *.*

max

sous les contraintes:

 

3*x*1 + 9*x*2 + *e*1 = 81 4*x*1 + 5*x*2 + *e*2 = 55 2*x*1 + *x*2 + *e*3 = 20

*x*1*, x*2 *≥* 0

*e*1*, e*2*, e*3 *≥* 0

On a *m* = 3, *n* = 5, rang(*A*) = *m* = 3. Une base est donn´ee par

*B* = *{*3*,* 4*,* 5*}* avec *AB* =

 

1 0 0 0 1 0 0 0 1



 *.* La solution de base r´ealisable

correspondante est x = (*x*1*, x*2*, e*1*, e*2*, e*3)*>* = ( 0*,* 0

|{z}

x*H*

*,* 81*,* 55*,* 20 | {z } x*B*=*A−*1

*B*b

)*>*.

21

IV. Propri´et´es g´eom´etriques des solutions de base r´ealisables

On note

*DR* = *{*x *∈* R*n| A*x = b*,* x *≥* 0*} ,*

l’ensemble des solutions r´ealisables d’un PL sous forme standard.

D´efinitions (rappels)

*•* Un *poly`edre Q* de R*n*est d´efini par *Q* = *{*x *∈* R*n| M*x *≤* b*}* o`u *M* est une matrice *m × n*.

*•* Un ensemble *E* est dit *convexe* si *∀*x*,* y *∈ E*, *λ*x + (1 *− λ*)y *∈ E* pour tout 0 *≤ λ ≤* 1.

22

IV. Propri´et´es g´eom´etriques des solutions de base r´ealisables

On note

*DR* = *{*x *∈* R*n| A*x = b*,* x *≥* 0*} ,*

l’ensemble des solutions r´ealisables d’un PL sous forme standard.

D´efinitions (rappels)

*•* Un *poly`edre Q* de R*n*est d´efini par *Q* = *{*x *∈* R*n| M*x *≤* b*}* o`u *M* est une matrice *m × n*.

*•* Un ensemble *E* est dit *convexe* si *∀*x*,* y *∈ E*, *λ*x + (1 *− λ*)y *∈ E* pour tout 0 *≤ λ ≤* 1.

Proposition

L’ensemble *DR* des solutions r´ealisables est un poly`edre convexe, ferm´e. 22

Exemple. *DR* =x *∈* R3*|* 2*x*1 +32*x*2 + *x*3 = 3*, x*1*, x*2*, x*3 *≥* 0

*x*

*3*

*3*

*2*

*1*

*1 2*

*x*

*2*

*1 0*

*x*

*1*

*2*

23

Caract´erisation de l’optimum

D´efinition (sommet)

Un point x *∈ DR* est un sommet (ou point extrˆeme) si et seulement s’il n’existe pas y*,* z *∈ DR* , y *6*= z tels que x = *λ*y + (1 *− λ*)z avec 0 *< λ <* 1.

24

Caract´erisation de l’optimum

D´efinition (sommet)

Un point x *∈ DR* est un sommet (ou point extrˆeme) si et seulement s’il n’existe pas y*,* z *∈ DR* , y *6*= z tels que x = *λ*y + (1 *− λ*)z avec 0 *< λ <* 1.

Th´eor`eme

x est une solution de base r´ealisable si et seulement si x est un sommet de *DR*.

L’optimum de la fonction objectif *F* sur *DR*, s’il existe, est atteint en au moins un sommet de *DR*.

Tout se passe donc avec les solutions de base : pour r´esoudre un PL sous forme standard, il suffit de se restreindre aux solutions de base r´ealisables (les sommets de *DR*).

24

3 situations possibles :

1 *DR* = *∅* : le PL n’a pas de solution.

2 *DR 6*= *∅* mais la fonction objectif *F* n’est pas major´ee sur *DR* : le maximum de *F* vaut +*∞* (cas exclu si *DR* est born´e).

3 *DR 6*= *∅* et la fonction objectif *F* est major´ee sur *DR* : le PL admet une solution optimale (non n´ecessairement unique).

25

3 situations possibles :

1 *DR* = *∅* : le PL n’a pas de solution.

2 *DR 6*= *∅* mais la fonction objectif *F* n’est pas major´ee sur *DR* : le maximum de *F* vaut +*∞* (cas exclu si *DR* est born´e).

3 *DR 6*= *∅* et la fonction objectif *F* est major´ee sur *DR* : le PL admet une solution optimale (non n´ecessairement unique).

Remarque. Au plus *Cmn*solutions de base r´ealisables. Pour d´eterminer une solution de base, on doit r´esoudre *AB* x*B* = b. Une m´ethode directe de type Gauss/LU requi`ere de l’ordre de *O*(*m*3) op´erations.

*⇒ Exploration exhaustive* de toutes les solutions de base (comparaison des coˆuts correspondants) : *O*(*m*3*Cmn*) op´erations.

Ce nombre est vite tr`es grand avec *n* et *m*. Par exemple,

avec *n* = 20 et *m* = 10, on a 3 *·* 108 op´erations.

M´ethode du simplexe : on explore seulement les sommets qui permettent d’augmenter la fonction objectif *⇒* on r´eduit le nombre de solution de base `a explorer.

25