Lektion 4

In dieser Lektion wird zunächst das Vier-Farben-Problem betrachtet, eine berühmte Fragestellung mit Zusammenhang mit planaren Graphen. Es werden dann weitere wichtige Grundbegriffe der Graphentheorie eingeführt, die mit dem Konzept des Wegs/Pfads verbunden sind.

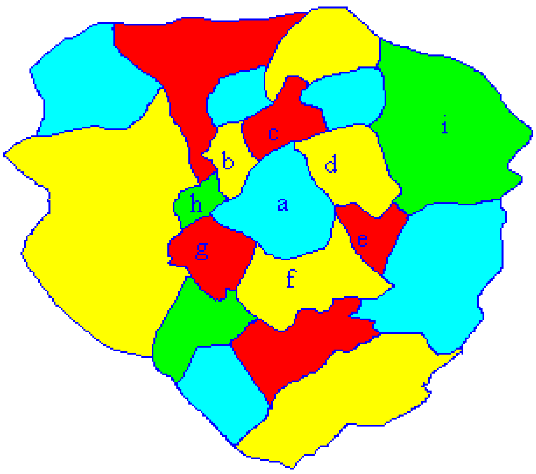
3.3.4 Das Vier-Farben-Problem

Ein weiteres berühmtes Problem der Graphentheorie ist das sog. *Vier-Farben-Problem*, das erstmals 1852 formuliert wurde:

> *Lässt sich jede beliebige Landkarte so mit vier Farben einfärben, dass niemals zwei benachbarte Länder die gleiche Farbe haben?*

Es wird dabei angenommen, dass jedes Land ein zusammenhängendes Gebiet ist, es gibt also keine Enklaven innerhalb des Gebiets anderer Länder gibt. Treffen Länder nur an einem Punkt zusammen (z.B. 3-Länder-Eck), wird das nicht als benachbart gewertet.

Hier ist eine mit vier Farben eingefärbte Landkarte zu sehen:

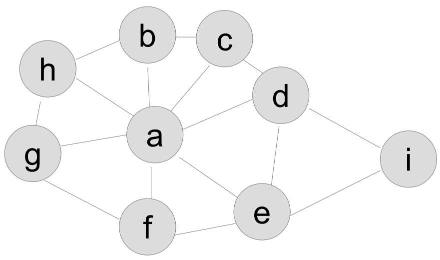


Inwiefern ist das ein Problem der Graphentheorie? Analog wie beim Königsberger Brückenproblem ist die genaue Form der Länder unwichtig. Für die Färbung ist nur relevant, welche Länder eine gemeinsame Grenze mit anderen Ländern haben.

Formalisierung des Vier-Farben-Problems

Die Nachbarschaft der Länder kann als ungerichteter Graph dargestellt werden:

- Länder als Knoten
- Sind zwei Länder direkt benachbart, d.h. sie haben eine gemeinsame Grenze, werden die Knoten durch eine Kante verbunden.



- Der Nachbarschaftsgraph, der sich dabei ergibt, ist immer **planar**.
- Die Einfärbung einer Landkarte entspricht dann der Färbung der Knoten des Nachbarschaftsgraphen. Eine **Knotenfärbung** ist **zulässig**, wenn benachbarte (d.h. durch Kante verbundene) Knoten immer unterschiedliche Farben haben.

Seit das Vier-Farben-Problem erstmals 1852 formuliert wurde, gab es in der Folge unzählige Beweisversuche, die sich dann später allerdings als fehlerhaft herausstellten. Erst 1976 gelang es, das Problem zu lösen.

Satz 3.22 - Vier-Farben-Satz [Appel,Haken, 1976]

Jeder planare Graph ist mit vier Farben zulässig färbbar.

Daraus folgt dann, dass jede Landkarte s.o. mit vier Farben gefärbt werden kann.

Anmerkung

Der Beweis dieses Satzes durch Appel und Haken war in zweifacher Hinsicht sehr bemerkenswert:

(1) Es wurde ein seit mehr als 120 Jahren offenes Problem gelöst.

(2) Das Problem wurde auf ganz besondere, damals neue Weise gelöst: Der äußerst komplizierte Beweis wurde mit Hilfe eines Computers geführt:

- 1936 verschiedene Fälle mussten geprüft werden.
- Die Prüfung der Fälle erforderte 1200 h Rechenzeit auf einem IBM-360-Großrechner.

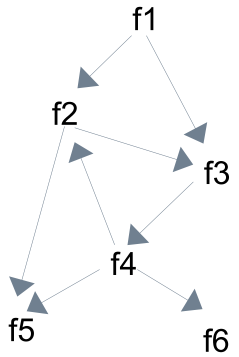
3.4 Wege, Zyklen und Kreise

Als Motivation für die nächsten Begriffe betrachten wir zunächst ein Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Software-Qualitätssicherung.

Rekursionserkennung

Manche Qualitätssicherungsstandards verbieten den Einsatz von Rekursion in Software für Embedded Systems, z.B. der MISRA Standard (*Motor Industry Software Reliability Association*), der im Automotive-Bereich verwendet wird. Wie kann ein automatisches Prüftool erkennen, ob Rekursion im Programmcode vorkommt?

- Der erste Schritt ist, durch statische oder dynamische Programmanalyse einen *Aufrufgraph* (engl. *call graph*) zwischen Funktionen/Methoden zu ermitteln. Das ist ein gerichteter Graph, der angibt, welche Funktionen eine Funktion möglicherweise aufruft:



- Wann liegt Rekursion vor (direkt oder indirekt)? Das ist dann der Fall, wenn es eine Folge von Aufrufen gibt, also einen Folge von Kanten im Aufrufgraph, so dass man wieder bei der ursprünglichen Funktion landet. So einen *Weg* im Graphen, der zum Ausgangspunkt zurückführt, nennt man einen *Zyklus*.

  Die Prüfung auf Rekursion ist also nichts anderes als *Zyklenerkennung* im Aufrufgraph (ein effizienter Algorithmus dafür wird nächstes Semester in Algorithmen&Datenstrukturen behandelt).

Stellt man sich einen Graphen als eine Art Landkarte vor, so dass die Kanten die Straßen repräsentieren, denen man folgen kann (bei gerichteten Graphen nur in eine Richtung, bei ungerichteten Graphen in beide Richtungen), ergibt sich naheliegend der Begriff des *Wegs* (oder *Pfads*): Ein Weg/Pfad wird durch ein Folge von Knoten bestimmt, so dass man jeweils über eine Kante von einem Knoten zum folgenden kommt. Die *Länge* eines Pfads ist die Anzahl der Kanten, die dabei durchlaufen werden.

Definition 3.23 - Wege in gerichteten Graphen

Gegeben sei ein gerichteter Graph G = (V, E). Ein **Weg** oder **Pfad** (engl. *path*) der **Länge** n von v_0 nach v_n. ist eine Folge von Knoten

$(v_0, v_1, ..., v_n)$,

so dass jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $0 \leq i < n$, d.h. jeweils eine Kanten vom Knoten v_i zum Folgeknoten v_{i+1} existiert.

Definition 3.24 - Zyklen und Kreise

- Ein **Zyklus** ist ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_n)$ der Länge $n > 0$ mit $v_0 = v_n$, d.h. Ausgangs und Endknoten des Wegs stimmen überein.
- Ein **Kreis** ist ein Zyklus $(v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_0)$, in dem alle Knoten v_0 bis v_{n-1} paarweise voneinander verschieden sind.
- Ein gerichteter Graph heißt **azyklischer Graph** (engl. *directed acyclic graph*, *DAG*), wenn der *keinen Zyklus* enthält.

Pfade, die wieder am Ausgangsknoten enden, werden also als *Zyklen* bezeichnet. Graphen, die keinen Zyklus enthalten, werden als *azyklisch* (= nicht zyklisch) bezeichnet.

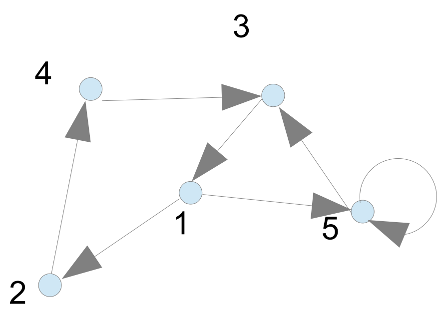
Kreise sind gewissermaßen elementare Zyklen. Ist ein Zyklus kein Kreis, sind darin kleinere Teilzyklen enthalten.

Anmerkung

- Weg, Zyklus und Kreis sind für ungerichtete Graphen analog definiert
- Jeder Zyklus ist somit auch ein Weg. Jeder Kreis ist ein (spezieller) Zyklus.

Beispiel 3.25 - Wege, Zyklen und Kreise

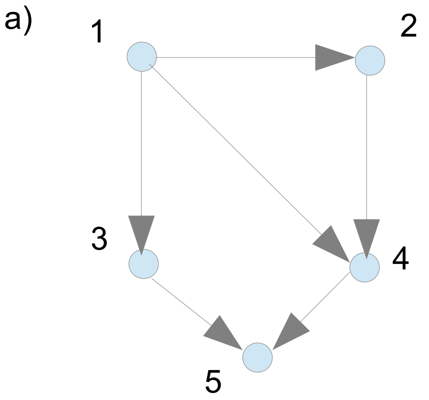
Ein gerichteter Graph wie rechts dargestellt ist gegeben:

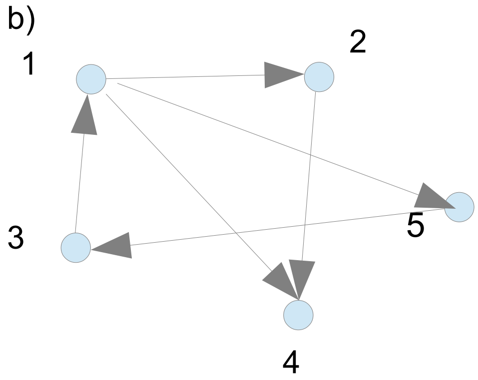


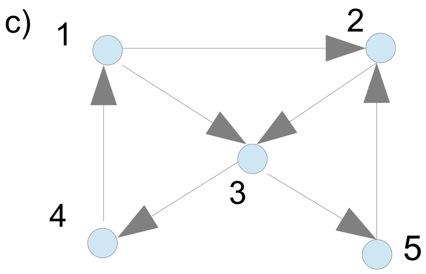
- (5,3,1,2,4) ist ein Weg
- (1,5,3,1) ist ein Zyklus und auch ein Kreis
- (5,5) ist auch ein Zyklus (und Kreis)
- (2,4,**3**,**1**,5,**3**,**1**,2) ist ein Zyklus, aber kein Kreis. In diesem Zyklus sind die kleineren Zyklen/Kreise (2,4,3,1,2) und (3,1,5,3) enthalten.
- Der Graph ist folglich *nicht azyklisch*, da er Zyklen enthält.

Aufgabe 3.26 - Azyklische Graphen und Kreise

(1) Welche der folgenden Graphen sind azyklisch?



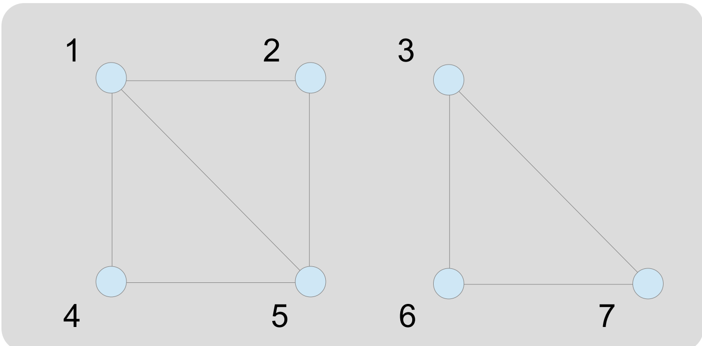




(2) Geben Sie für einen der Graphen einen Zyklus an, der kein Kreis ist.

3.5 Zusammenhang

Betrachten man den folgenden Graphen mit Knotenmenge V= {1, 2,… , 7}, so sieht man unmittelbar, dass der Graph aus zwei Teilen besteht, die voneinander getrennt sind, also nicht zusammenhängen.



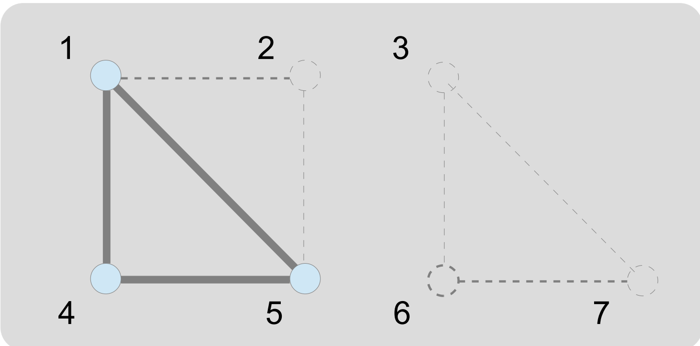
Wie lässt sich das, was man hier anschaulich sofort erkennt, mathematisch ausdrücken? Dass die Teile nicht zusammenhängen heißt, dass es keinen Pfad von einem Knoten in einem Teil zu einem Knoten im anderen Teil gibt. Wenn man von jedem Knoten zu jedem anderen kommen kann, dann zerfällt der Graph also nicht in mehrere Teile, d.h. dann ist er *zusammenhängend*.

Definition 3.27 - Zusammenhang bei ungerichteten Graphen

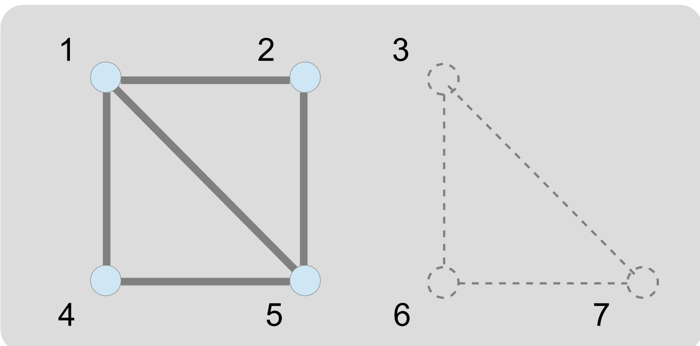
- Ein *ungerichteter Graph* $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, wenn es von jedem Knoten $v_1 \in V$ zu jedem anderen Knoten $v_2 \in V$ jeweils mindestens einen Weg gibt.
- Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt **Zusammenhangskomponente,** wenn folgende zwei Bedingungen gelten:
  - G' ist zusammenhängend.
  - G hat keinen größeren Teilgraphen G'', der zusammenhängend ist und G' als Teilgraph enthält.
- Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein **Teilgraph** von $G = (V, E)$, falls die Knoten- bzw. Kantenmenge von G' jeweils eine Teilmenge der Knoten- bzw. Kantenmenge von G ist, d.h. $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$

Anmerkungen

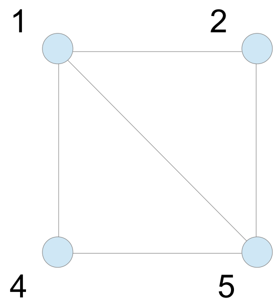
- Ein Zusammenhangskomponente ist also ein maximal großer zusammenhängender Teilgraph. Im Beispiel oben wären z.B. folgendes ein zusammenhängender Teilgraph:



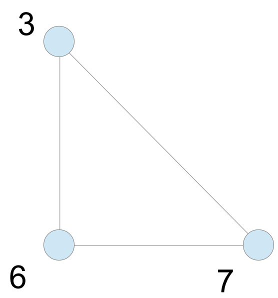
Man kann aber noch Knoten 2 und zwei Kanten dazunehmen, und es bleibt immer noch ein zusammenhängender Teilgraph:



Sobald man jetzt noch etwas dazu nehmen würde (eine der Knoten 3, 6 oder 7 und weitere Kanten), wäre der Teilgraph nicht mehr zusammenhängend. Deshalb ist der folgende Teilgraph eine Zusammenhangskomponente:

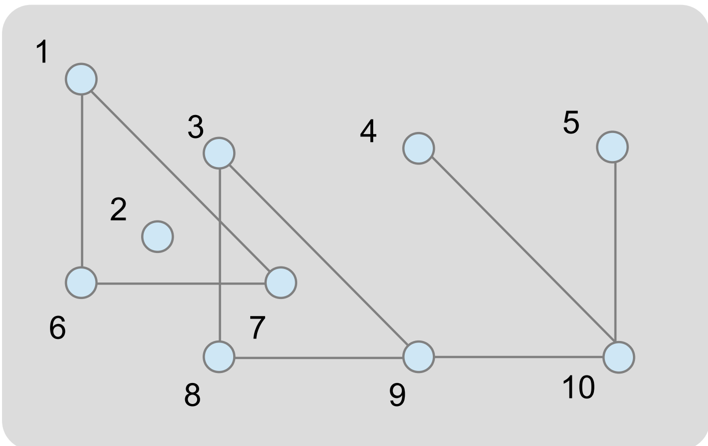


Eine zweite Zusammenhangskomponente besteht aus den Knoten 3, 6 und 7 und den Kanten dazwischen:



Aufgabe 3.28 - Zusammenhangskomponenten

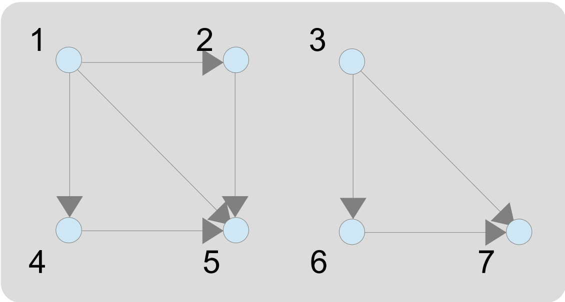
Was sind die Zusammenhangskomponenten des folgenden Graphen:



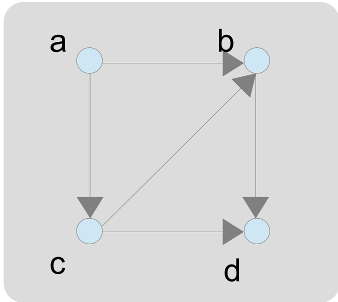
Wie verhält es sich bei *gerichteten* Graphen mit dem Begriff Zusammenhang? Betrachten Sie dazu die zwei Graphen aus folgendem Beispiel:

Beispiel 3.29 - Zusammenhang bei gerichteten Graphen

Graph G_1:



Graph G_2:



- Ist G_1 zusammenhängend? Ganz offensichtlich nicht!
- Ist G_2 zusammenhängend? Vermutlich antworten Sie intuitiv mit ja (was auch nicht ganz falsch ist). Nimmt man aber die gleiche Definition wie bei ungerichteten Graphen - Graph ist zusammenhängend, falls es von jedem Knoten zu jedem anderen einen Pfad gibt - dann ist die Bedingung bei G_2 nicht erfüllt, beispielsweise gibt es keine Pfad von d nach a.

Bei gerichteten Graphen unterscheidet man deshalb zwei verschiedene Arten von Zusammenhang.

Definition 3.30 - Zusammenhang bei gerichteten Graphen

- Ein *gerichteter Graph* heißt **stark zusammenhängend**, wenn es für jede Kombination v_1, v_2 von zwei Knoten jeweils einen Weg von v_1 nach v_2 gibt.
- Ein ***gerichteter* Graph** heißt (**schwach**) **zusammenhängend**, wenn er, als ungerichteter Graph betrachtet (d.h. Kanten als ungerichtete Kanten gesehen), zusammenhängend wäre.

zu Beispiel 3.29 - Zusammenhang bei gerichteten Graphen

- Graph G_1 ist also *nicht stark zusammenhängend* und auch n*icht (schwach) zusammenhängend*.
- Graph G_2 ist *(schwach) zusammenhängend*, aber *nicht stark zusammen-hängend, da es z.B. als gerichteter Graph keine Wege von d zu anderen Knoten gibt.*

Aufgabe 3.31 - Zusammenhang

Das Straßennetz einer Stadt kann als gerichteter Graph modelliert werden. Einbahnstraßen werden als eine Kante repräsentiert, Straßen, die in beide Richtungen befahren werden dürfen, als zwei Kanten in beide Richtungen.

Sollte das Straßennetz einer Stadt dann stark zusammenhängend sein oder (schwach) zusammenhängend?

3.5.1 Euler-Zyklen und -Wege

Nun kennen Sie alle Begriffe, die für die Lösung von Eulers Königsberger Brückenproblem nötig sind. Da Brücken und Wege in beliebige Richtung durchlaufen werden können, geht es um ungerichtete Graphen. Und verständlicherweise sollte man einen zusammenhängenden Graphen haben, sonst kann man nicht alles erreichen.

Definition 3.32 - Euler-Weg und Euler-Zyklus

gegeben: ungerichteter, zusammenhängender Graph G = (*V*, *E*).

- Ein **Euler-Weg** für *G* ist ein Weg, in dem *jede Kante aus E genau einmal* durchlaufen wird.
- Ein **Euler-Zyklus** für *G* ist ein *Zyklus*, in dem *jede Kante aus E genau einmal* durchlaufen wird (d.h. man kommt am Ausgangsknoten wieder an).

Wie kann man erkennen, ob es für einen Graphen einen Euler-Zyklus oder einen Euler-Weg gibt? Hier ist nun die Lösung von Herrn Euler:

Satz 3.33 [Leonhard Euler, 1736]

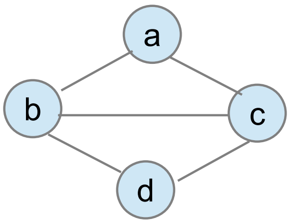
gegeben: ungerichteter, zusammenhängender Graph G = (*V*, *E*).

- *G* hat einen **Euler-Zyklus** genau dann, wenn **alle Knoten** einen **geraden Grad** haben.
- *G* hat einen **Euler-Weg**, der kein Zyklus ist, genau dann, wenn **genau zwei Knoten ungeraden Grad** haben und alle anderen einen geraden Grad.

Anmerkung

Es lässt sich also sehr einfach und effizient prüfen, ob Euler-Wege oder Euler-Zyklen existieren. Auf den Beweis dafür soll hier verzichtet werden. Es gibt auch effizient Algorithmen, die Euler-Wege bzw. Euler-Zyklen berechnen können, sofern sie existieren.

Beispiel 3.34 - Euler-Weg



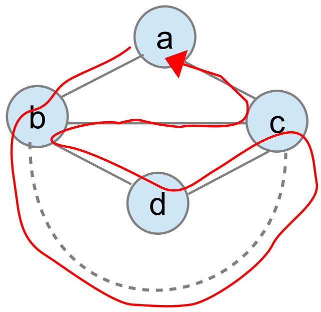
THU Technische Hochschule Ulm

Wäre das der Graph für Königsberg, dann gäbe es also einen Euler-Weg, aber keinen Euler-Zyklus, da genau zwei Knoten (b und c), einen ungeraden Grad haben.

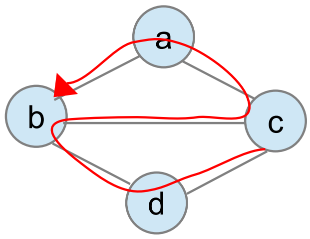
Zusammenhang Euler-Zyklus/Euler-Weg

Wenn bewiesen ist, dass es einen Euler-Zyklus gibt, sofern alle Knoten geraden Grad haben, lässt sich leicht die Eigenschaft für Euler-Wege folgern:

- Hat man einen Graphen, der genau zwei Knoten *u*, *v* mit ungeradem Grad hat, dann könnte man eine neue Kante zwischen *u* und *v* einfügen. Danach hätten alle Knoten geraden Grad und es gäbe einen Euler-Zyklus (der auch irgendwo einmal die neue Kante durchläuft). Einen solchen Zyklus kann man an jedem beliebigen Knoten beginnen lassen (hier im Beispiel bei Knoten a).



Euler-Zyklus im erweiterten Graph



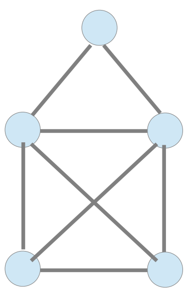
entsprechender Euler-Weg im ursprünglichen Graph

Lässt man die neue Kante weg, kann man auf dem verbleibenden Teil des Zyklus alle Kanten durchlaufen. Man muss also für einen Euler-Weg an einem Knoten mit ungeradem Grad starten und landet am Ende beim anderen Knoten mit ungeradem Grad.

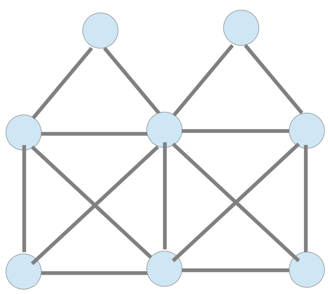
Aufgabe 3.35 - Euler-Weg/-Zyklus

Mit Euler-Wegen/-Zyklen haben Sie sich vielleicht schon in Ihrer Kindheit beschäftigt ("Das ist da Haus vom Nikolaus"). Gibt es einen Euler-Zyklus oder Euler-Weg für das Einzel- bzw. Doppelhaus vom Nikolaus?

(1)



(2)



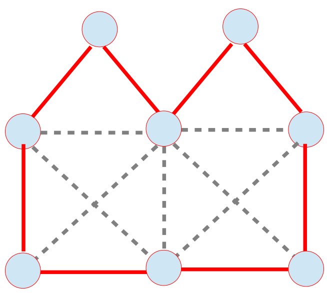
3.5.2 Hamilton-Kreise

Eine weitere Fragestellung, die Ähnlichkeit mit Eulers Brückenproblem hat, ist das sog. Problem der *Hamilton-Kreise*. Hier geht es nicht darum, jede Kanten genau einmal zu durchlaufen, sondern jeden Knoten genau einmal zu besuchen. Die Frage nach Hamilton-Kreisen ist also gewissermaßen das duale Problem zur Frage nach Euler-Zyklen.

Definition 3.36 - Hamilton-Kreise

Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Ein Zyklus, bei dem **jeder *Knoten* genau einmal** besucht wird (bis auf den Startknoten, bei dem man am Ende wieder ankommt), nennt man einen **Hamilton-Kreis** (engl. *Hamiltonian path, Hamiltonian cycle/circuit*).

Beispiel 3.37 - Hamilton-Kreis



Anmerkung

Obwohl die Problemstellung der Hamilton-Kreise sehr ähnlich zu Eulers Brückenproblem aussieht (nur die Rolle von Knoten und Kanten vertauscht), gibt es erstaunliche Unterschiede:

- Es gibt kein einfaches Prüfverfahren, um zu entscheiden, ob ein Hamilton-Kreis existiert, und es gibt kein effizientes Verfahren, um Hamilton-Kreise zu berechnen.
- Das Hamilton-Problem ist eines der sog. *NP-vollständigen* Probleme. Das bedeutet in der Komplexitätstheorie, dass es eines der algorithmisch sehr schwierigen Probleme ist, für die es keinen effizienten Algorithmus geben kann.

Fazit zu Lektion 4

Diese Fragen sollten Sie nun beantworten können

- Was besagt das Vier-Farben-Problem? Welcher Zusammenhang besteht zu Graphen?
- Was versteht man unter einem Weg, einem Zyklus und einem Kreis?
- Was ist ein azyklischer Graph?
- Wann ist ein ungerichteter bzw. ein gerichteter Graph zusammenhängend?
- Was ist eine Zusammenhangskomponente?
- Was sind Euler-Wege bzw. Euler-Zyklen?
- Woran kann erkannt werden, ob für einen ungerichteten Graphen ein Euler-Weg oder ein Euler-Zyklus existiert?
- Was ist ein Hamilton-Kreis?