TELECOM Nancy 2A 2018-19 *Graphes et Recherche Op´erationnelle*

Feuille 3 : Programmation lineaire et simplexe ´

Exercice 1. *Algorithme du simplexe et m´ethode des dictionnaires*

Une usine fabrique 4 produits *P*1*, · · · , P*4 n´ecessitant une certaine quantit´e d’´equipement, de main d’oeuvre et de mati`ere premi`ere. Pour chacun des produits, les besoins unitaires (c’est-`a-dire *par unit´e de produit*) sont indiqu´es dans le tableau ci-dessous.

|  | *P*1 | *P*2 | *P*3 | *P*4 | disponibilit´e |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ´equipement  main d’oeuvre  mat. premi`ere | 2  10  1 | 4  8  1 | 8  6  2 | 6  10  2 | 100  160  20 |
| b´en´efice (e/unit´e) | 50 | 40 | 70 | 80 |  |

On veut maximiser le b´en´efice total qui provient de la vente de ces produits.

1. Mod´eliser ce probl`eme sous forme de programmation lin´eaire.

2. Utiliser l’algorithme du simplexe pour le r´esoudre. Vous mettrez en place la m´ethode des diction naires qui consiste `a exprimer `a chaque ´etape du simplexe les variables de base ainsi que la fonction objectif en fonction des variables hors-base.

Exercice 2. *Diff´erents d´eroulements du simplexe*

Interpr´eter les dictionnaires obtenus pour chacun des probl`emes de programmation lin´eaire suivants. Les variables d’´ecarts sont not´ees *ei*.

(*a*)

 

max [*F* = *x*1 + *x*2] 3*x*1 + 2*x*2 *≤* 15 3*x*1 + 4*x*2 *≤* 21 *x*2 *≤* 3

*x*1*, x*2 *≥* 0

dictionnaire

| *x*1 = 3 *−*23*e*1 +13*e*2 *x*2 = 3 + 12*e*1 *−*12*e*2 *e*3 = *−*12*e*1 +12*e*2 |
| --- |
| *F* = 6 *−*16*e*1 *−*16*e*2 |

(*b*)

 

max [*F* = 3*x*1 + 2*x*2] 3*x*1 + 2*x*2 *≤* 15

3*x*1 + 4*x*2 *≤* 21

*x*2 *≤* 3

*x*1*, x*2 *≥* 0

dictionnaire

| *x*1 = 5 *−*13*e*1 *−*23*x*2 *e*2 = 6 + *e*1 *−* 2*x*2 *e*3 = 3 *− x*2 |
| --- |
| *F* = 15 *− e*1 |

(*c*)

 

max [*F* = *x*1 + 3*x*2] *x*1 + *x*2 *≥* 3

*x*1 *−* 2*x*2 *≥* 5

*−*2*x*1 + *x*2 *≤* 5

*x*1*, x*2 *≥* 0

dictionnaire

| *x*1 = 5 + 2*x*2 + *e*2 *e*1 = 2 + 3*x*2 + *e*2 *e*3 = 15 + 3*x*2 + 2*e*2 |
| --- |
| *F* = 15 + 5*x*2 + *e*2 |

Exercice 3. *Recherche de solutions de base r´ealisables et probl`eme auxiliaire*

1. On consid`ere un (PL) sous forme canonique pure

maxx *F*(x) = c*>*x

*A*x *≤* b

x *≥* 0

Donner une condition suffisante sur le second membre b pour obtenir *sans calcul* une solution de base r´ealisable de (PL) mis sous forme standard. Donner la solution de base r´ealisable dans ce cas.

1

2. R´esoudre le probl`eme de programmation lin´eaire suivant par l’algorithme du simplexe (m´ethode des dictionnaires)

max [

*F* = 3*x*1 + 4*x*2 + *x*3]

 

*x*1 + 2*x*2 + 2*x*3 *≤* 8 *x*1 + 2*x*2 + 3*x*3 *≥* 9 *x*1*, x*2*, x*3 *≥* 0

Exercice 4. *Diff´erents d´eroulements du simplexe en phase d’initialisation*

Pour chacun des probl`emes de programmation lin´eaire suivants, ´ecrire les probl`emes auxiliaires (PLA) pour les variables artificielles et interpr´eter les dictionnaires obtenus sur les (PLA). Les variables artifi cielles sont not´ees *ai* et les variables d’´ecarts *ei*.

(*a*)

 

max [*F* = *x*1 *− x*2] *x*1 + 2*x*2 *≤* 5

2*x*1 + *x*2 *≤* 6

*x*1 + *x*2 *≥* 4

*x*1*, x*2 *≥* 0

dictionnaire

| *x*1 =43 *−*23*e*1 +13*e*2  *x*2 =73 +13*e*1 *−*23*e*2  *a*3 =13 +13*e*1 +13*e*2 + *e*3 |
| --- |
| *Faux* =13 +13*e*1 +13*e*2 + *e*3 |

(*b*)

 

max [*F* = 3*x*1 + 2*x*2 + *x*3] *x*1 + 2*x*2 + *x*3 = 10

2*x*1 + *x*2 *−* 2*x*3 = 5

*−x*1 + *x*2 + 3*x*3 = 5 *x*1*, x*2*, x*3 *≥* 0

dictionnaire

| *x*1 =53*x*3  *x*2 = 5 *−*43*x*3 *a*3 = 0 |
| --- |
| *Faux* = 0 |

Exercice 5. *Analyse de sensibilit´e sur un probl`eme de production*

On reprend le probl`eme de production de l’Exercice 1.

1. *Pr´ealable*

– Interpr´eter la solution trouv´ee et caract´eriser l’optimum

2. *Analyse de sensibilit´e de l’objectif*

– le produit *P*1 est fabriqu´e : de combien peut-on augmenter ou diminuer le prix unitaire sans changer le plan de production ?

– le produit *P*2 n’est pas fabriqu´e : `a partir de quel prix devient-il rentable ?

3. *Analyse de sensibilit´e du second membre*

– l’´equipement est en exc´edent : de combien peut-on le r´eduire pour faire de la maintenance ? – un accident du travail entraˆıne une baisse de 30% de la main d’oeuvre : que devient le plan de production ?

– il manque de la mati`ere premi`ere : combien en acheter ? `a quel prix maximal ? 2