Chương

04

Xác Suất

Nội dung chính

- Các loại biến cố
- Các phép toán giữa các biến cố và ý nghĩa
- Các cách tính xác suất của một biến cố
- Công thức tính xác suất của các biến cố phức tạp

Phép thử ngẫu nhiên

- Là các thí nghiệm, quan sát mà kết quả của nó không thể dự báo trước được.
- Kí hiệu: T.
- Ta có thể liệt kê hoặc biểu diễn được tất cả các kết quả của phép thử.
- Ví dụ:

Biến cố sơ cấp – Không gian mẫu

- Các kết quả của phép thử được gọi là các biến cố sơ cấp (bcsc). Kí hiệu: w_i
- Không gian mẫu: tập hợp tất cả các biến cố sơ cấp. Kí hiệu: Ω
- Ví dụ: T : gieo một đồng xu
- Không gian mẫu là:

$$\Omega=\{S, N\}$$

Biến cố (sự kiện)

- Một biến cố (bc) liên quan đến phép thử T là một tập con của không gian mẫu Ω.

- Kí hiệu: chữ cái in hoa A, B, C,…, A_1, A_2,…

- Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A kí hiệu là: Ω_A hay tập hợp các bcsc chứa trong A.

Biến cố (sự kiện)

- Ví dụ: T: tung một cục xúc sắc
- B: bc ra số chấm chẵn thì ta có: $\Omega_B=\{2, 4, 6\}$

Biến cố (sự kiện)

➢ Một biến cố (event), kí hiệu bởi các chữ hoa A, B, C …, là một tập con của không gian mẫu Ω.

Chú ý:

➢ Mỗi bc A tương ứng với một và chỉ một tập con $\Omega_A \subset \Omega$.

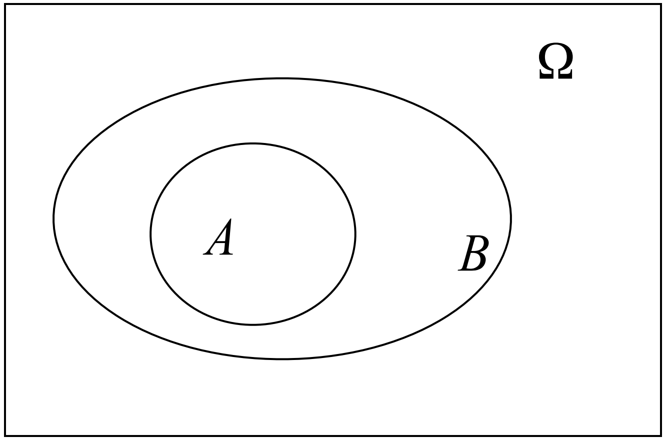
➢ Mỗi biến cố sơ cấp w cũng là một biến cố.

Biến cố đặc biệt

- Bc không thể: là bc không bao giờ xảy ra khi thực hiện T. Nó không chứa bcsc nào. Kí hiệu: ϕ
- Bc chắc chắn: là bc luôn luôn xảy ra khi thực hiện T. Nó chứa tất cả các bcsc. Kí hiệu: Ω

Kéo theo

- Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra
- Ta có: $$\Omega_A \subset \Omega_B$$



Tương đương (bằng nhau)

- Biến cố A được gọi là tương đương với biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại
- Kí hiệu: A=B

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

- Ta có:

$$\Omega_A = \Omega_B$$

Biến cố đối

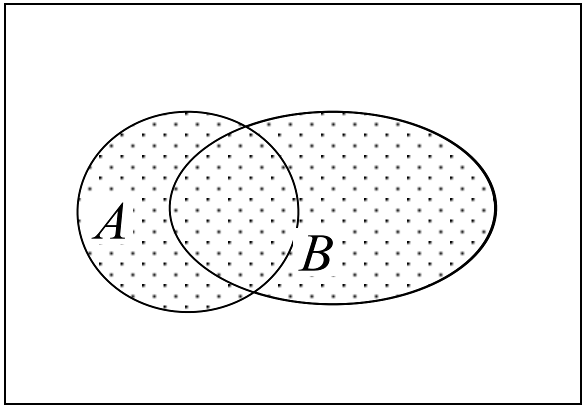
- Biến cố đối của biến cố A, kí hiệu $\overline{A}$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.
- Ta có: $$\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A$$
- Ví dụ: khi gieo một con xúc sắc
- A: bc số chấm chẵn thì $\overline{A}$ là bc số chấm lẻ

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\Omega_A = \{2,4,6\} \qquad \Omega_{\overline{A}} = \{1,3,5\} = \Omega \setminus \Omega_A$$

Tổng (hợp) hai biến cố

- Cho A, B là hai bc liên quan đến phép thử T. Khi đó, tổng (hợp) của A và B là một biến cố, kí hiệu $A \cup B$ hay $A+B$
- Bc này xảy ra khi ít nhất một trong hai bc A, B xảy ra



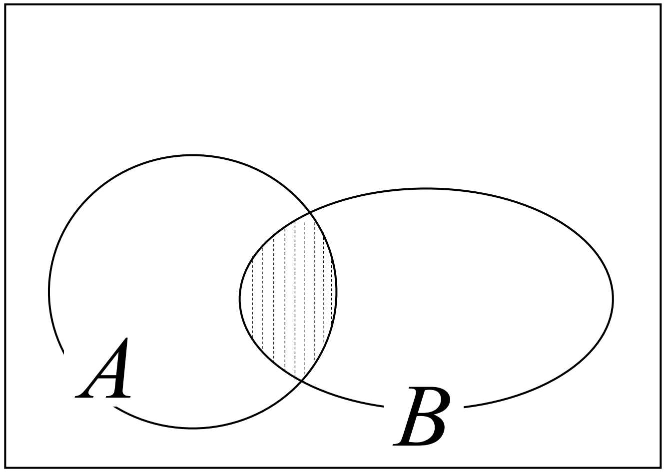
Tổng (hợp) các biến cố

- A_1, A_2,…,A_n là các bc trong phép thử T.
- Tổng (hợp) của các bc này kí hiệu:
  $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ hay $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
- Bc này xảy ra khi ít nhất một trong các bc A_1, A_2,…,A_n xảy ra
- Ta có: $\Omega_{A_1+A_2+\ldots+A_n} = \Omega_{A_1} \cup \Omega_{A_2} \cup \ldots \cup \Omega_{A_n}$

Tích (giao) hai biến cố

Cho A, B là hai bc liên quan đến phép thử T. Khi đó, tích (giao) của A và B là một biến cố, kí hiệu A∩B hay A.B

Bc này xảy ra khi cả hai bc A, B cùng xảy ra



$A \cap B$

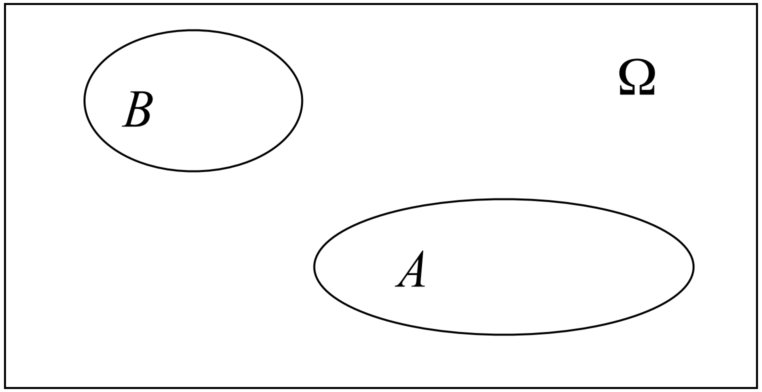
Tích (giao) các biến cố

- A_1, A_2,…,A_n là các bc trong phép thử T.
- Tích (giao) của các bc này kí hiệu: $A_1A_2\ldots A_n$ hay $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
- Bc này xảy ra khi tất cả các bc A_1, A_2,…,A_n cùng xảy ra
- Ta có: $\Omega_{A_1A_2\ldots A_n} = \Omega_{A_1} \cap \Omega_{A_2} \cap \ldots \cap \Omega_{A_n}$

Hai biến cố xung khắc

➢ Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nếu:

$$AB = \varnothing$$



A và B xung khắc

Một số tính chất

i) $A.A = A \qquad A.\Omega = A \qquad A.\varnothing = \varnothing$

$A + A = A \qquad A + \Omega = \Omega \qquad A + \varnothing = A$

ii) $A + B = B + A \qquad A.B = B.A$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$

v) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$

vi) $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B} \qquad \overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

vii) $\overline{A + B + C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \qquad \overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Ví dụ

- Có 3 xạ thủ bắn vào mục tiêu
- A, B, C là bc xạ thủ 1,2,3 bắn trúng

Biểu diễn các biến cố sau theo A, B, C và các phép toán.

a) Có đúng một xạ thủ bắn trúng

b) Có nhiều nhất một xạ thủ bắn trúng

c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng

Ví dụ

Kiểm tra chất lượng 4 sản phẩm. Gọi A_k là biến cố sản phẩm thứ k tốt. Biểu diễn các biến cố sau theo A_k.

- A là bc cả 4 sản phẩm tốt
- B là bc có 3 sản phẩm tốt
- C là biến cố có ít nhất 2 sản phẩm xấu
- D là biến cố có ít nhất 1 sản phẩm tốt
- E là biến cố có tối đa 1 sản phẩm xấu

Ví dụ

Có 2 sinh viên đi thi. Gọi A là biến cố sinh viên 1 đậu; B là biến cố sinh viên 2 đậu. Biểu diễn các biến cố sau qua A và B.

- C =“cả 2 sv đều thi đậu”;
- D=“không sv nào đậu”
- E=“có ít nhất một người đậu”;
- F=“chỉ sv 1 đậu”
- G=“sinh viên 1 thi đậu”;
- H=“chỉ có một sv đậu”
- I=“có nhiều nhất 1 sv đậu”;
- J=“có sv thi đậu”

XÁC SUẤT CỦA BC

- Con số đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố trong phép thử gọi là xác suất của biến cố đó.

- Kí hiệu xác suất của bc A: P(A)

- Xác suất không có đơn vị

Các cách tính xác suất

- Theo quan điểm cá nhân
- Theo phương pháp tần suất
- Theo phương pháp cổ điển
- Các phương pháp khác …

Quan điểm cá nhân

- Dễ dàng nhất, độ tin cậy ít nhất
- Ví dụ: Xác suất của
  - Một ngày nào đó bạn sẽ chết?
  - Bạn có thể bơi vòng quanh trái đất trong vòng 30h?
  - Bạn trúng vé số?
  - Bạn được điểm A môn này?

Quan điểm tần suất

➢ Thực hành 3 bước:

1. Thực hiện phép thử với số lần n, rất lớn
2. Đếm số lần biến cố A xuất hiện, giả sử n(A)
3. Xác suất của bc A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Ví dụ

- Nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi gieo đồng xu cân đối, đồng chất.

Người tung	Số lần tung	Số lần sấp	Tần suất
Buyffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

- Tần suất dần tới 0.5

Quan điểm tần suất

- Vậy: $$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Quan điểm cổ điển

- Được sử dụng nhiều nhất (trên lý thuyết tính toán)
- Nếu các bcsc là đồng khả năng, và số bcsc là hữu hạn thì:

$$P(A) = \frac{\text{số biến cố sơ cấp thuận lợi A}}{\text{số biến cố sơ cấp có thể xảy ra}} = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Ví dụ

1. Một bộ bài tây có 52 lá. Rút ngẫu nhiên ra 1 lá.

Gọi:

A: rút được lá 2,3 hoặc 7

B: rút được lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn.

Tính xác suất:

A) Rút được lá số 2, 3 hoặc 7.

B) Rút được lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn

Ví dụ

1. Một bộ bài tây có 52 lá. Rút ngẫu nhiên ra 1 lá.

Gọi:

A: rút được lá 2,3 hoặc 7

B: rút được lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn.

Tính xác suất:

A) Rút được lá số 2, 3 hoặc 7.

B) Rút được lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn

C) Rút được lá số 2, 3 hoặc 7 hoặc lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn

D) Tính xác suất P(A.B)

Tính chất xác suất

a. $0 \le P(A) \le 1$ với mọi biến cố A.

b. $P(\Omega) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0$

c. Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$.

d. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Một vài công thức tính Xác Suất

- Công thức cộng
- Công thức xác suất điều kiện
- Công thức nhân xác suất
- Công thức xác suất đầy đủ

Công thức cộng

- Cho hai biến cố A, B. Ta có:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-\mathrm{P}(A.B)$$

- Nếu A, B xung khắc:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- Hệ quả:

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

Ví dụ 1

Xác suất để xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0,1; trúng điểm 9 là 0,2; trúng điểm 8 là 0,25 và ít hơn 8 điểm là 0,45. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

- A1: “trúng điểm 10” A2: “trúng điểm 9”
- A: “ít nhất 9 điểm”
- Ta có: A=A1+A2 và A1, A2 XUNG KHẮC
- Vậy:

$$P(A) = P(A_1 + A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

Ví dụ 2

- Sinh viên A sắp tốt nghiệp. Sau khi tham gia hội chợ việc làm tại trường, được 2 công ty phỏng vấn anh ta đánh giá như sau:
- Xs anh ta được công ty A chọn là 0,8.
- Xs anh ta được công ty B chọn là 0,6.
- Xs anh ta được cả 2 công ty chọn là 0,5.
- Tính xác suất anh ta được chọn bởi ít nhất 1 công ty?

Công thức cộng mở rộng

➢ Cho 3 biến cố:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

➢ Cho 4 biến cố:

$$P(A_1+A_2+A_3+A_4)=$$
$$+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$$
$$-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_1A_4)-P(A_2A_3)-P(A_2A_4)-P(A_3A_4)$$
$$+P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+P(A_1A_3A_4)+P(A_2A_3A_4)$$
$$-P(A_1A_2A_3A_4)$$

Công thức cộng tổng quát

- Nếu các biến cố A1, A2, …, An liên quan đến phép thử T thì:

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i<j} P\left(A_i . A_j\right) + $$
$$+ \sum_{i<j<k} P\left(A_i . A_j . A_k\right) + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} P\left(A_1 . A_2 \ldots A_n\right)$$

- Bộ chẵn: –
- Bộ lẻ: +