

UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

**Poročilo - Vaja1**  
**Metoda nelinearnih najmanjših kvadratov**

Inteligentni sistemi za podporo odločanju

Martin Knap, 64180369

Mentor: prof. dr. Igor Škrjanc

Asistent: doc. dr. Dejan Dovžan

Ljubljana, 23. 3. 2019

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Definicija naloge</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Metoda nelinearnih najmanjših kvadratov</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Rešitev problema</b>	<b>3</b>
3.1	Psevdokoda algoritma . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Rezultati</b>	<b>4</b>
4.1	Rezultati pri eni meritvi . . . . .	4
4.2	Rezultati pri več meritvah . . . . .	4
4.3	Upoštevanje variance . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Diskusija rezultatov in zaključek</b>	<b>7</b>

## Slike

1	Lokacije baznih postaj. . . . .	2
2	Rezultat pri eni meritvi. . . . .	4
3	Rezultat pri več meritvah. . . . .	5
4	Rezultat pri upoštevanju variance. . . . .	6
5	Rezultat brez upoštevanja variance. . . . .	7
6	Metoda najmanjših kvadratov s slabim približkom ((10000, 10000)). . . . .	8

## Tabele

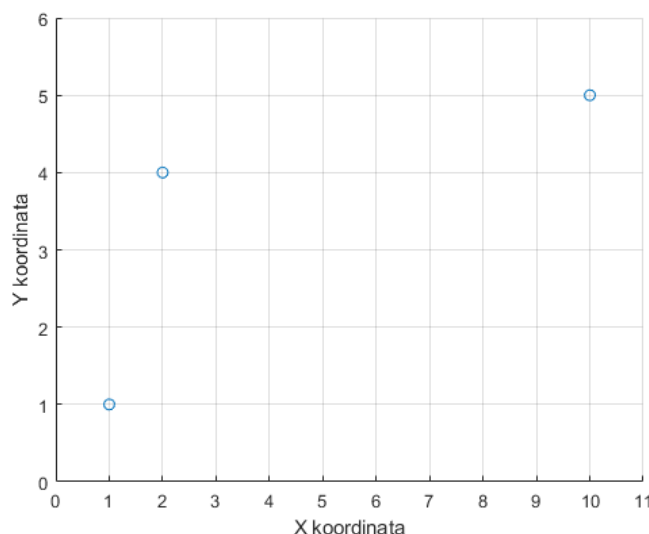
1	Koordinate baznih postaj. . . . .	2
2	Statistika meritev. . . . .	4
3	Statistika meritev pri upoštevanju variance. . . . .	6
4	Statistika meritev brez upoštevanja variance. . . . .	6

# 1 Definicija naloge

Pri tej vaji je naša naloga poiskati lokacijo izgubljenega mobilnega telefona. Oseba X je izgubila mobilni telefon nekje v spodnjem koordinatnem sistemu (slika 1). Mobilni telefon so zaznale tri bazne postaje, ki se nahajajo na slednjih koordinatah (tabela 1):

Tabela 1: Koordinate baznih postaj.

	Bazna postaja 1	Bazna postaja 2	Bazna postaja 3
X	1	10	2
Y	1	5	4



Slika 1: Lokacije baznih postaj.

Bazne postaje predstavljajo tri Matlab-ove funkcije, ki ob klicanju vrnejo razdaljo do telefona. Izhodne razdalje funkcij so zašumljene, zato pri vsakem ponovnem klicanju vrnejo malce drugačno vrednost.

## 2 Metoda nelinearnih najmanjših kvadratov

To je ena od metod lokalne optimizacije, ki se jo uporablja za prilaganje podatkov z modelom, ki je nelinearen v parametrih. Optimizacija poteka tako, da se išče parametre, ki minimizirajo vsoto kvadratov residualov. Residual pa je razlika med podatkom oziroma izmerkom in teoretičnim modelom. Od ostalih optimizacijskih metod se razlikuje v tem, da je Hesse-jeva matrika aproksimirana kot  $\underline{H} \approx \underline{J}^T \underline{J}$  kar nam poenostavi izračun, saj ni potrebno računati drugih odvodov funkcije modela [1].

Jedro metode predstavlja enačba (1)[1], kjer je  $\Delta\theta_{k-1}$  izračunana sprememba v parametrih, ki jo v naslednji iteraciji prištejemo prejšnjim. Nato z novimi parametri izračunamo novo spremembo in postopek ponavljamo dokler nismo zadovoljni z napako konvergence. Začetne parametre algoritma grobo ocenimo.

$$\Delta\theta_{k-1} = (\underline{J}^T(\theta_{k-1})\underline{J}(\theta_{k-1}))^{-1} \underline{J}^T(\theta_{k-1})(\underline{y} - \underline{\hat{y}}(\theta_{k-1})) \quad (1)$$

V enačbi (1)  $\underline{J}(\theta_{k-1})$  predstavlja Jacobi-jevo matriko. To je matrika prvih odvodov funkcije modela  $f(\theta)$ , pri različnih vhidih.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} (\partial f_1(\underline{\theta})/\partial \underline{\theta})^T \\ (\partial f_2(\underline{\theta})/\partial \underline{\theta})^T \\ \vdots \\ (\partial f_N(\underline{\theta})/\partial \underline{\theta})^T \end{bmatrix} \quad (2)$$

Razliko med izmerki in modelom (residual) v enačbi 1 predstavlja dvočlenik  $\underline{y} - \hat{\underline{y}}(\underline{\theta}_{k-1})$  pri tem pa je  $\underline{\theta}_{k-1}$  vektor parametrov iz prejšnje iteracije.

### 3 Rešitev problema

Lokacijo telefona glede na bazne postaje lahko opišemo s preureditvijo enačbe krožnice (enačba 3) v enačbo (4).

$$r = \sqrt{(x - x_{offset})^2 + (y - y_{offset})^2} \quad (3)$$

$$f(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{(\theta_1 - x_{postaja})^2 + (\theta_2 - y_{postaja})^2} \quad (4)$$

V enačbi (4)  $\theta_1$  in  $\theta_2$  predstavljata koordinate telefona oziroma parametra optimizacije in tvorita vektor  $\underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2]$

Za tvorbo Jacobi-jeve matrike je potrebno  $f(\theta_1, \theta_2)$  parcialno odvajati.

$$\frac{\partial f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = \frac{\theta_1 - x_{postaja}}{\sqrt{(\theta_1 - x_{postaja})^2 + (\theta_2 - y_{postaja})^2}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{\theta_2 - y_{postaja}}{\sqrt{(\theta_1 - x_{postaja})^2 + (\theta_2 - y_{postaja})^2}} \quad (6)$$

Sedaj lahko tvorimo Jacobi-jevo matriko dimenzij  $3 \times 2$ , kjer stolpca predstavljata izhode parcialnih odvodov funkcije pri treh različnih lokacijah stolpov.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial \theta_1 & \partial f_1/\partial \theta_2 \\ \partial f_2/\partial \theta_1 & \partial f_2/\partial \theta_2 \\ \partial f_3/\partial \theta_1 & \partial f_3/\partial \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 3.1 Psevdokoda algoritma

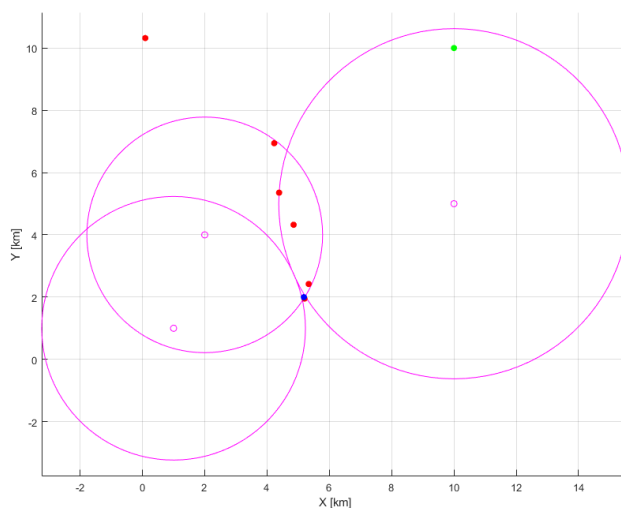
Spodaj je predstavljeno poenostavljeno delovanje algoritma.

- 1:  $\theta_1$  x začetni približek
- 2:  $\theta_2$  y začetni približek
- 3:  $x_{stolpi}$  vektor x koordinat
- 4:  $y_{stolpi}$  vektor y koordinat
- 5:  $d$  vektor pingov
- 6: **for**  $i = 1$  to *stevilo iteracij* **do**
- 7:    $\underline{J}$  tvorba jacobian
- 8:    $\underline{\Delta \theta} = (\underline{J}^T \underline{J})^{-1} \underline{J}^T (d - f(\theta_1, \theta_2, x_{stolpi}, y_{stolpi}))$
- 9:    $\theta_1 = \theta_1 + \Delta \theta_1$
- 10:    $\theta_2 = \theta_2 + \Delta \theta_2$
- 11:   **if** napaka convergence < meja **then**
- 12:     break
- 13:   **end if**
- 14: **end for**

## 4 Rezultati

### 4.1 Rezultati pri eni meritvi

Algoritem opisan v zgornjem poglavju je bil uporabljen za določanje lege telefona pri eni meritvi (Jacobi-jeva matrika ima dimenzije  $3 \times 2$ ). Začetna točka je v primeru na spodnji sliki (2) je (10, 10) in je obarvana zeleno. Končna točka je obarvana z modro, vmesne rešitve pa so rdeče barve. Za primer na sliki je bilo potrebnih 17 iteracij pri napaki konvergence  $1 \times 10^{-7}$ .



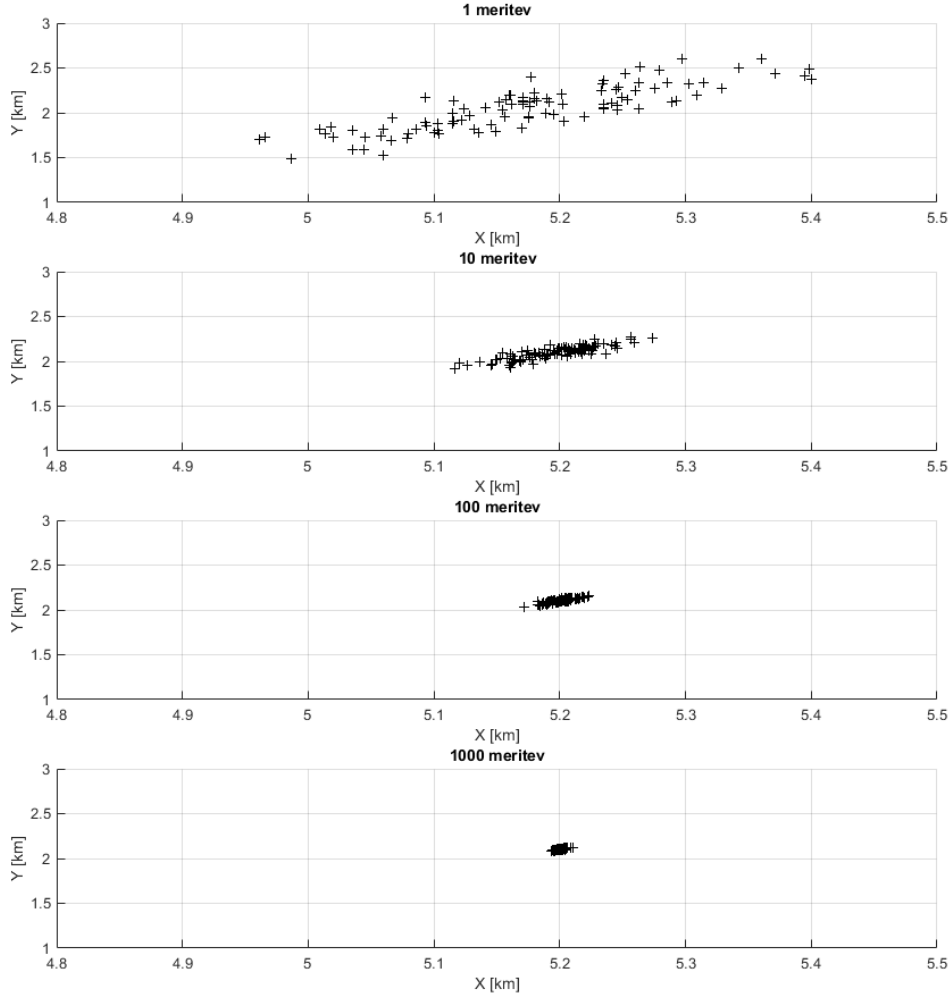
Slika 2: Rezultat pri eni meritvi.

### 4.2 Rezultati pri več meritvah

Za določanje lege telefona pri več meritvah je bilo potrebno razširiti Jacobi-jevo matriko na  $3N \times 2$ , kjer je  $N$  število upoštevanih meritev. Izračun je bil izveden pri upoštevanju 1, 10, 100 in 1000 meritev. Za določanje povprečja števila iteracij in variance končnih rezultatov je bilo opravljenih 100 ponovitev. Rezultati so vidni na spodnji sliki (5).

Tabela 2: Statistika meritev.

Število meritev	povp. koord. x	povp. koord. y	var. x	var. y	povp. pt. iteracij
1	5.1756	2.0521	0.009726	0.06072	17.97
10	5.1964	2.0969	0.001000	0.005508	14.31
100	5.2004	2.1023	0.00009809	0.0006085	11.89
1000	5.2001	2.1006	0.000009143	0.00005893	9.11



Slika 3: Rezultat pri več meritvah.

### 4.3 Upoštevanje variance

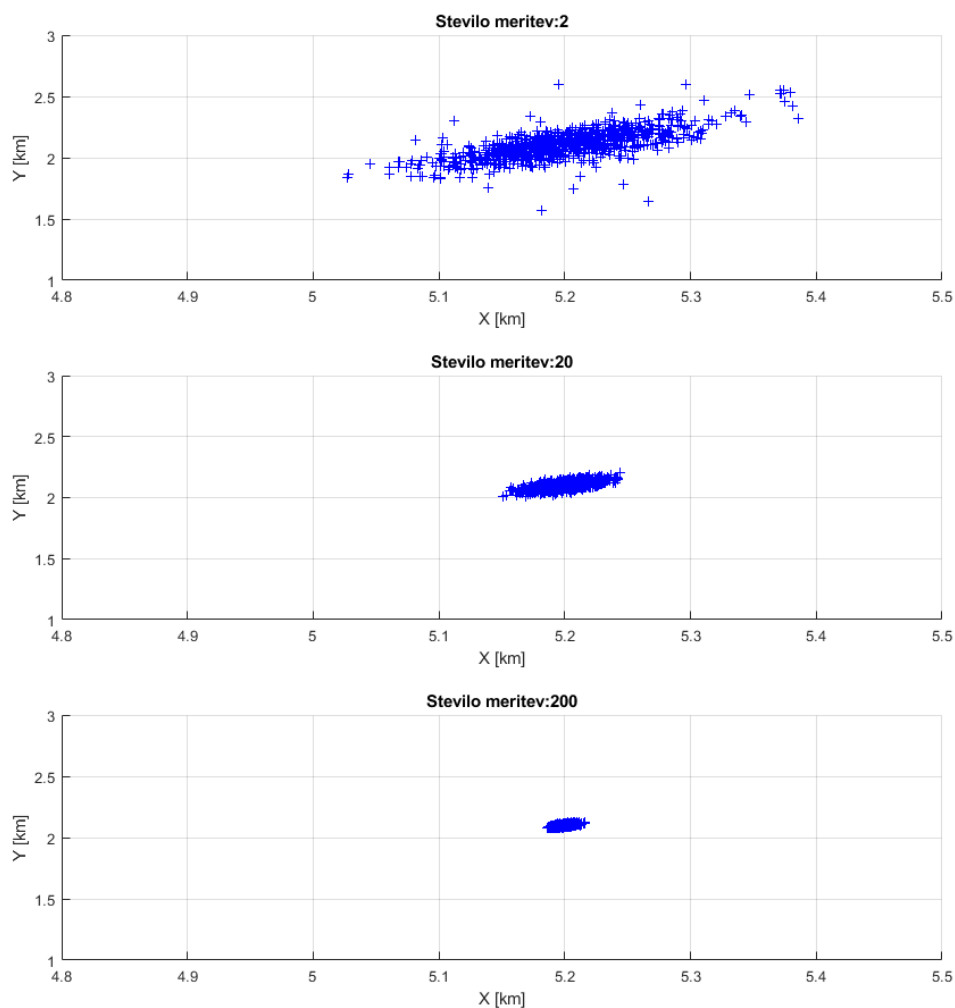
Z upoštevanjem variance meritev oziroma šuma meritev dobimo metodo uteženih najmanjših kvadratov [1]. To v našem primeru napravimo tako, da za več meritev shranimo meritve lokacije telefona iz več baznih postaj. Za vsako bazno postajo nato izračunamo varianco meritev ter naposled ustvarimo kovariančno matriko  $\underline{\Omega}$  dimenzij  $3N \times 3N$ , kjer variance treh postaj periodično postavljamo po diagonali. Sprememba parametrov posamezne iteracije se sedaj računa na sledeč način:

$$\underline{\Delta\theta}_{k-1} = (\underline{J}^T(\theta_{k-1})\underline{\Omega}^{-1}\underline{J}(\theta_{k-1}))^{-1}\underline{J}^T(\theta_{k-1})\underline{\Omega}^{-1}(\underline{y} - \underline{\hat{y}}(\theta_{k-1})) \quad (8)$$

Sledi izračun z in brez upoštevanja variance pri 2, 20 in 200 meritvah. Vzorec rezultatov ima velikost 1000, začetna točka pa je (7, 7).

Tabela 3: Statistika meritev pri upoštevanju variance.

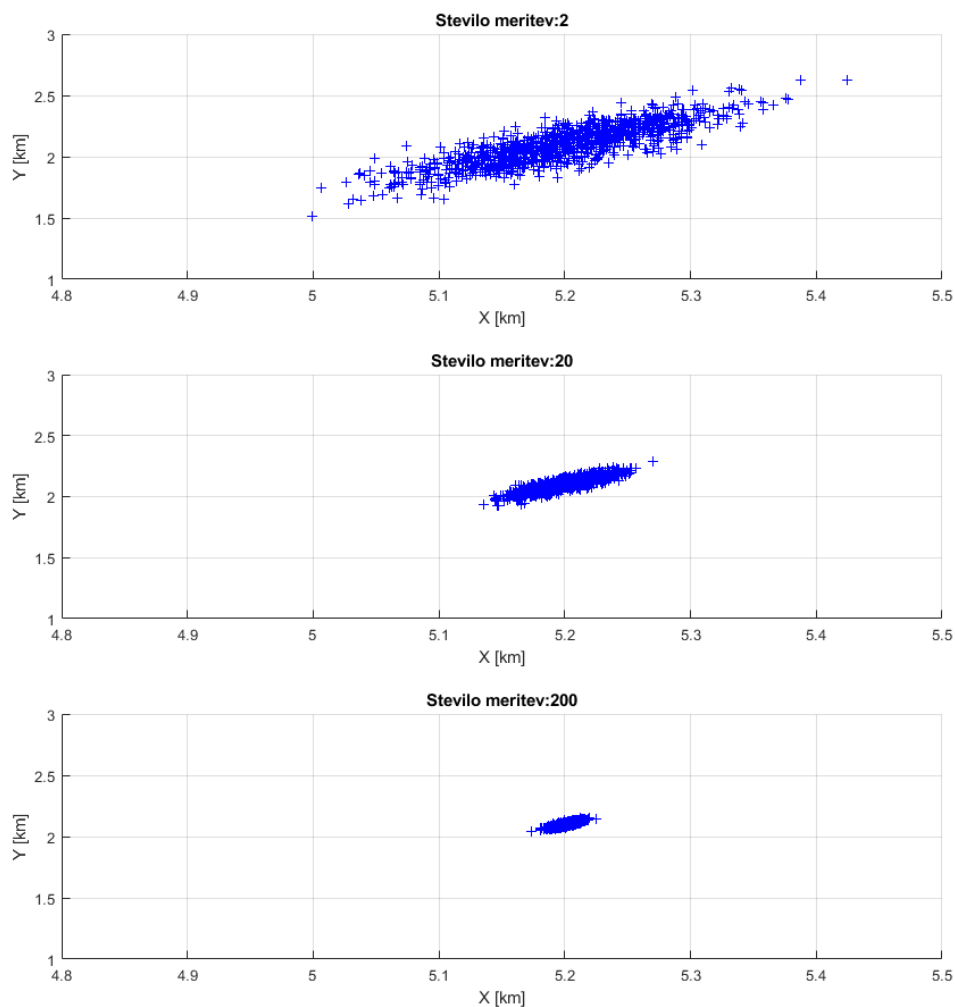
Število meritev	povp. koord. x	povp. koord. y	var. x	var. y	povp. pt. iteracij
2	4.8728	2.8327	1.3788	2.3610	17.90
20	5.1998	2.0996	0.0002665	0.0009069	13.91
200	5.1997	2.1000	0.00002416	0.00007783	13.85



Slika 4: Rezultat pri upoštevanju variance.

Tabela 4: Statistika meritev brez upoštevanja variance.

Število meritev	povp. koord. x	povp. koord. y	var. x	var. y	povp. pt. iteracij
2	5.1986	2.0977	0.004259	0.02652	17.74
20	5.1997	2.1010	0.0004424	0.002834	15.67
200	5.2000	2.1000	0.00004556	0.0002742	14.57



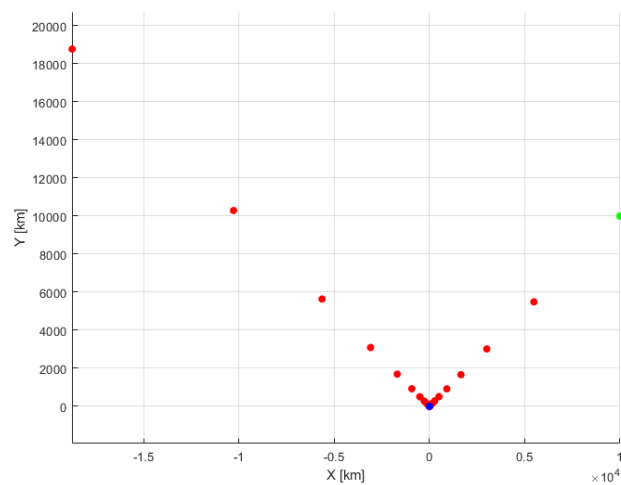
Slika 5: Rezultat brez upoštevanja variance.

## 5 Diskusija rezultatov in zaključek

Pri najosnovnejši izvedbi programa, to je izračun za eno meritev je moč opaziti konvergenco tudi v primeru, da je začetni približek zelo slab (slika 6). Opazka kaže, da je metoda precej robustna. Enako velja za razširjeno obliko algoritma, ki zajema večje število meritev. V primeru metode uteženih najmanjših kvadratov temu ni tako, saj že pri malce slabšem približku lako pride do slabe konvergence oziroma do neuspešnega izračuna.

Pri razširjeni obliki metode nelinearnih najmanjših kvadratov opazimo, da z večanjem števila meritev pridemo do povprečno točnejšega rezultata, z manjšim raztorsom pri več ponovitvah ter pri manjšemu številu iteracij.





Slika 6: Metoda najmanjših kvadratov s slabim približkom ((10000, 10000)).

V poglavju kjer smo pri izračunu upoštevali tudi varianco je bila napravljena primerjava med obema metodama. Iz rezultatov je razvidno, da z upoštevanjem variance pri večjemu številu meritev pridemo do rezultatov malce hitreje ter natančneje. Pri manjšemu številu meritev se metoda najmanjših uteženih kvadratov izkaže za slabšo.

## Literatura

- [1] Igor Škrjanc *Inteligentni sistemi za podporo odločanju*. Ljubljana, 2016