Correction TD Généralités 2 : Ensemble (Groupe 1)

Ethan VERMOT DESROCHES

26 Septembre 2024

Disclaimer

Cette correction est loin d'être parfaite. Des erreurs ou imprécisions peuvent s'y glisser. Si vous trouvez des erreurs / faute d'orthographe / imprécision (ce qui est très probable), alors dite le moi (@knahte sur Discord).

Contents

Exercice 1

Exercice 1.1

Déterminer l'ensemble :

$$\left\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\right\}$$

Soit l'ensemble E

$$E = \left\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\right\}$$

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \\ & x \mapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2 est donc le minimum de f:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) \in [2; +\infty[$$

Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaire,

$$\forall y \in [2; +\infty[= [f(1); \lim_{+\infty} f[, \quad \exists x \in [1; +\infty[, f(y) = x$$

Ainsi

$$[2; +\infty[\subset E$$

Par double inclusion, $E = [2; +\infty[$

Exercice 1.2

Déterminer l'ensemble :

$$\left\{y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2xy + y^4 = 0\right\}$$

Soit l'ensemble F

$$F = \left\{y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2xy + y^4 = 0\right\}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ On résout l'équation du 2nd degré d'inconnu $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2xy + y^4 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (2y^2) - 4y^4 \\ &= 4y^2(1-y^2)\end{aligned}$$

L'équation du 2nd degré admet des solutions réelles si et seulement si

$$\Delta > 0$$

Or

$$4y^2 > 0$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta \geq 0 \Leftrightarrow &(1-y^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &y^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow &-1 \leq y \leq 1\end{aligned}$$

Ainsi

$$-1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2xy + y^4 = 0$$

Donc $F = [-1; 1]$

Exercice 2

Exercice 2.1

Exercice 2.1.1

Trouver et prouver le résultat

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[$$

Si $x > 0, \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[\subset \mathbb{R}$

donc

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[\subset \mathbb{R}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$y \in \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[$$

on cherche $x > 0$ tel que

$$y \in \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[$$

Soit $x > 0$

$$\begin{aligned}y \in \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[&\Leftrightarrow 1-x < y < 1+\frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow 1-x < y \wedge y < 1+\frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x < y-1 \wedge \frac{1}{x} > y-1\end{aligned}$$

Si $y > 1$
$$(x > 1 - y) \wedge \left(\frac{1}{x} > y - 1\right) \Leftrightarrow x > 1 - y \wedge x > \frac{1}{1-y}$$
Si $y \leq 1$, comme $x > 0, \frac{1}{x} > 0 \geq y - 1$
$$y \in \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[\Leftrightarrow \begin{cases} y > 1 \wedge x > 1 - y \wedge x < \frac{1}{y-1} \\ \text{ou} \\ y \leq 1 \wedge x > 1 - y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 1 \wedge x < \frac{1}{y-1} \\ \text{ou} \\ y \leq 1 \wedge x > 1 - y \end{cases}$$
Si $y > 1, x = \frac{1}{y} > 0$, convient
Si $y \leq 1, x = 2 - y > 0$, convient
Dans tous les cas :
$$\exists x \in \mathbb{R}^{+*}, y \in \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$
Ainsi
$$y \in \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$
Finalement
$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$
Par double inclusion
$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$

Exercice 2.1.2

Trouver et prouver le résultat
$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$
Montrons que :
$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[= \{1\}$$
$$\forall x > 0, 1 - x < 1 < 1 + \frac{1}{x}$$
donc
$$\{1\} \subset \bigcap_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$
Remarque : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
Soit : $y \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$
Montrons que :
$$y \notin \bigcap_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left]1 - x; 1 + \frac{1}{x}\right[$$

Autrement dit, montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $y \notin]1-x; 1+\frac{1}{x}[$
Supposons que $y < 1$

$$y < 1-x \Leftrightarrow x < 1-y$$

Donc

$$y \notin \left]1 - \frac{1}{2}(1-y); 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(1-y)}\right[\text{ avec } \frac{1-y}{2} > 0$$

Supposons $y > 1$

$$\begin{aligned} y > 1 + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x} < y - 1 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{1}{y-1} \text{ car } y > 1 \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{2}{y-1} > 0$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} &= 1 + \frac{y-1}{2} \\ &= \frac{y+1}{2} \\ &< \frac{y+y}{2} = y \text{ car } y > 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{R}\backslash\{1\} \subset \mathbb{R}\backslash\Big(\bigcap_{x\in\mathbb{R}^{+*}} \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[\Big)$$

Puis

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}^{+*}} \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[\subset \{1\}$$

Par double inclusion

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}^{+*}} \left]1-x; 1+\frac{1}{x}\right[= \{1\}$$

Exercice 2.2

Exercice 2.2.1

$$A_0 =]0; 1]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_0 \subset A_n$$

donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset]-\infty; 2[$$

donc

$$\forall x \in]-\infty; 2[, \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

donc

$$\text{si } x < 0, n = x^2 + 1$$

$$\text{si } x < 0, n = \frac{1}{2-x}$$

Exercice 3

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
$P(P(\{0,1\})) = P(\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\})$

$$P(P(\{0,1\})) = \left\{\begin{array}{l} \emptyset, \\ \{\emptyset\}, \\ \{\{0\}\}, \\ \{\{1\}\}, \\ \{\{0,1\}\}, \\ \{\emptyset, \{0\}\}, \\ \{\emptyset, \{1\}\}, \\ \{\emptyset, \{0,1\}\}, \\ \{\{0\}, \{1\}\}, \\ \{\{0\}, \{0,1\}\}, \\ \{\{1\}, \{0,1\}\}, \\ \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \\ \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}, \\ \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}, \\ \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \\ \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \end{array}\right\}$$

Exercice 4.{1;2;3;4}

Voir Groupe 2

Exercice 5

Exercice 5.1

$$\begin{aligned} & (x,y) \in (E \times F) \cap (G \times H) \\ \Leftrightarrow & (x,y) \in (E \times F) \wedge (x,y) \in (G \times H) \\ \Leftrightarrow & x \in E \wedge y \in F \wedge x \in G \wedge y \in H \\ \Leftrightarrow & x \in (E \cap G) \vee y \in (F \cap H) \\ \Leftrightarrow & (x,y) \in (E \cap G) \times (F \cap H) \end{aligned}$$

donc $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

Exercice 5.2

Soit (x, y) un couple.

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in (E \times F) \cup (G \times H) \\
\Leftrightarrow&(x, y) \in (E \times F) \vee (x, y) \in (G \times H) \\
\Leftrightarrow&(x \in E \wedge y \in F) \vee (x \in G \wedge y \in H) \\
\Rightarrow&(x \in E \vee x \in G) \wedge (y \in F \vee y \in H) \\
\Leftrightarrow&x \in (E \cup G) \wedge y \in (F \cup H) \\
\Leftrightarrow&(x, y) \in (E \cup G) \times (F \cup H)
\end{aligned}$$

donc $(E \times F) \cup (G \times H) \subset (E \cup G) \times (F \cup H)$

Exercice 6

Exercice 6.1

Soit A et B, parties de E

$$\begin{aligned}
&(A \cup B) \backslash (A \cap B) \\
=&(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\
=&(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
=&(A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \\
=&((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \cup (B \cap \overline{A}) \\
=&(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
=&(A \backslash B) \cup ((B \backslash A)
\end{aligned}$$

Exercice 6.2.{a;b;c}

Voir Groupe 2

Exercice 7

$$\forall i \in I, A_i \subset E \wedge B_i \subset E$$

Donc

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) \subset E$$

Soit $x \in E$ Montrons

$$x \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big)$$

Supposons que $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$, montrons

$$x \in \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big)$$

Soit $i \in I$ Montrons que $x \in B_i$

$$x \in E = A_i \cup B_i x \in A_i \vee x \in B_i$$

Or $x \notin \bigcup_{j \in I} A_j, \forall j \in I, x \notin A_j$, en particulier $x \notin A_i$ Ainsi $x \in B_i$
Ainsi, $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, on a donc

$$x \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big)$$

Finalement

$$E \subset \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big)$$

Par double inclusion,

$$E = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big)$$

Exercice 8

Voir Groupe 2

Exercice 9

Exercice 9.1

Si $\overline{A} \subset X$,

$$A \cup X \supset (A \cup \overline{A}) = E$$

or $A \cup X \subset E$ donc

$$\overline{A} \subset E \Rightarrow A \cup X = E$$

Si $A \cup X = E$

$$\begin{aligned} \forall x \in \overline{A}, x \in E \cap \overline{A} &= (A \cup X) \cap \overline{A} \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (X \cap \overline{A}) \quad = X \cap \overline{A} \subset X \end{aligned}$$

Donc

$$A \cup X = E \Rightarrow \overline{A} \subset X$$

Finalement

$$A \cup X = E \Leftrightarrow \overline{A} \subset X$$

Exercice 9.{2/3/4}

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset X$$
$$A \cup X = A \Leftrightarrow X \subset A$$
$$A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subset \overline{A}$$

Voir Groupe 2 pour explication