# Aufgabensammlung zur Analysis 1

Prof. Dr. Karin Lunde
Fakultät für Mathematik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften

Sommersemester 2022

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Übungsaufgaben

## 1.1 Komplexe Zahlen

**Aufgabe 1** Die in der kartesischen Form gegebenen komplexen Zahlen

$$\begin{array}{llll} z_1 = 2 + \pi i & z_2 = 4.5 - 2.4i & z_3 = -3 + 5i & z_4 = -6 \\ z_5 = -3 - 2i & z_6 = -1 + i & z_7 = -4i & z_8 = -3 - i \end{array}$$

sind in die trigonometrische Form und die Exponentialform umzurechnen. Wie lauten jeweils die konjugiert komplexen Zahlen? Wie liegen sie zueinander in der Gaußschen Zahlenebene?

**Aufgabe 2** Die in der trigonometrischen oder Exponentialform gegebenen komplexen Zahlen

$$\begin{array}{llll} z_1 = 4(\cos(1) + i \cdot \sin(1)) & z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} & z_3 = 5 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} & \\ z_4 = 5(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{3})) & z_5 = 2 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}} & z_6 = e^{i\frac{4\pi}{3}} & z_7 = \cos(-0.5) + i\sin(-0.5) \end{array}$$

sind in die kartesische Form umzurechnen. Wie lauten jeweils die konjugiert komplexen Zahlen? Wie liegen sie zueinander in der Gaußschen Zahlenebene?

**Hinweis:** Winkelangaben ohne Gradzeichen sind in Bogenmaß. Die Umrechnung erfolgt mit Hilfe der Gleichung $\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\pi}$, wobei $\alpha$ der Winkel in Gradmaß und $x$ der Winkel in Bogenmaß ist.

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie Betrag und Hauptwert des Arguments $\varphi$ für die folgenden komplexen Zahlen:

$$\begin{array}{llll} z_1 = -2 - 6i & z_2 = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3})) & z_3 = 3(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & z_4 = -2 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{9}} \\ z_5 = 3 - i & z_6 = -6 + 8i & z_7 = 4(\cos(-80°) + i \cdot \sin(-80°)) & \end{array}$$

**Aufgabe 4** Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen $z_1 = -4i$, $z_2 = 3 - 2i$ und $z_3 = -1 + i$ die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{llllllllll} \text{a)} & 2z_2 - z_1 & \text{b)} & z_2 \cdot z_3 & \text{c)} & z_1 - 2z_2 + 3z_3 & \text{d)} & \dfrac{z_2}{z_3} & \text{e)} & \dfrac{z_2 \cdot z_3}{z_1} \\ \text{f)} & 2z_1 \cdot z_2^* & \text{g)} & \dfrac{z_1^* \cdot z_2}{z_3} & \text{h)} & z_1(2z_2^* - z_1) + z_3^* & \text{i)} & \dfrac{z_1 - z_2^*}{3z_3} & \text{j)} & \dfrac{z_1 + z_3^*}{z_2^* \cdot z_3} \end{array}$$

**Aufgabe 5** Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(3 - 2i)(4 + 2i)$

b) $\dfrac{3 - 2i}{4 - 3i} + 3(i - 8)$

c) $\dfrac{4(3 - i)^*}{(1 + i)(-1 + i)}$

d) $(2 - 4i)^2 + \frac{|1-\sqrt{3}i|}{i}$

e) $\dfrac{2i}{3 - 4i} + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} + 3\left(\cos(\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4})\right)$

f) $\dfrac{(3 + i) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{3}) - i\sin(\frac{2\pi}{3}))}{(1 - i)^2 \cdot (2i)^*} + \dfrac{2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))}{e^{-i\pi}}$

Geben Sie bei e)-f) das Endergebnis in der kartesischen Form an.

**Aufgabe 6** Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ gilt:

a) $z + z^* = 2 \cdot \text{Re}\,(z)$

b) $z - z^* = 2i \cdot \text{Im}\,(z)$

**Aufgabe 7** Berechnen Sie die folgenden Potenzen nach der Formel von Moivre und stellen Sie die Ergebnisse in der kartesischen und in der Polarform dar:

a) $(1+i)^2$

b) $(3-\sqrt{3}i)^4$

c) $(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{6}})^8$

d) $(-4-3i)^3$

e) $\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^3$

f) $(3\cdot e^{i\pi})^5$

g) $\left(2(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))\right)^{10}$

h) $(5(\cos(-10°)+i\sin(-10°)))^4$

**Aufgabe 8** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und skizzieren Sie die Lage der zugehörigen Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene.

a) $z^3 = i$ b) $z^4 = 16\cdot e^{i\cdot 160°}$ b) $z^5 = 3-4i$

**Aufgabe 9** Bestimmen Sie die folgenden Wurzeln:

a) $\sqrt[2]{4-2i}$ b) $\sqrt[3]{81\cdot e^{-i\cdot 190°}}$ c) $\sqrt[6]{-3+8i}$

**Aufgabe 10** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^3 = 64\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ b) $z^3-2=5i$ c) $z^2-2z+5=0$

**Aufgabe 11** a) Rechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die jeweils fehlenden Darstellungsarten um:

| kartesische Form | trigonometrische Form | Exponentialform |
|---|---|---|
| $z_1=-2+2i$ | | |
| | | $z_3 = 2\cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$ |

**Hinweis:** Eine Skizze (Gaußsche Zahlenebene) könnte hilfreich sein.

b) Berechnen Sie im Bereich der komplexen Zahlen: $\dfrac{2+10i}{1+i}$

c) Berechnen Sie in $\mathbb{C}$, in kartesischer Darstellung: $(\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{6}})^3\cdot(2i)^6$

d) Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichung $z^3=-8i$ und skizzieren Sie die Lage der Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

***Aufgabe 12** Zeigen Sie, dass auch für komplexe Zahlen die Dreiecksungleichung gilt, das heißt für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ ist

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

Für welche komplexen Zahlen $z_1, z_2$ gilt das Gleichheitszeichen?

## 1.2 Relationen und Funktionen

### Relationen

**Aufgabe 13** Betrachten Sie die Zahlenmenge $M = \{15, 65, 79, 29, 33, 41\}$ und die binäre Relation $R \subset M \times M$ mit

$$R = \{(x, y) : \; x, y \in M \text{ und bei Division durch 8 lassen } x \text{ und } y \text{ denselben Rest}\}$$

a) Geben Sie die Relation $R$ durch Aufzählung der Elemente an, und vervollständigen Sie das nebenstehende Pfeildiagramm!

b) Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $R$ zu: reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 65 | 33 |
| 79 | 41 | 29 |

c) Handelt es sich bei $R$ um eine (nicht-) strenge Ordnungsrelation oder um eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Aussage!

**Aufgabe 14** Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?

a) $X$ ist die Menge aller Menschen,
$R = \{(x, y) : \; x, y \in X$ und $x$, $y$ haben am selben Tag Geburtstag$\}$

b) $X$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$,
$R = \{(x, y) : \; x, y \in X$ und $x + y = 10.\}$

c) $X$ ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$,
$R = \{(x, y) : \; x, y \in X$ und $x - y$ ist ohne Rest durch 5 teilbar$\}$

d) $X$ ist die Menge aller Studierenden an der Hochschule Ulm,
$R = \{(x, y) : \; x, y \in X$ und $x$, $y$ studieren im selben Studiengang$\}$

**Aufgabe 15** In der Menge aller Geraden im Raum betrachte man die Relationen

$R_1$ = "$g_1$ liegt näher am Ursprung als $g_2$",
$R_2$ = "$g_1$ schneidet $g_2$ in einem Punkt",
$R_3$ = "$g_1$ hat zum Ursprung denselben Abstand wie $g_2$".

a) Welche Eigenschaften haben diese Relationen? Füllen Sie die nachstehende Tabelle aus:

| Relation | reflexiv | irreflexiv | symmetrisch | antisymmetrisch | asymmetrisch | transitiv |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | | | | | | |
| $R_2$ | | | | | | |
| $R_3$ | | | | | | |

b) Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Wie könnten Sie die entstehenden Äquivalenzklassen beschreiben?

c) Gibt es unter den Relationen (strenge oder nicht-strenge) Ordnungsrelationen?

**Aufgabe 16** Welche Eigenschaften hat die folgende Relation $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$R = \{(m, n) : \; m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m + n \text{ ist gerade } \}$$

Ist $R$ eine Äquivalenzrelation?

**Aufgabe 17** Finden Sie Beispiele für reflexive, symmetrische, asymmetrische, transitive und intransitive Relationen in der Menge aller Ulmer Einwohner, sowie für mindestens eine Äquivalenzrelation.

## Eigenschaften von Funktionen

**Aufgabe 18** Geben Sie für die folgenden Zuordnungsvorschriften maximale Definitionsbereiche an:

a) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)}$
b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$
d) $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$

**Aufgabe 19** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $y = x^2$. Wie verändert sich die Funktionsgleichung, wenn Sie

a) den Graphen entlang der $x$-Achse um 3 Einheiten nach rechts verschieben,
b) den Graphen entlang der $y$-Achse um 3 Einheiten nach unten verschieben,
c) den Graphen entlang der $x$-Achse um 2 Einheiten nach links und entlang der $y$-Achse um 5 Einheiten nach oben verschieben?

**Aufgabe 20** Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen auf dem Intervall $[-2, 4]$:

a) $f(x) = x - [x - 0.5]$, $x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = |x - [x + 0.5]|$, $x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
d) $f(x) = 1 + |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$

**Hinweis:** Benutzen Sie zur Lösung der Aufgabe Ihre Erkenntnisse aus der vorigen Aufgabe! Das Symbol $[x]$ bezeichnet hier die Gaußklammer, also das größte Ganze einer Zahl $x$.

**Aufgabe 21** Geben Sie Bereiche an, in denen die folgenden Funktionen monoton wachsend oder fallend sind:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$
b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$

**Hinweis:** Überlegen Sie sich jeweils, wie der Graph der Funktion verläuft. Machen Sie eine Skizze!

**Aufgabe 22** Überprüfen Sie mit Hilfe der Definition, dass für beliebige natürliche Zahlen $n$ gilt:

a) die Funktion $f(x) = x^{2n}$ ist achsensymmetrisch zur $y$-Achse (gerade);
b) die Funktion $f(x) = x^{2n+1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung (ungerade).

**Hinweis:** Die Bezeichnung *gerade* ist ein Synonym für *achsensymmetrisch zur y-Achse*, *ungerade* ein Synonym für *punktsymmetrisch zum Ursprung*. Aus dieser (von Ihnen nachzuweisenden) Eigenschaft der Potenzfunktionen leitet sich übrigens der Name der Eigenschaft *Geradheit* ab.

**Aufgabe 23** Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen in ihrem maximalen Definitionsbereich! Begründen Sie Ihre Behauptung, indem Sie die Definition überprüfen!

a) $f(x) = x^3 \cdot |x|$
b) $f(x) = \sqrt{|x+1|}$
c) $f(x) = 1 + \ln(x^2)$

## Rationale Funktionen

**Aufgabe 24** Führen Sie die quadratische Ergänzung für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ aus und lösen Sie den enstehenden Ausdruck nach $x$ auf. Machen Sie sich klar, dass so die $pq$-Formel entsteht.

**Aufgabe 25** Lösen Sie die folgenden biquadratischen Gleichungen durch Ausklammern und/oder Substitution:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $2x^4 - 40x^2 + 128 = 0$

c) $12x^4 + 6x^2 = 0$

d) $x^6 - 16x^2 = 0$

**Aufgabe 26** Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas die Funktionswerte $f(0)$, $f(-2)$ und $f(1)$ für das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$.

**Aufgabe 27** $x_1 = 3$ ist eine Nullstelle des kubischen Polynoms $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$. Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms und stellen Sie es in Linearfaktorzerlegung (kurz: LFZ) dar.

**Aufgabe 28** Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren. Wie lautet die jeweilige Produktdarstellung (LFZ)?

a) $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 16$

b) $y = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

c) $y = -3x^3 + 18x^2 - 33x$

d) $y = -2x^3 + 8x^2 - 8x$

e) $y = -x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

**Aufgabe 29** $x_1 = -2$ ist eine doppelte Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 + 20x - 24$. Spalten Sie diese Nullstelle ab und geben Sie die Polynome $g_1$ und $g_2$ vierten bzw. dritten Grades an, für die gilt: $f(x) = (x+2)g_1(x)$ und $f(x) = (x+2)^2 g_2(x)$! Bestimmen Sie die LFZ von $g(x)$.

**Aufgabe 30** Von dem Polynom $p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 9z - 54$ ist die komplexe Nullstelle $z_0 = 3i$ bekannt. Bestimmen Sie alle Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ und geben Sie die vollständige komplexe Linearfaktorzerlegung des Polynoms an.

**Aufgabe 31** Wo besitzen die folgenden gebrochenrationalen Funktionen Nullstelle, Lücken oder Polstellen?

a) $y = \frac{x^2+x-2}{x-2}$

b) $y = \frac{x^3-5x^2-2x+24}{x^3+3x^2+2x}$

c) $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

d) $y = \frac{x^3-4x^2-4x}{x^4-4}$

e) $y = \frac{(x^2-1)(x^2-25)}{x^3+4x^2-5x}$

**Aufgabe 32** Eine gebrochenrationale Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) Nullstellen: $x_1 = 2$ (einfach), $x_2 = -4$ (doppelt);

b) Pole: $x_3 = -1$, $x_4 = 1$;

c) Funktionswert $y(0) = 4$.

Weitere Nullstellen und Pole liegen nicht vor. Wie lautet die Funktionsgleichung?

**Aufgabe 33 (Knobelaufgabe)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\sqrt{x\sqrt{x} - x} + \sqrt{x} = x$.
**Hinweis:** Achten Sie auf Lösungen, die bei nicht-äquivalenten Umformungen "verloren" gehen könnten.

## Trigonometrische Funktionen

**Aufgabe 34** Geben Sie zu folgenden Winkeln jeweils das Äquivalent im Bogen- bzw. Gradmaß an:

a) $60°, -30°, 3600°, 180°$;

b) $0.5, -1, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5}, 15\pi$

**Aufgabe 35** Skizzieren Sie (ohne grafischen Taschenrechner!) den Funktionsverlauf von

a) $y = 4 \cdot \sin(3x + 2)$

b) $y = 2 \cdot \cos(2x - \pi)$

**Hinweis:** Um wie viel ist die Funktion ggü. dem Originalsinus (bzw. Kosinus) entlang der $x$-Achse verschoben? Wie groß sind die Skalierungsfaktoren in $x$-Richtung und in $y$-Richtung, und was bewirken sie?

**Aufgabe 36** Von einer Sinusschwingung der Form $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit $A > 0$ und $\omega > 0$ sind die folgenden Daten bekannt:

- Das erste Maximum $y_{max} = 5$ cm wird nach $t_1 = 3$ s, und
- das erste Minimum $y_{min} = -5$ cm wird nach $t_2 = 10$ s erreicht.

Bestimmen Sie $A, \omega$ und $\varphi$ und skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

***Aufgabe 37** Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die Gültigkeit folgender trigonometrischer Gleichungen für beliebige Argumente:

a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ b) $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ c) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$

**Aufgabe 38** Bestimmen Sie **alle** Lösungen der folgenden Gleichungen, d.h. alle Werte von $x \in \mathbb{R}$, für die die Gleichungen zutreffen:

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ b) $\tan(x) = -1$ c) $\sin^2\left(\frac{x}{5}\right) = 0.5$ d) $\sin^2(x) = 3\cos^2(x)$

**Aufgabe 39** Berechnen Sie **alle** Nullstellen der gedämpften Schwingung

$$f(x) = e^{-7x} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Schreiben Sie die Menge aller Nullstellen abschließend in Mengenschreibweise auf.

**Aufgabe 40** Berechnen Sie **alle** Lösungen der Gleichung

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Schreiben Sie abschließend die Lösungsmenge in Mengenschreibweise auf.

**Aufgabe 41** Beweisen Sie mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen (aus der Formelsammlung), dass für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. **Hinweis:** Diese Beziehung werden wir im nächsten Semester ausnutzen, um Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode zu bestimmen.

## Exponentialfunktionen, Logarithmen und hyperbolische Funktionen

**Aufgabe 42** Bei einem Einschaltvorgang in einem Gleichstromkreis mit dem Ohmschen Widerstand $R$, der Selbstinduktion $L$ und der angelegten Spannung $U$ ändert sich die Stromstärke mit der Zeit $t$ nach dem Gesetz

$$i = i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}),\ t \in [0, \infty)$$

Nach welcher Zeit beträgt die Stromstärke $\frac{1}{2}\frac{U}{R}$?

**Aufgabe 43** Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = 2^{-x}$

b) $f(x) = |\ln(x+1)|$

c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

**Hinweis:** Die Funktion c) nennt man auch *Hyperbelkosinus* oder *Kettenlinie*, da jede Kette, die an beiden Enden festgehalten wird und in der Mitte durchhängt, diese Form annimmt.

**Aufgabe 44** Nach einem Modell des deutschen Psychologen Ebbinghaus folgt der Vergessensprozess der Gleichung

$$p(t) = b + (100 - b)e^{\lambda t}\,, \quad \text{mit} \quad t \geq 0.$$

Hier ist $p(t)$ der Prozentsatz des Wissens, der zum Zeitpunkt $t$ noch im Gedächtnis ist, $b$ der Prozentsatz des Wissens, der langfristig erhalten bleibt, und $\lambda < 0$ eine fachspezifische Konstante. Die Zeit $t$ wird in Wochen angegeben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Wissen maximal, d.h. $p(0) = 100\%$.

Angenommen, ein Student behält langfristig von Mathematik 20% des Stoffes, und nach den Winterferien (6 Wochen nach der Klausur) hat er bereits 40% des Stoffes vergessen. Welchen Anteil des gelernten Stoffes weiß er zum Ende des Sommersemesters (25 Wochen nach der Klausur) noch?

**Aufgabe 45** Bei der Verzinsung von einem angelegten Startkapital $K_0$ mit einem Zinssatz von $z \cdot 100$ % p. a. (pro Jahr) ergibt sich nach $n$ Jahren ein Kapital von

$$K_n = (1 + z)^n \cdot K_0$$

a) Angenommen, Sie haben 2000 Euro zu 6% fest angelegt. Nach wie vielen Jahren übersteigt das verzinste Kapital erstmals 20000 Euro?

b) Welchen Zinssatz müssten Sie bei Ihrer Bank heraushandeln, um eine Verzehnfachung des Kapitals $K_0$ bereits nach 20 Jahren zu erreichen?

**Hinweis:** Bei einem Zinssatz von 6% p. a. ist $z = 0.06$.

**Aufgabe 46** Bestimmen Sie alle Werte von $x$, für die die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

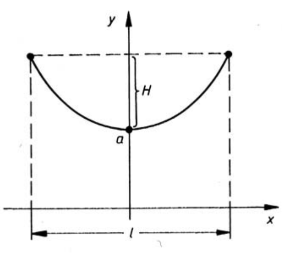
a) $e^x - e^{-x} = 2$ **Hinweis:** Substitution $z = e^x$.

b) $\frac{e^{x/2} - 1}{e^{x/2} + 1} = \frac{1}{2}$

**Aufgabe 47** Ein durchhängendes Seil genüge der Gleichung

$$y = a \cdot \cosh\frac{x}{a}$$

also der so genannten Kettenlinie. Berechnen Sie gemäß der Skizze den Durchhang $H$ für die Werte $a = 20$ m und $l = 90$ m.



**Aufgabe 48** Zeigen Sie die folgenden Beziehungen für beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie dazu die Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen aus der Formelsammlung oder die Definitionsgleichungen der hyperbolischen Funktionen.

a) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$

b) $2\sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x)$

c) $1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

d) $1 - \coth^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$

**Aufgabe 49** Bestimmen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\log_{10}(1000)$ b) $\log_2(16)$ c) $\log_{10}(0.01)$ d) $\log_2(0.5)$ e) $\ln(1)$ f) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

**Aufgabe 50** Bestimmen Sie ohne Taschenrechner, für welche Zahl $x$ gilt:

a) $\log_2(x) = 5$ b) $\log_{10}(x) = -2$ c) $\log_3(x) = 3$ d) $\log_{0.1}(x) = 1$

**Aufgabe 51** Fassen Sie zusammen:

a) $\ln(u) - \ln(v)$ b) $\frac{3}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}\ln(x^2) - 10\ln(\sqrt{x})$ c) $3\ln(x) + 4\ln(y) - \frac{1}{2}\ln(z)$

**Aufgabe 52** Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Lösungen der folgenden Gleichungen

a) $5^x = \frac{1}{125}$ b) $0.25^x = 1024$ c) $x = \log_8(512)$ d) $2\ln(x) = \ln(15) + 2\ln(2) - \ln(12)$

**Aufgabe 53** Leiten Sie aus den Eulerschen Formeln

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\,,\ e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)$$

die folgenden Beziehungen zwischen den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen her:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cosh(i \cdot \varphi) \\ \sinh(\varphi) &= i \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

**Aufgabe 54** Berechnen Sie im Bereich der komplexen Zahlen: $\ln(-i)$ und $\ln(-2)$. Was verstehen Sie unter dem Hauptwert des Logarithmus?

***Aufgabe 55** Zeigen Sie, dass für beliebiges natürliches $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \cdot \ln(n) - \ln(n!)$$

**Hinweis:** Benutzen Sie die Rechenregeln der Logarithmus-Funktion.

## 1.3 Grenzwerte und Stetigkeit

### Zahlenfolgen und ihre Grenzwerte

**Aufgabe 56** Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der Zahlenfolgen

a) $\langle a_n \rangle = 0.2, 0.04, 0.008, ...$

b) $\langle a_n \rangle = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, ...$

c) $\langle a_n \rangle = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ...$

d) $\langle a_n \rangle = 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, ...$

**Aufgabe 57** Gegeben seien die angegebenen Folgen mit ihrem jeweiligen Grenzwert $g$. Bestimmen Sie für die genannten Werte von $\varepsilon$ jeweils den kleinsten Folgenindex $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$:

a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n+2} \rangle$, $g = 0$; $\varepsilon = 0.1, 10^{-2}, 10^{-4}$.

b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{2+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \rangle$, $g = 1$; $\varepsilon = 0.1, 10^{-2}, 10^{-4}$.

**Aufgabe 58** Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \frac{\sqrt{2n}}{n^2} \rangle$ eine Nullfolge ist.

**Hinweis:** Dazu müssen Sie eine Rechenvorschrift angeben, mit deren Hilfe Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ den entsprechenden Folgenindex $n_0 \in \mathbb{N}$ berechnen können, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| < \varepsilon$.

**Aufgabe 59** Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \frac{-n-1}{n^2+1} \rangle$ nicht gegen den Wert $g = -1$ konvergiert.

**Hinweis:** Skizzieren Sie dazu zunächst den Verlauf der Zahlenfolge. Wählen Sie dann als Gegenbeispiel eine geeignete positive Zahl $\varepsilon$, so dass ab einem Folgenindex $n_0$ alle Folgenglieder ***außerhalb*** dieser $\varepsilon$-Umgebung von $g = -1$ liegen, d.h. $|a_n - g| \geq \varepsilon$ für $n > n_0$.

**Aufgabe 60** Beweisen Sie, dass die folgenden Zahlenfolgen unbestimmt divergieren:

a) die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (-2)^n$,

b) die Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = (-1)^n$

**Aufgabe 61** Gegeben seien die Folgen

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(n-1)^2}{2n^2+1} \right\rangle \;,\; \langle b_n \rangle = \left\langle \frac{1-n}{3n+1} \right\rangle$$

Bestimmen Sie zunächst die Grenzwerte der Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$. Finden Sie dann (mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte) die Grenzwerte der Folgen $\langle c_n \rangle$ mit

a) $c_n = a_n + b_n$

b) $c_n = a_n - b_n$

c) $c_n = a_n \cdot b_n$

d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

e) $c_n = |b_n|$

f) $c_n = \sqrt{8a_n}$

**Aufgabe 62** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Rechenregeln für Zahlenfolgen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-5n^2}{(2n-1)^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+13}}{6n-3}$

c) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|(-1.5)^k|}{2^k}$

d) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{k}\right)^{4k}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n}}$

f) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\dfrac{|(-4)^k|}{9^k}}$

**Hinweis:** Machen Sie sich jeweils klar, mit welchen Zahlenfolgen aus dem Grundwortschatz (siehe Skript) Sie arbeiten können.

## Grenzwerte von Funktionen

**Aufgabe 63** Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^2}{2x^2+4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+42}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x+42}{x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-2x+42}$

**Aufgabe 64** Bestimmen Sie für die folgenden gebrochenrationalen Funktionen Nullstellen, Polstellen und Asymptoten im Unendlichen, und skizzieren Sie grob den Funktionsverlauf:

a) $r(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

b) $r(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

c) $r(x) = \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-6x^2+12x-8}$

d) $r(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

**Aufgabe 65** Bestimmen Sie die Grenzwerte sowie die Asymptoten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$, für folgende Funktionen:

a) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+3x}{8x^2-1}}$

c) $f(x) = \left(\frac{6x-2}{5x+1}\right)\left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{x^2}\right)$

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} - x$

**Aufgabe 66** Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte die folgenden Grenzwerte, wenn sie existieren:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{4x-8}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+3}{x^2+1}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4x+1}$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$

**Aufgabe 67** Beweisen Sie:

a) Die Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-2x}$ konvergiert für $x \to \infty$ gegen den Grenzwert $g = 0$.

b) Die Funktion $f(x) = \tan(x)$ hat keinen Grenzwert für $x \to \infty$.

**Aufgabe 68** Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition nach Cauchy, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(2x)}{x} = 0$.

**Hinweis:** Finden Sie für jede $\varepsilon$-Umgebung der Null eine Zahl $\xi > 0$, so dass die Funktion $f(x) = \frac{\cos(2x)}{x}$ für alle $x > \xi$ innerhalb dieser $\varepsilon$-Umgebung liegt.

**Aufgabe 69** Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ für $x \to 0$ über alle Grenzen wächst, das heißt dass $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$.

**Hinweis:** Geben Sie für jede Schranke $K > 0$ eine Umgebung von $x_0 = 0$ an, so dass für alle $x$ in der Umgebung die Funktion $f$ die Schranke $K$ übersteigt.

### Stetigkeit von Funktionen

**Aufgabe 70** Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $x_0$ bestimmt, welche unbestimmt divergent? Begründen Sie Ihre Aussage!

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ in $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$ in $x_0 = \pm 1$

c) $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ in $x_0 = \pi$

d) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ in $x_0 = 0$

Geben Sie gegebenenfalls an, ob die Funktion eine Unendlichkeitsstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel besitzt, und skizzieren Sie den Graph der Funktion.

**Aufgabe 71** Geben Sie alle Stellen an, in denen die gegebenen Funktionen nicht stetig sind, und welche Art von Unstetigkeit vorliegt. Begründen Sie jeweils Ihre Aussage!

a) $f_1(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+6x-7}$

b) $f_2(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$
**Hinweis:** Die eckige Klammer bezeichnet die Gaußklammerfunktion.

c) $f_3(x) = |\text{sgn } x|$

d) $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{für } x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } x > 0 \end{cases}$

**Aufgabe 72** Welche Art von Unstetigkeit liegt bei den folgenden Funktionen an der Stelle $x_0$ vor (Begründung)?

a) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ an der Stelle $x_0 = 2$

b) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$

c) $f(x) = \text{sgn }(x+1)$ an der Stelle $x_0 = -1$

d) $f(x) = \cot 2x$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$

Im Fall einer hebbaren Unstetigkeit geben Sie an, wie die Funktion zu ergänzen wäre, um eine stetige Funktion zu erhalten.

**Aufgabe 73** Sind folgende Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ stetig? Begründen Sie Ihre Aussage!

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{für } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ auf dem Intervall $[-5, 5]$

b) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ auf dem Intervall $[-4, 0]$

c) $f(x) = \sqrt{|x^2-1|}$ auf dem Intervall $[-3, 3]$

d) $f(x) = |x - [x + 0.5]|$ auf dem Intervall $[-2, 2]$

## 1.4 Differentialrechnung

**Aufgabe 74** Die Ableitung ist als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert. Bestimmen Sie zur Übung, um sich die Definition klarzumachen, die Ableitung der folgenden Funktionen als Grenzwert des Differenzenquotienten:

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ in $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ in $x_0 = 0$ und $x_0 = 5$

**Aufgabe 75** An welchen Stellen sind folgende auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen nicht differenzierbar?

a) $f_1(x) = |2x^2 + x|$

b) $f_2(x) = x^3 \cdot \text{sgn}\,(x)$

c) $f_3(x) = x \cdot [x]$

**Aufgabe 76** Die Geschwindigkeit $v$ eines bewegten Massenkörpers zum Zeitpunkt $t$ ist die Ableitung der Funktion $s(t)$ nach der Zeit, wenn $s(t)$ den bis zum Zeitpunkt $t$ zurückgelegten Weg beschreibt. Im freien Fall ohne Reibung wird die Weg-Zeit-Funktion durch

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2$$

beschrieben, wobei $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist. Welche Funktion gibt die Geschwindigkeit $v(t)$ beim freien Fall an?

Nach welcher Zeit erreicht ein frei fallender Körper eine Geschwindigkeit von $v = 30\frac{km}{h}$?

**Aufgabe 77** Gegeben ist die Funktion $f(x) = |x^2 - 7x + 10|$, für $x \in \mathbb{R}$. An welchen Stellen ist die Funktion nicht differenzierbar? Existieren an diesen Stellen die einseitigen Ableitungen? Wenn ja, berechnen Sie diese.

**Aufgabe 78** Wie muss die reelle Zahl $a$ gewählt werden, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ ax - 2a + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist?

**Aufgabe 79** Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = (x^2 + 4) \cdot \sin(x)$

b) $f_2(x) = x^2 \cdot |x|$

c) $f_3(x) = \cos(x) - 2x$

d) $f_4(x) = x \cdot e^x \cdot \sin(x)$

e) $f_5(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} \cdot 2^x$

f) $f_6(x) = x^2 \cdot \tan(x)$

g) $f_7(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$

h) $f_8(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

i) $f_9(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^4-1}$

j) $f_{10}(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{x^2+1}$

Überlegen Sie jeweils, wo die Funktion nicht differenzierbar sein könnte; und geben Sie alle Stellen an, an denen die Funktion differenzierbar ist.

**Aufgabe 80** An welcher Stelle hat der Graph der Funktion $f(x) = \frac{3}{x-2}$, mit dem Definitionsbereich $D_f = (2, +\infty)$, die Steigung $-3$?

**Aufgabe 81** An welcher Stelle haben die Graphen der folgenden Funktionen eine senkrechte oder eine waagerechte Tangente?

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

**Aufgabe 82** Wie muss die Zahl $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f(x) = \frac{a \cdot x}{e^x}$ die $x$-Achse in einem Winkel von $45°$ schneidet?

**Aufgabe 83** Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

b) $f_2(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $f_3(x) = x \cdot e^x \cdot \cos^2(x)$

d) $f_4(x) = (3x^2 + 2x - 1)^3$

e) $f_5(x) = \frac{(2x-1)^3}{(x-2)^4}$

f) $f_6(x) = \sqrt[3]{7x^4 + x^2 - 1}$

g) $f_7(x) = \tan^3(x^2 \sin(x))$

h) $f_8(x) = |\sin(x)|$

i) $f_9(x) = \frac{2x}{\sqrt{|x^4-8|}}$

j) $f_{10}(x) = \ln(|x^2 - 1|)$

k) $f_{11}(x) = e^{x^2} \cdot \sin^2(x)$

l) $f_{12}(x) = \arctan(1 + x^2)$

m) $f_{13}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$

n) $f_{14}(x) = 2^{-x} \cdot \log_2(|x|)$

o) $f_{15}(x) = \frac{2x-\cos(2x)}{2x+\cos(2x)}$

p) $f_{16}(x) = \frac{\cot(x)}{x}$

Geben Sie dabei jeweils alle Stellen an, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist, wenn es solche geben sollte.

**Aufgabe 84** Wie müssen die Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{für } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, jedoch nicht dreimal differenzierbar ist?

**Aufgabe 85** Betrachten Sie die Funktion $f$ mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion. Geben Sie alle Ableitungsregeln an, die Sie dabei verwenden.

b) Zeigen Sie anschließend mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für beliebiges $n \geq 1$ die $n$-te Ableitung in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) \cdot e^x$$

**Aufgabe 86** Zeigen Sie, dass die $n$-te Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ mit beliebigen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ die Form

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

hat. **Hinweis:** Vollständige Induktion.

**Aufgabe 87** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{\sin(4x)}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2-2x+5}{2x^2+3x+1}$

c) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{\tan(2x)}$

d) $\lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln(x))$

e) $\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(x)}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)-\arctan(x)}{x^2 \ln(1+x)}$

g) $\lim_{x \to 0^-} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

i) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$

j) $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

k) $\lim_{x \to 0^+} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$

Markieren Sie jeweils, wenn Sie die Regel von Bernoulli-l'Hospital anwenden, und geben Sie den Typ ($\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$) des entsprechenden Grenzwertes an.

**Hinweis:** Für Grenzwerte vom Typ $\infty^0$, $1^\infty$ oder $0^0$ ist die Umformung $a^b = e^{b \cdot \ln a}$ hilfreich.

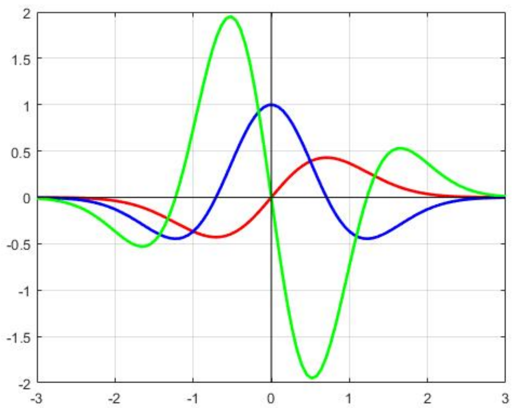
**Aufgabe 88** In der Abbildung unten links sind die Graphen von drei Funktionen dargestellt.

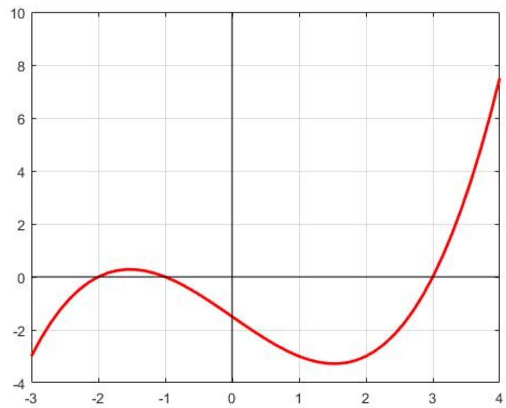
a) Beschreiben Sie für jede Funktion, in welchem Abschnitt sie streng monoton wachsend oder fallend ist.

b) Es handelt sich bei den Funktionen um eine Funktion $f$ und ihre Ableitungen $f'$ und $f''$. Identifizieren Sie diese Funktionen im Schaubild.

c) Überprüfen Sie den Zusammenhang zwischen Vorzeichen der Ableitung und Monotonie der Funktion anhand der Paare $(f, f')$ und $(f', f'')$.

d) Überprüfen Sie den Zusammenhang zwischen Vorzeichen der zweiten Ableitung und Krümmungsverhalten der Funktion anhand des Paars $(f, f'')$. Wie viele Wendepunkte hat $f$ im dargestellten Bereich?




**Aufgabe 89** In der Abbildung oben rechts ist der Graph einer Funktion $f$ gegeben. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion $f'$.

**Aufgabe 90** Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen jeweils rechnerisch (mit Hilfe der Ableitung), in welchen Bereichen sie streng monoton fallend oder wachsend sind. Veranschaulichen Sie sich die Überlegungen, indem Sie die Funktionsgraphen skizzieren, z.B. mit Hilfe eines GTR oder mit `fooplot`.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = (1 - 2x) \cdot e^{-x}$

**Aufgabe 91** Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen jeweils rechnerisch, in welchen Bereichen sie links- oder rechtsgekrümmt sind. Veranschaulichen Sie sich die Überlegungen, indem Sie die Funktionsgraphen skizzieren, z.B. mit Hilfe eines GTR oder mit `fooplot`.

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

**Aufgabe 92** Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Gleichung $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

a) auf Symmetrie und Schnittpunkte mit der $x$-Achse (Nullstellen),

b) auf Monotonie und relative Extrema, und bestimmen Sie den exakten Wertebereich $W_f$.

**Aufgabe 93** Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion $f$.

b) Wo ist $f(x)$ linksgekrümmt, wo rechtsgekrümmt?

c) Bestimmen Sie die waagerechten Asymptoten der Funktion für $x \to \pm\infty$ (wenn es welche gibt).

**Aufgabe 94** In welchen Bereichen ist die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ konvex (linksgekrümmt), wo ist sie konkav (rechtsgekrümmt)? Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Funktion.

**Aufgabe 95** Die Funktion $y = f(t) = e^{-2t} \cdot (1 - 3t)$, $t \geq 0$, beschreibt eine aperiodische Schwingung (etwa wie beim Bremsvorgang einer Fahrstuhlkabine, $y$ entspräche dann die Auslenkung zur Ruhelage). Untersuchen Sie die Funktion auf

a) Monotonie und Extrema,

b) Krümmungsverhalten und Wendepunkte,

c) ihr Verhalten für $t \to \infty$ (Asymptote, Grenzwert), und bestimmen Sie ihren Wertebereich.

**Aufgabe 96** Unter welchem Winkel $\alpha$ zu einer waagerechten Ebene muss ein Ball geworfen werden, damit die größtmögliche Weite erreicht wird? Die Wurfweite berechnet sich dabei zu

$$W(\alpha) = \frac{1}{g} \cdot v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)$$

wobei $v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit und $g$ die Erdbeschleunigung ist (beides Konstanten).

**Aufgabe 97** Paula will einen PKW mieten, um eine Strecke von 600 km damit zu fahren. Der Benzinverbrauch $y$ (in Liter pro 100 km) hängt von der Fahrgeschwindigkeit $x$ (in km/h) folgendermaßen ab:

$$y = \frac{x}{10} - 5 + \frac{250}{x}$$

Gehen Sie für die Aufgabe davon aus, dass die Geschwindigkeit auf der ganzen Strecke konstant gehalten werden kann.

a) Welche Geschwindigkeit sollte sie fahren, um den Verbrauch zu minimieren?

b) Nehmen wir an, der Mietpreis für den PKW beträgt 10 Euro pro Stunde zuzüglich 50 Euro Grundgebühr; Benzin kostet $1.50$ Euro pro Liter. Stellen Sie eine Kostenfunktion auf, die die Kosten in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit $x$ berechnet.

c) Welche Geschwindigkeit sollte Paula fahren, um die Gesamtkosten zu minimieren?

**Aufgabe 98** Über einem runden Tisch mit dem Durchmesser $d$ soll eine Lampe angebracht werden. Welchen Abstand muss sie vom Tisch haben, damit am Tischrand eine maximale Beleuchtung erzielt wird?

Die Beleuchtungsstärke berechnet sich dabei durch $f(\varphi) = \frac{m \cdot \sin(\varphi)}{r^2}$, wobei $\varphi$ der Neigungswinkel der Lichtstrahlen ist, $r$ der Abstand der beleuchteten Fläche von der Lichtquelle und $m$ eine Konstante (die Lichtstärke).

***Aufgabe 99** Ein Ort A soll regelmäßig mit Waren aus einem Ort B, der direkt an einem geradlinigen Kanal liegt, versorgt werden. Der Ort A hat den Abstand $d$ (in Kilometer) vom Kanal, der Ort B liegt $l$ Kilometer von dem Punkt des Kanals, der A am nächsten ist, entfernt. Die Transportkosten pro Kilometer und Wareneinheit seien $\alpha$ beim Landtransport und $\beta$ beim Wassertransport ($\alpha > \beta$).

An welcher Stelle des Kanals muss der Warenumschlag stattfinden, um die Transportkosten zu minimieren?

***Aufgabe 100** Von einem Kanal mit der Breite $a$ zweige unter einem rechten Winkel ein anderer Kanal mit der Breite $b$ ab. Die Wände der Kanäle seien geradlinig. Wie lang darf ein Balken oder Baumstamm höchstens sein, der von einem Kanal in den anderen geflößt werden soll? Vernachlässigen Sie dabei den Durchmesser des Baumstammes.

## 1.5 Grundlagen der Integralrechnung

**Aufgabe 101** Ermitteln Sie Stammfunktionen für die untenstehenden Funktionen. Benutzen Sie dazu nur die Ableitungstabelle und überlegen Sie, für welche Funktion $F(x)$ gelten könnte: $F'(x) = f(x)$. Überprüfen Sie jede Lösung durch Ableiten.

a) $f(x) = x^7$
b) $f(x) = \frac{17}{x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$
e) $f(x) = 2^x$
f) $f(x) = \sin x + x$
g) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
h) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, $a \neq 0$;
i) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
j) $f(x) = \frac{1}{x}$
k) $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $a \neq 0$;
l) $f(x) = \frac{x}{x+a}$, $a \neq 0$;

**Aufgabe 102** a) Gegeben seien die Funktionen

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right) \; , \; f(x) = \frac{1}{(x+a)\cdot(x+b)}$$

wobei $a \neq b$ reelle Konstanten sind. Zeigen Sie, dass die Funktion $F$ eine Stammfunktion der Funktion $f$ ist.

b) Berechnen Sie anschließend das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{x^2+6x+8}\,dx$.

**Aufgabe 103** Begründen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

über das Intervall $[0,1]$ nicht integrierbar ist.

**Aufgabe 104** Ermitteln Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale mit Hilfe von partieller Integration oder Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{2}{(1-2x)^4}\,dx$
b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^7}\,dx$
c) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x-4}\,dx$
d) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\,dx$
e) $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2(2x)}{\tan(2x)}\,dx$
f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}\,dx$
g) $\displaystyle\int x\cdot\cos(x)\,dx$
h) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx$

**Aufgabe 105** Ermitteln Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale mit Hilfe von Substitution:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cdot \cos(x^2)\,dx$, **Hinweis:** Substitution $t = x^2$.

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$, **Hinweis:** Substitution $t = x^2$.

c) $\displaystyle\int a^x \cdot \sqrt{1+a^x}\,dx$, für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot \ln(\cos(x))\,dx$

**Hinweis:** Eine geeignete Substitution führt auf Integral der Form $\int f'(x) \cdot f(x)\,dx$.

e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, **Hinweis:** Substitution aus Formelsammlung.

**Aufgabe 106** Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung für die folgenden gebrochenrationalen Funktionen:

a) $r(x) = \dfrac{3x^2+6x-1}{x^3+3x^2-x-3}$ **Hinweis:** 1 ist eine Nullstelle des Nennerpolynoms.

b) $r(x) = -\dfrac{7x+5}{x^3+2x^2-x-2}$ **Hinweis:** 1 ist eine Nullstelle des Nennerpolynoms.

c) $r(x) = \dfrac{-12x^2+7x+10}{x^3+5x^2}$

d) $r(x) = \dfrac{2x^3+6x}{x^4-2x^2+1}$ **Hinweis:** 1 ist eine Nullstelle des Nennerpolynoms.

e) $r(x) = \dfrac{-3x^2-21x-10}{x^4+2x^3+x^2+2x}$ **Hinweis:** $-2$ ist eine Nullstelle des Nennerpolynoms.

f) $r(x) = \dfrac{3x^2+14x-19}{x^3-2x^2-x+2}$ **Hinweis:** 2 ist eine Nullstelle des Nennerpolynoms.

**Aufgabe 107** Ermitteln Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale mit Hilfe der Ihnen bekannten Integrationsmethoden:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-3x)^4}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{9x^2-2}{3x^3-2x+7}\,dx$

c) $\displaystyle\int \cot(5x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^5+3x^4+3x^3+x^2}{x^3+2x^2+x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{5-3x}\,dx$

g) $\displaystyle\int x \cdot e^x\,dx$

h) $\displaystyle\int_1^e x^2 \cdot \ln(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int x \cdot e^{-2x^2}\,dx$

**Aufgabe 108** Die folgenden Integrale werden wir für die Frequenzanalyse in Analysis 2 brauchen. Berechnen Sie

a) $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,dt$

b) $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,dt$

c) $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt$

d) $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt$

e) $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,dt$

Hier sind $m, n \geq 1$ beliebige natürliche Zahlen. **Hinweis:** Verwenden Sie für c) - e) geeignete Umformungen aus Ihrer Formelsammlung. Zum Beispiel ist

$$\cos(nt)\cos(mt) = \frac{1}{2}\left(\cos((n-m)t) + \cos((n+m)t)\right)$$

**Aufgabe 109** Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x\,dx}{1+x^2}$ c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$

**Aufgabe 110** Welche der folgenden uneigentlichen Integrale sind konvergent? Argumentieren Sie ggf. mit einem geeigneten Konvergenzkriterium!

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x \cdot e^x}$ b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2}\,dx$

**Aufgabe 111** Die Wartezeit bis zum Eintreffen eines Ereignisses modelliert man häufig mit Hilfe der Exponentialverteilung (zur Bedeutung siehe Wikipedia oder Stochastik-Literatur). Diese hat die Dichtefunktion ($\lambda > 0$ ist ein konstanter Parameter):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

a) Zu den Anforderungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ gehört es, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ den Wert 1 hat. Erfüllt die Funktion $f$ diese Anforderung?

b) Bestimmen Sie für $\lambda = 1$ den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$. Es gibt den Erwartungswert der Verteilung an.

c) Bestimmen Sie für $\lambda = 1$ die Verteilungsfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Wartezeit kleiner oder gleich $x$ ist.

# 2 Kurzlösungen zu den Übungsaufgaben

Lösen Sie die Aufgaben möglichst selbständig, bevor Sie in der Lösung nachschauen. Die Lösungen auf diesem Blatt dienen nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse! Es sind in der Regel nicht alle Zwischenschritte angegeben.

## 2.1 Komplexe Zahlen

**Lösung 1** Angegeben ist hier die kompaktere Exponentialform. Die dazugehörige trigonometrische Form gewinnt man durch die einfache Umformung (Eulersche Formel) $r \cdot e^{\alpha i} = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$.

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl ist $z^* = x - iy$. Beide unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils. In der Gaußschen Zahlenebene liegen beide daher spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

$$\begin{array}{ll}
z_1 = 3.72 \cdot e^{57.53°i} & z_1^* = 2 - \pi i = 3.72 \cdot e^{(360° - 57.53°)i} = 3.72 \cdot e^{302.47°i} \\
z_2 = 5.1 \cdot e^{331.74°i} & z_2^* = 4.5 + 2.4i = 5.1 \cdot e^{28.26°i} \\
z_3 = 5.83 \cdot e^{120.9°i} & z_3^* = -3 - 5i = 5.83 \cdot e^{239.1°i} \\
z_4 = 6 \cdot e^{180°i} & z_4^* = -6 = z_4 \\
z_5 = 3.61 \cdot e^{213.7°i} & z_5^* = -3 + 2i = 3.61 \cdot e^{146.3°i} \\
z_6 = 1.41 \cdot e^{135°i} & z_6^* = -1 - i = 1.41 \cdot e^{225°i} \\
z_7 = 4 \cdot e^{270°i} & z_7^* = 4i = 4 \cdot e^{90°i} \\
z_8 = 3.16 \cdot e^{198.24°i} & z_8^* = -3 + i = 3.16 \cdot e^{161.76°i}
\end{array}$$

**Lösung 2** Die Umrechnung von $z = r \cdot e^{i\varphi}$ in die kartesische Form $z = x + iy$ erfolgt mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Formeln Re $(z) = x = r \cdot \cos(\varphi)$ und Im $(z) = y = r \cdot \sin(\varphi)$.

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl ist $z^* = x - iy$. Beide unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils. In der Gaußschen Zahlenebene liegen beide daher spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

$$\begin{array}{ll}
z_1 = 2.16 + 3.37i & z_1^* = 2.16 - 3.37i \\
z_2 = 2.60 + 1.50i & z_2^* = 2.60 - 1.50i \\
z_3 = -3.54 + 3.54i & z_3^* = -3.54 - 3.54i \\
z_4 = 2.5 - 4.33i & z_4^* = 2.5 + 4.33i \\
z_5 = 2i & z_5^* = -2i \\
z_6 = -0.5 - 0.87i & z_6^* = -0.5 + 0.87i \\
z_7 = 0.88 - 0.48i & z_7^* = 0.88 + 0.48i
\end{array}$$

**Lösung 3** Der Betrag einer komplexen Zahl ist die Länge des Zeigers in der Gaußschen Zahlenebene: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Das Argument $\varphi$ ist der Winkel zur positiven reellen Achse. Es gilt: $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$, für $x \neq 0$. Wegen der Periodizität der Tangensfunktion muss man bei komplexen Zahlen im 2. und 3. Quadranten den Wert der Arkustangensfunktion um $\pi$ korrigieren. Mehr zu den Grundlagen der trigonometrischen Funktionen besprechen wir im Kapitel 2.

$$\begin{array}{ll}
|z_1| = 6.32 & \arg(z_1) = 251.57° \\
|z_2| = 3 & \arg(z_2) = 60° \\
|z_3| = 3 & \arg(z_3) = 360° - 60° = 300° \\
|z_4| = 2 & \arg(z_4) = 180° - 40° = 140° \\
|z_5| = 3.16 & \arg(z_5) = 341.57° \\
|z_6| = 10 & \arg(z_6) = 126.87° \\
|z_7| = 4 & \arg(z_7) = 280°
\end{array}$$

**Lösung 4** Man berechnet:

$$\begin{aligned}
2z_2 - z_1 &= 6 \\
z_2 \cdot z_3 &= -1 + 5i \\
z_1 - 2z_2 + 3z_3 &= -9 + 3i \\
\frac{z_2}{z_3} &= \frac{1}{2}(-5 - i) = -2.5 - 0.5i \\
\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1} &= -1.25 - 0.25i \\
2z_1 \cdot z_2^* &= 16 - 24i \\
\frac{z_1^* \cdot z_2}{z_3} &= 2 - 10i \\
z_1(2z_2^* - z_1) + z_3^* &= 31 - 25i \\
\frac{z_1 - z_2^*}{3z_3} &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\
\frac{z_1 + z_3^*}{z_2^* \cdot z_3} &= i
\end{aligned}$$

**Lösung 5** Man berechnet:

$$\begin{aligned}
(3 - 2i)(4 + 2i) &= 16 - 2i \\
\frac{3 - 2i}{4 - 3i} + 3(i - 8) &= -\frac{582}{25} + \frac{76}{25}i \\
\frac{4(3 - i)^*}{(1 + i)(-1 + i)} &= -6 - 2i \\
(2 - 4i)^2 + \frac{|1 - \sqrt{3}i|}{i} &= -12 - 18i \\
\frac{2i}{3 - 4i} + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} + 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) &= 3.53 + 1.36i \\
\frac{(3 + i) \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})}{(1 - i)^2 \cdot (2i)^*} + \frac{2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}{e^{-i\pi}} &= 0.16 - 1.23i
\end{aligned}$$

**Lösung 6** Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ ist $z^* = x - iy$, und es gilt:

a) $z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \cdot \text{Re}\,(z)$

b) $z - z^* = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \cdot \text{Im}\,(z)$

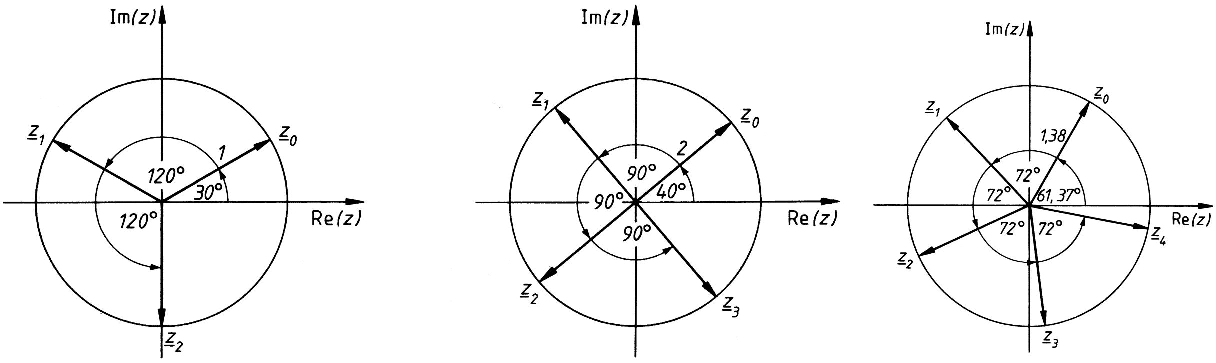
**Lösung 7** Die Formel von Moivre ist nur auf die Polarform anwendbar. Jede komplexe Zahl, die potenziert werden soll, muss also zunächst in die Polarform umgerechnet werden. Das Ergebnis kann anschließend wieder in die kartesische Form umgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
(1+i)^2 &= (\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i})^2 = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i\\
(3-\sqrt{3}i)^4 &= (\sqrt{12}\cdot e^{i330^\circ})^4 = 144\cdot e^{i1320^\circ} = 144\cdot e^{i240^\circ} = -72-124.71i\\
(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{6}})^8 &= 256\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}} = 256\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = -128+221.70i\\
(-4-3i)^3 &= (5\cdot e^{3.78i})^3 = 125\cdot e^{5.072i} = 44.00-117.00i\\
\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^3 &= (1-i)^3 = 2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{5\pi}{4}i} = -2-2i\\
(3\cdot e^{i\pi})^5 &= 243\cdot e^{5\pi i} = -243\\
\left(2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})\right)^{10} &= (2e^{\frac{2\pi}{3}i})^{10} = 1024e^{\frac{20\pi}{3}i} = -512+886.81i\\
(5(\cos(-10^\circ)+i\sin(-10^\circ)))^4 &= (5e\cdot e^{i(-10^\circ)})^4 = 625\cdot e^{i(-40^\circ)} = 625\cdot e^{i320^\circ} = 478.78-401.74i
\end{aligned}$$

**Lösung 8** a) Lösungen: $r=1$, $\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$ für $k=0,1,2$, also
$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

b) Lösungen: $r=2$, $\varphi_k = \frac{160^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}$ für $k=0,1,2,3$, also
$z_0 = 2\cdot e^{i\cdot 40^\circ}$, $z_1 = 2\cdot e^{i\cdot 130^\circ}$, $z_2 = 2\cdot e^{i\cdot 220^\circ}$, $z_3 = 2\cdot e^{i\cdot 310^\circ}$

c) Lösungen: $r=\sqrt[5]{5}=1.38...$, $\varphi_k = \frac{306.87^\circ+k\cdot 360^\circ}{5}$ für $k=0,1,2,3,4$, also
$z_0 = \sqrt[5]{5}\cdot e^{i\cdot 61.37^\circ}$, $z_1 = \sqrt[5]{5}\cdot e^{i\cdot 133.37^\circ}$, $z_2 = \sqrt[5]{5}\cdot e^{i\cdot 205.37^\circ}$, $z_3 = \sqrt[5]{5}\cdot e^{i\cdot 277.37^\circ}$, $z_4 = \sqrt[5]{5}\cdot e^{i\cdot 349.37^\circ}$




**Lösung 9** a) $\sqrt[2]{4-2i}$ sind alle Lösungen der Gleichung $z^2 = 4-2i = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 333.43^\circ}$:

Lösungen: $r=\sqrt[4]{20}=2.11$, $\varphi_k = \frac{333.43^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}$ für $k=0,1$, also
$z_0 = 2.11\cdot e^{i\cdot 166.72^\circ}$, $z_1 = 2.11\cdot e^{i\cdot 346.72^\circ}$

b) $\sqrt[3]{81\cdot e^{-i\cdot 190^\circ}}$ sind alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 81\cdot e^{-i\cdot 190^\circ}$:

Lösungen: $r=\sqrt[3]{81}=4.33$, $\varphi_k = \frac{-190^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}$ für $k=0,1,2$, also
$z_0 = 4.33\cdot e^{-i\cdot 63.33^\circ} = 4.33\cdot e^{i\cdot 296.67^\circ}$, $z_1 = 4.33\cdot e^{i\cdot 56.67^\circ}$, $z_2 = 4.33\cdot e^{i\cdot 176.67^\circ}$

c) $\sqrt[6]{-3+8i}$ sind alle Lösungen der Gleichung $z^6 = -3+8i = \sqrt{73}\cdot e^{i\cdot 110.56^\circ}$:

Lösungen: $r=\sqrt[12]{73}=1.43$, $\varphi_k = \frac{110.56^\circ+k\cdot 360^\circ}{6}$ für $k=0,1,2,3,4,5$, also
$z_0 = 1.43\cdot e^{i\cdot 18.43^\circ}$, $z_1 = 1.43\cdot e^{i\cdot 78.43^\circ}$, $z_2 = 1.43\cdot e^{i\cdot 138.43^\circ}$,
$z_3 = 1.43\cdot e^{i\cdot 198.43^\circ}$, $z_4 = 1.43\cdot e^{i\cdot 258.43^\circ}$, $z_5 = 1.43\cdot e^{i\cdot 318.43^\circ}$

**Lösung 10** a) $z^3 = 64\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Lösungen: $r = \sqrt[3]{64} = 4$, $\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{4}+2k\cdot\pi}{3}$ für $k = 0, 1, 2$, also
$z_0 = 4 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = 4 \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = 4 \cdot e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}$

b) $z^3 - 2 = 5i = \sqrt{29} \cdot e^{i\cdot 68.20°}$

Lösungen: $r = \sqrt[6]{29} = 1.75$, $\varphi_k = \frac{68.20°+k\cdot 360°}{3}$ für $k = 0, 1, 2$, also
$z_0 = 1.75 \cdot e^{i\cdot 22.73°}$, $z_1 = 1.75 \cdot e^{i\cdot 142.73°}$, $z_2 = 1.75 \cdot e^{i\cdot 262.73°}$

c) $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -4 \Leftrightarrow z - 1 = \pm 2i \Leftrightarrow z = 1 \pm 2i$

**Lösung 11** Die Umrechnungen sind

| kartesische Form | trigonometrische Form | Exponentialform |
|---|---|---|
| $z_1 = -2 + 2i$ | $z_1 = \sqrt{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$ | $z_1 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}$ |
| $z_3 = -2i$ | $z_3 = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ | $z_3 = 2 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$ |

b) Es ist
$$\frac{2+10j}{1+j} = \frac{(2+10j)(1-j)}{1+1} = \frac{1}{2}(2 + 10j - 2j + 10) = 6 + 4j$$

c) Es ist
$$\begin{aligned} (\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{6}})^3 &= \frac{1}{4^3} \cdot e^{3j\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{64} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{64}j \\ (2j)^6 &= 2^6 \cdot j^6 = -64 \\ \Rightarrow \quad (\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{6}})^3 \cdot (2j)^6 &= -j \end{aligned}$$

d) Die Lösungen von $z^3 = -8j = 8 \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}$ bestimmt man durch getrenntes Berechnen von Betrag und Argument. Es ist $r = \sqrt[3]{8} = 2$ und
$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow\quad z_0 &= 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} &\Rightarrow\quad z_1 &= 2 \cdot e^{j\frac{7\pi}{6}} \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} &\Rightarrow\quad z_2 &= 2 \cdot e^{j\frac{11\pi}{6}} \end{aligned}$$

Skizze auf Anfrage.

***Lösung 12** Zu zeigen: Für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt, dass $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ist.

Anschaulich kann man sich die Dreiecksungleichung mit Hilfe einer Skizze klar machen. Die Addition von Zeigern ist genauso definiert wie die Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Daher ist in einem Dreieck ABC der Betrag $|z_1 + z_2|$ die Länge der Seite $AC$, wenn $|AB| = |z_1|$ und $|BC| = |z_2|$ ist. Daraus wird auch klar, dass das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $z_1$ und $z_2$ Vielfache voneinander sind, d.h. $z_1 = \alpha \cdot z_2$, mit positivem reellem $\alpha > 0$.

**Beweis:** Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + y_2$ beliebig. Der Betrag einer komplexen Zahl ist die Länge ihres Zeigers. Also ist
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\ |z_1| + |z_2| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Da Beträge nichtnegativ sind, ist Quadrieren eine äquivalente Umformung. Es ist

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2 \\ (|z_1|+|z_2|)^2 &= (x_1^2+y_1^2)+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}+(x_2^2+y_2^2) \end{aligned}$$

Wir formen jetzt die zu beweisende Dreiecksungleichung äquivalent um, bis wir auf eine wahre Aussage kommen:

$$\begin{aligned} |z_1+z_2| &\le |z_1|+|z_2| \\ \Leftrightarrow\ (|z_1+z_2|)^2 &\le (|z_1|+|z_2|)^2 \\ \Leftrightarrow\ x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2 &\le (x_1^2+y_1^2)+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}+(x_2^2+y_2^2) \\ \Leftrightarrow\ 2x_1x_2+2y_1y_2 &\le 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \\ \Leftrightarrow\ (x_1x_2+y_1y_2)^2 &\le (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \\ \Leftrightarrow\ 2x_1x_2y_1y_2 &\le x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2 \\ \Leftrightarrow\ 0 &\le x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2 \\ \Leftrightarrow\ 0 &\le (x_1y_2-x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil ein geschlossenes Quadrat immer nichtnegativ ist. Da nur äquivalente Umformungen verwendet wurden, gilt damit auch die Dreiecksungleichung. □

Eine elegantere Formulierung des Beweises arbeitet mit konjugiert-komplexen Zahlen und damit, dass für jede komplexe Zahl $z$ gilt: $|z|^2 = z \cdot z^*$.

**Beweis:** Es seien $z_1 = x_1+iy_1$ und $z_2 = x_2+y_2$ beliebig. Da Beträge nichtnegativ sind, ist Quadrieren eine äquivalente Umformung. Es ist

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\cdot(z_1+z_2)^* = z_1z_1^*+z_2z_1^*+z_1z_2^*+z_2z_2^* \\ (|z_1|+|z_2|)^2 &= |z_1|^2+2|z_1|\cdot|z_2|+|z_2|^2 = z_1z_1^*+2|z_1\cdot|z_2|+z_2z_2^* \end{aligned}$$

Wir formen jetzt die zu beweisende Dreiecksungleichung äquivalent um, bis wir auf eine wahre Aussage kommen:

$$\begin{aligned} |z_1+z_2| &\le |z_1|+|z_2| \\ \Leftrightarrow\ (|z_1+z_2|)^2 &\le (|z_1|+|z_2|)^2 \\ \Leftrightarrow\ z_1z_1^*+z_2z_1^*+z_1z_2^*+z_2z_2^* &\le z_1z_1^*+2|z_1|\cdot|z_2|+z_2z_2^* \\ \Leftrightarrow\ z_2z_1^*+z_1z_2^* &\le 2|z_1|\cdot|z_2| \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass $z_1z_2^* = (z_1^*z_2)^*$ sowie $|z_1|\cdot|z_2| = |z_1\cdot z_2| = |z_1\cdot z_2^*|$ ist. Substituiert man nun $z = z_1z_2^*$ in der letzten Ungleichung, bleibt zu zeigen, dass für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z+z^* \le 2|z|$$

Das gilt tatsächlich für beliebiges $z = u+iv$, wie man leicht nachrechnet:

$$z+z^* \le 2|z| \Leftrightarrow 2u \le 2\sqrt{u^2+v^2} \Leftrightarrow 4u^2 \le 4(u^2+v^2) \Leftrightarrow v^2 \ge 0$$

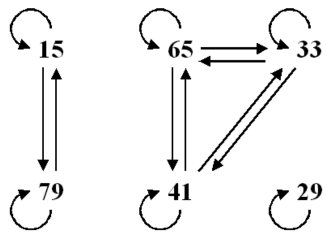
Damit ist die Dreiecksungleichung bewiesen. □

## 2.2 Relationen und Funktionen

**Lösung 13** Betrachten Sie die Zahlenmenge $M = \{15, 65, 79, 29, 33, 41\}$ und die binäre Relation $R \subset M \times M$ mit

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) : \; x, y \in M \text{ und bei Division durch 8 lassen } x \text{ und } y \text{ denselben Rest}\} \\ &= \{(15, 15), (65, 65), (79, 79), (29, 29), (33, 33), (41, 41), (15, 79), (79, 15), (65, 33), \\ &\quad (65, 41), (33, 65), (33, 41), (41, 65), (41, 33)\} \end{aligned}$$

a) Pfeildiagramm:




b) $R$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

c) Nach Definition ist jede reflexive, symmetrische und transitive Relation eine Äquivalenzrelation. Damit ist $R$ eine Äquivalenzrelation (siehe Aufgabenteil b)).

**Lösung 14** Um herauszufinden, ob eine Relation eine Äquivalenzrelation ist, muss man die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität überprüfen.

a) ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

b) ist keine Äquivalenzrelation, da sie nicht reflexiv ist: als Gegenbeispiel kann man zum Beispiel $x = y = 3$ wählen, und $3 + 3 \neq 10$.

c) ist eine Äquivalenzrelation. Wir überprüfen die Eigenschaften der Reihe nach:
   - Reflexivität: wenn $a = b$, dann ist $a - b = 0$ und damit für beliebiges $a$ ohne Rest durch 5 teilbar.
   - Symmetrie: Wenn $a - b$ ohne Rest durch 5 teilbar ist, dann ist es auch $b - a = -(a - b)$.
   - Transitivität: Wenn $a - b$ und $b - c$ ohne Rest durch 5 teilbar sind, können wir sie als $a - b = 5 \cdot k$ und $b - c = 5 \cdot n$ darstellen. Die Differenz $a - c$ ist dann
   $$a - c = (a - b) + (b - c) = 5 \cdot k + 5 \cdot n = 5 \cdot (k + n)$$
   Also ist auch die Differenz $a - c$ restlos durch 5 teilbar, und damit stehen auch $a$ und $c$ in Relation, sobald sowohl $a$ und $b$ als auch $b$ und $c$ in Relation stehen.

d) ist ebenfalls offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

**Lösung 15** In der Menge aller Geraden im Raum betrachte man die Relationen

$R_1$ = “$g_1$ liegt näher am Ursprung als $g_2$”,
$R_2$ = “$g_1$ schneidet $g_2$ in einem Punkt”,
$R_3$ = “$g_1$ hat zum Ursprung denselben Abstand wie $g_2$”.

Eigenschaften:

| Relation | reflexiv | irreflexiv | symmetrisch | antisymmetrisch | asymmetrisch | transitiv |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | | x | | | x | x |
| $R_2$ | | x | x | | | |
| $R_3$ | x | | x | | | x |

Bei der Relation $R_3$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation, die die Menge aller Geraden einteilt in Äquivalenzklassen. Jede Äquivalenzklasse enthält alle Geraden, die zum Ursprung denselben Abstand $d$ haben, d.h. deren Lotfußpunkte auf einer Kugel um den Ursprung mit Radius $d$ liegen. Relation $R_1$ ist eine strenge Ordnungsrelation, da sie irreflexiv, asymmetrisch und transitiv ist.

**Lösung 16** Die Relation $R$ ist reflexiv, symmetrisch, transitiv, und damit eine Äquivalenzrelation. Außerdem ist sie rechts- und linkstotal, und weder rechts- noch linkseindeutig.

**Lösung 17** Sie können leicht andere Beispiele finden, aber diese sollen das Prinzip veranschaulichen. Die Kurzschreibweise `wohntImSelbenHausWie` bedeutet hier die Relation

$$R = \{(x, y) : x, y \text{ sind Ulmer und } x \text{ wohnt im selben Haus wie } y\}$$

- reflexiv: `wohntImSelbenHausWie`, `kennt`, `istVerwandtMit`
- symmetrisch: `istVerheiratetMit`, `istTennisPartnerVon`, `wohntImSelbenHausWie`, `istKollegeVon`, `istNachbarVon`, `istVerwandtMit`, `istBefreundetMit`
- asymmetrisch: `istKleinerAls`, `istJüngerAls`, `istVorgesetzterVon`
- transitiv: `istKleinerAls`, `istJüngerAls`, `wohntImSelbenHausWie`, `istKollegeVon`, `istVorgesetzterVon`, `istVerwandtMit`
- intransitiv: `istBefreundetMit`, `kennt`, `istNachbarVon`

Die Relation `wohntImSelbenHausWie` ist demnach eine Äquivalenzrelation (unter der Annahme, dass jeder Einwohner nur in genau einem Haus wohnt), ebenso wir `istVerwandtMit`.

Bemerkung: Hätten wir bei `istVerwandtMit` den Grad der Verwandschaft eingeschränkt (z.B. nur Verwandschaftsgrade bis maximal 3), wäre die Transitivität nicht mehr gegeben, es wäre also keine Äquivalenzrelation mehr!

**Lösung 18** a) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus (1, 3)$

b) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

c) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

d) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

**Lösung 19** Die Funktion $y = x^2$ beschreibt die Normalparabel.

a) $y = (x - 3)^2$

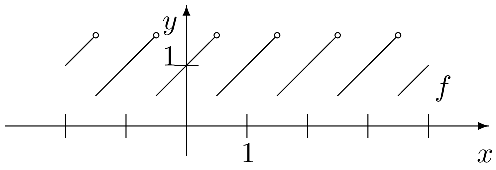
b) $y = x^2 - 3$

c) $y = (x + 2)^2 + 5$

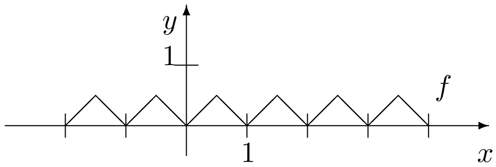
Allgemein bedeutet eine Verschiebung entlang der $x$-Achse um $a$ (nach rechts: $a > 0$, nach links: $a < 0$), dass $x$ durch $(x - a)$ ersetzt werden muss. Eine Verschiebung entlang der $y$-Achse um $b$ (nach oben: $b > 0$, nach unten: $b < 0$) bewirkt, dass zur Funktionsgleichung als Ganzes $b$ addiert wird. Klammernsetzung beachten!

**Lösung 20** Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen (auf dem Intervall $[-2, 4]$):

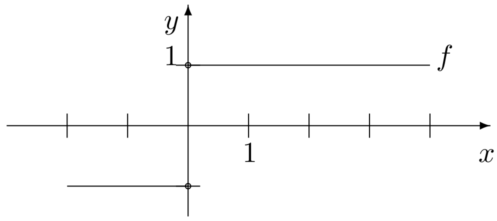
a) $f(x) = x - [x - 0.5]$, $x \in \mathbb{R}$



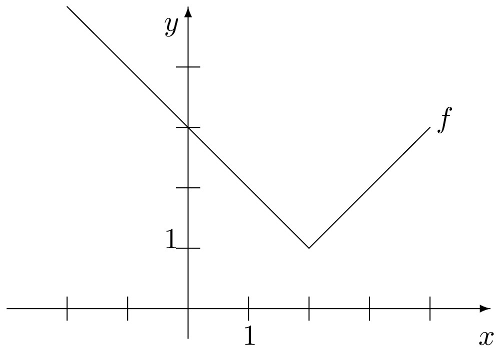

b) $f(x) = |x - [x + 0.5]|$, $x \in \mathbb{R}$




c) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$




d) $f(x) = 1 + |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$




**Lösung 21** a) $f$ ist eine Parabel mit positivem Koeffizienten bei $x^2$, also ist sie nach oben geöffnet. Folglich ist sie links des Scheitelpunktes streng monoton fallend und rechts davon streng monoton wachsend. Der Scheitelpunkt liegt auf der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, bei $x_S = -1.5$.

b) $f$ ist eine Hyperbel, und zwar entsteht $f$ aus der Normalhyperbel $g(x) = \frac{1}{x}$ durch Verschieben um 1 nach links entlang der $x$-Achse. Also hat $f$ zwei Abschnitte, in denen sie monoton ist: $f$ ist streng monoton fallend für $x < -1$, und streng monoton fallend für $x > -1$. Für $x = -1$ ist sie nicht definiert (Polstelle).

**Lösung 22** a) Zu zeigen: $f(x) = x^{2n}$ ist eine gerade Funktion, d.h. für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$ (nach Definition).

Zum Beweis überprüfen wir die Definition der Geradheit für beliebiges reelles $x$ und natürliches $n$ und benutzen dabei die Potenzgesetze. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^{2n} \\ &= \left((-x)^2\right)^n = \left((-1)^2 \cdot x^2\right)^n \\ &= \left(x^2\right)^n = x^{2n} = f(x)\ , \end{aligned}$$

weil $(-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2$, und $(-1)^2 = 1$ (fällt also weg). $\square$

b) Zu zeigen: $f(x) = x^{2n+1}$ ist eine ungerade Funktion, d.h. für beliebiges reellwertiges $x$ gilt: $f(-x) = -f(x)$ (nach Definition).

Wir benutzen dabei wieder die Potenzgesetze und die Erkenntnis aus a), dass $(-x)^{2n} = x^{2n}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & (-x)^{2n+1} & \\ & = & (-x)^{2n} \cdot (-x) & \\ & = & (x)^{2n} \cdot (-x) & \text{(wegen Aufgabenteil a)} \\ & = & -\left((x)^{2n} \cdot x\right) & \\ & = & -f(x)\ . & \end{array}$$

□

**Lösung 23** Es ist wichtig, die Definition für beliebiges reelles $x$ zu überprüfen. Die Berechnung von Beispielwerten (Stichproben) reicht für den Nachweis der Symmetrie nicht aus!

a) $f(x) = x^3 \cdot |x|$ ist punktsymmetrisch (ungerade), weil für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| = |-x|$, und $-x^3 = (-x)^3$, und folglich ist

$$f(-x) = (-x)^3 \cdot |-x| = -x^3 \cdot |x| = -f(x)$$

b) $f(x) = \sqrt{|x+1|}$ ist weder punktsymmetrisch (ungerade) noch achsensymmetrisch (gerade), weil man Gegenbeispiele angeben kann. Zum Beispiel ist $f(2) = \sqrt{3}$ und $f(-2) = 1$, also gilt weder $f(2) = f(-2)$ noch $f(2) = -f(-2)$.

c) $f(x) = 1 + \ln x^2$ ist achsensymmetrisch (gerade), weil für beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$f(-x) = 1 + \ln((-x)^2) = 1 + \ln(x^2) = f(x)$$

**Lösung 24** Quadratische Ergänzung liefert die $pq$-Formel:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + px + q & = & 0 \\ x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q & = & 0 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 & = & \frac{p^2}{4} - q \\ x_{1/2} + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x_{1/2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{array}$$

**Lösung 25** Biquadratische Gleichungen sind solche, die nur geradzahlige Potenzen von $x$ aufweisen. Man vereinfacht solche Gleichungen mit Hilfe der Substitution $u = x^2$.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ vereinfacht sich zu $u^2 - 13u + 36 = 0$. Diese quadratische Gleichung löst man mit Hilfe einer der bekannten Formeln und erhält zwei Lösungen:

   (i) $u_1 = 9 = x^2$: Dazu gehören die Lösungen $x_{1/2} = \pm 3$.

   (ii) $u_2 = 4 = x^2$: Dazu gehören die Lösungen $x_{3/4} = \pm 2$.

   Die Lösungsmenge ist demnach $L = \{-3, -2, 2, 3\}$.

b) $L = \{-2, 2, -4, 4\}$

c) $L = \{0\}$

d) $L = \{0, 2, -2\}$

**Lösung 26** Funktionswerte $f(0)$, $f(-2)$ und $f(1)$ für das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & & -2 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \mathbf{3} \end{array}$$

**Lösung 27** Mit dem Hornerschema ermittelt man die Koeffizienten des abgespaltenen Polynoms:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -10 & 12 \\ 3 & & 6 & 6 & -12 \\ \hline & 2 & 2 & -4 & \mathbf{0} \end{array}$$

Also ist $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = (2x^2 + 2x - 4)(x - 3)$. Die weiteren Nullstellen sind die Nullstellen des quadratischen Polynoms (berechnet mit Ihrer Lieblings-Lösungsformel für quadratische Gleichungen): $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Die Linearfaktorzerlegung ist also (Ausklammern des Vorfaktors $a_3 = 2$ nicht vergessen)

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 2(x - 3)(x + 2)(x - 1)$$

**Lösung 28** a) $y = (x - 4)(x^2 + 4)$

b) $y = \frac{3}{2}\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

c) außer $x = 0$ keine reellen Nullstellen: $y = -3x(x^2 - 6x + 11)$

d) $y = -2x(x - 2)^2$

e) $y = -(x + 2)^3$

**Lösung 29** Die Koeffizienten der Polynome $g_1$ und $g_2$ können am einfachsten nach dem Horner-Schema berechnet werden:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & -9 & 14 & 20 & -24 \\ -2 & & -2 & 8 & 2 & -32 & 24 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 & \mathbf{0} \\ -2 & & -2 & 12 & -22 & 12 & \\ \hline & 1 & -6 & 11 & -6 & \mathbf{0} & \end{array}$$

Also sind die abgespaltenen Polynome:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 \\ g_2(x) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{aligned}$$

und die Linearfaktorzerlegung berechnet sich nach Raten der zusätzlichen Nullstelle $x_2 = 1$ und Abspalten des Linearfaktors $(x - 1)$ zu:

$$g(x) = (x+2)^2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x+2)^2(x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x+2)^2(x-1)(x-2)(x-3)$$

Rechenweg vollständig:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & -9 & 14 & 20 & -24 \\ -2 & & -2 & 8 & 2 & -32 & 24 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 & \mathbf{0} \\ -2 & & -2 & 12 & -22 & 12 & \\ \hline & 1 & -6 & 11 & -6 & \mathbf{0} & \\ 1 & & 1 & -5 & 6 & & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \mathbf{0} & & \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x \in \{3; 2\}$$

**Lösung 30** Es ist $p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 9z - 54$ mit Nullstelle $z_0 = 3i$. Damit ist auch $z_1 = z_0^* = -3i$ eine Nullstelle. Man kann jetzt den quadratischen Term $(z-3i)(z+3i) = z^2+9$ durch Polynomdivision abspalten, oder mit dem Horner-Schema rechnen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 3 | 9 | -54 |
| 3i | | 3i | -9 + 3i | -9 - 18i | 54 |
| | 1 | 1 + 3i | -6 + 3i | -18i | **0** |
| -3i | | -3i | - 3i | 18i | |
| | 1 | 1 | -6 | **0** | |

Die beiden restliche Nullstellen berechnet man als Nullstellen des abgespaltenen quadr. Polynoms $z^2 + z - 6 = 0$ zu $z_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{0.25 + 6} = 2/-3$. Also ist die komplexe Linearfaktorzerlegung:

$$p(z) = (z - 3i)(z + 3i) \cdot (z^2 + z - 6) = (z - 3i)(z + 3i) \cdot (z - 2)(z + 3)$$

**Lösung 31** Zum Vorgehen: Zunächst findet man die LFZ von Zähler- und Nennerpolynom heraus. Die Nullstellen des Nenners sind die Definitionslücken; dort ist die gebrochenrationale Funktion nicht definiert.

Anschließend kürzt man gemeinsame Linearfaktoren, soweit möglich. Erweitert sich dadurch der Definitionsbereich, spricht man auch von hebbaren Lücken. Die verbleibenden Linearfaktoren des Zählers bestimmen die Nullstellen, die des Nenners die Polstellen.

Die gegebenen Funktionen mit LFZ und in gekürzter Form sind:

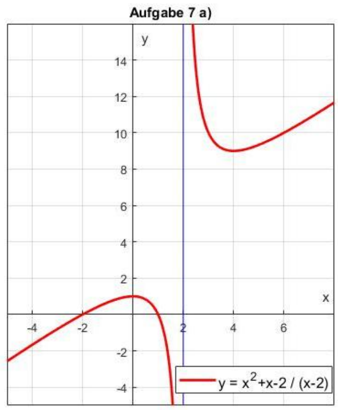
$$\begin{aligned}
\text{a)}\ \frac{x^2+x-2}{x-2} &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)} \\
\text{b)}\ \frac{x^3-5x^2-2x+24}{x^3+3x^2+2x} &= \frac{(x+2)(x-3)(x-4)}{x(x+2)(x+1)} = \frac{(x-3)(x-4)}{x(x+1)} \quad \text{für } x \neq -2 \\
\text{c)}\ \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} &= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)} \quad \text{für } x \neq 1 \\
\text{d)}\ \frac{x^3-4x^2-4x}{x^4-4} &= \frac{x(x-(2+2\sqrt{2}))(x-(2-2\sqrt{2}))}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)} \\
\text{e)}\ \frac{(x^2-1)(x^2-25)}{x^3+4x^2-5x} &= \frac{(x-1)(x+1)(x-5)(x+5)}{x(x-1)(x+5)} = \frac{(x+1)(x-5)}{x} \quad \text{für } x \notin \{1; -5\}
\end{aligned}$$

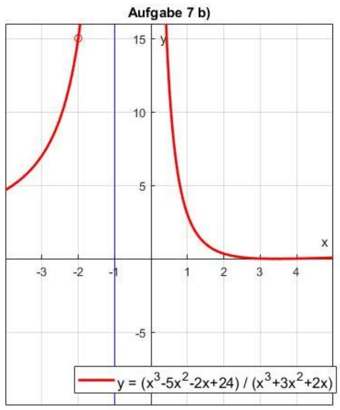
Ergebnis in Kurzform:

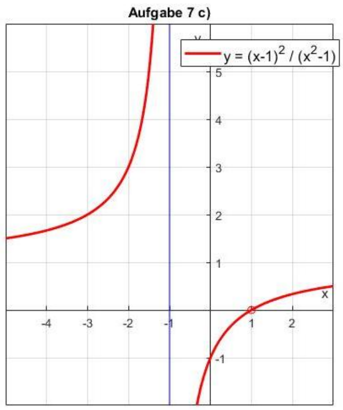
| | nicht definiert in | Nullstellen (nach Kürzen) | Pole (nach Kürzen) |
|---|---|---|---|
| a) | $x_3 = 2$ | $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ | $x_3 = 2$ |
| b) | $x_1 = -2$ (hebbare Lücke), | | |
| | und $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ | $x_4 = 3$, $x_5 = 4$ | $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ |
| c) | $x_{1/2} = \pm 1$ | $x_1 = 1$ | $x_2 = -1$ |
| d) | $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ | $x_3 = -0.8284$, $x_4 = 0$, $x_5 = 4.8284$ | $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ |
| e) | $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ (hebbare Lücken), | | |
| | und $x_3 = 0$ | $x_4 = -1$, $x_5 = 5$ | $x_3 = 0$ |

Bei c) kann man sich fragen, ob die Stelle $x_1 = 1$ eine Nullstelle sein kann, obwohl die Funktion dort nicht definiert ist. Gemeint ist, dass sich der Funktionsgraph dort wie in einer Nullstelle verhält, d.h. die Funktionswerte haben rechts und links dieser Stelle unterschiedliches Vorzeichen. Tatsächlich existiert der Grenzwert der Funktion für $x \to 1$ trotzdem und hat den Wert Null. Mit Grenzwerten werden wir uns in Kapitel 3 beschäftigen.

Im Folgenden finden Sie die Grafiken für die Funktionen in a)-c):




**Lösung 32** Aus den Nullstellen kann man die Produktdarstellung des Zählers, aus den Polstellen die Produktdarstellung des Nenners gewinnen. Der Vorfaktor ergibt sich aus dem gegebenen Funktionswert $y(0) = 4$:

$$y = \frac{1}{8}\frac{(x-2)(x+4)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^3+6x^2-32}{8x^2-8}$$

**Lösung 33** Man versucht, die Gleichung umzuformen. Dabei muss man auf Folgendes achten:

- Quadrieren ist *keine* äquivalente Umformung. Man muss deshalb alle (scheinbaren) Lösungen am Ende einer Probe unterziehen. Das sieht man an einem einfacheren Fall gut: Aus der Gleichheit zweier Zahlen $a = b$ folgt zwar, dass $a^2 = b^2$ ist, umgekehrt folgt aber nicht aus $a^2 = b^2$, dass $a = b$ ist.
- Beim Dividieren durch $x$ oder allgemein durch einen Term, der Variablen enthält, verliert man mögliche Lösungen, wenn dieser Term den Wert Null annehmen kann. Diese Fälle muss man als Sonderfälle separat betrachten.

Am lästigsten ist die doppelte Wurzel - um diese loszuwerden, isoliert man sie am besten sofort auf einer Seite und quadriert (alternative Lösungswege sind natürlich möglich):

$$\begin{array}{rrcll}
 & \sqrt{x\sqrt{x}-x}+\sqrt{x} & = & x & \mid -\sqrt{x} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x\sqrt{x}-x} & = & x-\sqrt{x} & \mid \text{quadrieren} \\
\Rightarrow & x\sqrt{x}-x & = & (x-\sqrt{x})^2 & \mid \text{rechts ausmultiplizieren} \\
\Leftrightarrow & x\sqrt{x}-x & = & x^2-2x\sqrt{x}+x & \mid x \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow & x\cdot(\sqrt{x}-1) & = & x\cdot(x-2\sqrt{x}+1) & \mid\ : x \text{ (Sonderfall I: } x=0) \\
\Rightarrow & \sqrt{x}-1 & = & x-2\sqrt{x}+1 & \mid \text{Binomische Formel rechts} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x}-1 & = & (\sqrt{x}-1)^2 & \mid\ : (\sqrt{x}-1) \text{ (Sonderfall II: } x=1) \\
\Rightarrow & 1 & = & \sqrt{x}-1 & \mid +1 \\
\Leftrightarrow & 2 & = & \sqrt{x} & \mid \text{quadrieren} \\
\Rightarrow & 4 & = & x &
\end{array}$$

Anschließend prüft man die erhaltene Lösung $x_1 = 4$, ob es eine ist, wie auch die beiden Sonderfälle, durch Einsetzen in die Originalgleichung:

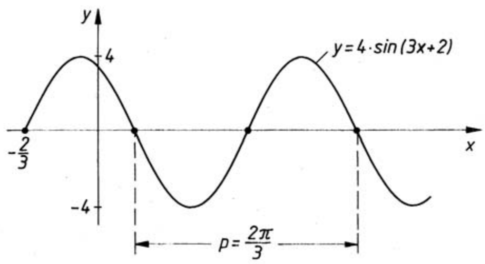
$$\begin{aligned} x_1 = 4: &\quad \sqrt{4\sqrt{4}-4}+\sqrt{4} \overset{\checkmark}{=} 4 \\ \text{Sonderfall I } x_2 = 0: &\quad \sqrt{0\sqrt{0}-0}+\sqrt{0} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ \text{Sonderfall II } x_3 = 1: &\quad \sqrt{1\sqrt{1}-1}+\sqrt{1} \overset{\checkmark}{=} 1 \end{aligned}$$

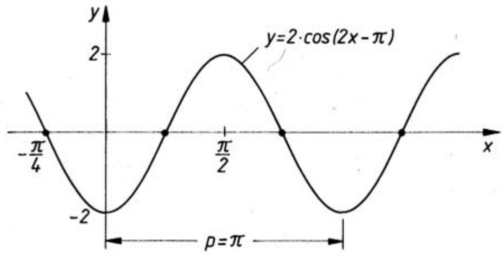
Tatsächlich hat die Gleichung also drei Lösungen; die Lösungsmenge ist $L = \{0; 1; 4\}$.

**Lösung 34** a) $60° = \frac{\pi}{3}$, $-30° = -\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, $3600° = 20\pi$, $180° = \pi$;

b) $0.5 = 28.64789°$, $-1 = -57.29578°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{2\pi}{5} = 72°$, $15\pi = 2700°$

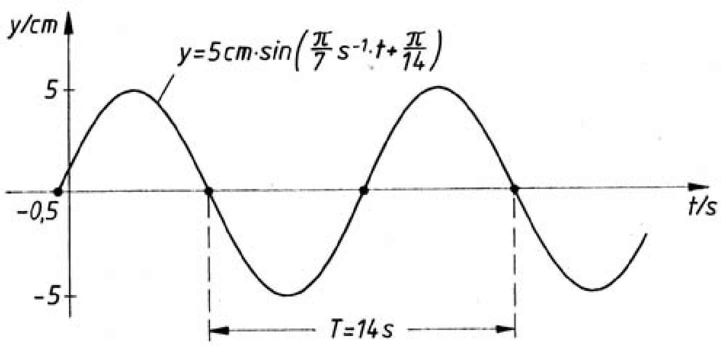
**Lösung 35** Die Funktionsgraphen sind:




**Lösung 36** Es ist die Amplitude $A = 5$ cm, die Periode $T = 14$ s, die Frequenz $\omega = \frac{\pi}{7}\ \mathrm{s}^{-1}$, und die Phase $\varphi = \frac{\pi}{14}$; also

$$y = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}t + \frac{\pi}{14}\right)$$




**Lösung 37** Die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen finden Sie in jeder guten Formelsammlung. Schauen Sie in den entsprechenden Abschnitt hinein und versuchen Sie zunächst, die Additionstheoreme mit der Aufgabenstellung in Verbindung zu bringen.

a) für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin 2x = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$.

b) für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tan 2x = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

c) für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\ &= 2\sin\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

**Lösung 38** In allen Antworten ist die Periode der Funktionen zu berücksichtigen. $k$ ist jeweils eine beliebige ganze Zahl. Außerdem gibt es bei Sinus- und Kosinusgleichungen immer zwei Lösungen pro Periodenintervall, da

$$\sin x = \sin(\pi - x) \text{ und } \cos x = \cos(-x)$$

Die Arcusfunktionen liefern jedoch nur jeweils eine dieser Lösungen.

a) $x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_2 = (\pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

b) $x = \arctan(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $\sin^2\frac{x}{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{x}{5} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \sin\frac{x}{5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\text{für} \quad x_1 = 5\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi) = \frac{5}{4}\pi + 10k\pi \\ &\text{oder} \quad x_2 = 5\cdot((\pi-\frac{\pi}{4})+2k\pi) = \frac{15}{4}\pi+10k\pi \\ \sin\frac{x}{5} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\text{für} \quad x_1 = 5\cdot(-\frac{\pi}{4}+2k\pi) = -\frac{5}{4}\pi+10k\pi \\ &\text{oder} \quad x_2 = 5\cdot((\pi+frac\pi4)+2k\pi) = -\frac{25}{4}\pi+10k\pi \end{aligned}$$

d) Zu lösen ist

$$\sin^2(x) = 3\cos^2(x) \Leftrightarrow \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 3 \Leftrightarrow \tan^2(x) = 3 \Leftrightarrow \tan(x) = \pm\sqrt{3}$$

Der Arkustangens liefert uns eine Lösung im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $x_1 = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} = 60°$, und $x_1 = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} = -60°$.

Da die Tangensfunktion eine Periode von $T = \pi$ hat, ergibt sich als Lösungsmenge also

$$L = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ oder } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\,, \text{ für } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Alternative Umformung: Es ist $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, also

$$\sin^2(x) = 3\cos^2(x) \Leftrightarrow 1 - \cos^2(x) = 3\cos^2(x) \Leftrightarrow 1 = 4\cos^2(x) \Leftrightarrow \pm\frac{1}{2} = \cos(x)$$

Auch von hier aus konnte man mit Hilfe des Arkuskosinus und der Achsensymmetrie der Kosinusfunktion auf die Lösungsmenge kommen.

**Lösung 39** Gesucht sind alle Lösungen von

$$f(x) = e^{-7x} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Da $e^{-7x}$ für alle $x$ positiv ist, müssen wir nur die Nullstellen des zweiten Faktors untersuchen: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Schritt 1: Substitution $u = 2x - \frac{\pi}{3}$

Die Nullstellen der Sinusfunktion $\sin(u) = 0$ liegen bei $u = k\pi$, für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

Schritt 2: Aus $u = k\pi$ berechnet man die Lösungen

$$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

Lösungsmenge: $L = \{x \in \mathbb{R} :\ x = k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ für ganzzahliges $k\}$.

**Lösung 40** Schritt 1: Substitution $u = 2x - \frac{\pi}{3}$

Die Lösungen von $\sin(u) = \frac{1}{2}$ liegen bei $u_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ und (aus Symmetriegründen) $u_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, für beliebiges ganzzahliges $k$.

Schritt 2: Aus $u_1$ und $u_2$ berechnet man die Lösungen

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{3} &= \underbrace{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}_{u_1} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} &= \underbrace{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}_{u_2} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ oder } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\,,\ \text{für } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Lösung 41** Wir setzen $y = \arccos x$. Dann ist $x = \cos y$ und weiter

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sin y$$

Setzen wir in den rechten Ausdruck wieder den Ausgangspunkt $y = \arccos x$ ein, erhalten wir die gesuchte Gleichheit

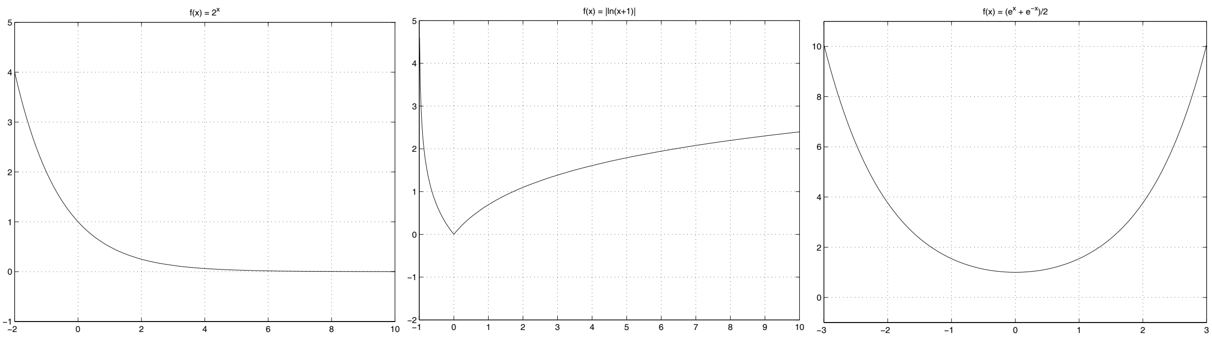
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

**Lösung 42** Die Stromstärke nimmt den Wert $i = \frac{1}{2}\frac{U}{R}$ zum Zeitpunkt $t = \frac{L}{R}\ln 2$ an. Man erhält diesen Wert durch Einsetzen in die gegebene Gleichung und anschließendes Umformen nach $t$:

$$\frac{U}{2R} = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} = -\frac{R}{L}t \Leftrightarrow \frac{L}{R}\ln 2 = t$$

**Hinweis:** Nach den Logarithmengesetzen ist $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

**Lösung 43**



**Lösung 44** Für das Zahlenbeispiel ist $b = 20$ und $p(6) = 60 = 20 + 80 \cdot e^{6\lambda}$ ($p$ ist der Prozentsatz, der noch im Gedächtnis ist!). Daraus berechnet man $\lambda = -\frac{1}{6}\ln 2 \approx -0.1155$. Folglich ist $p(25) \approx 24.45$. Er hat dann also schon fast alles, was er je vergessen wird, vergessen.

**Lösung 45** Es ist $K_0 = 2000$.

a) Bei einem Zinssatz von 6% ergibt sich

$$20000 = 1.06^n \cdot 2000 \;\Leftrightarrow\; 1.06^n = 10 \;\Leftrightarrow\; n = \frac{1}{\log_{10} 1.06} = 39.516$$

b) Soll nach $n = 20$ Jahren bereits eine Verzehnfachung erreicht sein, muss gelten:

$$10 \cdot K_0 = \left(1 + \frac{z}{100}\right)^{20} \cdot K_0 \;\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{z}{100}\right)^{20} = 10 \;\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{z}{100}\right) = \sqrt[20]{10} \;\Leftrightarrow\; z = 12.202$$

**Lösung 46** a) $x = \ln(1 + \sqrt{2})$, weil

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2 \\ e^{2x} - 1 &= 2e^x \\ e^{2x} - 2e^x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung. Durch die Substitution $z = e^x$ erhält man die äquivalente Gleichung $z^2 - 2z - 1 = 0$, die die Lösungen $z_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$ hat. Da $z = e^x$, kommt nur die positive Lösung in Frage, das heißt $z = 1 + \sqrt{2}$ bzw. $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

b) $x = \ln 9$

**Lösung 47** Der Hyperbelkosinus (Kettenlinie) ist achsensymmetrisch zur $y$-Achse und erreicht sein Minimum an der Stelle $x_0 = 0$. Also entspricht die Angabe in der Aufgabe der Gleichung $H = f(45) - f(0)$, und es ist

$$H = 20 \cdot \cosh(\frac{45}{20}) - 20 = 75.9314 \text{ m}$$

**Lösung 48** Die Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen finden Sie in jeder guten Formelsammlung. Schauen Sie in den entsprechenden Abschnitt hinein und versuchen Sie zunächst, die Additionstheoreme mit der Aufgabenstellung in Verbindung zu bringen.

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad \cosh(2x) &= \cosh(x+x) \;=\; \cosh x \cdot \cosh x + \sinh x \cdot \sinh x \\
&= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
\text{b)}\quad \sinh(2x) &= \sinh(x+x) \;=\; \sinh x \cdot \cosh x + \cosh x \cdot \sinh x \\
&= 2 \sinh x \cosh x \\
\text{c)}\quad 1 - \tanh^2 x &= 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \;=\; \frac{1}{\cosh^2 x} \\
\text{d)}\quad 1 - \coth^2 &= 1 - \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} \;=\; -\frac{1}{\sinh^2 x}
\end{aligned}$$

**Lösung 49** Es ist

a) $\log_{10} 1000 = 3$, weil $10^3 = 1000$ ist.

b) $\log_2 16 = 4$, weil $2^4 = 16$ ist.

c) $\log_{10} 0.01 = -2$, weil $10^{-2} = 0.01$ ist.

d) $\log_2 0.5 = -1$, weil $2^{-1} = 0.5$ ist.

e) $\ln 1 = 0$, weil $e^0 = 1$ ist.

f) $\ln \frac{1}{e} = -1$, weil $e^{-1} = \frac{1}{e}$ ist.

**Lösung 50** Es ist:

a) $\log_2 x = 5$ für die Zahl $x = 2^5 = 32$.

b) $\log_{10} x = -2$ für die Zahl $x = 10^{-2} = 0.01$.

c) $\log_3 x = 3$ für die Zahl $x = 3^3 = 27$.

d) $\log_{0.1} x = 1$ für die Zahl $x = 0.1^1 = 0.1$.

**Lösung 51** Nach den Rechenregeln für Logarithmen ist

a) $\ln u - \ln v = \ln \frac{u}{v}$

b) $\frac{3}{2} \ln x + \frac{1}{4} \ln x^2 - 10 \ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{3}{2}} + \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln x^5 = \ln \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^5} = \ln x^{-3} = -3 \ln x$

c) $3 \ln x + 4 \ln y - \frac{1}{2} \ln z = \ln x^3 + \ln y^4 - \ln \sqrt{z} = \ln \dfrac{x^3 y^4}{\sqrt{z}}$

**Lösung 52** Es ist

a) $5^x = \frac{1}{125}$ für $x = -3$, also ist $\log_5 \frac{1}{125} = x = -3$.

b) $0.25^x = 1024$ für $x = -5$ weil $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{4^x} = 4^{-x} = 1024$ genau dann gilt, wenn $-x = 5$ ist, also $x = 5$.

c) $x = \log_8 512 = 3$, weil $8^3 = 512$ ist.

d) $2 \ln x = \ln 15 + 2 \ln 2 - \ln 12$ löst man durch Umformen:

$$\ln 15 + 2 \ln 2 - \ln 12 = \ln \frac{15 \cdot 2^2}{12} = \ln 5$$

Also ist $2 \ln x = \ln x^2 = \ln 5$, wenn $x^2 = 5$, also für $x = \sqrt{5}$.

**Lösung 53** Die Eulerschen Formeln lauten:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \\ e^{-i\varphi} &= \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Addiert man beide Gleichungen, erhält man

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cdot \cos(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cosh(i\varphi)$$

Durch Subtrahieren erhält man andererseits:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \cdot \sin(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{i} \sinh(i\varphi) \;\Leftrightarrow\; \sinh(i\varphi) = i \cdot \sin(\varphi)$$

Durch diese enge Verwandschaft erklären sich auch die sehr ähnlichen Eigenschaften der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen. Nehmen Sie einen Blick in die Formelsammlung, um sich von der großen Vielzahl von Beziehungen zwischen diesen Funktionen zu überzeugen!

**Lösung 54** Man berechnet:

$$\begin{aligned}
\ln(-i) &= \ln(1 \cdot e^{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)i}) = \ln(1) + (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)i = (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)i \\
\ln(-2) &= \ln(2 \cdot e^{(\pi+2k\pi)i}) = \ln(2) + (\pi + 2k\pi)i
\end{aligned}$$

für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$. Der komplexe Logarithmus hat also unendlich viele Werte. Der Hauptwert ist jeweils der Wert, den man für $k = 0$ erhält, also

$$\text{Ln}\,(-i) = \frac{3}{2}\pi i\,,\ \text{Ln}\,(-2) = 0.69315 + \pi i$$

***Lösung 55** Die Rechenregeln der Logarithmus-Funktion finden sich im Skript oder in der Literatur. Es ist insbesondere

$$r \cdot \ln(x) = \ln(x^r)\,,\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)\,,\ \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Damit kann man die Summe folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right) \\
&= \ln\left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot n^{n-1}}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^{n-1}}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \ln\left(\frac{n \cdot n^{n-1}}{n \cdot (n-1)!}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \\
&= \ln(n^n) - \ln(n!) = n \cdot \ln(n) - \ln(n!)
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Zur Erläuterung: Beim Übergang in die dritte Zeile wurde gekürzt. Innerhalb der vierten Zeile wurde der Bruch mit $n$ erweitert.

## 2.3 Grenzwerte und Stetigkeit

**Lösung 56** a) $\langle a_n \rangle = 0.2, 0.004, 0.008, ... = \langle 0.2^n \rangle$

b) $\langle a_n \rangle = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, ... = \left\langle \frac{n^2}{n+1} \right\rangle$

c) $\langle a_n \rangle = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ... = \left\langle \frac{n}{2^n} \right\rangle$

d) $\langle a_n \rangle = \left\langle (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} \right\rangle$

**Lösung 57** Gesucht sind jeweils solche Zahlen $n_0$, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ ist, sobald $n \geq n_0$.

| Folge $\langle a_n \rangle$ | $n_0$ für $\varepsilon = 0.1$ | $n_0$ für $\varepsilon = 0.01$ | $n_0$ für $\varepsilon = 0.0001$ |
|---|---|---|---|
| $\langle \frac{1}{n+2} \rangle$ | 9 | 99 | 9999 |
| $\langle \frac{2+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \rangle$ | 401 | 40001 | 400000001 |

**Lösung 58** Die Vorgehensweise ist folgendermaßen: Man untersucht zunächst für beliebiges $\varepsilon$ die Ungleichung aus der Grenzwertdefinition $|a_n - g| < \varepsilon$, in die man die gegebenen Ausdrücke für $a_n$ und $g$ einsetzt. Durch äquivalentes Umformen der Ungleichung nach $n$ kommt man meist zu einer Ungleichung der Form $n > f(\varepsilon)$. Der Ausdruck $f(\varepsilon)$ ist die gesuchte Rechenvorschrift für den Folgenindex $n_0$, ab dem die Folgenglieder innerhalb der $\varepsilon$-Umgebung des Grenzwerts liegen.

Der Ausdruck $f(\varepsilon)$ ist jedoch im allgemeinen eine reelle Zahl. Wir brauchen aber einen ganzzahligen Index $n_0$, also müssen wir auf die nächste größere ganze Zahl *aufrunden*. Wir benutzen die Gaußklammerfunktion, die auf die nächstkleinere ganze Zahl *abrundet*. Indem wir zunächst abrunden und anschließend 1 dazu addieren, erhalten wir den gesuchten Index $n_0$ zu $n_0 = [f(\varepsilon)] + 1$.

Die Untersuchung der Folge $\langle a_n \rangle = \langle \frac{\sqrt{2n}}{n^2} \rangle$ folgt der eben beschriebenen Vorgehensweise. Sei $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl. Dann ist

$$|a_n - g| = \left| \frac{\sqrt{2n}}{n^2} - 0 \right| = \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}} < \varepsilon$$

genau dann, wenn $n > \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon^2}}$, d.h. für $n_0 = \left[ \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon^2}} \right] + 1$ gilt für alle Folgenglieder mit $n \geq n_0$:

$$|a_n - g| = \left| \frac{\sqrt{2n}}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon$ als eine beliebige positive Zahl gewählt wurde und ein solches $n_0 \in \mathbb{N}$ für jedes $\varepsilon > 0$ bestimmt werden kann, ist die Grenzwertdefinition demnach erfüllt und es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n^2} = 0$.

**Lösung 59** Aus der Skizze der Folgenglieder wird schnell klar, dass die Folgen nicht gegen den angegebenen Grenzwert $-1$ strebt. Aus der Skizze kann man auch einen *Mindestabstand* ablesen, den die Folgenglieder von dem Wert $g$ immer einhalten werden. Wählt man als Gegenbeispiel $\varepsilon$ kleiner als diesen Mindestabstand, gelingt der Nachweis, dass $g$ nicht der Grenzwert sein kann.

Sei beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (andere Werte sind möglich). Dann ist

$$\left| \frac{-n-1}{n^2+1} + 1 \right| = \frac{n^2 - n}{n^2+1} > \frac{1}{2}$$

genau dann, wenn $(n-1)^2 > 2$ ist, d.h. für alle Folgenglieder ab dem Index $n_0 = [\sqrt{2} + 1] + 1 = 3$. Demnach haben wir mit $\varepsilon = 0.5$ eine $\varepsilon$-Umgebung von $g$ gefunden, so dass fast alle Folgenglieder $a_n$ (alle außer $a_1$ und $a_2$) außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung von $-1$ liegen. Damit kann $-1$ nicht Grenzwert der Folge $\left\langle \frac{-1-n}{n^2+1} \right\rangle$ sein.

**Lösung 60** Damit eine Zahlenfolge unbestimmt divergiert, darf sie weder gegen eine Grenzwert konvergieren, noch bestimmt gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergieren. Diese Fälle müsste man also ausschließen.

a) Die Zahlenfolge $a_n = (-2)^n$ nimmt für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die folgenden Werte an:

$$\langle a_n \rangle = 1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$$

Man sieht, dass die Beträge der Folgenglieder unbegrenzt wachsen:

$$\lim_{n\to\infty} |(-2)^n| = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

Formal muss man nachweisen, dass für jede Schranke $K > 0$ ein Index $n_0$ gefunden werden kann, so dass alle Folgenglieder ab $a_{n_0}$ größer sind als $K$:

$$|a_n| > K \;\Leftrightarrow\; 2^n > K \;\Leftrightarrow\; n > \log_2(K)$$

Also gilt für alle $n \leq [\log_2(K)]+1$, dass $|a_n| > K$ ist. Diese Zahl könnte man also als den gesuchten Index $n_0 = [\log_2(K)] + 1$ wählen; sie kann für eine beliebig große positive Schranke $K$ berechnet werden.

Weil nun also die Folge der Beträge $|a_n|$ über alle Schranken wächst, und die Folgenglieder von $\langle a_n \rangle$ alternieren (d.h. ständig das Vorzeichen wechseln), kann $\langle a_n \rangle$ weder konvergieren, noch gegen $+\infty$ oder $-\infty$ bestimmt divergieren. Sie divergiert also unbestimmt.

b) Die Zahlenfolge $b_n = (-1)^n$ nimmt für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die folgenden Werte an:

$$\langle b_n \rangle = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Es gibt also nur genau zwei Werte, die die Folge abwechselnd annimmt; sie ist damit insbesondere nicht bestimmt divergent.

Sie ist auch nicht konvergent: Da die Folge zwischen diesen zwei Werten ständig wechselt, ist weder $g_1 = 1$ noch $g_2 = -1$ ein Grenzwert der Zahlenfolge.

Formal müsste man für beide nachweisen, dass es eine $\varepsilon$-Umgebung gibt, in der nicht fast alle Folgenglieder liegen. Wir führen den Nachweis stellvertretend für $g_1 = 1$ (für $g_2 = -1$ funktioniert er analog): Als Gegenbeispiel nehmen wir zum Beispiel $\varepsilon = 0.5$. Innerhalb des Intervalls $[0.5; 1.5]$ liegen nur die Folgenglieder, für die $a_n = 1$ ist, also die mit geraden Indizes. Damit liegen alle Folgenglieder mit ungeraden Indizes außerhalb dieser $\varepsilon$-Umgebung von $g_1 = 1$. Das sind jedoch unendlich viele, und damit liegen nicht fast alle Folgenglieder innerhalb dieser $\varepsilon$-Umgebung. $g_1$ kann daher kein Grenzwert der Folge sein.

Für jeden anderen Wert könnte man ebenso nachweisen, dass er kein Grenzwert der Folge sein kann.

**Lösung 61** Nach den Rechenregeln für Grenzwerte kann man aus den Grenzwerten von $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ auch die gesuchten Grenzwerte berechnen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \\
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = -\frac{1}{3} \\
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \\
\lim_{n\to\infty} |b_n| &= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt{8a_n} &= \sqrt{8 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n} = 2
\end{aligned}$$

**Lösung 62** Bei gebrochenrationalen Ausdrücken geht man so vor, dass man durch die höchste Potenz von $n$n im Nenner kürzt und den bekannten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ (für jedes $\alpha > 0$) anwendet.

Andere bekannte Grenzwerte entnehmen Sie bitte dem "Grundwortschatz" im Skript.

a) Typischer gebrochenrationaler Ausdruck, also Kürzen durch höchste Potenz von $n$ im Nenner:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-5n^2}{(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-5n^2}{4n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}-5}{4-2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = -\frac{5}{4}$$

b) Potenzen und Wurzeln können (weil es sich um überall stetige Funktionen handelt) aus dem Grenzwert herausgezogen werden (Rechenregeln s. Skript). Also formt man um

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+13}}{6n-3} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9n^2+13}{(6n-3)^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+13}{9(n-1)^2}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+13}{9(n^2-2n+1)}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{9+13\frac{1}{n^2}}{9(1-2\frac{1}{n}+1\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

c) Im Grunde handelt es sich hierbei um eine geometrische Folge mit $|q| < 1$, wie man nach einer Zusammenfassung von Zähler und Nenner sieht:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|(-1.5)^k|}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|(-1)^k \cdot (1.5)^k|}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1.5}{2}\right)^k = \lim_{k\to\infty} (0.75)^k = 0$$

d) Hierbei hilft der bekannte Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, über den die Exponentialfunktion definiert ist:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^{4k} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(1+\frac{-2}{k}\right)^k\right)^4 = \left(\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{-2}{k}\right)^k\right)^4 = (e^{-2})^4 = e^{-8} \approx 0.00033546$$

e) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(e^2\right)^2 = e^2$$

Auch hier arbeitet man mit Potenzgesetzen und dem Grenzwert der Exponentialfunktion.

f) Man kann mit den Potenzgesetzen vereinfachen:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{|(-4)^k|}{9^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}k} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

Letzteres gilt, weil es sich um eine geometrische Folge mit Quotient $q = \frac{2}{3} < 1$ handelt.

**Hinweis:** Falls Sie die Regel von Bernoulli-l'Hospital schon kennen und in der Versuchung sind, sie zu benutzen: Für Zahlenfolgen ist die Regel von Bernoulli-l'Hospital nicht anwendbar, da sie die Differenzierbarkeit der Ausdrücke in Nenner und Zähler voraussetzt. Zahlenfolgen sind jedoch nur für ganzzahliges $n$ überhaupt definiert, also weder stetig noch differenzierbar.

**Lösung 63** Bei gebrochenrationalen Ausdrücken kann man wie bei Zahlenfolgen auch durch die höchste Potenz im Nenner kürzen und dann den bekannten Grenzwert $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ für $r > 0$ benutzen.

Später werden wir noch über die Regel von Bernoulli-L'Hospital sprechen. Sollte es sich um Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ handeln, können Sie alternativ mit der Regel von Bernoulli-L'Hospital arbeiten.

**Hinweis:** Das Limes-Symbol hat einen Sinn. Bitte lassen Sie es erst dann weg, wenn Sie die entsprechenden Grenzwerte berechnet haben, nicht bei Zwischenschritten oder Umformungen. Sonst sind die entstehenden Gleichungen eventuell nicht richtig. Faustregel: Solange der Ausdruck noch eine Variable $x$ enthält, sollte das Limes-Symbol davor stehen.

Hier der klassische Lösungsweg, mit Kürzen durch die höchste Potenz im Nenner:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^2}{2x^2+4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4x+1}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(4+4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(2+4\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+4\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{4+4\cdot 0+0}{2+4\cdot 0} = 2 \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+42}{x^2+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x-2\cdot\frac{1}{x}+42\cdot\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty-2\cdot 0+42\cdot 0}{1+0} = +\infty \\
&\phantom{=}\ \text{(bestimmte Divergenz; Grenzwert im uneigentlichen Sinn)} \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+42}{x^2+1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2\cdot\frac{1}{x}+42\cdot\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty-2\cdot 0+42\cdot 0}{1+0} = -\infty \\
&\phantom{=}\ \text{(bestimmte Divergenz; Grenzwert im uneigentlichen Sinn)} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3-2x+42} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-2\cdot\frac{1}{x^2}+42\cdot\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{1-2\cdot 0+42\cdot 0} = 0
\end{aligned}$$

**Lösung 64** Vorgehen siehe Skript bzw. Vorlesung:

1. Auffinden aller Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom (Linearfaktorzerlegung)
2. Klassifikation: Die Linearfaktoren im Nenner liefern die Stellen, wo die Funktion nicht definiert ist (Lücken). Gemeinsame Linearfaktoren in Nenner und Zähler werden dann gekürzt, soweit möglich. Die nach dem Kürzen im Zähler verbleibenden Linearfaktoren liefern die *Nullstellen*, die im Nenner verbliebenen Linearfaktoren die *Polstellen* der gebrochenrationalen Funktion.
3. Asymptoten:
   - Ist der Grad des Zählerpolynoms von $r(x)$ gleich oder kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, hat $r(x)$ eine waagerechte Asymptote der Form $y = g$, wobei $g = \lim_{x\to\pm\infty} r(x)$ ist.
   - Die Asymptote einer **unecht gebrochenrationalen Funktion** $r(x)$ ist ihr ganzrationaler Anteil, den man durch Polynomdivision findet.

| | Linearfaktorzerlegung | nicht definiert in | Nullstellen | Pole | Asymptote |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $r(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+1}$ | — | $x_{1/2} = \pm 2$ | — | $y = 1$ |
| b) | $r(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)(x-2)}$ | $x_{1/2} = 2, x_3 = -2$ | — | $x_3 = -2$ | $y = x - 6$ |
| c) | $r(x) = \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^3}$ | $x_2 = 2$ | $x_1 = 1$ | $x_2 = 2$ | $y = 1$ |
| d) | $r(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ | $x_{3/4} = -1$ | $x_{1/2} = 1$ | $x_{3/4} = -1$ | $y = 1$ |

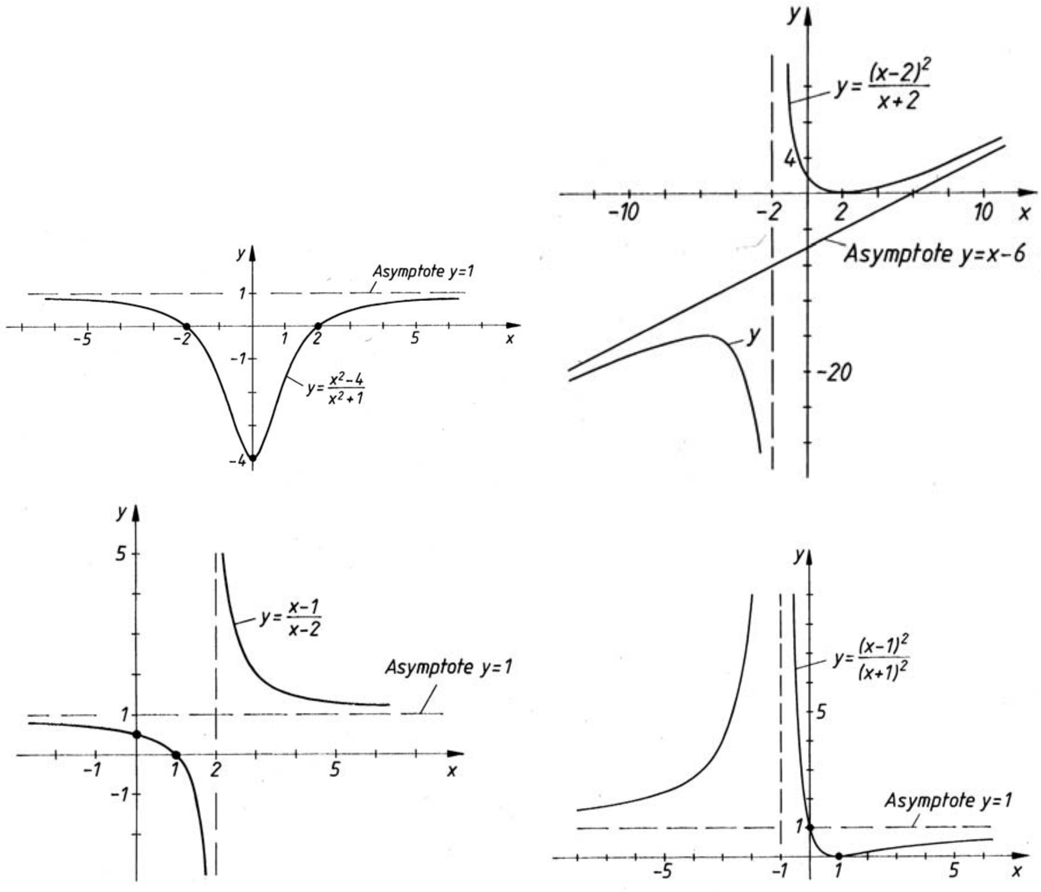



Abbildung 1: Funktionsgraphen zu Aufgabe 64

**Lösung 65** Vorgehen siehe Skript bzw. Vorlesung

| | $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ | $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ | Asymptote ($x \to \pm\infty$) |
|---|---|---|---|
| a) | $0$ | $0$ | $y = 0$ |
| b) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $y = \frac{1}{2}$ |
| c) | $-\infty$ | $+\infty$ | $y = 1.8x - \frac{24}{25}$ |
| d) | $0$ | $0$ | $y = 0$ |

**Lösung 66** Einige der Gleichheitszeichen in den folgenden Umformungen sind nur unter Beachtung der Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Skript) richtig; sie bedeuten also, dass *die Grenzwerte* der betreffenden Ausdrücke gleich sind. Ließe man die Grenzwertzeichen, also $\lim_{x\to\ldots}$, weg, wären diese Gleichheitszeichen falsch, da die Ausdrücke selbst nicht immer gleich sind. Achten Sie bitte darauf, die Grenzwertzeichen immer mitzuschreiben, wenn Sie Grenzwerte berechnen!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+1} &= \frac{0}{2} = 0 \\
\lim_{x\to-3}\frac{x^2-x-12}{x+3} &= \lim_{x\to-3}\frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to-3}(x-4) = -7 \\
\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin x} &= \lim_{x\to0}\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0}(2\cdot\cos x) = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+1)}{4x-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+1)}{4(x-2)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 2}(3x+1) = \frac{7}{4}\\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x-2\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1} = \infty\\
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 0}x+1}+1} = \frac{1}{2}\\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1\\
\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1) = 4
\end{aligned}$$

**Lösung 67** a) Zu zeigen ist, dass die Funktion $f(x) = e^{-2x}\cdot\sin(x)$ für $x\to\infty$ gegen den Grenzwert $g = 0$ konvergiert. Das bedeutet, dass es für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\xi > 0$ gibt, so dass $|f(x)| < \varepsilon$ ist.

**Beweis:** Man betrachtet ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und versucht, eine dazu gehörige Zahl $\xi$ zu bestimmen, so dass $|f(x)| < \varepsilon$ ist.

Da $|\sin(x)| \le 1$ ist, gilt auch, dass

$$|f(x)| = |e^{-2x}\cdot\sin(x)| \le |\underbrace{e^{-2x}}_{>0}|$$

ist. Also ist insbesondere $|f(x)| < \varepsilon$, wenn $e^{-2x} < \varepsilon$ ist. Diese Ungleichung kann man leicht nach $x$ auflösen; es ist

$$e^{-2x} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -2x < \ln(\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; x > \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\ln(\varepsilon)}_{=\xi}$$

Also gilt, wenn $\xi = -\frac{1}{2}\cdot\ln(\varepsilon)$ ist, für alle $x > \xi$, dass $|f(x)| < \varepsilon$ ist. □

b) Zu zeigen ist, dass die Funktion $f(x) = \tan(x)$ für $x\to\infty$ keinen Grenzwert hat.

Das ist mit der Definition nach Cauchy nicht so einfach, sie eignet sich besser für konstruktive Grenzwert-Beweise wie eben. Mit der Grenzwertdefinition nach Riemann, auch Übertragungsprinzip genannt, funktioniert es aber gut. Man muss dann

a) zwei Folgen von Argumenten finden, die beide gegen $\infty$ gehen, für die die dazugehörigen Folgen von Funktionswerten jedoch gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren; oder

b) eine Folge von Argumenten finden, die zwar gegen $\infty$ geht, deren dazugehörige Folge von Funktionswerten jedoch divergiert.

Hier wird die erste Argumentationslogik gewählt.

**Beweis:** Als Beispiele kann man z.B. zum einen die Folge der Nullstellen der Tangensfunktion $\langle a_n\rangle = \langle n\pi\rangle$ (mit $n\in\mathbb{N}$) wählen, zum anderen die Folge von Argumenten, für die $\tan(b_n) = 1$ ist, also $\langle b_n\rangle = \langle\frac{\pi}{4}+n\pi\rangle$. Andere Beispielfolgen sind natürlich möglich.

Beide Folgen von Argumenten divergieren für $n\to\infty$ gegen $\infty$, d.h. es ist

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n = \infty$$

Die dazugehörigen Folgen von Funktionswerten sind beides konstante Folgen mit $\langle f(a_n)\rangle = \langle 0\rangle$ und $\langle f(b_n)\rangle = \langle 1\rangle$. Diese konvergieren gegen den jeweiligen Wert, d.h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \tan(n\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = 1$$

Sie haben daher verschiedene Grenzwerte. In der Folge divergiert die Funktion $f(x) = \tan(x)$ unbestimmt, für $x \to \infty$. $\square$

**Lösung 68** **Beweis:** Wir betrachten ein beliebiges $\varepsilon > 0$, und bestimmen den Wert $\xi > 0$ so, dass $|f(x)| < \varepsilon$ ist für alle $x > \xi$. Es ist

$$|f(x) - g| = \left|\frac{\cos(2x)}{x}\right| = \frac{|\cos(2x)|}{x} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon$$

genau dann, wenn $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Das heißt, mit $\xi = \frac{1}{\varepsilon}$ gilt für alle $x > \xi$, dass $|\frac{\cos(2x)}{x} - 0| < \varepsilon$ ist. Damit ist gezeigt, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(2x)}{x} = 0$ ist. $\square$

**Lösung 69** Zu zeigen: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ für $x \to 0$ wächst unbeschränkt, das heißt für jede Zahl $K > 0$, egal wie hoch sie gewählt wird, kann man eine Umgebung von $x_0 = 0$ finden, in der die Funktion (betragsmäßig) größer als $K$ ist, also

$$|f(x)| > K$$

**Beweis:** Sei $K$ eine beliebige positive Zahl. Durch Umformen der Ungleichung erhält man, dass $\left|\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| > K$ genau dann gilt, wenn $|x| < \frac{1}{K^2}$. Demnach übersteigt die Funktion die Schranke $K$ für alle $x$ mit $-\frac{1}{K^2} < x < \frac{1}{K^2}$. Wir können also für jede beliebig hohe Schranke $K$ eine Umgebung von $x_0 = 0$ angeben, in der die Schranke überschritten wird. Damit wächst die Funktion für $x \to 0$ über alle Grenzen. $\square$

**Lösung 70** a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ist in $x_0 = 1$ unbestimmt divergent, da $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ und $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$. $f$ besitzt in $x = 1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

b) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$ ist in $x_0 = 1$ bestimmt divergent, weil $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = +\infty$ und $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = +\infty$. Sie hat hier eine Polstelle ohne VZW.

In $x_0 = -1$ ist sie unbestimmt divergent, weil $\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\infty$ und $\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = +\infty$. Sie hat hier eine Polstelle mit VZW.

c) $f(x) = \tan\frac{x}{2}$ ist in $x_0 = \pi$ unbestimmt divergent, weil $\lim_{x\to\pi^+} \tan\frac{x}{2} = -\infty$ und $\lim_{x\to\pi^-} \tan\frac{x}{2} = +\infty$. Die Funktion hat hier eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel.

d) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ ist in $x_0 = 0$ unbestimmt divergent. Das kann man mit Hilfe des Übertragungsprinzips zeigen. Betrachtet man nämlich die Folgen $\langle a_n\rangle = \langle\frac{1}{2n\pi}\rangle$ und $\langle b_n\rangle = \langle\frac{1}{2(n+1)\pi}\rangle$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, aber $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$ und $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -1$. Daher kann die Funktion $f$ an der Stelle 0 keinen Grenzwert besitzen.

**Lösung 71** a) $f_1(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+6x-7}$ ist unstetig in den Nullstellen des Nennerpolynoms (Polstellen) $x_1 = -7$ und $x_2 = 1$. Es liegen dort Unendlichkeitsstellen mit Vorzeichenwechsel, also Unstetigkeiten zweiter Art vor.

b) $f_2(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ ist unstetig für alle geraden ganzen Zahlen $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sie hat dort Sprünge mit einer Höhe von 1, also Unstetigkeitsstellen erster Art.

c) $f_3(x) = |\text{sgn}\, x|$ hat eine hebbare Unstetigkeit in $x = 0$, da dort
$\lim_{x\downarrow 0} |\text{sgn}\, x| = \lim_{x\uparrow 0} |\text{sgn}\, x| = 1$, aber $|\text{sgn}\,(0)| = 0$.

d) $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } x > 0 \end{cases}$
ist stetig in $x = 0$, da $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} f(x) = 1 = f(0)$. Sie hat aber eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel in $x = -1$, also eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

**Lösung 72** a) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine Lücke (hebbare Unstetigkeit), da Zähler und Nenner für $x = 2$ verschwinden. Sie ist an dieser Stelle nicht definiert (also unstetig), es existiert jedoch der Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = 2 + 1 = 3$$

Durch die ergänzende Definition

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x = 2 \\ \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{cases}$$

erhält man eine stetige Funktion.

b) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Oszillationsstelle, also eine Unstetigkeit 2. Art. Der Nachweis könnte erfolgen mit Hilfe des Übertragungsprinzips, analog zu der in der Vorlesung behandelten Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

c) $f(x) = \text{sgn}\,(x+1)$ hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Sprungstelle, mit dem Sprung 2. Es handelt sich um eine normale Signumfunktion, die entlang der $x$-Achse um 1 nach links verschoben ist. Die einseitigen Grenzwerte (und damit die Sprunghöhe als ihre Differenz) können wie in der Vorlesung bestimmt werden.

d) $f(x) = \cot 2x$ hat an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel, also eine Unstetigkeit 2. Art. Wegen der Vorzeichen von $\cos t$ und $\sin t$ in der Umgebung von $t = \pi$ ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \cot 2x &= \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{t\uparrow\pi} \frac{\cos t}{\sin t} = \lim_{t\uparrow\pi} \frac{-1}{\sin t} = -\infty \\ \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}} \cot 2x &= \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{t\downarrow\pi} \frac{\cos t}{\sin t} = \lim_{t\downarrow\pi} \frac{-1}{\sin t} = +\infty \end{aligned}$$

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{2x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine hebbare Unstetigkeit, da sie dort nicht definiert ist, der Grenzwert jedoch existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Durch die ergänzende Definition

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{2x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

erhält man eine stetige Funktion.

**Lösung 73** Sind folgende Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ stetig? Begründen Sie Ihre Aussage!

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{für } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist sowohl auf dem Intervall $[-5,0]$ als auch auf dem Intervall $(0,5]$ stetig, da sowohl $f_1(x) = \sqrt{x} - 1$ als auch $f_2(x) = -x+1$ auf dem gesamten Definitionsbereich stetige Funktionen sind. An der Stelle $x_0 = 0$, wo beide Funktionen zusammengesetzt sind, existieren sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert, und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}+1 = 1 \\ \lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0} -x+1 = 1 \\ f(0) &= \sqrt{0}+1 = 1 \end{aligned}$$

Damit ist die zusammengesetzte Funktion $f$ stetig auf $[-5,5]$.

b) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ ist auf dem Intervall $[-4,0]$ nicht stetig, da sie in $x_0 = -2$ nicht definiert ist und eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

c) $f(x) = \sqrt{|x^2-1|}$ ist auf dem Intervall $[-3,3]$ stetig, da sie aus drei Funktionen zusammengesetzt ist, die alle auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig sind: $f_1(x) = x^2-1$, $f_2(y) = |y|$ und $f_3(z) = \sqrt{z}$. Dann ist $f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$.

Die Funktion $f_1$ bildet das Intervall $[-3,3]$ auf das Intervall $[-1,8]$ ab, die Funktion $f_2$ bildet das Intervall $[-1,8]$ auf $[0,8]$ ab, und $f_3$ bildet $[0,8]$ auf $[0,2\sqrt{2}]$ ab. Daher ist es wesentlich, dass die Funktionen $f_1$ für alle $x \in [-3,3]$, $f_2$ für alle $x \in [-1,8]$ und $f_3$ für alle $x \in [0,8]$ definiert und stetig sind.

d) $f(x) = |x - [x+0.5]|$ ist auf dem Intervall $[-2,2]$ stetig (Skizze siehe Aufgabenblatt 2). Um das zu begründen, schauen wir uns an, woraus die Funktion $f$ zusammengesetzt ist: Betragsfunktion, lineare Funktionen, Gaußklammerfunktion. Alle drei Funktionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Betragsfunktion und die lineare Funktion sind stetig für alle reellen $x$, die Gaußklammerfunktion ist unstetig für ganzzahlige Argumente. Also kann die Funktion $f$ höchstens an solchen Stellen $x_0$ unstetig sein, wo $x_0 + 0.5$ eine ganze Zahl ist, das heißt für $x_0 \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$. Betrachten wir die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x\uparrow x_0} f(x)$ für diese Stellen $x_0$, so stellen wir fest, dass diese jeweils gleich $\frac{1}{2}$ sind:

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0.5} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0.5} |x-[x+0.5]| = \left|\lim_{x\downarrow 0.5} x - \lim_{x\downarrow 0.5}[x+0.5]\right| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\uparrow 0.5} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0.5} |x-[x+0.5]| = \left|\lim_{x\uparrow 0.5} x - \lim_{x\uparrow 0.5}[x+0.5]\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für die anderen Werte $x_0 \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ kann man das analog nachprüfen. Gleichzeitig ist $f(-\frac{3}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.

## 2.4 Differentialrechnung

**Lösung 74** a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ in $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{2+\Delta x+2} - \sqrt{2+2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{4+\Delta x})^2 - 2^2}{(\sqrt{4+\Delta x}+2)\cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ in $x_0 = 0$ und $x_0 = 5$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x+1}{\Delta x-1} + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2 \\ f'(5) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{6+\Delta x}{4+\Delta x} - \frac{3}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{2(4+\Delta x)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

**Lösung 75** a) $x_1 = 0$ und $x_2 = -0.5$.

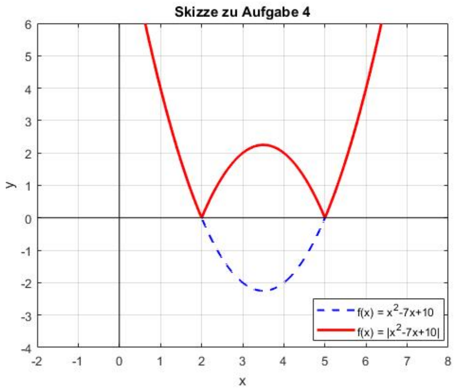
b) $x_0 = 0$.

c) $x \in \mathbb{Z}$.

**Lösung 76** Es ist $v(t) = \dot{s}(t) = g \cdot t$. Die Geschwindigkeit $v(t) = 30\frac{km}{h} = 8.\bar{3}\frac{m}{s}$ erreicht ein Massenkörper im freien Fall schon nach etwa $0.85s$.

**Lösung 77** Die Funktion $f$ berechnet den Betrag des quadratischen Polynoms $p(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$. Die Werte des Polynoms sind positiv für $x < 2$ und $x > 5$; sie sind negativ zwischen den Nullstellen (nach oben geöffnete Parabel). Man kann den Betrag auch über eine Fallunterscheidung schreiben, was für die weitere Rechnung hilfreich ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 7x + 10| \\ &= \begin{cases} (x^2 - 7x + 10) & \text{für } x \le 2 \text{ oder } x \ge 5 \\ -(x^2 - 7x + 10) & \text{für } 2 < x < 5 \end{cases} \end{aligned}$$




Anschaulich: Am Funktionsgraphen sieht man, dass der Teil der Parabel, der unterhalb der $x$-Achse liegt, durch den Betrag "nach oben geklappt" wird, also nach oben an der $x$-Achse gespiegelt wird. Dadurch entstehen "Knicke" im Funktionsgraphen, d.h. Stellen, wo $f$ nicht differenzierbar ist.

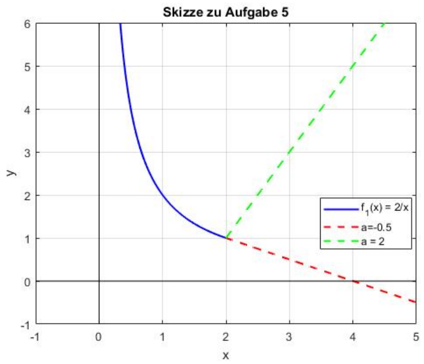
$f$ ist also nicht differenzierbar in den Nullstellen des quadratischen Polynoms, das im Inneren des Betrags steht, in $x_1 = 5$ und $x_2 = 2$. Die einseitigen Ableitungen an diesen Stellen existieren und können durch Einsetzen des jeweiligen Ausdrucks aus der Fallunterscheidung berechnet werden, erstmal für $x \to 2$ von rechts bzw. links:

$$\begin{aligned} f'_r(2) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-((2+\Delta x)^2 - 7(2+\Delta x) + 10) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (3 - \Delta x) = +3 \\ f'_l(2) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2 - 7(2+\Delta x) + 10 - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (\Delta x - 3) = -3 \end{aligned}$$

Analog berechnet man, was bei Annäherung an die Stelle $x_2 = 5$ von rechts bzw. links passiert:

$$\begin{aligned} f'_l(5) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-((5+\Delta x)^2 - 7(5+\Delta x) + 10) - 0}{\Delta x} = -3 \\ f'_r(5) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(5+\Delta x)^2 - 7(5+\Delta x) + 10 - 0}{\Delta x} = +3 \end{aligned}$$

**Lösung 78** Damit $f$ an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist, muss sie zunächst auch stetig sein. Also müssen die einseitigen Grenzwerte für die Funktion $f$ selbst für $x \to 2$ gleich sein:




$$\begin{aligned} f_l(2) &= \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1 \\ f_r(2) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax - 2a + 1) = 2a - 2a + 1 = 1 \end{aligned}$$

Das ergibt für jede beliebige Zahl $a$ denselben Wert, die Funktion wäre also für jedes $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Zusätzlich müssen für die Differenzierbarkeit auch die rechts- und linksseitigen Ableitungen an der Stelle $x_0 = 2$ übereinstimmen. Es ist

$$\begin{aligned} f_l'(2) &= \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{2}{x^2} = -\frac{1}{2} \\ f_r'(2) &= \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (a) = a \end{aligned}$$

Da beides gleich sein muss, ist $a = -\frac{1}{2}$ der einzige Wert, für den die zusammengesetzte Funktion $f$ differenzierbar ist (anschaulich: der Graph keinen Knick macht).

**Lösung 79** Zum Vorgehen: Sie können zunächst die Ableitung mit den bekannten Ableitungsregeln bilden und dann überlegen, wo die Ableitungsfunktion überall nicht definiert oder nicht stetig ist - das sind dann die Stellen, wo die Originalfunktion $f$ nicht differenzierbar ist.

Die angegebenen Bereiche für $x$ bedeuten, dass die Funktion für diese Argumente $x$ differenzierbar ist.

a) $f_1'(x) = 2x \cdot \sin(x) + (x^2 + 4) \cdot \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$
b) $f_2'(x) = 2x \cdot |x| + x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x) = 3x \cdot |x|$, $x \neq 0$
c) $f_3'(x) = -\sin(x) - 2$, $x \in \mathbb{R}$
d) $f_4'(x) = e^x \cdot (\sin(x) + x\sin(x) + x\cos(x))$, $x \in \mathbb{R}$
e) $f_5'(x) = 2^x(2x \cdot \sqrt{x} + (x^2+1)(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ln 2))$, $x > 0$
f) $f_6'(x) = 2x \cdot \tan(x) + \frac{x^2}{\cos^2(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
g) $f_7'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln(x))$, $x > 0$
h) $f_8'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$, $x \neq 0$
i) $f_9'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^4-1)-(x^3+x^2-1)4x^3}{(x^4-1)^2}$, $x \neq \pm 1$
j) $f_{10}'(x) = \frac{(\ln(x)+1)(x^2+1)-2x^2\ln(x)}{(x^2+1)^2}$, $x > 0$

**Lösung 80** Es ist

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} = -3 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1$$

das heißt auf dem Intervall $(2, +\infty)$ hat die Funktion $f$ die Steigung $-3$ nur an der Stelle $x_0 = 3$.

**Lösung 81** Senkrechte Tangente: $f'(x_0) = \pm\infty$
Waagerechte Tangente: $f'(x_0) = 0$

a) $f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-4)^2}}$, das heißt $f$ hat nirgends eine waagerechte Tangente, aber eine senkrechte Tangente in $x_0 = 4$ (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel).

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$, das heißt $f$ hat eine waagerechte Tangente in $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$, aber nirgends eine senkrechte Tangente.

**Lösung 82** Ableitung: $f'(x) = a \cdot \frac{1-x}{e^x}$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Winkel $45°$: $f'(0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$

**Lösung 83** Die angegebenen Definitionsbereiche geben an, für welche Argumente $x$ die Funktion differenzierbar ist.

a) $f_1'(x) = -x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f_2'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$, $x \neq 0$

c) $f_3'(x) = e^x \cdot ((1+x)\cos^2(x) - 2x\cos(x)\sin(x))$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f_4'(x) = 3(3x^2 + 2x - 1)^2(6x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

e) $f_5'(x) = -2\frac{(2x-1)^2(x+4)}{(x-2)^5}$, $x \neq 2$

f) $f_6'(x) = \frac{28x^3+2x}{3\sqrt[3]{(7x^4+x^2-1)^2}}$, $x \notin \{-\sqrt{\frac{\sqrt{29}-1}{14}}, \sqrt{\frac{\sqrt{29}-1}{14}}\}$

g) $f_7'(x) = 3\tan^2(x^2\sin(x)) \cdot (1 + \tan^2(x^2\sin(x))) \cdot (2x\sin(x) + x^2\cos(x))$,
$x \in \{x \in \mathbb{R} : x^2\sin(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

h) $f_8'(x) = \operatorname{sgn}(\sin(x)) \cdot \cos(x)$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

i) $f_9'(x) = \frac{2}{\sqrt{|x^4-8|}} \cdot \left(1 - \frac{2x^4}{x^4-8}\right)$, $x \neq \pm\sqrt[4]{8}$

j) $f_{10}'(x) = \frac{2x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1)}{|x^2-1|}$, $x \neq \pm 1$

k) $f_{11}'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x) \cdot (2x\sin(x) + 2\cos(x))$, $x \in \mathbb{R}$

l) $f_{12}'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

m) $f_{13}'(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$

n) $f_{14}'(x) = 2^{-x} \cdot (\frac{1}{x \cdot \ln 2} - \ln 2 \cdot \log_2|x|)$, $x \neq 0$

o) $f_{15}'(x) = 4\frac{\cos(2x)+2x\sin(2x)}{(2x+\cos(2x))^2}$, $x \in \{x \in \mathbb{R} : -2x \neq \cos(2x)\}$

p) $f_{16}'(x) = \frac{-(1+\cot^2(x))x - \cot(x)}{x^2}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

**Lösung 84** Damit die Funktion $f$ zweimal stetig differenzierbar ist, müssen die Funktion selbst, die erste und die zweite Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ existieren, d.h. die entsprechenden einseitigen Grenzwerte bzw. Ableitungen müssen gleich sein. Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \quad \text{(Funktionswert)} \\ 2a + b &= 1 \quad \text{(erste Ableitung)} \\ 2a &= -1 \quad \text{(zweite Ableitung)} \end{aligned}$$

Aus der letzten Bedingung folgt direkt $a = -0.5$, und durch Einsetzen in die anderen Bedingungen erhält man $b = 2$ und $c = -1.5$. Die dritte Ableitung von $(ax^2 + bx + c)$ ist identisch Null (egal welche Werte $a, b, c$ annehmen), während $(\ln x)''' = \frac{2}{x^3}$ ist, also kann die Funktion in $x_0 = 1$ nicht dreimal differenzierbar sein.

**Lösung 85** a) Die ersten zwei Ableitungen bestimmt man mit Hilfe der Produktregel zu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x \\ f''(x) &= (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (2 + 4x + x^2) \cdot e^x \end{aligned}$$

b) Der Beweis folgt dem üblichen Schema für Induktionsbeweise:

**Induktionsanfang:** Für $n = 1$ gilt $f'(x) = (2x + x^2) \cdot e^x \stackrel{\checkmark}{=} (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 0) \cdot e^x$

**Induktionsannahme:** Für ein beliebiges $n \geq 1$ gilt $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) \cdot e^x$

**Induktionsbehauptung:** Dann gilt die Behauptung auch für $n + 1$, das heißt $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + 2(n+1)x + (n+1)n) \cdot e^x$

**Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\ &\stackrel{\text{IAnn.}}{=} \left((x^2 + 2nx + n(n-1)) \cdot e^x\right)' \\ &= (2x + 2n) \cdot e^x + (x^2 + 2nx + n(n-1)) \cdot e^x \\ &= (x^2 + (2 + 2n)x + (2n + n(n-1))) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 2(1+n)x + n(2 + n - 1)) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 2(n+1)x + (n+1)n) \cdot e^x \end{aligned}$$

**Lösung 86** Zu zeigen: Die $n$-te Ableitung von $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ mit beliebigen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist für beliebiges $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

**IAnfang:** für $n = 1$ ist die Ableitung nach der Kettenregel

$$f'(x) = -\frac{a}{(ax+b)^2} = (-1)^1 \cdot \frac{a^1}{(ax+b)^{1+1}}$$

**IAnnahme:** Für $n = N$ gilt $f^{(N)}(x) = (-1)^N \cdot \dfrac{a^N \cdot N!}{(ax+b)^{N+1}}$.

**IBehauptung:** Dann gilt auch für $n = N + 1$: $f^{(N+1)}(x) = (-1)^{N+1} \cdot \dfrac{a^{N+1} \cdot (N+1)!}{(ax+b)^{N+2}}$.

**IBeweis:** Wir überprüfen die Behauptung durch einmaliges Ableiten der Induktionsannahme. Dazu ist es zweckmäßig, die $N$-te Ableitung in der Form $f^{(N)}(x) = (-1)^N \cdot a^N \cdot N! \cdot (ax+b)^{-(N+1)}$ zu schreiben und die Kettenregel zu verwenden.

$$\begin{aligned} f^{(N+1)}(x) &= \left(f^{(N)}(x)\right)' \\ &\stackrel{\text{IAnn.}}{=} (-1)^N \cdot a^N \cdot N! \cdot (-(N+1)) \cdot (ax+b)^{-(N+1)-1} \cdot a \\ &= (-1)^{N+1} \cdot \frac{a^{N+1} \cdot (N+1)!}{(ax+b)^{N+2}} \end{aligned}$$

**Lösung 87** Bei allen diesen Grenzwerten hilft die Regel von Bernoulli-l'Hospital. Geben Sie bitte immer den Typ des Grenzwertes an, wenn Sie diese Regel benutzen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{\sin(4x)} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(x)+1}{4\cos(4x)} = -\frac{1}{2}\\
\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+5}{2x^2+3x+1} &\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{8x-2}{4x+3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{8}{4} = 2\\
\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(5x)}{\tan(2x)} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{5\cos(5x)}{2(\tan^2(2x)+1)} - \frac{5}{2}\\
\lim_{x\to 0^+} (x^2\ln(x)) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0\\
\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(x)} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = \infty
\end{aligned}$$

Der Grenzwert f) erfordert etwas Ausdauer bei der Anwendung der Regel von l'Hospital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\arctan(x)}{x^2\ln(1+x)} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\frac{1}{1+x^2}}{2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{2\ln(1+x)+\frac{x(3x+4)}{(1+x)^2}}\\
&\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)-\frac{2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}}{\frac{2}{1+x}+\frac{(6x+4)(1+x)^2-2x(3x+4)(1+x)}{(1+x)^4}} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Für Grenzwerte vom Typ $\infty^0$, $1^\infty$ oder $0^0$ ist die Umformung $a^b = e^{b\cdot\ln a}$ hilfreich.

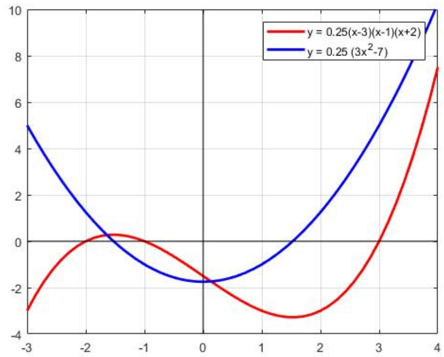
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\sin(x))} = e^1 = e\,, \quad \text{weil}\\
\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1\\
\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{2}{x})} = e^2\,, \quad \text{weil}\\
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{-2}{1+\frac{2}{x}} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{-\sin(x)\cdot\ln(x)} = e^0 = 1\,, \quad \text{weil}\\
\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\cdot\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1\cdot 0 = 0\\
\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\cdot\ln(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}\,, \quad \text{weil} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1\\
\lim_{x\to 0^+} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^0 = 1\,, \quad \text{weil}\\
\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^{-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(\frac{1}{x})}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0
\end{aligned}$$

**Lösung 88** Der rote Graph gehört zu $f$, der blaue zu $f'$ und der grüne zu $f''$. $f$ hat im dargestellten Bereich drei Wendepunkte, die an den Nullstellen von $f''$ zu erkennen sind.

**Lösung 89** Um die Skizze zu erstellen (wenigstens qualitativ), sollte man sich klarmachen:

- Wo hat der Graph von $f$ waagerechte Tangenten (Nullstellen der Ableitung)?
- Wo ist die Steigung von $f$ positiv, wo negativ?
- Wo nimmt die Steigung von $f$ zu, wo nimmt sie ab (wachsende bzw. fallende Ableitungsfunktion)?
- Wo sind Wendepunkte (Extrema der 1. Ableitung)?




Unter der Annahme, dass $f$ ein Polynom ist, kann man sogar die Funktionsgleichung aufstellen und die Ableitungsfunktion ausrechnen - das war hier aber nicht gemeint.

**Lösung 90** a) Es ist $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$ mit Nullstellen in $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$.

| Bereich | $f'$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < -1$ | positiv | str. mon. wachsend |
| $-1 < x < 4$ | negativ | str. mon. fallend |
| $x > 4$ | positiv | str. mon. wachsend |

b) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 12x$ mit Nullstellen in $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

| Bereich | $f'$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < -2$ | positiv | str. mon. wachsend |
| $-2 < x < 2$ | negativ | str. mon. fallend |
| $x > 2$ | positiv | str. mon. wachsend |

c) Es ist $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ mit einer Nullstelle in $x = 0$.

| Bereich | $f'$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < 0$ | positiv | str. mon. wachsend |
| $x > 0$ | negativ | str. mon. fallend |

d) Es ist $f'(x) = (2x - 3) \cdot e^{-x}$ mit einer Nullstelle in $x = 1.5$.

| Bereich | $f'$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < 1.5$ | negativ | str. mon. fallend |
| $x > 1.5$ | positiv | str. mon. wachsend |

**Lösung 91** a) Es ist $f''(x) = 6x - 18$ mit einer Nullstelle in $x_1 = 3$.

| Bereich | $f''$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < 3$ | negativ | rechtsgekrümmt |
| $x > 3$ | positiv | linksgekrümmt |

b) Es ist $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Sie hat keine Nullstelle, ist aber für $x = 0$ nicht definiert.

| Bereich | $f''$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < 0$ | negativ | rechtsgekrümmt |
| $x > 0$ | positiv | linksgekrümmt |

c) Es ist $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$ mit zwei Nullstellen in $x_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

| Bereich | $f''$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ | positiv | linksgekrümmt |
| $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ | negativ | rechtsgekrümmt |
| $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ | positiv | linksgekrümmt |

d) Es ist $f''(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$ mit einer Nullstelle in $x = 2$.

| Bereich | $f''$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < 2$ | negativ | rechtsgekrümmt |
| $x > 2$ | positiv | linksgekrümmt |

e) Es ist $f''(x) = \frac{1}{x}$. Sie hat keine Nullstelle, ist aber für $x = 0$ nicht definiert. Da der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist, muss auch nur dieser Bereich betrachtet werden:

| Bereich | $f''$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x > 0$ | positiv | linksgekrümmt |

f) Es ist $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$. Sie hat eine Nullstelle:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e{-}x \Leftrightarrow e^{2x} = 1$$

in $x = 0$.

| Bereich | $f''$ ist hier | $f$ ist hier |
|---|---|---|
| $x < 0$ | negativ | rechtsgekrümmt |
| $x > 0$ | positiv | linksgekrümmt |

**Lösung 92** Zu untersuchen ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

a) Symmetrie: $f$ ist punktsymmetrisch, da für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = -(-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2}$$

Nullstellen: Es ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, da $e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Ableitung: $f'(x) = (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Monotonie: Das Vorzeichen der ersten Ableitung richtet sich nach dem Faktor $(1 - x^2)$. Da es sich dabei um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, ist der Term (und damit die gesamte Ableitung) zwischen den Nullstellen $x_{1/2} = \pm 1$ positiv und außerhalb negativ:

| $x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $x > 1$ |
|---|---|---|
| $f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$ | $f'(x) < 0$ |
| streng monoton fallend | streng monoton wachsend | streng monoton fallend |

Relative Extrema: $f'(x) = 0$ für $1 - x^2 = 0$, das heißt für $x = \pm 1$. Für $x_1 = 1$ ist $f$ links davon monoton wachsend und rechts davon monoton fallend, es handelt sich also um ein Maximum: $H(1, \frac{1}{\sqrt{e}})$. Für $x_1 = 1$ ist $f$ links davon monoton fallend und rechts davon monoton wachsend, es handelt sich also um ein Minimum: $T(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}})$.

c) Asymptoten: Die $x$-Achse (d.h. die Gerade $y = 0$) ist waagerechte Asymptote von $f$, da

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

Aus Symmetriegründen ist auch $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Da die in b) berechneten die einzigen Extrema sind und $f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar ist, hat die Funktion in $x = 1$ ein absolutes Maximum und in $x = -1$ ein absolutes Minimum. Der Wertebereich ist $W_f = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}]$.

**Lösung 93** Man bestimmt die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$f'(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

In den Wendepunkten der Funktion $f$ wechselt die zweite Ableitung $f''$ ihr Vorzeichen. Wir suchen die Nullstellen von $f''$:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2-1)\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1$$

Das Vorzeichen von $f''$ hängt nur von dem Faktor $(x^2-1)$ ab. Die Funktion $y = x^2 - 1$ ist eine verschobene, nach oben offene Normalparabel, also ergeben sich die Vorzeichen:

| $x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $x > 1$ |
|---|---|---|
| $f''(x) > 0$ | $f''(x) < 0$ | $f''(x) > 0$ |
| $f$ streng links gekrümmt | $f$ streng rechtsgekrümmt | $f$ streng linksgekrümmt |

Eine Skizze hilft dabei, Ihre Argumentation zu untermauern. An beiden Stellen hat $f''$ einen Vorzeichenwechsel, es handelt sich daher um Wendestellen. Die Wendepunkte sind $W_1(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ und $W_2(1, e^{-\frac{1}{2}})$.

Für die waagerechten Asymptoten der Funktion müssen wir die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0 \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0
\end{aligned}$$

**Lösung 94** Man bestimmt die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, die nur für $x > 0$ definiert ist:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\,, \quad f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

In den Wendepunkten der Funktion $f$ wechselt die zweite Ableitung $f''$ ihr Vorzeichen. Wir suchen die Nullstellen von $f''$:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\ln(x)-3}{x^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(x) = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x = e^{1.5}$$

Das Vorzeichen von $f''$ hängt nur vom Zähler $(2\ln(x) - 3$ ab. Da die Logarithmusfunktion streng monoton wächst, ergeben sich die Vorzeichen:

| $x < e^{1.5}$ | $x > e^{1.5}$ |
|---|---|
| $f''(x) < 0$ | $f''(x) > 0$ |
| $f$ streng rechtsgekrümmt | $f$ streng linksgekrümmt |

Eine Skizze hilft dabei, Ihre Argumentation zu untermauern. Wegen des Vorzeichenwechsels von $f''$ handelt es sich um einen Wendepunkt in $W(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}$.

**Lösung 95** Zu untersuchen ist die Funktion $y = f(t) = e^{-2t}\cdot(1-3t)$, $t \geq 0$.

a) $f'(t) = e^{-2t}\cdot(6t-5) = 0$ für $t_0 = \frac{5}{6}$

Monotonie: Das Vorzeichen der ersten Ableitung hängt (da $e^{-2t} > 0$ für beliebiges $t$ ist) nur von dem Faktor $6t - 5$ ab. Aus einer Skizze (oder durch Umformen der Ungleichung) erkennt man, dass $6t - 5 > 0$ für $t > \frac{5}{6}$ und $6t - 5 < 0$ für $t < \frac{5}{6}$ ist. Daher ergibt sich die folgende Tabelle:

| $0 \leq t < \frac{5}{6}$ | $t > \frac{5}{6}$ |
|---|---|
| $f'(t) < 0$ | $f'(t) > 0$ |
| streng monoton fallend | streng monoton wachsend |

Da die erste Ableitung einen Vorzeichenwechsel in $t_0 = \frac{5}{6}$ von - nach + aufweist, handelt es sich um ein Minimum.

Alternativ hätte man das Vorzeichen der zweiten Ableitung betrachten können: $f''(\frac{5}{6}) = 6 \cdot e^{-\frac{5}{3}} > 0$. Auch daher handelt es sich um ein Minimum.

Der Tiefpunkt ist $T(\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{3}})$.

b) $f''(t) = e^{-2t}(-12t + 16) = 0$ für $t_1 = \frac{4}{3}$

Krümmungsbereiche: Das Vorzeichen der zweiten Ableitung wird nur durch den Faktor $(-12t + 16)$ bestimmt. Seine Nullstelle liegt bei $t = \frac{4}{3}$, und aus einer Skizze erkennt man die folgende Vorzeichensituation:

| $0 \leq t < \frac{4}{3}$ | $t > \frac{4}{3}$ |
|---|---|
| $f''(x) > 0$ | $f''(x) < 0$ |
| streng konvex | streng konkav |
| linksgekrümmt | rechtsgekrümmt |

Da die zweite Ableitung in $t_1 = \frac{4}{3}$ einen Vorzeichenwechsel aufweist, handelt es sich um einen Wendepunkt.

c) Grenzwert (mit Hilfe der Regel von Bernoulli-l'Hospital):

$$\lim_{t\to\infty} e^{-2t} \cdot (1 - 3t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - 3t}{e^{2t}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{-3}{2e^{2t}} = 0$$

Die Asymptote ist demnach die $t$-Achse: $y = 0$.

d) Randwert: $f(0) = 1$
Wertebereich: $W_f = [-\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{3}}, 1]$

**Lösung 96** Es ist $W'(\alpha) = \frac{2}{g} \cdot v_0^2 \cos(2\alpha) = 0$ genau dann, wenn $\cos(2\alpha) = 0$, also wenn $2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Da uns für diese Anwendung nur Winkel zwischen $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ interessieren, kommt nur $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ in Frage.

Man überprüft, ob für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ tatsächlich ein Extremum vorliegt, indem man z.B. den Wert in die zweite Ableitung einsetzt:

$$\begin{aligned} W''(\alpha) &= -\frac{4}{g} \cdot v_0^2 \sin(2\alpha) \\ W''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{4}{g} \cdot v_0^2 < 0 \end{aligned}$$

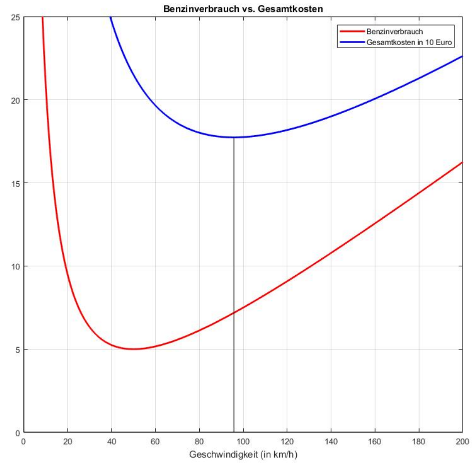
Daher liegt in $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ein lokales Maximum vor. Da in den Randpunkten des Intervalls $W(0) = W\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist, ist es sogar das globale Maximum für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Die maximale Weite beträgt $W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{g} \cdot v_0^2$.

**Lösung 97** Die Fahrgeschwindigkeit ist positiv, also muss $x > 0$ sein.

a) Es ist $f'(x) = 0.1 - 250 \cdot \frac{1}{x^2}$ mit einer positiven Nullstellen in $x_1 = 50$ km/h. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung $f''(x) = 500 \cdot \frac{1}{x^3}$ sieht man, dass es sich um ein Minimum handelt, mit dem Minimalverbrauch $y_{\min} = 5$ Liter pro 100 km.

b) Kostenfunktion $K$ mit

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{600}{100} \cdot 1.50 \cdot y(x) + 50 + 10 \cdot \frac{600}{x} \\ &= 9\left(\frac{x}{10} - 5 + \frac{250}{x}\right) + 50 + \frac{6000}{x} \\ &= \frac{9}{10}x + 5 + \frac{8250}{x} \end{aligned}$$




c) Es ist $K'(x) = 0.9 - 8250 \cdot \frac{1}{x^2}$ mit einer positiven Nullstelle in $x_1 = \frac{\sqrt{82500}}{3} = 95.743$ km/h. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung

$$K''(x) = 16500 \cdot \frac{1}{x^3}$$

sieht man, dass es sich um ein Minimum handelt, mit Minimalkosten von $K_{\text{min}} = 177.3369 \approx 177.34$ Euro.

**Lösung 98** Damit die Beleuchtung am Tischrand überall gleichmäßig ist, bringen wir die Lampe in der Mitte über dem Tisch an. Der Abstand der Lichtquelle vom Tischrand ist dann $r = \frac{d}{2\cos\varphi}$, und die dazugehörige Beleuchtungsstärke

$$f = \frac{4m}{d^2} \cdot \sin\varphi \cos^2\varphi\,,$$

wobei $\varphi$ der Neigungswinkel der Lichtstrahlen ist.

$f'(\varphi) = \frac{4m}{d^2} \cdot \cos\varphi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi) = 0$ für $\varphi_0 = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.615....$ Da $f'$ an dieser Stelle sein Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt, liegt hier ein Maximum vor, und

$$h = r\sin\varphi_0 = \frac{d}{2}\tan\varphi_0 = \frac{d}{4}\sqrt{2}$$

ist die optimale Höhe der Lampe über dem Tisch.

***Lösung 99** In dieser Aufgabe muss zuerst die zu optimierende Funktion aufgestellt werden:

Sei $A_1$ der Punkt des Kanals, der $A$ am nächsten liegt, und $x$ die Entfernung von $A_1$ zum Umschlagplatz. Dann werden die Transportkosten $T$ beschrieben durch

$$T(x) = (l - x) \cdot \beta + \sqrt{x^2 + d^2} \cdot \alpha$$

für $x \in [0, l]$. Weiter wie gewohnt:

$$\begin{aligned} T'(x) &= -\beta + \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \\ T''(x) &= \frac{\alpha d^2}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

in den Nullstellen der ersten Ableitung befinden sich also Minima von $T$. Es ist $T'(x) = 0$ für $x_1 = \frac{\beta d}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$, falls $x_1 < l$. Für $x_1 \geq l$ findet ausschließlich Landtransport statt.

***Lösung 100** In dieser Aufgabe muss zuerst die zu optimierende Funktion aufgestellt werden:

Ist $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel, den der Balken mit dem Kanal der Breite $a$ bildet, dann gilt für die Länge $l$, bei der der Balken an der Ecke anliegt und an beiden Kanalwänden anstößt:

$$l(\varphi) = \frac{b}{\cos\varphi} + \frac{a}{\sin\varphi}$$

Man geht dann weiter wie gewohnt vor. Es ist

$$\begin{aligned} l'(\varphi) &= \frac{b \cdot \sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{a \cdot \cos\varphi}{\sin^2\varphi} \\ l''(\varphi) &= \frac{b(1+\sin^2\varphi)}{\cos^3\varphi} + \frac{a(1+\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi} \;>\; 0 \end{aligned}$$

Da $l''(x) > 0$, liefert die Nullstelle der Ableitung $\varphi_0 = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ein Minimum. In den Rändern der Intervalls kann kein Minimum vorhanden sein, deshalb liegt in $\varphi_0$ ein absolutes Minimum vor.

Um die größtmögliche Länge des Balkens zu bestimmen, muss man $\varphi_0$ in $l(\varphi)$ einsetzen. Zur Vereinfachung des entstehenden Ausdrucks kann man die Umrechnungsformeln (siehe Formelsammlung) benutzen, mit deren Hilfe man Kosinus- und Sinusfunktion durch den Tangens darstellen kann (damit sich $\tan(\arctan x) = x$ gegenseitig aufheben):

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \;\Rightarrow\; \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(x) &= \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \;\Rightarrow\; \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Benutzt man diese Umrechnungsformeln, erhält man für

$$\begin{aligned} l(\varphi_0) &= \frac{b}{\cos\varphi_0} + \frac{a}{\sin\varphi_0} = \frac{b}{\cos(\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}})} + \frac{a}{\sin(\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}})} \\ &= b \cdot \sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} + a \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}}{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = \sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} \cdot \left(b + \frac{a}{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\right) \\ &= \sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} \cdot (b + \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a^2}) = \sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot (\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2}) \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2}} \cdot (\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2}) = \sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3} \end{aligned}$$

Also ist $l(\varphi_0) = \sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}$ die maximal zulässige Länge des Balkens, wenn er um die Ecke geflößt werden soll.

## 2.5 Grundlagen der Integralrechnung

**Lösung 101** Überprüfen Sie jede Lösung durch die Gegenprobe: Es muss gelten $F'(x) = f(x)$. Benutzen Sie die Tabelle der Ableitungen elementarer Funktionen.

a) $F(x) = \frac{x^8}{8} + C$

b) $f(x) = 17x^{-2}$, demnach $F(x) = -\frac{17}{x} + C$

c) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, demnach $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 2x^{-\frac{1}{3}}$, demnach $F(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x^2} + C$

e) $F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$

f) $F(x) = -\cos(x) + \frac{x^2}{2} + C$

g) $F(x) = \arctan(x) + C$

h) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}$, demnach $F(x) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$;

i) $F(x) = \tan x + C$

j) $F(x) = \ln x + C$

k) $F(x) = \ln(x + a)$

l) $f(x) = \frac{x}{x+a} = \frac{x+a-a}{x+a} = \frac{x+a}{x+a} - \frac{a}{x+a} = 1 - a \cdot \frac{1}{x+a}$, demnach $F(x) = x - a \cdot \ln(x + a)$

**Lösung 102** a) Gegeben seien die Funktionen

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right) \;,\; f(x) = \frac{1}{(x+a)\cdot(x+b)}$$

wobei $a \neq b$ reelle Konstanten sind. $F$ ist (nach Definition) eine Stammfunktion von $f$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$. Nach den Logarithmusgesetzen ist

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{b-a} \left(\ln(x+a) - \ln(x+b)\right)$$

Die Ableitung von $F$ ist:

$$F'(x) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x+b-(x+a)}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)} = f(x)$$

b) Da $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$, läßt sich das unbestimmte Integral durch die Stammfunktion aus a) berechnen:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right) + C \\ \int_0^8 \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)\right]_0^8 = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{10}{12}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.255 \end{aligned}$$

**Lösung 103** Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist auf $[0, 1]$ nicht beschränkt, da der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ ist, also nur im uneigentlichen Sinn existiert. Daher kann sie auf $[0, 1]$ auch nicht integrierbar sein.

**Lösung 104** Zur Lösung empfiehlt es sich, die Tabellen der Grundintegrale und der Standardsubstitutionen (Skript) griffbereit zu haben.

$$\begin{aligned}
\text{a)}\ \int \frac{2}{(1-2x)^4}\,dx &= \frac{1}{3}\frac{1}{(1-2x)^3}+C \\
\text{b)}\ \int \frac{1}{(x+2)^7}\,dx &= -\frac{1}{6}\frac{1}{(x+2)^6}+C \\
\text{c)}\ \int \frac{2x+3}{x^2+3x-4}\,dx &= \ln|x^2+3x-4|+C\,,\ \text{ für } x\notin\{-4,1\} \\
\text{d)}\ \int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\,dx &= \frac{1}{3}\ln|\sin(3x)|+C\,,\ \text{ für } x\neq \frac{k}{3}\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \\
\text{e)}\ \int \frac{1+\tan^2(2x)}{\tan(2x)}\,dx &= \frac{1}{2}\ln|\tan(2x)|+C\,,\ \text{ für } x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \\
\text{f)}\ \int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}\,dx &= \left[\frac{1}{8}\ln|1+4x^2|\right]_0^1 = \frac{1}{8}\ln(5) = 0.20117... \\
\text{g)}\ \int x\cdot\cos(x)\,dx &= x\cdot\sin(x)+\cos(x)+C \\
\text{h)}\ \int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx &= \frac{1}{4}\sin^4(x)+C
\end{aligned}$$

**Lösung 105**

$$\begin{aligned}
\text{a)}\ \int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cdot\cos(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\cdot\cos(t)\,dt && \text{Substitution: } t=x^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(t\cdot\sin(t)+\cos(t)\right)_0^{\pi} = -1 \\
\text{b)}\ \int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt && \text{Substitution: } t=x^2 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)+C\,,\ \text{ für } x^4>1 \\
\text{c)}\ \int a^x\cdot\sqrt{1+a^x}\,dx &= \frac{2}{3\cdot\ln(a)}\cdot\sqrt{(1+a^x)^3}+C && \text{Substitution: } t=1+a^x \\
\text{d)}\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\cdot\ln(\cos(x))\,dx &= -\int_1^{0.5}\frac{1}{t}\cdot\ln(t)\,dt && \text{Substitution: } t=\cos(x) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\left(\ln(\cos(x))\right)^2\right)_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(\ln(2))^2 \approx -0.240...
\end{aligned}$$

e) ist ein Integral vom Typ $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})\,dx$. Für solche Integrale schlägt Papula (Formelsammlung) die Substitution $x=a\cdot\sin(u)$ vor. In unserem Fall ist $a=2$, wir substituieren also $x=2\sin(u)$. Die Ableitung ist $\frac{dx}{du}=2\cos(u)$, also können wir einsetzen, dass $dx=2\cos(u)\,du$, $\sqrt{4-x^2}=2\cos(u)$ und $x^3=(2\sin(u))^3$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{8\sin^3(u)}{2\cos(u)}\,(2\cos(u)du) \;=\; \int 8\sin^3(u)\,du \\
&= \int 8\sin(u)\cdot(1-\cos^2(u))\,du \;=\; 8\left(-\cos(u)+\frac{1}{3}\cos^3(u)\right)+C \\
&= -4\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+C \;=\; -\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}\cdot\left(8+x^2)\right)+C
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\int \sin(u) \cdot (1 - \cos^2(u))\, du$ findet man wiederum durch Substitution, z.B. $t = \cos(u)$. Bei der Rücksubstitution benutzt man die Gleichung $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos(u)$. Durch Ableiten kann man leicht überprüfen, dass das Ergebnis wirklich eine Stammfunktion des Integranden ist.

**Lösung 106** a) Um die Partialbruchzerlegung von $r(x) = \frac{3x^2+6x-1}{x^3+3x^2-x-3}$ zu finden, folgen wir dem üblichen Vorgehen:

(i) Bestimmen der Linearfaktorzerlegung des Nennerpolynoms

Die Nullstelle $x_1 = 1$ ist bereits gegeben. Durch Abspalten (z.B. Horner-Schema) erhalten wir $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 + 4x + 3) = (x - 1)(x + 3)(x + 1)$.

(ii) Ansatz zur PBZ

Da alle drei Nullstellen einfache Nullstellen sind, ist der Ansatz zu PBZ

$$\frac{3x^2 + 6x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x + 1}$$

(iii) Bestimmen der Konstanten $A, B, C$

Zunächst bringen wir den Ansatz auf den Hauptnenner und setzen dann die beiden Zählerpolynome an 3 Stellen gleich. Zweckmäßigerweise wählt man dafür die Nullstellen.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} &= \frac{A(x+3)(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+1)} \\ x = 1 \quad & 3 + 6 - 1 = 8A \\ x = -3 \quad & 27 - 18 - 1 = 8B \\ x = -1 \quad & 3 - 6 - 1 = -4C \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen berechnet man direkt: $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$. Die Partialbruchzerlegung ist also

$$r(x) = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 3}$$

b) Das Vorgehen ist analog zu a). Die Linearfaktorzerlegung des Nenners ist $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$, und der Ansatz zur PBZ lautet

$$-\frac{7x + 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Bilden des Hauptnenners und Gleichsetzen der Zählerpolynome an den drei Nullstellen führt auf $A = -1$, $B = -2$, $C = 3$. Die PBZ ist also

$$r(x) = \frac{-1}{x + 1} + \frac{-2}{x - 1} + \frac{3}{x + 2}$$

c) Die Linearfaktorzerlegung des Nenners ist $x^3 + 5x^2 = x^2(x + 5)$, demnach liegen eine doppelte ($x_{1/2} = 0$) und eine einfache ($x_3 = -5$) Nullstelle vor. Der Ansatz zur PBZ lautet folglich

$$\frac{-12x^2 + 7x + 10}{x^3 + 5x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 5}$$

Bilden des Hauptnenners und Gleichsetzen der Zählerpolynome an den Nullstellen sowie einer beliebig zu wählenden dritten Stelle führt auf $A = 1$, $B = 2$, $C = -13$. Die PBZ ist also

$$r(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{13}{x + 5}$$

d) Die Linearfaktorzerlegung des Nenners ist $x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2$, demnach liegen zwei doppelte Nullstellen vor. Der Ansatz zur PBZ lautet folglich

$$\frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

Bilden des Hauptnenners und Gleichsetzen der Zählerpolynome an den zwei Nullstellen sowie an zwei weiteren beliebig gewählten Stellen (insgesamt vier Stellen) führt auf $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -2$. Die PBZ ist also

$$r(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

e) Die Linearfaktorzerlegung des Nenners ist $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x = x(x^2+1)(x+2)$, demnach liegen zwei einfache Nullstellen vor, sowie ein nicht weiter zerlegbarer quadratischer Term. Ansatz:

$$\frac{-3x^2 - 21x - 10}{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+2}$$

Bilden des Hauptnenners und Gleichsetzen der Zählerpolynome an den zwei Nullstellen sowie an zwei weiteren beliebig gewählten Stellen (insgesamt vier Stellen) führt auf $A = 7$, $B = -7$, $C = -5$, $D = -2$, also

$$r(x) = \frac{7x - 7}{x^2 + 1} - \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

f) Die Linearfaktorzerlegung des Nenners ist $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x+1)(x-1)$, demnach liegen drei einfache Nullstellen vor. Ansatz:

$$\frac{3x^2 + 14x - 19}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Bilden des Hauptnenners und Gleichsetzen der Zählerpolynome an den drei Nullstellen führt auf $A = 7$, $B = -5$, $C = 1$, also

$$r(x) = \frac{7}{x-2} - \frac{5}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

**Lösung 107** Zur Lösung empfiehlt es sich, die Tabelle der Standardsubstitutionen (Skript) griffbereit zu haben.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \int \frac{1}{(1-3x)^4}\,dx &= \frac{1}{9}\frac{1}{(1-3x)^3} + C \\
\text{b)} \int \frac{9x^2 - 2}{3x^3 - 2x + 7}\,dx &= \ln|3x^3 - 2x + 7| + C \\
\text{c)} \int \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}\,dx &= \frac{1}{5}\ln|\sin(5x)| + C\,, \quad \text{für } x \neq \frac{k}{5}\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \\
\text{d)} \int \frac{x}{(x+2)(x+1)^2}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\
&= -2\ln|x+2| + 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\,, \\
&\quad \text{für } x \notin \{-2, -1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{e)} \int \frac{x^5+3x^4+3x^3+x^2}{x^3+2x^2+x}\,dx &= \int \left(x^2+x\right)\,dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C \\
\text{f)} \int \frac{x^3}{5-3x}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x-\frac{25}{27}+\frac{125}{27(5-3x)}\right)\,dx \\
&= -\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{18}x^2-\frac{25}{27}x-\frac{125}{81}\ln|5-3x|+C\,, \\
&\quad \text{für } x \neq \frac{5}{3} \\
\text{g)} \int x\cdot e^x\,dx &= x\cdot e^x - e^x + C \\
\text{h)} \int_1^e x^2\cdot\ln(x)\,dx &= \left(\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3\right)_1^e = \frac{1}{9}(2e^3+1) = 4.574... \\
\text{i)} \int x\cdot e^{-2x^2}\,dx &= -\frac{1}{4}\int e^u\,du \;=\; -\frac{1}{4}e^{-2x^2}+C
\end{aligned}
$$

**Lösung 108** Es ist

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,dt = 0$ | $n=1,2,3,...$ |
| (2) | $\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,dt = 0$ | $n=1,2,3,...$ |
| (3) | $\int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,dt = \begin{cases}\pi & \text{für } m=n\\ 0 & \text{für } m\neq n\end{cases}$ | |
| (4) | $\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\,dt = \begin{cases}\pi & \text{für } m=n\\ 0 & \text{für } m\neq n\end{cases}$ | |
| (5) | $\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cos(mt)\,dt = 0$ | $m,n=1,2,3,...$ |

Die Integrale (1) und (2) rechnet man direkt nach (Substitution $u = nt$). Für (3)-(5) benötigt man die Formeln

$$
\begin{aligned}
\cos(nt)\cos(mt) &= \frac{1}{2}\left(\cos((n-m)t)+\cos((n+m)t)\right) \\
\sin(nt)\sin(mt) &= \frac{1}{2}\left(\cos((n-m)t)-\cos((n+m)t)\right) \\
\sin(nt)\cos(mt) &= \frac{1}{2}\left(\sin((n-m)t)+\sin((n+m)t)\right)
\end{aligned}
$$

Demnach ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,dt &= \int_0^{2\pi}\left(\cos((n-m)t)+\cos((n+m)t)\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos((n-m)t)\,dt+\int_0^{2\pi}\cos((n+m)t)\,dt\right) \\
&= 0 \;\text{ für }\; m\neq n \\
\text{Für } m=n: \int_0^{2\pi}\cos^2(nt)\,dt &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos(0\cdot t)\,dt+\int_0^{2\pi}\cos(2nt)\,dt\right) = \pi
\end{aligned}
$$

Ebenso rechnet man (4) und (5) nach.

**Lösung 109**

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t = \frac{1}{2} \\
\int \frac{x\,dx}{1+x^2} &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C \\
\int_0^1 \ln(x)\,dx &= \lim_{t\downarrow 0}\,[x\cdot\ln(x)-x]_t^1 = -1 \\
\int_0^\infty \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx &= \lim_{t_1\downarrow 0}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_{t_1}^1 + \lim_{t_2\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_1^\infty = \frac{1}{e}+1-\frac{1}{e} = 1
\end{aligned}$$

Demnach sind a), c) und d) konvergent, und b) divergent. Der Grenzwert in c) lässt sich mit Hilfe der Regel von Bernoulli-l'Hospital berechnen.

**Lösung 110** a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot e^x}$ ist konvergent nach dem Majorantenkriterium, da

$$\frac{1}{xe^x} \le \frac{1}{e^x} \quad \text{für alle } x\in[1,\infty)$$

und $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = e^{-1}$.

b) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ist konvergent nach dem Majorantenkriterium, da

$$\frac{1}{e^{x^2}} \le \frac{1}{e^x} \quad \text{für alle } x\in[0,\infty)$$

und $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = e^{-1}$.

c) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ ist konvergent nach dem Majorantenkriterium, da

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \quad \text{für alle } x\in[1,\infty)$$

und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

d) $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2}\,dx$ ist divergent nach dem Minorantenkriterium, da

$$\frac{x+1}{x^2} \ge \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x\in[1,\infty)$$

und $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ist divergent.

**Lösung 111** a) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &= \lambda\cdot\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\cdot\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \lambda\cdot\lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\lambda}\cdot\left[e^{-\lambda x}\right]_0^b = -\underbrace{\left(\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda b}\right)}_{\to 0} +1 = 1
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral hat demnach den Wert 1 für beliebige Werte von $\lambda > 0$, die Funktion $f$ erfüllt die Anforderung.

b) Zu bestimmen ist der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx &= \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cdot e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x} + \int_0^b e^{-x}\,dx\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b+1}{e^b} + 1\right) = 1 - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = 1\end{aligned}$$

Die Stammfunktion wurde mit partieller Integration bestimmt, wobei $u'(x) = e^{-x}$ und $v(x) = x$ (Übergang erste zu zweite Zeile). Der Grenzwert $\lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{e^b} = 0$ (letzte Zeile) kann mit Hilfe der Regel von l'Hospital berechnet werden.

c) Die Verteilungsfunktion $F(x)$ definiert sich über das Integral

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$$