บทที่ 4 ปริภูมิเวกเตอร์ทั่วไป (General Vector Spaces)

4.1 ปริภูมิเวกเตอร์จริง (Real Vector Spaces)

บทนิยาม 4.1.1
ให้ V เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างของวัตถุใดๆ ที่มีนิยามการดำเนินการสองชนิดคือการบวก (addition) และการคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication) โดย **การบวก** หมายถึงกฎสำหรับการรวมกันของ ของวัตถุ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ แต่ละคู่ใน V ซึ่งวัตถุ $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ เรียกว่า **ผลบวก** (sum) ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ส่วนการคูณด้วยสเกลาร์ หมายถึงกฎสำหรับการรวมกันของ สเกลาร์ k และวัตถุ $\mathbf{u}$ ใน V ซึ่งวัตถุ $k\mathbf{u}$ เรียกว่า **พหุคูณสเกลาร์** (scalar multiple) ของ $\mathbf{u}$ โดย k ถ้าสัจพจน์ (axioms) ต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุกๆ วัตถุ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ใน V และทุกๆ สเกลาร์ k และ l แล้วเราเรียก V ว่าเป็น **ปริภูมิเวกเตอร์** (vector space) และเรียกวัตถุใน V ว่า **เวกเตอร์** (vector)

(1) ถ้า $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นวัตถุใน V แล้ว $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ อยู่ใน V ด้วย

(2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(3) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(4) มีวัตถุ $\mathbf{0}$ ใน V เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** สำหรับ V ที่ทำให้ $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ สำหรับทุก $\mathbf{u}$ ใน $\mathbf{v}$

(5) สำหรับแต่ละวัตถุ $\mathbf{u}$ ใน V มีวัตถุ $-\mathbf{u}$ ใน V เรียกว่า **ลบ** (Negative) ของ $\mathbf{u}$ ที่ทำให้ $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(6) ถ้า k เป็นสเกลาร์ใดๆ และ $\mathbf{u}$ เป็นวัตถุใน V แล้ว $k\mathbf{u}$ อยู่ใน V ด้วย

(7) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

(8) $(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$

(9) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

(10) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

จากบทนิยามที่ 4.1.1 ด้านบน เราอาจมองได้ว่าปริภูมิเวกเตอร์ คือเซตของวัตถุหนึ่ง ที่มีนิยามการดำเนินการสองชนิดคือการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ ซึ่งเมื่อนำมาดำเนินการ กับสมาชิกในเซตดังกล่าวแล้ว

จะได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสัจพจน์ทั้งสิบประการ นิยามของปริภูมิเวกเตอร์ ไม่ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของเวกเตอร์หรือตัวดำเนินการ วัตถุใดๆ อาจเป็นเวกเตอร์ และการดำเนินการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์อาจไม่มีความสัมพันธ์ หรือความคล้ายคลึงกันกับการดำเนินการเวกเตอร์มาตรฐานบน $\mathbb{R}^n$

สัจพจน์ประการที่ (1) และ (6) เรียกว่า **สมบัติปิดภายใต้การบวก** (closure under addition) และ **สมบัติปิดภายใต้การคูณด้วยสเกลาร์** (closure under scalar multiplication) ตามลำดับ สมบัติสองประการนี้เป็นเครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการตรวจสอบว่า เซตของวัตถุหนึ่งที่กำลังพิจารณา เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

4.2 ปริภูมิย่อย (Subspaces)

บทนิยาม 4.2.1
เซตย่อย (Subset) W ของปริภูมิเวกเตอร์ V หนึ่งเรียกว่า **ปริภูมิย่อยของ** (subspace) ของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใต้การบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ ที่นิยามบน V

ในการตรวจสอบว่าเซตย่อย W ในปริภูมิเวกเตอร์ V เป็นปริภูมิย่อยของ V หรือไม่ เราไม่จำเป็นต้องตรวจสอบบางสัจพจน์ เนื่องจากความสอดคล้องกับสัจพจน์เหล่านี้ ได้รับการสืบต่อ (Inherited) จาก V

ทฤษฎีบท 4.2.1

ถ้า W เป็นเซตของเวกเตอร์มากกว่าหนึ่งตัวจากปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว W เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(ก) ถ้า $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน W แล้ว $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ อยู่ใน W ด้วย

(ข) ถ้า k เป็นสเกลาร์ใดๆ และ $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน W แล้ว $k\mathbf{u}$ อยู่ใน W ด้วย

4.2.1 ปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์ (Solution Spaces of Homogeneous Equation)

ทฤษฎีบท 4.2.2

ถ้า $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ เป็นระบบเชิงเส้นเอกพันธ์ ของ m สมการในค่าไม่ทราบค่า n ค่า แล้วเซตของเวกเตอร์ผลเฉลย เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$

บทนิยาม 4.2.2

เวกเตอร์ $\mathbf{w}$ หนึ่งเรียกว่า **ผลรวมเชิงเส้น** (linear combination) ของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ถ้าสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

เมื่อ $k_1, k_2, \ldots, k_r$ เป็นสเกลาร์ใดๆ

4.3 การแผ่ทั่ว (Spanning)

ทฤษฎีบท 4.3.1

ถ้า $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว

(ก) เซต W ของผลรวมเชิงเส้นทั้งหมดของ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

(ข) W เป็นปริภูมิย่อยที่เล็กที่สุดของ V ที่มี $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ในมุมที่ว่าปริภูมิย่อยอื่นใดของ V ที่มี $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ต้องมี W

บทนิยาม 4.3.1

ถ้า $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ ในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วปริภูมิย่อย W ของ V ที่ประกอบด้วยผลรวมเชิงเส้นทั้งหมดของเวกเตอร์ใน S เรียกว่า **ปริภูมิย่อยของ V แผ่ทั่วโดย S** (subspace of V spanned by S) และเรากล่าวว่าเวกเตอร์ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ใน S **แผ่ทั่ว** (span) W

เราใช้สัญกรณ์

$$W = \mathrm{span}(S) \quad \text{หรือ} \quad W = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

เพื่อบ่งว่า W เป็นปริภูมิที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ในเซต $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$

4.4 ความอิสระเชิงเส้น (Linear Independence)

บทนิยาม 4.4.1
ถ้า $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ เป็นเซตไม่ว่างของเวกเตอร์ แล้วสมการเวกเตอร์

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

มีผลเฉลยอย่างน้อยผลเฉลยหนึ่ง คือ

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

ถ้าผลเฉลยมีเพียงหนึ่งเดียวนี้ แล้ว S เรียกว่าเป็นเซตที่ **อิสระเชิงเส้น** (linearly independence) ถ้ามีผลเฉลยอื่นอีก แล้ว S เรียกว่าเป็นเซตที่ **ไม่อิสระเชิงเส้น** (linearly dependence)

4.4.1 ความอิสระเชิงเส้นของฟังก์ชัน (Linear Dependent of Functions)

4.5 ฐานหลักและมิติ (Basis and Dimension)