Lektion 2

Die Basis, auf der viele Konzepte und Methoden der theoretischen Informatik aufbauen, wie z.B. Sprachen oder Automaten, sind die elementaren Grundbegriffe der Mathematik: Mengen, Relationen und Funktionen. Diese Grundbegriffe werden in dieser Lektion zunächst wiederholt.

Bei den meisten praktischen Anwendungen und meistens auch in diesem Semester hat man es mit endlichen Mengen zu tun. Unendliche Mengen sind Ihnen aber auch aus der Mathematik vertraut, z.B. die Mengen der natürlichen und der reellen Zahlen. Eine interessante Fragestellung ist die nach der "Größe" von unendlichen Mengen. In dieser Lektion werden Sie sehen, dass es dabei unterschiedliche "Größen" von Unendlichkeit gibt. Das wird später im Bereich der Berechenbarkeits-theorie auch eine Rolle spielen wird.

Kap. 2 Mathematische Grundbegriffe

Inhalt

- Mengen
- Relationen
- Funktionen
- Unendliche Mengen

2.1 Mengen

Eigenschaften von Mengen

Eine Menge ist eine Sammlung von Elementen. Elemente können alles mögliche sein: Zahlen, Zeichen, Symbole, Gegenstände, Menschen, selbst wieder Mengen, …. Die wesentlichen Eigenschaften von Mengen sind:

- Die Elemente sind nicht mit einer Anordnungsreihenfolge versehen, z.B. beschreiben $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ die gleiche Menge.
- Ein Element kann höchstens einmal in einer Menge enthalten sein. Nimmt man das Element a zur Menge $\{a, b\}$ dazu, bleibt es die gleiche Menge $\{a, b\}$. D.h. $\{a,a,b\} = \{a, b\}$.

Grundmengen von Zahlen

Für Grundmengen von Zahlen verwenden wir die üblichen Bezeichnungen aus der Mathematik.

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen 0, 1, 2, 3, …. (bei uns immer einschließlich 0)
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen (als Bruch darstellbare Zahlen)
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen

Mengenoperationen

Folgende Mengenoperationen sollten Ihnen schon aus der Mathematik vertraut sein:

$\emptyset$	**leere Menge**, könnte auch als { } notiert werden.
$x \in A$	*x* ist **Element** der Menge *A*
$\mid A \mid$	**Kardinalität** der Menge, d.h. Anzahl der Elemente
$A \subseteq B$	*A* ist **Teilmenge** von *B* (*A* und *B* können gleich sein)
$A \subset B$	*A* ist **echte Teilmenge** von *B* (*A* und *B* nicht gleich)
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**: Menge aller Elemente, die in *A* oder in *B* (oder in beiden) enthalten sind
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	**Schnittmenge**: Menge aller Elemente, die sowohl in Menge *A* als auch in Menge *B* enthalten sind
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	**Differenzmenge** ("*A* ohne *B*"): alle Elemente, die in *A*, aber nicht in *B* enthalten sind.
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$	**kartesisches Produkt**: Menge aller Paare (*a*,*b*) die mit einer ersten Komponente *a* aus *A* und einer zweiten Komponente *b* aus *B* gebildet werden können.
$\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$	**Potenzmenge**: Menge aller Teilmengen von *A*. Die leere Menge $\emptyset$ und die komplette Menge *A* sind immer als Teilmenge enthalten.

Aufgabe 2.1 - Mengenoperationen

Gegeben sind folgende Mengen:

A = {1, b }

B = { 1, 3.14, 7 }

Geben Sie dazu folgende Mengen an:

$A \cup B$

$A \cap B$

$B \setminus A$

$A \times B$

$\wp(A)$

$\wp(B)$

Aufgabe 2.2 - Kardinalität des kartesischen Produkts

Die Mengen A und B seien endliche Mengen. Was ist $|A \times B|$, abhängig von $|A|$ und $|B|$. D.h. wie viele Elemente hat das kartesische Produkt $A \times B$, abhängig von der Größe von A und B?

Eigenschaft 2.3 - Kardinalität der Potenzmenge

Für die Potenzmenge $\wp(M)$ einer endlichen Menge M gilt.

$$|\wp(M)| = 2^{|M|}$$

D.h. eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen (deswegen die Bezeichnung "Potenzmenge").

Wie lässt sich diese Eigenschaft beweisen? Ein typisches Beweisverfahren dafür ist die *vollständige Induktion*.

Beweis:

Vollständige Induktion über die Anzahl n der Elemente der Menge M:

Fall $n = 0$, d.h. $M = \emptyset$

Die leere Menge hat nur sich selbst als Teilmenge, d.h. $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$|\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$ ✓

Fall $n > 0$, d.h. Menge nicht leer, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$, wobei $n \geq 1$.

Verwendbare *Induktionshypothese*: Eine Menge mit n-1 Elementen hat 2^{n-1} Teilmengen.

Wir wählen nun eines der Elemente aus M aus, z.B. a_n. Die Teilmengen von M können nun in zwei Arten aufgeteilt werden:

P^+ Menge aller Teilmengen, die a_n enthalten

P^- Menge aller Teilmengen, die a_n nicht enthalten

P^- ist nicht anderes als die Menge aller Teilmengen von $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Nach Induktionshypothese sind das 2^{n-1} Teilmengen, da diese Menge n-1 Elemente hat.

Wie viele Teilmengen beinhaltet P^+ ? Die Teilmenge aus P^+ kann man bilden, indem man jeweils eine Teilmenge aus P^- nimmt und das Element a_n dazu nimmt. Somit ergeben sich für P^+ auch 2^{n-1} Teilmengen.

Also hat M insgesamt $|P^+| + |P^-|$ Teilmengen, d.h. $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ Teilmengen. ✓

Induktionsschluss: Jede Menge mit $|M| = n$ Elementen hat 2^n Teilmengen. □

Anmerkung

Wenn Sie ein Programm schreiben müssten, das alle Teilmengen einer Menge generiert, könnten Sie das in ganz ähnlicher Weise rekursiv implementieren, mit dem gleichen Ansatz, der im Induktionsbeweis verwendet wurde.

2.2 Relationen

Eine Relation ist, ganz allgemein gesehen, eine Beziehung zwischen Elementen einer Menge. Beispielsweise ist die ≤-Relation eine Beziehung zwischen zwei Zahlen. Mathematisch wird eine Relation folgendermaßen als Menge der Paare von Elementen definiert, die zueinander in Beziehung stehen.

Definition 2.4 - Relation

- Eine zweistellige **Relation *R*** über einer Grundmenge M ist eine Menge von Paaren (x,y) mit $x \in M$ und $y \in M$, d.h.

  $$R \subseteq M \times M.$$

- *analog sind n-stellige Relationen als Teilmenge*

  $$R \subseteq \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n \text{ mal}}$$

  definiert.

Beispiel 2.5 - ≤-Relation

Die ≤-Relation auf natürliche Zahlen ist durch folgende Menge von Paaren gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Relation} \leq = \{ & (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), \ldots \\ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \ldots \\ & (2,2), (2,3), (2,4), \ldots \\ & \ldots \\ & \} \end{aligned}$$

Anmerkung

- Analog können Relationen $R \subseteq A \times B$ zwischen unterschiedlichen Mengen A und B definiert werden. In dem Fall ist die erste Komponente der Paare aus A und die zweite aus B.
- Relationen können im Allgemeinen n-zu-m-Beziehungen zwischen den

Elementen beschreiben, d.h. ein Wert *a* kann zu mehreren Werten b_1, b_2, … in Beziehung stehen und es kann mehrere Werte a_1, a_2, .. geben, zu denen ein Wert *b* in Beziehung steht.

Infix-Notation für Relationen

Bei Relationen verwendet man oft eine Infix-Notation: Statt

$(x,y) \in R$

schreibt man dann

$x\ R\ y.$

Beispielweise schreibt man bei der $\leq$-Relation üblicherweise

$1 \leq 3$

statt

$(1,3) \in \ \leq .$

Aufgabe 2.6 - Relationen

- Nennen Sie drei Beispiele für Relationen auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.
- Nennen Sie drei Beispiele von Relationen mit der Menge der aktuell lebenden Menschen als Grundmenge.

2.3 Funktionen

Den Begriff der Funktion kennen Sie auch schon aus der Schule und aus Mathe-Vorlesung.

Relationen können im allgemeinen *n*-zu-*m*-Beziehungen zwischen den Elementen sein, Funktionen sind dagegen spezielle Relationen, bei denen einem Wert (Argument) maximal ein Wert zugeordnet sein kann (Funktionswert).

Definition 2.7 - Funktion

- Eine **Funktion** $f : A \to B$ ist eine zweistellige Relation $f \subseteq A \times B$ mit der Eigenschaft:

  $$(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2$$

- Ist $(a,b) \in f$, dann heißt b **Funktionswert** zu a, notiert als $\mathbf{f(a) = b}$.

Anmerkungen

- Bei einer Funktion $f : A \to B$ ist es also nicht möglich, dass einem Wert $a \in A$ mehrere unterschiedliche Werte $b_i \in B$ als Funktionswert zugeordnet sind.
- Bei Funktionen ist es nach der hier verwendeten Definition möglich, dass einem Argument kein Funktionswert zugeordnet ist. In der Mathematik wird der

Begriff der Funktion teilweise auch so definiert, dass es immer einen Funktionswert geben muss. Im Bereich der theoretischen Informatik und der Berechenbarkeitstheorie ist aber die oben angegebene Definition gebräuchlich.

Definition 2.8 - totale und partielle Funktionen

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **total**, wenn es für jedes Argument $a \in A$ einen Funktionswert $f(a) \in B$ gibt. Andernfalls heißt die Funktion f **partiell.**
- Gibt es für ein $a \in A$ keinen Funktionswert $f(a)$, dann ist f an der Stelle a **undefiniert**, notiert als $f(a) = \perp$.

Aufgabe 2.9 - totale und partielle Funktionen

(1) Nennen Sie Beispiele für **totale Funktionen.**

(2) Nennen Sie Beispiele **partielle Funktionen**.

Anmerkung 2.10 - n-zu-m-Relationen als Funktionen

Bei der mathematischen Beschreibung könnte man alles, was man mit Relationen modelliert, auch als Funktionen definieren. Wie schon zuvor beschrieben, stellt eine Relation im Allgemeinen eine *n*-zu-*m*-Beziehung dar. D.h. bei einer Relation können einem Wert mehreren anderen Werten zugeordnet sein, bei einer Funktion dagegen nicht. Aber mit einem kleinen Trick kann man eine *n*-zu-*m*-Beziehung auch als Funktionen definieren:

Wir ordnen funktional einem Wert *a* die Menge aller Werte zu, die zu *a* in Relation stehen. Der zugeordnete Wert ist also eine Menge, ein Element aus der Potenzmenge. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ entspricht einer Funktion

$f_R : A \rightarrow \wp(B)$,

wobei

$f_R(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\}$

Beispiel 2.11 - n-zu-m-Relation als Funktion

Wir betrachten die Relation "ist-Teiler-von" auf der Grundmenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Als Menge von Paaren entsprechend Definition 2.4 wäre die Relation

$$\textit{ist-Teiler-von} \subseteq M \times M$$

folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \textit{ist-Teiler-von} = \{ \quad & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ & (2,2), (2,4), (2,6), \\ & (3,3), (3, 6), \\ & (4,4), \\ & (5,5) \\ & (6,6) \} \end{aligned}$$

Als Funktion könnte die ist-Teiler-von-Bezeihung auch so formuliert werden:

$f_{\text{ist-teiler-von}} : M \to \wp(M)$

wobei

$f_{\text{ist-teiler-von}}(1) = \{1,2,3,4,5,6\}$
$f_{\text{ist-teiler-von}}(2) = \{2, 4, 6\}$
$f_{\text{ist-teiler-von}}(3) = \{3, 6\}$
$f_{\text{ist-teiler-von}}(4) = \{4\}$
$f_{\text{ist-teiler-von}}(5) = \{5\}$
$f_{\text{ist-teiler-von}}(6) = \{6\}$

2.4 Unendliche Mengen

Aus der Mathematik sind Sie es gewohnt, mit unendlichen Mengen zu arbeiten, z.B. mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder der Menge der Primzahlen. Befasst man sich genauer mit unendlichen Mengen, dann kann man einige Überraschungen erleben – z.B. wenn sich plötzlich unerwartete Konsequenzen ergeben (siehe unten bei Hilberts Hotel).

Auch die Frage nach der Kardinalität, d.h. wie "groß" ist eine unendliche Menge, ist nicht so einfach. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind beides unendliche Mengen. Sind es gleich viele oder gibt es mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen? Und gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Gibt es verschiedene Arten von Unendlichkeit?

David Hilbert (1862-1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit, der sich auch mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigt hat. Im Zusammenhang mit unendlichen Mengen hat er dabei folgendes Gedankenexperiment erdacht.

Aufgabe 2.12 - Hilberts Hotel

Es geht um ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern und um unendlich viele Gäste.

- In Hilberts Hotel gibt es unendlich viele Zimmer (nur Einzelzimmer). Die Zimmer sind durchnummeriert mit natürlichen Zahlen, d.h. Z_0, Z_1, Z_2, ...
- Das Hotel ist komplett belegt mit unendlich vielen Gästen G_0, G_1, G_2, …

Sie übernehmen jetzt die Rolle des Hoteldirektors in der angenehmen Situation, dass alle Zimmer belegt sind. Als Hoteldirektor kommen nun folgende Herausforderungen auf Sie zu:

(1) Es trifft ein neuer Gast ein. Kann der Gast noch im Hotel untergebracht werden?

(2) Es trifft ein Bus mit unendlich vielen weiteren Gästen {H_0, H_1, H_2, …} ein. Jeder Gast hat im Bus eine natürliche Zahl als Sitzplatznummer. Können alle neuen Gäste im Hotel untergebracht werden?

(3) Es trifft nicht nur einer, sondern es treffen unendlich viele solcher Busse {B_0, B_1, B_2, …} mit jeweils unendlich vielen Gästen ein. Können alle neuen Gäste im Hotel untergebracht werden?

Lösung für Teilaufgabe (1) - ein neuer Gast:

Als mathematisch versierter Hoteldirektor haben Sie natürlich kein Problem, einen weiteren Gast unterzubringen. Allerdings müssen Sie die bisherigen Gäste etwas belästigen:

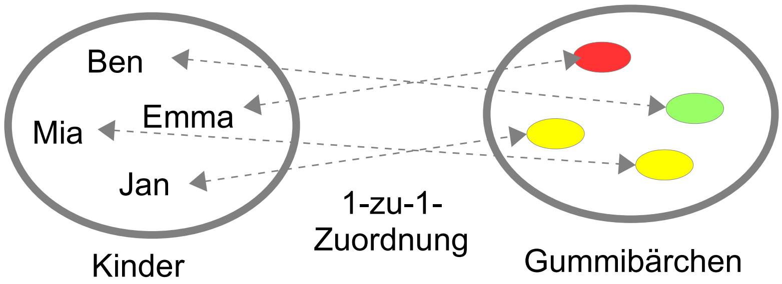
- Jeder Gast muss umziehen. War ein Gast bisher in Zimmer Z_n, muss er ins Nachbarzimmer Z_{n+1} wechseln.
- Zimmer Z_0 wird dadurch frei, dort kann der neue Gast untergebracht werden.

Erahnen Sie auch schon die Lösungen für den Bus mit unendlich vielen neuen Gäste bzw. für die unendlich vielen Busse?

2.4.1 Kardinalität unendlicher Mengen

Doch nun zur Frage nach der "Größe" von unendlichen Mengen. Wann sind zwei Mengen gleich groß? Die mathematische Definition dafür ist einfach: Wenn es eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen den Elementen beider Mengen gibt, sind es gleich viele (in der Mathematik nennt man das eine bijektive Funktion).

Im Endlichen ist das ganz anschaulich: Nehmen Sie an, es ist ein Kindergeburtstag mit einer Menge von Kindern und einer Menge von Gummibärchen:



Wenn Sie eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen beiden Mengen bilden können, d.h. zu jedem Kind gibt es ein Gummibärchen und zu jedem Bärchen ein Kind (nichts bleibt übrig), wissen Sie, dass es gleich viele sind.

Bei unendlichen Mengen macht man es genauso. Zwei Mengen haben die gleiche Kardinalität, wenn es eine Bijektion, d.h. eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen beiden Mengen gibt.

Es lassen sich dann mindestens zwei "Größen" für unendliche Mengen unterscheiden: *abzählbar unendlich* und *überabzählbar unendliche* Mengen, abhängig davon, ob es gleich viele Elemente sind wie natürliche Zahlen oder mehr.

Definition 2.13 - Abzählbare und überabzählbare Mengen

- Eine Menge *M* heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie gleich mächtig ist wie die Menge $\mathbb{N}$ der Natürlichen Zahlen, d.h. wenn es eine bijektive Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ gibt (1-zu-1-Zuordnung): jedem Element $m \in M$ ist eine Aufzählungsposition $f(m)$ zugeordnet und für jede Position *i* gibt es auch einen Wert $m_i \in M$.
- Eine Menge M heißt **überabzählbar unendlich**, wenn sie unendlich und nicht abzählbar ist, d.h. es gibt keine 1-zu-1-Zuordnung zu den Natürlichen Zahlen.

Abzählbar unendlich heißt also, dass es gleich viele sind wie es natürliche Zahlen gibt. Man kann dann gedanklich eine unendliche Liste ("Aufzählung") aufstellen,

Position	Wert
0.	m_0
1.	m_1
2.	m_2
3.	m_3
4.	m_4
5.	m_5
...	...

in der alle Werte enthalten sind. Zu jeder natürlichen Zahl gibt es einen Wert in der Liste und jeder Wert ist an irgend einer Indexposition in der Aufzählung enthalten.

Überabzählbar unendlich heißt, dass es mehr Elemente sind als natürliche Zahlen, d.h. es ist nicht möglich, so eine Aufzählungsliste aufzustellen.

Beispiel 2.14 - Abzählbarkeit der Quadratzahlen

Die Menge der Quadratzahlen ist abzählbar unendlich, es gibt also genauso viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen.

Beweis: Wir können folgende Aufzählung angeben:

Position	Wert
0.	0
1.	1
2.	4
3.	9
4.	16
5.	25
...	...

Jede Quadratzahl k^2 taucht irgendwo in der Liste auf (an Position *k*) und jede

Position in der Liste ist mit einer Quadratzahl belegt, d.h. es gibt eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen Quadratzahlen und natürlichen Zahlen.

Aufgabe 2.15 - Abzählbare und überabzählbare Mengen

Welche Mengen sind *abzählbar* unendlich, welche sind *überabzählbar* unendlich?

(1) Menge der Primzahlen

(2) $\mathbb{Z}$ ganze Zahlen

(3) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ Paare von natürlichen Zahlen

(4) $\mathbb{Q}$ rationale Zahlen, Bruchzahlen

(5) $\mathbb{R}$ reelle Zahlen

(6) Menge der *endlich langen* 0/1-Folgen (z.B. 0, 1, 010, 1111 sind endlich lange 0/1-Folgen)

(7) Menge der *unendlich langen* 0/1-Folgen (z.B. 1010101010… ist eine unendlich lange 0/1-Folge, die immer abwechselnd 1 und 0 hat).

2.4.2 Überabzählbar unendliche Mengen

Zu zeigen, dass eine Menge *abzählbar* unendlich ist, ist im Prinzip relativ einfach: Man muss lediglich eine Regel dafür angeben, wie eine Aufzählungsliste aufgestellt werden kann, in der jeder Wert enthalten ist.

Wie kann man aber beweisen, dass eine Menge *überabzählbar* ist, d.h. dass es keine solche Aufzählung geben kann? Dazu muss man etwas tiefer in die beweistechnische Trickkiste greifen: zum sog. *Diagonalisierungsverfahren.*

Eigenschaft 2.16 - Überabzählbar unendliche Mengen

- Die Menge der **unendlich langen 0/1-Folgen** ist **überabzählbar** unendlich.
- Die **Potenzmenge der Natürlichen Zahlen** $\wp(\mathbb{N})$, d.h. die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, ist **überabzählbar** unendlich

Um zu zeigen, dass eine Mengen überabzählbar unendlich ist, wird folgendermaßen vorgegangen.

Diagonalisierungsverfahren nach Cantor

Das Verfahren funktioniert nach dem Prinzip *Beweis durch Widerspruch*.

(1) Wir nehmen zunächst an, dass die Menge abzählbar unendlich ist.

(2) Wenn das der Fall ist, dann muss es eine Aufzählungsliste geben, in der jedes Element der Menge an irgendeiner Position vorkommt.

(3) Wir geben dann ein Verfahren an, wie man, ausgehend von einer beliebigen

gegebenen Auflistung, immer einen Wert bestimmen kann, der zur Menge gehört, aber sich von jedem Eintrag in der gegebenen Aufzählungsliste unterscheidet.

(4) Der Widerspruch besteht somit darin, dass der gebildete Wert in der Liste sein müsste, es aber offensichtlich doch nicht ist. Da man das für jede beliebige Aufzählung so machen kann, muss die Annahme, dass eine Auflistung aller Werte gebildet werden kann, falsch gewesen sein.

Wir wenden Cantors Diagonalisierungsverfahren jetzt auf die Menge der unendlich langen 0/1-Folgen an:

Beweis: Menge der unendlich langen 0/1-Folgen ist überabzählbar

(1) **Annahme**: Die Menge der unendlich langen 0/1-Folgen ist abzählbar unendlich.

(2) D.h. es existiert eine Aufzählungsliste mit allen Folgen w_i

w_0 : $\mathbf{x_{00}}x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}\ldots$ z.B. 0000...

w_1: $x_{10}\mathbf{x_{11}}x_{12}x_{13}x_{14}\ldots$ z.B. 1000...

w_2 : $x_{20}x_{21}\mathbf{x_{22}}x_{23}x_{24}\ldots$ z.B. 1110...

w_3: $x_{30}x_{31}x_{32}\mathbf{x_{33}}x_{34}\ldots$ z.B. 1110...

…

w_i ist die Zeichenfolge an Position i der Liste, x_{ij} ist jeweils ein Zeichen 0 oder 1.

(3) Wir bilden nun eine neue Zeichenfolge w' auf folgende Weise:

w': $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{00}}\,\overline{\mathbf{x}}_{11}\,\overline{\mathbf{x}}_{22}\,\overline{\mathbf{x}}_{33}\,\overline{\mathbf{x}}_{44}\ldots$

wobei $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$ sei. D.h. wir nehmen jeweils die Zeichen auf der Diagonale und vertauschen 0 und 1. Das ergibt wieder ein unendlich lange 0/1-Folge, die somit auch irgendwo in der Liste enthalten sein sollte. Diese Folge w' unterscheidet sich aber von jeder Folge w_k innerhalb der gegebenen Liste an der Diagonalstelle k (da $\overline{x}_{kk} \neq x_{kk}$).

(4) Egal wie eine Aufzählungsliste gegeben wäre, könnte auf diese Weise immer noch eine weitere unendlich lange 0/1-Folge gebildet werden, die doch nicht in der Liste enthalten ist.

Die Annahme, dass es eine Aufzählungsliste gibt, die alle Folgen enthält, muss also falsch gewesen sein. Die Menge der unendlich langen 0/1-Folgen ist somit **überabzählbar** unendlich. ☐

(Nicht erschrecken, wenn Sie das nicht gleich verstehen – das ist schon ein recht trickreiches Verfahren, das man sich in Ruhe und ggf. auch mehrfach anschauen muss. Wenn man's dann verstanden hat, ist es aber eigentlich ganz einfach – genial einfach.

Anmerkung

Dieses Verfahren wird auch als *Cantors zweites Diagonalisierungsargument* bezeichnet. Es wurde vom Mathematiker Georg Cantor (1845-1918), einem der Begründer der Mengenlehre, eingeführt, um u.a. die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu beweisen.

Beweis: $\wp(\mathbb{N})$ ist überabzählbar unendlich

Wenn wir jetzt wissen, dass es überabzählbar unendlich viele unendlich lange 0/1-Folgen gibt, lässt sich recht einfach daraus folgern, dass es auch überabzählbar unendlich viele Teilmengen der Natürlichen Zahlen gibt.

Wir verwenden eine typische Vorgehensweise der Mathematik und theoretischen Informatik, die **Problemreduktion**: Ein Problem wird auf ein anderes, schon gelöstes Problem zurückgeführt:

Jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ kann eindeutig durch eine sog. charakteristische unendliche 0/1-Folge

$$w_M = \mathbf{x_{M0}} x_{M1} x_{M2} x_{M3} x_{M4} \ldots$$

repräsentiert werden (sog. *charakteristischer Vektor*[1]), wobei

$$x_{Mk} = 1, \text{ falls } k \in M \quad \text{und} \quad x_{Mk} = 0 \text{ falls } k \notin M \,.$$

Jede unendlich lange 0/1-Folge repräsentiert somit genau eine Teilmenge der natürlichen Zahlen und zu jeder Teilmenge gibt es eine unendlich lange Folge.
Beispiele:

Teilmenge	charakteristische Folge
{0, 1, 2}	1110000000000000...
{0, 2, 4, 8, 10, …} (gerade Zahlen)	1010101010101010...
$\mathbb{N}$ (alle natürlichen Zahlen)	1111111111111111...
$\varnothing$	0000000000000000...

Da es überabzählbar viele unendliche 0/1-Folgen gibt und zu jeder 0/1-Folge eine Teilmenge, gibt es folglich auch überabzählbar viele Teilmengen von natürlichen Zahlen. □

2.4.3 Ausblick: Nicht berechenbare Funktionen

Über die Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von Mengen lässt sich eine grundlegende Aussage der Berechenbarkeitstheorie beweisen, nämlich die, dass es Funktion gibt, die nicht berechenbar sind.

Wir betrachten dabei als Basis für Berechenbarkeitsuntersuchungen eine sehr einfache Art von Programmen: Ein Programm bekommt eine natürliche Zahl *n* als Eingabe und berechnet daraus eine natürliche Zahl *n'* als Ergebnis.

Das wirkt zunächst sehr primitiv, aber da man fast alles durch natürliche Zahlen

1 Beim Programmieren kennt man analog die Bitvektordarstellung von (endlichen) Mengen

codieren kann, ist es prinzipiell gar keine so große Einschränkung.

- Jedes Programm P berechnet somit ein Funktion f_P: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
  Die Funktion kann auch partiell sein, wenn das Programm bei manchen Eingabewerten nach endlicher Zeit kein Ergebnis liefert, z.B. wegen Endlosschleife oder Endlosrekursion.
- Ein Programm ist immer eine endlich lange Zeichenfolgen. Analog wie bei den endlich langen 0/1-Folgen kann gezeigt werden, dass die Menge der möglichen **Programme abzählbar unendlich** ist.
- Mit dem Diagonalisierungsverfahren lässt sich zeigen, dass die Menge der **Funktionen f:** $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **überabzählbar unendlich** ist (siehe später im Semester im Kapitel Berechenbarkeit).

Es gibt also mehr Funktionen als mögliche Programme. Somit muss es Funktionen geben, für die es kein Programm gibt, die also nicht berechenbar sind.

Fazit zu Lektion 2

Diese Fragen sollten Sie nun beantworten können

- Was ist das kartesische Produkt von Mengen? Was ist die Potenzmenge einer Menge? Welche Eigenschaften haben sie.
- Was ist ein Relation und eine Funktion?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Relationen und Funktionen? Was ist der wesentliche Unterschied zwischen einer Relation und einer Funktion?
- Was sind totale und was sind partielle Funktionen?
- Was sind abzählbar unendliche und überabzählbar unendliche Mengen?
- Wie funktioniert Cantors (zweites) Diagonalisierungsverfahren zum Beweis der Überabzählbarkeit von unendlichen Mengen?