

# Análise Estatística de dados

## Inteligência Artificial



## AULA 02 – NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Arturo Forner-Cordero  
Larissa Driemeier

# PROGRAMA DO CURSO

Aula	Data	Conteúdo da Aula
01	27/02	Aula Inaugural
02	05/03	Introdução ao Curso. Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte I
03	12/03	Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte II
04	19/03	Decomposição de valor singular (SVD)
05	26/03	Otimização: derivadas, derivadas parciais (operadores gradiente, Jacobiano, Hessiano e Laplaciano), algoritmos de gradiente
06	02/04	Variáveis independentes e não independentes. Estatística Descritiva e Indutiva. Definições de medidas de dispersão e tendência central.
07	09/04	Probabilidade e Teorema de Bayes
08	16/04	Modelos de probabilidade discretos
09	23/04	Modelos de probabilidade contínuos
10	30/04	Modelo de Markov. Modelo de Markov oculto.

# AVALIAÇÃO

$$M = \frac{\sum_i T_i}{\text{Soma das notas dos Trabalhos}} \leq 10$$

média final →  $M$

Soma das notas dos Trabalhos →  $\sum_i T_i$

**Critério de Aprovação:**  $M \geq 7,0$

**Recuperação:** Para alunos cuja média final estiver contida no intervalo  $4,0 \leq M < 7,0$  será oferecida uma prova de recuperação, que **substituirá a nota total, e vale 10,0.**

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Deisenroth, M.P.; Faisal, A.A.; Ong, C.S. **MATHEMATICS FOR MACHINE LEARNING**, Cambridge University Press, 2019.

Bussab, W.; Morettin, P.L. **ESTATÍSTICA BÁSICA**, Saraiva, 6<sup>a</sup> Edição, 2009 .

Hastie, T; Tibshirani, R.; Friedman, J. **THE ELEMENTS OF STATISTICAL LEARNING**, 2nd edition, Springer-Verlag, 2009.

# COMUNICADOS IMPORTANTES

- Aluno Web é nosso canal de comunicação. Todo material será depositado ali: notas de aula, listas de exercícios, notas, comunicados, provas, testes ...

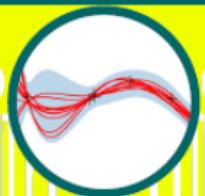


The screenshot shows the PECE website homepage. At the top right, there is a red box highlighting the 'ÁREA DO ALUNO →' button and the 'ATENDIMENTO ONLINE' button. A large red arrow points upwards from the bottom left towards this highlighted area. Below the header, there are three main menu categories: 'MBA ▾', 'ESPECIALIZAÇÃO ▾', and 'OUTROS CURSOS ▾'. Under 'OUTROS CURSOS ▾', there are three items: 'MBA', 'Especialização', and 'Automação de Processos de'. At the bottom of the page, there are three icons: 'AVALIAÇÃO ONLINE' (document icon), 'PORTAL DO ALUNO' (graduation cap icon), and 'ALUNO WEB' (student icon). A small text at the bottom center reads: 'Nosso eventos estão abertos ao público e refletem a relevância de nossas pesquisas e cursos. Clique no evento desejado e saiba mais.'

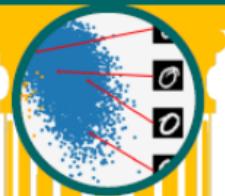


# APRENDIZADO DE MÁQUINAS

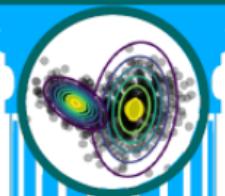
# APRENDIZADO DE MÁQUINAS



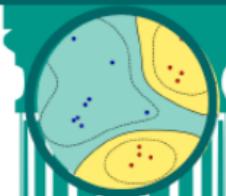
REGRESSÃO



REDUÇÃO DE  
DIMENSIONALIDADE



ESTIMAÇÃO  
DE  
DENSIDADE



CLASSIFICAÇÃO

CÁLCULO VETORIAL

ÁLGEBRA LINEAR

PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÕES

GEOMETRIA ANALÍTICA

OTIMIZAÇÃO

DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES

# ML E ÁLGEBRA LINEAR

(ML, de *Machine Learning*, em inglês)

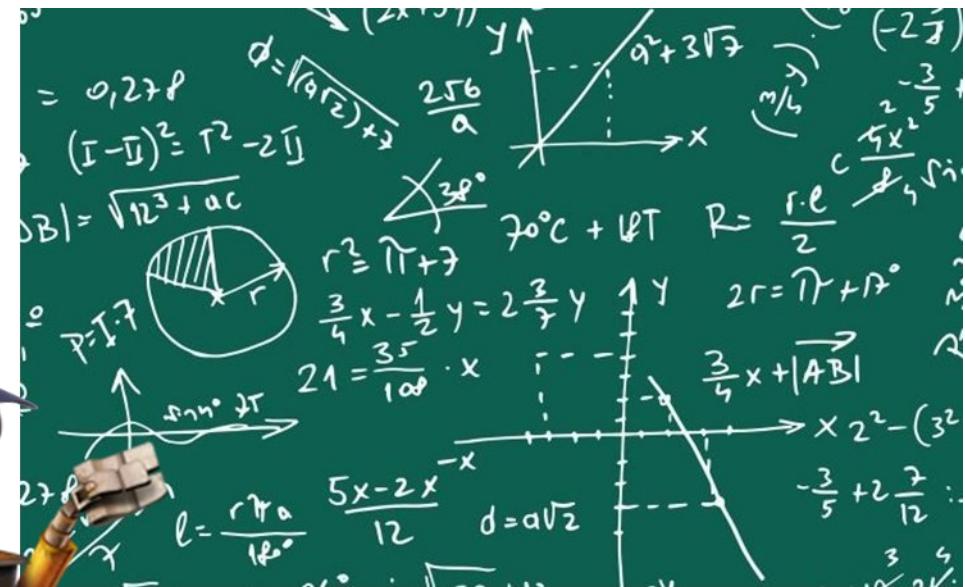
Nós temos dados. Máquinas ou computadores só entendem números.

A Álgebra Linear é **a matemática dos arrays** — tecnicamente chamados de vetores, matrizes e tensores.

Ela é essencial em ML e Deep Learning (DL).

É a base matemática que resolve o problema de representação de dados e cálculos em modelos de ML.

Portanto, o primeiro passo para aprender matemática para ML é aprender álgebra linear.



# ESTOU PERDIDO!

Felizmente, não precisamos conhecer álgebra linear em toda sua amplitude e profundidade para melhorar nossa compreensão e aplicação do aprendizado de máquina.

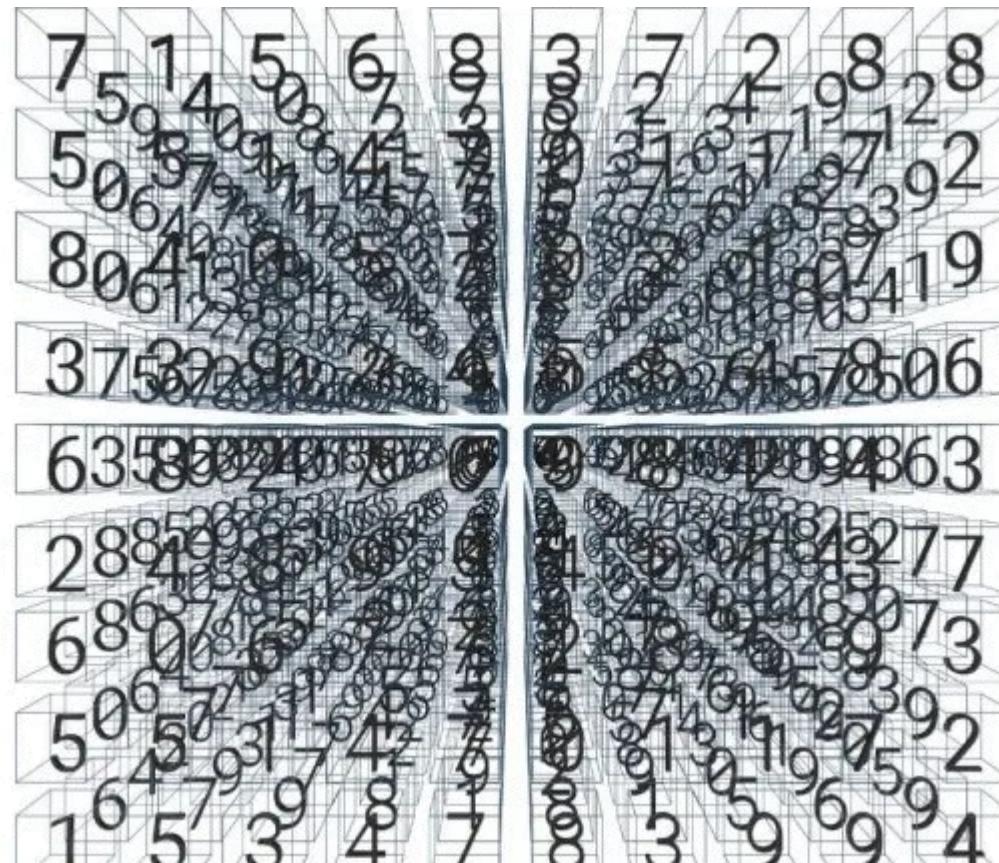
Então não será difícil!!! Você só precisará relembrar alguns conceitos!

**Você não tem tempo, e nem deve, mergulhar em livros didáticos de álgebra linear e cursos on-line projetados para estudantes de graduação.**

Ela deve ser encarada como mais um conjunto de ferramentas que podemos aproveitar em nossa jornada em direção ao domínio do aprendizado de máquina.

Vamos rever os conceitos básicos rapidamente e cobrir alguns tópicos importantes com maior profundidade.





# ESCALARES, VETORES, MATRIZES, TENSORES

Notação básica  
Operações e propriedades  
Cálculo matricial

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

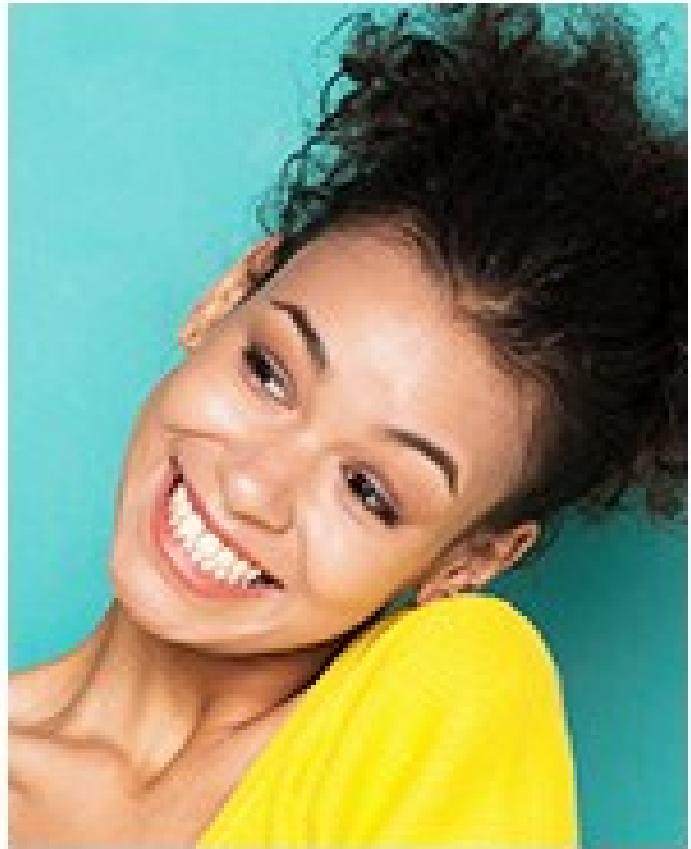
'A' é um tensor de ordem-d

|

$$d = 0$$

Tensor 0D (Escalar)

Shape: ()



$\bar{x} = 24$  (*anos*)

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

■

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)

Shape: ()

$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)

Shape: (3,)

# Lista de atributos de um objeto!



24 anos  
feminino  
0 filhos  
3 anos com emprego fixo  
2200 reais de renda mensal



$$= \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2200 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)

Shape: ()



$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)

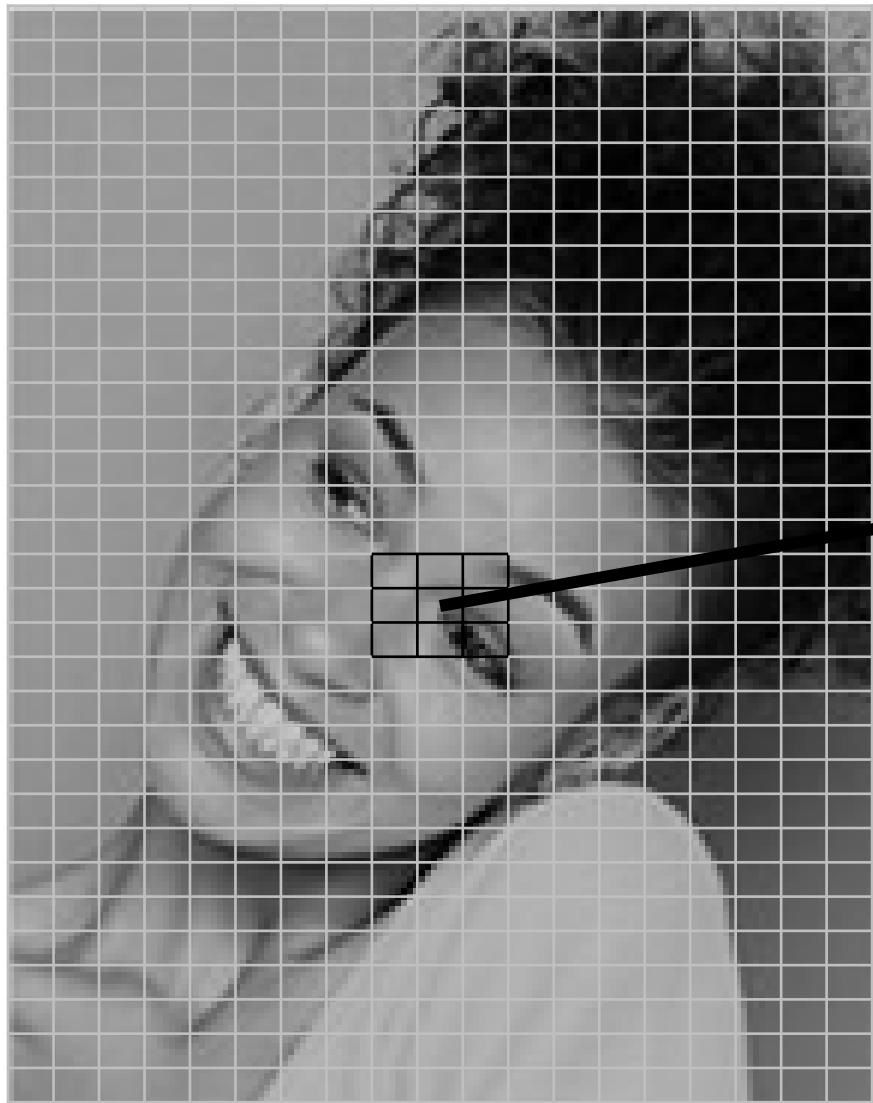
Shape: (3,)



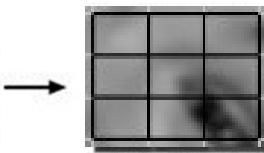
$d = 2$

Tensor 2D (Matriz)

Shape: (3,3)



97	71	92
56	82	102
43	48	63



$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)  
Shape: ()



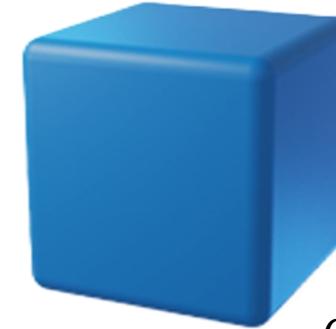
$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)  
Shape: (3,)



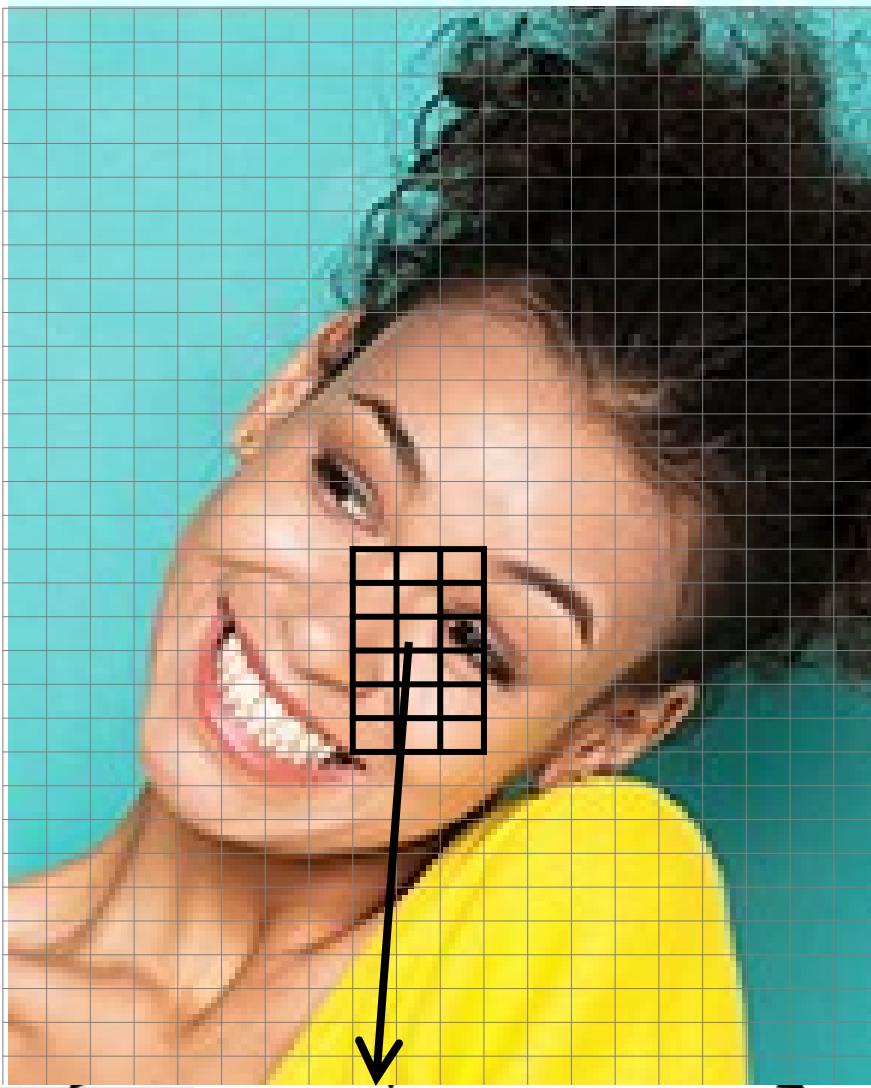
$d = 2$

Tensor 2D (Matriz)  
Shape: (3,3)



$d = 3$

Tensor 3D (Tensor)  
Shape: (3,3,3)

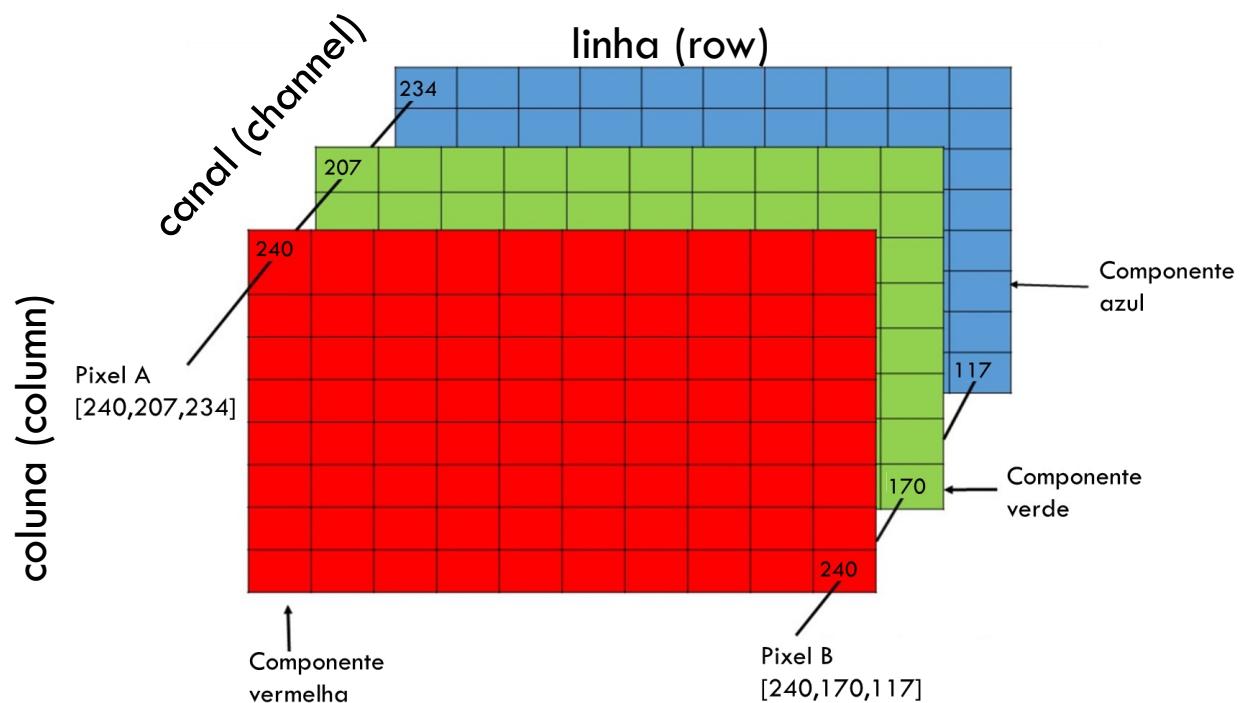


240	241	241
240	237	238
239	240	240
238	237	240
240	240	239
239	240	240

207	199	196
183	163	195
183	166	184
176	172	181
184	167	176
182	180	170

234	231	225
223	213	225
219	211	195
176	205	189
168	141	117
160	142	117

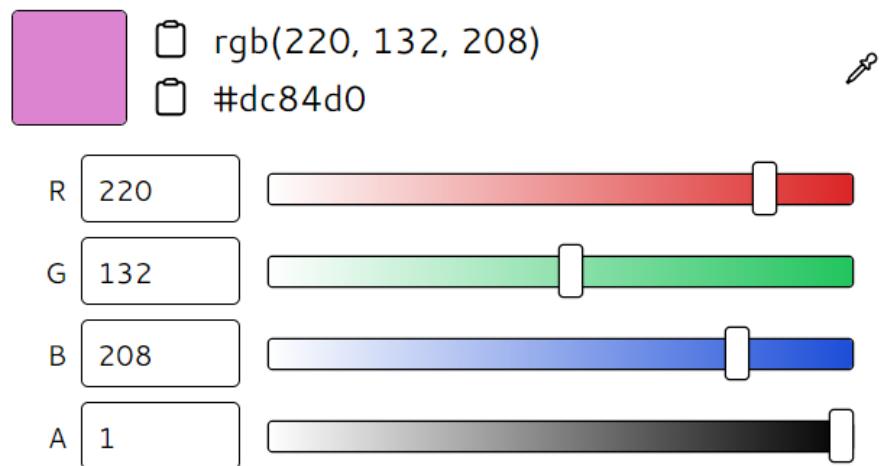
## ANÁLISE ESTATÍSTICA DE DADOS





```
data=np.array(img)
print(data.shape)
data = data[:, :, :3]
print(np.shape(data[0,0,:]))
data[0,0,:]
```

```
(725, 507, 4)
(3,)
array([220, 132, 208], dtype=uint8)
```



$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)  
Shape: ()



$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)  
Shape: (3,)

$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)  
Shape: (3,)



$d = 2$

Tensor 2D (Matriz)  
Shape: (3,3)



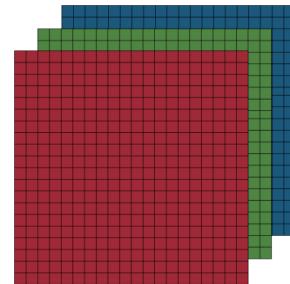
$d = 3$

Tensor 3D (Tensor)  
Shape: (3,3,3)

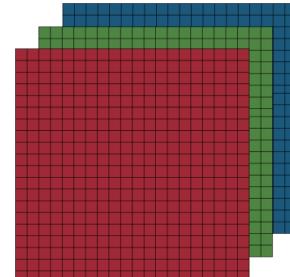
$d = 4$

Tensor 4D (Tensor)  
Shape: (3,3,3,3)





Feliz (0)



Triste (1)

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

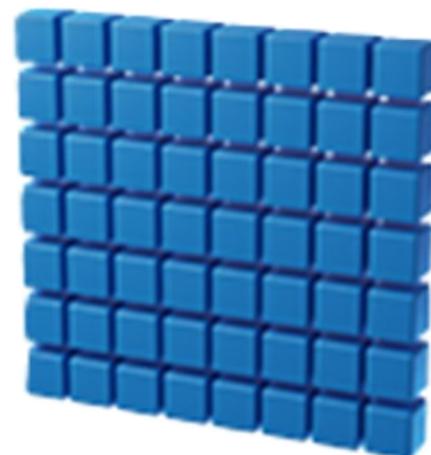
'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)  
Shape: ()

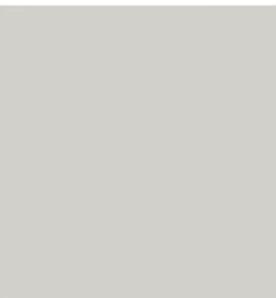
$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)  
Shape: (3,)



$d = 2$

Tensor 2D (Matriz)  
Shape: (3,3)



$d = 3$

Tensor 3D (Tensor)  
Shape: (3,3,3)



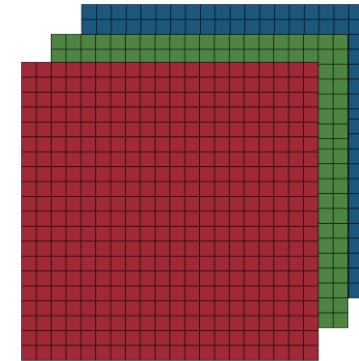
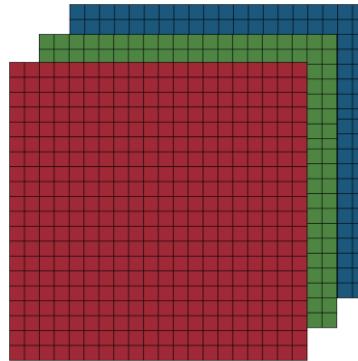
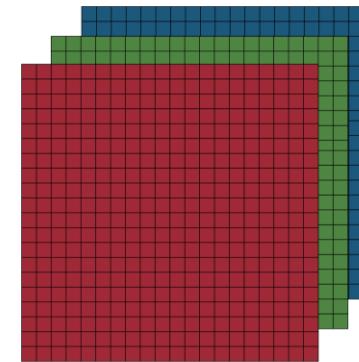
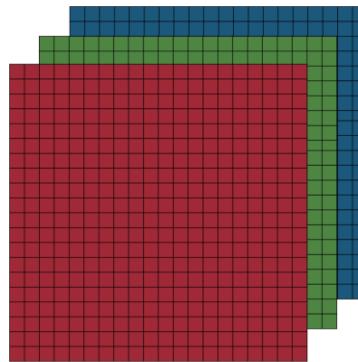
$d = 4$

Tensor 4D (Tensor)  
Shape: (3,3,3,3)



$d = 5$

Tensor 5D (Tensor)  
Shape: (3,3,3,3,3)



*pessoa 0*

*pessoa 1*

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)  
Shape: ()



$d = 1$

Tensor 1D (Vetor)  
Shape: (3,)



$d = 2$

Tensor 2D (Matriz)  
Shape: (3,3)



$d = 3$

$d = 3$

Tensor 3D (Tensor)  
Shape: (3,3,3)

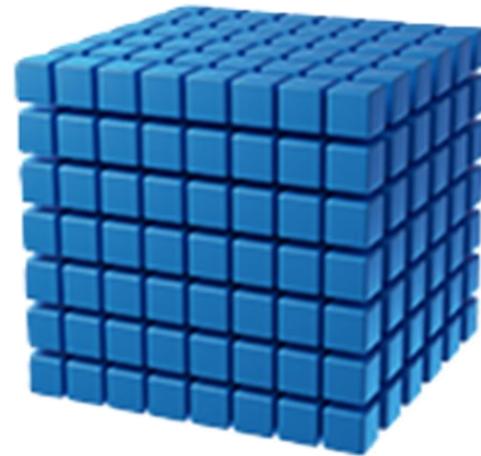


$d = 4$

Tensor 4D (Tensor)  
Shape: (3,3,3,3)

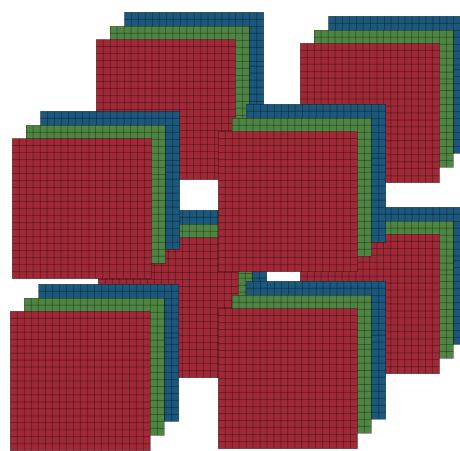
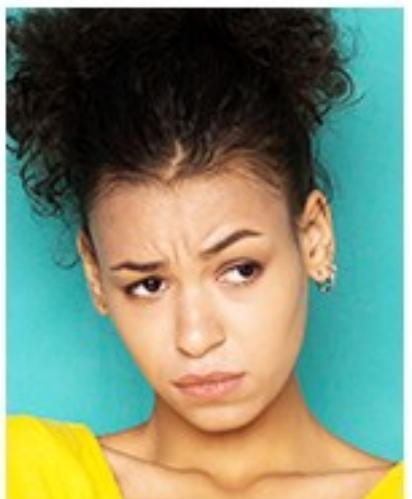
$d = 5$

Tensor 5D (Tensor)  
Shape: (3,3,3,3,3)

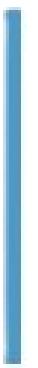


$d = 6$

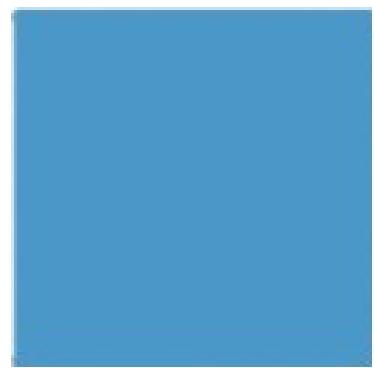
Tensor 6D (Tensor)  
Shape: (3,3,3,3,3,3)



*pessoa 0    pessoa 1*



1D



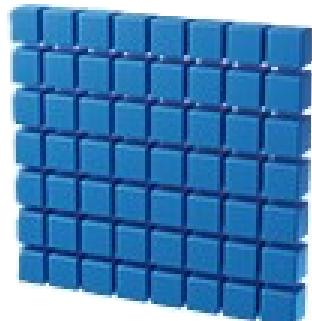
2D



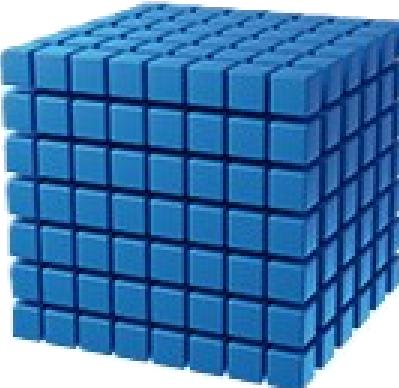
3D



4D

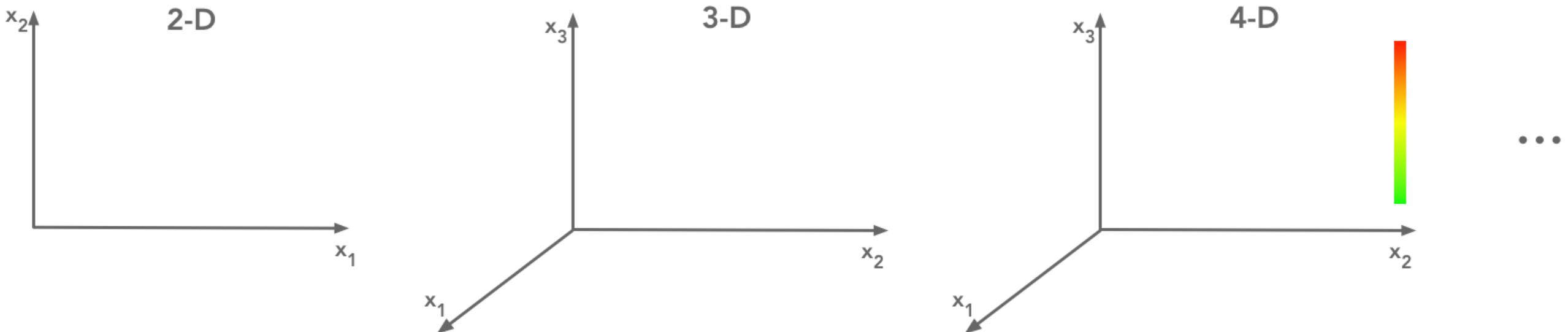


5D



6D

# REPRESENTAÇÃO ESPACIAL





# VETORES

# VETORES

O vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  é dito vetor coluna de dimensão  $n$  se possuir  $n$  linhas e 1 coluna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$x_i$  é o i-ésimo elemento do vetor  $x$

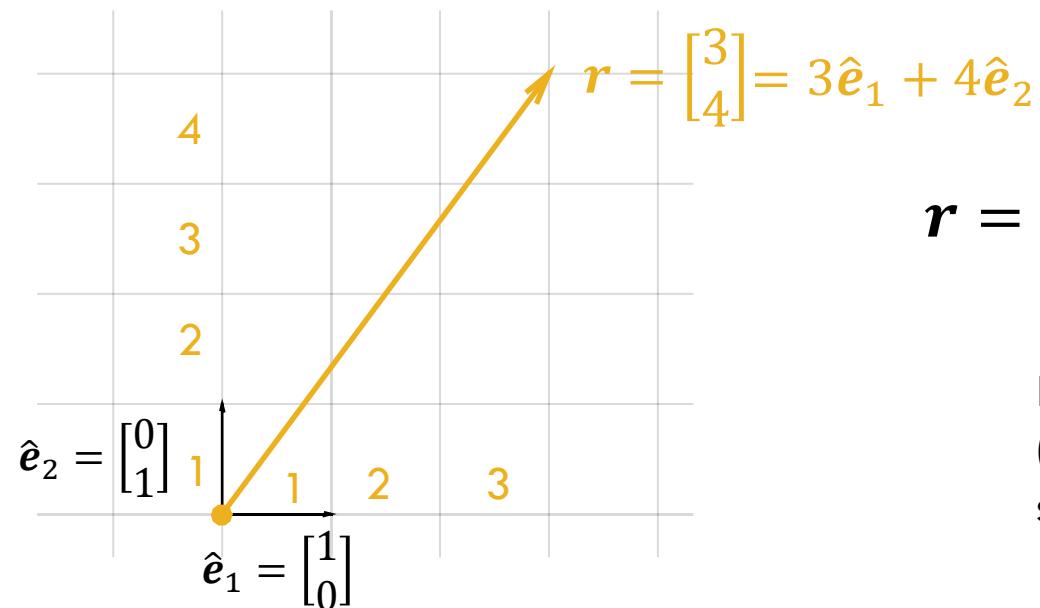
Para expressar o vetor linha,

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

calcula-se o transposto de  $x$ , isto é, um vetor de 1 linha e  $n$  colunas.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = [1 \ 2]$$

# BASE DE UM CONJUNTO DE VETORES



$$\mathbf{r} = r_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + r_2 \hat{\mathbf{e}}_2$$

Base de vetores  
(bidimensional) de nosso  
sistema de coordenadas.

# “VETOR DE CARACTERÍSTICAS”

Para nosso universo de IA, vetor é uma lista de atributos de um objeto!



450 m<sup>2</sup>  
5 quartos  
6 banheiro  
850000 reais



$$\begin{bmatrix} 450 \\ 5 \\ 6 \\ 850 \end{bmatrix}$$

# OPERAÇÕES BÁSICAS COM VETORES



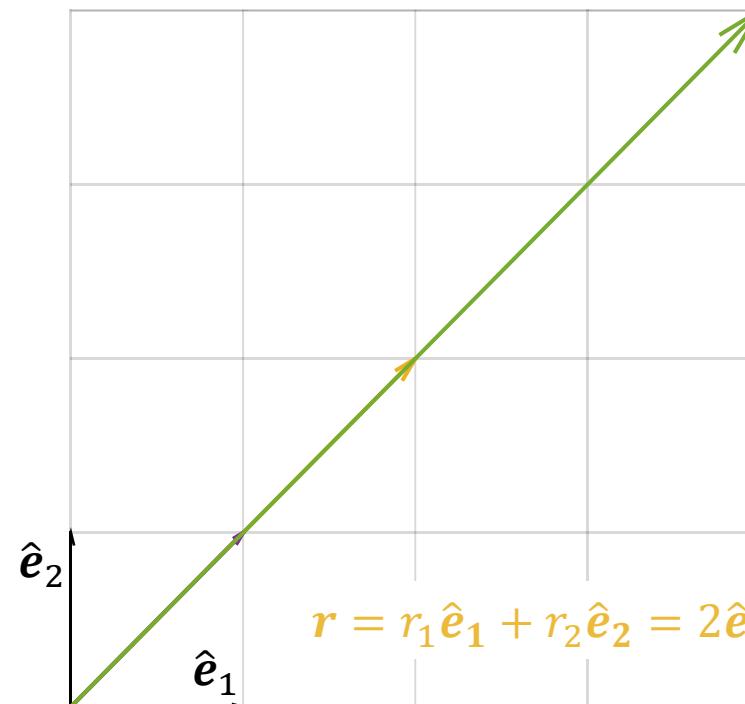
$$\frac{r}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{\#quartos} \\ \text{\#banheiros} \end{array}$$



$$2r = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

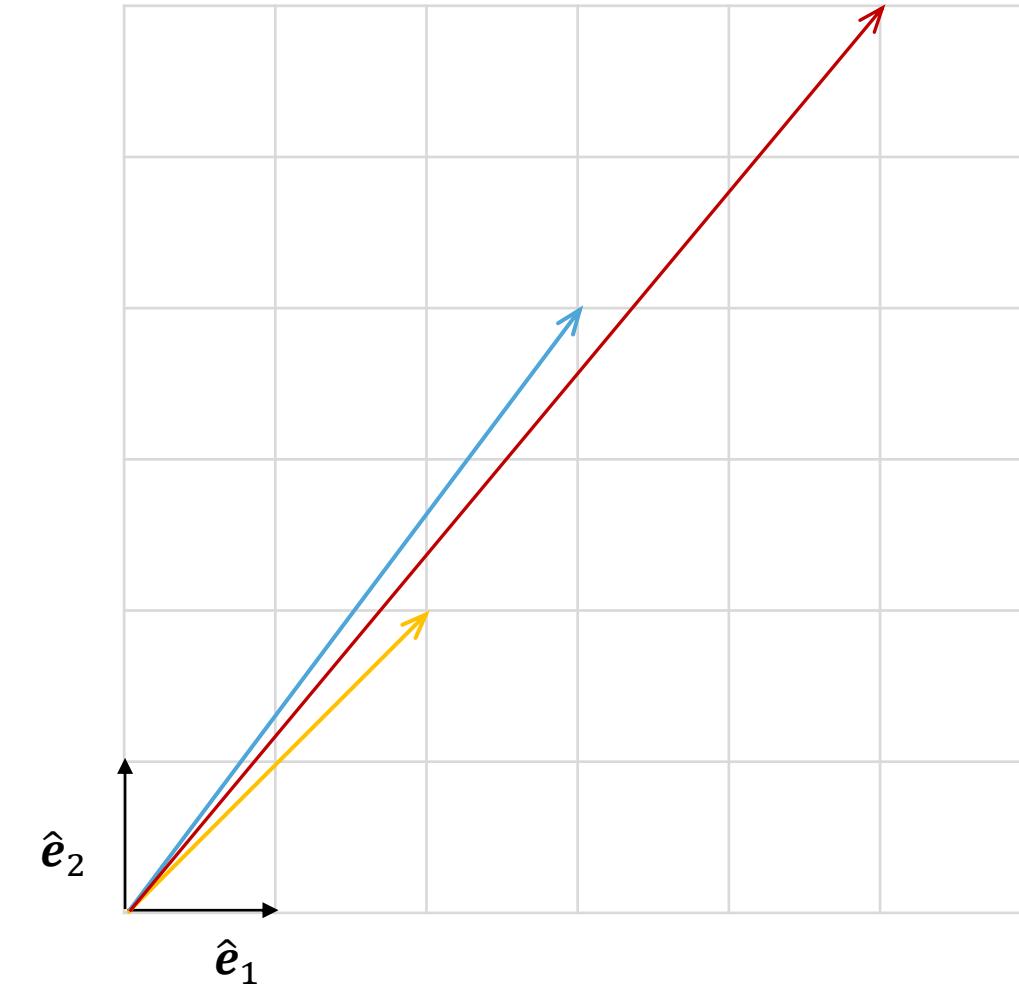


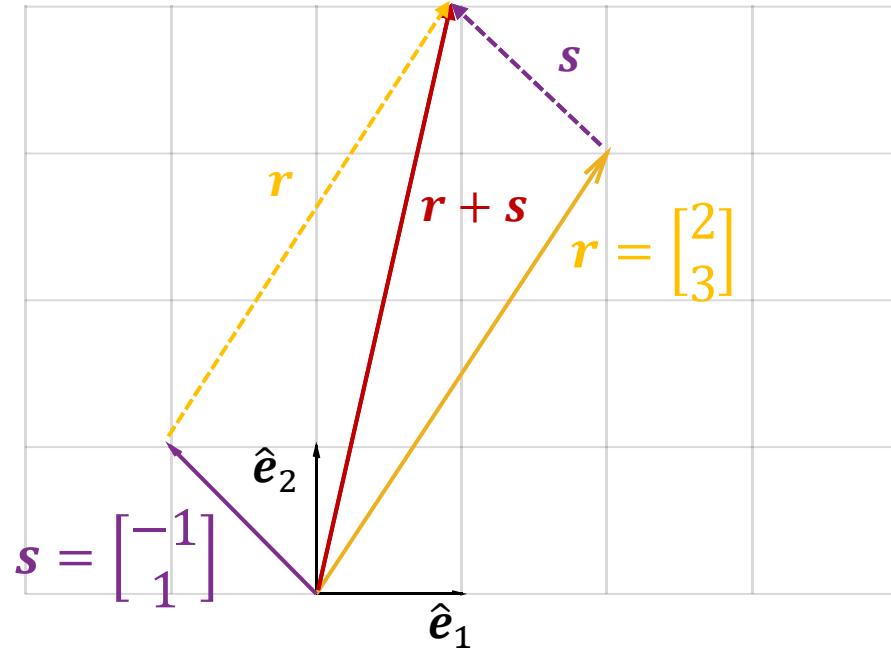
$$r = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 = 2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$$

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 \\ 2 \times 4 \\ 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

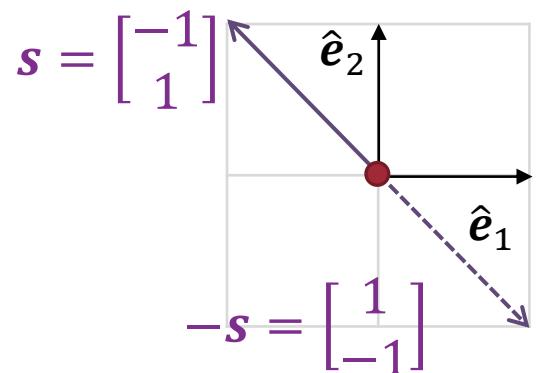


$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

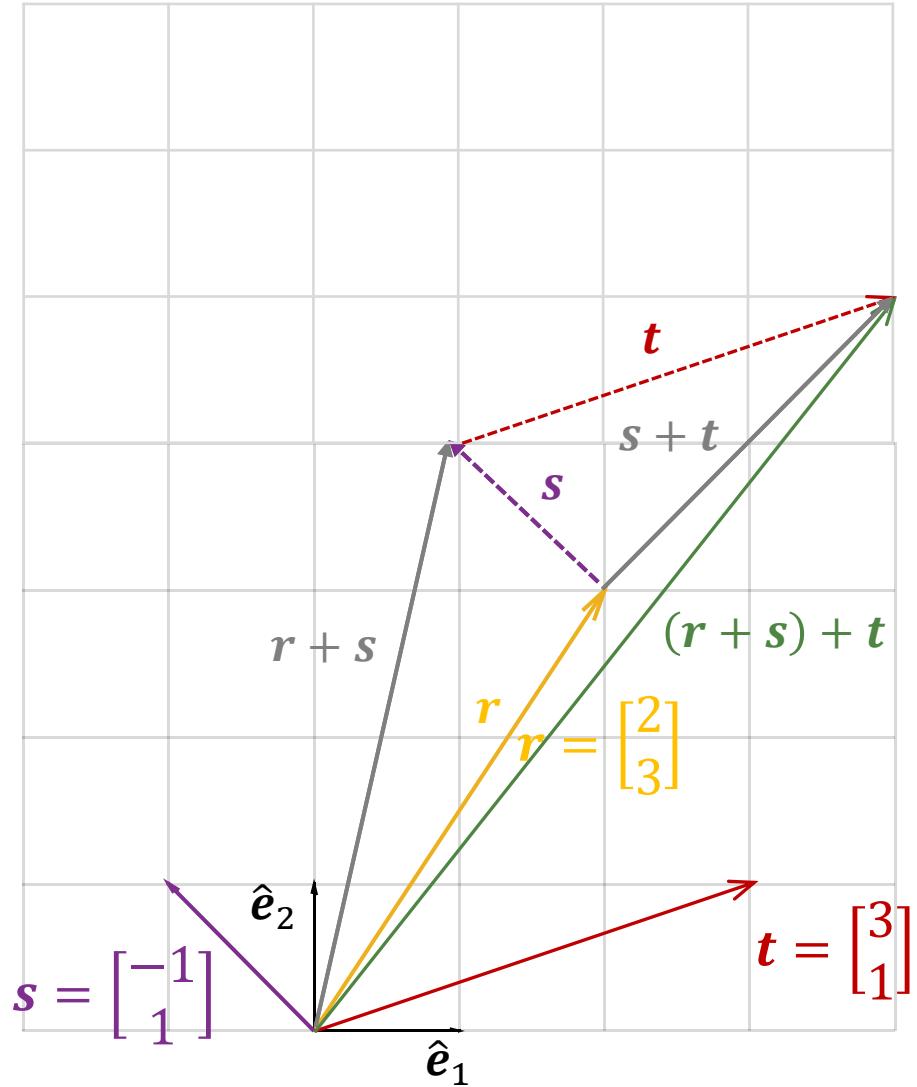




$$s + r = r + s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



$$s + (-s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{r} + \mathbf{s}) + \mathbf{t} = \mathbf{r} + (\mathbf{s} + \mathbf{t})$$

$$\left( \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

# PRODUTO INTERNO ENTRE VETORES

O produto escalar é a principal ferramenta para calcular projeções de vetores, decomposições de vetores e determinar ortogonalidade.

$x, y \in \mathbb{R}^n$  calcula-se  $x^T y \in \mathbb{R}$

$$v = x^T y = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

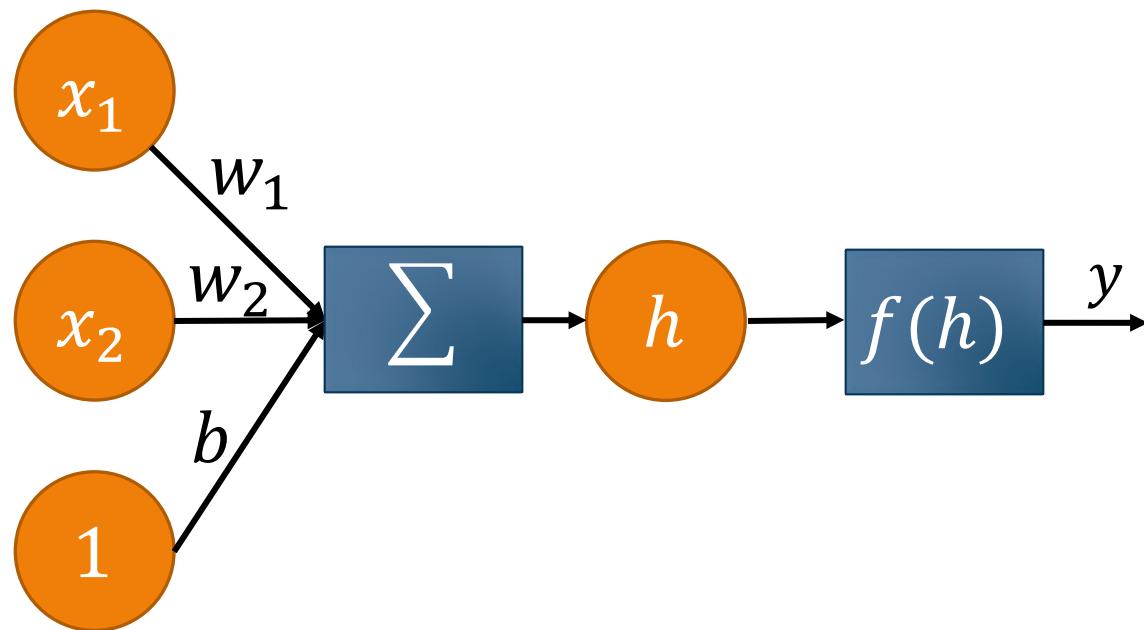
$$x^T y = y^T x$$

# POR EXEMPLO...

Ache o produto interno entre os seguintes vetores,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# PORQUE PRODUTO INTERNO É IMPORTANTE...



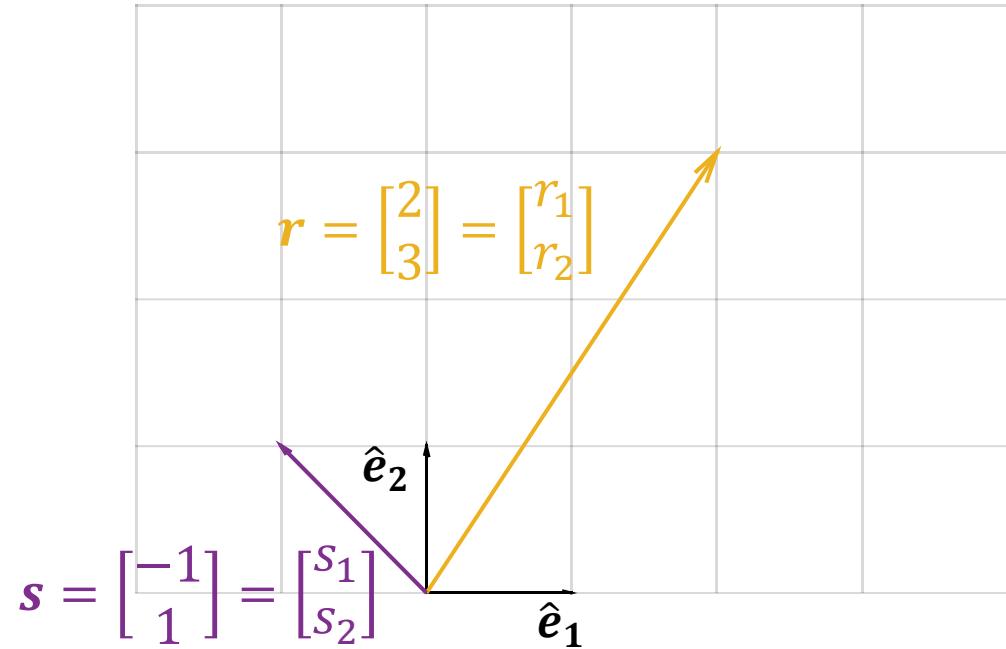
$$y = f(h)$$

$$y = f(w_1x_1 + w_2x_2 + b)$$

$$y = f\left(\sum_i w_i x_i + b\right)$$

$$h = [1 \quad x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

# CARACTERÍSTICAS DO PRODUTO INTERNO

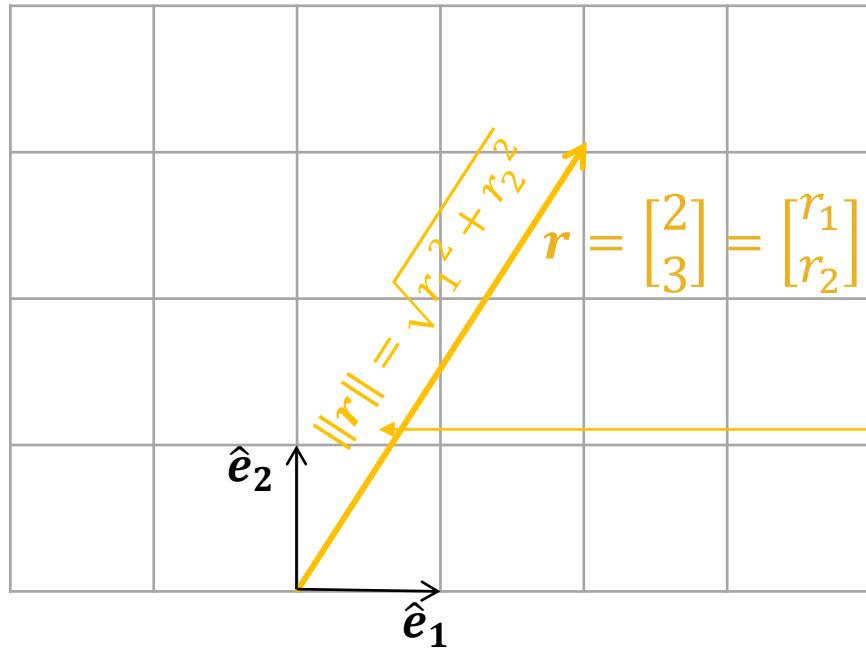


$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = -1 \times 2 + 1 \times 3 = 1$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{t}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$$

$$\mathbf{r} \cdot (a\mathbf{s}) = a(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})$$

# CARACTERÍSTICAS DO PRODUTO INTERNO



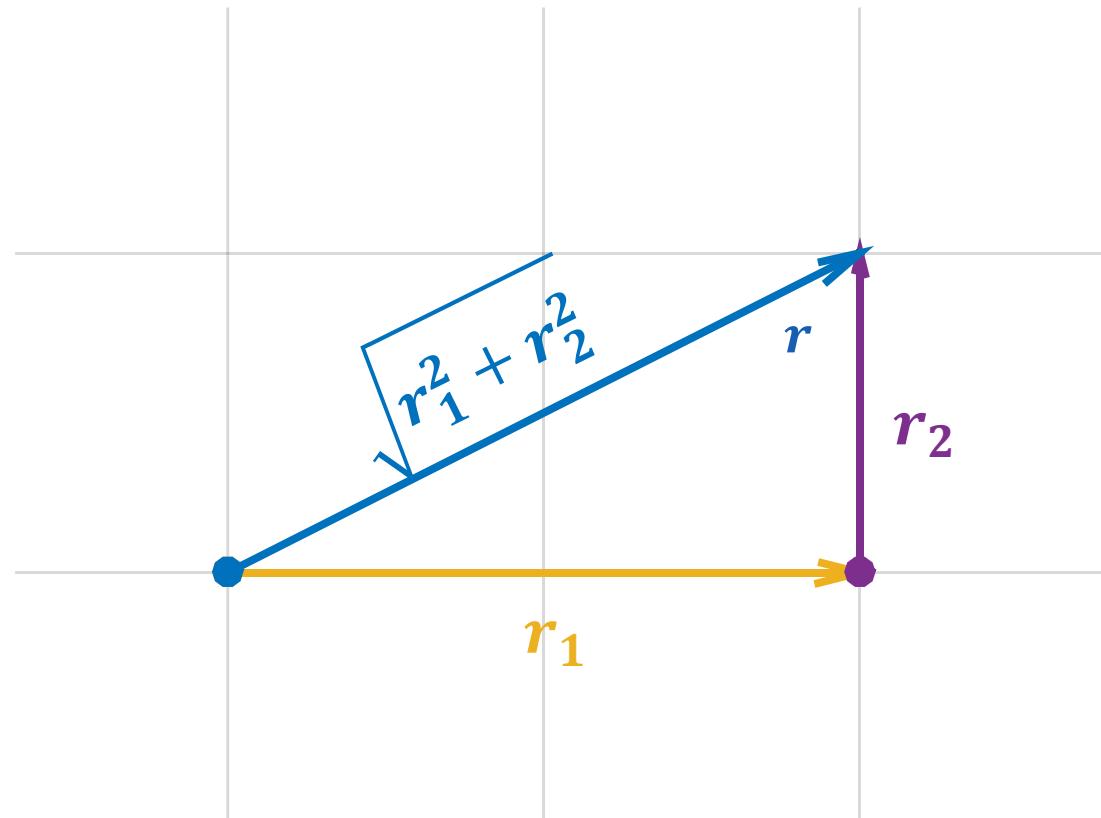
$$r = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 = 2\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2$$

$$r \cdot r = [r_1 \quad r_2] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r \cdot r = r_1^2 + r_2^2 = \left( \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \right)^2 = \|r\|^2$$

Se queremos saber a dimensão de um vetor,  
basta tirar a raiz do seu produto interno.

# EXTRAPOLANDO...

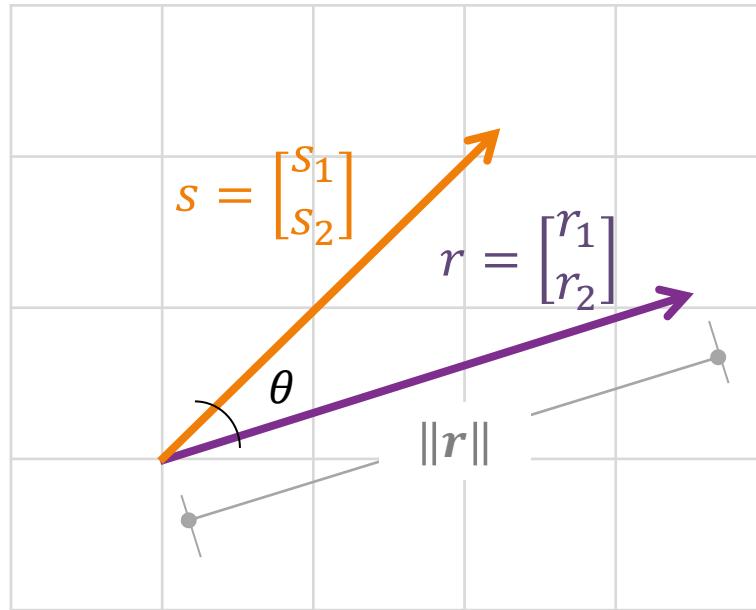


Podemos extender para qualquer dimensão: o tamanho de um vetor é a raiz quadrada da soma dos quadrados de seus componentes.  
 Por exemplo,

$$s = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|s\| = \sqrt{36} = 6$$

# PRODUTO INTERNO E O ÂNGULO ENTRE VETORES



Relação entre produto interno e ângulo,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{r}^T \mathbf{s} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| \cos \theta$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{r}^T \mathbf{s} = \mathbf{s}^T \mathbf{r})$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{s} = [r_1 \quad r_2] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = r_1 s_1 + r_2 s_2$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = [r_1 \quad r_2] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = r_1 r_1 + r_2 r_2 = r_1^2 + r_2^2 = \|\mathbf{r}\|^2$$

# VETORES ORTOGONIAIS E ORTONORMAIS

Dois vetores são ortogonais,  $\cos \theta = 90^\circ$ , se seu produto interno é nulo,

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{r}\|} = \|\mathbf{s}\| \cos \theta \rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 0$$

Um vetor é normalizado se sua dimensão é unitária, ié,

$$\|\mathbf{r}\| = 1$$

Podemos normalizar um vetor...

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}, \mathbf{s}' = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}' = 0$$

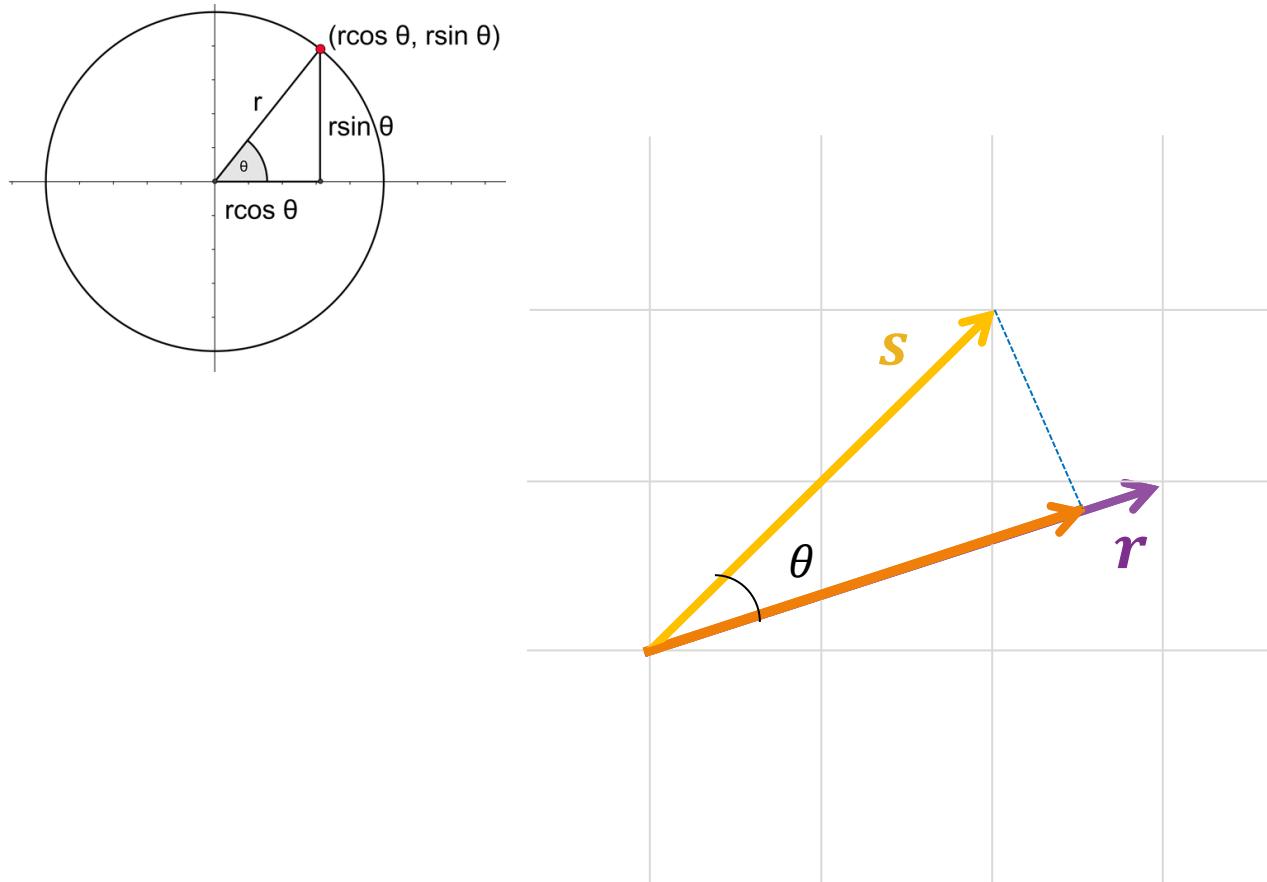
É impossível ter mais de  $n$  vetores independentes mutuamente ortogonais em  $\mathbb{R}^n$

Dois vetores  $\mathbf{r}, \mathbf{s}$  são ditos ortogonais quando separados por  $90^\circ$ .

Vetor unitário ou versor é aquele cuja norma é 1 .

Quando a norma dos vetores ortogonais é unitária, eles são chamados ortonormais  $(\mathbf{r}', \mathbf{s}')$ .

# PROJEÇÃO ESCALAR E VETORIAL



Projeção escalar é o tamanho do vetor laranja.

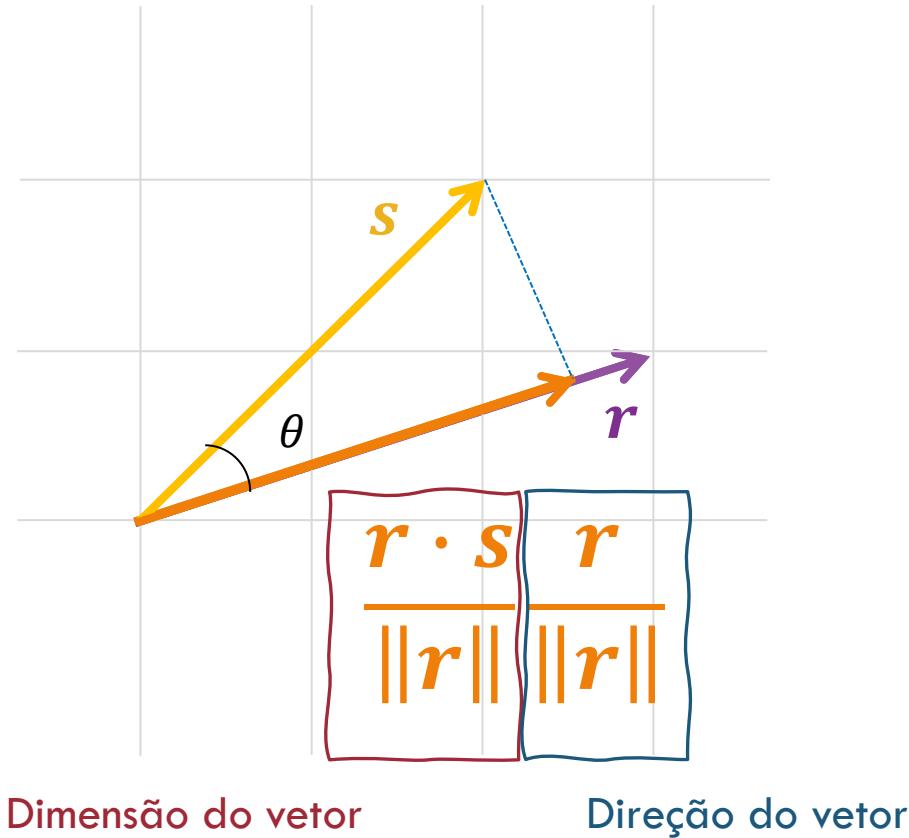
$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{r}\|} = \|\mathbf{s}\| \cos \theta$$

Projeção vetorial é um escalonamento do vetor  $\mathbf{r}$

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{r}\|} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r}$$

A definição de projeção escalar é o comprimento da projeção vetorial.

# RESUMINDO...

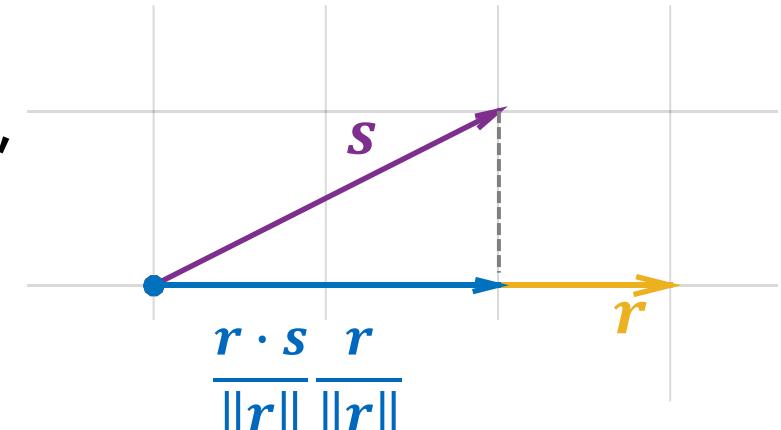


# EXEMPLO

A projeção pode ser feita em qualquer dimensão. Por exemplo,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Qual a projeção escalar e vetorial de  $\mathbf{s}$  em  $\mathbf{r}$ ?

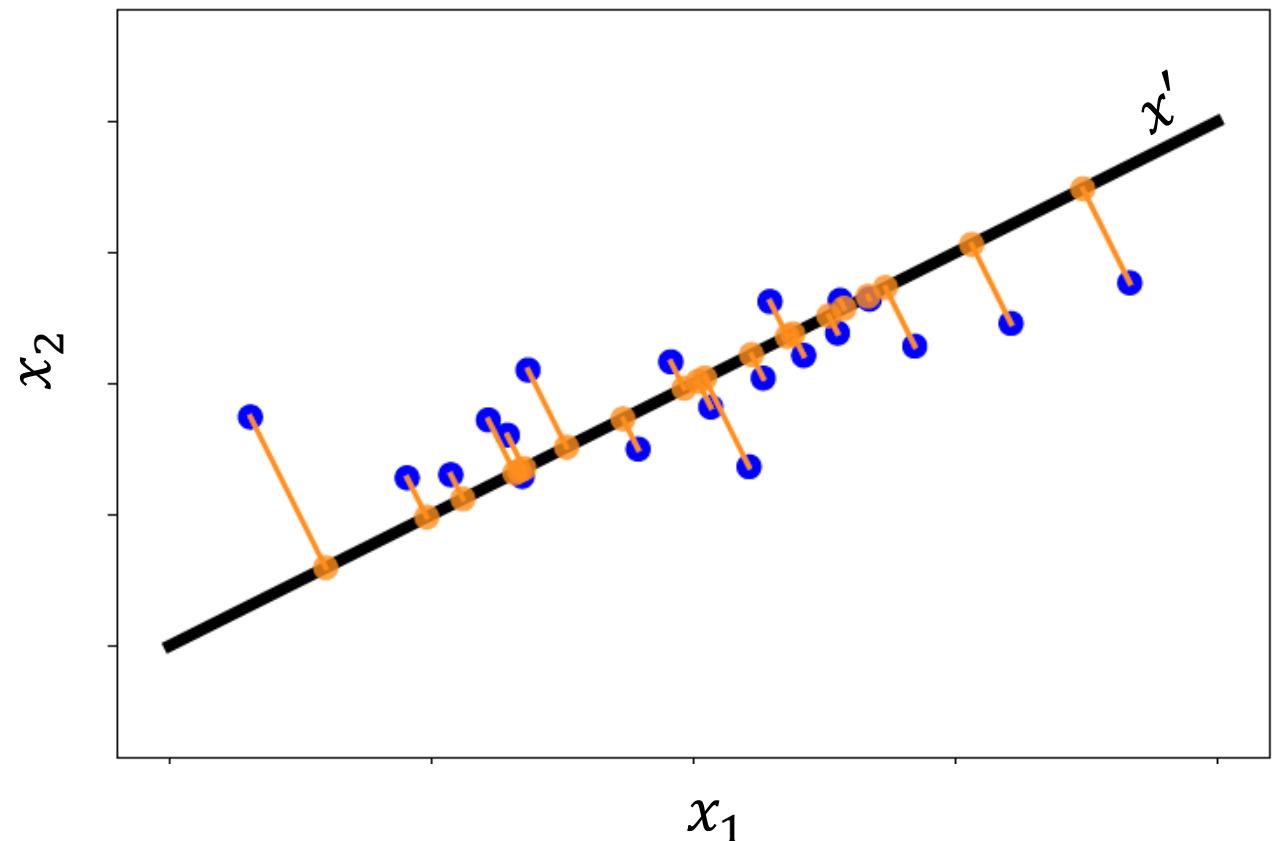


# REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE

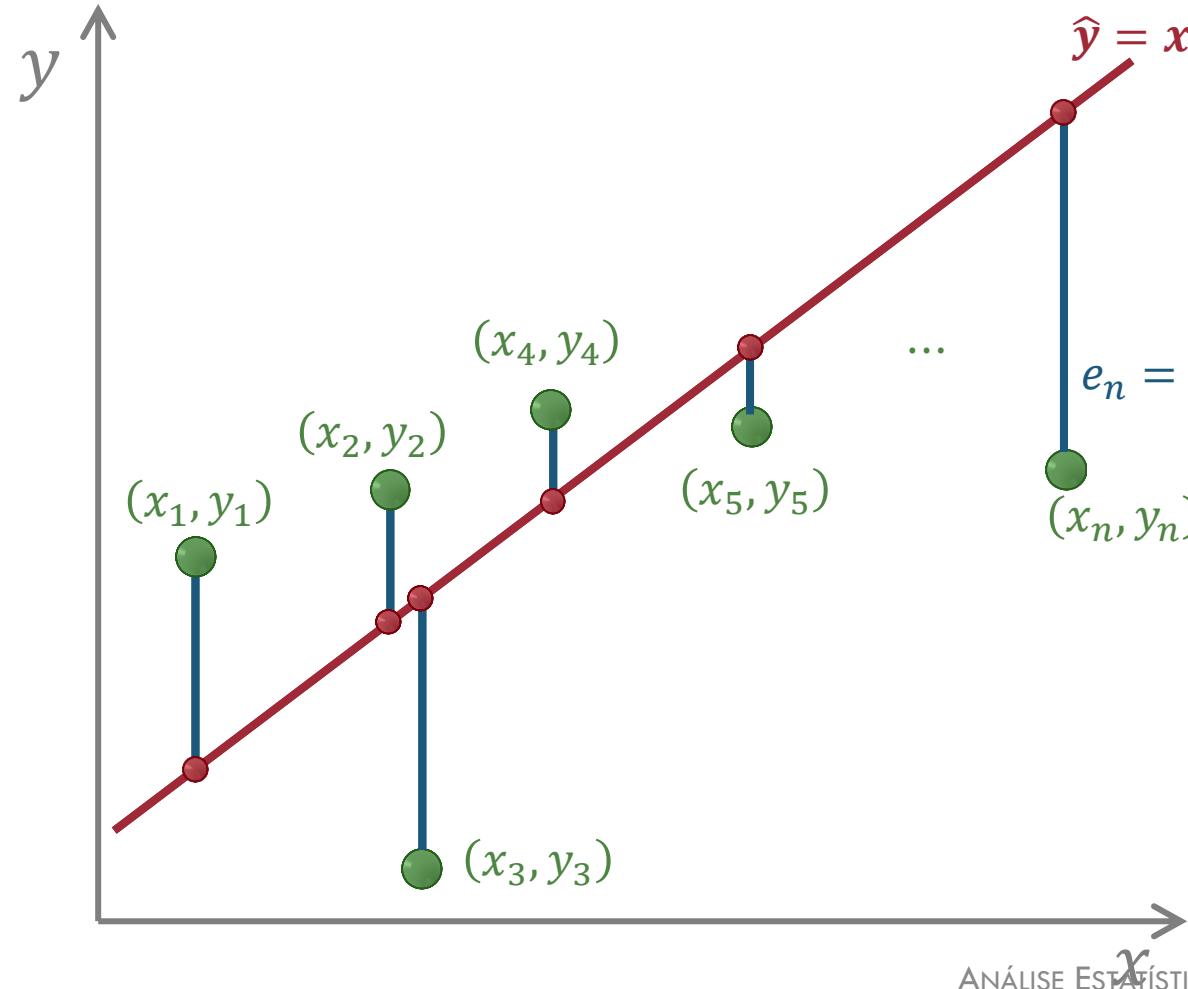
As projeções são uma classe importante de transformações lineares.

No aprendizado de máquina, geralmente lidamos com dados de alta dimensão, que são geralmente difíceis de analisar ou visualizar.

No entanto, dados de alta dimensão muitas vezes possuem a propriedade de que apenas algumas dimensões contêm mais informações, e a maioria das outras dimensões não são essenciais para descrever as principais propriedades dos dados.



# ERRO MÉDIO QUADRÁTICO E O PRODUTO INTERNO



$$\hat{y} = x\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n \end{bmatrix}$$

Vetor  $n \times 1$  que contém as previsões pontuais

$$e(\beta_0, \beta_1) = y - x\beta = y - \hat{y}$$

$$MSE(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(\beta)$$

$$MSE(\beta) = \frac{1}{n} [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$



# MATRIZES

# MATRIZ DE CARACTERÍSTICAS

Para nosso universo de IA, matriz é constituída de várias listas de atributos de diferentes objetos!



450 m<sup>2</sup>  
5 quartos  
6 banheiro  
850000 reais



$$\begin{bmatrix} 450 \\ 5 \\ 6 \\ 850 \end{bmatrix}$$

# MATRIZ DE CARACTERÍSTICAS

Para nosso universo de IA, matriz é constituída de várias listas de atributos de diferentes objetos!



200 m<sup>2</sup>  
3 quartos  
4 banheiro  
450000 reais



$$\begin{bmatrix} 450 & 200 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \\ 850 & 450 \end{bmatrix}$$

# MATRIZES

Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz com  **$m$  linhas e  $n$  colunas** ( $m \times n$  é a dimensão da matriz)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha da  $j$ -ésima coluna de  $A$

A  $i$ -ésima coluna,  $\mathbf{a}_i = a_{:,i}$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

A  $j$ -ésima linha,  $\mathbf{a}'_j = a_{j,:}$

$$A = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix}$$

# PRODUTO EXTERNO ENTRE VETORES

$x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$  calcula-se  $xy^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$  é um vetor linha  $n$ -dimensional, cujas entradas são todas iguais a 1. Além disso, considere a matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  cujas colunas são todas iguais a algum vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ . Usando produto externo, podemos representar  $A$  compactamente como,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x & x & \cdots & x \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & x_m & \cdots & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] = x\mathbf{1}^T$$

# MATRIZ TRANSPOSTA

A transposição de uma matriz resulta na troca das linhas pelas colunas. Dada uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sua transposição, escrita  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , é a matriz  $n \times m$  cujas entradas são dadas por

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Quando  $A^T = A$  a matriz é dita simétrica (somente matrizes quadradas,  $m = n$ , podem ser simétricas).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = n & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# PRODUTO ENTRE MATRIZ E VETOR

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $v, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$Ax = v$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline
 1 & 2 \\ \hline
 3 & 4 \\ \hline
 \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline
 x_1 \\ \hline
 x_2 \\ \hline
 \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline
 1x_1 + 2x_2 \\ \hline
 3x_1 + 4x_2 \\ \hline
 \end{array} \\
 2 \times 2 \qquad\qquad\qquad 2 \times 1 \qquad\qquad\qquad 2 \times 1
 \end{array}$$

$$v = Ax = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a'_1 x \\ a'_2 x \\ \vdots \\ a'_m x \end{bmatrix}$$

a  $i$ -ésima entrada de  $v$  é igual ao produto da  $i$ -ésima linha de  $A$  por  $x$ ,  $v_i = a'_i x$

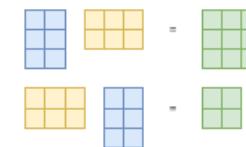
# PRODUTO ENTRE MATRIZ E VETOR

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$v = Ax = \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ] \\ a_1 \\ ] \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} ] \\ a_2 \\ ] \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} ] \\ a_n \\ ] \end{bmatrix} x_n$$

$v$  é uma combinação linear das colunas de  $A$ , onde os coeficientes da combinação linear são dados pelas entradas de  $x$ .

# PRODUTO ENTRE MATRIZES



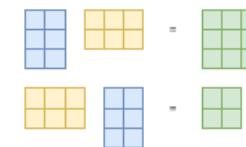
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 b_1 & a'_1 b_2 & \cdots & a'_1 b_p \\ a'_2 b_1 & a'_2 b_2 & \cdots & a'_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_m b_1 & a'_m b_2 & \cdots & a'_m b_p \end{bmatrix}$$

$m \times n$                                      $n \times p$      $m \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

# PRODUTO ENTRE MATRIZES



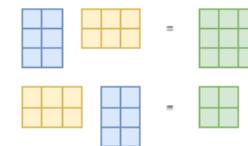
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 b_1 & a'_1 b_2 & \cdots & a'_1 b_p \\ a'_2 b_1 & a'_2 b_2 & \cdots & a'_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_m b_1 & a'_m b_2 & \cdots & a'_m b_p \end{bmatrix}$$

$m \times n$                                      $n \times p$      $m \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & \\ & \end{bmatrix}$$

# PRODUTO ENTRE MATRIZES



$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 b_1 & a'_1 b_2 & \cdots & a'_1 b_p \\ a'_2 b_1 & a'_2 b_2 & \cdots & a'_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_m b_1 & a'_m b_2 & \cdots & a'_m b_p \end{bmatrix}$$

$m \times n$                              $n \times p$                              $m \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & 220 \end{bmatrix}$$

# PRODUTO ENTRE MATRIZES

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & \endbmatrix$$

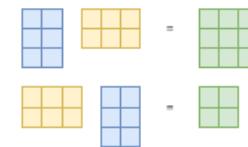
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 b_1 & a'_1 b_2 & \cdots & a'_1 b_p \\ a'_2 b_1 & a'_2 b_2 & \cdots & a'_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_m b_1 & a'_m b_2 & \cdots & a'_m b_p \end{bmatrix}$$

$m \times n$                              $n \times p$                              $m \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & \endbmatrix}$$

# PRODUTO ENTRE MATRIZES



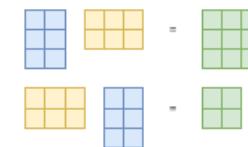
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 b_1 & a'_1 b_2 & \cdots & a'_1 b_p \\ a'_2 b_1 & a'_2 b_2 & \cdots & a'_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_m b_1 & a'_m b_2 & \cdots & a'_m b_p \end{bmatrix}$$

$m \times n$                              $n \times p$                              $m \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & 220 \end{bmatrix}$$

# PRODUTO ENTRE MATRIZES



$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 b_1 & a'_1 b_2 & \cdots & a'_1 b_p \\ a'_2 b_1 & a'_2 b_2 & \cdots & a'_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_m b_1 & a'_m b_2 & \cdots & a'_m b_p \end{bmatrix}$$

$m \times n$                                      $n \times p$                                      $m \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & 220 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = ?$$

# VÁRIAS VISÕES DE $C = AB$

$$C = AB = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & b'_1 & - \\ - & b'_2 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & b'_n & - \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b'_i$$

Multiplicação de matrizes  
vista como **produto**  
**externo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

# VÁRIAS VISÕES DE $C = AB$

$$C = AB = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 & - \\ b'_2 & - \\ \vdots & - \\ b'_n & - \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b'_i$$

Multiplicação de matrizes  
vista como **produto**  
**externo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 \\ 3 \times 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 6 \\ 3 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

# VÁRIAS VISÕES DE $C = AB$

$$C = AB = \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} | & | \\ a_n & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & b'_1 & - \\ - & b'_2 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & b'_n & - \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b'_i$$

Multiplicação de matrizes  
vista como **produto**  
**externo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = A \begin{bmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$c_i = Ab_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Colunas de  $C$  vistas como  
produtos entre a matriz  $A$  e os  
vetores formados pelas colunas  
de  $B$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a'_1 & - \\ - & a'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m & - \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} - & a'_1 B & - \\ - & a'_2 B & - \\ - & \vdots & - \\ - & a'_m B & - \end{bmatrix}, \quad c'_i = a'_i B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Linhas de  $C$  vistas como  
produtos entre os vetores  
formados pelas linhas de  $A$   
e a matriz  $B$ .

# TREINE O RACIOCÍNIO...

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 & 7 \times 1 + 2 \times 2 + 6 \times 3 \\ 2 \times 4 + 1 \times 5 + 3 \times 6 & 7 \times 4 + 2 \times 5 + 6 \times 6 \\ 2 \times 7 + 1 \times 8 + 3 \times 9 & 7 \times 7 + 2 \times 8 + 6 \times 9 \\ 2 \times 10 + 1 \times 11 + 3 \times 12 & 7 \times 10 + 2 \times 11 + 6 \times 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 29 \\ 31 & 74 \\ 49 & 119 \\ 67 & 164 \end{bmatrix}$$

Resolva usando as seguintes formas:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}'_i$$

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{A} \mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{c}'_i = \mathbf{a}'_i \mathbf{B}$$

# TRAÇO DE UMA MATRIZ

O traço de uma matriz é a soma de sua diagonal principal,

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

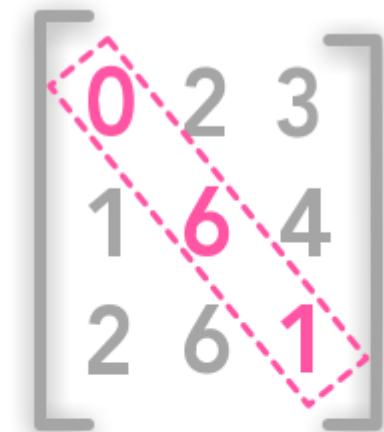
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{tr } A = \text{tr } A^T$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, k \in \mathbb{R} \quad \text{tr}(kA) = k \text{ tr } A$$

$$A, B \text{ tal que } AB \text{ é quadrada } \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$A, B, C \text{ tal que } ABC \text{ é quadrada } \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$$



**Traço**

$$0 + 6 + 1 = 7$$

# PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Multiplicação de matrizes é distributiva e associativa,

$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B + C) = AB + AC$$

mas somente em casos especiais é comutativa. Em geral,

$$AB \neq BA$$

# IMPORTANTE... $ABC \neq CAB \neq BCA$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ABC} = \begin{bmatrix} 360 & 432 \\ 180 & 171 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CAB} = \begin{bmatrix} 498 & 126 \\ 259 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BCA} = \begin{bmatrix} -63 & -54 \\ 393 & 594 \end{bmatrix}$$

Lembram-se da  
propriedade do traço?

$$\text{Tr}(\mathbf{ABC}) = \text{Tr}(\mathbf{CAB}) = \text{Tr}(\mathbf{BCA}) = 531$$



# MATRIZES ESPECIAIS

Simétricas, ortogonais,  
identidade...

# MATRIZ SIMÉTRICA E ANTI-SIMÉTRICA, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Simétrica

$$A = A^T$$

Anti-simétrica

$$A = -A^T$$

Toda matriz pode ser escrita como uma soma de uma parcela simétrica e outra anti-simétrica,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

# SÓ PARA CONSTAR...

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = A + A^T = \begin{bmatrix} 3+3 & 3-2 & -1-4 \\ -2+3 & -2-2 & 1-5 \\ -4-1 & -5+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Simétrica... } (D = D^T)$$

$$S = A - A^T = \begin{bmatrix} 3-3 & 3+2 & -1+4 \\ -2-3 & -2+2 & 1+5 \\ -4+1 & -5-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Anti-Simétrica... } (S = -S^T)$$

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} + 0 & \frac{1}{2} + \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{-5}{2} & \frac{-4}{2} & \frac{-4}{2} + \frac{6}{2} \\ \frac{-5}{2} + \frac{-3}{2} & \frac{-4}{2} + \frac{-6}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}} \quad \mathbf{A}$$

# MATRIZ IDENTIDADE, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$

É uma matriz quadrada de dimensões  $n \times n$ , definida como valor 1 nos termos da diagonal principal e 0 nos demais,

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Para  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,

$$AI = A = IA$$

$$I =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# MATRIZ DIAGONAL

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada em que todos os termos fora da diagonal são 0. Denomina-se, normalmente,

$$D = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

com

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

1	0	0
0	8	0
0	0	4

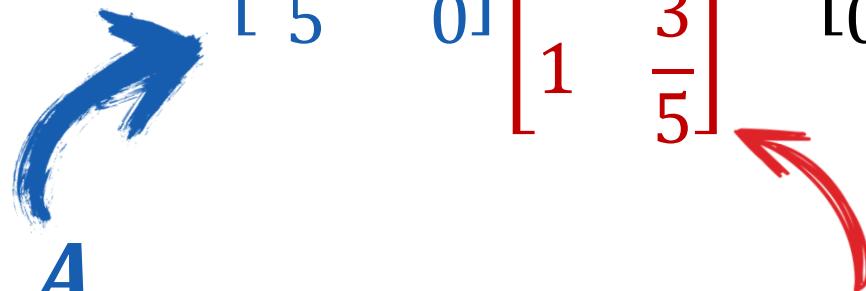
A matriz identidade é um caso particular da matriz diagonal

$$I = \text{diag} (1, 1, \dots, 1)$$

# MATRIZ IDENTIDADE E MATRIZ INVERSA

$$AA^{-1} = I$$

$A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$


$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# MATRIZES ORTOGONAIS

Uma matriz quadrada  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é **ortogonal** se todas as suas colunas forem ortogonais entre si e normalizadas (as colunas são chamadas de ortonormais). Segue-se imediatamente da definição de ortogonalidade e normalidade que,

$$U^T U = I = UU^T$$

Exemplo clássico é a matriz de rotação...

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

# OPA, E O QUE É VETOR ORTONORMAL???

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

São normalizados?

$$u_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \|u_1\|^2 = u_1 \cdot u_1 = u_{11}^2 + u_{12}^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \|u_2\|^2 = u_2 \cdot u_2 = u_{21}^2 + u_{22}^2 = (-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

# OPA, E O QUE É VETOR ORTONORMAL???

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

São ortogonais?

$$u_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$u_1 \cdot u_2 = u_{11}u_{21} + u_{12}u_{22}$$

$$u_1 \cdot u_2 = \cos \theta (-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta = 0$$



# OPERAÇÕES BÁSICAS

# LEMBRAM-SE DA MATRIZ $I$ ?

Primeiro, vamos pensar  
em uma matriz que  
não muda nada.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 \\ 1 \times 2 \\ 1 \times 3 \\ 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

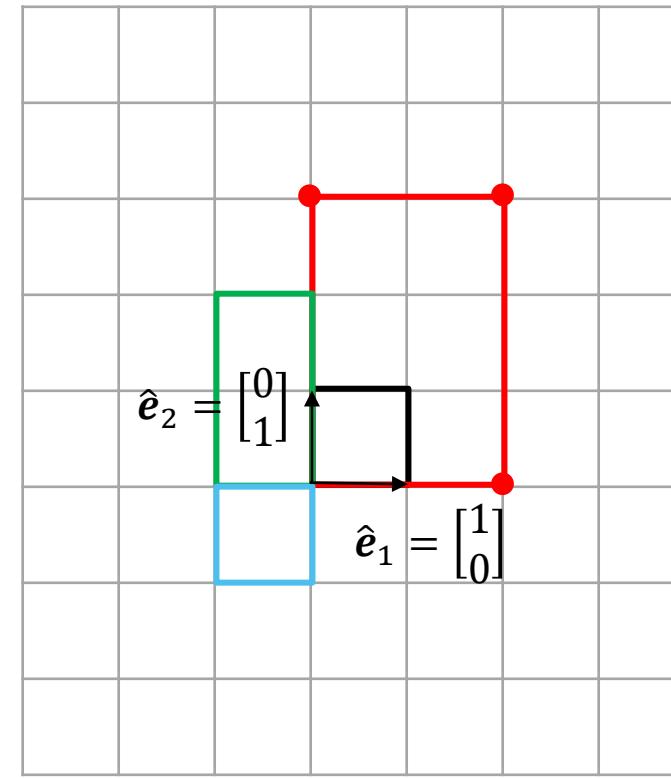
# MODIFICANDO A IDENTIDADE...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  Escalona em torno do ponto  $(0,0)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  Escalona em torno do ponto  $(0,0)$  na direção  $y$  e gira em torno de  $y$

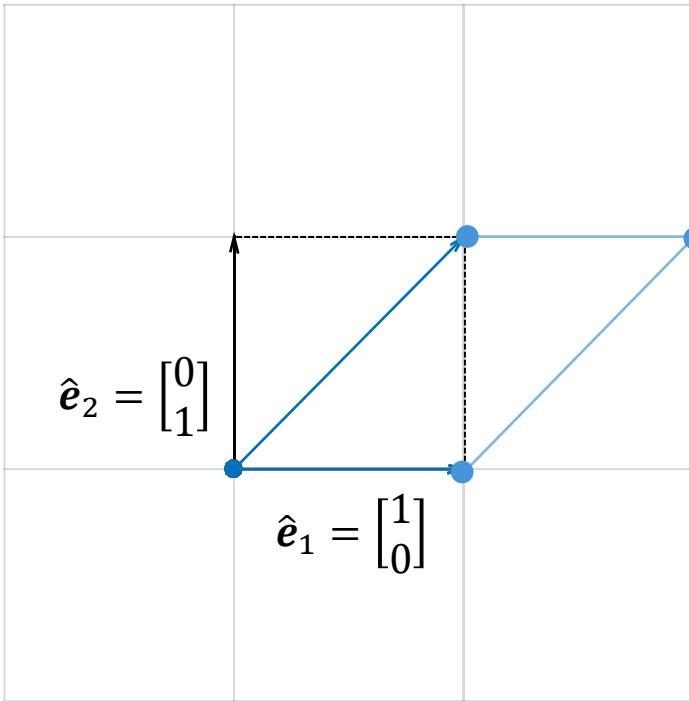
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Gira em torno do ponto  $(0,0)$ , ie, em torno de  $x$  e  $y$ .



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

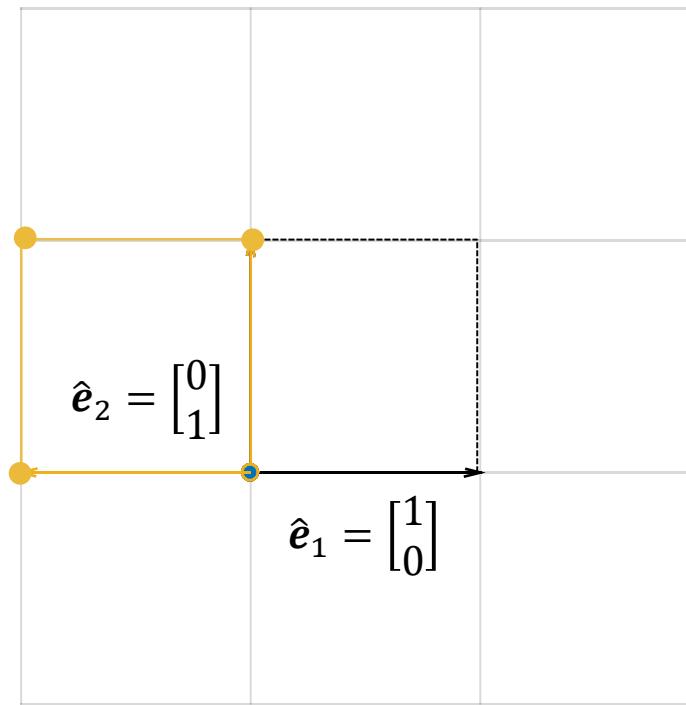


Distorção  
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

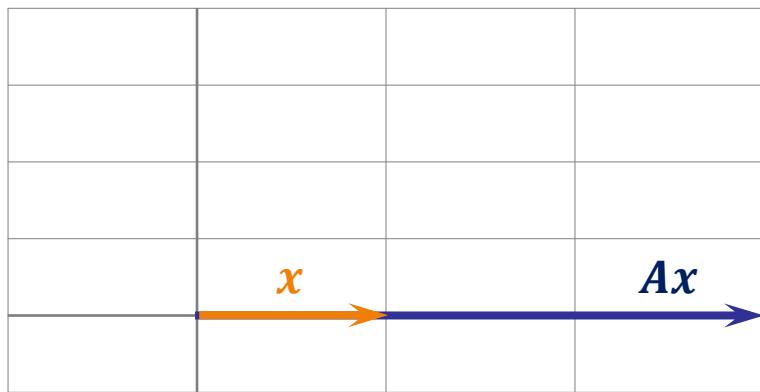
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

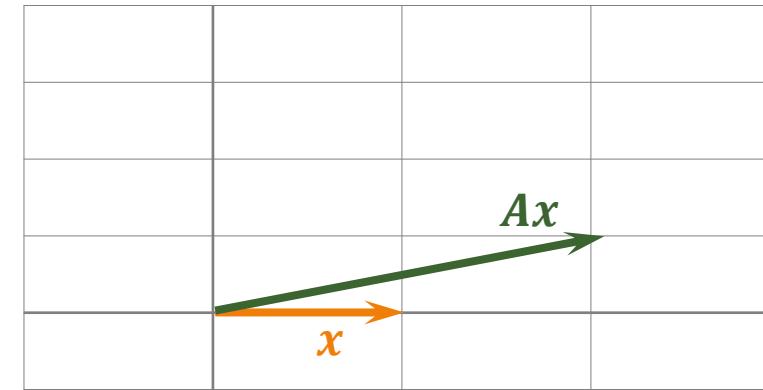


Rotação:  
 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

TREINE:  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  QUAL RESULTADO  $Ax$ ?

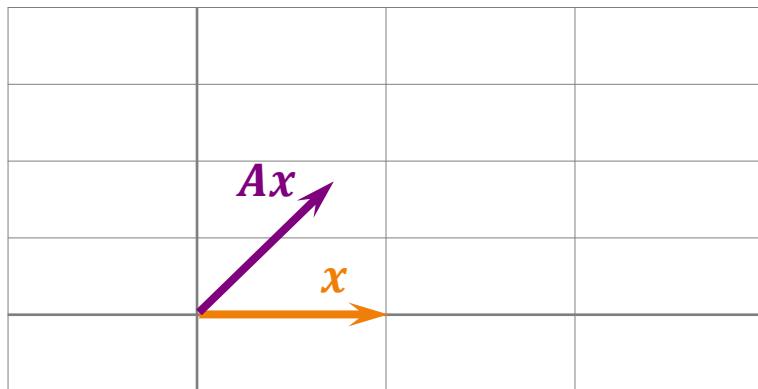


$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

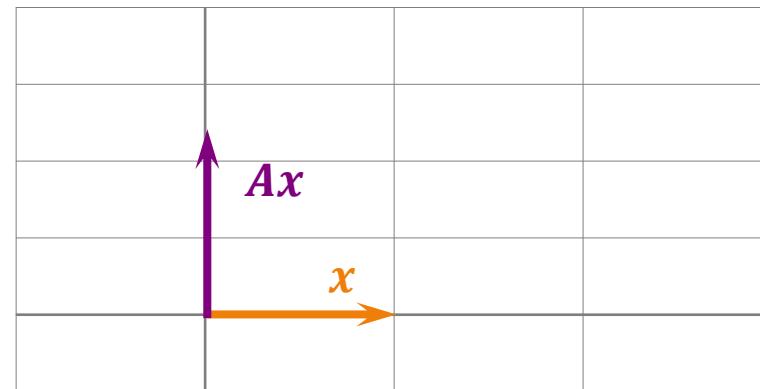


$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

TREINE:  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  QUAL RESULTADO  $Ax$ ?

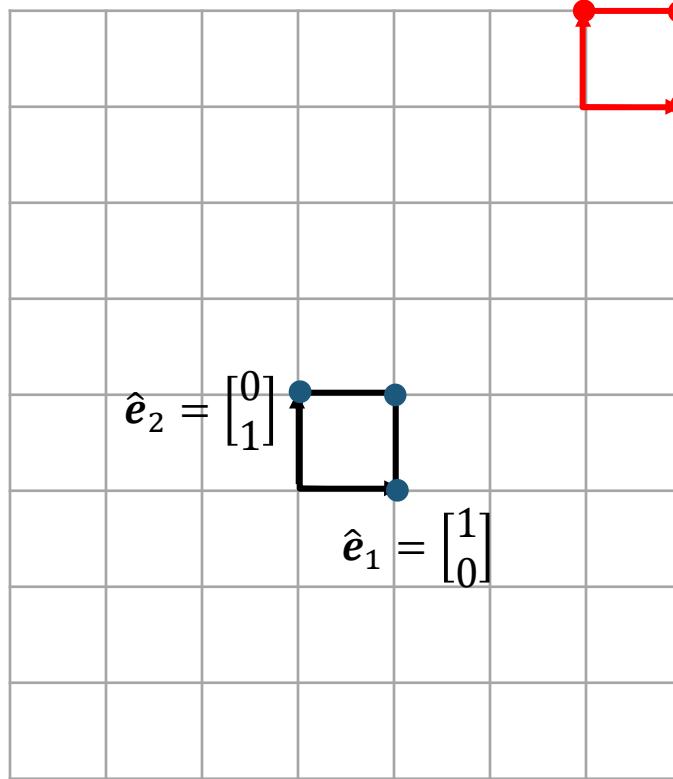


$$A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$$

# E SE EU QUISER TRANSLADAR ???



Ao multiplicar um vetor 2D por uma matriz 2x2 qualquer, você não consegue transladá-lo.

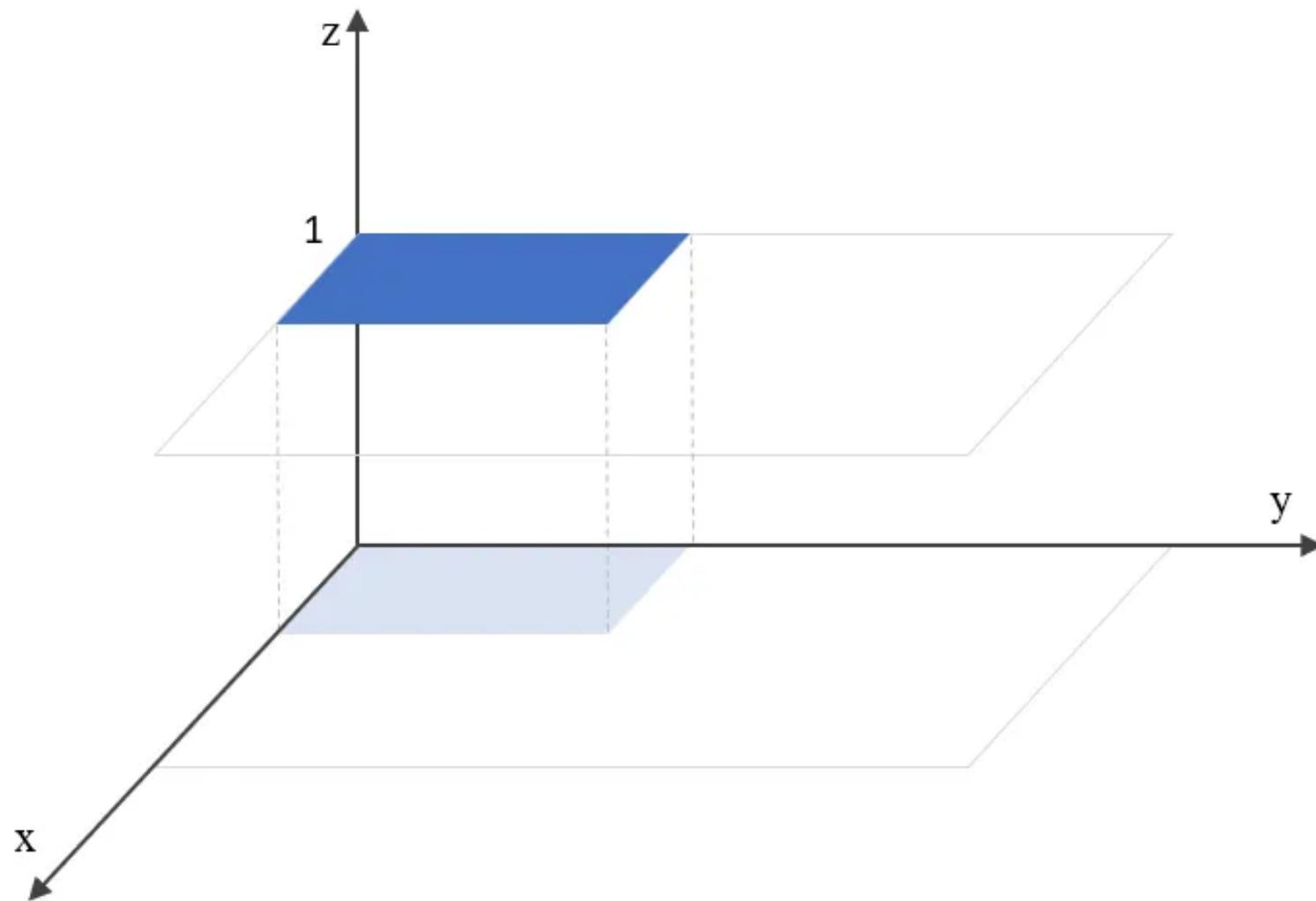
Na transformação linear: escalonamento, distorção e rotação, os vetores de base permanecem todos na mesma origem (0,0) antes e depois da transformação.

**Isso significa que o ponto (0,0) nunca muda de localização.** Para transladar, você precisa adicionar um vetor após a transformação da matriz...

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

nova localização após  
a transformação  
ANÁLISE ESTATÍSTICA DE DADOS

localização  
original





# TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA DA IMAGEM



Envie cada pixel  $p$  da posição original  $(x, y)$   
para a correspondente posição  
 $(x', y') = T(x, y)$  na imagem transformada

Escalonamento,  
distorção e rotação

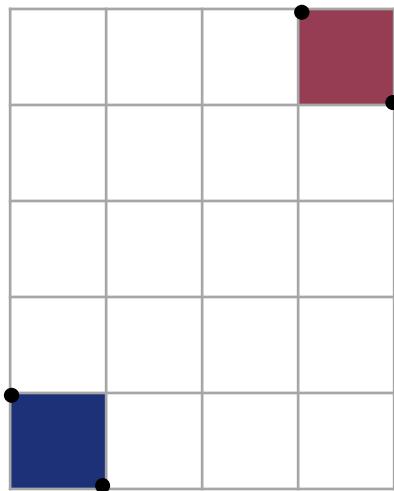
Translação



$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & l \\ a_{21} & a_{22} & l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

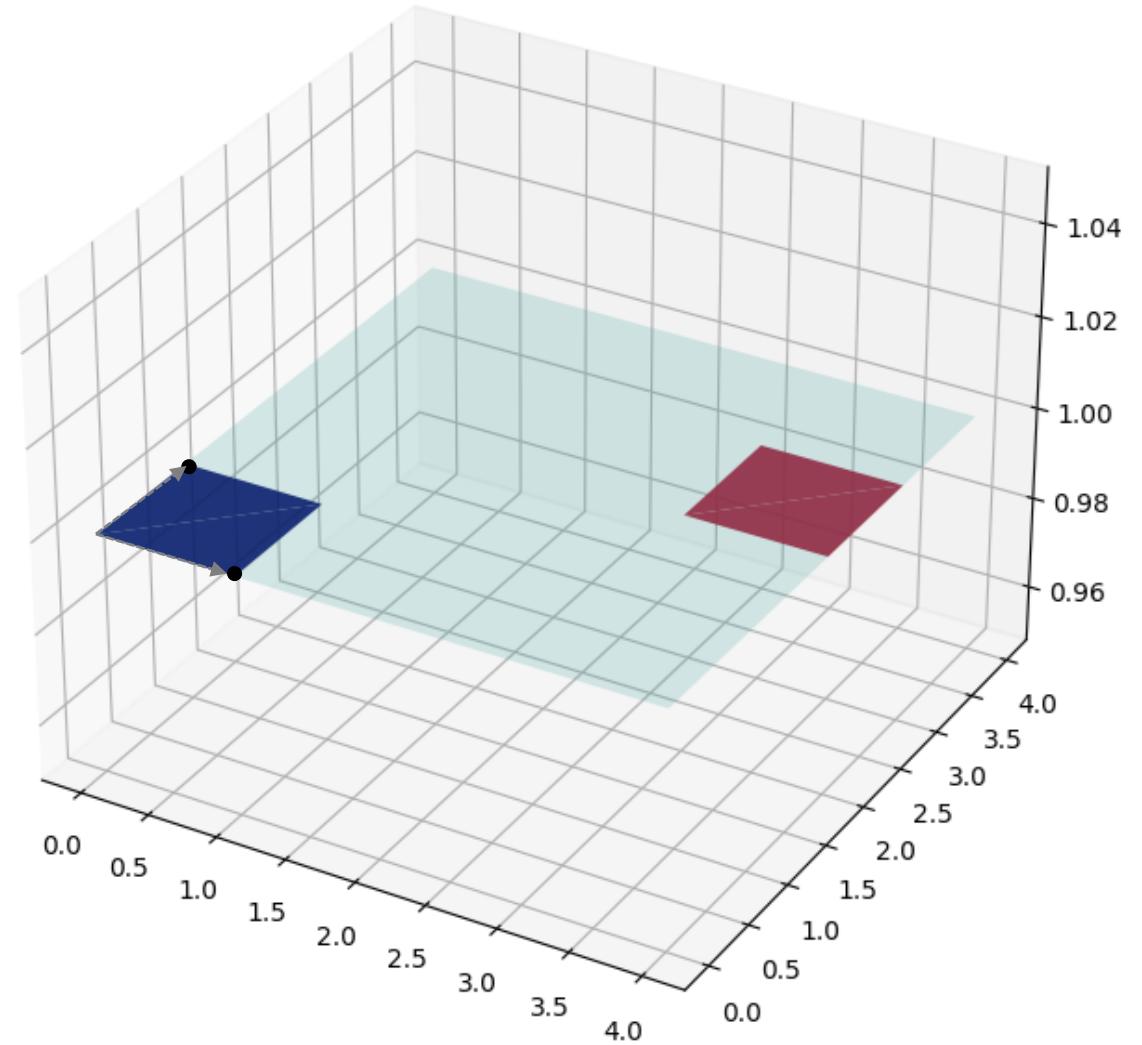
Fixando a imagem no plano  $z = 1$

# PORTANTO...



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$



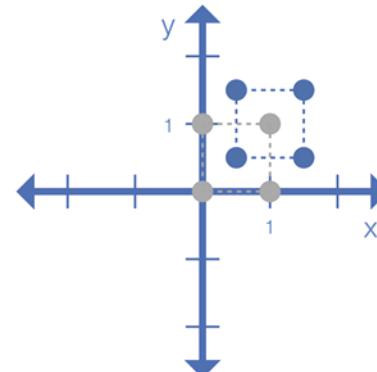
# TRANSFORMAÇÃO AFIM

Uma transformação afim é qualquer transformação que preserva a colinearidade (ou seja, todos os pontos que se encontram em uma linha inicialmente ainda permanecem em uma linha após a transformação) e razões de distâncias (por exemplo, o ponto médio de um segmento de linha permanece o ponto médio após a transformação).

Em geral, uma transformação afim é uma composição de rotações, translações, escalonamentos e distorções.

Translação

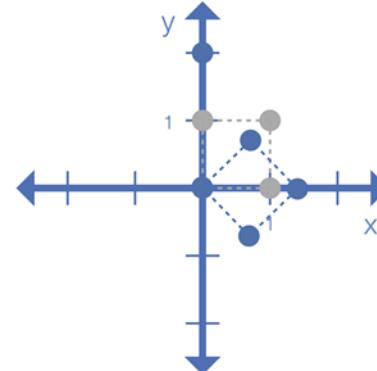
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotação

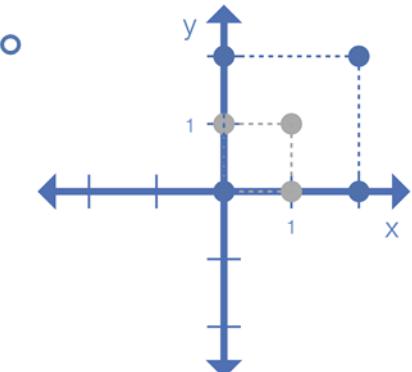
$$\begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = s = \sin(45^\circ)$$



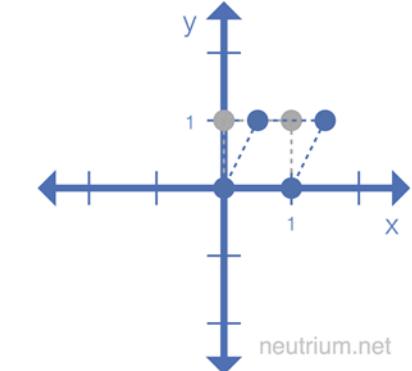
Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



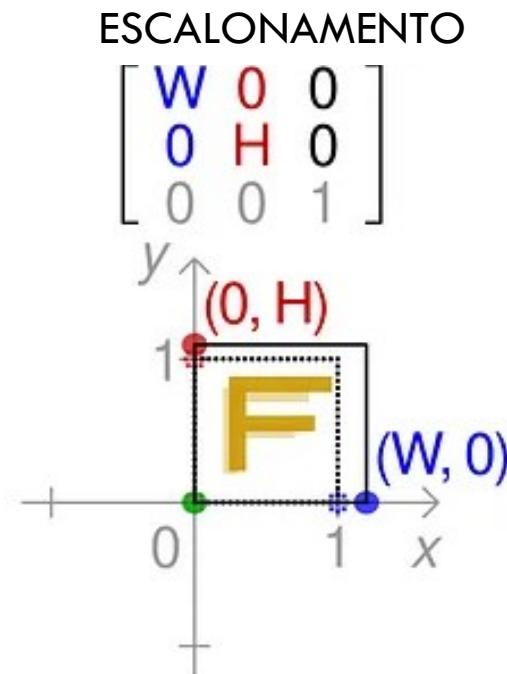
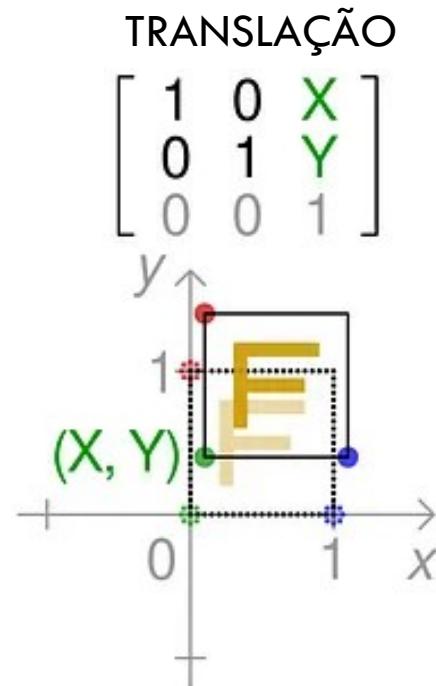
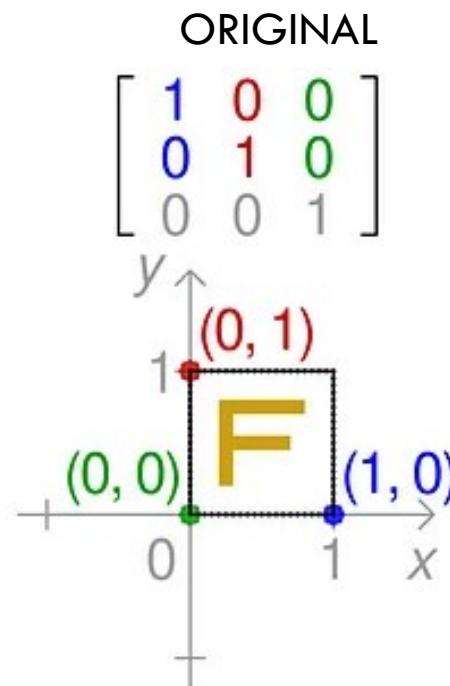
Distorção

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



neutrium.net

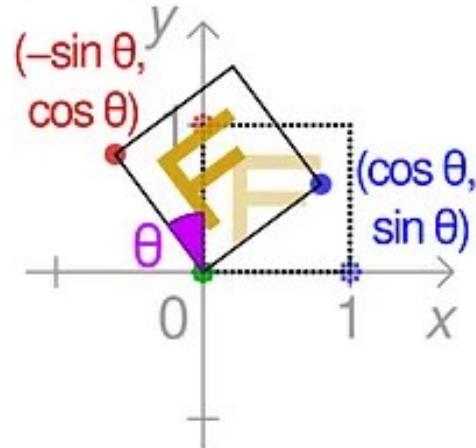
# TRANSLAÇÃO E ESCALONAMENTO



# ROTAÇÃO E DISTORÇÃO

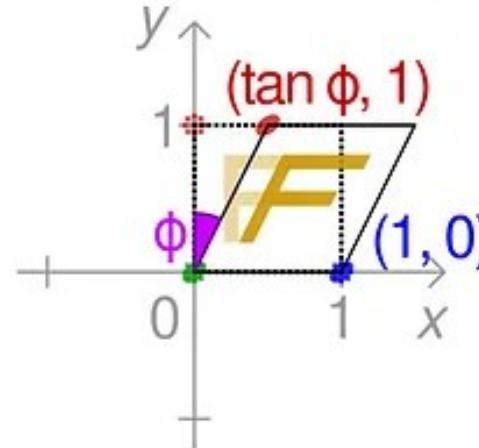
ROTAÇÃO EM  
TORNO DA ORIGEM

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



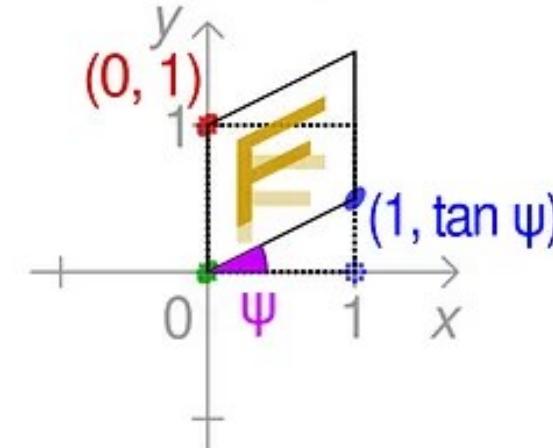
DISTORÇÃO EM TORNO  
EIXO X

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



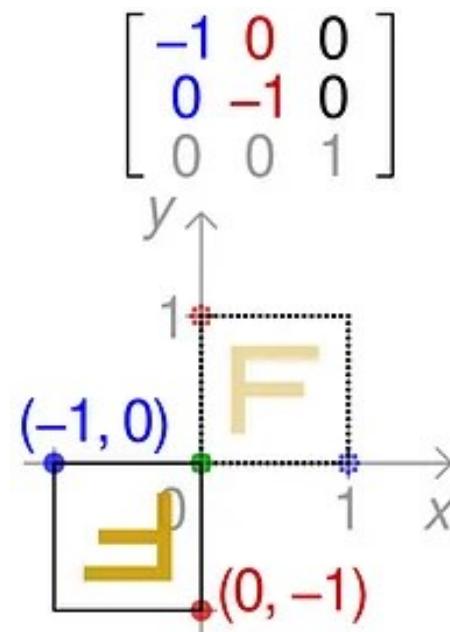
DISTORÇÃO EM TORNO  
EIXO Y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

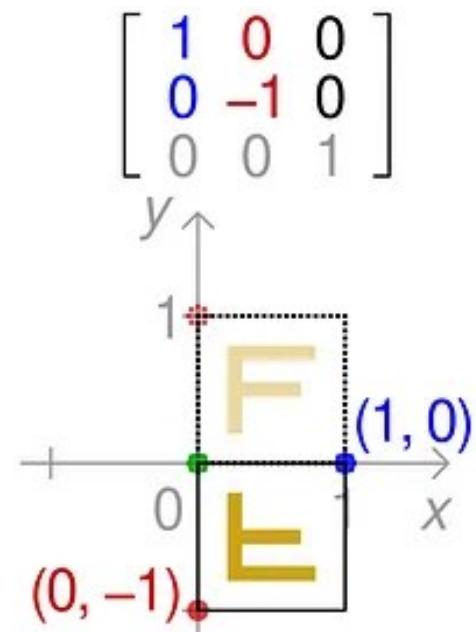


# REFLEXÃO

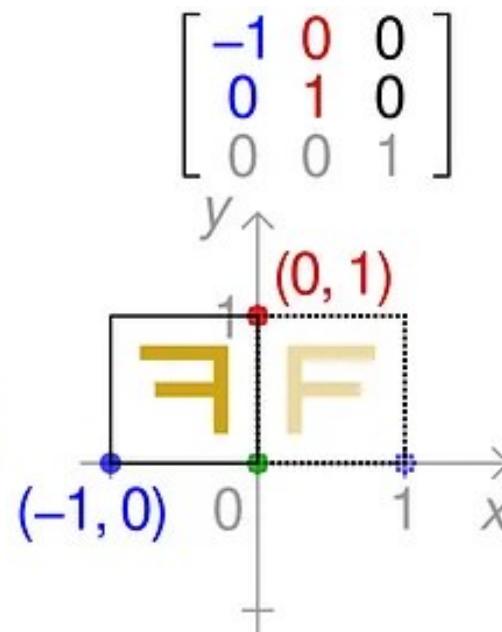
REFLEXÃO EM  
TORNO DA ORIGEM



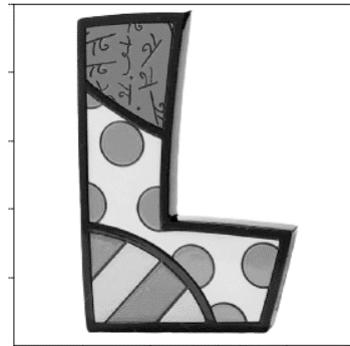
EM TORNO EIXO X



EM TORNO EIXO X



# POR EXEMPLO...



Sabendo que a letra L da figura ao lado sofreu seguinte transformação,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ onde } T \text{ é composta das matrizes}$$

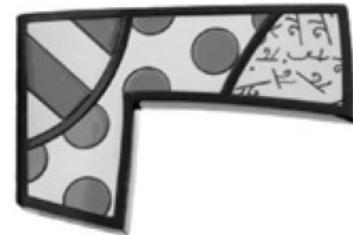
de escalonamento e rotação, respectivamente,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina a matriz  $T$  para as seguintes transformações,

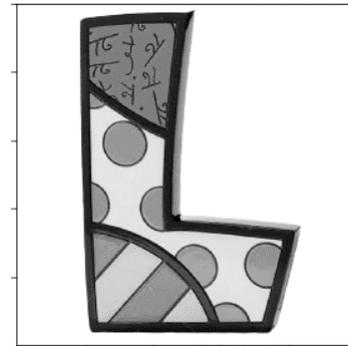


(✓)  $T = S$   
( )  $T = R$



( )  $T = S$   
(✓)  $T = R$

# POR EXEMPLO...



Sabendo que a letra L da figura ao lado sofreu seguinte transformação,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ onde } T \text{ é composta das matrizes}$$

de escalonamento e rotação, respectivamente,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina a matriz  $T$  para as seguintes transformações,



( )  $T = SR$   
(✓)  $T = RS$



(✓)  $T = SR$   
( )  $T = RS$

$$RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- **Revejam o material disponibilizado em aula.**
- **Refaçam exercícios.**

ACABOU...

Até a  
próxima  
semana!!!