Analysis 1 für Informatiker

Prof. Dr. Karin Lunde
Fakultät für Mathematik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften

Sommersemester 2022

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Pap15a] L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1-3*. Vieweg und Teubner, 2015.

Diese Lehrbuchreihe deckt alle Themen ab, die in den Mathe-Vorlesungen behandelt werden. Anschaulich und durch die vielen Beispiele und Aufgaben gut zum Selbststudium geeignet.

[Wes15] Th. Westermann. *Mathematik für Ingenieure*. Springer, 2015.

Sehr empfehlenswertes Lehrbuch, das sich mit der Auswahl der Beispiele insbesondere an technisch interessierte Studierende wendet. Es enthält viele Beispiele und Aufgaben und ist daher auch zum Selbststudium zu empfehlen.

Zur Veranschaulichung wird häufig das Mathe-Tool Maple verwendet; die angegebenen Beispiele sind jedoch auch ohne Tool sehr hilfreich und lassen sich zudem auch mit einem anderen Mathe-Tool wie MATLAB leicht nachvollziehen. Der Umgang mit MATLAB wird im 2. und 3. Semester auch Gegenstand der Vorlesung sein.

Ergänzende Literatur

[TT13] G. Teschl and S. Teschl. *Mathematik für Infomatiker Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer Vieweg, 2013.

[TT14] G. Teschl and S. Teschl. *Mathematik für Infomatiker Band 2: Analysis und Statistik*. Springer Vieweg, 2014.

In den beiden Lehrbüchern werden die mathematischen Grundlagen anschaulich, aber präzise vermittelt. Der Bezug zur Informatik wird anhand zahlreicher Beispiele und Anwendungen motiviert. In Band 1 findet man eine Einführung zu Relationen und ihren Eigenschaften sowie zu Zahlenfolgen und Reihen, ansonsten wird in diesem Semester vor allem Band 2 nützlich sein.

[IL14] S. Iwanowski and R. Lang. *Diskrete Mathematik mit Grundlagen*. Springer Vieweg, 2014.

Hier finden Sie u.a. eine gute Einführung zu Relationen und ihren Eigenschaften.

Formelsammlungen

[Pap17] L. Papula. *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Vieweg, 2017.

[Bar18a] H.-J. Bartsch. *Taschenbuch mathematischer Formeln (832 Seiten)*. Hanser, 2018.

[Bar18b] H.-J. Bartsch. *Kleine Formelsammlung Mathematik (300 Seiten)*. Hanser, 2018.

[Merz13] G. Merziger et al.. *Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik*. Binomi-Verlag, 2013.

Alle vier Formelsammlungen eignen sich als nützliches Nachschlagewerk (auch über die Mathe-Vorlesungen hinaus).

1 Die Menge der komplexen Zahlen

Auch mit den reellen Zahlen sind nicht alle Rechenoperationen möglich: Die Gleichung $x^2 = -a^2$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. Daraus gingen die komplexen Zahlen als Erweiterung des reellen Zahlbereichs hervor.

1.1 Definition und Darstellung der komplexen Zahl

Da die komplexen Zahlen geschaffen wurden, um Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen, gehen wir von der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

aus. Sie hat keine reelle Lösung. Ziehen wir rein formal auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel, so erhalten wir $x = \pm\sqrt{-1}$.

Definition 1.1 (Imaginäre Einheit) *Der formale Wurzelausdruck $\sqrt{-1}$ heißt imaginäre Einheit und wird durch das Symbol i gekennzeichnet:*

$$i = \sqrt{-1}\,,\ i^2 = -1$$

In der Mathematik schreibt man meist i für die imaginäre Einheit. Da aber i z.B. in der Elektrotechnik für die Stromstärke reserviert ist, gibt es als alternative Bezeichnung den Buchstaben j.

Zahlen der Form $a \cdot i$ bezeichnet man als *imaginäre Zahlen*. Zulässige Schreibweisen: ai, ia. Das Quadrat einer imaginären Zahl ist stets eine negative reelle Zahl: $(ai)^2 = a^2 i^2 = -a^2$.

Definition 1.2 (Komplexe Zahl) *Unter einer komplexen Zahl z versteht man die formale Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl*

$$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

Diese Darstellungsform wird auch als algebraische oder kartesische Form bezeichnet. x heißt der Realteil, *y der* Imaginärteil *der komplexen Zahl z: $x =$ Re (x), $y =$ Im (z). Die Menge aller komplexen Zahlen heißt $\mathbb{C}$.*

Definition 1.3 (Gleichheit) *Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ heißen gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.*

Definition 1.4 (Konjugiert komplexe Zahl) *Die komplexe Zahl $z^* = x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl.*

Definition 1.5 (Betrag) *Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ versteht man die Länge des zugehörigen Zeigers*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Gaußsche Zahlenebene Fasst man Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl als kartesische Koordinaten eines Punktes in der (x, y)-Ebene auf, so läßt sich jeder komplexen Zahl genau ein Punkt $P(x, y)$ zuordnen und umgekehrt. Die Bildebene heißt komplexe Ebene oder *Gaußsche Zahlenebene*, die beiden Koordinatenachsen werden als reelle und imaginäre Achse bezeichnet.

In Anwendungen werden komplexe Zahlen häufig als Zeiger dargestellt, das heißt als Pfeil vom Ursprung in den Punkt $P(x, y)$. Der Zeiger wird durch das Symbol $\underline{z}$ dargestellt.

Eine Zahl z und ihre konjugiert komplexe Zahl z^* liegen spiegelsymmetrisch zur x-Achse der Gaußschen Zahlenebene. Es ist stets $(z^*)^* = z$. Wenn $z^* = z$, dann ist z eine reelle Zahl.

Darstellungsformen Die kartesische oder algebraische Form $z = x + iy$ ist die Normalform einer komplexen Zahl.

Kartesische Form	$z = x + i \cdot y$	$x = \text{Re}\,(z)$ – Realteil von z $y = \text{Im}\,(z)$ – Imaginärteil von z
Trigonometrische Form	$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$	$r = \lvert z\rvert \geq 0$ – Betrag von z $\varphi = \arg(z)$ – Argument (Winkel, Phase) von z Hauptwert im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$
Exponentialform	$z = r \cdot e^{i\varphi}$	$r = \lvert z\rvert \geq 0$ – Betrag von z $\varphi = \arg(z)$ – Argument (Winkel, Phase) von z Hauptwert im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$

Umrechnungen Die Umrechnung von der kartesischen Form in die trigonometrische Form und umgekehrt erfolgt nach dem folgenden Schema.

a) Trigonometrische Form in die kartesische Form $z = x + iy$:

$$x = r \cdot \cos(\varphi),\ y = r \cdot \sin(\varphi)$$

b) Kartesische Form in die trigonometrische Form $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

Man berechnet dabei den Hauptwert des Winkels φ im Intervall $[0, 2\pi)$. Da der Arcustangens jedoch einen Wertebereich von $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hat, muss man unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem sich die komplexe Zahl befindet, eine der folgenden Formeln verwenden:

Quadrant	I	II, III	IV
Merkmale	$x, y > 0$	$x < 0$	$x > 0, y < 0$
φ	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y = 0, x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{wenn } y > 0, x = 0 \\ \pi & \text{wenn } y = 0, x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{wenn } y < 0, x = 0 \end{cases}$$

Werden die Hauptwerte des Winkels, wie in der Technik oft üblich, zwischen $-\pi < \varphi \leq \pi$ angegeben, so ergibt sich die Berechnungsformel

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{wenn } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{wenn } y < 0 \end{cases}$$

Für die reellen Zahlen ist $\varphi \in \{0, \pi\}$, für die imaginären Zahlen ist $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Grundrechenarten Die Addition und Subtraktion erfolgt bei komplexen Zahlen komponentenweise, also nach denselben Regeln wie bei zweidimensionalen Vektoren. Man kann also auch die entsprechenden Zeiger wie Vektoren addieren oder subtrahieren.

Definition 1.6 (Summe, Differenz) *Summe und Differenz zweier komplexer Zahlen z_1, z_2 werden nach den folgenden Vorschriften gebildet:*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Definition 1.7 (Produkt und Quotient) *Unter dem Produkt $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen verstehen wir die komplexe Zahl*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Unter dem Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ zweier komplexer Zahlen wird die komplexe Zahl

$$z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

verstanden, für $z_2 \neq 0$.

In der Praxis geht man bei der Quotientenbildung wie folgt vor:

a) Erweitern des Bruchs mit der konjugiert komplexen Zahl z_2^*;

b) Dadurch wird der Nenner zu einer reellen Zahl. Er dient als Faktor für den realen und imaginären Teil, die sich aus dem Ausmultiplizieren im Zähler ergeben.

Multiplikation und Division in trigonometrischer und exponentieller Darstellung In der trigonometrischen bzw. exponentiellen Schreibweise sind Multiplikation und Division besonders leicht durchführbar. Mit

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)),\ z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$$

ergibt sich

Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen:

a) Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und die Argumente addiert:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

b) Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Geometrische Deutung Die Rechenoperationen Multiplikation und Division lassen sich in anschaulicher Weise geometrisch deuten:

a) Multiplikation mit reeller Zahl a entspricht Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl, d.h. Streckung bzw. Stauchung um Faktor $|a|$ und Richtungsumkehr, wenn $a < 0$.

b) Multiplikation von z_1 mit einer komplexen Zahl $e^{i\varphi_2}$ mit Betrag 1 entspricht einer Drehung des Zeigers $\underline{z}_1$ um den Winkel φ_2.

c) Multiplikation von z_1 mit einer komplexen Zahl $r_2 e^{i\varphi_2}$ entspricht einer Drehung des Zeigers $\underline{z}_1$ um den Winkel φ_2, mit anschließender Streckung bzw. Stauchung um den Faktor r_2.

d) Die Division läßt sich auf die Multiplikation zurückführen:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1 \cdot e^{0 \cdot i}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = z_1 \cdot \left(\frac{1}{r_2} e^{-i\varphi_2} \right)$$

Rechengesetze Für die Grundrechenarten mit komplexen Zahlen gelten dieselben Gesetzmäßigkeiten wie für reelle Zahlen, das heißt für alle $u, v \in \mathbb{C}$ und alle reellen Zahlen λ, μ gilt:

1. Kommutativität: $u + v = v + u$
2. Assoziativität: $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Existenz des Nullelements: Es gibt ein Nullelement 0, so dass für alle $u \in V$: $u + 0 = u$
4. Existenz des inversen Elements: Zu jedem $u \in V$ gibt es ein Element $(-u)$, so dass $u + (-u) = 0$.
5. Distributivität I: $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$
6. Distributivität II: $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$
7. Assoziativität: $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
8. $1 \cdot u = u$.

Damit bilden die komplexen Zahlen einen Vektorraum, und es gelten dieselben Schlussfolgerungen (Rechengesetze) wie für reelle Zahlen.

Potenzieren und Wurzelziehen

Definition 1.8 (n-te Wurzel) *Eine komplexe Zahl z heißt eine n-te Wurzel aus a, wenn sie der algebraischen Gleichung $z^n = a$ genügt ($a \in \mathbb{C}$).*

Die n-te Potenz einer komplexen Zahl z berechnet man nach der Formel von DeMoivre:

$$\begin{aligned} z^n &= (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i(\varphi + \cdots + \varphi)} = r^n \cdot e^{in\varphi} \\ &= (r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

Die algebraische Gleichung $z^n = a = a_0 \cdot e^{i\alpha}$ hat im Komplexen genau n Lösungen (Wurzeln):

$$\begin{aligned} z_k &= r \cdot (\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)) \ \text{ mit} \\ r &= \sqrt[n]{a_0}, \quad \varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad \text{für } k = 0, ..., n-1 \end{aligned}$$

Auch im komplexen Bereich läßt sich jedes Polynom n-ten Grades in Linearfaktoren zerlegen:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot ... \cdot (z - z_n)$$

Die $z_1, z_2, ..., z_n$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms, also die Lösungen der algebraischen Gleichung.

Theorem 1.1 (Fundamentalsatz der Algebra) Eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

(mit $a_k \in \mathbb{C}$) besitzt in der Menge der komplexen Zahlen stets genau n Lösungen.

Natürlicher Logarithmus Jede komplexe Zahl ist in ihrer Exponentialform

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darstellbar. Unter ihrem natürlichen Logarithmus verstehen wir die unendlich vielen Zahlen

$$\ln(z) = \ln(r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)}) = \ln(r) + \ln(e^{i(\varphi+2k\pi)}) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi)$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = 0$ erhält man den Hauptwert

$$\text{Ln}\,(z) = \ln(r) + i\varphi$$

Sein Realteil ist der natürliche Logarithmus des Betrages r, sein Imaginärteil das Argument φ der komplexen Zahl z (Hauptwert). Alle anderen Werte heißen Nebenwerte, und ergeben sich aus dem Hauptwert durch Addieren ganzzahliger Vielfacher von $2\pi i$.

2 Relationen und Funktionen

2.1 Relationen und Abbildungen

Relationen Man repräsentiert eine Relation (Beziehung) durch die Menge aller Paare oder Tripel von Objekten, die in dieser Beziehung zueinander stehen.

Definition 2.1 (Kartesisches Produkt zweier Mengen) *Das kartesische Produkt $M \times N$ ist die Menge aller möglichen Paare (a, b), bei denen $a \in M$ und $b \in N$ ist. Man schreibt*

$$M \times N = \{(a, b) : \, a \in M \textit{ und } b \in N\}$$

Definition 2.2 (Binäre Relation) *Eine Relation R zwischen den Mengen M und N ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times N$, also $R \subseteq M \times N$. Ist $(a, b) \in R$, so schreibt man auch aRb (Infix-Schreibweise) oder Rab (Präfix-Schreibweise) und sagt, a und b stehen in der Relation R.*

Bei binären Relationen spricht man vom *Vorbereich* V_R und dem *Nachbereich* N_R einer Relation $R \subseteq M \times N$. Der Vorbereich enthält alle $a \in M$, die in mindestens einem Paar der Relation enthalten sind, der Nachbereich entsprechend alle solchen $b \in N$.

Ist der Vorbereich V_R der Relation $R \subseteq M \times N$ gleich der Menge M, hat also jedes Element aus M mindestens einen Partner in N, so nennt man die Relation R *linkstotal* oder *linksvollständig*. Ist der Nachbereich N_R der Relation $R \subseteq M \times N$ gleich der Menge N, hat also jedes Element aus N mindestens einen Partner in M, so nennt man die Relation R *rechtstotal* (Synonyme: *rechtsvollständig* oder *surjektiv*).

Definition 2.3 (n-stellige Relation) *Eine n-stellige Relation R zwischen den Mengen M_1, M_2,...,M_n (wobei $n > 1$), ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ und besteht aus n-Tupeln $(a_1, a_2, ..., a_n)$, wobei $a_1 \in M_1$,..., $a_n \in M_n$.*

Sind alle Mengen gleich, also $M_1 = \ldots = M_n = M$, so spricht man von einer n-stelligen Relation in M.

Eigenschaften von Relationen In diesem Abschnitt betrachten wir nur binäre Relationen in einer Menge M, also Teilmengen von $M \times M$. Wichtige Eigenschaften von Relationen sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

In manchen Anwendungen (Datenbanken) spielt es eine grosse Rolle, ob ein Element von M zu mehreren Elementen von N in Beziehung stehen kann oder nicht. Dazu sind die Eigenschaften *rechtseindeutig* und *linkseindeutig* definiert. Ist eine Relation sowohl rechts- als auch linkseindeutig, so nennt man sie *eineindeutig*.

Definition 2.4 (Relationsbild) *Die Menge Y der Nachbereichselemente einer Relation $R \subseteq M \times N$, die einer Menge X von Vorbereichselementen zugeordnet sind, nennt man das Relationsbild $R[X]$.*

Spezielle Relationen

Definition 2.5 (Äquivalenzrelation) *Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt Äquivalenzrelation.*

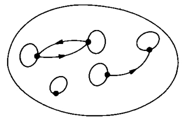
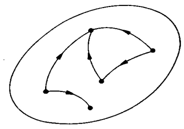
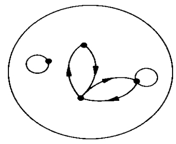
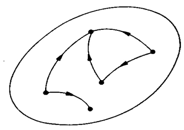
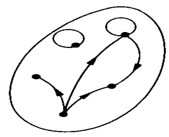
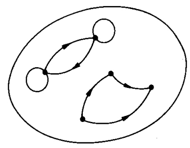
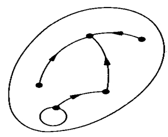
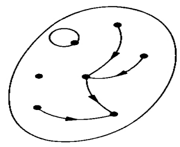
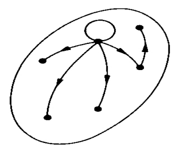
Eine Relation R ist	wenn gilt	
linkstotal	Der Vorbereich V_R von $R \subseteq M \times N$ ist ganz M.	
rechtstotal (surjektiv)	Der Nachbereich N_R von $R \subseteq M \times N$ ist ganz N.	
reflexiv	Jedes Element $x \in M$ steht zu sich selbst in Relation.	
irreflexiv	Kein Element $x \in M$ steht zu sich selbst in Relation.	
symmetrisch	Die Relation ist ungerichtet, d.h. wenn $(a, b) \in R$ ist, dann ist auch $(b, a) \in R$.	
asymmetrisch	Es gibt *keine* zwei Elemente, die in beiden Richtungen in Relation stehen, d. h. wenn $(a, b) \in R$ ist, dann ist $(b, a) \notin R$.	
antisymmetrisch	Es gibt keine zwei *verschiedenen* Elemente, die in beiden Richtungen in Relation stehen, d. h. wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ sind, dann muss $a = b$ sein.	
transitiv	Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ sind, dann ist auch $(a, c) \in R$.	
intransitiv	Es gibt Elemente a, b, c, für die zwar $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ sind, aber trotzdem$(a, c) \notin R$ ist.	
rechtseindeutig	Jedes Element aus M hat höchstens einen Partner in N.	
linkseindeutig (injektiv)	Jedes Element aus N hat höchstens einen Partner in M.	
bijektiv	Jedes Element aus N hat genau einen Partner in M.	

Tabelle 1: Wichtige Eigenschaften von Relationen. (Bilder aus G. Böhme: Algebra. Anwendungsorientierte Mathematik. Springer, 1992.)

Äquivalenzrelationen haben die Eigenschaft, dass sie die Grundmenge M in so genannte *Äquivalenzklassen* zerlegen. Alle Elemente einer Klasse stehen dabei zueinander in Relation, aber Elemente verschiedener Klassen können nicht in Relation stehen.

Definition 2.6 (Ordnungsrelation) *Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation auf M heißt (nicht-strenge) Ordnungsrelation. Ist die Relation hingegen asymmetrisch und transitiv, bezeichnet man sie als strenge Ordnungsrelation auf M.*

Viele Relationen zwischen Mengen M und N bedeuten inhaltlich eine Zuordnung von Elementen aus M zu Elementen aus N. Solche Zuordnungen treten in der Mathematik als Funktionen auf, oder in der Computergrafik als geometrische Abbildungen (Drehung, Spiegelung etc.).

Definition 2.7 (Abbildung) *Eine Abbildung von der Menge M in die Menge N ist eine rechtseindeutige und linkstotale Relation $R \subseteq M \times N$, d.h. es gibt zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ gibt, so dass $(x, y) \in R$. Dieses eindeutig bestimmte y bezeichnet man als das Bild von x unter der Abbildung R und schreibt $y = R(x)$.*

2.2 Funktionen und ihre Eigenschaften

Funktionen sind nichts anderes als Abbildungen, deren Bildbereich eine Menge von Zahlen ist.

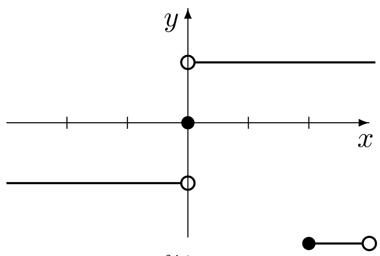
Definition 2.8 (Funktion) *Unter einer Funktion f versteht man eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet. Man schreibt $y = f(x)$. D nennt man den Definitionsbereich der Funktion, W ihren Wertebereich.*

Übliche Bezeichnungen sind:

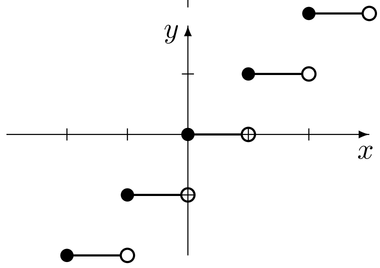
x	Argument oder Variable von f
$f(x)$	Funktionswert, Wert der Funktion f an der Stelle x
$x \mapsto f(x)$ oder $y = f(x)$	Zuordnungsvorschrift
D_f	Definitionsmenge oder Definitionsbereich der Funktion f
D_{max}	maximaler Definitionsbereich
W_f	Wertemenge oder Wertebereich der Funktion f

Zwei spezielle Funktionen

Signumfunktion $\quad f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$



Treppenfunktion $\quad f(x) = [x]$



Unter der *Gauß-Klammer* $[x]$ versteht man für eine reelle Zahl x die größte ganze Zahl, die noch kleiner oder gleich x ist.

Definition 2.9 (Nullstelle) *Eine Funktion f besitzt in x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$.*

In einer Nullstelle schneidet oder berührt die Funktion die x-Achse.

Symmetrieverhalten Wir unterscheiden insbesondere zwischen Achsen- und Punktsymmetrie.

Definition 2.10 *Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem symmetrischen Definitionsbereich D heißt*

gerade (achsensymmetrisch)	*wenn $f(-x) = f(x)$*
ungerade (punktsymmetrisch)	*wenn $f(-x) = -f(x)$*

gilt, und zwar jeweils für jedes beliebige $x \in D$.

Monotonie Um Gleichungen aufzulösen, die Funktionsausdrücke enthalten, benötigt man die Umkehrfunktion, mit der wir uns etwas später beschäftigen werden. Ob diese existiert oder nicht, hängt in starkem Maße von einer Eigenschaft der Funktion ab, die man als Monotonie bezeichnet.

Definition 2.11 (Monotonie) *Es seien $x_1 < x_2$ zwei Werte aus dem Definitionsbereich einer Funktion $y = f(x)$. Dann heißt die Funktion f*

monoton wachsend	*falls stets $f(x_1) \leq f(x_2)$*	
streng monoton wachsend	*falls stets $f(x_1) < f(x_2)$*	*ist.*
monoton fallend	*falls stets $f(x_1) \geq f(x_2)$*	
streng monoton fallend	*falls stets $f(x_1) > f(x_2)$*	

Eine streng monoton wachsende Funktion hat also die Eigenschaft, dass zum kleineren x-Wert auch immer der kleinere y-Wert gehört. Bei einer streng monoton fallenden Funktion ist es genau umgekehrt: zum kleineren x-Wert gehört der größere y-Wert.

Periodizität Zahlreiche Vorgänge in Natur und Technik verlaufen periodisch, das heißt sie wiederholen sich in regelmäßigen (meist zeitlichen) Abständen. Zur Beschreibung solcher Abläufe werden periodische Funktionen benötigt:

Definition 2.12 (Periodizität) *Eine Funktion $y = f(x)$ heißt periodisch mit der Periode T, wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm T$ zum Definitionsbereich gehört, und $f(x \pm T) = f(x)$ ist.*

Mit T ist auch jedes Vielfache von T eine Periode der Funktion. Man gibt meistens die kleinste positive Periode T an. Sie heißt die *primitive Periode*.

Die Umkehrfunktion Häufig stellt sich das Problem, dass man zu einem vorgegebenen Funktionswert das zugehörige Argument herausfinden muss. Ist das für jeden Funktionswert möglich, so heißt eine Funktion umkehrbar.

Definition 2.13 (Umkehrbarkeit) *Die Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn zu unterschiedlichen Argumenten auch unterschiedliche Funktionswerte gehören, d.h. wenn $x_1 \neq x_2$, dann ist auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Nicht jede Funktion ist umkehrbar, manche sind es jedoch abschnittsweise. Insbesondere sind streng monoton wachsende oder fallende Funktionen umkehrbar. Bei der Umkehrung einer Funktion werden Definitionsbereich und Wertebereich miteinander vertauscht.

Zeichnerisch erhält man den Graphen der Umkehrfunktion, indem man die Funktionskurve $y = f(x)$ an der Diagonalen $y = x$ spiegelt. Dazu muss die Skalierung beider Achsen natürlich gleich sein.

In vielen Fällen (nicht immer!) gelingt es, die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion wie folgt zu bestimmen:

Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach der Variablen x

   Es ist wichtig, dass die Auflösung möglich und eindeutig ist! Man erhält dann die nach x aufgelöste Form $x = g(y)$.
2. Durch formales Vertauschen der Variablen x und y gewinnt man daraus die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = g(x)$.

2.3 Rationale Funktionen

2.3.1 Spezielle Potenzfunktionen

Unter Potenzfunktionen versteht man Funktionen f mit $f(x) = x^r$, für konstantes $r \in \mathbb{R}$. Die Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt der *Exponent*. Man definiert $x^0 \equiv 1$.

Eigenschaften der Potenzfunktionen $y = x^n$

Ungerader Exponent: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$

1. Die Funktionen $f(x) = x^{2k+1}$ sind ungerade und auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
2. Die Umkehrfunktionen $f^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ heißen Wurzelfunktionen und sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Gerader Exponent: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

1. Die Funktionen $f(x) = x^{2k}$ sind gerade und nicht monoton auf ganz $\mathbb{R}$. Ihre Einschränkungen (Restriktionen) auf $\mathbb{R}_0^+$ sind jedoch streng monoton wachsend und damit umkehrbar.
2. Die Umkehrfunktionen $f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ heißen Wurzelfunktionen und sind nur für $x \in \mathbb{R}_0^+$ definiert.

Definition der Potenzfunktionen mit rationalen und negativen Exponenten

Exponent	Definition	Beispiel
rational: $r = \frac{m}{n} > 0$	x^r ist die n-te Wurzel aus x^m:, also $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$
negativ: $r < 0$	x^r ist die rationale Funktion $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$	$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

2.3.2 Ganzrationale Funktionen

Definition 2.14 (Polynom) *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades oder Polynom n-ten Grades.*

Theorem 2.1 (Koeffizientenvergleich) Zwei ganzrationale Funktionen f und g mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

und $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sind, d.h. $a_k = b_k$ für $k = 0, ..., n$.

Horner-Schema Mit Hilfe des *Horner-Schemas* kann man Werte von Polynomen an beliebiger Stelle effizient berechnen. Durch sukzessives Ausklammern von x kann man das Polynom n-ten Grades umschreiben zu:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + x \cdot (\ldots + x \cdot (a_{n-1} + a_n x) \ldots))) \end{aligned}$$

Rechnet man diesen Ausdruck *von innen heraus* aus, erhält man das Horner-Schema zur Berechnung der Werte von Polynomen für beliebige Argumente $x_1 \in \mathbb{R}$:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\ldots$	$b_1 x_1$	$b_0 x_1$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_0	$\mathbf{f(x_1)}$

Nullstellen von Polynomen Viele Anwendungsprobleme (Resonanz- und Stabilitätsuntersuchungen, Bestimmung von statistischen Prüfgrößen, Lösung von linearen DGL etc.) führen auf so genannte Eigenwertprobleme, zu deren Lösung die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* bestimmt werden müssen.

Über die Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades

Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen.
Ist f ein Polynom n-ten Grades mit der Nullstelle x_1, dann gibt es ein Polynom g vom Grade $n-1$, so dass

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x) \quad \text{für beliebiges } x \in \mathbb{R}$$

Setzt man dieses *Abspalten der Nullstellen* $x_1, ..., x_n$ fort, so gelangt man zu der Produktdarstellung

$$f(x) = a_n (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Die n Faktoren $(x - x_1)$,...,$(x - x_n)$ werden als die *Linearfaktoren* des Polynoms bezeichnet.
Hat ein Polynom n-ten Grades n Nullstellen $x_1, ..., x_n$, dann ist $a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$.

Definition 2.15 (Vielfachheit von Nullstellen) *Sei f ein Polynom n-ten Grades. Dann heißt x_1 eine k-fache Nullstelle von f, wenn es ein Polynom g vom Grad $n-k$ gibt, für das $g(x_1) \neq 0$ und es ist $f(x) = (x - x_1)^k g(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.*

Hat man eine Nullstelle abgespalten, müssen alle weiteren Nullstellen von f auch Nullstellen von g sein. Um das Polynom g vom Grade $n-1$ zu finden, gibt es zwei Möglichkeiten:

- Polynomdivision: Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms f, dann ist f durch $(x - x_1)$ ohne Rest teilbar.
- Ist x_1 eine Nullstelle von f, dann stehen in der letzten Zeile des Horner-Schemas die Koeffizienten des Polynoms $g(x)$, das heißt $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Zusammenfassung: Vorgehen zur Nullstellenberechnung

Ein Polynom p_n vom Grade n wird durch Abspalten von gefundenen Nullstellen schrittweise auf ein quadratisches Polynom reduziert. Dessen Nullstellen kann man (soweit vorhanden) mit Hilfe der Mitternachtsformel bestimmen.
Zum Abspalten einer Nullstelle führt man die folgenden Schritte aus:

1. Bestimmen einer reellen Nullstelle x_1 durch Erraten, Probieren, grafische oder numerische Lösungsverfahren;

2. Abspalten des zugehörigen Linearfaktors $(x - x_1)$ durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas. Es ergibt sich eine Produktdarstellung $p_n(x) = (x - x_1)g(x)$, wobei g ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades ist. Die Koeffizienten des Polynoms $g(x)$ stehen in der letzten Zeile des Horner-Schemas, das heißt

$$g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

3. Alle weiteren Nullstellen von p_n müssen auch Nullstellen von g sein. Der Grad von g ist um eins niedriger als der von p_n.

2.3.3 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 2.16 (Gebrochenrationale Funktion) *Unter einer (gebrochen) rationalen Funktion r verstehen wir den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen:*

$$r(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \text{ mit } a_m \neq 0,\ b_n \neq 0.$$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus L$, wobei L die Menge der Nullstellen des Nenners bezeichnet. Im Falle $m < n$ heißt r echt gebrochen*, im Fall $m \geq n$* unecht gebrochen.

Jede unecht gebrochen rationale Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochen rationalen Funktion schreiben. Diese Darstellung erhält man durch Polynomdivision.

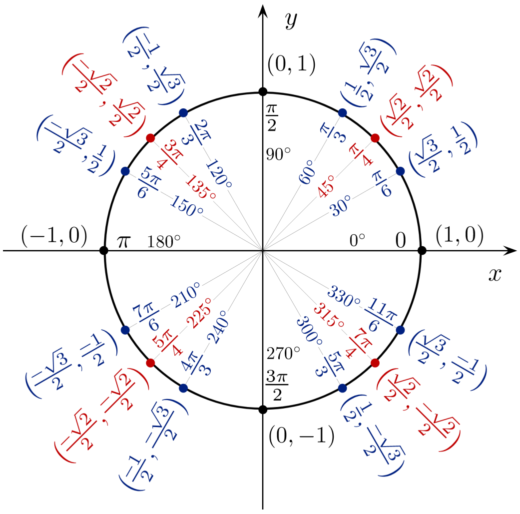
Nullstellen, Polstellen, Lücken In den Nullstellen des Nennerpolynoms sind gebrochenrationale Funktionen nicht definiert. Diese Nullstellen des Nennerpolynoms bezeichnet man daher als *Definitionslücken*. Durch Kürzen der Linearfaktoren, die Nenner- und Zählerpolynom gemeinsam haben, erweitert man möglicherweise den Definitionsbereich; man spricht dann von *hebbaren Lücken*.

Die nach dem Kürzen im Zähler verbleibenden Linearfaktoren liefern die *Nullstellen*, die im Nenner verbliebenen Linearfaktoren die *Polstellen* der gebrochenrationalen Funktion.

Nullstellen und Polstellen können einfach oder mehrfach sein. Bei ungerader Vielfachheit liegt ein Vorzeichenwechsel vor, sonst nicht.

2.4 Trigonometrische Funktionen

Wir verwenden im folgenden immer Bogenmaß, wenn nicht anders angegeben. Bogenmaß gibt die Länge des Kreisbogens mit dem Radius 1 an, der ein Segment mit dem Innenwinkel α (in Grad) umschließt.



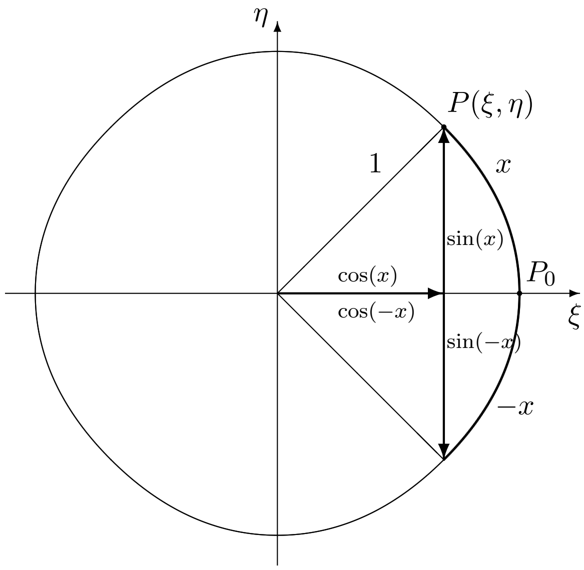


Abbildung 1: Umrechnung Bogenmaß/Gradmaß (links) und Definition der trig. Funktionen am Einheitskreis (rechts).

Deshalb verhalten sich Bogenmaß und Gradmaß wie:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{180°}$$

Einige wichtige Werte sehen Sie in Abbildung 1 (links).

Definition 2.17 (Kosinus- und Sinusfunktion) *Sei (ξ, η) ein Punkt P auf dem Einheitskreis. P_0 sei der Punkt $(1, 0)$. Wir bezeichnen das Bogenmaß $\widehat{PP_0}$ mit x. Dann wird jedem Wert x ein Punkt P zugeordnet, dessen Koordinaten wir mit Kosinus und Sinus von x bezeichnen: $\xi = \cos(x)$ und $\eta = \sin(x)$.*

Die so auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen mit $x \mapsto \cos x$ und $x \mapsto \sin x$ werden als Kosinus- bzw. Sinusfunktion bezeichnet.

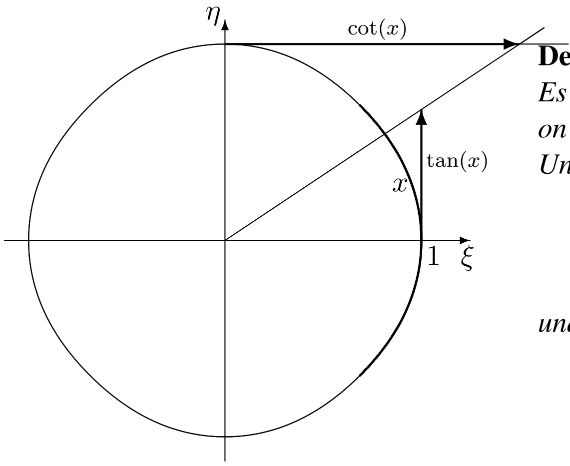
Die folgenden Eigenschaften lassen sich zum großen Teil direkt der Definition entnehmen. Es gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

	Sinus	Kosinus
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$
Periodizität	$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen ($k \in \mathbb{Z}$)	$x_k = k\pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$
Maxima ($k \in \mathbb{Z}$)	$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x_k = 2k\pi$
Minima ($k \in \mathbb{Z}$)	$x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x_k = \pi + 2k\pi$
Monotonie	streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	streng monoton fallend auf $[0, \pi]$

Rechenregeln für Sinus und Kosinus

$$
\begin{aligned}
\sin(x+\frac{\pi}{2}) &= \cos(x) & \cos(x+\frac{\pi}{2}) &= -\sin(x) \\
\sin(x-\frac{\pi}{2}) &= -\cos(x) & \cos(x-\frac{\pi}{2}) &= \sin(x) \\
\sin(\pi-x) &= \sin(x) & \cos(\pi-x) &= -\cos(x) \\
\sin(\pi+x) &= -\sin(x) & \cos(\pi+x) &= -\cos(x) \\
|\sin(x)| &\leq x & \sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}
\end{aligned}
$$

Weitere Rechenregeln und Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen finden Sie in einer beliebigen Formelsammlung: Markieren Sie sich unbedingt die entsprechenden Seiten!



Definition 2.18 (Tangens- und Kotangensfunktion)
Es sei L_1 die Menge der Nullstellen der Kosinusfunktion und L_2 die Menge der Nullstellen der Sinusfunktion. Unter der Tangensfunktion verstehen wir die Funktion

$$\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \textit{ für } x \in \mathbb{R} \setminus L_1$$

und unter der Kotangensfunktion die Funktion

$$\cot : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x) \textit{ für } x \in \mathbb{R} \setminus L_2.$$

	Tangens	Kotangens
Definitionsbereich	$\mathbb{R} \setminus \{x \,\vert\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,\vert\, x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Periodizität ($k \in \mathbb{Z}$)	$\tan(x + k\pi) = \tan(x)$	$\cot(x + k\pi) = \cot(x)$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen ($k \in \mathbb{Z}$)	$x_k = k\pi$	$x_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$
Polstellen ($k \in \mathbb{Z}$)	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x_k = k\pi$
Monotonie	streng monoton wachsend auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	streng monoton fallend auf $(0, \pi)$

Wichtig für das Rechnen mit trigonometrische Funktionen sind insbesondere die *Additionstheoreme* und die verschiedenen Folgerungen aus ihnen (Formelsammlung!):

$$
\begin{aligned}
\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2) \\
\cos(x_1 \pm x_2) &= \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2) \\
\tan(x_1 + x_2) &= \frac{\tan(x_1) + \tan(x_2)}{1 - \tan(x_1)\tan(x_2)} \\
\cot(x_1 + x_2) &= \frac{\cot(x_1)\cot(x_2) - 1}{\cot(x_1) + \cot(x_2)}
\end{aligned}
$$

Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind, existiert für sie keine Umkehrfunktion auf dem gesamten Definitionsbereich. Man kann jedoch den Definitionsbereich soweit einschränken, dass die eingeschränkte Funktion umkehrbar ist.

Funktion	Einschränkung	Umkehrfunktion	Definitionsbereich	Wertebereich
Sinus	$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$	Arcussinus	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Kosinus	$\cos : [-0, \pi] \to [-1, 1]$	Arcuskosinus	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
Tangens	$\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$	Arcustangens	$\mathbb{R}$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Kotangens	$\cot : [0, \pi] \to \mathbb{R}$	Arcuskotangens	$\mathbb{R}$	$[0, \pi]$

2.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition 2.19 (Exponentialfunktion) *Es sei $e = 2,718281828459045...$ die Eulersche Zahl und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $y = f(x) = e^x$ die Exponentialfunktion zur Basis e oder kurz e-Funktion.*

Die Umkehrfunktion der e-Funktion heißt die natürliche Logarithmusfunktion $y = \ln x$, mit $x \in \mathbb{R}^+$.

	Exponentialfunktion	Natürlicher Logarithmus
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$0 < x < \infty$
Wertebereich	$0 < y < \infty$	$-\infty \leq y < \infty$
Nullstellen	—	$x_0 = 1$
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton wachsend
Ungleichungen	$1 + x \leq e^x$	$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

Definition 2.20 (Exponentialfunktion) *Es sei e die Eulersche Zahl und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$f : x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

die Exponentialfunktion zur Basis e oder kurz e-Funktion, und man schreibt:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Rechnen mit Exponentialfunktion und natürlichen Logarithmen

$$\begin{aligned} e^{x_1+x_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\ e^{x_1 \cdot x_2} &= (e^{x_1})^{x_2} \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ \ln e^x &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(x_1 \cdot x_2) &= \ln(x_1) + \ln(x_2) \\ \ln x^\alpha &= \alpha \cdot \ln x \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \ln(x_1) - \ln(x_2) \\ \ln(1) &= 0 \end{aligned}$$

Definition 2.21 (Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion) *Es sei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann setzt man*

$$a^b = e^{b \cdot \ln(a)}$$

Die Funktion $f : x \mapsto a^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a oder allgemeine Exponentialfunktion.

Die Funktion $f : x \mapsto x^b$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ heißt allgemeine Potenzfunktion.

Für $a = 1$ ist $f(x) = 1^x$ eine konstante Funktion, da $1^x = e^{x \ln(1)} = e^0 = 1$. Diese Funktion ist nicht umkehrbar, es gibt also keine Logarithmusfunktion zur Basis 1.

Für $a > 1$ ist die allgemeine Exponentialfunktion streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ ist sie streng monoton fallend.

Definition 2.22 (Logarithmus zur Basis a) *Die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion heißt Logarithmusfunktion zur Basis a oder allgemeine Logarithmusfunktion, und man schreibt $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \log_a x$.*

Rechnen mit Potenzen

Wenn a, b positive reelle Zahlen sind, gilt:

$$\begin{aligned} a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ a^{x_1 \cdot x_2} &= (a^{x_1})^{x_2} \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a(x_1 \cdot x_2) &= \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \\ \log_a(x^\alpha) &= \alpha \cdot \log_a(x) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R} \\ \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a(x_1) - \log_a(x_2) \\ \log_a(x) &= \log_a(b) \cdot \log_b(x) \text{ für alle } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{aligned}$$

2.6 Hyperbolische Funktionen

Definition 2.23 (Hyperbelfunktionen) *Die Definitionsgleichungen der hyperbolischen Funktionen lauten:*

$$\begin{aligned} \textit{Sinus hyperbolicus} \quad y &= \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \textit{Kosinus hyperbolicus} \quad y &= \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \textit{Tangens hyperbolicus} \quad y &= \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \textit{Kotangens hyperbolicus} \quad y &= \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen Aus den Definitionsgleichungen folgen unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \ \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Die Exponentialfunktionen lassen sich durch die Hyperbelfunktionen wie folgt ausdrücken:

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x), \ e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$$

Von Bedeutung sind auch die sogenannten Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen und die Entsprechung zum trigonometrischen Pythagoras:

	Hyperbelsinus	Hyperbelkosinus
Definitionsbereich Wertebereich	$-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$	$-\infty < x < \infty$ $1 \leq y < \infty$
Symmetrie Nullstellen Extremstellen	ungerade $x_0 = 0$ —	gerade — $x_0 = 0$ (Minimum)
Monotonie	streng monoton wachsend	monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ monoton wachsend auf $[0, \infty)$
Asymptoten	$y = \frac{1}{2}e^x$ für $x \to \infty$	$y = \frac{1}{2}e^x$ für $x \to \infty$

Tabelle 2: Eigenschaften von hyperbolischem Sinus und Kosinus

	Hyperbeltangens	Hyperbelkotangens
Definitionsbereich Wertebereich	$-\infty < x < \infty$ $-1 < y < 1$	$x \neq 0$ $\|y\| > 1$
Symmetrie Nullstellen Polstellen	ungerade $x_0 = 0$ —	ungerade — $x_0 = 0$
Monotonie	streng monoton wachsend	monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ monoton fallend auf $(0, \infty)$
Asymptoten	$y = 1$ für $x \to \infty$ $y = -1$ für $x \to -\infty$	$y = 1$ für $x \to \infty$ $y = -1$ für $x \to -\infty$ $x = 0$ (Polgerade)

Tabelle 3: Eigenschaften von hyperbolischem Tangens und Kotangens

Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\sinh(x_1 \pm x_2) &= \sinh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \cosh(x_1) \cdot \sinh(x_2) \\
\cosh(x_1 \pm x_2) &= \cosh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \sinh(x_1) \cdot \sinh(x_2) \\
\tanh(x_1 \pm x_2) &= \frac{\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2)}{1 \pm \tanh(x_1) \cdot \tanh(x_2)}
\end{aligned}$$

Folgerungen:

$$\begin{aligned}
1 &= \cosh^2(x) - \sinh^2(x) \\
\sinh(2x) &= 2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) \\
\cosh(2x) &= \sinh^2(x) + \cosh^2(x)
\end{aligned}$$

Areafunktionen Hyperbelsinus und Hyperbeltangens sind in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktionen und daher umkehrbar. Der Hyperbelkotangens ist in beiden Teilbereichen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ streng monoton fallend, und seine Teil-Wertebereiche überschneiden sich nicht - sie ist daher auch umkehrbar. Nur der Hyperbelkosinus muß eingeschränkt werden, da die Funktion achsensymmetrisch ist und sowohl auf der negativen als auch auf der positiven Achse den gesamten Wertevorrat durchläuft.

Definition 2.24 (Areafunktionen) *Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen heißen Areafunktionen. Bezeichnung und Schreibweise dieser Funktionen lauten*

$$\begin{array}{rcl} \textit{Areasinus hyperbolicus} \quad y & = & \textit{arsinh}\,(x) \\ \textit{Areakosinus hyperbolicus} \quad y & = & \textit{arcosh}\,(x) \\ \textit{Areatangens hyperbolicus} \quad y & = & \textit{artanh}\,(x) \\ \textit{Areakotangens hyperbolicus} \quad y & = & \textit{arcoth}\,(x) \end{array}$$

Die Eigenschaften der Areafunktionen sind in Tabelle 4 zusammengestellt.

Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus

$$\begin{array}{rcl} y & = & \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ y & = & \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ y & = & \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ y & = & \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{array}$$

Zusammenhang der hyperbolischen Funktionen mit der Einheitshyperbel In einem (u, v)-Koordinatensystem lautet die Gleichung der Einheitshyperbel

$$u^2 - v^2 = 1$$

Setzt man $u = \cosh(x)$, $v = \sinh(x)$, dann ist

$$u^2 - v^2 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

	Areasinus	Areakosinus	Areatangens	Areakotangens
Definitionsbereich Wertebereich	$-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$	$1 \leq x < \infty$ $0 \leq y < \infty$	$-1 < x < 1$ $-\infty < y < \infty$	$\|x\| > 1$ $y \neq 0$
Symmetrie Nullstellen Polstellen	ungerade $x_0 = 0$ —	— $x_0 = 1$ —	ungerade $x_0 = 0$ $x_{1/2} = \pm 1$	ungerade — $x_{1/2} = \pm 1$
Monotonie	wachsend	wachsend	wachsend	fallend auf $(-\infty, -1)$ fallend auf $(1, \infty)$
Asymptoten	—	—	$x = \pm 1$ (Polgeraden)	$x = \pm 1$ (Polgeraden) $y = 0$ für $x \to \pm\infty$

Tabelle 4: Eigenschaften der Areafunktionen

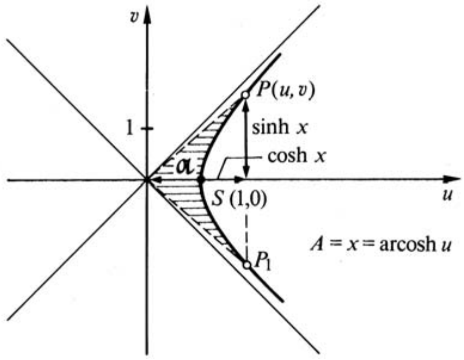
Da $u = \cosh(x) \geq 1$ ist, beschreibt die parametrische Kurve

$$u = \cosh(x)\,,\ v = \sinh(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ den rechten Ast einer Einheitshyperbel. Mit den Mitteln der Integralrechnung kann man zeigen, dass der Flächeninhalt des Hyperbelsektors $OPSP_1$ (siehe Abbildung) genau

$$A = x = \text{arcosh}\ (u)$$

ist. Hieraus erklären sich die Namen *hyperbolische* und *Areafunktionen* (area (lat.) = Fläche).



3 Grenzwerte und Stetigkeit

3.1 Zahlenfolgen

Definition 3.1 (Zahlenfolge) *Ordnet man jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so entsteht durch $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ eine Zahlenfolge oder kurz Folge. a_n bezeichnet man als das n-te Glied der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$.*

Definition 3.2 (Arithmetische Folge) *Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann heißt die durch $a_1 = c$ und $a_{n+1} = a_n + d$ definierte Folge $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge, und d heißt Differenz der Folge.*

Definition 3.3 (Geometrische Folge) *Es sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann heißt die durch $a_0 = c$ und $a_{n+1} = a_n \cdot q$ definierte Folge $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge, und q heißt Quotient der Folge.*

Bemerkung:

- Die Folge $a_n = c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt stationäre oder konstante Folge.
- Die Summe der ersten n Folgenglieder nennt man n-*te Teilsumme* oder *Partialsumme* der Folge $\langle a_n \rangle$: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$.
- Die n-te Teilsumme der geometrischen Folge ist die geometrische Summe:

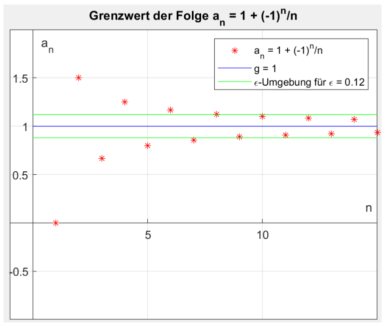
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} cq^k = c\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ für } q \neq 1$$

Definition 3.4 (Alternierende Folge) *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ (d. h. jeweils aufeinander folgende Glieder der Folge haben verschiedenes Vorzeichen) heißt alternierend.*

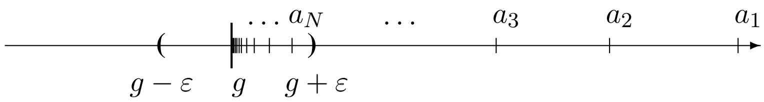
Definition 3.5 (Grenzwert) *Eine Zahl $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert einer Zahlenfolge, wenn in jeder (beliebig kleinen) ε-Umgebung von g fast alle Glieder der Folge liegen.*

Die Sprechweise *fast alle* bedeutet immer *alle, bis auf endlich viele*. Im Fall der Grenzwertdefinition heißt das: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex n_0, so dass für alle Folgenglieder a_n ab diesem Index (also mit $n \geq n_0$) gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$



Definition 3.6 (Umgebung, ε-Umgebung) *Jedes offene Intervall, das die Zahl g enthält, heißt eine Umgebung von g: $U(g)$. Es sei $\varepsilon > 0$. Unter der ε-Umgebung von g versteht man das bezüglich g symmetrische offene Intervall $(g - \varepsilon, g + \varepsilon) = U_\varepsilon(g)$.*



Definition 3.7 (Konvergenz) *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert g besitzt. Man sagt auch, $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen den Grenzwert g und schreibt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \text{ oder } a_n \to g \text{ für } n \to \infty.$$

Eine Folge, deren Grenzwert $g = 0$ ist, heißt Nullfolge. Eine Folge, die keinen Grenzwert hat, heißt divergent.

Definition 3.8 (Bestimmte und unbestimmte Divergenz) *Gibt es zu jedem (noch so großen) $K > 0$ einen Folgenindex $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$a_n > K \text{ für alle } n \geq n_0$$

dann heißt $\langle a_n \rangle$ bestimmt divergent. Man sagt auch, die Folge $\langle a_n \rangle$ wachse über alle Grenzen hinaus, oder sie besitze den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Eine Folge, die weder konvergiert noch gegen $\pm\infty$ divergiert, heißt unbestimmt divergent.

Theorem 3.1 Jede konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Grenzwerte wichtiger Folgen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \text{für } \alpha > 0$$

Geometrische Folge $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

Geometrische Reihe $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{falls } 0 < |q| < 1 \\ \infty & \text{falls } q \geq 1 \\ \text{unbestimmt} & \text{falls } q \leq -1 \end{cases}$$

Eulersche Zahl $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Unter der Voraussetzung, dass die entsprechenden Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) &= c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n && \text{für } c \in \mathbb{R} \\
\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} && \text{wenn } b_n \neq 0,\ b \neq 0 \\
\lim_{n\to\infty}(a_n)^r &= (\lim_{n\to\infty} a_n)^r && \text{wenn } a_n > 0,\ r \in \mathbb{R} \\
\lim_{n\to\infty} |a_n| &= |\lim_{n\to\infty} a_n|
\end{aligned}$$

e nennt man die Eulersche Zahl. Auf 15 Stellen genau ist $e = 2,718281828459045....$ Wie $\sqrt{2}$ ist auch die Eulersche Zahl keine rationale Zahl. Die letzten beiden Grenzwerte dienen der Definition der Exponentialfunktion:

Definition 3.9 (Exponentialfunktion) *Es sei e die Eulersche Zahl und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Abbildung*

$$f : x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

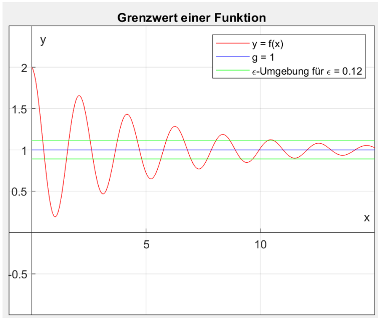
Exponentialfunktion zur Basis e (kurz: e-Funktion), und man schreibt: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

3.2 Grenzwerte von Funktionen

3.2.1 Asymptotisches Verhalten von Funktionen: Grenzwerte für $x \to \infty$

In direkter Analogie zu Definition 3.5 lautet die Cauchy-Definition des Grenzwerts für $x \to \infty$:

Definition 3.10 (Grenzwert für $x \to \infty$) *Die Zahl g heißt Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ für $x \to \infty$, wenn für jedes beliebig kleine $\epsilon > 0$ eine Zahl $K > 0$ gefunden werden kann, so dass aus $x > K$ folgt, dass $|f(x) - g| < \epsilon$.*



Eine alternative Grenzwertdefinition (nach Riemann) überträgt den Begriff des Grenzwerts einer Zahlenfolge auf Funktionen. Sie eignet sich besonders gut zum Nachweis, dass eine Funktion keinen Grenzwert hat.

Übertragungsprinzip für $x \to \infty$

Eine Funktion $y = f(x)$ sei auf einem Intervall $[a, \infty)$ definiert. Wenn die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ für jede über alle Grenzen hinaus wachsende Folge von Argumenten $\langle x_n \rangle \to \infty$ gegen eine Zahl g strebt, dann heißt g der Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$, und man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$$

Analog definiert man den Grenzwert von f für $x \to -\infty$.

Unbeschränktes Wachstum Hat eine Funktion einen Grenzwert g für $x \to \infty$, so ist sie *konvergent*, andernfalls *divergent*. Wie bei Folgen unterscheidet man bei divergenten Funktionen jedoch *bestimmt* divergente und *unbestimmt* divergente Funktionen.

Definition 3.11 (Bestimmte Divergenz) *Die Funktion $y = f(x)$ heißt bestimmt divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert $+\infty$, wenn sie für $x \to \infty$ über alle Grenzen wächst, das heißt zu jeder Schranke $K > 0$ findet man eine Zahl $\xi > 0$, so dass $f(x) > K$ für beliebiges $x > \xi$ ist. Man schreibt dann*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

und nennt $+\infty$ einen uneigentlichen Grenzwert der Funktion $f(x)$. Analog definiert man den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$, sowie Divergenz für $x \to -\infty$.

Asymptoten Wenn $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$ ist, so heißt die Gerade mit der Gleichung $y = g$ Asymptote des Graphen von f.

Allgemein spricht man von der Funktion $g(x)$ als einer Asymptote an den Graphen von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$, wenn ihre Graphen sich unendlich dicht aneinander annähern, das heißt

$$\lim_{x \to \infty} |g(x) - f(x)| = 0 \;\text{ bzw. }\; \lim_{x \to -\infty} |g(x) - f(x)| = 0$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Unter der Voraussetzung, dass die entsprechenden Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x)) &= \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) \pm \left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) \\
\lim_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x)) &= \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) \\
\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} \quad \text{falls } \lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0, \\
\lim_{x\to\infty}|f(x)| &= \left|\lim_{x\to\infty} f(x)\right| \\
\lim_{x\to\infty}(f(x))^n &= \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)^n \quad \text{für konstantes } n \in \mathbb{N} \\
\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} f(x)} \quad \text{für konstantes } n \in \mathbb{N},\ \text{falls } f(x) \geq 0 \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten gebrochenrationaler Funktionen Es sei $r(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ eine gebrochenrationale Funktion. Ist $m \geq n > 0$, so ist der Graph des ganzrationalen Anteils $g_{m-n}(x)$ von $r(x)$ ein Asymptote des Graphen von r. Ist $m \leq n$ oder $m = n+1$, dann ist die Asymptote eine Gerade.

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
Grenzwert für $x \to \pm\infty$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallele zur x-Achse $g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	Graph des ganzrationalen Anteils $g_{m-n}(x)$

Das Vorzeichen des uneigentlichen Grenzwertes im Fall $m > n$ hängt davon ab,

- ob der Grad des ganzrationalen Anteils $m - n$ gerade oder ungerade ist;
- ob der höchste Koeffizient von $g_{m-n}(x)$, also $\frac{a_m}{b_n}$, positiv oder negativ ist.

3.2.2 Grenzwerte für $x \to x_0$

Grenzwerte von Funktionen kann man nicht nur im asymptotischen Sinn auffassen, sondern auch an jeder beliebigen Stelle des Zahlenstrahls berechnen. Wir beginnen mit der Definition nach Riemann:

Übertragungsprinzip für $x \to x_0$

Eine Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 definiert. Gilt dann für jede im Definitionsbereich liegende und gegen x_0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \neq x_0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

so ist g der Grenzwert von $y = f(x)$ an der Stelle x_0, und man schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

Bemerkung:

- Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 nicht definiert sein muss. Es kann daher der Fall eintreten, dass eine Funktion an der Stelle x_0 einen Grenzwert besitzt, obwohl sie dort überhaupt nicht definiert ist.
- Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet also: x kommt der Stelle x_0 beliebig nahe, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Es ist stets $x \neq x_0$.

Das Übertragungsprinzip ist auch hier besonders gut geeignet, um nachzuweisen, dass eine Funktion an der Stelle x_0 keinen Grenzwert hat. Dazu findet man

a) eine gegen x_0 konvergente Folge von Argumenten, deren zugehörige Folge von Funktionswerten divergiert *oder*

b) zwei gegen x_0 konvergente Folgen von Argumenten $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$, deren zugehörige Folgen von Funktionswerten gegen verschiedene Werte konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert

Gilt für jede von links her gegen x_0 strebende Folge $\langle x_n \rangle$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g_l$$

so heißt g_l der linksseitige Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0. Entsprechend erklärt man den rechtsseitigen Grenzwert: Für jede von rechts gegen x_0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ gilt dann

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g_r$$

Hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Grenzwert g, so sind rechts- und linksseitiger Grenzwert gleich g.

Wenn man also zwei Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ finden kann, die beide gegen x_0 konvergieren, für die jedoch gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

so kann man daraus folgern, dass f an der Stelle x_0 keinen Grenzwert hat. Insbesondere wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert zwar existieren, aber ungleich sind, divergiert die Funktion an der Stelle x_0.

Das Übertragungsprinzip kann uns helfen, eine Hypothese für den Grenzwert einer Funktion aufzustellen, die man anschließend beweisen kann. Für solche Beweise eignet sich gut die alternative Grenzwertdefinition nach Cauchy:

Definition 3.12 (Grenzwert nach Cauchy) *Eine Funktion $y = f(x)$ sei in einer Umgebung $U(x_0)$ definiert. Man sagt, f besitze an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ angeben so kann, dass für alle x in der Umgebung $U(x_0)$ gilt:*

$$\textit{Falls} \quad 0 < |x - x_0| < \delta\,, \quad \textit{dann ist} \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

Man schreibt $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ *oder* $f(x) \to g$ *für* $x \to x_0$.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel
Hebbare Unstetigkeit	$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, aber $f(x)$ ist in x_0 nicht definiert	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}\,,\ x_0 = -2$
	$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, aber $g \neq f(x_0)$	$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x \neq -2 \\ 0 & \text{falls } x = -2 \end{cases}$
1. Art		
Sprungstelle	g_+ und g_- existieren in x_0, sind aber ungleich	$f(x) = \operatorname{sgn} x\,,\ x_0 = 0$
2. Art		
Unendlichkeitsstelle	g_+ oder g_- existieren nur uneigentlich in x_0 (sind $\pm\infty$)	$f(x) = \dfrac{1}{x - 1}\,,\ x_0 = 1$
Oszillationsstelle	f ist linksseitig oder rechtsseitig unbestimmt divergent	$f(x) = \sin \dfrac{1}{x}\,,\ x_0 = 0$

Tabelle 5: Klassifikation von Unstetigkeitsstellen nach ihrem Schweregrad.

3.3 Stetigkeit von Funktionen

Definition 3.13 (Stetigkeit) *Die Funktion $y = f(x)$ sei in in x_0 und in einer Umgebung davon definiert. Dann heißt f an der Stelle x_0 stetig, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition 3.14 (Stetigkeit auf Intervallen) *Die Funktion f heißt auf (a, b) stetig, wenn f für alle $x \in (a, b)$ stetig ist. f heißt auf $[a, b]$ stetig, wenn sie auf (a, b) stetig ist und an den Intervallrändern gilt $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ und $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.*

Klassifikation von Unstetigkeitsstellen Man nennt f an der Stelle x_0 unstetig, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

a) $f(x)$ ist zwar in einer Umgebung von x_0, nicht jedoch in x_0 selbst definiert;

b) $f(x)$ ist in einer Umgebung von x_0 einschließlich x_0 definiert, und der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ existiert, aber ist ungleich dem Funktionswert $f(x_0)$;

c) $f(x)$ ist in einer Umgebung von x_0 (einschließlich x_0) definiert, aber der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht.

Man klassifiziert solche *Unstetigkeitsstellen* der Funktion f nach der Schwere der Unstetigkeit (siehe Tabelle 5).

Eingeschränkte Stetigkeitsbegriffe Hat eine Funktion Unstetigkeiten, so kann sie doch einen der folgenden eingeschränkten Stetigkeitsbegriffe erfüllen:

Definition 3.15 (Einseitige Stetigkeit) *Die Funktion $y = f(x)$ sei in einer rechtsseitigen Umgebung $[x_0, x_0 + a)$, wobei $a > 0$, definiert. Dann heißt f an der Stelle x_0 rechtsseitig stetig, wenn der rechtsseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0 ist:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Entsprechend definiert man linksseitige Stetigkeit.

Definition 3.16 (Stückweise Stetigkeit) *f heißt in einem Intervall stückweise stetig, wenn f dort bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist.*

Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen

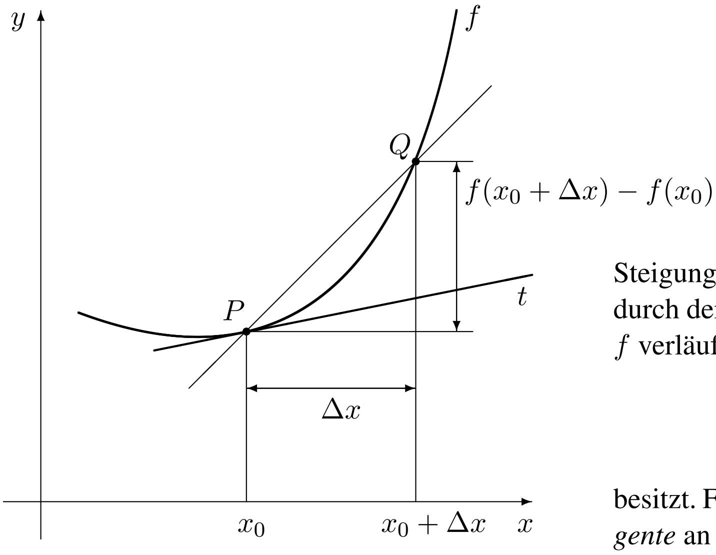
1. Wenn die Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ in x_0 stetig sind, dann sind auch die zusammengesetzten Funktionen $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (falls $f_2(x_0) \neq 0$), und $|f_1(x)|$ stetig in x_0.
2. Wenn die Funktionen $y = f(x)$ in x_0 und $z = g(y)$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig sind, dann ist auch die durch Nacheinanderausführung entstehende verkettete Funktion $z = g(f(x))$ stetig in x_0, und es gilt
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(f(x_0)).$$
3. Wenn die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall I stetig und umkehrbar ist, dann ist die inverse Funktion $f^{-1}(x)$ stetig auf dem Bild des Intervalls I (welches wieder ein Intervall ist).

Fazit: Alle elementaren Funktionen (bis auf die Signum-Funktion und Gaußklammer) sind *auf ihrem gesamten Definitionsbereich* stetig. Unstetigkeiten können bei Funktionen, die nur aus elementaren Funktionen zusammengesetzt sind, also nur in bestimmten Fällen vorkommen:

- Unterbrechungen im Definitionsbereich: z.B. $\tan(2x)$, $\frac{1+x}{x(x^2-4)}$, $\ln|x|$;
- Zusammensetzung mit nicht stetigen Funktionen: $y = \operatorname{sgn}(x^2 + 2x)$, $[3x + 2]$

4 Differentialrechnung

4.1 Ableitung und Differential



Steigung einer Kurve: Bestimmen die Gerade t, die durch den Punkt P auf dem Graphen einer Funktion f verläuft und die Steigung

$$m_t = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

besitzt. Falls der Grenzwert existiert, heißt t die *Tangente* an f im Punkt P.

Definition 4.1 (Ableitung an der Stelle x_0) *Sei f auf einer Umgebung $U(x_0)$ definiert. f heißt differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 oder Differentialquotient von f an der Stelle x_0.

Die Differentialrechnung wurde fast gleichzeitig, unabhängig voneinander, von Leibniz und Newton Ende des 17. Jahrhunderts entwickelt. Noch heute gibt es für die Ableitung von f an der Stelle x_0 verschiedene Schreibweisen:

$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)_{x=x_0} = \mathrm{D}f(x_0)$$

1. Schreibweise: Lagrange
2. und 3. Schreibweise: Leibniz
4. Schreibweise: von Cauchy eingeführt

Newton'sche Schreibweise: $\dot{f}(x_0)$, nur noch üblich bei Ableitung nach der Zeit, z.B. $v = \dot{s}$.

Definition 4.2 (Ableitungsfunktion) *Es sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $D_{f'} = \{x : x \in D_f \text{und } f'(x) \text{ ex.}\}$. Dann heißt die Funktion $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ die (erste) Ableitungsfunktion oder kurz die Ableitung von f.*

Ableitungen als Grenzwert Die Ableitung einer Funktion ist als Grenzwert definiert. Daher lassen sich auch Begriffe wie *einseitiger* oder *uneigentlicher* Grenzwert auf Ableitungen übertragen.

Definition 4.3 (Einseitige Ableitung) *Es sei f auf einer Umgebung $(x_0, x_0 + \delta)$ definiert ($\delta > 0$). Man sagt, f besitzt an der Stelle x_0 die rechtsseitige Ableitung bzw. f ist an der Stelle x_0 rechtsseitig* *differenzierbar, wenn der rechtsseitige Grenzwert*

$$f_r'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Entsprechend wird die linksseitige Ableitung definiert.

Definition 4.4 (Uneigentliche Ableitung) *Es sei f auf einer Umgebung $(x_0, x_0 + \delta)$ definiert ($\delta > 0$). Man sagt, f besitzt an der Stelle x_0 die rechtsseitige uneigentliche Ableitung, wenn der Grenzwert*

$$f_r'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nur im uneigentlichen Sinn existiert. Entsprechend wird die linksseitige uneigentliche Ableitung definiert.

Besitzt f an der Stelle x_0 eine rechts- und linksseitige uneigentliche Ableitung von $+\infty$, so sagt man, f besitze die uneigentliche Ableitung $+\infty$, ohne f jedoch in x_0 differenzierbar zu nennen.

Definition 4.5 (Differenzierbarkeit auf einem Intervall) *f heißt differenzierbar auf dem Intervall (a, b), wenn f an jeder Stelle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. f heißt differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$, wenn es auf (a, b) differenzierbar ist, sowie in a die rechtsseitige und in b die linksseitige Ableitung existieren.*

Man benutzt die Definition der Ableitung heute vor allem in solchen Fällen, in denen die Ableitungsregeln, die wir später kennen lernen werden, nicht greifen:

- stückweise zusammengesetzte Funktionen,
- Berechnung von einseitigen Ableitungen.

In solchen Fällen ist es nützlich, sich zu erinnern, dass die Ableitung als ein *Grenzwert* definiert ist. Aber auch die Tabelle der Ableitungen elementarer Funktionen und die Ableitungsregeln selbst basieren auf dieser Definition bzw. wurden mit ihrer Hilfe entwickelt.

Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Theorem 4.1 Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Im Umkehrschluss gilt: Wenn $f(x)$ an der Stelle x_0 *nicht* stetig ist, kann es dort auch nicht differenzierbar sein.

4.2 Ableitungsregeln

Mit Hilfe der Definition und entsprechender Grenzwertbestimmung können wir die Werte von Ableitungen bestimmen. Für eine Vielfalt von Funktionen gibt es jedoch Regeln, die ein einfacheres Berechnen der Ableitung in beliebigen Stellen erlauben. Eine Zusammenfassung findet sich in Tabelle 7.

Baumstruktur von Termen Bei mehrfach zusammengesetzten Funktionsausdrücken kann es unübersichtlich werden, in welcher Reihenfolge welche Ableitungsschritte auszuführen sind. Um die Struktur eines Terms zu verstehen, kann die Darstellung des Terms als Baum hilfreich sein.

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$, für konstantes $r \in \mathbb{R}$		
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ bzw. $1+\tan^2(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$ bzw. $-(1+\cot^2(x))$	arccot (x)	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$, für konstantes $a > 0$	$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{\ln(a) \cdot x}$
$\sinh(x)$	$\cosh x$	arsinh (x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh(x)$	$\sinh x$	arcosh (x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$ bzw. $1-\tanh^2(x)$	artanh (x)	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x}$ bzw. $1-\coth^2(x)$	arcoth (x)	$\frac{1}{1-x^2}$

Tabelle 6: Ableitungen der elementaren Funktionen

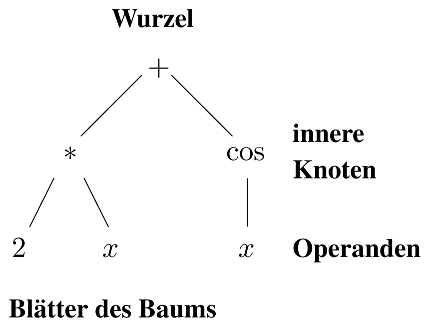
Regel		Voraussetzung
Summenregel	$(u+v)' = u' + v'$	u und v differenzierbar
Faktorregel	$(\alpha \cdot u)' = \alpha \cdot u'$	u differenzierbar, α konstant
Produktregel	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	u und v differenzierbar
Quotientenregel I	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	v differenzierbar, $v \neq 0$
Quotientenregel II	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	u und v differenzierbar, $v \neq 0$
Kettenregel $y = f(g(x))$	$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	g in x_0 differenzierbar, f in $g_0 = g(x_0)$ differenzierbar
Ableitung der Umkehrfunktion	$\left(f^{-1}(x_0)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}$	f differenzierbar, umkehrbar

Tabelle 7: Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen

Eigenschaften von Termbäumen

Termbäume sind Graphen, sie bestehen aus Knoten und Kanten.

- Knoten, von denen keine Kanten ausgehen, nennt man *Blätter*. Sie entsprechen den nicht weiter zerlegbaren *Operanden*, also Variablen oder Konstanten.
- Knoten, von denen weitere Äste ausgehen, nennt man *innere Knoten*. Jeder innere Knoten entspricht einem *Operator*, also einem Rechenzeichen aus $\{+, -, *, /\}$ oder einer Funktion.
- Aus einem inneren Knoten können nur ein oder zwei Kanten ausgehen.



Beispiel:
Termbaum für den Term $2x + \cos(x)$

Klammern müssen im Baum nicht dargestellt werden, weil allein die Struktur die Reihenfolge der Berechnung vorgibt. Es kann zu einem Term auch mehrere äquivalente Baumdarstellungen geben, wenn die Reihenfolge der Berechnungen vertauschbar ist.

In der Praxis helfen die Bäume zwar sehr beim Verständnis der Struktur von zusammengesetzten Termen, man wird sich aber in der Regel nicht die Mühe machen, den Baum vor dem Ableiten zu zeichnen. Beim automatisierten Lesen und Interpretieren von Formelausdrücken durch einen Computer finden Termbäume als interne Datenstruktur Anwendung.

Höhere Ableitungen Die Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ ist ihrerseits wiederum eine Funktion, deren Steigung durch Ableiten berechnet werden kann. Das motiviert die folgende (rekursive) Definition:

Definition 4.6 (Ableitung n-ter Ordnung) *Die höheren Ableitungsfunktionen einer Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ werden rekursiv definiert:*

$$f'' = (f')',\ f''' = (f'')',\ \ldots,\ f^{(n)} = (f^{(n-1)})',\ n \in \mathbb{N}.$$

$f^{(n)}$ heißt Ableitungsfunktion n-ter Ordnung von f oder die n-te Ableitung von f.

Definition 4.7 (Stetige Differenzierbarkeit) *Die Funktion f heißt auf dem Intervall I n-mal differenzierbar, falls die n-te Ableitung $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existiert. Wenn $f^{(n)}$ auf I außerdem stetig ist, so heißt f auf I n-mal stetig differenzierbar.*

Je öfter eine Funktion auf einem Intervall stetig differenzierbar ist, desto *glatter* ist sie.

4.3 Anwendungen der Differentialrechnung

4.3.1 Berechnung von Grenzwerten

Die Regel von Bernoulli-l'Hospital hilft uns bei der Berechnung spezieller Grenzwerte, die sich mit den bisher besprochenen Rechenregeln nicht immer berechnen lassen.

Die Symbole $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ stehen für solche speziellen Grenzwerte:

$$\begin{aligned} &\text{Grenzwert vom Typ } \frac{0}{0}: && \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ wobei } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ ist,} \\ &\text{Grenzwert vom Typ } \frac{\infty}{\infty}: && \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ wobei } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \text{ ist.} \end{aligned}$$

Entsprechende Bedeutung haben die Symbole $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 etc.

Regel von Bernoulli und l'Hôpital

Voraussetzungen: f und g sind in einer Umgebung von x_0 differenzierbar, und $g'(x)$ ist dort ungleich Null. Für Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ ist dann

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite der Gleichung existiert, im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn.

Andernfalls ist die Regel von Bernoulli und l'Hôpital nicht anwendbar. Sie gilt auch für einseitige Grenzwerte oder Grenzwerte für $x \to \pm\infty$.

Grenzwerte der Typen $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 sind analog zu verstehen. Zum Beispiel liegt ein Grenzwert vom Typ ∞^0 vor, wenn der Grenzwert eines Ausdrucks

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

berechnet werden soll, wobei $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ist.

Diese Ausdrücke können oft so umgeformt werden, dass eine der Regeln von l'Hôpital anwendbar ist. Bei den Typen in Form eines Exponenten ist häufig die vom logarithmischen Ableiten bekannte Umformung hilfreich: Es ist $a^b = e^{b\cdot\ln(a)}$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

4.3.2 Eigenschaften von Funktionen

Aus der Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen in einem Punkt kann man vor allem Rückschlüsse auf das Steigungsverhalten der Funktion ziehen:

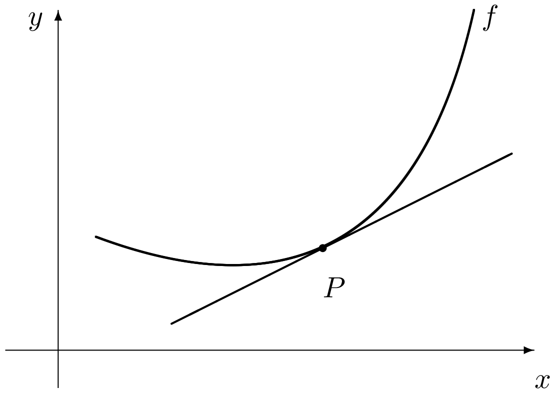
Wachstumsverhalten einer differenzierbaren Funktion

Wenn die Ableitung einer Funktion f auf einem Intervall (a, b) positiv (bzw. negativ) ist, dann ist die Funktion f auf (a, b) streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Dieser Zusammenhang gilt natürlich nur, wenn die Funktion auf dem ganzen Intervall definiert und auch differenzierbar ist. Dann kann man ihn benutzen, um Abschnitte zu bestimmen, auf denen eine Funktion monoton wächst oder fällt.

Mit einer ähnlichen Argumentation kann man aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung auf die Monotonie der Steigung von f schließen: Wenn das Vorzeichen von f'' auf einem Intervall positiv ist, dann gilt dort:

- die Steigung von f nimmt immer nur zu (wächst monoton),
- die Tangente an f liegt immer unterhalb des Funktionsgraphen,
- der Graph von f ist linksgekrümmt.



Analoges gilt für ein negatives Vorzeichen von f''.

Krümmungsverhalten einer differenzierbaren Funktion

Wenn die zweite Ableitung einer Funktion f auf einem Intervall (a, b) positiv (bzw. negativ) ist, dann ist die Funktion f auf (a, b) streng linksgekrümmt (bzw. rechtsgekrümmt).

Wenn die zweite Ableitung einen Vorzeichenwechsel in x_0 hat, dann nennt man $P(x_0, f(x_0))$ einen *Wendepunkt* von f. Insbesondere hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist.

Die Tangente in einem Wendepunkt heißt Wendetangente. Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt Terassenpunkt oder Sattelpunkt.

Dieser Zusammenhang gilt natürlich nur, wenn die Funktion f auf dem ganzen Intervall definiert und ausreichend oft differenzierbar ist.

4.3.3 Extremwertaufgaben

Definition 4.8 (Lokales Extremum) *Die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein lokales Maximum bzw. ein lokales Minimum, falls es eine Umgebung von x_0 gibt, in der $f(x_0)$ der größte bzw. der kleinste Funktionswert ist.*

Theorem 4.2 (Satz von Fermat) Sei f auf dem Intervall I definiert und an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. Wenn f an der Stelle x_0 ein relatives Extremum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Man nennt solche Stellen x_0, an denen der Graph der Funktion f eine waagerechte Tangente besitzt, d.h. $f'(x_0) = 0$, auch *stationäre Stellen von f*. Der Satz von Fermat dient als notwendiges Kriterium zum Bestimmen lokaler Extrema.

Nicht an allen stationären Stellen einer Funktion muss auch ein Extremum vorliegen. Man braucht daher andere, hinreichende Kriterien für das Vorliegen eines Extremums. Die nützlichsten sind in der Tabelle aufgelistet.

Viele Probleme in der Praxis führen auf solche Aufgaben, bei denen das globale Minimum oder Maximum einer Funktion in einem bestimmten Bereich bestimmt werden muss.

Vorgehen zum Bestimmen globaler Extrema

1. Bestimmen aller lokalen Minima bzw. Maxima;
2. Bestimmen der Funktionswerte in den Randpunkten (ggf. als Grenzwerte);
3. Bestimmen aller Werte an Stellen, wo f nicht differenzierbar ist (ggf. als Grenzwerte).

Der Vergleich aller dieser Werte liefert das globale Minimum bzw. Maximum.

Notwendiges Kriterium (Satz von Fermat)

Wenn eine differenzierbare Funktion f mit $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist dort der Wert der Ableitung gleich Null.

Hinreichendes Kriterium I: Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung

Angenommen, es ist $f'(x_0) = 0$. Dann liegt in x_0 ein lokales Extremum vor, wenn die Ableitung in x_0 ihr Vorzeichen wechselt:

a) $f'(x)$ ist negativ für $x < x_0$ und positiv für $x > x_0$	Tiefpunkt $T(x_0, f(x_0))$
b) $f'(x)$ ist positiv für $x < x_0$ und negativ für $x > x_0$	Hochpunkt $H(x_0, f(x_0))$

Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Hinreichendes Kriterium II: Wert der 2. Ableitung

Angenommen, es ist $f'(x_0) = 0$. Dann liegt in x_0 ein lokales Extremum vor, wenn $f''(x_0) \neq 0$ ist, und zwar:

a) $f''(x_0)$ ist negativ	Hochpunkt $H(x_0, f(x_0))$
b) $f''(x_0)$ ist positiv	Tiefpunkt $T(x_0, f(x_0))$

Hinreichendes Kriterium III: Höhere Ableitungen

Angenommen, es ist $f'(x_0) = 0$ und außerdem $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann kommt es auf die Ordnung n an:

a) n ist gerade	Extremum in x_0 (Vorzeichen wie Kriterium II)
b) n ist ungerade	kein Extremum, sondern Sattelpunkt

Achtung: Diese Kriterien sind nur anwendbar, wenn f um x_0 herum genügend glatt ist.

5 Grundlagen der Integralrechnung

5.1 Das bestimmte Integral

Aufgabe: Berechnung des Flächeninhalts unter dem Graphen von f, über ein Intervall $[a, b]$.

Weg: Annäherung des Flächeninhalts durch eine Summe von Rechtecken.

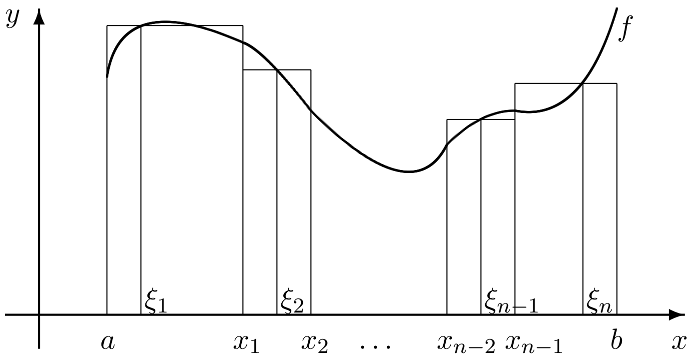
Eine *Zerlegung* Z ist eine Unterteilung von $[a, b]$ in n Teilintervalle, durch die Zahlen

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$$

Durchmesser der Zerlegung (Maß für die Feinheit der Zerlegung):

$$d = d(Z) = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\} ,$$

wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ jeweils die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$ ist.



Aus jedem Teilintervall wählt man eine beliebige *Zwischenstelle* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Die *Zwischensumme*

$$S = S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

ist abhängig von der gewählten Zerlegung und den gewählten Zwischenwerten.

Definition 5.1 (Bestimmtes Integral) *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt. Dann heißt f integrierbar, wenn es eine reelle Zahl I gibt, so dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Zerlegungen Z mit $d(Z) < \delta$ und eine beliebige Wahl von Zwischenwerten gilt, dass $|S(Z) - I| < \epsilon$ ist. Man schreibt auch*

$$I = \lim_{d(Z)\to 0} S(Z) = \int_a^b f(x)dx$$

Die Zahl I nennt man das bestimmte Integral von f über $[a,b]$. Existiert dieser Grenzwert, dann heißt die Funktion f integrierbar über $[a,b]$.

Integralwerte können also insbesondere auch negativ sein (im Unterschied zu Flächeninhalten). Zur Ergänzung definiert man weiter: Wenn die Untergrenze a größer als die Obergrenze b ist, dann ist $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (vorausgesetzt, dass $\int_b^a f(x)\,dx$ existiert). Wenn f an der Stelle a definiert ist, setzen wir $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Was für Funktionen sind überhaupt integrierbar? Zur Klärung dieser Frage ist die Definition etwas zu unhandlich. Man vereinfacht den Grenzwert, indem man in der Rechtecksumme $S = S(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ keine beliebigen Zwischenwerte $f(\xi_i)$ wählt, sondern jeweils die obere Grenze M_i bzw. die untere Grenze m_i der Funktion auf dem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$. So erhält man die Spezialfälle

$$\text{Obersumme } \; O = O(Z) = \sum_{i=1}^n M_i\cdot\Delta x_i\,,\;\; \text{Untersumme } \; U = U(Z) = \sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i$$

Mit Hilfe der Ober- und Untersummen kann man Funktionen leichter auf Integrierbarkeit untersuchen:

Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Theorem 5.1 (Riemannsches Integrabilitätskriterium) Die auf dem Intervall $[a,b]$ beschränkte Funktion f ist genau dann über $[a,b]$ integrierbar, wenn die Grenzwerte $\lim_{d(Z)\to 0} U(Z) = \underline{I}$ und $\lim_{d(Z)\to 0} O(Z) = \bar{I}$ existieren und übereinstimmen. Dann gilt

$$\underline{I} = \bar{I} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium kann man schlussfolgern:

Theorem 5.2 Jede auf einem abgeschlossenen Intervall *monotone* Funktion ist dort integrierbar.

Theorem 5.3 Jede auf einem abgeschlossenen Intervall *stetige* Funktion ist dort integrierbar.

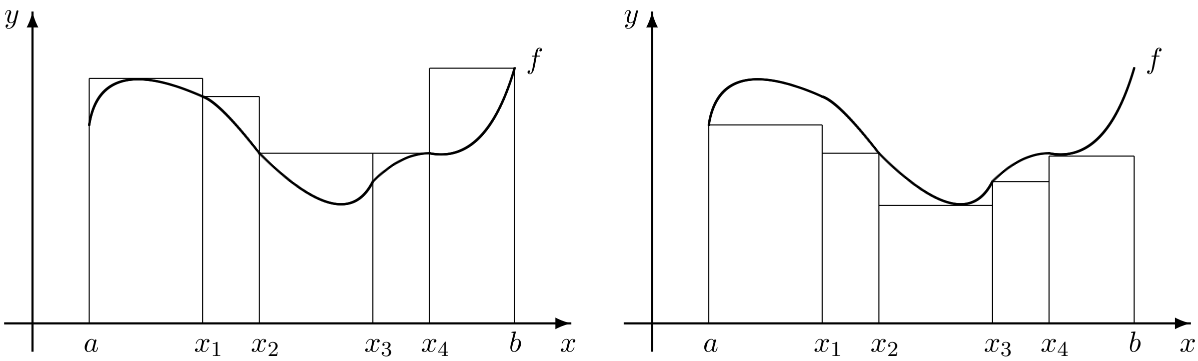


Abbildung 2: Obersumme (links) und Untersumme (rechts) für eine Zerlegung

Theorem 5.4 Jede auf einem abgeschlossenen Intervall *beschränkte und an höchstens endlich vielen Stellen unstetige* Funktion ist dort integrierbar.

5.2 Das unbestimmte Integral

Definition 5.2 (Stammfunktion) *Sei f eine stetige Funktion im Intervall $[a, b]$. Eine differenzierbare Funktion F in $[a, b]$ heißt Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.*

Theorem 5.5 Sei f stetig auf $[a, b]$, und F_1 eine Stammfunktion von f. Dann erhält man sämtliche Stammfunktionen zu f durch

$$F(x) = F_1(x) + C\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Definition 5.3 (Unbestimmtes Integral) *Die Menge aller Stammfunktionen zu einer stetigen Funktion f auf $[a, b]$ wird unbestimmtes Integral genannt und man schreibt:*

$$\int f(x)\,dx \ = \ F(x) + C\,, \ \ \textit{wenn } F'(x) = f(x)$$

$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	$x \in \mathbb{R}^+$, $r \neq -1$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(\lvert x\rvert) + C$	$x \neq 0$	$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$		$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C$	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$

Tabelle 8: Wichtigste Grundintegrale. Eine vollständige Liste aller Grundintegrale finden Sie in Ihrer Formelsammlung (z. B. Papula Abschnitt 2.3).

5.3 Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral

Definition 5.4 (Integralfunktion) *Ist die Funktion f über $[a, b]$ integrierbar und $c \in [a, b]$, so nennt man die Funktion $I(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ mit $x \in [a, b]$ eine Integralfunktion der Funktion f.*

Theorem 5.6 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Ist f auf $[a, b]$ stetig, dann ist jede Integralfunktion I auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt $I' = f$.

Theorem 5.7 Ist f auf $[a, b]$ stetig, dann existiert auch eine Stammfunktion F von f, und jede Integralfunktion von f ist gleichzeitig Stammfunktion von f.

Theorem 5.8 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei F eine Stammfunktion der auf $[a, b]$ stetigen Funktion f. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Zusammenfassung Die Integration kann als Umkehroperation zur Ableitung (Differentiation) verstanden werden. Das ist die Aussage der zwei Hauptsätze:

1. Der 1. Hauptsatz (zuerst integrieren, dann ableiten):
$$\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$
2. Der 2. Hauptsatz (zuerst ableiten, dann integrieren):
$$\int_a^x (F'(t))\,dt = F(x) - F(a) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_a^x (F'(t))\,dt \qquad \underbrace{+F(a)}_{\text{bis auf Konstante}}$$

5.4 Integrationsmethoden

Die einfachste Integrationsregel basiert auf Summen- und Faktorregel der Ableitung.

Linearität des Integrals

Seien u und v stetig auf $[a, b]$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$
$$\int (c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x))\ dx = c_1 \cdot \int u(x)\,dx + c_2 \cdot \int v(x)\,dx$$

5.4.1 Partielle Integration

Die Methode der partiellen Integration basiert auf der Produktregel der Ableitung.

Partielle Integration

Wenn die Funktionen u und v auf $[a, b]$ stetig differenzierbar sind, dann gilt auf $[a, b]$
$$\int u'(x)v(x)\,dx \ = \ u(x) \cdot v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

Es hängt von der geschickten Rollenverteilung der beiden Faktoren u' und v ab, ob man mit der partiellen Integration zu einer Lösung kommt. Bei der Zerlegung des Integranden in die beiden Faktoren u' und v ist es wichtig, dass man leicht eine Stammfunktion für den Faktor u' finden kann, und das Integral auf der rechten Seite möglichst einfacher wird, also dass man eine Stammfunktion von $u \cdot v'$ bestimmen kann.

5.4.2 Integration durch Substitution

Substitution ist eine sehr mächtige Integrationsmethode, mit der man die Stammfunktion vieler verketteter Funktionsausdrücke schnell finden kann. Einige Integraltypen, bei denen Substitution schnell zum Erfolg führt, sind in Tabelle 9 aufgeführt.

In der Praxis führt man bei den Standardsubstitutionen die folgenden Schritte durch:

1. Festlegen der Gleichung für die substituierte Variable $u = g(x)$ und Ableiten der Funktion $g(x)$ nach x, das heißt $g'(x) = \frac{du}{dx}$. Dieser Ausdruck wird nach dx umgestellt, um auch das Differential dx ersetzen zu können: $dx = \frac{1}{g'(x)}\,du$. Diesen Schriit nennt man auch das *Aufstellen der Substitutionsgleichungen*: $u = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(u)$ und $dx = \frac{1}{g'(x)}\,du$.

Standardsubstitutionen		
Integraltyp	Substitution	Ergebnis nach Substitution
$\int f(ax+b)\,dx$	$u = ax+b$	$\frac{1}{a}\int f(u)\,du$
$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$	$\int u\,du = \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 + C$
$\int \left(f(x)\right)^\alpha \cdot f'(x)\,dx$, für $(\alpha \neq -1)$	$u = f(x)$	$\int u^\alpha\,du = \frac{1}{\alpha+1}\left(f(x)\right)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u = f(x)$	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\left(\lvert f(x)\rvert\right) + C$
$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$	$\int g(u)\,du$
Substitutionen für spezielle Wurzelausdrücke		
Integraltyp	Substitution	Beispiel
$\int f(x;\sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a\cdot\sin(u)$	$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $\int x\cdot\sqrt{2-x^2}\,dx$
$\int f(x;\sqrt{x^2+a^2})\,dx$	$x = a\cdot\sinh(u)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$
$\int f(x;\sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a\cdot\cosh(u)$	$\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$

Tabelle 9: Häufige Substitutionen (weitere siehe Formelsammlung).

2. Einsetzen in das Integral und Vereinfachen (am besten in einer Nebenrechnung). Es sollten danach keine Ausdrücke von x mehr im Integral vorhanden sein.
3. Bestimmen der Stammfunktion für das Integral über u.
4. Rücksubstitution, das heißt Ersetzen aller Vorkommen von u durch $u = g(x)$.

Wenn man ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ durch Substitution berechnen möchte, dann gibt es zwei alternative Wege:

a) Zuerst lässt man die Grenzen weg und bestimmt die Stammfunktion $F(x)$ wie oben, inklusive Rücksubstitution: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

   Danach berechnet man in einem zweiten Schritt das bestimmte Integral durch Einsetzen der Grenzen: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

b) Man kann die Grenzen auch während der Substitution mitrechnen und dann nach Schritt 3 direkt einsetzen. Allerdings darf man nicht vergessen, die Grenzen auf die neue Variable u umzurechnen: $u_1 = g(a)$ und $u_2 = g(b)$.

In jedem Fall ist es wichtig, zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral sauber zu unterscheiden: $\int f(x)\,dx$ ist eine Menge von Funktionen, aber $\int_a^b f(x)\,dx$ ein Zahlenwert. Sie sind niemals gleich.

Substitutionen für spezielle Wurzelausdrücke In den letzten drei Zeilen der Tabelle 9 finden Sie Substitutionen, die anders als die bisher behandelten Standardsubstitutionen sind. Sie dienen dem Auflösen bestimmter Wurzelausdrücke und benutzen dabei sehr stark den trigonometrischen und den hyperbolischen Pythagoras:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \;, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Diese Substitutionen sind nicht in der gewohnten Form $u = g(x)$ angegeben, sondern umgekehrt in der Form $x = h(u)$, z.B. $x = a \cdot \sin(u)$. Die entsprechenden Substitutionsgleichungen gewinnt man dann durch Ableiten der Hilfsfunktion nach u wie folgt:

$$\frac{dx}{du} = h'(u) \;\Leftrightarrow\; dx = h'(u) \cdot du$$

Die Rücksubstitution ist in diesen Fällen häufig aufwändig. Soll ein bestimmtes Integral berechnet werden, ist es hier besonders sinnvoll, sich durch Mitrechnen der Grenzen die Rücksubstitution zu ersparen.

5.4.3 Integration gebrochenrationaler Funktionen

Jede echt gebrochenrationale Funktion kann man in eine Summe von einfachen Teilbrüchen, genannt Partialbrüche, zerlegen. Das sind Brüche einfacher Form, deren Nenner von den einzelnen Linearfaktoren des Nennerpolynoms bestimmt werden.

Achtung: Partialbruchzerlegung (PBZ) funktioniert nur für echt gebrochenrationale Funktionen. Unecht gebrochenrationale Funktionen muss man in einem ersten Schritt in ihren ganzrationalen Anteil und den echt gebrochenrationalen Rest zerlegen.

Vorgehen zur PBZ bei echt gebrochenrationalen Funktionen:

1. Zerlegung in einfach zu integrierende Teilbrüche:
   a) Bestimmen der Linearfaktorzerlegung des Nennerpolynoms;
   b) Der Ansatz besteht aus einer Summe von Teilbrüchen. Jeder Teilbruch gehört zu einem Faktor in der Linearfaktorzerlegung:
      - für jede einfache Nullstelle x_0: ein Summand der Form $\frac{A}{x-x_0}$
      - für jede k-fache Nullstelle x_0: k Summanden der Form $\frac{A_1}{x-x_0}, \frac{A_2}{(x-x_0)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(x-x_0)^k}$
      - für jeden quadratischen Term x^2+px+q, der keine reellen Nullstellen hat: ein Summand der Form $\frac{B+Cx}{x^2+px+q}$
   c) Hauptnennerbildung für die Summe der Teilbrüche im Ansatz (Kontrolle: danach sollte der Hauptnenner gleich der LFZ des Nennerpolynoms sein);
   d) Ermitteln der Konstanten durch Gleichsetzen der Zähler. Dazu setzt man für x so viele verschiedene Werte ein, wie Konstanten zu bestimmen sind (geschickt sind die Nullstellen des Nenners).

Es gibt nur wenige Typen von Partialbrüchen, die mit Hilfe der nebenstehenden Tabelle integriert werden können.

$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(\lvert x-a\rvert) + C$	$x \neq a$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$a \neq 0$
$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$	$x^2+a^2 > 0$

5.5 Das uneigentliche Integral

Uneigentliche Integrale entstehen immer dann, wenn eine der elementaren Voraussetzungen für die Existenz des bestimmten Integrals verletzt ist, weil

a) das Integrationsintervall kein endliches Intervall $[a, b]$ ist oder

b) der Integrand $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalls nicht überall definiert und beschränkt ist.

Insbesondere der erste Typ von uneigentlichen Integralen wird uns in der Stochastik häufig begegnen. Man definiert:

Definition 5.5 (Uneigentliches Integral 1. Art) *f sei über jedes Intervall $[a, t]$ mit $t > a$ integrierbar. Wenn der Grenzwert*

$$I = \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

existiert, dann nennt man I das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$.

f sei über jedes Intervall $[t, a]$ mit $t < a$ integrierbar. Wenn der Grenzwert

$$I = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

existiert, dann nennt man I das uneigentliche Integral von f über $(-\infty, a]$.

f sei über jedes Intervall $[t_1, t_2]$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ integrierbar und $a \in \mathbb{R}$. Wenn beide Grenzwerte

$$I_1 = \lim_{t_1\to-\infty} \int_{t_1}^a f(x)\,dx \;\; \textit{und} \;\; I_2 = \lim_{t_2\to\infty} \int_a^{t_2} f(x)\,dx$$

unabhängig voneinander existieren, dann nennt man $I = I_1 + I_2$ das uneigentliche Integral von f über $(-\infty, \infty)$ und schreibt $I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$.

Ist es aufwändig, die Stammfunktion des Integranden zu finden, kann man mit Hilfe von Konvergenzkriterien zumindest herausfinden, ob ein uneigentliches Integral konvergiert oder nicht. Mit Konvergenzkriterien werden wir uns im kommenden Semester im Abschnitt Funktionenreihen tiefer beschäftigen.

Theorem 5.9 (Majorantenkriterium) Seien f und g über jedes Intervall $[a, t]$ mit $t > a$ integrierbar, und es sei $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \geq a$. Dann gilt: Wenn $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Theorem 5.10 (Minorantenkriterium) Seien f und g über jedes Intervall $[a, t]$ mit $t > a$ integrierbar, und es sei $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \geq a$. Dann gilt: Wenn $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

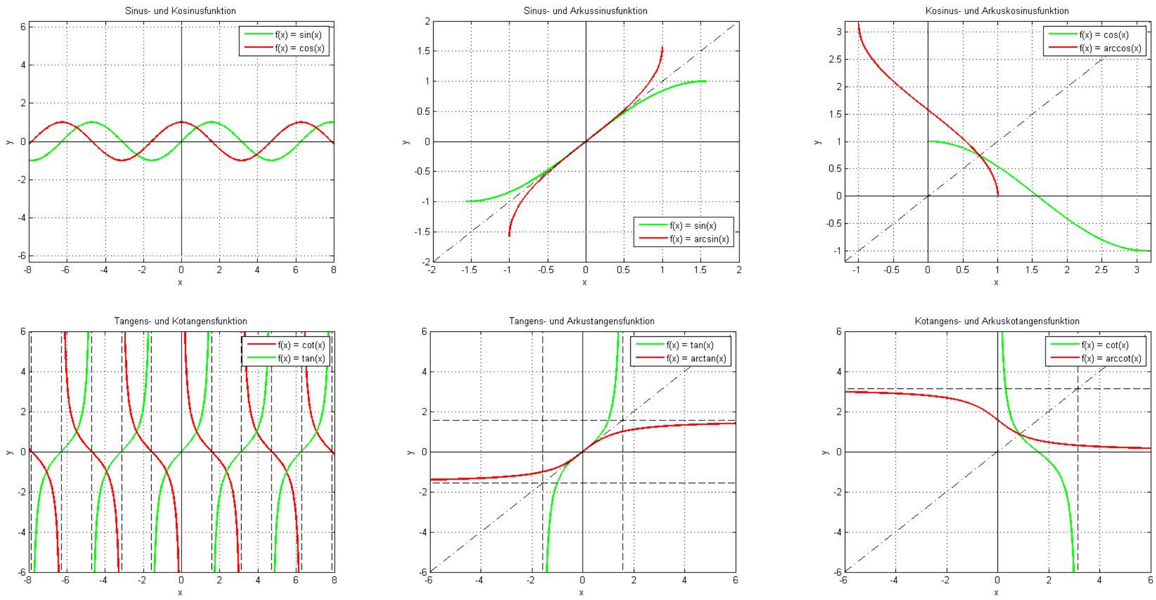
Theorem 5.11 (Notwendiges Kriterium) Wenn $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert und der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ existiert, so ist $g = 0$.

Eine zweite Art von uneigentlichen Integralen ergibt sich für Integranden, die

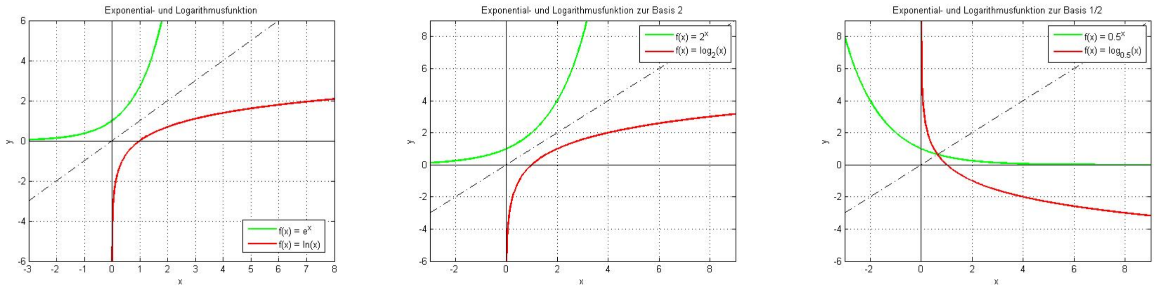
- auf dem Integrationsintervall $[a, b]$ nicht beschränkt sind (z.B. durch eine Unendlichkeitsstelle),
- in einem einzelnen Punkt x_0 innerhalb von $[a, b]$ nicht definiert sind.

Auch hier definiert man das uneigentliche Integral als Grenzwert, wobei die Integrationsgrenze diesmal gegen die Unstetigkeitsstelle x_0 strebt.

Schaubilder: Trigonometrische Funktionen



Schaubilder: Exponentialfunktionen und Logarithmen



Schaubilder: Hyperbolische Funktionen